

INSTYTUT METROLOGII ELEKTRYCZNEJ
POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ

Komunikat nr 141

Rozprawa doktorska

METODA WYZNACZANIA WARTOŚCI WZORCÓW
INDUKCYJNOŚCI W ODNIESIENIU
DO WZORCÓW POJEMNOŚCI

Andrzej Muciek

Promotor:

Doc.dr inż.Andrzej Zborucki

Słowa kluczowe: pomiary indukcyjności własnej,
wzorzec indukcyjności własnej,
mostki transformatorowe

Mgr inż. Andrzej Muciek
Instytut Metrologii Elektrycznej
Politechniki Wrocławskiej
50-307 Wrocław, ul. B. Prusa 53/55

Praca obejmuje analizę prostych układów transformatorowych do porównań L-C. Przedstawiony został i zbadany układ pozwalający na poprawę dokładności pomiaru indukcyjności własnej wzorców L w dolnym paśmie częstotliwości akustycznych. Zaproponowano metodę analitycznego wyznaczenia charakterystyki częstotliwościowej wzorców L w oparciu o wyniki pomiaru indukcyjności w określonych punktach częstotliwości.

Najdokładniejsze pomiary różnych wielkości fizycznych rozwijane były przez wiele lat niezależnie od siebie. Istniały sporadyczne i luźne związki między nimi. Stan taki nie pozwalał na szybki rozwój dokładności pomiarów. Pojawiły się tendencje łączenia pokrewnych wielkości w system składający się z wzorców i dokładnych metod porównań między tymi wielkościami. W systemie takim rozwój dokładności pomiaru jednej wielkości bezpośrednio implikuje poprawę dokładności innych z nią związanych. Ostatnie opracowania najdokładniejszych pomiarów rezystancji, indukcyjności i pojemności w dolnym paśmie częstotliwości akustycznych wskazują, że dąży się do połączenia pomiarów tych wielkości w taki system. Opracowanie przez Lamparda liczalnego wzorca pojemności spowodowało, że pojemność stała się zdecydowanie najdokładniejszym elementem z wzorców R, L, C. W 1958 r. Thomson opublikował układ dokładnej komparacji R-C, który pozwolił na poprawę dokładności pomiaru rezystancji przy prądzie stałym i zmiennym. W 1960 r. Hillhouse i Kline opublikowali pierwszy transformatorowy układ do porównań wzorców indukcyjności własnej /komparator L-L/. Największym ograniczeniem dokładności pomiaru indukcyjności własnej stał się problem nadania wartości przynajmniej jednemu wzorcowi indukcyjności własnej.

Zagadnienie dokładnego wyznaczenia wartości wzorców indukcyjności własnej jest przedmiotem niniejszej pracy. Celem pracy jest udokumentowanie następującej tezy:

Można poprawić dokładność pomiaru indukcyjności własnej w dolnym paśmie częstotliwości akustycznych przez opracowanie metody wyznaczania wartości wyróżnionego wzorca indukcyjności z dokładnością rzędu $2 \cdot 10^{-5}$.

S p i s t r e ś c i

str.

1. Wstęp	2
1.1. Indukcyjność własna. Podstawowe pojęcia . .	2
1.2. System pomiarów indukcyjności własnej . . .	3
2. Wzorce indukcyjności własnej	11
2.1. Rodzaje wzorców indukcyjności własnej . . .	11
2.2. Stabilność wzorców indukcyjności własnej . .	12
2.3. Zachowanie się wzorców indukcyjności włas- nej przy zmianie warunków eksploatacji . .	14
3. Wzorce indukcyjności własnej w układach pomiarowych	24
3.1. Układy do dokładnych pomiarów indukcyj- ności własnej	24
3.2. Wpływ przewodów łączących na dokładność pomiaru indukcyjności własnej	27
3.3. Jednoznaczność pomiaru indukcyjności w różnych układach pomiarowych. Definicja trzyzaciskowego wzorca indukcyjności . . .	29
4. Metody wyznaczania wartości wzorców indukcyj- ności własnej	33
4.1. Metody wyznaczania zmian indukcyjności z częstotliwością	33
4.2. Wyznaczanie wartości indukcyjności w sposób absolutny	37
4.3. Wyznaczanie wartości indukcyjności przez porównanie z wzorcami rezystancji	39
4.4. Wyznaczanie wartości indukcyjności przez porównanie z wzorcami pojemności	42
5. Analiza transformatorowych układów do porównań indukcyjności z pojemnością /L-C/	48

5.1.	Ogólna charakterystyka i zasady konstrukcji transformatorowych mostków do porównań L-C . . .	48
5.2.	Konstrukcja najważniejszych typów mostków transformatorowych do porównań L-C	56
a.	Wyznaczenie wartości indukcyjności w szeregowym układzie zastępczym metodą bezpośrednią	57
b.	Wyznaczanie wartości indukcyjności w szeregowym układzie zastępczym metodą pośrednią	62
5.3.	Wybór optymalnych wariantów mostków transformatorowych do porównań L-C	64
5.4.	Analiza dokładności porównania L-C w wybranych wariantach mostków	70
a.	Wpływ parametrów resztkowych transformatora stosunkowego i doprowadzeń na dokładność porównania L-C	74
b.	Wpływ parametrów resztkowych elementów R, L, C na dokładności komparacji L-C	87
c.	Wpływ pojemności pasożytniczych na dokładność komparacji L-C	89
5.5.	Błąd nieczułości i wymagane parametry osprzętu pomocniczego	92
5.6.	Wyniki badań transformatorowych układów do porównań L-C	97
a.	Badanie poprawności analizy błędów . . .	100
b.	Badanie wpływu zniekształceń prądu na dokładność wyznaczenia wartości wzorców indukcyjności	107
c.	Sprawdzenie poprawności pracy układu komparacji L-C	111
6.	Wyznaczenie charakterystyki częstotliwościowej wzorców w oparciu o wyniki pomiarów	118
6.1.	Matematyczne podstawy wyznaczania parametrów wzorca indukcyjności	119
6.2.	Numeryczna metoda wyznaczenia parametrów wzorca indukcyjności	122

6.3. Wyznaczenie pierwszego przybliżenia	
parametrów wzorca indukcyjności	127
6.4. Wyniki obliczeń	131
7. Podsumowanie	133
Literatura	137
Dodatek	

1. WSTĘP

1.1. Indukcyjność własna. Podstawowe pojęcia.

Indukcyjnością własną obwodu elektrycznego nazywamy jego zdolność gromadzenia energii w polu magnetycznym. Wartość indukcyjności własnej definiowana jest wzorem [45]

$$L = \frac{\Psi}{i} \quad /1.1.1/$$

gdzie:

Ψ - strumień skojarzony obwodu elektrycznego

i - prąd elektryczny wywołujący ten strumień

Strumień skojarzony Ψ zależy od rozptywu prądów w przewodniku, stąd wartość indukcyjności może być ściśle zdefiniowana jedynie dla określonego rozptywu prądów. Strumień skojarzony Ψ , a więc i indukcyjność L , jest funkcją konfiguracji geometrycznej obwodu i współczynnika przenikalności magnetycznej μ . Rzeczywisty element realizujący indukcyjność będziemy nazywali cewką indukcyjną. Cewkę indukcyjną będziemy nazywali idealną jeśli nie zachodzi w niej strata energii elektrycznej. W idealnej cewce, przez którą płynie zmienny prąd elektryczny $i(t)$ powstaje siła elektromotoryczna samoindukcji [45]

$$E = - \frac{d\Psi}{dt} = - L \frac{di(t)}{dt} \quad /1.1.2/$$

W przypadku, gdy prąd ma przebieg sinusoidalny $i = I_m \cos(\omega t + \varphi)$ napięcie indukowane w idealnej cewce określone jest wzorem [2]

$$E = - L \frac{d(I_m \cos(\omega t + \varphi))}{dt} = U_m \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \quad /1.1.3/$$

gdzie: $U_m = \omega L I_m$

a w zapisie symbolicznym [2]

$$E = j\omega L i \quad /1.1.4/$$

Wynika stąd, że impedancja idealnej cewki określona jest wzorem

$$Z = \frac{E}{i} = j\omega L \quad /1.1.5/$$

Rzeczywista cewka wykazuje straty energii elektrycznej głównie na ciepło. Dlatego, napięcie sinusoidalne wyprzedza prąd o kąt mniejszy niż $\frac{\pi}{2}$. Impedancja takiej cewki określona jest wzorem [2]

$$Z = R + j\omega L \quad /1.1.6/$$

gdzie R - zastępcza rezystancja charakteryzująca straty energii elektrycznej w obwodzie cewki rzeczywistej.

Pomiary impedancji cewki indukcyjnej z wydzieleniem części rzeczywistej i urojonej pozwalają na wyznaczenie indukcyjności własnej L . Pomiar taki realizowany jest w układach mostkowych.

1.2. System pomiarów indukcyjności własnej

W systemie najdokładniejszych pomiarów różnych wielkości można wyróżnić:

- sieć wzorców pokrywającą odpowiednio gęsto zakres mierzonej wielkości,
- dokładne metody porównań wzorców o różnych wartościach nominalnych.

Pomiar o największej dokładności odbywa się przez porównanie mierzonej wielkości z wzorcem o najbliższej wartości nominalnej. Błąd pomiaru zależy od dokładności wzorca i straty dokładności w układzie porównującym. Wartości poszczególnych wzorców wyznaczane są przez porównanie z pewnym wyróżnionym wzorcem x_0 , którego wartość wyznaczana jest ze zjawisk fizycznych, gdy jest to możliwe z odpowiednio dużą dokładnością, albo przez porównanie z wzorcami innego typu. Porównanie wzorca o wartości x_i z wzorcem x_0 odbywa się bezpośrednio, gdy stosunek ich wartości nie przekracza pewnej liczby N , przy której metoda porównania daje odpowiednio dużą dokładność. Warunek ten zapiszemy w postaci $\frac{1}{N} \leq \frac{x_0}{x_i} \leq N$. Na ogół $N = 10$. Bardziej szczegółowo zagadnienie to rozpatrzono w dodatku D.1. Dokładność wzorca o wartości nominalnej x_i w tym systemie można przedstawić wzorem /D.1.1/

$$\delta_{x_i} = \sum_{j=1}^i \delta_{p_j} + \delta_{x_0} \quad /1.2.1/$$

gdzie: δ_{x_0} - dokładność wyróżnionego wzorca x_0 ,
 δ_{p_j} - dokładność porównania wzorca x_j z wzorcem x_{j+1} ,
 i - ilość kolejnych komparacji

Założyliśmy, że pomiar wielkości o wartości x odbywa się przez porównanie z wzorcem o najbliższej wartości. Błąd po-

miaru wartości x określony jest wzorem /D.1/

$$\delta_x = \frac{x_i}{x} \delta_{x_i} + \frac{\Delta x}{x} \delta_{\Delta x} \quad /1.2.2/$$

gdzie $\Delta x = x - x_i$ spełnia warunek $|\Delta x| \ll x, x_i$

Po uwzględnieniu obu wzorów otrzymujemy sumaryczne wyrażenie na dokładność pomiaru wielkości o wartości x .

$$\delta_x \approx \delta_{x_0} + \sum_{j=1}^i \delta_{p_j} + \frac{\Delta x}{x} \delta_{\Delta x} \quad /1.2.3/$$

We wzorze tym można wyróżnić trzy człony

δ_{x_0} - dokładność wyznaczenia wartości wyróżnionego wzorca x_0 ,

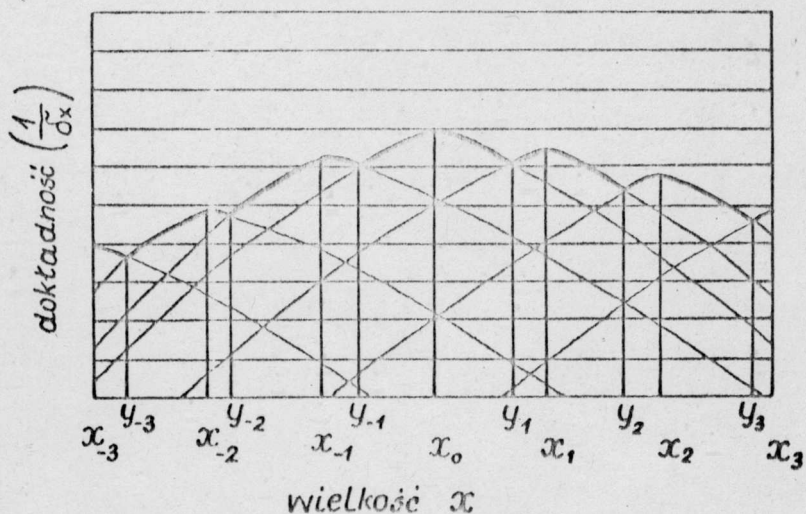
$\sum_{j=1}^i \delta_{p_j}$ - strata dokładności przy wyznaczaniu i -tego wzorca przez porównanie z wzorcem x_0 ,

$\frac{\Delta x}{x} \delta_{\Delta x}$ - strata dokładności przy porównaniu wielkości x z wzorcem x_i , czyli dokładność pomiaru Δx odniesioną do x .

Graficznie zagadnienie to przedstawiono na rysunku 1.2.1.

Na rysunku tym krzywe wychodzące z punktu x_i przedstawiają dokładności pomiaru wielkości x przy porównywaniu z wzorcem x_i .

Punkty y_i ($i = \pm 1, \pm 2, \dots$) są to punkty najgorszej dokładności w przedziale $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ dla $i = 1, 2, \dots$ oraz w przedziale $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$ dla $i = -1, -2, \dots$. W punktach tych następuje wymiana wzorca. Krzywa narysowana grubą linią określa największą możliwą dokładność pomiaru. Od wahań tej krzywej zależy niezbędna gęstość sieci wzorców. Jeśli różnica $\delta_{y_i} - \delta_{x_i}$ przyjmuje zbyt duże wartości oznacza to, że sieć wzorców jest zbyt rzadka.



Rys.1.2.1. Zależność dokładności pomiaru od wartości wielkości mierzonej x

Zgęszczenie sieci wzorców można uzyskać przez stosowanie kombinacji ich połączeń lub zwiększenie ich ilości. W przypadku impedancji przy prądzie zmiennym odpowiednio dużą dokładność daje tylko równoległe połączenie wzorców. Stosowane jest ono w przypadku wzorców pojemności. Wzorce indukcyjności własnej nie nadają się do połączeń i w układach pomiarowych stosuje się je samodzielnie. Najczęściej stosowane są szeregi:

$$a/ 10^k \quad ; \quad b/ 1, 2, 5 \times 10^k \quad ; \quad c/ 1, 2, 3, 5 \times 10^k$$

Omówiony wyżej system pomiarów jest w przybliżeniu stosowany przy pomiarach pojemności i rezystancji. Opracowanie precyzyjnych komparatorów indukcyjności stworzyło podstawę do wprowadzenia takiego systemu w pomiarach indukcyjności własnej. Przy omawianiu systemu pomiarów jednej wielkości pominięto wiele różnych czynników. Pozwala on jednak na wyodrębnienie pod-

stawowych elementów, które decydują o dokładności pomiaru. Odstępstwa od takiego systemu są często specyficzne dla danej wielkości. Zajmiemy się teraz dokładniej poszczególnymi członami wzoru /1.2.3/ dla systemu pomiarów indukcyjności własnej w dolnym paśmie częstotliwości akustycznych /0 - kilku kHz/. Rozpocznijmy od omawiania drugiego członu wzoru /1.2.3/ na dokładność porównania wzorców indukcyjności.

W latach 60-tych pojawiły się pierwsze układy komparatorów indukcyjności zbudowane w oparciu o dzielniki indukcyjne [21]. Zakres porównań wzorców indukcyjności wynosi $1 \mu\text{H} - 10 \text{ H}$. Dokładność, przy stosunku porównania od 1:1 do 1:10 zależy od wartości indukcyjności. W optymalnym zakresie pomiaru indukcyjności własnej (kilka mH - 1 H) przy częstotliwościach od 100 Hz do kilku kHz osiągane są dokładności od $2 \cdot 10^{-5}$ [21] do $2 \cdot 10^{-6}$ [1]. Osiągnięcie tak dużych dokładności przy małych częstotliwościach jest możliwe po wyznaczeniu parametrów resztkowych układu /głównie indukcyjności/ i uwzględnieniu ich w charakterze poprawek.

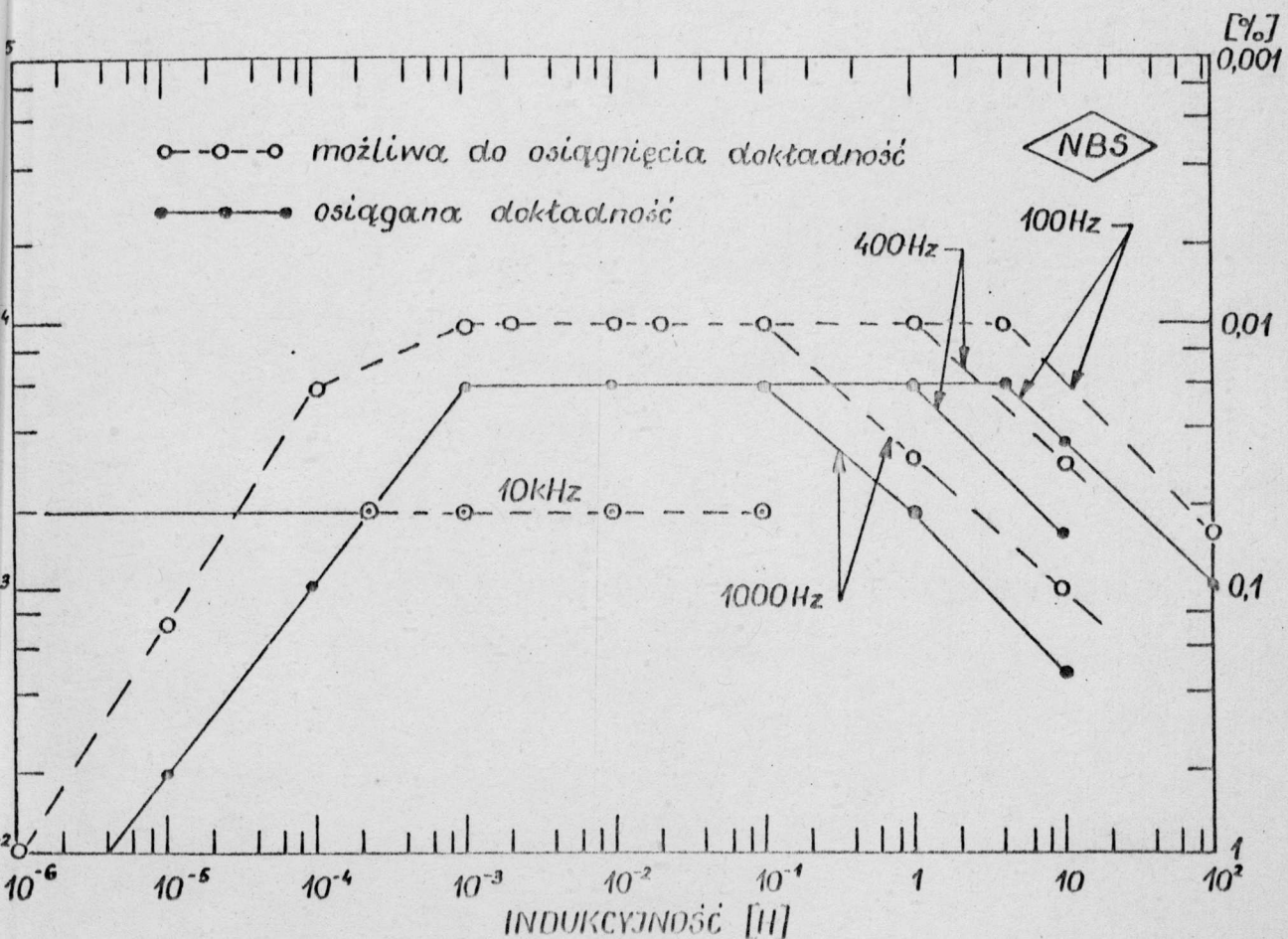
Podsumowując rozważania możemy powiedzieć, że druga składowa wzoru /1.2.3/ równa $\sum_{j=1}^i \delta_{p_j}$, określająca dokładność wyznaczenia i-tego wzorca przez kolejne porównania sąsiednich wzorców aż do wzorca x_0 , może być przy dzisiejszym stanie techniki utrzymana na poziomie kilka $\times 10^{-5}$ ($\sum_{j=1}^i \delta_{p_j} < \text{kilka} \times 10^{-5}$).

Rozpatrzmy obecnie trzeci człon wzoru /1.2.3/ $\frac{\Delta x}{x} \delta_{\Delta x}$, który określa dokładność pomiaru wielkości x metodą porównania z wzorcem x_1 . W układach komparatorów indukcyjności własnej zbudowanych w oparciu o dzielniki indukcyjne używa się wielodekadowych dzielników /6-7 dekad/. Możemy je stosować do wyzna-

czania różnicy Δx między wielkością mierzoną x a wzorcem x_i ($\Delta x = x - x_i$). Błąd wyznaczenia wielkości $\Delta x = x - x_i$ jest rzędu 10^{-5} . Ponieważ $\frac{\Delta x}{x} < 1$ możemy założyć, że trzeci człon może być sprowadzony do wartości pomijalnie małej.

We wzorze na dokładność pomiaru wartości x /1.2.3/ nie określiliśmy jeszcze dokładności wyznaczenia wartości wyróżnionego wzorca indukcyjności δ_{x_0} . Wartość indukcyjności x_0 wyróżnionego wzorca może być obliczona z wymiarów geometrycznych lub wyznaczona przez dokładne porównanie z wzorcami innych wielkości mających odpowiednio dużą dokładność. W drugim przypadku muszą być opracowane wystarczająco dokładne metody przeniesienia wartości jednego typu wzorców na inne.

W przypadku wzorców indukcyjności własnej budowane były tak zwane liczelne wzorce indukcyjności, których wartości obliczono z bardzo dużą dokładnością /na poziomie kilka $\times 10^{-5}$ - kilka $\times 10^{-6}$ / [28, 41]. Tak dużą dokładność wyznaczenia wartości można osiągnąć tylko w specjalnej konstrukcji. Własności metrologiczne takiego wzorca sprawiają, że dokładność ta nie może być w pełni wykorzystana. Zagadnienie to będzie rozpatrywane dokładniej w dalszej części pracy. Trudności pomiarowe są tak duże, że nawet te ośrodki, które posiadają wzorce liczelne nie korzystają z nich przy wzorcowaniu najdokładniejszych wzorców produkowanych seryjnie [41]. Wyznaczanie wartości wzorców indukcyjności odbywa się na ogół w mostku czteroramiennym typu Maxwella-Wiena lub Owena [30, 41], w którym wartość indukcyjności odniesiona jest do wartości pojemności. Graniczną dokładność jaką można osiągnąć tą metodą przedstawiono na rysunku 1.2.2. Wynosi ona około $1 \cdot 10^{-4}$ w optymalnym zakresie pomiaru indukcyjności i to przy znacznych trudnościach polega-



Rys.1.2.2. Dokładność wzorcowania wzorców indukcyjności własnej w NBS /National Bureau of Standards, USA/.

jących na wyznaczaniu parametrów resztkowych mostka. W literaturze brak opisu dokładniejszych metod służących do wyznaczania wartości wzorców indukcyjności własnej w odniesieniu do innych typów wzorców.

Z przeprowadzonych rozważań wynika, że błąd pomiaru indukcyjności własnej jest sumą trzech składowych wzoru /1.2.3/. Przy dzisiejszym stanie techniki wartości składowych poszcze-

gólnych błędów mogą być utrzymane na poziomach:

a. dokładność wzorcowania wzorca x_i w odniesieniu

$$\text{do } x_0 \quad \sum_{j=1}^i \delta_{p_j} < 2 \cdot 10^{-5};$$

b. strata dokładności przy porównywaniu wielkości mierzonej x z wzorcem x_i

$$\frac{\Delta x}{x} \quad \delta_{\Delta x} < 1 \cdot 10^{-5}$$

c. dokładność wyznaczenia wartości wyróżnionego wzorca x_0 /rys.1.2.2/

$$\delta_{x_0} = (1+2) \cdot 10^{-4}$$

Istotnym ograniczeniem dokładności pomiaru indukcyjności jest więc dokładność wyznaczenia wartości wyróżnionego wzorca x_0 .
Stąd TEŻA PRACY.

Można poprawić dokładność pomiaru indukcyjności przez opracowanie metody wyznaczania wartości wyróżnionego wzorca indukcyjności z dokładnością rzędu $2 \cdot 10^{-5}$.

Poprawę dokładności można jednak osiągnąć pod warunkiem, że parametry produkowanych wzorców indukcyjności pozwalają na utrzymanie ich wartości w określonym czasie i odtworzenie jej jednoznacznie w stosowanych układach pomiarowych.

2. WZORCE INDUKCYJNOŚCI WŁASNEJ

2.1. Rodzaje wzorców indukcyjności własnej

Wśród najdokładniejszych wzorców indukcyjności własnej rozróżniamy dwa typy różniące się znacznie konstrukcją. Są to: wzorce z „otwartym polem magnetycznym” nawinięte na karkas cylindryczny lub zbliżony do cylindrycznego i wzorce z „zamkniętym polem magnetycznym” nawinięte na karkas o kształcie toroidalnym. Oba typy wzorców różnią się istotnie niektórymi parametrami, stąd też zachodzi potrzeba rozpatrywania ich oddzielnie. Z grupy pierwszej /wzorców z otwartym polem/ najlepsze parametry mają wzorce produkowane przez firmę SULLIVAN. Zestawienie danych produkowanych przez tę firmę wzorców podano w tabeli 6.1 /D.6/. Z drugiej grupy wzorców /wzorce toroidalne/ najlepsze parametry mają wzorce firmy General Radio. Zestawienie danych tych wzorców podano w tabeli 6.2 /D.6/.

Nie wszystkie parametry wzorców przedstawione w tabelach można bezpośrednio porównywać. Zawierają one często różne informacje pod tą samą nazwą. Na przykład wzorce firmy General Radio /tabela 6.2/ mają podaną dokładność wzorcowania od 0,5 do 0,1%, zależnie od wartości wzorca. Parametr ten określa odstrojenie wartości wzorca od wartości nominalnej z uwzględnieniem błędu pomiaru ich wartości. Natomiast wartość wzorców wyznaczana jest z dokładnością 0,02%.

W przypadku wzorców firmy Sullivan /tabela 6.1/ podawane są dwa parametry: dokładność wzorcowania 0,01%, która odno-

si się do dokładności pomiaru wzorców; oraz odstrojenie od wartości nominalnej równe 0,01%, które należy interpretować jako różnicę między wynikiem pomiaru a wartością nominalną. Rozpatrzmy przydatności obu typów wzorców na wzorce odniesienia w systemie pomiarów indukcyjności własnej.

Wyróżnimy następujące wymagania stawiane wzorcom indukcyjności:

- możliwie maksymalna stabilność
- minimalna wrażliwość na zmiany warunków eksploatacji
- możliwie największa wierność i łatwość odtworzenia ich wartości w układach pomiarowych.

2.2. Stabilność wzorców indukcyjności własnej

Przez stabilność wzorca będziemy rozumieli stałość jego wartości w stałych /możliwych do ustalenia/ warunkach pomiaru. Wartość indukcyjności własnej jest funkcją kształtu geometrycznego obwodu pomnożoną przez wartość współczynnika względnej przenikalności magnetycznej μ . Stabilność względna wzorca indukcyjności zależy więc od sumy stabilności obu tych czynników. Nie ma materiałów o $\mu \gg 1$ i odpowiednio dużej stabilności, które mogłyby być użyte do budowy bardzo dokładnych wzorców indukcyjności. Wzorce bardzo dokładne nawijane są więc na „rdzeniach powietrznych”. Uzyskuje się wtedy dużą stabilność kosztem małej dobroci, co bardzo utrudnia pomiary.

Innym ważnym problemem jest oddziaływanie otoczenia na indukcyjność wzorca. Można tu wyróżnić wpływ zewnętrznych

pól magnetycznych oraz oddziaływanie zewnętrznych materiałów, głównie ferromagnetycznych, na strumień magnetyczny wzorca. Wpływy te dotyczą głównie wzorców z otwartym polem magnetycznym /wzorce firmy Sullivan/. Są one pomijalnie małe we wzorcach toroidalnych /wzorce firmy General Radio/. Drugą ważną zaletą wzorców toroidalnych jest możliwość ich ekranowania. Zabezpiecza to wzorzec przed wpływem pól elektrostacyjnych /pojemności do otoczenia/. Dzięki ekranowaniu wzorce te można umieszczać w termostacie. Pozwala to na znacznie dokładniejsze ustalenie temperatury pracy wzorców toroidalnych niż selenoidalnych. Ekran pozwala również na definiowanie wzorców indukcyjności jako wzorce trzyczaciskowe. Wydaje się, że wzorce toroidalne wypierają aktualnie wzorce selenoidalne w precyzyjnych pomiarach mimo tego, że niektóre ich parametry są gorsze.

Stabilność wzorców firmy Sullivan podawana jest jako lepsza niż 0,01% w normalnych warunkach eksploatacji [13]. Brak bliższych danych dotyczących stabilności długoterminowej tych wzorców. Można wnioskować na podstawie wyników pomiarów [13] , że jest ona nie gorsza niż $5 \cdot 10^{-5}$ /rok.

Wzorce firmy General Radio mają stabilność lepszą niż 10^{-4} /rok i w ciągu 11 lat wykazały zmiany na poziomie $1 \cdot 10^{-4}$ [52] . Niektóre wyniki badań dotyczące stabilności tych wzorców przeprowadzone w N.B.S. podano w tabeli 2.1.1.

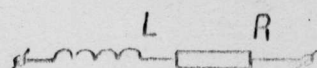
Z przytoczonych w tabeli danych wynika, że stabilność tych wzorców jest na poziomie nie gorszym niż kilka $\times 10^{-5}$ /rok. Brak danych dotyczących stabilności krótkoterminowej. Można się spodziewać, że jest ona lepsza niż długoterminowa.

Tabela 2.1.1. Wyniki badań stabilności wzorców
firmy General Radio /badania
wykonano w N.B.S./

Wartość nominalna	Data	Wartość aktualna indukcyjności	Dokładność pomiaru	Częstotliwość
1 H	styczeń 1960	1.00001 H	0,03 %	100 Hz
	listopad 1963	1.00000 H	0,02 %	"-
	lipiec 1969	1.00003 H	0,02 %	"-
100 mH	listopad 1963	99.997 mH	0,02 %	100 Hz
	listopad 1966	99.984 mH	0,02 %	"-
	lipiec 1971	99.983 mH	0,02 %	"-

2.3. Zachowanie się wzorców indukcyjności przy zmianie warunków eksploatacji

Dla ustalonej pulsacji ω impedancję rzeczywistej cewki indukcyjnej określamy wzorem /1.1.6/ $Z = R + j\omega L$. Sposób zapisu wynika ze stosowania schematu zastępczego cewki przedstawionego na rysunku 2.3.1.



Rys.2.3.1. Szeregowy schemat zastępczy cewki indukcyjnej

W zależności od warunków eksploatacji wartości R , L będą ulegały zmianie. Rozpatrzmy kolejno te zagadnienia.

Wartość indukcyjności wzorca L zależy od szeregu czynników /temperatury, wilgotności, potencjałów, elektrod, częstotliwości, .../. Istotne są tylko te czynniki, których wpływ jest większy niż stabilność wzorca w założonym okresie eksploatacji. Na wartość indukcyjności L wzorców indukcyjności własnej istotny wpływ mają dwa czynniki: temperatura t i pulsacja /częstotliwość/ ω , co wygodnie do dalszej analizy zapisać wzorem

$$L = L(t, \omega) \quad /2.3.1/$$

Dla wzorców o małej wartości nominalnej /poniżej 10 mH/ istotny jest również wpływ indukcyjności przewodów łączących. Dla zapewnienia dużych dokładności pomiaru niezbędna jest znajomość funkcji /2.3.1/. Wygodnie jest zapisać ją w postaci

$$L(t, \omega) = L(t_0, \omega_0) + \Delta L(\Delta t, \Delta \omega) \quad /2.3.2/$$

gdzie (t_0, ω_0) jest punktem wyznaczenia wartości indukcyjności,

$$\text{a } \Delta t = t - t_0, \quad \Delta \omega = \omega - \omega_0.$$

Natomiast funkcję zmian ΔL rozpiszemy w szereg Taylora

$$\begin{aligned} \Delta L(\Delta t, \Delta \omega) = & L_t \Delta t + L_\omega \Delta \omega + \\ & + \frac{1}{2!} \left[L_{t^2} \Delta t^2 + 2L_{t\omega} \Delta t \Delta \omega + L_{\omega^2} \Delta \omega^2 \right] + \\ & + \frac{1}{3!} \left[L_{t^3} \Delta t^3 + 3L_{t^2\omega} \Delta t^2 \Delta \omega + 3L_{t\omega^2} \Delta t \Delta \omega^2 + \right. \\ & \left. + L_{\omega^3} \Delta \omega^3 \right] + \dots \end{aligned} \quad /2.3.3/$$

gdzie

$$L_{t^k \omega^l} = \frac{\partial^{k+l} (L(\omega, t))}{\partial t^k \partial \omega^l}$$

W zakresie zmian temperatury $\pm$ kilka deg można przyjąć z wystarczającą dokładnością, że zmiana indukcyjności jest funkcją liniową zmian temperatury. We wzorze /2.3.3/ można zatem pominąć pochodne wyższego rzędu względem temperatury oraz pochodne mieszane. Pierwsze pochodne po temperaturze, czyli współczynniki temperaturowe omawianych wzorców wynoszą:

dla wzorców firmy Sullivan - $5 \cdot 10^{-6}/\text{deg}$

dla wzorców firmy General Radio - $3 \cdot 10^{-5}/\text{deg}$

Wpływ częstotliwości na wartość indukcyjności jest znacznie bardziej złożony. Po uwzględnieniu omówionych uproszczeń funkcję /2.3.3/ możemy zapisać w postaci

$$\Delta L(\Delta t, \Delta \omega) = \alpha \Delta t + \Delta L_{\omega}(t_0, \omega) = \alpha \Delta t + \sum_{k=1}^n a_k \Delta \omega^k \quad /2.3.4/$$

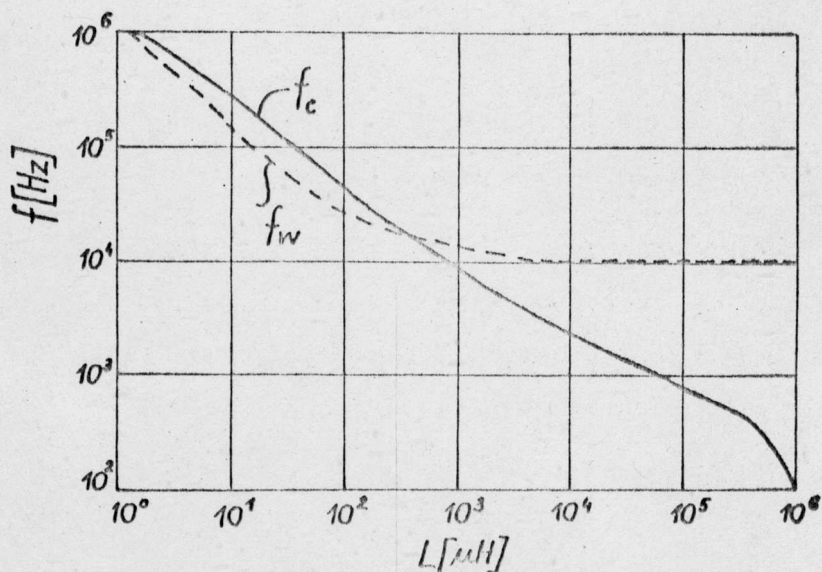
gdzie

$$\alpha = \left. \frac{\partial L(\omega, t)}{\partial t} \right|_{\substack{t=t_0 \\ \omega=\omega_0}} \quad a_k = \left. \frac{\partial^k L(\omega, t)}{\partial \omega^k} \right|_{\substack{t=t_0 \\ \omega=\omega_0}}$$

Zmiany indukcyjności wzorca w funkcji częstotliwości na omawianym poziomie dokładności /kilka $\times 10^{-5}$ / tłumaczone są głównie dwoma zjawiskami:

- wpływem pojemności doprowadzeń i rozłożonej pojemności międzyzwojowej,
- wpływem prądów wirowych indukowanych w przewodnikach znajdujących się w polu magnetycznym wzorca /doprowadzenia, zaciski, obudowa itp./.

Na rys.2.3.2 pokazano wpływ częstotliwości na wartość wzorców indukcyjności firmy Sullivan [13] .

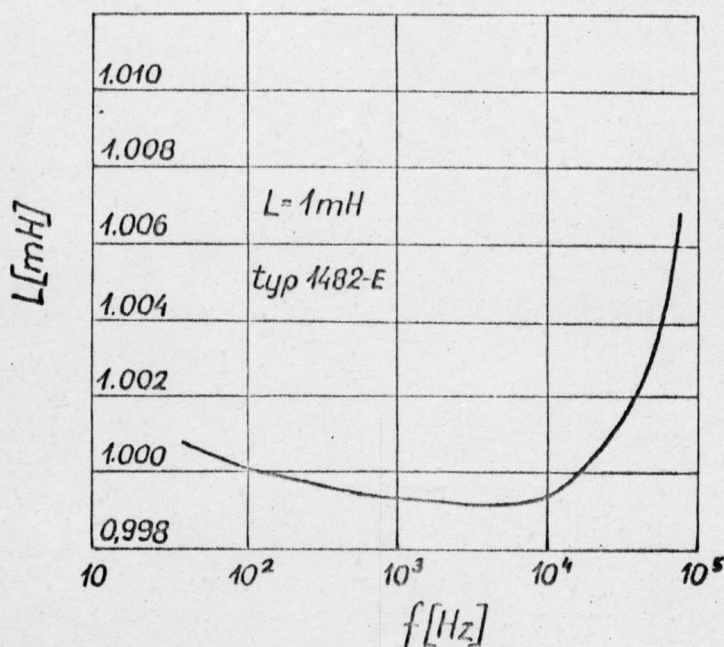


Rys.2.3.2. Wpływ pojemności rozłożonej i prądów wirowych na zmianę indukcyjności /wzorce firmy Sullivan/

f_c - krzywa punktów, na której wpływ pojemności rozłożonej wzorców na wartości indukcyjności wynosi 0,01%;

f_w - krzywa punktów, na której wpływ prądów wirowych na wartość wzorca wynosi 0,01%.

Wpływ częstotliwości na zmianę indukcyjności dla przykładowego wzorca firmy General Radio pokazano na rysunku 2.3.3. Pojemność międzyzwojowa powoduje wzrost indukcyjności ze wzrostem pulsacji, natomiast prądy wirowe powodują zmniejszanie indukcyjności. Wpływ prądów wirowych uwidacznia się bardziej we wzorcach o małej wartości nominalnej. Natomiast wpływ pojemności międzyzwojowej odgrywa większą rolę w indukcyjnościach o dużej wartości nominalnej. Wielkość wpływu obu czyn-



Rys.2.3.3. Wpływ częstotliwości na zmiany wartości wzorca indukcyjności /wzorzec firmy General Radio/

ników zależy również od częstotliwości. Do dalszych rozważań założymy, że obszar pracy wzorców leży w zakresie od zera do częstotliwości, przy której sumaryczne względne zmiany indukcyjności są mniejsze niż 0,1, a więc $\frac{\Delta L}{L_0} < 0,1$. W zakresie tym wpływ pojemności rozproszonej na wartość indukcyjności charakteryzowany jest najczęściej schematem zastępczym przedstawionym na rysunku 2.3.4.

Indukcyjność L w funkcji elementów schematu zastępczego określona jest wzorem

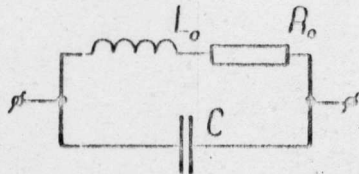
$$L(\omega) = \frac{L_0(1 - \omega^2 L_0 C) - R_0^2 C}{(1 - \omega^2 L_0 C)^2 + (\omega R_0 C)^2}$$

po uproszczeniu pomijalnie małych członów wzór ten przyjmie postać

$$L(\omega) \approx L_0 \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \quad /2.3.5/$$

gdzie $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_0 C}}$ - pulsacja rezonansu własnego cewki

We wzorze tym pominięto człony zawierające rezystancję R_0 .
Uproszczenie to powoduje zmiany wartości funkcji nie większe niż kilka $\times 10^{-6}$.



- Rys.2.3.4. Schemat zastępczy cewki indukcyjnej
- L_0 - indukcyjność cewki przy pulsacji $\omega = 0$;
 - R_0 - rezystancja charakteryzująca straty energii elektrycznej w cewce;
 - C - zastępcza pojemność międzyswojowa charakteryzująca zmiany indukcyjności cewki w funkcji częstotliwości.

Zmianę indukcyjności w funkcji częstotliwości można opisać wzorem

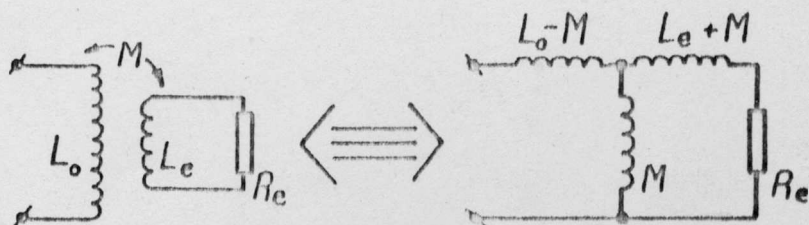
$$\Delta L(t_0, \omega) = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2k}\right) \quad /2.3.6/$$

Ilość wyrazów rozwinięcia, które uwzględnia się w obliczeniach zależy od żądanej dokładności. Ze wzoru /2.3.6/ wynika, że przyjęte założenie o zmianie indukcyjności $\frac{\Delta L}{L_0} < 0,1$ jest w przybliżeniu równe warunkowi $\frac{\omega}{\omega_0} < 0,1$.

Pochodna funkcji /2.3.5/ określona jest wzorem

$$\frac{\partial L(\omega)}{\partial \omega} = 2 L_0 \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2} \frac{\omega}{\omega_0^2}$$

W rozpatrywanym przedziale częstotliwości $(0, 0,1\omega_0)$ pochodna $\frac{\partial L(\omega)}{\partial \omega} > 0$, więc funkcja /2.3.5/ określająca zmiany indukcyjności z częstotliwością jest ściśle rosnąca. Natomiast wyniki pomiarów indukcyjności przeprowadzone w NBS /rys.2.3.3/ wskazują, że rzeczywista cewka indukcyjna zmniejsza swą indukcyjność w pewnym przedziale częstotliwości. Zjawisko to tłumaczone jest wpływem prądów wirowych, indukowanych przez pole magnetyczne w uzwojeniach cewki, doprowadzeniach, obudowie i innych otaczających wzorzec przewodnikach prądu elektrycznego. Poprawę aproksymacji zmian indukcyjności z częstotliwością można otrzymać rozpatrując wpływ prądów wirowych. Wpływ ten nie jest uwzględniony w rozpatrywanym schemacie zastępczym, ujmuje go schemat zastępczy z rysunku 2.3.5.



Rys.2.3.5. Schemat zastępczy wzorca indukcyjności własnej obrazujący wpływ prądów wirowych na wartość indukcyjności

- a/ schemat ideowy o parametrach skupionych,
b/ schemat równoważny o elementach sprzężonych bezpośrednio,

L_0 - indukcyjność własna cewki,

L_e - indukcyjność zastępcza elementów otaczających wzorzec

M - indukcyjność wzajemna L_0 , L_e ,

R_e - rezystancja zastępcza przewodników elektryczności, znajdujących się w polu magnetycznym wzorca.

Impedancję układu z rysunku 2.3.5 po przekształceniu można określić wzorem

$$Z = \frac{(\omega M)^2}{R_e^2 + (\omega L_e)^2} R_e + j\omega \left(L_0 - \frac{(\omega M)^2}{R_e^2 + (\omega L_e)^2} L_e \right) \quad /2.3.7/$$

Stąd bezwzględne zmiany indukcyjności wywołane prądami wirowymi wynoszą

$$\Delta L(\omega) = - \frac{(\omega M)^2}{R_e^2 + (\omega L_e)^2} L_e \quad /2.3.8/$$

Po uwzględnieniu wpływu pojemności zastępczej wzór /2.3.5/ otrzymamy wyrażenie na sumaryczną zmianę indukcyjności z częstotliwością

$$L(\omega) = \frac{L_0}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} - \frac{(\omega M)^2}{R_e^2 + (\omega L_e)^2} L_e \quad /2.3.9/$$

Wpływ prądów wirowych na indukcyjność jest największy przy małych częstotliwościach, ponieważ można wtedy przyjąć, że $\omega \ll 0,1 \omega_0$ oraz $R_e \gg \omega L_e$. Po rozwinięciu pierwszej części wzoru /2.3.9/ i pominięciu małych członów otrzymamy wyrażenie

$$L(\omega) = L_0 \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right) - \left(\frac{\omega M}{R_e} \right)^2 L_e \quad /2.3.10/$$

stąd względna zmiana indukcyjności przy małej częstotliwości określona jest wzorem

$$\frac{\Delta L(\omega)}{L(\omega)} = \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 - \left(\frac{\omega M}{R_e} \right)^2 \frac{L_e}{L_0} \quad /2.3.11/$$

Dokładna analiza wpływu tych dwóch czynników /pojemności rozproszonej i prądów wirowych/ na indukcyjność jest trudna

ze względu na to, że parametry M , L_e , R_e nie dają się bezpośrednio zmierzyć ani obliczyć. Wpływ ich na indukcyjność w rozpatrywanym przedziale częstotliwości nie przekracza na ogół 0,1%. W dokładnych metodach pomiarów, za pomocą których można mierzyć tak małe zmiany indukcyjności w funkcji częstotliwości, dokonuje się pomiaru indukcyjności przy ustalonej pulsacji ω . Nie można wtedy oddzielić wpływów poszczególnych parametrów. Problemem tym zajmiemy się dokładniej w rozdziale poświęconym opracowaniu wyników doświadczeń. Zauważmy obecnie tylko, że funkcja /2.3.9/ ma kształt lepiej dopasowany do funkcji zmian indukcyjności rzeczywistej cewki niż funkcja /2.3.5/, w której nie uwzględniono wpływu prądów wirowych.

Dotychczas zakładaliśmy, że zmiany indukcyjności z częstotliwością wywołane są wpływem pojemności rozproszonej i prądów wirowych. Przy rozważaniu tych czynników skupiliśmy ich wpływ w jednym punkcie. Może to przy dużych dokładnościach być źródłem błędów. W miarę wzrostu dokładności mogą mieć istotny wpływ również inne czynniki na przykład straty dielektryczne w pojemnościach międzyswojowych [12], wpływ zniekształceń sinusoidy itd. Dlatego właściwą drogą określenia zmian indukcyjności z częstotliwością jest opracowanie dostatecznie dokładnych metod pomiaru zmian indukcyjności z częstotliwością.

Rozpatrzmy teraz część rzeczywistą wzorca indukcyjności /rys.2.3.1/. Dla indukcyjności wartość rezystancji zastępczej strat R podaje się na ogół pośrednio poprzez podanie dobroci wzorca Q zdefiniowanej dla określonej pulsacji ω wzorem

$$Q = \frac{\omega L}{R} \quad /2.3.12/$$

lub współczynnika strat D zdefiniowanego wzorem

$$D = \frac{1}{Q}$$

Dla wzorców firmy General Radio sumaryczny współczynnik strat cewki indukcyjnej określony jest wzorem [52]

$$D = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \left(D_R + D_w + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 D_d \right) \quad /2.3.13/$$

gdzie:

$$D_R = \frac{R}{\omega L_0} \quad - \text{współczynnik strat w rezystancji uzwojeń,}$$

D_w - współczynnik strat na prądy wirowe jest w przybliżeniu proporcjonalny do ω ,

D_d - współczynnik strat dielektrycznych w karkasie i izolacji uzwojeń.

Stałość współczynnika strat D /rezystancji R / nie ma zasadniczego znaczenia dla wzorców indukcyjności i nie będziemy zajmowali się tym zagadnieniem.

3. WZORCE INDUKCYJNOŚCI WŁASNEJ W UKŁADACH POMIAROWYCH

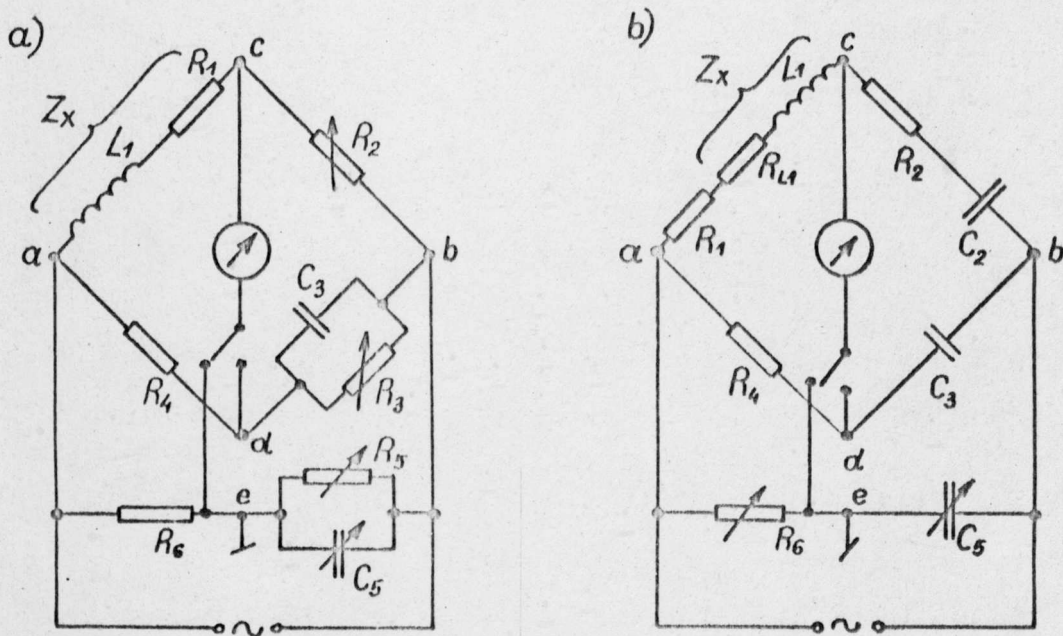
Dotychczas rozważaliśmy dokładność wzorców indukcyjności wynikającą z ich własnych parametrów. Odtworzenie wartości wzorca dokonywane jest w układach pomiarowych. Zależnie od układu pomiarowego i sposobu podłączenia wzorca można otrzymać różne wartości indukcyjności. Przeanalizujemy więc stosowane obecnie precyzyjne układy do pomiaru indukcyjności własnej i jednoznaczność wartości indukcyjności w różnych układach pomiarowych.

3.1. Układy do dokładnych pomiarów indukcyjności własnej

Do dokładnych pomiarów indukcyjności własnej stosowane są układy mostków czteroramiennych Maxwella-Wiena i Owena [30], mostki sześcioramienne Andersona [30] oraz rozwijane w ostatnich latach precyzyjne transformatorowe komparatory indukcyjności [1, 21].

Schemat mostka Maxwella-Wiena do pomiarów indukcyjności własnej przedstawiono na rysunku 3.1.1a.

Wartość indukcyjności wyznaczana jest ze wzoru $L = R_2 \cdot R_4 \cdot C_3$. Regulacja przeprowadzana jest na ogół elementami R_2 , R_3 . Dodatkowo dołączona jest gałąź Wagnera zbudowana z elementów R_5 , R_6 , C_5 . Ze względu na słabą zbieżność mostek ten stosowany jest na ogół tylko do bardzo dokładnych pomiarów, w których wykazuje szereg zalet. Zbliżone parametry metrologiczne posiada mostek Owena /rys. 3.1.1b/. Posiada lepszą zbieżność, dlatego sto-



Rys.3.1.1. Mostki do dokładnych pomiarów indukcyjności własnej

- a/ mostek Maxwella-Wiena
b/ mostek Owena

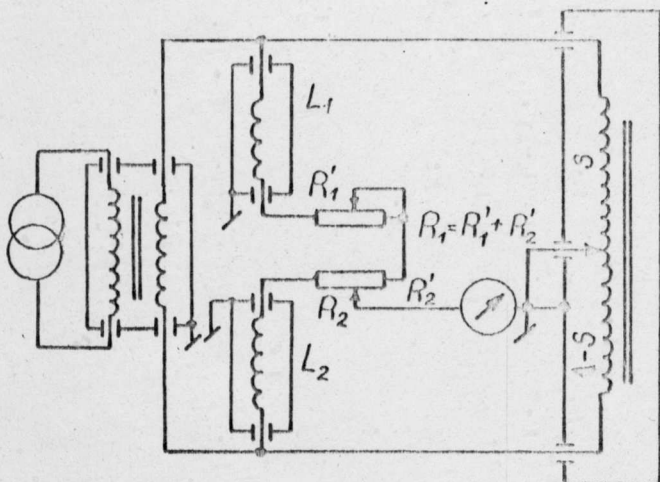
sowany jest głównie w wykonaniach fabrycznych precyzyjnych mostków. W standardowych wykonaniach obu typów mostków osiągnięta jest dokładność 0,1% [30]. Natomiast w specjalnych wykonaniach przy uwzględnieniu parametrów resztkowych osiągnięte są dokładności do (0,02 - 0,01)% /patrz rys.1.2.2/.

Omówimy teraz transformatorowy komparator indukcyjności. Jego schemat obrazujący zasadę działania pokazano na rys.3.1.2.

W układzie tym porównywane jest napięcie na dzielniku indukcyjnym z napięciem szeregowo połączonych wzorców indukcyjności L_1 , L_2 . Składową urojoną reguluje się na dzielniku indukcyjnym S, natomiast składową rzeczywistą zespołem rezystorów R_1 , R_2 . Jeżeli można pominąć parametry resztkowe układu to warunki równowagi są następujące [1]

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{S}{1-S} = \frac{R_1}{R_2}$$

/3.1.1/



Rys.3.1.2. Transformatorowy komparator L-L

Przy bardzo dokładnych porównaniach indukcyjności o wartościach mniejszych niż kilkadziesiąt milihenrów należy uwzględnić szereg dodatkowych czynników. Do najważniejszych z nich należy indukcyjność połączeń oraz indukcyjność rezystorów R_1 , R_2 /rys.3.1.2/. Jeśli wypadkowe indukcyjności ramion oznaczmy odpowiednio l_1 , l_2 a błąd fazy dzielnika indukcyjnego przez ϵ wtedy warunek równowagi przyjmuje postać [1]

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{S}{1-S} + \frac{S}{1-S} \frac{l_2}{L_2} - \frac{l_1}{L_2} - \frac{\epsilon}{\omega} \frac{R_1+R_2}{L_2}$$

/3.1.2/

gdzie ω - pulsacja, przy której dokonywana jest komparacja

Ze wzoru /1.3.2/ wynika, że dokładne porównanie indukcyjności L_1 , L_2 wymaga wyznaczenia parametrów resztkowych układu i żmudnych obliczeń. Zastosowanie tych układów pozwoliło

jednak na znaczną poprawę dokładności komparacji L-L i coraz więcej laboratoriów zajmujących się bardzo dokładnymi pomiarami posiada tego typu komparatory.

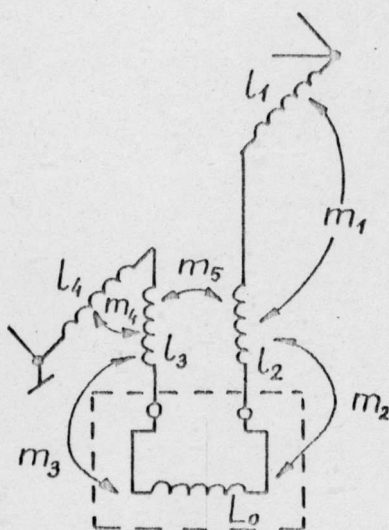
Zakres komparacji wzorców indukcyjności wynosi $1 \mu\text{H} - 10 \text{ H}$. Dokładność przy stosunku porównania 1:1 do 1:10 zależy od wartości indukcyjności. W optymalnym zakresie pomiaru indukcyjności własnej /kilka mH - kilkaset mH/ przy częstotliwościach od 100 Hz do kilku kiloherców osiąga się dokładność od $2 \cdot 10^{-5}$ [21] do $2 \cdot 10^{-6}$ [1]. Osiągnięcie tak dużych dokładności przy małych częstotliwościach jest możliwe po wyznaczeniu parametrów resztkowych układu /głównie indukcyjności/ i uwzględnieniu ich w charakterze poprawek.

Przejdziemy teraz do omówienia dokładności odtworzenia wartości indukcyjności w tych układach pomiarowych.

3.2. Wpływ przewodów łączących na dokładność pomiaru indukcyjności własnej

Przewody łączące mierzony wzorzec z układem pomiarowym wchodzi integralnie w skład tego obwodu. W związku z tym ich parametry mają wpływ na wynik pomiaru. Wpływ ten będzie się szczególnie zaznaczał przy dużych dokładnościach pomiaru i małych wartościach indukcyjności. Na rysunku 3.2.1 pokazano najważniejsze elementy przewodów łączących, mające wpływ na wyniki pomiaru indukcyjności w mostku czteroramiennym.

Największy udział w pomiarze mają indukcyjności własne przewodów łączących L_2, L_3 . Dla typowych przewodów łączących wartości te wahają się od kilku dziesiątych μH do około $2 \mu\text{H}$ [1, 20]. Wynika stąd, że przy pomiarze indukcyjności o war-



Rys.3.2.1. Wpływ przewodów łączących na wynik pomiaru indukcyjności własnej

l_i - indukcyjności własne elementów,
 m_i - indukcyjności wzajemne

tości nominalnej 1 mH błąd wywołany połączeniami może osiągnąć wartość do 0,2%, natomiast dla $L = 100$ mH błąd ten jest mniejszy niż $2 \cdot 10^{-5}$. Wpływ podłączenia można zmniejszyć wykonując dwa pomiary. Mierzmy indukcyjność dołączoną do mostka włączając wzorzec jak na rysunku 3.2.1, a drugi pomiar wykonujemy po zwarceniu zacisków wzorca. Wartość indukcyjności wzorca określa się jako różnicę wyników tych dwóch pomiarów. Eliminujemy w ten sposób wpływy indukcyjności własnych l_1, l_2, l_3, l_4 i wzajemnych m_1, m_4 . Pozostają jeszcze wpływy indukcyjności wzajemnych m_2, m_3 i indukcyjność zwory. Indukcyjności te zależą od konstrukcji wzorca i są znacznie mniejsze we wzorcach toroidalnych niż selenoidalnych. We wzorcach firmy General Radio mają one wartość około $0,1 \mu\text{H}$ [20]. W specjalnych wykonaniach tych wzorców /dla małej indukcyjności/,

mogą być zmniejszone do wartości setnych części μH [20].

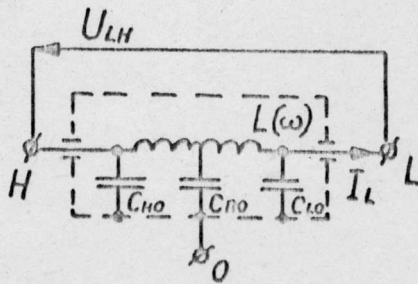
Do dalszych rozważań możemy przyjąć, że błąd pomiaru indukcyjności wywołany połączeniami jest $\leq 2 \mu\text{H}$ w bezpośrednich pomiarach i $\leq 0,2 \mu\text{H}$ przy eliminacji części indukcyjności pasożytniczych dwukrotnym pomiarem. Wynika stąd, że wzorzec odnośnikowy o docelowej dokładności nie gorszej niż $1 \cdot 10^{-5}$ powinien mieć wartość nominalną nie mniejszą niż kilkadziesiąt mH. Jeżeli założymy dodatkowo, że powinien on mieć wartość typu 10^k , otrzymamy wartość minimalną wzorca 100 mH.

3.3. Jednoznaczność pomiaru indukcyjności w różnych układach pomiarowych. Definicja trzystaciskowego wzorca indukcyjności

Wyróżnimy dwa czynniki, które mogą powodować różne wartości indukcyjności, zależnie od stosowanego układu pomiarowego:

- wpływ otoczenia odgrywa szczególną rolę przy wzorcach z otwartym polem magnetycznym /wzorce toroidalne są w minimalnym stopniu wrażliwe na ten wpływ/,
- wpływ rozkładu potencjału na cewce indukcyjnej.

Na rysunku 3.3.1 przedstawiono wzorzec indukcyjności z zaznaczonymi głównymi pojemnościami pasożytniczymi. Założymy, że będziemy rozważali układy pomiarowe, które eliminują wpływ pojemności C_{H0} , C_{L0} . Impedancja cewki indukcyjnej przy ustalonej pulsacji ω przebiegu sinusoidalnego wynosi $Z = \frac{U_{LH}}{I_L} = R + jx$. Na podstawie /1.1.6/ indukcyjność cew-



Rys.3.3.1. Schemat zastępczy wzorca indukcyjności z uwzględnieniem pojemności pasożytniczych C_{Ho} , C_{Lo} - pojemności doprowadzeń do masy, C_{Ro} - zastępcza pojemność uzwojeń cewki do masy.

ki L wyznaczamy jako $L(\omega) = \frac{1}{\omega} \times$. Z rysunku 3.3.1. wynika, że potencjał punktu L względem masy wpływa na wartość prądu I_L a zatem i na wartość indukcyjności.

Rozpatrzmy teraz rozkład potencjałów w cewkach indukcyjnych podłączonych do najczęściej stosowanych układów pomiarowych. Analiza mostków Maxwella-Wiena i Owena /rys.3.1.1/ wskazuje, że przy zrównoważonej gałęzi Wagnera punkt c w obu typach mostków znajduje się na potencjale masy /z dokładnością do czułości wskaźnika równowagi/. Do punktu c podłączony jest jeden z końców mierzonej indukcyjności. Wzorzec w tym układzie pomiarowym może mieć zacisk L na potencjale masy O . Natomiast w transformatorowym komparatorze $L-L$ /rys.3.1.2/ zaciski obu kompensowanych wzorców znajdują się na podwyższonym potencjale. Powoduje to zmianę indukcyjności. Zmiany te będą się częściowo kompensowały, gdyż oba wzorce pracują w podobnych warunkach. Określenie wielkości wpływu podniesionego potencjału zacisków na wartość indukcyjności nie jest opracowane w literaturze, stąd błąd ten nie jest znany. Aby uniknąć niejedno-

znaczności założymy, że będziemy stosowali wzorce trzyczaciskowe /ekran wzorca z rys.3.3.1 jest szczelny/ oraz zdefiniujemy ściśle wartość indukcyjności takiego wzorca

Niech U_{LH} będzie napięciem sinusoidalnym o pulsacji ω przyłożonym na zaciski L-H wzorca trzyczaciskowego. Impedancję trzyczaciskowej cewki indukcyjnej zdefiniujemy wzorem

$$Z = \frac{U_{LH}}{I_L} \quad \left| \quad U_{OL}=0 \right. \quad /3.3.1/$$

gdzie U_{OL} - napięcie między ekranem /masą/ a zaciskiem L.

Dla ustalonej pulsacji ω impedancja jest liczbą zespoloną /patrz punkt 1.1/

$$Z = R + jx$$

wtedy wielkość

$$L = \frac{1}{\omega} x \quad /3.3.2/$$

nazwiemy indukcyjnością wzorca trzyczaciskowego przy pulsacji ω . Natomiast wielkość R rezystancją wzorca trzyczaciskowego przy pulsacji ω .

Możemy teraz porównać oba typy wzorców /ekranowane i nieekranowane/ ze względu na jednoznaczność wartości indukcyjności. Wzorce z otwartym polem magnetycznym jako dwuzaciskowe i nieekranowane nie mają zdefiniowanych ściśle pojemności C_{Ho} , C_{Lo} , jak również pojemności rozłożonej do masy C_{Ro} /na rys.3.3.1 dla uproszczenia skupiono ją w jednym punkcie/. Nie zapewniają więc jednoznaczności określenia wartości w różnych układach pomiarowych. Do dalszych rozważań będziemy brali pod uwagę

wzorze trzyczaciskowe /toroidalne/, które mają pojemność C_{Ho} , C_{Lo} , C_{Ro} ustalone i zdefiniowane są jednoznacznie.

Zauważmy, że w układzie mostka Maxwella-Wiena /rys.3.1.1a/ indukcyjność wzorca trzyczaciskowego jest wyznaczana zgodnie z powyższą definicją /3.3.2/ jeżeli zacisk H wzorca podłączymy do punktu a mostka, zacisk L do punktu c, natomiast zacisk O do masy ($\downarrow$). Wartość indukcyjności otrzymywana przy wzorcowaniu w NBS jest więc zgodna z podaną definicją. W układzie Owena /rys.3.1.1b/ wartość indukcyjności nie jest wyznaczana zgodnie z definicją /3.3.2/, gdyż prąd płynący przez pojemność C_{Ho} będzie wpływał zarówno na U_{LH} jak i I_L . Aby wyznaczyć indukcyjność zgodnie z powyższą definicją w podanym mostku Owena trzeba uwzględnić wpływ pojemności C_{Ho} .

Z przeprowadzonych dotychczas rozważań wynika, że

- parametry produkowanych wzorców pozwalają na poprawę wyznaczania ich dokładności do poziomu kilka $\times 10^{-5}$, czyli do poziomu dokładności pozostałych składowych błędu pomiaru indukcyjności /1.2.3/;
- na wyróżniony wzorec /odnośnikowy/ najlepiej nadają się wzorce o wartości nominalnej z przedziału 0,1 - 1 H. Przy mniejszych wartościach zaznacza się wpływ połączeń i prądów wirowych. Przy większych wartościach wpływ pojemności rozłożonych na zmianę indukcyjności;
- aby osiągnąć dokładność pomiaru indukcyjności rzędu $5 \cdot 10^{-5}$ w paśmie częstotliwości od kilkudziesięciu Hz do kilku kHz trzeba opracować metodę wyznaczania indukcyjności o wartości nominalnej 0,1 lub 1 H z dokładnością lepszą niż $2 \cdot 10^{-5}$.

4. METODY WYZNACZANIA WARTOŚCI WZORCÓW INDUKCYJNOŚCI WŁASNEJ

W punkcie 2.3. pokazaliśmy, że dla osiągnięcia dokładności pomiaru indukcyjności rzędu kilka $\times 10^{-5}$ w paśmie częstotliwości od kilkudziesięciu Hz do kilku kHz, wartość wyróżnionego wzorca L_0 powinna być wyznaczona w całym paśmie rozpatrywanej częstotliwości. Aby uzyskać charakterystykę częstotliwościową wzorca L_0 można:

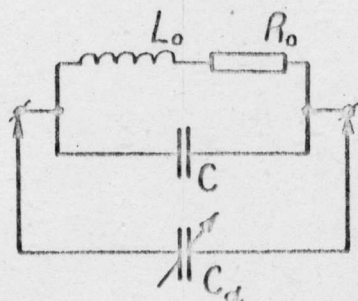
- Zmierzyć wartość indukcyjności przy określonej pulsacji ω_p , przy której można osiągnąć największą dokładność pomiaru pewną metodą. Następnie wyznaczyć funkcję zmian indukcyjności z częstotliwością $\Delta L(t_p, \omega_p)$ /2.3.2/ w rozpatrywanym przedziale częstotliwości.
- Zmierzyć wartości indukcyjności w punktach leżących odpowiednio gęsto w omawianym zakresie częstotliwości.

Drugi sposób narzuca znacznie większe wymagania na metodę wyznaczania wartości, pierwszy natomiast może być stosowany, o ile dysponujemy dostatecznie dokładną metodą wyznaczania funkcji zmian indukcyjności.

4.1. Metody wyznaczania zmian indukcyjności z częstotliwością

Stosowane i opisane w literaturze metody wyznaczania funkcji zmian indukcyjności z częstotliwością są konsekwencją przyjęcia schematu zastępczego z rysunku 2.3.4. W metodach

tych wyznaczanie szukanej funkcji sprowadzone jest do pomiaru pojemności własnej cewki indukcyjnej C . Szczegółową analizę metod wyznaczania pojemności własnej cewek indukcyjnych można znaleźć w pracy prof. Jellonka [24]. Pokazano tam, że wszystkie stosowane i proponowane metody pomiaru sprowadzają się do klasycznej metody Rietza. Metoda ta polega na tym, że równolegle do cewki indukcyjnej dołączona jest regulowana pojemność C_d /rys.4.1.1/.



Rys.4.1.1. Sposób podłączenia regulowanej pojemności C_d przy pomiarze pojemności własnej cewki C

Następnie układ doprowadzany jest do rezonansu. Spełniona jest wtedy w przybliżeniu zależność [24]

$$\omega_0^2 L_0 (C + C_d) \approx 1 \quad /4.1.1/$$

stąd

$$C = \frac{1}{\omega_0^2 L_0} - C_d \quad /4.1.2/$$

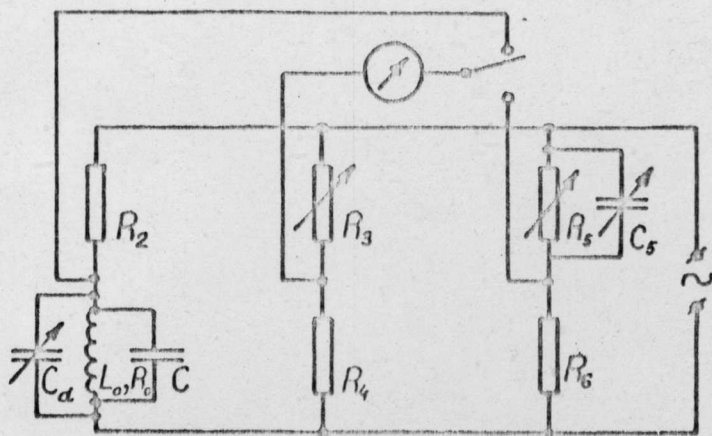
gdzie ω_0 pulsacja rezonansowa układu z rysunku 4.4.1.

Głównym źródłem błędu jest tu niedokładność wyznaczenia L_0 . Aby tego uniknąć dokonuje się pomiarów przy dwóch pulsacjach ω_1, ω_2 . Otrzymuje się wtedy rezonans przy pojemnościach od-

powiednio C_{d1} , C_{d2} . Pojemność własną cewki określa wzór [24]

$$C = \frac{C_{d2} \omega_2^2 - C_{d1} \omega_1^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \quad /4.1.3/$$

Jednym z ważniejszych źródeł błędów metod omawianych w artykule [24] była dokładność dostrojenia do rezonansu układu z rysunku 4.1.1. Aby ten błąd zmniejszyć Linckh i Brasack [28] zaproponowali zastosowanie równoległego mostka rezonansowego /rys.4.1.2/.



Rys.4.1.2. Równoległy mostek rezonansowy do pomiaru pojemności własnej cewki C

W układzie tym rezystory R_1 , R_3 , R_4 służą do zrównoważenia rezystancji własnej R_o cewki indukcyjnej. Elementy R_5 , C_5 , R_6 stanowią gałąź Wagnera.

Podstawową wadą metody Rietza /i jej modyfikacji/ w zastosowaniu do wyznaczania funkcji zmian indukcyjności z częstotliwością jest to, że pojemność własna cewki indukcyjnej wyznaczana jest przy znacznie wyższych częstotliwościach niż częstotliwość pracy cewki indukcyjnej. Na przykład Linckh

i Brasack [28] wyznaczyli pojemność własną cewki indukcyjnej $L = 100 \text{ mH}$ przy częstotliwościach 20, 30, 40 kHz, gdy zakres pracy tej cewki jest do kilku kHz. Przy tak dużych częstotliwościach na wartość indukcyjności wpływają różne dodatkowe czynniki, których wpływ w obszarze pracy cewki jest pomijalnie mały /na przykład wpływ naskórkowości/. Przy większych częstotliwościach pojawiają się dodatkowe trudności w samym układzie mostkowym. Rezystory, szczególnie regulowany rezystor R_3 , wprowadzają znaczne przesunięcia fazowe.

W przypadku obniżenia częstotliwości do obszaru pracy cewki indukcyjnej trzeba znacznie zwiększyć pojemność regulowaną C_d . Jest to bardzo niekorzystne, gdyż pojemność własna cewki, która dla typowych wzorców jest w granicach od kilku do około 100 pF wyznaczana jest jako różnica dwóch wielkości o znacznie większej wartości rzędu 0,1 μF . Sytuacja taka jest powodem dużego błędu pomiaru. Inną istotną wadą metody Rietza jest to, że przyjmuje się w niej uproszczony schemat zastępczy cewki indukcyjnej /rys.2.3.4/, który dla dokładności lepszych niż $2 \cdot 10^{-4}$ przestaje być wystarczający /patrz punkt 2.3/.

Z przeprowadzonych rozważań wynika, że stosowane dotychczas metody wyznaczania zmian indukcyjności z częstotliwością są niewystarczające przy zadanej dokładności, lepszej niż $2 \cdot 10^{-4}$. Należy zatem opracować metodę, która zapewniłaby żądaną dokładność wyznaczania indukcyjności $/2 \cdot 10^{-5}/$ w pewnym paśmie częstotliwości.

4.2. Wyznaczanie wartości indukcyjności w sposób absolutny

Znane są konstrukcje cewki indukcyjnej, której wartość może być określona w sposób absolutny /obliczona z wymiarów geometrycznych/ z bardzo dużą dokładnością. Dla indukcyjności własnej jest to selenoid jednowarstwowy o odpowiednio dużych wymiarach. Sposób obliczenia indukcyjności tych wzorców podano w literaturze [15, 17]. Dla zapewnienia odpowiednio dużej dokładności trzeba obliczać poprawki na wartość wzorca wynikające z asymetrii wykonania rzeczywistego wzorca. Najważniejsze z nich to [15] :

- nierównomierność średnicy uzwojenia cewki
- nierównomierność uzwojenia cewki
- nierównomierność rozptywu prądu w przewodach cewki
- podatność magnetyczna karkasu i ośrodka

Aby obliczyć wartość wzorca z dokładnością kilka $\times 10^{-6}$ należy uwzględnić wszystkie wymienione poprawki. Dokładne określenie możliwe jest tylko przy niewielkim odstrojeniu od idealnego kształtu. Dla zapewniania dokładności na poziomie kilka $\times 10^{-6}$ trzeba zmierzyć parametry geometryczne cewki z dokładnością 0,1 mikrona [18]. Do najważniejszych parametrów, które decydują o dokładności wzorca należą: średnica cewki /rozumiana jako zewnętrzna średnica nawoju/, długość cewki, wielkość skoku, średnica drutu. Wykonanie pomiarów tych parametrów z żądaną dokładnością jest bardzo trudne i wymaga stosowania specjalnego, kosztownego oprzyrządowania [18]. Duża dokładność cewki narzuca ostre warunki na stosowane materiały: karkas i drut nawojowy. Karkas jest elementem dużym

i ciężkim, wykonany jest z trudno obrabianego materiału /najczęściej topionego kwarcu lub marmuru/. Stosowanie stalowych narzędzi do obróbki jest utrudnione, gdyż może to powodować wtrącenia ferromagnetyczne do karkasu. W trakcie nawijania średnica drutu musi być bardzo dokładnie kalibrowana. Trudności te powodują, że tylko niektóre ośrodki posiadają takie wzorce:

- wzorzec w NBS ma dane: 1000 zwojów, średnica $D = 350$ mm, długość 1 m, indukcyjność 103 mH, dokładność $1 \cdot 10^{-5}$ [41];
- wzorzec PTB /RFN/ ma dane: 945 zwojów, średnica $D = 310$ mm, długość 709 mm, indukcyjność 100,3 mH, dokładność $2 \cdot 10^{-6}$ [28] .

Podane wartości indukcyjności i dokładności dotyczą prądu stałego /pulsacja $\omega = 0$ /. Zmiany indukcyjności z częstotliwością mogą być liczone w sposób analityczny [7], ale metoda jest bardzo skomplikowana i nie zapewnia odpowiedniej dokładności. Większą dokładność można osiągnąć przy stosowaniu opisanej w punkcie 4.1 metody Rietza. Metoda ta opiera się na uproszczonym schemacie zastępczym z rysunku 2.3.4. Schemat ten aproksymuje rzeczywistą cewkę tylko w przybliżeniu, przy czym nie potrafimy teoretycznie oszacować stopnia przybliżenia z odpowiednią dokładnością. Omawiane wzorce liczebne posiadają bardzo duże wymiary, ich pole magnetyczne obejmuje dużą przestrzeń, dlatego trudno ustalić warunki pomiaru takie jak temperatura, elementy ferromagnetyczne otoczenia itp. Duże wymiary cewki powodują, że posiada ona znaczną pojemność rozłożoną do „ziemi”. Na nawój stosowany jest drut o dużej średnicy $\varnothing 0,7$ w NBS/, stąd pojawia się trudny do dokładne-

go obliczenia wpływ naskórkowości. Wady te są tak duże, że w NBS używa się takiego wzorca rzadko, tylko do okresowej kontroli mostka Maxwella-Wiena przy częstotliwości kilkadziesiąt Hz [41]. Nie ma dokładnego sposobu określenia jego zmian z częstotliwością. Na podstawie literatury [41] można wnioskować, że dokładność tego wzorca rzędu kilka $\times 10^{-5}$ może być osiągnięta dla częstotliwości od 0 do 200 Hz dopiero w bardzo uciążliwych warunkach pomiarów. Nie potrafimy określić analitycznie jego wartości z odpowiednią dokładnością przy wyższych częstotliwościach.

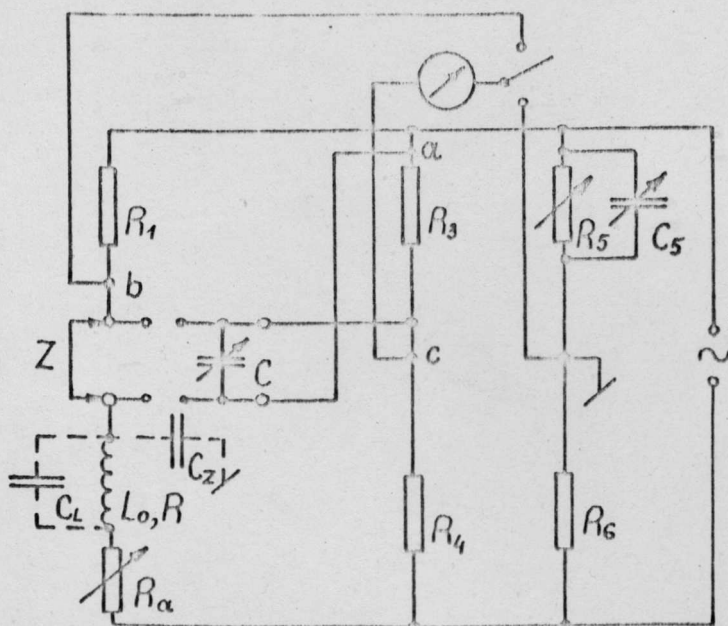
Narzuca się wniosek, że należy opracować metodę wyznaczania wartości L wzorców toroidalnych, które są znacznie wygodniejsze w pomiarze przez porównanie z wzorcami innego typu. Możliwości takie istnieją głównie w odniesieniu do wzorców impedancji R, C. Metody porównania L z R są lepiej znane i od nich zaczniemy przegląd metod.

4.3. Wyznaczanie wartości indukcyjności przez porównanie z wzorcami rezystancji

Określenie wartości indukcyjności z żadaną dokładnością kilka $\times 10^{-5}$ na drodze porównania z wzorcami rezystancji R wymaga znajomości wartości rezystancji z dokładnością co najmniej tego samego rzędu. Znane i stosowane są metody pozwalające na wyznaczenie wartości rezystancji przy prądzie zmiennym na poziomie $1 \cdot 10^{-6}$ [48]. Dokładność wzorców rezystancji jest więc wystarczająca. Jednak tak dokładne wzorce rezystancji mają pewne wady, które utrudniają wykorzystanie tej do-

kładności. Kłopoty pomiarowe sygnalizowane są przy kolejno omawianych układach pomiarowych.

Opisane w literaturze metody porównania R-L służyły do wyznaczania w sposób absolutny wartości rezystancji. Z chwilą opracowania dokładnych metod porównania R-C wzorce rezystancji stały się dokładniejsze od wzorców indukcyjności /dotyczy to tylko przodujących ośrodków pomiarowych/. Stosowane były głównie dwie metody porównania L-R. Jedna z nich opracowana w NBS [41] aktualnie już nie stosowana ze względu na małą dokładność. Druga opracowana została w PTB [28] do wyznaczania wartości rezystancji z liczalnego wzorca indukcyjności. Zasada metody opracowanej w PTB opiera się na stosowaniu kombinowanego mostka rezonansowego szeregowego i mostka Maxwella-Wiena /rys.4.3.1/.



Rys.4.3.1. Kombinowany mostek rezonansowy
Maxwella-Wiena

W położeniu zwory Z przedstawionym na rysunku otrzymujemy mostek Maxwella-Wiena, a po rozwarciu zwory Z /przełączeniu kondensatora C w punkt b/ szeregowy układ rezonansowy. Elementy R_5 , C_5 , R_6 tworzą gałąź Wagnera.

Kombinacja warunków równowagi obu mostków daje wypadkowy wzór [28]

$$\omega L_0 = \sqrt{R_1 \cdot R_4} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \delta_c + \frac{1}{C} \left[\frac{T_1 + T_4 - T_3}{R_3} - C_L - \frac{1}{2} C_z - \frac{1}{2} (C_R - C_M) \right] \right\}$$

... /4.3.1/

gdzie:

- T_1, T_3, T_4 - stałe czasowe rezystorów R_1, R_3, R_4
- $\operatorname{tg} \delta_c$ - współczynnik strat kondensatora C
- C_R, C_M - wartości kondensatora C odpowiednio w układzie mostka rezonansowego i mostka Maxwella

W układzie tym porównuje się reaktancję cewki $X = \omega L_0$ ze średnią geometryczną rezystancji R_1, R_4 . Przy zastosowaniu tej metody w PTB uzyskano dokładność porównania R-L około $5 \cdot 10^{-7}$ [28] .

W zastosowaniu do wyznaczania wartości wzorców trzyczaciskowych układ przedstawia szereg wad, z których najważniejsze to:

- obecność szeregowo włączonej do wzorca L rezystancji regulowanej R_a , która powoduje, że indukcyjność trzyczaciskowa nie może być w tym układzie wyznaczana zgodnie z definicją /patrz punkt 3.3 i uwagi dotyczące mostka Owena/,
- w mostku rezonansowym wzorzec znajduje się na podwyższonym potencjale, nie ma więc i tu zgodności z definicją indukcyjności trzyczaciskowej. Dodatkowo należy zauwa-

żyć, że rozkład potencjałów w cewce w obu układach jest różny,

- wyznaczanie indukcyjności przy różnych częstotliwościach wymaga stosowania rezystorów o różnych wartościach. Stosowane rezystory o małych wartościach resztkowych mają gorszą stabilność niż stałoprądowe, stąd muszą być wyznaczane z dużą dokładnością bezpośrednio przed użyciem.

Z przedstawionych rozważań wynika, że układ powinien pozwolić na osiągnięcie wymaganych dokładności, ale drogą żmudnych i długich pomiarów.

4.4. Wyznaczenie wartości indukcyjności przez porównanie z wzorcami pojemności

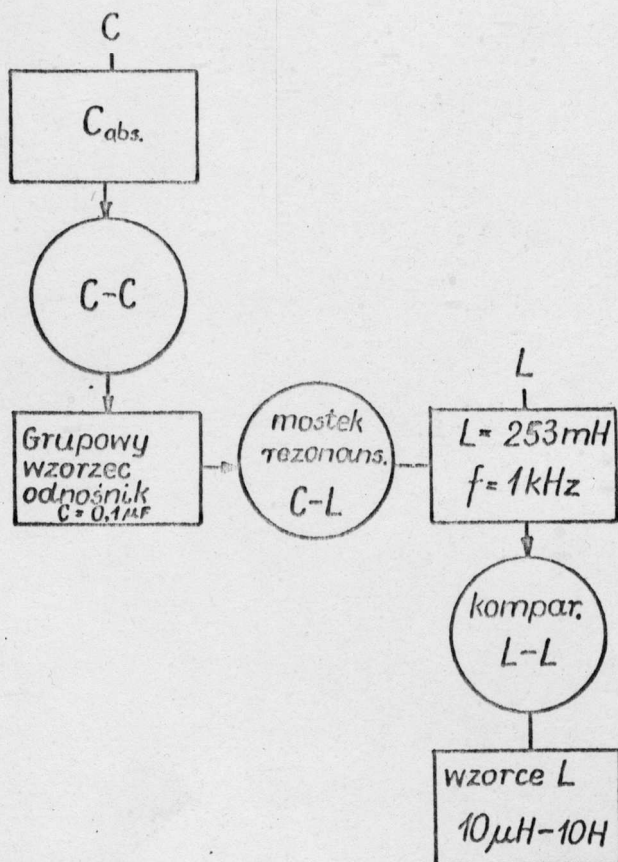
Najlepsze parametry metrologiczne z wzorców impedancji mają wzorce pojemności. Wyznaczane są z bardzo dużą dokładnością w sposób absolutny ($\sim 2 \cdot 10^{-7}$) [4, 23]. Posiadają największą stabilność, minimalne parametry resztkowe, bardzo dokładne układy komparacji, pomijalnie małe zmiany z częstotliwością w interesującym zakresie. Zalety te powodują, że wzorce C są preferowane jako odnośniki w systemie pomiarów wzorców impedancji [46, 51]. Z drugiej strony brak w literaturze opisu odpowiednio dokładnych metod porównań L-C. Częściowo zagadnienie wyznaczania wartości indukcyjności w stosunku do pojemności realizowane jest w układzie mostka Maxwella-Wiena /rys.3.1.1/, w którym dokonywane jest np. wzorcowanie wzorców indukcyjności w NBS. Główny warunek równowagi

tego mostka określony jest wzorem

$$L = R_2 R_4 C$$

Stosowanie mostków czteroramiennych na wymaganym poziomie dokładności $/2 \cdot 10^{-5}/$ jest jednak niemożliwe, gdyż graniczne możliwości tych mostków sięgają $1 \cdot 10^{-4}$ /rys.1.2.2/ [41].

Hilhouse i Kline /NBS/ przy opracowywaniu pierwszego transformatorowego kompensatora L-C stanęli również przed problemem poprawy dokładności pomiaru indukcyjności i zaproponowali sposób przedstawiony na rysunku 4.4.1.



Rys.4.4.1. System proponowany w NBS do wzorcowania wzorców indukcyjności własnej

W artykule [2] nie podano typu mostka, podano tylko, że uzyskano dokładność 0,03% i spodziewano się dalszej poprawy dokładności. Nie znaleziono w literaturze wzmianki o dalszym rozwoju tego układu.

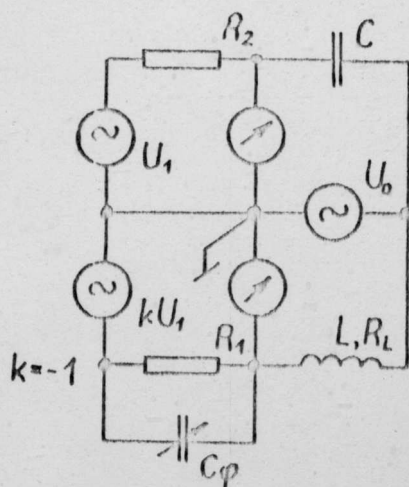
Istotną, szczególnie w warunkach krajowych, wadą tego systemu jest potrzeba posiadania wzorca o nietypowej wartości 253 mH. Potrzebna do porównania wartość pojemności $C = 0,1 \mu\text{F}$ jest już tak duża, że aby zapewnić odpowiednią jej dokładność trzeba stosować wzorzec grupowy. Dalej niezadowolająco rozwiązany jest problem wyznaczenia funkcji zmian indukcyjności z częstotliwością.

Ostatnio, do dokładnych porównań między wzorcami impedancji propaguje się transformatorowe układy podwójnie równoważone. Stanowią one pewne uogólnienie mostków czteroramiennych z ziemią Wagnera. Jednocześnie jako mostki transformatorowe posiadają ich zalety. Ogólnie warunek równowagi mostków podwójnie równoważonych przedstawić można w postaci [33]

$$\frac{Z_1 \cdot Z_4}{Z_2 \cdot Z_3} = k \quad /4.4.1/$$

Przy czym k - oznacza tu przekładnię transformatora stosunkowego i może przyjmować zarówno wartości dodatnie jak i ujemne. Dla $k = 1$ dostajemy klasę klasycznych mostków czteroramiennych. Millea i Ilie analizowali układy tych mostków i stwierdzili, że można w nich porównywać między sobą wzorce impedancji o różnym charakterze z dużą dokładnością [33]. Thomson /NSL Australia/ zastosował jeden z tych mostków /mostek pojemnościowo-oporowy/ do porówna-

nia C-R i uzyskał dokładność lepszą niż $1 \cdot 10^{-6}$ [48]. Mostki podwójnie równoważone pozwalają również na porównanie L-C z dużą precyzją. Najwięcej zalet z grupy tych mostków wykazuje układ rezonansowo-oporowy /rys.4.4.2/.



Rys.4.4.2. Mostek podwójnie równoważony indukcyjno-oporowy

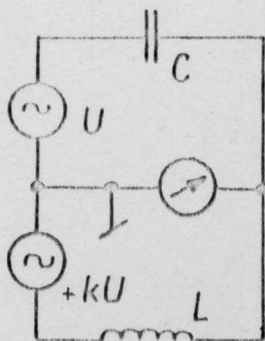
Główny warunek równowagi mostka opisany jest wzorem [34]

$$\omega^2_{LC} = \frac{R_1}{R_2} \left[1 - \frac{R_L}{\omega L} (\omega C R_2 - \omega C_\varphi R_1) \right] \quad /4.4.2/$$

Oprócz członu poprawkowego /w nawiasie kwadratowym/ wynikającego z parametrów resztkowych cewki indukcyjnej do głównego warunku równowagi wchodzi stosunek rezystancji R_1/R_2 . Musi on być określony z bardzo dużą dokładnością. We wzorze pominięto parametry resztkowe pozostałych elementów. Układ wykazuje szereg zalet, z których najważniejsze to możliwość uzyskania dokładności komparacji L-C na poziomie $1 \cdot 10^{-5}$ oraz to, że wartość indukcyjności wyznaczana jest tu zgodnie z definicją trzyczaciskowego wzorca indukcyjności. Do najważniejszych

z kolei wad można zaliczyć skomplikowaną regulację układu /minimum cztery elementy równoważące/, na ogół trudną zbieżność, potrzebę dokładnego wyznaczania stosunku rezystancji R_1 , R_2 , kłopotliwą szczególnie przy wyznaczaniu funkcji zmian indukcyjności z częstotliwością.

Z rozważań wynika, że układy podwójnie równoważone pozwalają na porównanie L-C z odpowiednią dokładnością, jednak w stosunkowo skomplikowanym układzie. Możliwość wykorzystania prostego układu transformatorowego [34] uprościłaby pomiary. Zasadę działania takiego układu pokazano na rysunku 4.4.3.



Rys.4.4.3. Zasada porównania L-C w prostym układzie transformatorowym

Dla tak uproszczonego układu warunek równowagi wyraża się wzorem

$$\omega^2 L C k = 1 \quad /4.4.3/$$

gdzie k - przekładnia transformatora stosunkowego

Do warunku równowagi oprócz porównywanych elementów L-C wchodzi: pulsacja ω i przekładnia transformatora stosunkowe-

go k . Oba te parametry w omawianym zakresie częstotliwości od 0 do kilku kHz mogą być stosunkowo łatwo ustalone i mierzone z dokładnością lepszą niż $1 \cdot 10^{-6}$. Będą więc miały pomijalnie mały wpływ na błąd porównania L-C. Ważną zaletą układu transformatorowego z rysunku 4.4.3 jest to, że wartość indukcyjności trzyczaciskowej może być wyznaczona zgodnie z przyjętą definicją /3.3.2/.

Zauważmy, że układ z rysunku 4.4.3 sprowadza się do mostka rezonansowego, gdy $k = 1$. Przekładnia transformatora może przyjmować wartości $k \ll 1$. Umożliwia to swobodny dobór wartości porównywanych elementów i częstotliwości w tym układzie, co poprawia dokładność komparacji L-C. Układ umożliwia dzięki regulacji przekładni k , porównywanie indukcyjności przy różnych częstotliwościach z jednym wzorcem pojemności. Powinno to zapewnić wyznaczenie charakterystyki częstotliwościowej wzorca z dużą dokładnością. Wstępna analiza przeprowadzona przez autora [34] wskazuje, że w omawianym układzie można dokonać komparacji L-C z dokładnością rzędu $1 \cdot 10^{-5}$.

Z rozważań wynika, że postawiony problem wyznaczenia charakterystyki częstotliwościowej wzorców indukcyjności z wymaganą dokładnością $2 \cdot 10^{-5}$ można dokonać w prostym układzie transformatorowym przez odniesienie indukcyjności do pojemności.

5. ANALIZA TRANSFORMATOROWYCH UKŁADÓW DO PORÓWNAŃ L-C

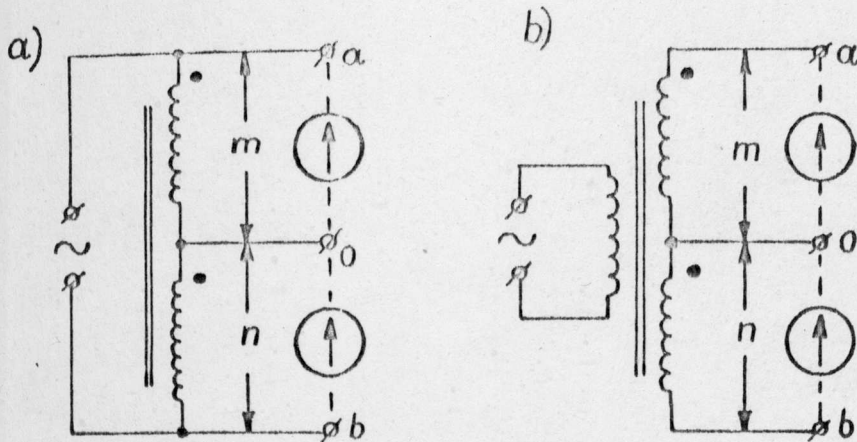
5.1. Ogólna charakterystyka i zasady konstrukcji transformatorowych mostków do porównań L-C

Podstawowymi elementami, z których buduje się mostki transformatorowe są silnie sprzężone elementy indukcyjne. Zależnie od funkcji, jakie spełniają w układzie, dzielimy je na:

- transformatory napięciowe
- transformatory prądowe /komparatory prądów/.

Pod pojęciem transformatora napięciowego rozumie się takie elementy indukcyjne, które służą do wytworzenia napięcia o stałym i dokładnie znanym stosunku. Natomiast pod pojęciem transformatora prądowego rozumie się takie elementy indukcyjne, w których następuje komparacja prądów w stałym dokładnie określonym stosunku.

Rolę transformatorów prądowych i napięciowych mogą spełniać te same silnie sprzężone elementy indukcyjne. Jednak w układzie pomiarowym pracują one w odmiennych warunkach. Transformator napięciowy pracuje przy zmiennym polu magnetycznym o określonym natężeniu, natomiast transformator prądowy pracuje przy polu magnetycznym o zerowym natężeniu. Transformatory prądowe i napięciowe stosowane są do konstruowania różnych typów mostków transformatorowych. Na rys.5.1.1 pokazano przykładowe typy transformatorów napięciowych [26].

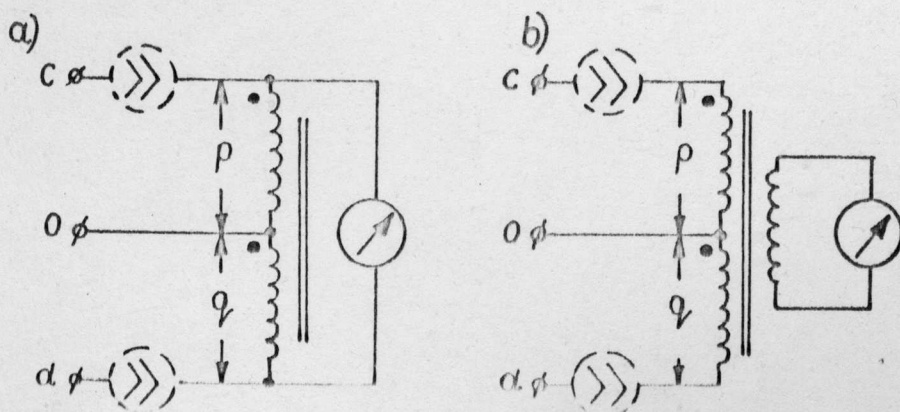


Rys.5.1.1. Transformatory napięciowe

a/ sprzężony bezpośrednio

b/ sprzężony pośrednio

Każdemu transformatorowi napięciowemu odpowiada funkcjonalnie transformator prądowy. Układy takich transformatorów pokazano na rysunku 5.1.2.



Rys.5.1.2. Transformatory prądowe

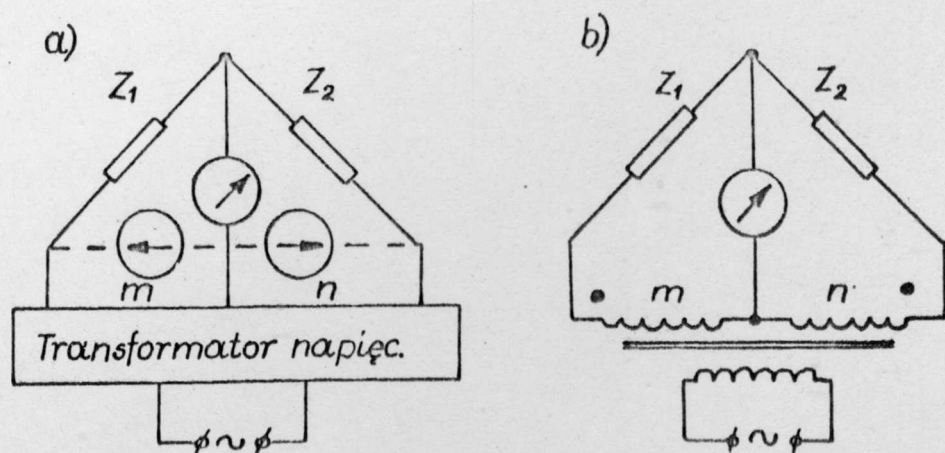
a/ sprzężony bezpośrednio

b/ sprzężony pośrednio

Transformatory napięciowe mogą wytwarzać napięcia zgodne w fazie lub przesunięte o kąt π /przeciwne w fazie/. Analogicznie w transformatorach prądowych można porównywać

prądy zgodne w fazie lub przesunięte o kąt π . Wynika stąd, że w mostkach transformatorowych można porównywać impedancje o zgodnym charakterze /spełniające równanie $Z_1 = \alpha Z_2$, gdzie α liczba rzeczywista > 0 / lub o przeciwnym charakterze /spełniające równanie $Z_1 = -\alpha Z_2$, gdzie α liczba rzeczywista > 0 /.

Ponieważ idealna cewka i idealny kondensator mają impedancje o przeciwnym charakterze będziemy zajmowali się tylko mostkami do porównań takich impedancji. Zasadę konstrukcji transformatorowych mostków do porównań impedancji, w których stosowane są transformatory napięciowe pokazano na rysunku 5.1.3a.



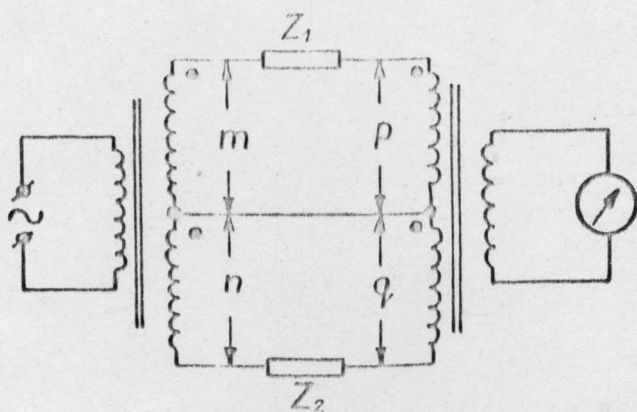
Rys.5.1.3. Transformatorowy mostek do porównań impedancji o przeciwnym charakterze
a/ zasada działania, b/ przykładowe rozwiązanie

Zależnie od rodzaju transformatora napięciowego otrzymujemy szereg wariantów układów mostkowych, w których można porównywać impedancje o przeciwnym charakterze. Przykładowe rozwiązanie takiego mostka przedstawiono na rysunku 5.1.3b.

Uproszczony warunek równowagi tego mostka jest następują-
cy [26]

$$Z_1 = - \frac{m}{n} Z_2 \quad /5.1.1/$$

Analogicznie stosując zamiast transformatorów napięciowych odpowiadające im transformatory prądowe, otrzymujemy szereg nowych variantów mostków. Z kolei stosując zarówno transformatory napięciowe jak i prądowe, jednocześnie uzyskujemy nową rodzinę mostków, w których możliwe jest także porównanie impedancji o przeciwnym charakterze. Przykładowe rozwiązanie takiego mostka pokazano na rysunku 5.1.4.



Rys.5.1.4. Mostek do porównań impedancji o przeciwnym charakterze z użyciem transformatora napięciowego i prądowego

Uproszczony warunek równowagi tego mostka określony jest wzorem [26]

$$Z_1 = - \frac{mp}{nq} Z_2 \quad /5.1.2/$$

Rzeczywista cewka i rzeczywisty kondensator, ze względu na straty energii nie mają dokładnie impedancji o przeciwnym

charakterze i dlatego porównanie ich bezpośrednio w omówionych układach z dużą dokładnością jest niemożliwe. Przy ustalonej pulsacji ω impedancja rzeczywistej cewki wynosi

$Z_1 = R_L + j\omega L$, a kondensatora /w szeregowym układzie zastępczym/ $Z_2 = R_C - j \frac{1}{\omega C}$. Po podstawieniu tych wzorów do równania /5.1.2/ i po wydzieleniu części rzeczywistej i urojonej otrzymamy układ równań

$$\begin{aligned} \omega L &= \frac{m_p}{n_q} \frac{1}{\omega C} \\ R_L &= - \frac{m_p}{n_q} R_C \end{aligned} \quad /5.1.3/$$

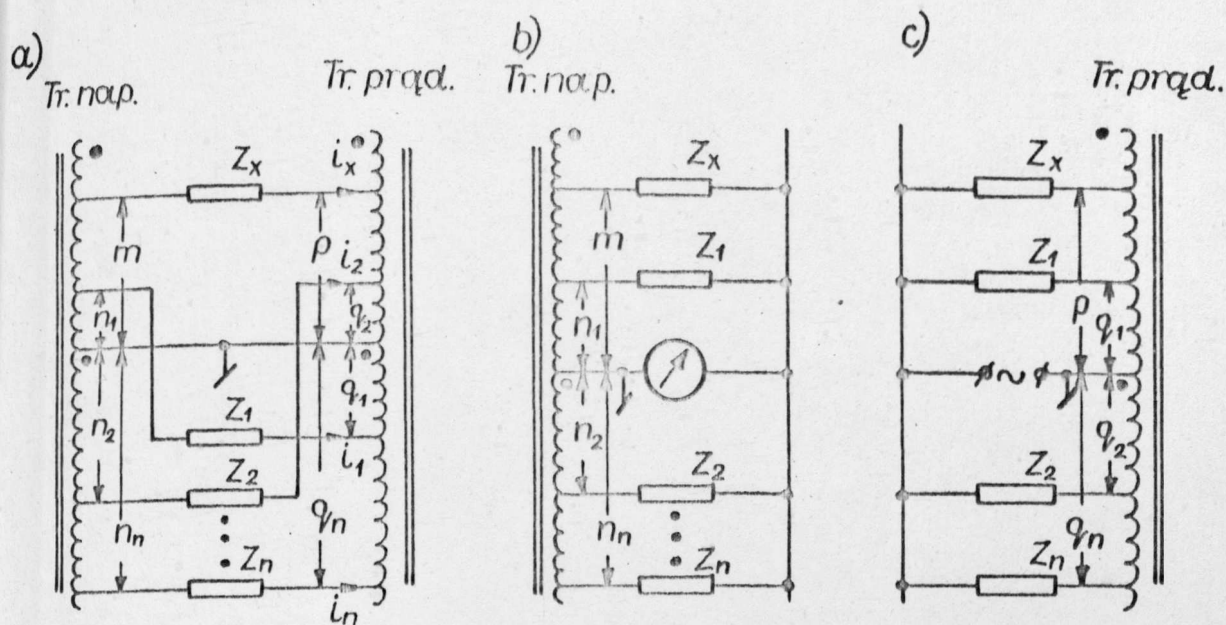
W praktyce drugie z równań /5.1.3/ nie może być spełnione, ponieważ $\frac{m_p}{n_q} > 0$ /warunek z pierwszego równania/. Analogiczne rozważania można przeprowadzić dla wszystkich dotychczas omówionych mostków z tym samym wnioskiem, że nie można uzyskać dokładnej równowagi.

Warunki dokładnej komparacji rzeczywistych elementów L-C można osiągnąć w tzw. mostkach wieloramiennych [26]. Mostki wieloramienne można podzielić na trzy rodzaje:

- mostki z transformatorem napięciowym i prądowym
- mostki z transformatorem napięciowym
- mostki z transformatorem prądowym

Przedstawiono je schematycznie na rysunku 5.1.5.

Warunek równowagi wyprowadzimy najpierw dla układu z rysunku 5.1.5a. Mostek jest w równowadze, gdy wypadkowy strumień magnetyczny transformatora prądowego Ψ jest równy zero. Wtedy napięcie indukowane na uzwojeniu wtórnym transformatora prądowego równa się zero. Wypadkowy strumień Ψ jest su-



Rys.5.1.5. Mostki transformatorowe wieloramienne

- a/ z transformatorami prądowym i napięciowym
- b/ z transformatorem napięciowym
- c/ z transformatorem prądowym

mą strumieni od poszczególnych prądów i_k , to znaczy

$$\Psi = \sum_{k=1}^n \Psi_k + \Psi_{ix} = 0 \quad /5.1.4/$$

W przypadku silnego sprzężenia uzwojeń transformatora prądowego strumień magnetyczny Ψ_k jest proporcjonalny do prądu i_k i ilości zwojów q_k . Znak strumienia zależy od kierunku nawoju zwojów i kierunku płynącego prądu. Założymy, że znak strumienia jest dodatni, gdy czarna kropka jest zaznaczona przy przewodzie /w przypadku przedstawionym na rysunku odpowiada to położeniu powyżej przewodu neutralnego/, a prąd płynie w kierunku do transformatora. Wartość strumienia magnetycznego Ψ_k zapiszemy wzorem

$$\psi_k = \alpha i_k q_k \text{ sign}(q_k) \quad /5.1.5/$$

gdzie:

$$\text{sign}(q_k) = \begin{cases} 1 & \text{gdy czarna kropka jest przy} \\ & \text{przewodzie } q_k \\ 0 & \text{gdy } q_k \text{ podłączone do przewo-} \\ & \text{du neutralnego} \\ -1 & \text{gdy czarna kropka jest przy} \\ & \text{przewodzie neutralnym wzglę-} \\ & \text{dem przewodu } q_k \end{cases} \quad /5.1.6/$$

α - współczynnik proporcjonalności

Po podstawieniu /5.1.5/ do /5.1.4/ otrzymamy

$$\sum_{k=1}^n i_k q_k \text{ sign}(q_k) + i_x p \text{ sign}(p) = 0 \quad /5.1.7/$$

Stosując oznaczenie /5.1.6/, napięcie na k-tym wyjściu transformatora napięciowego zapiszemy w postaci

$$E_k = E n_k \text{ sign}(n_k) \quad /5.1.8/$$

gdzie:

E - współczynnik proporcjonalności

n_k - ilość zwojów na k-tym wyjściu transformatora napięciowego

Wartość prądu i_k w gałęzi k można obliczyć ze wzoru

$$i_k = \frac{E_k}{Z_k} = \frac{n_k}{Z_k} E \cdot \text{sign}(n_k) \quad /5.1.9/$$

Po podstawieniu tego wyrażenia do wzoru /5.1.7/ otrzymujemy ogólny wzór na równowagę mostków wieloramiennych o postaci jak na rys.5.1.5a

$$\frac{m}{Z_x} \text{sign}(m) \text{sign}(p) + \sum_{k=1}^n \frac{n_k q_k}{Z_k} \text{sign}(n_k) \text{sign}(q_k) = 0 \quad \dots \quad /5.1.10/$$

Mostek z rysunku 5.1.5b odpowiada mostkowi z rysunku 5.1.5a, jeżeli

$$q_1 = q_2 = \dots = q_n = p$$

Po podstawieniu tego warunku do wzoru /5.1.10/ otrzymamy warunek równowagi mostka z rysunku 5.1.1b

$$\frac{m}{Z_x} \text{sign}(m) + \sum_{k=1}^n \frac{n_k}{Z_k} \text{sign}(n_k) = 0 \quad /5.1.11/$$

Podobnie, warunek równowagi mostka z rysunku 5.1.5c otrzymamy z równania /5.1.10/ przy założeniu, że $m = n_1 = n_2 = \dots = n_n$

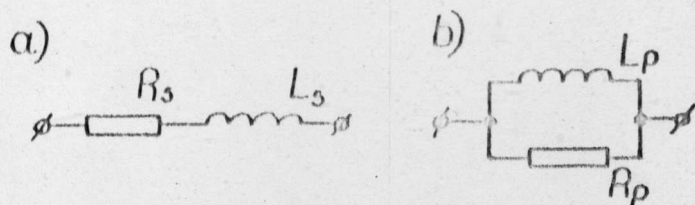
$$\frac{p}{Z_x} \text{sign}(p) + \sum_{k=1}^n \frac{q_k}{Z_k} \text{sign}(q_k) = 0 \quad /5.1.12/$$

Ważną zaletą mostków wieloramiennych jest możliwość doboru takiej liczby zwojów n_i , p_i , która pozwala na stosowanie elementów Z_{oi} z optymalnego zakresu ich wartości. Przy podejmowaniu decyzji konstrukcji jednego z wielu możliwych wariantów mostków do komparacji L-C, należy ustalić kryterium doboru najlepszego rozwiązania. Na ogół w mostkach stosuje się dwa kryteria: dokładność i wygoda pomiaru /niezależny odczyt itp/. W naszym przypadku za najważniejsze uznamy dokładność komparacji, natomiast pozostałe kryteria potraktujemy drugorzędnie. Przegląd literaturowy stosowanych dotychczas układów, pozwala na wyeliminowanie większości wariantów, jako mniej przydatnych i skupienie uwagi tylko na niektórych. Omó-

wione zostaną teraz bardziej szczegółowo wieloramienne układy transformatorowe pozwalające na dokładne wyznaczenie wartości indukcyjności w odniesieniu do pojemności.

5.2. Konstrukcja najważniejszych typów mostków transformatorowych do porównań L-C

Dla ustalonej pulsacji ω impedancję rzeczywistej cewki indukcyjnej można przedstawić w szeregowym lub równoległym schemacie zastępczym /rys.5.2.1/



Rys.5.2.1. Schematy zastępcze cewki indukcyjnej

a/ szeregowy
b/ równoległy

Dla ustalonej pulsacji ω można przeliczyć parametry równoważnych układów według następujących wzorów

$$Q = \frac{\omega L_s}{R_s} = \frac{R_p}{\omega L_p} \quad /5.2.1/$$

$$R_s = R_p \frac{1}{1+Q^2}, \quad R_p = R_s (1+Q^2)$$

$$L_s = L_p \frac{Q^2}{1+Q^2}, \quad L_p = L_s \left(1 + \frac{1}{Q^2} \right) \quad /5.2.2/$$

Do wyznaczenia indukcyjności z dokładnością rzędu $1 \cdot 10^{-5}$ w paśmie częstotliwości pracy cewki ($0-0,1\omega_0$) trzeba wyzna-

czyć parametry L_0 , ω_0 /rys.2.3.4/ oraz elementy M , L_e , R_e /rys.2.3.5/, przy czym o wartości indukcyjności decyduje głównie parametr L_0 . Dla rzeczywistych cewek parametr ten ma zbliżoną wartość do L_s w całym zakresie częstotliwości. Stąd można przyjąć, że dokładność wyznaczania L_0 jest w przybliżeniu równa dokładności pomiaru L_s . Natomiast indukcyjność w równoległym układzie zastępczym L_p przy małych dobrociach różni się znacznie od L_0 , przy czym zachodzi $\lim_{\omega \rightarrow 0} L_p = \infty$.

W dalszym ciągu rozważania ograniczymy do możliwości wyznaczenia indukcyjności w szeregowym układzie zastępczym: bezpośrednio lub pośrednio przez wstępne wyznaczenie L w równoległym układzie zastępczym i przeliczenie na szeregowy.

a. Wyznaczanie wartości indukcyjności w szeregowym układzie zastępczym metodą bezpośrednią

Schemat wieloramiennego mostka do wyznaczania wartości indukcyjności bezpośrednio w szeregowym układzie zastępczym przedstawiono na rysunku 5.2.2 [42, 43].

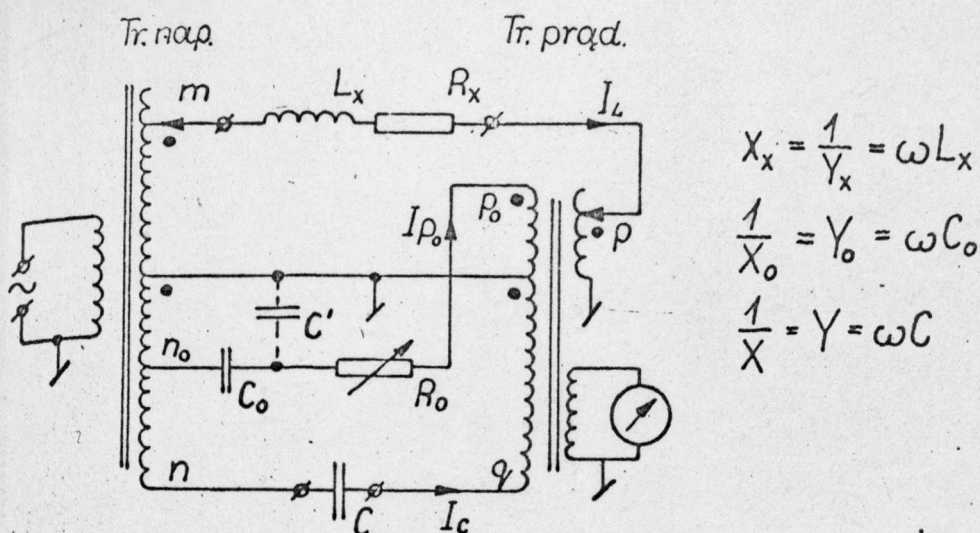
Założymy, że parametry mostka spełniają równanie

$$nq C = n_0 p_0 C_0 \quad /5.2.3/$$

wtedy otrzymujemy przybliżone warunki równowagi, które określone są wzorami /D.2/

$$\omega L_x = \frac{mp}{nq} \cdot \frac{1}{\omega C} \quad /5.2.4/$$

$$Q_x = \omega C_0 R_0 \quad /5.2.5/$$



Rys.5.2.2. Zasada transformatorowego układu do porównań L-C

W układzie tym można uzyskać niezależną regulację w następujący sposób:

ustawienie warunku /5.2.3/ - przekładniami transformatorów n_0 , p_0

regulację L_x - przekładniami transformatorów m , p

regulację Q_x - rezystorem R_0

W podstawowym warunku równowagi /5.2.4/ występują tylko pulsacja ω i przekładnie transformatorów, a więc dokładnie znane parametry. Podstawową wadą układu jest szeregowe połączenie pojemności C_0 i rezystancji R_0 . Należy unikać szeregowych połączeń w precyzyjnych układach pomiarowych. W tym przypadku pojawi się stosunkowo duża, trudna do dokładnego wyznaczenia pojemność C . Rozpatrzmy obecnie warunki równowagi z uwzględnieniem tej pojemności. Założymy w dalszym ciągu, że spełnione jest równanie /5.2.3/, wtedy warunki równowagi sprowadzają się do postaci /D.3/

$$\omega L_x = \frac{mp}{nq} \frac{1}{\omega C} \quad /5.2.6/$$

$$Q_x = \omega (C_o + C') R_o \quad /5.2.7/$$

Pojemność C' nie wpływa zatem na główny warunek równowagi /5.2.6/. Wpływa tylko na równoważenie dobroci Q_x , której wartość jest mniej ważnym parametrem. Pojemność C' może być wykorzystana do regulacji dobroci. Równanie /5.2.6/ zależy od ilości zwojów transformatorów n, m, p, q i pulsacji tylko pod warunkiem, że spełnione jest równanie 5.2.3. W praktyce warunek ten można spełnić tylko w przybliżeniu. Rozważymy wpływ niedokładności ustalenia tego warunku na błąd kompensacji L-C danej równaniem /5.2.6/. Błąd metody wyznaczenia indukcyjności L określony jest wzorem

$$\delta_M = \frac{L_x - L_d}{L_d} \approx \frac{L_x - L_d}{L_x} = \frac{\omega L_x - \omega L_d}{\omega L_x} = \frac{X_x - X_d}{X_x} = 1 - \frac{X_d}{X_x} \quad /5.2.8/$$

gdzie:

L_x - wartość indukcyjności otrzymana z uproszczonego wzoru /5.2.6/,

L_d - wartość indukcyjności otrzymana z dokładnego wzoru /patrz D.3/.

Po podstawieniu wzorów /5.2.6/ i /D.3.2/ do /5.2.8/ otrzymamy

$$\delta_M = 1 - \frac{nqY \operatorname{tg}^2 \delta_{o1} + nqY - n_o p_o Y_o}{(nqY \operatorname{tg} \delta_{o1})^2 + (nqY - n_o p_o Y_o)^2} nqY$$

gdzie

$$\operatorname{tg} \delta_{o1} = \omega (C_o + C') R_o \quad /5.2.9/$$

pozostałe oznaczenia jak na rysunku 5.2.2.

Po sprowadzeniu do wspólnego mianownika i zredukowaniu otrzymujemy

$$\delta_M = \frac{(n_0 p_0 Y_0)^2 - nqY n_0 p_0 Y_0}{(nqY \operatorname{tg} \delta_{01})^2 + (nqY - n_0 p_0 Y_0)^2}$$

Drugi człon mianownika na podstawie /5.2.3/ można pominąć , wtedy

$$\delta_M = \frac{n_0 p_0 Y_0 - nqY}{(nqY \operatorname{tg} \delta_{01})^2} n_0 p_0 Y_0$$

Ponieważ $\operatorname{tg} \delta_{01} \approx Q_X$, więc wzór na błąd sprowadzi się do postaci

$$\delta_M = \frac{1}{Q_X^2} \frac{n_0 p_0 C_0 - nqC}{nqC} \quad /5.2.10/$$

Widać, że błąd ten w istotny sposób zależy od dobroci wzorca indukcyjności. Dobroć wzorców indukcyjności osiąga małe wartości /patrz tabele D.6.1, D.6.2/. Na ogół $Q_X \gg 3$ / dla $f \gg 300$ Hz/. Stąd otrzymamy warunek na wartość drugiego członu wzoru /5.2.10/ na poziomie nie większym niż kilka $\times 10^{-5}$. Jest to trudne do utrzymania, szczególnie dla pojemności C_0 . Dla zalecanych wzorców indukcyjności /0,1 H , 1 H/ osiąga ona duże wartości rzędu 0,1 - 1 μ F. Warunek /5.2.10/ można sprowadzić do zera przez regulację układu przy zwartej rezystancji R_0 . Ponieważ jednak występuje wtedy stosunkowo duża zmiana obciążenia układu transformatora / $R_0 \approx 1$ k Ω , $C_0 \approx 0,1-1 \mu$ F/ i w tym przypadku utrzymanie wymaganej dokładności zerowania warunku /5.2.10/ jest bardzo trudne.

Innym, trudnym problemem jest regulacja układu. Stosowane do komparacji wzorce indukcyjności /0,1 - 1 H/ mają przy ma-

łych częstotliwościach impedancję na poziomie kilkaset Ω . Narzuca to dodatkowe warunki na impedancję wyjściową transformatorów stosunkowych. Uzyskanie odpowiednio małej impedancji w wielodekadowych dzielnikach indukcyjnych jest trudne. Impedancja wyjściowa tych dzielników jest zmienna i zależy od położenia przełączników. Wynika stąd, że regulacja warunku /5.2.6/ przekładnią transformatora daje duże błędy i nie może być stosowana. Trzeba więc dodać dodatkową gałąź z pojemnością do regulacji warunku /5.2.6/. Powoduje to komplikację wzoru /5.2.6/. W tych warunkach utrzymanie równania /5.3.3/ z dużą dokładnością jest znacznie trudniejsze i jest źródłem dodatkowych błędów. Pogarsza się wtedy również zbieżność układu, gdyż trzeba jednocześnie równoważyć mostek /wzory 5.2.6/ i utrzymywać warunek określony równaniem /5.2.3/. Regulacja częstotliwością jest niewygodna, gdyż potrzebny jest szeroki zakres regulacji /indukcyjność zmienia swą wartość z częstotliwością/ przy utrzymaniu dużej dokładności. Z drugiej strony ważne jest wyznaczenie wartości indukcyjności w określonych punktach częstotliwości, co jest utrudnione przy takiej regulacji. Dodatkowo, jak pokażemy później, niezbędna jest odpowiednio duża filtracja wyższych harmonicznych, co przy regulacji częstotliwością jest trudne do zrealizowania.

Układ nadaje się do dokładnej komparacji L-C, jeśli dobroć mierzzonej indukcyjności jest odpowiednio duża $/Q \gg 10/$. Posiada znacznie rozbudowaną strukturę /w praktycznej realizacji do układu przedstawionego na rysunku 5.2.2 dochodzi dodatkowe ramię regulacji reaktancji/. Nie wszystkie elementy układu pracują w układzie trzyczaciskowym. Cechuje się skompli-

kowaną regulacją warunków równowagi. Wszystkie te czynniki komplikują pomiary i zmniejszają wiarygodność wyników komparacji w układzie.

b. Wyznaczanie wartości indukcyjności w szeregowym układzie zastępczym metodą pośrednią

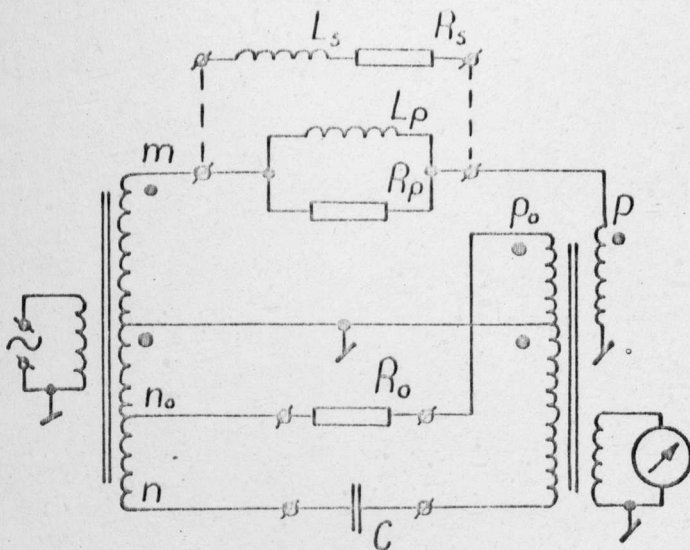
Ze względu na sumowanie strumieni magnetycznych /lub prądów/ przepływających przez równolegle połączone impedancje w wieloramiennych mostkach transformatorowych najdokładniej można mierzyć impedancje w równoległych układach zastępczych czyli admitancje trzyczaciskowe [47, 48] .

Uzyskuje się wtedy największą dokładność pomiaru, proste układy pomiarowe, łatwą i szybką regulację. Z kolei, jak pokazano na początku tego rozdziału, ostatecznym celem pomiaru wzorców L powinno być wyznaczenie indukcyjności w szeregowym układzie zastępczym. Rozważymy więc możliwość wyznaczenia indukcyjności w równoległym układzie zastępczym w mostku wieloramiennym z trzyczaciskowymi impedancjami i przeliczenie jej na szeregowy układ zastępczy. Schemat takiego mostka do porównania indukcyjności i pojemności przedstawiono na rysunku 5.2.3.

Po uwzględnieniu związków jakie zachodzą między wartościami elementów schematu zastępczego równoległego i szeregowego /5.2.2/ warunki równowagi sprowadzają się do postaci /patrz D.4/

$$\omega L_s = \frac{m_p}{n_q} \frac{1}{\omega C} \frac{1}{1 + \frac{1}{Q^2}} \quad /5.2.11/$$

$$Q = \frac{n_q}{n_o p_o} \omega C R_o \quad /5.2.12/$$



Rys.5.2.3. Mostek do pomiaru indukcyjności
w równoległym układzie zastępczym

Główny warunek równowagi mostka /5.2.11/ jest funkcją przekładni transformatorów, pulsacji, pojemności C i dobroci wzorca indukcyjności. Pierwsze trzy wielkości mogą być znane z bardzo dużą dokładnością. Człon $\frac{1}{1+1/Q^2}$ nazwiemy członem poprawkowym, ponieważ przy dużej dobroci błąd wyznaczenia Q w małym stopniu wpływa na dokładność komparacji L-C. Pokażemy później w analizie błędów, że nawet przy małej dobroci $1/Q \approx 3\%$ wpływ członu poprawkowego na dokładność komparacji L-C może być utrzymany na bardzo małym poziomie $\leq 1 \cdot 10^{-5}$.

Podsumowując, układ posiada podobne cechy jak układ omówiony poprzednio /rys.5.2.2/. Pozwala na osiągnięcie bardzo dużej dokładności komparacji L-C przy małych dobrociach. Zaletami jego w porównaniu z poprzednim układem są: znacznie prostsza struktura, łatwiejsza i szybsza regulacja, stosowanie tylko wzorców trzyczaciskowych dokładnie i jednoznacznie

zdefiniowanych. Zalety te powodują, że wynik komparacji L-C może być w tym układzie dokładniejszy i bardziej wiarygodny. Wadą układu jest występowanie członu poprawkowego w warunku równowagi.

Przyjętym kryterium wyboru układu jest dokładność komparacji, więc w dalszym ciągu będziemy rozpatrywali głównie układ z rysunku 5.2.3. Rozpatrzmy możliwość optymalizacji tego układu ze względu na dokładność porównania L-C.

5.3. Wybór optymalnych wariantów mostków transformatorowych do porównań L-C

Ważnym problemem rzutującym na dokładność porównania jest regulacja układu. W mostku wieloramiennym równoważenie można sprowadzić do regulacji składowej rzeczywistej i składowej urojonej. W dalszym ciągu rozważymy możliwości regulacji w układzie z rysunku 5.3.1. Składową urojoną można regulować zmianą częstotliwości zasilania, regulacją przekładni transformatorów m , p lub pojemnością C . Regulacja częstotliwością narzuca trudne do spełnienia warunki na osprzęt pomocniczy, natomiast regulacja przekładnią transformatora wprowadza błąd wynikający głównie ze stosunkowo dużego i zmieniającego się oporu wyjściowego regulowanego dzielnika napięcia. Założymy, że będziemy stosowali transformatory ze stałym podziałem. Również bezpośrednia regulacja pojemnością C jest niewskazana, gdyż kondensator C jest elementem, z którym porównujemy L i musi być bardzo dokładny. Zmiany indukcyjności powodują, że zachodzi potrzeba regulacji pojemności C na plus i na minus

wokół pewnej okrągłej wartości. Zamiast regulować wartość wzorca C wprowadzimy dodatkową gałąź z pojemnością C_0 , jak to pokazano na rysunku 5.3.1. Rozwiązanie takie komplikuje warunek równowagi, ale pozwala na osiągnięcie największej dokładności.

Część rzeczywistą warunków równowagi można równoważyć przez zmianę przekładni transformatora $/ n_0, p_0 /$ lub zmianę rezystancji R_0 . Regulacja dzielnikiem indukcyjnym wymaga stosunkowo małej impedancji wyjściowej dzielnika i dużej wartości rezystancji R_0 . Przy małych dobrociach rzędu kilka, mogą wystąpić trudności z utrzymaniem dużej wartości R_0 , wtedy lepsze wyniki można osiągnąć przy stosowaniu regulacji części rzeczywistej rezystorem R_0 .

Transformatory stosunkowe w omawianych układach komparacji spełniają następujące podstawowe funkcje:

- umożliwiają odwracanie fazy przebiegów, co pozwala na komparację L , C i regulację parametrów resztkowych porównywanych elementów;
- poprawiają dokładność komparacji $L-C$, gdyż pozwalają na dobranie najlepszych, ze względu na dokładność, wartości elementów porównywanych i elementów pomocniczych.

Można stosować układy z transformatorem napięciowym, prądowym lub z oboma jednocześnie. Stosowanie obu typów transformatorów jednocześnie pozwala na zwiększenie swobody w doborze wartości elementów, ale zwiększa niedokładność wprowadzaną przez ich parametry resztkowe.

Przeprowadzono badania nad wpływem transformatora prądowego na dokładność pomiaru. Okazało się, że mimo że w litera-

turze podawane były dokładności przekładni do $1 \cdot 10^8$ przy stosunku 1:1 i do 10^{-7} przy stosunku 1:10, to wykonywane w Instytucie Metrologii Elektrycznej transformatory pracujące w układzie prądowym miały w przybliżeniu o rząd gorszą dokładność niż w odpowiadającym im układzie napięciowym. Wykonane transformatory o odpowiednio małej impedancji resztkowej dawały dokładność $(5 \div 10) \times 10^{-6}$ przy przekładni 1:1 i $(1 \div 2) \times 10^{-5}$ przy przekładni 1:10 [44]. Przegląd rozwiązań układów transformatorowych wskazuje, że transformatory prądowe stosowane są znacznie rzadziej niż napięciowe. Na ogół w specjalnych układach lub przy mniej dokładnych pomiarach, co potwierdzają przeprowadzone w IME wyniki badań. Zaleca się stosować transformator prądowy tylko przy stosunku 1:1 dla ramion, w których umieszczone są porównywane elementy L, C. W rozwiązaniu tym unika się straty dokładności w transformatorze prądowym /stosunek 1:1 przekładni może być utrzymany z dużą dokładnością/. Pozostaje możliwość stosowania dużych przekładni w ramionach pomocniczych, co ułatwia dobór optymalnych warunków pracy w tych ramionach. Schemat takiego mostka przedstawiono na rysunku 5.3.1.

Warunki równowagi tego mostka określone są wzorami

/dodatek D.5/

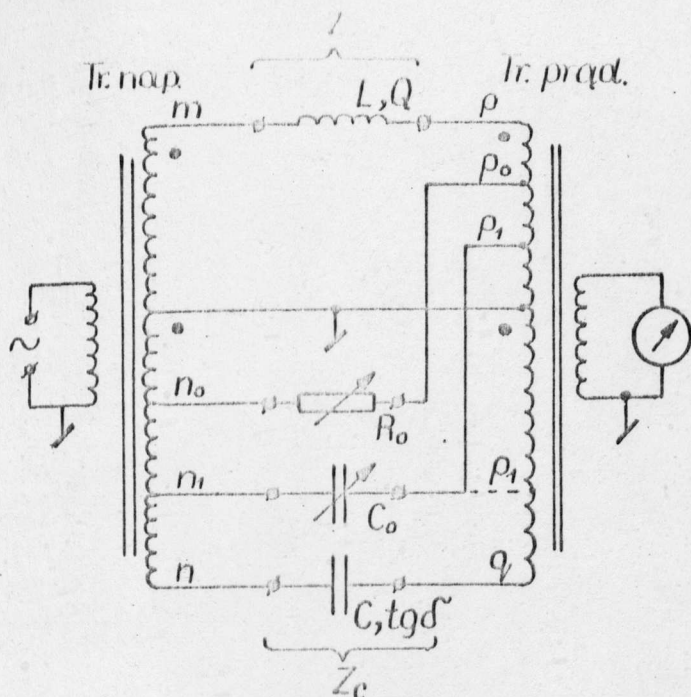
$$\omega^2 L C \frac{n_q}{n_p} (1 - \gamma) \left(1 + \frac{1}{Q^2}\right) = 1 \quad /5.3.1/$$

$$Q = \frac{1 - \gamma}{\varphi} \quad /5.3.2/$$

gdzie

$$\gamma = \frac{n_1 p_1}{n_q} \frac{C_0}{C} \operatorname{sign}(p_1) \quad /5.3.3/$$

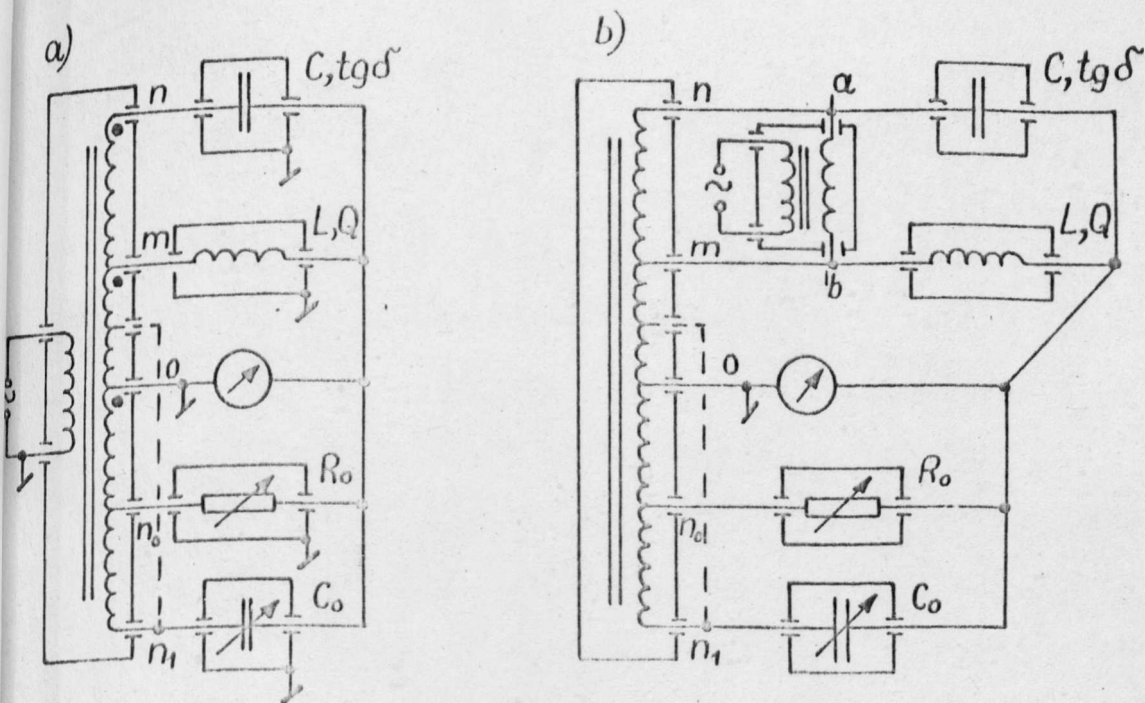
$$\varphi = \frac{n_0 p_0}{n_q} \frac{1}{\omega C R_0} - \operatorname{tg} \delta \quad /5.3.4/$$



Rys.5.3.1. Mostek do wyznaczania wartości indukcyjności z transformatorem prądowym

Wzory określające warunki równowagi są skomplikowane, ponieważ uwzględniono w nich dodatkową gałąź regulacji reaktancji /z pojemnością C_0 / i współczynnik strat kondensatora C .

Pokażemy poniżej, że w najważniejszych praktycznych przypadkach, użycie samego transformatora napięciowego umożliwia pracę elementów R_0 , C_0 w optymalnym ze względu na dokładność komparacji LC zakresie ich wartości. Układ bez transformatora prądowego pozwala również na kalibrację stosunku napięć wprost na porównywanych elementach L, C . Umożliwia to osiągnięcie ekstremalnych dokładności komparacji. Schemat układu z transformatorem napięciowym do komparacji $L-C$ pokazano na rysunku 5.3.2a.



Rys.5.3.2. Transformatorowe układy komparacji L-C

- a/ z transformatorem napięciowym zasilanym pośrednio,
b/ z transformatorem napięciowym zasilanym bezpośrednio /auto-transformatorem/.

Warunki równowagi tego mostka otrzymamy z warunków poprzedniego układu /wzory 5.3.1 - 5.3.4/, przyjmując

$$p = p_0 = q = |p_1 \operatorname{sign}(p_1)|$$

przy czym zamiast $\operatorname{sign}(p_1)$ wystąpi $\operatorname{sign}(n_1)$. Po uwzględnieniu tych warunków otrzymamy następujące wzory na równowagę mostków z rysunku 5.3.2a

$$\omega LC \frac{n}{m} (1 - \gamma^2) \left(1 + \frac{1}{Q^2}\right) = 1 \quad /5.3.5/$$

$$Q = \frac{1 - \gamma^2}{\varphi} \quad /5.3.6/$$

gdzie

$$\gamma = \frac{n_1}{n} \frac{C_0}{C} \operatorname{sign}(n_1) ; \quad \varphi = \frac{n_0}{n} \frac{1}{\omega C R_0} - \operatorname{tg} \delta \quad /5.3.7/$$

Układ pozwala na osiągnięcie bardzo dużej dokładności komparacji L-C pod warunkiem, że impedancje elementów są odpowiednio duże /większe niż kilkaset Ω /. W niektórych przypadkach mogą wystąpić mniejsze impedancje. Na przykład wzorec indukcyjności o wartości nominalnej 0,1 H przy pulsacji $\omega = 10^3$ ($f \approx 160$ Hz) po uwzględnieniu rezystancji uzwojeń ma moduł impedancji rzędu 180Ω . Można zmniejszyć znacznie wpływ obciążenia w układzie z rysunku 5.3.2a przez zastąpienie transformatora napięciowego zasilanego pośrednio autotransformatorem i dodanie transformatora symetryzującego. Układ taki przedstawiono na rysunku 5.3.2b. Impedancje cewki indukcyjnej L i kondensatora C obciążają tylko transformator symetryzujący i nie wpływają na dokładność podziału napięcia. Niezbędnym warunkiem jest tu tylko odpowiednio duża impedancja wejściowa transformatora na odczepach n-m ($>1000\Omega$), co jest stosunkowo łatwe do osiągnięcia. Wzory na warunki równowagi są identyczne jak w wariancie z rysunku 5.3.2a. Występujące pewne różnice w warunkach pracy uwzględnione będą w analizie błędów. Wadą wariantu b /rys.5.3.2b/ w porównaniu z wariantem a /rys.5.3.2a/ jest mniejsza dokładność przekładni transformatora spowodowana głównie niesymetrycznym sposobem zasilania.

Największą dokładność komparacji L-C można więc uzyskać w układzie z rysunku 5.3.2a/. W szczególnych przypadkach /głównie przy małej impedancji wzorca indukcyjności/ większą dokładność można uzyskać przy stosowaniu wariantu układu

z rysunku 5.3.2b. Analizę dokładności komparacji L-C przeprowadzimy dla obu wariantów układów z rysunku 5.3.2.

5.4. Analiza dokładności transformatorowych układów do porównań L-C

Analizę dokładności przeprowadzimy dla układów z rysunku 5.3.2 /varianty a,b/, dla których warunki równowagi przedstawiają wzory /5.3.5/, /5.3.6/. Wyprowadzimy zależność na dokładność porównania L-C wynikającą z dokładności określenia elementów układu. Następnie rozważymy wpływ parametrów resztkowych, których bezpośrednio w schematach i warunkach równowagi nie uwzględniono. Założymy, że wymagana dokładność porównania wynosi $1 \cdot 10^{-5}$. Elementy, których wpływ na dokładność komparacji jest zbliżony do tego poziomu lub większy należy uwzględnić w miarę możliwości w formie poprawek /o ile to możliwe/. Elementy, których wpływ jest rzędu kilka $\times 10^{-6}$ i mniejszy uznamy za pomijalnie małe.

W dalszej analizie będziemy rozróżniali dwa typy błędów:
- błąd przypadkowy wielkości x zdefiniowany wzorem

$$\delta_x = \frac{\Delta x}{|x|}$$

gdzie Δx - błąd bezwzględny, nieujemna liczba taka, że
wartość rzeczywista $x_r \in \langle x - \Delta x, x + \Delta x \rangle$

x - wynik pomiaru

W dalszej części będziemy stosowali wzór

$$\delta_x = \delta_{\frac{1}{x}} \quad /5.4.1/$$

- błąd systematyczny /metody/ wielkości x . Błąd ten pojawia się przy stosowaniu uproszczonego modelu zjawiska polegającego na nie uwzględnieniu parametru y w warunkach równowagi. Zdefiniujemy go wzorem

$$\delta_y^s(x) = \frac{x_u - x_d}{x_d}$$

gdzie: x_u - wielkość otrzymana przy stosowaniu uproszczonego modelu bez uwzględnienia parametru y ,
 x_d - wielkość otrzymana przy stosowaniu dokładnego modelu z uwzględnieniem parametru y .

W dalszej części będziemy stosowali wzór

$$\delta_y^s(x) = -\delta_y^s\left(\frac{1}{x}\right) \quad /5.4.2/$$

W przypadku, gdy błąd systematyczny jest zbyt duży należy poprawkę obliczoną ze wzoru

$$\Delta x_y = -x_u \cdot \delta_y^s(x) \quad /5.4.3/$$

dodać do wyniku pomiaru.

Przez dokładność komparacji L-C będziemy rozumieli dokładność wyznaczenia wartości indukcyjności pod warunkiem, że znana jest dokładnie wartość pojemności C ($\delta_c = 0$). W przypadku, gdy błąd systematyczny będzie dotyczył dokładności komparacji L-C zamiast oznaczenia $\delta_y^s(L-C)$ będziemy stosowali uproszczone oznaczenie δ_y^s .

Do dalszej analizy wprowadzimy oznaczenia przekładni transformatorów

$$k = \frac{n}{m}, \quad k_R = \frac{n_0}{m}, \quad k_c = \frac{n_1}{m}$$

Warunki równowagi mostków z rysunku 5.3.2 zapiszemy teraz w postaci

$$LC \omega^2 k (1-\gamma) \left(1 + \frac{1}{Q^2}\right) = 1$$

$$Q = \frac{1-\gamma}{\varphi}$$

/5.4.4/

gdzie

$$\gamma = \frac{k_c C_o}{k C} \operatorname{sign}(n_1) , \quad \varphi = \frac{k_R}{k} \frac{1}{\omega C R_o}$$

/5.4.4'/

Dokładność wyznaczenia wartości indukcyjności można określić wzorem

$$\delta_L = \delta_{L-C} + \delta_C$$

Dokładność wzorca odnośnikowego δ_C może być utrzymana na poziomie nie gorszym niż $1 \cdot 10^{-6}$ [48] , czyli pomijalnie małym. W dalszej części pracy będziemy zajmowali się jedynie błędem komparacji δ_{L-C} jako kryterium jakości metody.

Ze wzoru /5.4.1/ wynika, że dokładność komparacji L-C równa jest dokładności określenia iloczynu $L \cdot C$, tzn. $\delta_{L-C} = \delta_{L \cdot C}$.

Ze wzoru /5.4.4/ otrzymamy więc

$$\delta_{L-C} = \delta_{\omega^2 k (1-\gamma) \left(1 + \frac{1}{Q^2}\right)}$$

i dalej stosując metodę różniczeki zupełnej otrzymamy

$$\delta_{L-C} = 2\delta_{\omega} + \delta_k + \delta_{1-\gamma} + \delta_{1+\frac{1}{Q^2}}$$

Stosując różniczkę zupełną do wyrażeń na $1-\gamma$ i $1+\frac{1}{Q^2}$ otrzymamy

$$\delta_{1-\gamma} = \frac{\gamma}{1-\gamma} (\delta_k + \delta_{R_o} + \delta_{C_o} + \delta_C)$$

/5.4.5/

$$\delta_{1+\frac{1}{Q^2}} = \frac{2}{1+Q^2} \delta_Q \quad /5.4.6/$$

W rzeczywistych układach spełnione są warunki

$$\delta_k, \delta_C, \delta_{R_0} \ll \delta_{C_0} \quad \text{oraz} \quad \delta_k, \delta_\omega, \delta_C \ll \delta_{R_0}$$

wtedy wzór na dokładność komparacji L-C przyjmie uproszczoną postać

$$\delta_{L-C} = 2\delta_\omega + \delta_k + \frac{\gamma}{1-\gamma} \delta_{C_0} + \frac{2}{1+Q^2} \delta_{R_0} \quad /5.4.7/$$

Przy wyprowadzaniu tego wzoru założyliśmy, że współczynnik strat kondensatora C, $\text{tg} \delta = 0$. Wpływ $\text{tg} \delta$ na dokładność komparacji rozważymy później, gdy analizować będziemy błędy wprowadzane przez parametry resztkowe układu.

Rozpatrzmy teraz wielkości poszczególnych błędów we wzorze 5.4.7.

$2\delta_\omega$ - przy zasilaniu układu generatorem kwarcowym uzyskanie stabilności, a następnie dokładności pomiaru na poziomie lepszym niż 10^{-6} nie przedstawia problemu i człon ten możemy uznać za pomijalnie mały;

δ_k - dokładność przekładni transformatorów napięciowych może być utrzymana na poziomie lepszym niż 10^{-6} [5], a więc również pomijalnie małym;

$\frac{\gamma}{1-\gamma} \delta_{C_0}$ - współczynnik γ zależy od odstrojenia elementów L, C, ω od wartości nominalnej. W układach tych jest na ogół $\gamma < 10^{-2}$. Dokładność pojemności C_0 może być utrzymana na poziomie lepszym niż 10^{-4} . Więc wpływ członu $\frac{\gamma}{1-\gamma} \delta_{C_0}$ również jest pomijalnie mały;

$\frac{2}{1+Q^2} \delta_{R_0}$ - wpływ tego członu zależy silnie od dobroci cew-

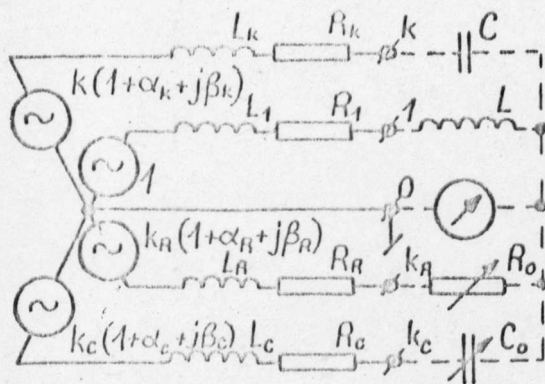
ki Q . Dobroć wzorców indukcyjności przy małej częstotliwości jest mała, stąd człon ten będzie na ogół głównym źródłem błędów komparacji. Wymagane jest tu dokładne wyznaczenie wartości rezystancji R_0 . Możliwe są do uzyskania dokładności rezystancji δ_{R_0} od 10^{-4} do 10^{-5} . Stąd dla dobroci $Q > 5$ wpływ ten można zminimalizować do pomijalnie małej wartości. Rozpatrywane wzorce indukcyjności mają dobroć $Q > 5$ przy częstotliwości większej niż kilkaset Hz. Stąd wniosek, że w uproszczonym modelu /warunki równowagi /5.3.5// można uzyskać wymaganą dokładność porównania L-C przy częstotliwościach większych niż kilkaset Hz.

Rozpatrzmy wpływ pominięcia w warunkach równowagi parametrów resztkowych na dokładność komparacji L-C. Parametry te podzielimy na cztery grupy:

- parametry resztkowe transformatora stosunkowego,
- parametry resztkowe doprowadzeń,
- parametry resztkowe elementów R, L, C ,
- pojemności pasożytnicze do masy.

a. Wpływ parametrów transformatora stosunkowego i doprowadzeń na dokładność porównania L-C

Do analizy wpływu parametrów transformatora stosunkowego posłużymy się schematem zastępczym przedstawionym na rysunku 5.4.1.



Rys.5.4.1. Schemat zastępczy transformatora do komparacji L-C

W schemacie tym parametry α , β określają odpowiednio błąd modułu i fazy przekładni nieobciążonego transformatora.

Wszystkie przekładnie odniesiono do odczepu 1 transformatora, do którego dołączona jest indukcyjność L . Indukcyjności rozproszenia L_k , L_1 , L_R , L_C , rezystancje R_k , R_1 , R_R , R_C charakteryzują wpływ obciążenia transformatora na błąd przekładni.

Rozpatrzmy obecnie wpływ poszczególnych parametrów transformatora na dokładność komparacji L-C.

- Wpływ błędu przekładni transformatora α , β na dokładność komparacji L-C.

Wpływ błędu modułu przekładni α_k uwzględniono we wzorze /5.4.7/ jako δ_k . Jeśli do wzoru na warunek równowagi mostka /5.4.4/ wstawimy przekładnię transformatora k błąd systematyczny komparacji L-C spowodowany pominięciem błędu modułu α_k wyniesie

$$\delta_{\alpha_k}^s \cong \frac{\frac{1}{k} - \frac{1}{k(1+\alpha_k)}}{\frac{1}{k}} \cong \alpha_k \quad /5.4.8/$$

Wartość bezwzględna współczynnika α_k typowych precyzyjnych układach transformatorów napięciowych jest mniejsza niż $1 \cdot 10^{-6}$, stąd można uznać ten błąd za pomijalnie mały.

Wpływ błędu fazy β_k rozważymy następująco. Wartość $\beta_k \neq 0$ powoduje, że przez kondensator C płynie dodatkowy prąd I_β o wartości

$$I_\beta = \frac{k \cdot j \beta_k}{\frac{1}{j\omega C}} = -k \beta_k \omega C,$$

który jest w fazie lub przeciwfazie /zależnie od tego, czy $\beta_k > 0$ czy $\beta_k < 0$ / z prądem I_{R_0} płynącym przez rezystor R_0 . Spowoduje to następujący błąd wyznaczenia wartości prądu I_{R_0}

$$\delta_{\beta_k}^s(I_{R_0}) = \frac{I_{R_0} - (I_{R_0} - I_\beta)}{I_{R_0} - I_\beta} \cong \frac{I_\beta}{I_{R_0}} \cong \frac{-k \beta_k \omega C}{\frac{k_R}{R_0}} = -\beta_k \frac{k}{k_R} \omega C R_0$$

stąd na podstawie /5.4.4/ otrzymamy wzór na błąd wyznaczenia wartości rezystancji R_0 spowodowany pominięciem błędu fazy przekładni transformatora β_k

$$\delta_{\beta_k}^s(I_{R_0}) = \delta_{\beta_k}^s(R_0) \cong -\beta_k \cdot Q$$

Po uwzględnieniu współczynnika $\frac{2}{1+Q^2}$ we wzorze na błąd komparacji L-C spowodowany niedokładnością wyznaczenia wartości R_0 /5.4.6/ otrzymamy wzór na systematyczny błąd komparacji L-C spowodowany pominięciem błędu fazy przekładni β_k we wzorze na równowagę mostka /5.4.4/

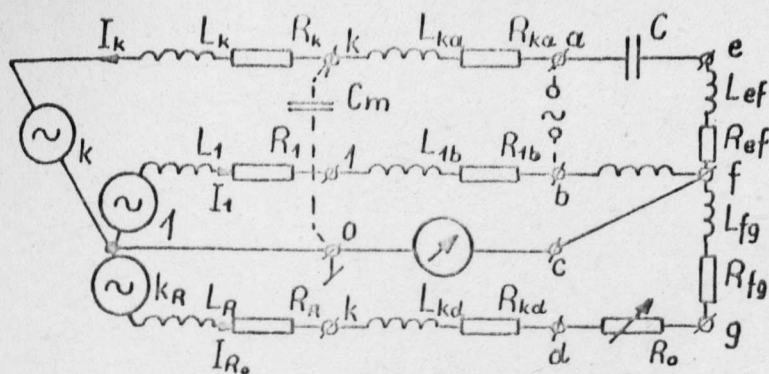
$$\delta_{\beta_k}^s = - \frac{2Q}{1+Q^2} \beta_k \quad /5.4.9/$$

W typowych wykonaniach precyzyjnych transformatorów stosunkowych $\beta_k < \text{kilka} \times 10^{-6}$ [32], współczynnik $\frac{2Q}{1+Q^2} < 1$, więc wpływ pominięcia β_k można sprowadzić do pomijalnie małej wartości.

Parametry $\alpha_R, \beta_R, \alpha_c, \beta_c$ są tego samego rzędu co α_k, β_k /są to błędy przekładni k_R, k_C /. Ich wartości wchodzi tylko do członu poprawkowego równań równowagi /5.4.4/, stąd ich wpływ na dokładność komparacji L-C jest mniejszy od wpływu α_k i β_k i tym bardziej pomijalnie mały.

Przejdziemy teraz do rozpatrzenia indukcyjności rozproszenia i rezystancji resztkowych transformatora stosunkowego. Ponieważ parametry resztkowe kabli przedstawiane są w postaci szeregowego połączenia indukcyjności i rezystancji, rozpatrzmy ich wpływ łącznie z indukcyjnościami rozproszenia i rezystancjami wyjściowymi transformatora. Wpływ tych parametrów, w niektórych punktach jest różny w obu wariantach układów z rysunku 5.3.2. Dlatego w przypadkach tych przeprowadzimy analizę błędów oddzielnie. Schemat zastępczy obrazujący wpływ rezystancji i indukcyjności resztkowych przedstawiono na rysunku 5.4.2.

W schemacie tym nie uwzględniono gałęzi z kondensatorem C_0 . Charakter błędów wnoszonych przez resztkowe indukcyjności i rezystancje w tym obwodzie jest taki sam jak w obwodzie z pojemnością C. Ponieważ $k_c \ll k$ i $\frac{1}{\omega C_0} \gg \frac{1}{\omega C}$, więc prądy w gałęzi C_0 są znacznie mniejsze niż w gałęzi C. Pokażemy, że wpływ parametrów resztkowych gałęzi C jest na ogół pomijalnie mały lub zbliżony do pomijalnie małego. Wpływ tych elementów w obwodzie C_0 jest znacznie mniejszy więc również pomijalnie



Rys.5.4.2. Układ komparacji L-C z zaznaczonymi parametrami resztkowymi transformatora i doprowadzeń
 wariant a - zasilanie układu z elementów k, 1, k_R
 wariant b - zasilanie układu z punktów a-b

mały i nie będziemy zajmowali się tym szczegółowo.

Wpływ elementów resztkowych R, L na dokładność komparacji L-C zależy również od sposobu połączeń przewodów łączących. Rozpatrzmy tylko przypadek pokazany na rys.5.4.2, w którym wszystkie doprowadzenia podłączono do zacisku cewki indukcyjnej L oznaczonego na rys.5.4.2 literą f. Taki sposób podłączenia zapewnia minimalizację wpływu resztkowych parametrów kabli łączących na dokładność komparacji L-C. Do oszacowania wielkości tego wpływu założymy, że indukcyjności doprowadzeń są mniejsze niż 1 μH , natomiast rezystancje doprowadzeń są mniejsze niż 10 m Ω .

- Wpływ parametrów resztkowych kabla e-f łączącego kondensator C z zaciskiem cewki indukcyjnej L na dokładność komparacji L-C

We wzorze na warunek równowagi mostka /5.4.4/ założono, że między punktami a, f występuje pojemność C. W rzeczywistości występuje szeregowe połączenie pojemności C z elementami resztkowymi kabla R_{ef}, L_{ef}. Rezystancja R_{ef} powoduje przyrost współczynnika strat tg δ kondensatora C o wartości $\omega C R_{ef}$. Przy typowych praktycznych wielkościach C = 10 nF, R_{ef} $\leq$ 10 m Ω , $\omega \leq 10^4$ przy-

rost współczynnika strat kondensatora C spowodowany rezystancją R_{ef} wynosi

$$\Delta tg_{ef} = \omega C R_{ef} \leq 10^4 \cdot 10^{-8} \cdot 10^{-2} = 10^{-6}$$

Pokażemy później, że wpływ $tg \delta$ kondensatora C na dokładność komparacji L-C jest mniejszy niż jego wartość. Więc wpływ rezystancji R_{ef} jest pomijalnie mały.

Indukcyjność L_{ef} wpływa na część urojoną impedancji między punktami a, f zgodnie ze wzorem

$$Z = \frac{1}{j\omega C} + j\omega L_{ef} = \frac{1}{j\omega \frac{C}{1 - \omega^2 L_{ef} C}}$$

przy założeniu, że $\omega^2 L_{ef} C \ll 1$

$$Z = \frac{1}{j\omega C (1 + \omega^2 L_{ef} C)}$$

Odpowiada to błędowi systematycznemu pojemności C, równemu

$$\delta_c^s(L_{ef}) = - \omega^2 L_{ef} C \quad /5.4.10/$$

Stąd na podstawie /5.4.2/ błąd systematyczny komparacji L-C spowodowany indukcyjnością resztkową L_{ef} wyniesie

$$\delta_{L_{ef}}^s = \omega^2 L_{ef} C \quad /5.4.11/$$

W typowych warunkach $C = 10 \text{ nF}$, $L_{ef} < 1 \text{ } \mu\text{H}$, $\omega < 10^4$, wtedy $|\delta_{L_{ef}}^s| < 10^{-6}$, a więc błąd ten ma wartość pomijalnie małą.

- Wpływ rezystancji resztkowych w obwodzie rezystora R_0 na dokładność komparacji L-C

Jak pokazano na rysunku 5.4.2 rezystancje resztkowe R_R , R_{kd} , R_{fg} są włączone szeregowo z regulowaną rezystancją R_0 . Powodują więc one względny błąd wyznaczenia wartości R_0 określony wzorem

$$\delta_{R_R + R_{kd} + R_{fg}}^s(R_0) = - \frac{R_R + R_{kd} + R_{fg}}{R_0}$$

W odniesieniu do dokładności komparacji L-C uwzględnimy współczynnik $\frac{2}{1+Q^2}$ /wzór 5.4.7/, wtedy

$$\delta_{R_R+R_{kd}+R_{fg}} = - \frac{2}{1+Q^2} \frac{R_R+R_{kd}+R_{fg}}{R_0} \quad /5.4.12/$$

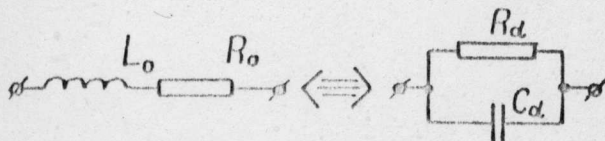
Błąd ten może osiągnąć stosunkowo dużą wartość przy małych dobrociach. Na przykład dla $Q = 3$, $R_{fg}+R_{kd}+R_R = 50 \text{ m}\Omega$ wartość błędu $|\delta_{R_R+R_k+R_{fg}}| < 1 \cdot 10^{-5}$ otrzymuje się, gdy $R_0 > 1 \text{ k}\Omega$. Wynika stąd, że wpływ rezystancji R_R , R_k , R_{fg} może być znaczny przy małych dobrociach i należy brać go pod uwagę. Rezystancje R_{kd} , R_{fg} można wcechować bezpośrednio do wartości rezystancji R_0 . Natomiast wartość R_R wyznaczona jest w pomiarze parametrów resztkowych transformatora stosunkowego z błędem bezwzględnym nie przekraczającym $1 \text{ m}\Omega$. Dokładność wyznaczenia wartości R_0 sumarycznie z kablami pomiarowymi ograniczona jest niepewnością złącz. Rezystancje złącz na ogół nie przekraczają $1 \text{ m}\Omega$. Stąd sumaryczny błąd wyznaczenia sumy $R_{kd} + R_{fg} + R_R$ może być utrzymany na poziomie kilku $\text{m}\Omega$. Wnosi to dla rezystancji $R_0 > 200 \Omega$ błąd wyznaczenia wartości $R_0 < \text{kilka} \times 10^{-6}$, który w odniesieniu do dokładności komparacji L-C mnożony jest przez współczynnik $\frac{2}{1+Q^2}$ mniejszy od 1. Stąd wniosek, że przy małej dobroci wpływ rezystancji resztkowych gałęzi R_0 może być sprowadzony do pomijalnie małej wartości nawet przy małych dobrociach cewki ($Q \gg 1$) i małych wartościach rezystora R_0 rzędu kilkaset Ω .

- Wpływ indukcyjności pasożytniczych w gałęzi regulacji R_0 na dokładność komparacji L-C

Oznaczmy sumaryczną indukcyjność szeregową obwodu symbolem L_0 . Wtedy

$$L_o = L_R + L_{kd} + L_{fg}$$

Przeliczmy szeregowy obwód L_o , R_o na równoważny, równoległy układ C_d , R_d - rysunek 5.4.3



Rys.5.4.3. Różnoważne obwody: szeregowy R_o , L_o i równoległy R_d , C_d

Elementy układu równoległego obliczymy przy założeniu, że przy danej pulsacji ω impedancje obu obwodów są równe

$$R_o + j\omega L_o = \frac{1}{\frac{1}{R_d} + j\omega C_d}$$

Po rozwiązaniu układu otrzymamy

$$C_d = - \frac{L_o}{R_o^2 + (\omega L_o)^2}$$

Ponieważ $R_o \gg \omega L_o$, więc wzór sprowadzi się do postaci

$$C_d \approx - \frac{L_o}{R_o^2}$$

Pojemność ta daje taki sam efekt /prąd w gałęzi wskaźnika/ jak pojemność C' dołączona równolegle do pojemności C o wartości

$$C' = \frac{k_R}{k_d} \frac{L_o}{R_o^2}$$

stąd błąd systematyczny komparacji L-C spowodowany pominięciem indukcyjności L_o wynosi

$$\delta_{L_0}^s = - \frac{C - (C + C')}{C + C'} \approx + \frac{k_R}{k} \frac{L_0}{R_0^2} \frac{1}{C}$$

po wyznaczeniu k ze wzoru /5.4.4/ otrzymujemy postać wzoru

$$\delta_{L_0}^s = - k_R \frac{\omega^2 L_0 L}{R_0^2} \left(1 + \frac{1}{Q^2}\right) (1 - \gamma)$$

Gdy mostek jest w równowadze prąd płynący przez rezystor R_0 równoważy prąd płynący przez rezystancję R_p równoległego układu zastępczego cewki indukcyjnej. Zapišemy to wzorem

$$\frac{1}{R_p} = \frac{k_R}{R_0} \quad /5.4.13/$$

Ze wzoru tego obliczymy R_0 i wstawimy do wyrażenia na błąd $\delta_{L_0}^s$, wtedy

$$\delta_{L_0}^s = - \frac{\omega^2 L_0 L}{k_R R_p^2} \left(1 + \frac{1}{Q^2}\right) (1 - \gamma)$$

a po przejściu na szeregowy układ zastępczy cewki indukcyjnej /5.2.2/ otrzymamy

$$\delta_{L_0}^s = - \frac{\omega^2 L_0 L}{k_R R_s^2 Q^2 (1 + Q^2)} (1 - \gamma)$$

podstawimy $Q = \frac{\omega L}{R_s}$, wtedy

$$\delta_{L_0}^s = \frac{L_0}{k_R L (1 + Q^2)} (1 - \gamma) \quad /5.4.14/$$

Błąd ten zależy silnie od dobroci Q . Dla typowych danych $L_0 = 5 \mu\text{H}$, $k_R = 1$, $L = 0,1 \text{ H}$, $Q = 3$, błąd $\delta_{L_0}^s = - 5 \cdot 10^{-6}$. Wynika stąd, że przy bardzo dokładnych pomiarach, w zakre-

sie małych częstotliwości, należy go każdorazowo obliczać i ewentualnie umieścić w charakterze poprawki.

- Wpływ rezystancji i indukcyjności resztkowych gałęzi L-C na dokładność komparacji L-C

Sposób zasilania obu wariantów układu z rysunku 5.3.2 jest różny. W wariancie b zasilanie dołączone jest bezpośrednio do zacisków elementów L,C, dlatego prąd, który płynie przez elementy L,C nie powoduje dodatkowego błędu przekładni. W wariancie a prąd płynący przez elementy L,C pobierany jest z transformatora. Płynie on przez parametry resztkowe transformatora i powoduje dodatkowy spadek napięcia, co jest źródłem błędów. Omówimy teraz szczegółowo te błędy w obu wariantach.

W a r i a n t b /rys. 5.3.2b/

Wpływ elementów R_k , L_k , R_{ka} , R_1 , L_1 , R_{1b} , L_{1b} /rys.5.4.2/ na dokładność komparacji L-C określony jest zmianą napięcia na zaciskach a, b w stosunku do punktów wyjściowych transformatora różnicowego. Zależy więc od prądów I_k , I_1 . W rozpatrywanym przypadku $I_k \approx I_1$ ($I_{R0} \ll I_1, I_k$), wartość tych prądów zależy od impedancji wejściowej transformatora. Na tę impedancję wpływają głównie dwa czynniki: impedancja układu transformatora biegu luzem i impedancja wynikająca z transformowania rezystancji R_0 do zacisków k-1 transformatora. Impedancja biegu luzem transformatora może być stosunkowo

łatwo utrzymana na poziomie kilkudziesięciu $k\Omega$ /dla częstotliwości $f > \text{kilkaset Hz/}$. Co przy założeniu, że rezystancje resztkowe R_k, R_{ka}, R_1, R_{1b} są nie większe niż kilkaset $m\Omega$ i uwzględnieniu współczynnika $\frac{1}{1+Q^2}$ daje błąd $\ll 10^{-6}$, a więc pomijalnie mały. Indukcyjność wejściowa tych transformatorów jest rzędu 100 H i większa, czyli indukeyjność doprowadzeń i resztkowe transformatora, które nie przekraczają kilkudziesięciu μH wnoszą błąd pomijalnie mały.

Rozważymy wpływ transformacji rezystancji R_0 do zacisków $k-1$ transformatora. Rezystancja ta wyrazi się wzorem

$$R_t = \left(\frac{k-1}{k_R} \right)^2 R_0 \quad /5.4.15/$$

Rezystancja R_0 związana jest z rezystancją R_p cewki indukcyjnej wzorem /5.4.13/. Po przejściu na szeregowy układ zastępczy /5.4.2/ wzór /5.5.15/ przyjmuje postać

$$R_t = \frac{(k-1)^2}{k_R} R_s (1+Q^2) \quad /5.4.16/$$

Dla typowych parametrów $L = 0,1 \text{ H}$, $C = 10 \text{ nF}$, $R_s = 80 \Omega$, $k = 250$, $\omega = 2 \cdot 10^3$, $Q \approx 3$, wtedy

$$k_R = \frac{R_0}{R_p} = \frac{R_0}{R_s (1+Q^2)} = \frac{10^3}{80 \cdot 10} \approx 1,25$$

$$\omega_{LCK}^2 = 1 \quad , \quad \text{stad} \quad k = 250$$

po podstawieniu do /5.5.16/ $R_t = 4 \cdot 10^7 \Omega$. Stad wpływ szeregowo włączonych parametrów resztkowych doprowadzeń

$R_k, L_k, R_{ka}, L_{ka}, R_1, L_1, R_{1b}, L_{1b}$ /rys. 5.4.2/ jest pomijalnie mały.

W a r i a n t a /rys.5.3.2a/

Zasilanie układu odbywa się w tym przypadku z zastępczych źródeł napięcia $k, 1, k_R$ /rys.5.4.2/. Parametry R_1, L_1, R_{1b}, L_{1b} dodają się więc szeregowo do indukcyjności L , a parametry $R_k, L_k, R_{ka}, L_{ka}, R_{ef}, L_{ef}$ dodają się szeregowo do pojemności C . Gałąź rezystora R_0 zasilana jest tu ze źródła k_R podobnie jak w wariancie a i analiza dotycząca tego wpływu obowiązuje i w przypadku wariantu a.

Wpływ szeregowej rezystancji obwodu C: $R_k + R_{ka} + R_{ef}$ może być sprowadzony do poziomu pomijalnie małego przy łatwym do spełnienia warunku

$$R_k + R_{ka} + R_{ef} < 10^{-6} \frac{1}{\omega C}$$

Natomiast wypadkowa rezystancja obwodu L: $R_1 + R_{1b}$ powoduje tylko błąd pomiaru zastępczej szeregowej rezystancji cewki R_s . Parametr ten jest drugorzędnym elementem opisu cewki. Wynika stąd, że rezystancje resztkowe obwodów L-C wnoszą błąd pomijalnie mały.

Wypadkowa indukcyjność ramienia C: $L_c = L_k + L_{ka} + L_{ef}$ spowoduje efektywną zmianę pojemności C zgodnie ze wzorem /patrz wzór 5.4.10/

$$C' = C (1 + \omega^2 L_c C)$$

Natomiast indukcyjność resztkowa ramienia L : $L_L = L_1 + L_{1b}$ spowoduje zmianę indukcyjności tego ramienia zgodnie ze wzorem

$$L' = L + L_L$$

Stąd błąd systematyczny komparacji L-C wynikający we wzorach na równowagę układu z pominięcia indukcyjności reszkowych gałęzi L i C wyniesie

$$\delta_{L,L_C}^s = - \frac{C-C'}{C'} + \frac{L-L'}{L'}$$

Po podstawieniu powyższych zależności na C' , L' otrzymamy

$$\delta_{L,L_C}^s = \omega^2 L_C C + \frac{L_L}{L} \quad /5.4.17/$$

Ponieważ $\omega^2 L_C k \approx 1$, więc

$$\delta_{L,L_C}^s = \frac{L_L}{L} + \frac{L_C}{L} \frac{1}{k}$$

Indukcyjność dzielników napięcia jest w przybliżeniu proporcjonalna do ilości zwojów, więc $L_C \approx k L_L$. Po podstawieniu do wzoru otrzymamy

$$\delta_{L,L_C}^s \approx 2 \frac{L_L}{L}$$

W typowych dzielnikach transformatorowych indukcyjność na odczepie o małym napięciu nie przekracza 1 μH . Dla $L = 1 H$ otrzymamy błąd $< 2 \cdot 10^{-6}$, a więc pomijalnie mały, natomiast dla $L = 0,1 H$ błąd ten wynosi $2 \cdot 10^{-5}$ i powinien być uwzględniony w formie poprawki.

b. Wpływ parametrów resztkowych R, L, C na dokładność komparacji L-C

- Wpływ współczynnika strat kondensatora C na dokładność komparacji L-C

Pominięcie $\operatorname{tg} \delta$ we wzorze /5.3.7/ powoduje błąd względny wyznaczenia parametru φ /5.4.4'/, równy

$$\delta_{\operatorname{tg} \delta}^s(\varphi) = \frac{\varphi' - \varphi}{\varphi} \approx \frac{\operatorname{tg} \delta}{Q}$$

gdzie $\varphi' = \varphi + \operatorname{tg} \delta$ - wartość współczynnika φ z pominięciem $\operatorname{tg} \delta$

Ponieważ $\delta_{\varphi} \approx \delta_Q$, więc wpływ pominięcia $\operatorname{tg} \delta$ we wzorach na warunki równowagi na dokładność komparacji L-C wyniesie /patrz 5.4.4'/.

$$\delta_{\operatorname{tg} \delta}^s = \frac{\operatorname{tg} \delta}{Q} \quad /5.4.18/$$

Współczynnik strat $\operatorname{tg} \delta$ kondensatorów powietrznych jest $< 10^{-5}$. Pominięcie $\operatorname{tg} \delta$ nie powoduje więc błędu większego niż kilka $\times 10^{-6}$ nawet przy małych dobrociach, a więc wpływ $\operatorname{tg} \delta$ na dokładność komparacji jest pomijalnie mały.

- Wpływ parametrów resztkowych rezystora R_0 na dokładność komparacji L-C

Przy ustalonej pulsacji ω rzeczywisty rezystor można przedstawić w postaci równolegle połączonej rezystancji R_0

i pojemności C_{Ro} lub szeregowo połączonej rezystancji R_o i indukcyjności L_{Ro} /rys.5.4.3/. Parametry resztkowe rezystora charakteryzowane są stałą czasową T . Impedancję rezystora można zapisać w postaci

$$Z = R_o (1 + j \omega T)$$

Dla układu zastępczego złożonego z równolegle połączonej rezystancji R_o i pojemności C_{Ro} stała czasowa T określona jest wzorem

$$T = - R_o C_{Ro}$$

natomiast dla układu złożonego z szeregowo połączonej rezystancji R_o i indukcyjności L_{Ro} wzorem

$$T = \frac{L_{Ro}}{R_o}$$

W dalszym ciągu będziemy korzystali z równoległego układu zastępczego. Pojemność C_{Ro} powoduje taki sam efekt /prąd we wskaźniku równowagi/ jak pojemność

$$C'_{Ro} = - \frac{k_R}{k} C_{Ro}$$

włączona równolegle do pojemności C . Zastąpimy C_{Ro} wyrażeniem na stałą czasową układu równoległego, wtedy

$$C'_{Ro} = \frac{k_R}{k} \frac{T}{R_o}$$

stąd błąd komparacji L-C spowodowany pominięciem stałej czasowej rezystora R_o wyniesie

$$\delta_T^s = - \frac{C - (C + C'_{Ro})}{C + C'_{Ro}} \approx \frac{C'_{Ro}}{C} = \frac{k_R T}{k R_o C}$$

Po uwzględnieniu zależności /5.4.13/ i przeliczeniu równoległej rezystancji cewki R_p na szeregową R_s /5.2.2/ wzór ten przyjmie postać

$$\delta_T^s = \frac{T}{kR_s(1+Q^2)C} \quad /5.4.19/$$

Wynika stąd, że błąd ten będzie większy przy małych dobrociach. Dla typowych wartości $T \leq 10^{-8}$, $Q \geq 3$, $k \geq 250$, $C = 10 \text{ nF}$, $R_s = 80 \Omega / L = 0,1 \text{ H/}$

$$|\delta_T^s| \leq 5 \cdot 10^{-6}$$

Uzyskanie tak małej stałej czasowej rzędu kilka $\times 10^{-9}$ możliwe jest dzięki temu, że w omawianym układzie komparacji L-C rezystor R_0 pracuje w układzie trzyczaciskowym.

Widać stąd, że błąd ten może osiągnąć wartości, które zgodnie z założeniem należy uwzględniać w formie poprawki. Należy więc przy małych dobrociach kontrolować wartość tego błędu i w razie potrzeby uwzględniać go w charakterze poprawki.

c. W p ł y w p o j e m n o ś c i p a s o ż y t -
n i c z y c h n a d o k ł a d n o ś ć k o m p a r a -
c j i L-C

W większości precyzyjnych układów transformatorowych analizowanych w literaturze, wpływ pojemności pasożytniczych do masy nie przekracza $1 \cdot 10^{-6}$ [21]. Nie będziemy więc szczegółowo rozważali tego zagadnienia. Pokażemy tylko, że nawet w przypadku najmniej korzystnym jest on pomijalnie mały.

Największe napięcie w układzie występuje w gałęzi k, więc w tej gałęzi wpływ pojemności pasożytniczych będzie największy. Rozważmy wpływ pojemności kabla łączącego zacisk k transformatora z kondensatorem C do ziemi /rys.5.4.2/. Oznaczmy tę pojemność literą C_m i skupimy ją na wyjściu transformatora, jak to pokazano na rysunku 5.4.2. Wpływ tej pojemności będzie objawiał się zmianą napięcia na zaciskach k wywołaną prądem płynącym przez pojemność C_m . Spadek napięcia na indukcyjności L_k spowodowany prądem płynącym przez C_m można zapisać wzorem

$$U = k \frac{j \omega L_k}{j \omega L_k + \frac{1}{j \omega C_m}} \approx -k \omega^2 L_k C_m$$

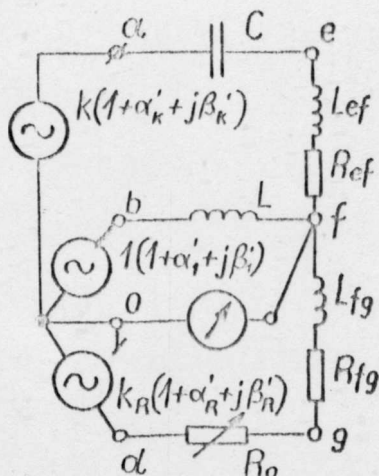
Stąd względny błąd komparacji L-C spowodowany pojemnością C_m wyniesie

$$\delta_{C_m}^s = \omega^2 L_k C_m \quad /5.4.20/$$

Dla typowych danych $\omega \leq 10^4$, $L_k \leq 10 \mu H$, $C_m \leq 100 pF$
 $\delta_{C_m}^s \leq 10^{-7}$. Zbliżoną wartość błędu wnoszą pozostałe pojemności pasożytnicze. Stąd możemy założyć, że wpływ pojemności pasożytniczych do masy jest pomijalnie mały.

Z przeprowadzonej analizy dokładności wynika, że błąd komparacji L-C zależy silnie od dobroci cewki. Przy dobrociach Q większych od 3 większości błędów systematycznych może być sprowadzona do poziomu pomijalnie małego. Przy małych dobrociach Q (1÷3) i dokładności komparacji L-C $2 \cdot 10^{-5}$ niektóre błędy należy uwzględniać w charakterze poprawek. Wyma-

ga to jednak żmudnych pomiarów parametrów resztkowych układu. Trudności te można zmniejszyć, jeśli wyznaczymy przekładnię transformatora wprost na zaciskach elementów w punktach a, b, c, d /rys.5.4.4/.



Rys.5.4.4. Układ komparacji L-C z wyznaczonymi poprawkami na przekładnię transformatorów

Zamiast przekładni k we wzorach na równowagę mostka należy wstawić wartość

$$k' = k \frac{1 + \alpha_k'}{1 + \alpha_1'} \approx k (1 + \alpha_k' - \alpha_1') \quad /5.4.21/$$

a zamiast k_R wartość poprawionej przekładni

$$k'_R = k_R \frac{1 + \alpha_R'}{1 + \alpha_1'} \approx k (1 + \alpha_R' - \alpha_1') \quad /5.4.22/$$

Natomiast błąd metody wywołany błędem fazy przekładni k dany wzorem /5.4.9/ przyjmie tu postać

$$\delta_{\beta_k}^s = - \frac{2Q}{1+Q^2} (\beta_k' - \beta_1') \quad /5.4.23/$$

Większość parametrów resztkowych transformatora i doprowadzeń może być w ten sposób znacznie zmniejszona. Pozostaje jeszcze wpływ elementów L_{fg} , R_{fg} , L_{ef} , R_{ef} , który może być sprowadzony do bardzo małej wartości i ewentualnie wyznaczony w charakterze poprawek. Wyznaczenie przekładni wprost na zaciskach elementów pozwala na osiągnięcie bardzo dużej dokładności komparacji L-C nawet przy małych dobrociach.

Zauważmy, że przy większych dobrociach $/Q > 5/$ wartość błędów systematycznych na ogół nie przekracza wartości $2 \cdot 10^{-6}$. Po ewentualnym uwzględnieniu ich w charakterze poprawek można uzyskać większą dokładność komparacji L-C niż założona $1 \cdot 10^{-5}$.

Zmniejszenie wpływu parametrów resztkowych można również osiągnąć przez ich wyznaczenie /kalibrację/ wprost w układzie. W tym celu należy zewrzeć zaciski wzorca indukcyjności b-f /rys.5.4.4/ zworą o małej indukcyjności, zwiększyć odpowiednio pojemność C i zwiększyć częstotliwość do wartości nie większej niż kilkadziesiąt kHz. Po zrównoważeniu układu, w sposób analogiczny jak przy wyznaczaniu L, wyznaczymy zastępczą indukcyjność parametrów resztkowych. Szukaną wartość indukcyjności otrzymamy po odjęciu tej indukcyjności od wyniku otrzymanego przy komparacji L-C.

5.5. Błąd nieczułości i wymagane parametry osprzętu pomocniczego

Dokładność porównania L-C zależy nie tylko od parametrów układu, ale również od dokładności ustawienia warunków

równowagi, czyli od błędu nieczułości. O wartości tego błędu decydują parametry osprzętu pomocniczego, w skład którego wchodzi blok generatora i blok wskaźnika równowagi. Dla uzyskania wymaganej dokładności komparacji L-C rzędu $1 \cdot 10^{-5}$, błąd nieczułości powinien być mniejszy niż $1 \cdot 10^{-6}$.

Dla typowych wartości $\omega \leq 10^4$, $L = 0,1$ H moduł impedancji od strony wskaźnika jest nie większy niż $10^4 \Omega$. Elektroniczne wskaźniki zera mają rezystancję wejściową rzędu $100 \text{ k}\Omega$ i większą. Wystarczy więc rozważyć czułość napięciową mostka. Dla układów z transformatorem napięciowym czułość napięciowa określona jest wzorem [26]

$$\frac{\delta U_p}{\delta z} = \frac{1}{(1+k)(1+k^{-1})}$$

gdzie:

$$\delta U_p = \frac{\Delta U_p}{U_{oa} + U_{ob}} \quad - \text{stosunek napięcia na przekątnej mostka /wskaźniku równowagi/ do napięcia zasilania /na wyjściu transformatora, rys.5.3.2.}$$

$$\delta_z = \frac{\Delta Z}{Z} \approx \frac{\Delta L}{L} \quad - \text{względna zmiana impedancji /indukcyjności/ powodująca powstanie napięcia } \Delta U_p \text{ na przekątnej mostka,}$$

k - przekładnia transformatora.

Ponieważ $\delta_z \approx \delta_L$, po przekształceniu powyższego wzoru otrzymamy

$$\delta_z'' = \delta_{L-C}'' = \frac{\Delta U_p}{U_{oa} + U_{ob}} (1+k)(1+k^{-1}) \quad /5.5.1/$$

Na ogół $k \gg 1$, wtedy napięcie na cewce indukcyjnej L spełnia w przybliżeniu warunk

$$U_L \approx \frac{U_{oa} + U_{ob}}{(1+k)(1+k^{-1})}$$

Stąd otrzymamy wzór na błąd nieczułości komparacji L-C

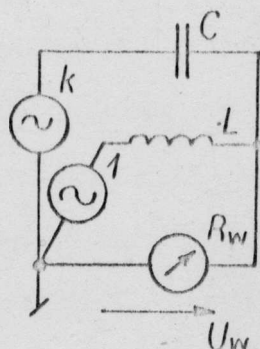
$$\delta_{L-C}^n \approx \frac{\Delta U_p}{U_L} \quad /5.5.2/$$

który jest określony przez stosunek napięcia niezrównoważenia ΔU_p do napięcia na cewce indukcyjnej U_L . Typowe selektywne wskaźniki zera mają rozróżnialność nie gorszą niż 50 nV. Dla osiągnięcia błędu nieczułości mniejszego niż 10^{-6} , napięcie na cewce indukcyjnej musi być większa niż 50 mV. Na ogół nie przedstawia to problemu. Jedynie przy małej częstotliwości ($\omega = 10^3$, $k \approx 10^3$), aby otrzymać na wzorcu L napięcie większe niż 50 mV, całkowite napięcie zasilania układu musi być większe niż 50 V, co przy dużych wymaganiach na zniekształcenia może stanowić pewien problem.

Wymagana rozróżnialność napięcia równowagi dla częstotliwości podstawowej może być osiągnięta pod warunkiem, że napięcie zakłóceń jest w wystarczającym stopniu tłumione. W omawianych układach problem jest ważny, gdyż główny warunek równowagi mostka /5.3.5/ zależy od częstotliwości. Mostek jest zrównoważony dla podstawowej harmonicznej i na wskaźnik nie powinno przychodzić żadne inne napięcie. Wyższe harmoniczne przechodzą przez układ i zakłócają pracę wskaźnika. Największym źródłem zakłóceń jest napięcie drugiej harmonicznej. Dla uzyskania błędu nieczułości mniej-

szego niż 10^{-6} , sumaryczne tłumienie drugiej harmonicznej w stosunku do podstawowej (U_0/U_{2h}) odniesione do wyjścia wskaźnika równowagi, musi być większe niż 10^6 /120 dB/. Tymczasem typowe wzmacniacze mocy o niskim poziomie zniekształceń mają zniekształcenia rzędu 0,1% , czyli można założyć, że stosunek napięcia drugiej harmonicznej do podstawowej $\frac{U_{2h}}{U_0}$ jest w nich na poziomie 10^{-3} . Sygnał taki podawany jest na układ mostka.

Dla określenia czy spełniony jest warunek niezbędnego stopnia tłumienia drugiej harmonicznej rozważymy obecnie transmitancję wyższych harmonicznych napięcia wejściowego przez mostek zrównoważony dla podstawowej harmonicznej. Uproszczony schemat mostka przedstawiono na rysunku 5.5.1.



Rys.5.5.1. Uproszczony schemat mostka do porównań L-C

Napięciem podanym na wskaźnik równowagi określona jest wartość

$$U_w(\omega) = j \frac{\omega Lk - \frac{1}{\omega C}}{\frac{L}{R_w C} + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})} \quad /5.5.3/$$

Założmy, że układ zrównoważony jest przy pulsacji ω_0 ,

$U_w(\omega_0) = 0$. Dla tak uproszczonego układu warunek równowagi mostka sprowadza się do postaci

$$\omega_0^2 L C k = 1$$

Wyznamy napięcie drugiej harmonicznej $U_w(2\omega_0)$ podane na wskaźnik . Po podstawieniu $\omega = 2\omega_0$ i uwzględnieniu warunku równowagi mostka wzór /5.5.3/ przyjmie postać

$$U_w(2\omega_0) = j \frac{3}{2 \frac{\omega_0 L}{R_w} + j(\frac{4}{k} - 1)} \quad /5.5.4/$$

Dla typowych parametrów układu spełniony jest warunek $\omega_0 L \ll R_w$ i wzór /5.5.4/ sprowadza się do postaci

$$U_w(2\omega_0) \approx \frac{3}{\frac{4}{k} - 1} \quad /5.5.5/$$

Najczęściej $k \gg 10$, wtedy $|U_w(2\omega_0)| \ll 5$. Wynika stąd, że napięcie drugiej harmonicznej podane na wskaźnik może wzrosnąć do 5 razy /gdy $k \gg 10$ / w stosunku do napięcia na wzorcu indukcyjności. Oznacza to, że sumaryczne tłumienie drugiej harmonicznej przez blok wskaźnika powinno być większe niż $5 \cdot 10^3$. Tłumienie takie można osiągnąć we wskaźniku synchronicznym. Powstaje jednak wtedy problem z prze sterowaniem obwodów wejściowych wskaźnika przez zakłócający sygnał drugiej harmonicznej. Trudność tę można ominąć przez włączenie dodatkowego filtra biernego w stopniu wejściowym.

Ze wzoru /5.5.4/ wynika, że należy unikać przekładni transformatora $k = 4$, ponieważ napięcie drugiej harmonicznej może wtedy osiągnąć bardzo duże wartości, na skutek wystąpienia szeregowego rezonansu elementów L-C przy pulsacji $\omega = 2\omega_0$.

Wystarczająco mały błąd nieczułości można zatem uzyskać stosując typowe wzmacniacze mocy i wskaźniki zera z dodatkowymi filtrami.

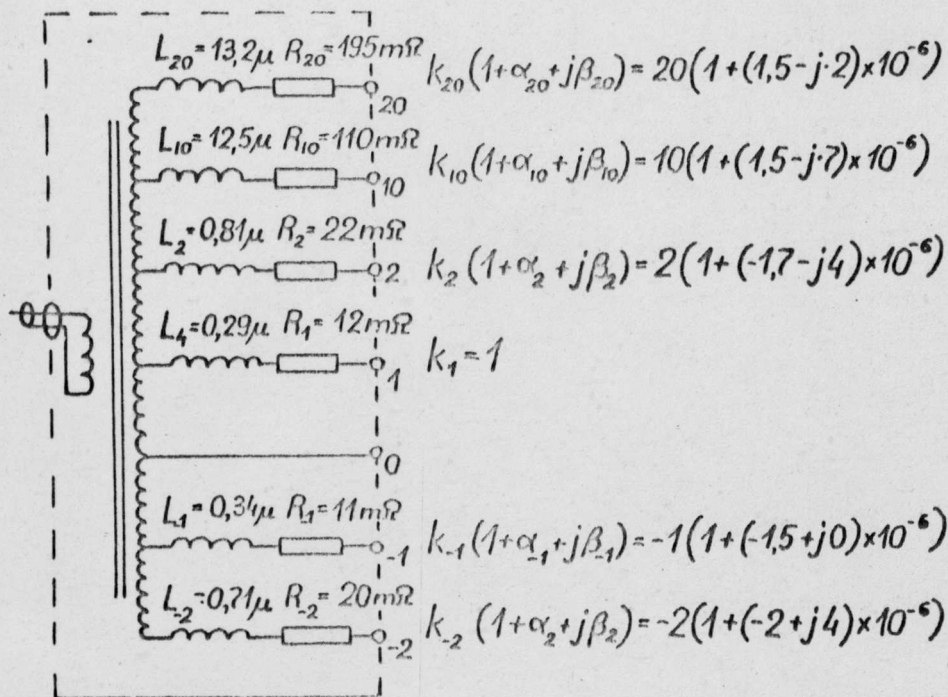
5.6. Wyniki badań transformatorowych układów do porównań L-C

Podstawowym celem przeprowadzonych badań było sprawdzenie poprawności rozważań teoretycznych oraz sprawdzenie doświadczalne wielkości wpływu parametrów, których nie da się wyznaczyć na drodze teoretycznej. Badania te podzielono na trzy grupy:

- Sprawdzenie doświadczalne poprawności analizy błędów. Dotyczy to głównie błędów systematycznych.
- Sprawdzenie czy rzeczywiste warunki pomiarów występujące w omawianym układzie, różniące się od warunków, przy których została zdefiniowana wartość wzorca, wnoszą istotne błędy.
- Sprawdzenie czy wartość indukcyjności otrzymana omawianą metodą różni się o wartość nieistotną od wartości otrzymanej za pomocą najdokładniejszych stosowanych obecnie metod pomiarowych.

Do badań użyto następujących przyrządów produkcji własnej :

- Transformator napięciowy T-1. Schemat zastępczy z wartościami parametrów umieszczono na rysunku 5.6.1.



Rys. 5.6.1. Schemat transformatora T-1 do pomiaru L-C

Przekładnia transformatora $k_1 (1 + \alpha_1 + j\beta_1)$ wyznaczono metodą stopniowania. Rezystancje resztkowe R_i i indukcyjności rozproszenia L_i wyznaczono z dokładnością nie gorszą niż 5%. Przedstawiony schemat zastępczy nie uwzględnia wzajemnych sprzężeń między uzwojeniami poszczególnych odczepów. Badania wykazały, że dokładność aproksymacji rozważanego transformatora schematem zastępczym z rysunku 5.6.1 jest nie gorsza niż 10% przy różnych kombinacjach obciążeń. Dotyczy to aproksymacji zmian obciążeniowych transformatora, które są opisywane elementami R_i , L_i . W dalszym ciągu założymy, że sumaryczna dokładność wyznaczenia parametrów resztkowych jest nie gorsza niż 15%.

- Rezystor regulowany R_0 . Zestawiony jest z dobieranych rezystorów, typu AT klasy 0,5, włączonych szeregowo z potencjometrem suwakowym. Stabilność rezystora R_0 jest lepsza niż 10^{-4} /godzinę. Stała czasowa T_0 w zakresie od $1\text{ k}\Omega$ + $10\text{ k}\Omega$ jest nie większa niż $4 \cdot 10^{-9}$ s.
- Generator kwarcowy GK-1. Częstotliwość generacji $f \approx 1,592\text{ MHz}$ ($\omega = 10^7$). Pulsacje napięcia na wyjściu: $\omega = 10^3, 2 \cdot 10^3, 5 \cdot 10^3, 10^4$. Zniekształcenia sinusoidy $\leq 2\%$. Stabilność częstotliwości mierzona częstotłomiernikiem typu PFL-21 jest lepsza niż $2 \cdot 10^{-7}$ /godzinę.
- Filtr aktywny RC-1. Nastrojony jest na pulsacje $\omega = 10^3, 2 \cdot 10^3, 5 \cdot 10^3, 10^4$. Tłumienie trzeciej harmonicznej większe niż $10^3/60\text{ dB/}$. Zniekształcenia sinusoidy na wyjściu $\leq 0,1\%$. Napięcie wyjściowe $\approx 1\text{ V}$. Wzmocnienie napięciowe około 1.
- Wzmacniacz mocy WM-1. Napięcie wyjściowe regulowane $/1-100\text{ V}$, zniekształcenia $\leq 0,5\%$ przy mocy wyjściowej $\leq 2\text{ W}$.
- Przedwzmacniacz selektywny PS-1. Pracuje przy pulsacjach $\omega = 10^3, 2 \cdot 10^3, 5 \cdot 10^3, 10^4$. Poziom szumów $\leq 200\text{ nV}$. Impedancja wejściowa $\geq 50\text{ k}\Omega$. Tłumienie drugiej harmonicznej w stosunku do podstawowej ≥ 30 . Wzmocnienie napięciowe podstawowej harmonicznej ≈ 100 razy.

Ponadto stosowano przyrządy:

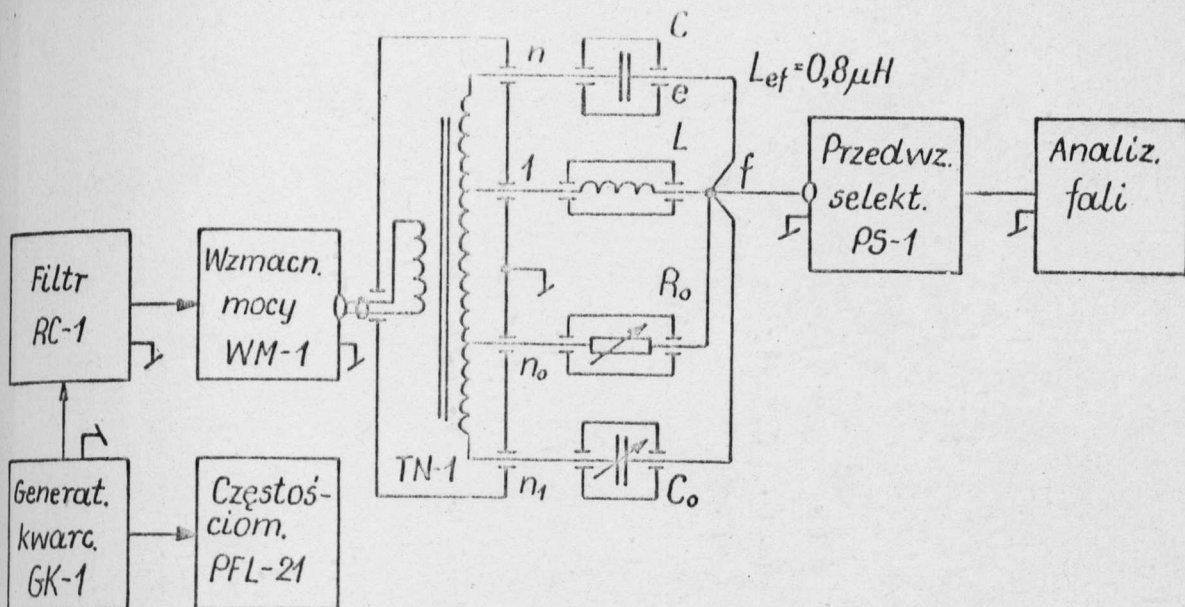
- Analizator fali firmy General Radio, typ 736-A;

- Wzorce indukcyjności firmy General Radio, typ 1482 dane w tabeli D.6.2 /dodatek D.6/;
- Wzorce pojemności firmy Ulrich $C = 10 \text{ nF}$, typ 214, klasy 0,1% sprawdzone z dokładnością 0,01% na mostku firmy General Radio, typ 1620-A;
- Wzorce pojemności stałe i regulowane firmy Ulrich, klasy 0,1%;
- Miernik częstotliwości firmy ZOPAN, typ PFL-21.

a. B a d a n i e p o p r a w n o ś c i a n a l i z y b ł ę d ó w

Badania obejmowały sprawdzenie poprawności analizy błędów systematycznych, które powstają w wyniku nie uwzględnienia we wzorze na warunki równowagi parametrów resztkowych układu. Niektóre z tych parametrów można sztucznie zwiększać bez wprowadzania dodatkowych, istotnych zmian w wartościach innych parametrów. W takich przypadkach można bezpośrednio sprawdzić poprawność wzorów na błędy systematyczne. Zajmiemy się obecnie sprawdzeniem wzorów na błędy systematyczne drogą omówionego wyżej sztucznego modelowania parametrów resztkowych układu.

Badania przeprowadzono w układzie przedstawionym na rysunku 5.6.2.



Rys.5.6.2. Schemat pomiarowy do badań poprawności analizy błędów

- Badanie wpływu szeregowej indukcyjności w gałęzi wzorca indukcyjności

Celem badania jest sprawdzenie poprawności wzoru 5.4.17 określającego wpływ szeregowej indukcyjności doprowadzeń i rozproszenia transformatora na dokładność komparacji L-C. Jako model szeregowej indukcyjności użyto kabla koncentrycznego o wymiarach: średnica przewodu wewnętrznego $\varnothing = 0,5 \pm 0,1$ mm, średnica płaszcza $\varnothing = 6,5 \pm 1$ mm. Indukcyjność jednego metra kabla obliczono ze wzoru [25]

$$L_k = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \left(\frac{2}{r} - \frac{3}{4} \right) \quad /5.6.1/$$

gdzie r - promień przewodu.

Po podstawieniu wymienionych danych otrzymano

$$L_k = 1,7 \mu H \pm 25\%$$

Do badań użyto dwóch kabli, które razem z łączem miały następujące parametry:

$$\begin{array}{llll} 1 & l_1 = 84 \text{ cm} & L_{k1} = 1,45 \mu H & R_{k1} = 45 \text{ m}\Omega \quad C_1^Z = 61 \text{ pF} \\ 2 & l_2 = 40 \text{ cm} & L_{k2} = 0,68 \mu H & R_{k2} = 22 \text{ m}\Omega \quad C_2^Z = 29 \text{ pF} \end{array}$$

gdzie C_1^Z, C_2^Z - pojemności przewodu do płaszcza

Pomiar wykonano dwukrotnie. Równoważono mostek w układzie jak na rysunku 5.6.2. Następnie dodawano w szereg jeden z wymienionych kabli i równoważono mostek ponownie. Notowano zmianę pojemności C_0 , która określa błąd systematyczny pomiaru indukcyjności. Wyniki zamieszczono w tabeli 5.6.1.

Tabela 5.6.1. Wpływ indukcyjności doprowadzeń w gałęzi wzorca indukcyjności L na dokładność komparacji L-C

Numer kabla	ΔC_0 [pF]	δ_{LL}^s	δ_{LL}^s	δ_{LL}^s	Odczepy transformatora /rys.5.6.1/
1	+1,70	$1,70 \cdot 10^{-5}$	$1,71 \cdot 10^{-5}$	$1,45 \cdot 10^{-5}$	n = 20 1 = 2
	+1,73	$1,73 \cdot 10^{-5}$			
	+1,69	$1,69 \cdot 10^{-5}$			
	+1,72	$1,72 \cdot 10^{-5}$			
2	+0,81	$8,1 \cdot 10^{-6}$	$8,1 \cdot 10^{-6}$	$6,8 \cdot 10^{-6}$	n ₀ = -1 n ₁ = -2
	+0,81	$8,1 \cdot 10^{-6}$			
	+0,80	$8,1 \cdot 10^{-6}$			
	+0,81	$8,1 \cdot 10^{-6}$			

Błąd nieczułości odniesiony do zmian indukcyjności $\leq 3 \cdot 10^{-7}$

Względne zmiany indukcyjności $\frac{\Delta L}{L}$ obliczano następująco: wyznaczono zmiany pojemności C odpowiadające zmianom pojemności C_0 ze wzoru

$$\Delta C' = \frac{n_1}{n} \Delta C_0 = -0,1 \cdot \Delta C_0$$

Następnie na podstawie wzoru /5.4.2/ otrzymano

$$\delta_{LL}^s = \frac{\Delta L}{L} = - \frac{\Delta C'}{C} = \frac{n_1}{n} \frac{\Delta C_0}{C} \quad /5.6.2/$$

δ_{LL}^s - średnia arytmetyczna błędu ze wszystkich pomiarów

δ_{LL}^s - błąd systematyczny obliczony na podstawie wzoru /4.5.17/

Zgodność wyników otrzymanych drogą obliczeń z wynikami otrzymanymi z pomiarów można ocenić za pomocą liczby

$$\alpha = \frac{\delta_{LL}^s - \delta_{LL}^{s, zm, \acute{s}r}}{\delta_{LL}^{s, zm, \acute{s}r}} \quad /5.6.3/$$

określającej względną różnicę między obu wynikami. Dla kabla nr 1 otrzymujemy $\alpha = -0,15$ dla kabla nr 2 $\alpha = -0,13$.

Różnica jest więc mniejsza niż dokładność obliczenia wartości indukcyjności kabli /25%/. Błędy mają jednak charakter systematyczny. Można go tłumaczyć błędem systematycznym obliczenia indukcyjności kabla. Wartość tę licząco przy założeniu, że stanowi on pojedynczy prosty przewód, umieszczony w powietrzu. Stosowany kabel jest linką umieszczoną w ekranie.

Z przeprowadzonych badań wynika, że analiza błędów systematycznych, spowodowanych obecnością szeregowej indukcyj-

ności /doprowadzeń i rozproszenia transformatora/ w gałęzi wzorca indukcyjności L jest poprawna.

- Badanie wpływu szeregowej indukcyjności w gałęzi wzorca pojemności C. Wzór /5.4.17/

Badania wykonano w układzie jak na rys.5.6.2. Mierzono zmiany pojemności spowodowane włączaniem w szereg z pojemnością C kabla Nr 1. Otrzymane wyniki umieszczono w tabeli 5.6.2.

Tabela 5.6.2. Wpływ szeregowej indukcyjności w obwodzie C na dokładność komparacji L-C

Numer kabla	ΔC_o [pF]	$\delta_{L_L}^s z_m$	$\delta_{L_L}^s z_m, \acute{s}r$	$\delta_{L_L}^s$	Odczepy transformatora /rys.5.6.1/
1	+0,20	$2,0 \cdot 10^{-6}$	$1,9 \cdot 10^{-6}$	$1,45 \cdot 10^{-6}$	$n = 20$
	+0,18	$1,8 \cdot 10^{-6}$			$\underline{1} = 2$
	+0,19	$1,9 \cdot 10^{-6}$			$n_o = -1$
	+0,20	$2,0 \cdot 10^{-6}$			$n_1 = -2$

Błąd nieczułości odniesiony do zmian indukcyjności $\ll 3 \cdot 10^{-7}$.

Wartości $\delta_{L_L}^s z_m$ obliczano ze wzoru /5.6.2/. Pozostałe oznaczenia jak w tabeli 5.6.1. Współczynnik α obliczony ze wzoru /5.6.3/ wynosi $\alpha = -0,23$ i ma zbliżoną wartość do wyników otrzymanych w poprzednim punkcie. Nieco większą jego wartość można tu tłumaczyć wpływem błędu nieczułości, który osiąga tu wartości zbliżone do otrzymanej różnicy w wartościach współczynnika α .

Wyniki wykonanych badań wskazują, że wzór /5.4.17/ na wpływ szeregowej indukcyjności na błąd pomiaru jest poprawny.

- Badanie wpływu szeregowej indukcyjności w obwodzie kondensatora C_0

Badania wykonano w układzie z rysunku 5.6.2. Włączano dodatkowo w szereg z pojemnością C_0 kabel nr 1. Przy błędzie czułości na poziomie nie większym niż $3 \cdot 10^{-7}$ nie zauważono wpływu dołączenia kabla. Jest to zgodne z przeprowadzonymi rozważaniami teoretycznymi.

- Badanie wpływu szeregowej indukcyjności w gałęzi rezystora R_0

Badania wykonano w układzie z rysunku 5.6.2. Włączano dodatkowo w szereg z rezystorem R_0 ($R_0 \approx 6,2 \text{ k}\Omega$) kabel nr 1. Przy czułości nie gorszej niż $3 \cdot 10^{-7}$ nie zauważono wpływu, co jest zgodne z rozważaniami teoretycznymi.

- Badanie wpływu stałej czasowej rezystora R_0 na dokładność komparacji L-C. Sprawdzenie poprawności wzoru /5.4.19/

Badania wykonano w układzie z rysunku 5.6.2. Włączano równolegle do rezystora R_0 kondensator o pojemności C_{R_0} i badano wpływ tej pojemności na zmianę wartości kondensatora C_0 przy obu zrównoważeniach układu /z kondensatorem i bez kondensatora C_{R_0} /. Wyniki tych badań przedstawiono w tabeli 5.6.3.

Tabela 5.6.3. Wpływ stałej czasowej rezystora R_0 na dokładność komparacji L-C

C_{Ro} [pF]	δ_T^S	ΔC_o [pF]	δ_{Tzm}^S	$\frac{\delta_T^S - \delta_{Tzm}^S}{\delta_{Tzm}^S}$
4,7	$-29,4 \cdot 10^{-9}$	-2,3	$-28,6 \cdot 10^{-9}$	$2,8 \cdot 10^{-2}$
10,1	$-6,3 \cdot 10^{-8}$	-4,9	$-6,1 \cdot 10^{-8}$	$3,28 \cdot 10^{-2}$
20,3	$-12,6 \cdot 10^{-8}$	-9,95	$-12,4 \cdot 10^{-8}$	$1,63 \cdot 10^{-2}$
39,6	$-24,8 \cdot 10^{-8}$	-19,75	$-24,7 \cdot 10^{-8}$	$0,4 \cdot 10^{-2}$

δ_T^S - błąd komparacji L-C obliczony ze wzoru /5.4.19/

δ_{Tzm}^S - błąd komparacji zmierzony

Dokładność $C_{Ro} \pm 0,5$ pF

Błąd nieczułości $\leq 3 \cdot 10^{-7}$

Z danych przedstawionych w tabeli wynika, że wzór /5.4.19/ określający błąd systematyczny spowodowany stałą czasową rezystora R_0 jest poprawny.

- Badanie wpływu pojemności pasożytniczych na dokładność komparacji L-C. Wzór /5.4.20/.

Pojemności pasożytnicze wszystkich gałęzi układu są tego samego rzędu. Wpływ ich będzie największy w punkcie, w którym napięcie jest największe, a więc w gałęzi kondensatora C. Badania przeprowadzono w układzie z rysunku 5.6.2. Między odczep transformatora n ($n = 20$) a masę włączono dodatkowy kondensator C_m . Przy czułości lepszej niż $3 \cdot 10^{-7}$ nie zauważono wpływu aż do pojemności $C_m = 18$ nF. Dla zbadania poprawności wzoru /5.4.20/ włączono pojemność 100 nF znacznie większą

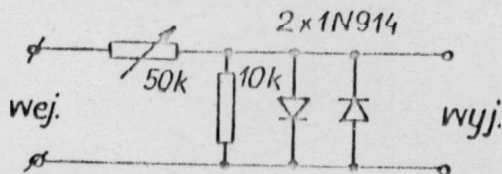
niż rzeczywiste wartości pojemności pasożytniczych. Spowodowało to zmianę dokładności komparacji L-C równą $1,62 \cdot 10^{-5}$. Błąd komparacji obliczony ze wzoru /5.4.20/ wynosi $1,38 \cdot 10^{-5}$. Oba wyniki są zgodne z dokładnością do błędów pomiarów, co potwierdza poprawność wzoru /5.4.20/ i wniosek, że błędy wprowadzane przez pojemności pasożytnicze są pomijalnie małe.

Z przeprowadzonych badań wynika, że analiza błędów systematycznych zrobiona jest poprawnie. Wzory na wartość błędów i ewentualne poprawki mogą być stosowane na ogół z dokładnością nie gorszą niż 10%. Przy uwzględnieniu ich w charakterze poprawek, można poprawić dokładność komparacji L-C przynajmniej o rząd.

b. B a d a n i e w p ł y w u z n i e k s z t a ł -
c e ń p r ą d u n a d o k ł a d n o ść w y z n a -
c z e n i a w a r t o ść i w z o r c ó w i n d u k -
c y j n o ść i

Wzorzec indukcyjności pracujący w układzie pomiarowym może mieć inne warunki pracy niż te, przy których został zdefiniowany. Zmienione warunki pracy, mogą powodować błąd wyznaczenia jego wartości. Zbadano wpływ zmian warunków pracy wzorca w stosunku do warunków, przy których został on zdefiniowany na dokładność wyznaczenia wartości.

Wartość wzorca indukcyjności została zdefiniowana dla przebiegu sinusoidalnego. W praktyce, prąd płynący przez wzorzec jest zniekształcony. Równowaga mostka określona jest dla podstawowej harmonicznej. Wyższe harmoniczne mogą powodować zmianę rozplywu prądów podstawowej harmonicznej, a więc zmianę wartości indukcyjności wzorca /patrz punkt 1.1/. Analiza teoretyczna tego zagadnienia dla rzeczywistych wzorców wielozwojowych jest praktycznie niemożliwa. Należy wykonać badania doświadczalne dla poszczególnych typów wzorców. Zauważmy, że głównym źródłem błędu spowodowanego zniekształceniami jest druga harmoniczna. Przy prawidłowo skonstruowanym układzie filtrów wprowadzana jest ona przede wszystkim przez wzmacniacz mocy i transformator stosunkowy w wariancie a /rys.5.3.2/ i wzmacniacz mocy w wariancie b /rys.5.3.2/. Badania przeprowadzono w układzie z rys.5.6.2, przy czym między wyjście filtra RC-1 a wejście wzmacniacza mocy włączono układ zniekształcający prąd pokazany na rysunku 5.6.3.



Rys.5.6.3. Schemat układu zniekształcającego sinusoidę

Wyniki badań przedstawiono w tabeli 5.6.4.

Tabela 5.6.4. Wpływ zniekształceń prądu na dokładność
wyznaczenia wartości indukcyjności wzor-
ca $L = 0,1$ H firmy General Radio,
typ 1482-L

Lp.	U_{1h} [V]	U_{2h} [mV]	U_{3h} [mV]	U_{4h} [mV]	h [%]	ΔC_0 [pF]	$\Delta C'$ [pF]	$\frac{\Delta L}{L}$
1	1	4,7	4,9	≤ 2	0,68	0	0	0
2	1	10	13	5	1,7	+0,024	$-2,4 \cdot 10^{-3}$	$2,4 \cdot 10^{-7}$
3	1	16	18	6,2	2,47	+0,024	$-2,4 \cdot 10^{-3}$	$2,4 \cdot 10^{-7}$
4	1	20	23	9	3,14	+0,12	$-1,2 \cdot 10^{-2}$	$1,2 \cdot 10^{-6}$
5	1	25	27	10	3,8	+0,19	$-1,9 \cdot 10^{-2}$	$1,9 \cdot 10^{-6}$
6	1	30	32	10,5	4,6	+0,47	$-4,7 \cdot 10^{-2}$	$4,7 \cdot 10^{-6}$
7	1	36	38	10,5	5,3	+0,73	$-7,3 \cdot 10^{-2}$	$7,3 \cdot 10^{-6}$
8	1	40	45	11	6,1	+1,0	-0,1	$1 \cdot 10^{-5}$
9	1	50	56	10	7,5	+1,8	-0,18	$1,8 \cdot 10^{-5}$
10	1	75	105	6	12,5	+4,2	-0,42	$4,2 \cdot 10^{-5}$

Błąd nieczułości $\Delta C_0 \leq 0,03$ pF. Daje to w odniesieniu
do zmian indukcyjności błąd nieczułości $\leq 3 \cdot 10^{-7}$.

$\Delta C'$ - zmiana pojemności C odpowiadająca zmianie pojemnoś-
ci C_0 o wartość ΔC_0 . $\Delta C'$ obliczono ze wzoru

$$\Delta C' = -\frac{1}{k} \Delta C_0$$

$\frac{\Delta L}{L}$ - zmiana indukcyjności spowodowana zniekształceniami
prądu płynącego przez wzorzec

Na podstawie /5.4.2/ zależność między zmianą pojemności C
a względną zmianą indukcyjności L można określić następują-

cym wzorem

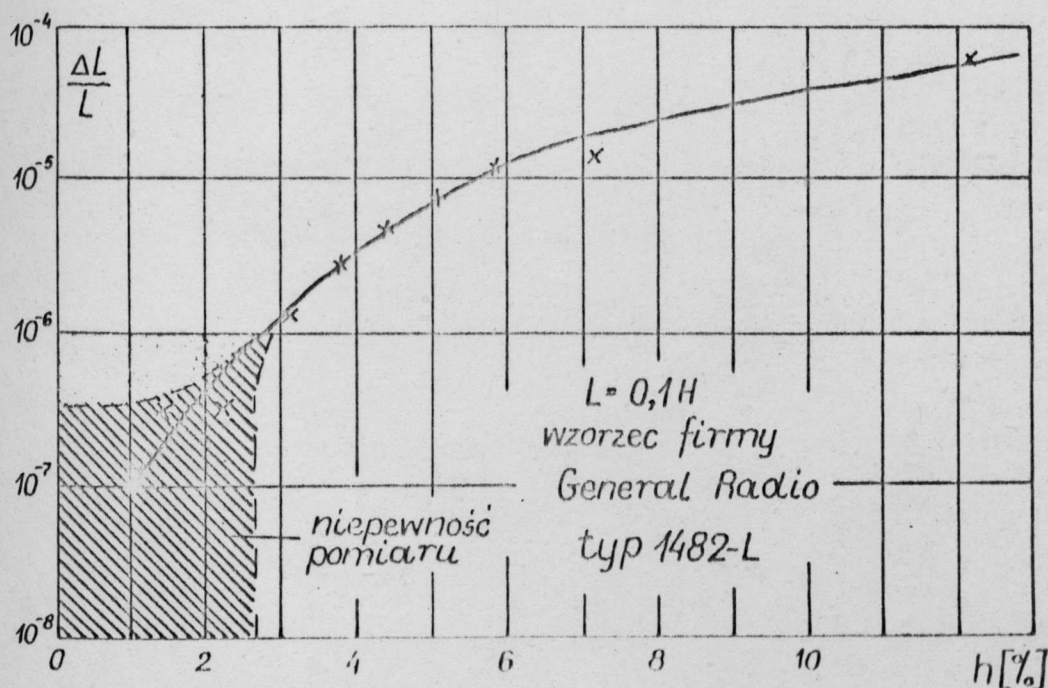
$$\frac{\Delta L}{L} = - \frac{\Delta C}{C}$$

Zniekształcenia mierzono analizatorem fali firmy General Radio, typ 736-A. Współczynnik zniekształceń obliczono ze wzoru

$$h \cong \frac{\sqrt{U_{2h}^2 + U_{3h}^2 + U_{4h}^2}}{U_{1h}} \quad 100\%$$

gdzie U_{ih} - napięcie i-tej harmonicznej

Zależność zmian indukcyjności od poziomu zniekształceń przedstawiono na rysunku 5.6.4.



Rys.5.6.4. Wpływ zniekształceń przebiegu mierzonego na dokładność wyznaczenia wartości indukcyjności

Zakreślone pole pokazuje niepewność wyników pomiarów spowodowaną błędem nieczułości i niestabilnością parametrów układu.

Z przeprowadzonych badań wynika, że zmiany indukcyjności spowodowane zniekształceniami o poziomie $h \ll 1\%$ są znacznie mniejsze niż 10^{-6} , a więc pomijalnie małe. Pozostałe warunki określone w definicji trzyczaskowego wzorca indukcyjności są w układzie komparatora L-C zachowane.

c. Sprawdzenie poprawności pracy układu komparacji L-C

Proponowana metoda komparacji L-C ma dać wyniki dokładniejsze niż metody dotychczas stosowane. Doświadczalnie można ją sprawdzić przez porównanie ze znanymi metodami. W tym celu sprawdzimy czy wartość indukcyjności L_n otrzymana omawianą metodą różni się o wartość nieistotną od wartości L_s otrzymanej za pomocą najdokładniejszych stosowanych obecnie metod.

Warunek ten opiszemy analitycznie wzorem

$$|L_n - L_s| \leq L_n \delta_{Ln} + L_s \delta_{Ls} \quad /5.6.4/$$

gdzie: δ_{Ln} - dokładność wyznaczenia wartości indukcyjności w odniesieniu do wartości wzorców pojemności omawianą metodą;

δ_{Ls} - dokładność wyznaczenia wartości indukcyjności najdokładniejszą z dotychczasowych metod.

Ponieważ $L_n \approx L_s$, więc równość /5.6.4/ można sprowadzić do przybliżonego warunku

$$\delta = \frac{|L_n - L_s|}{L_n} \leq \delta_{Ln} + \delta_{Ls} \quad /5.6.5/$$

Celem dalszych badań było więc stwierdzenie czy zachodzi warunek /5.6.5/. W badaniach porównywano wartości wzorców indukcyjności otrzymane przy wzorcowaniu wzorców firmy General Radio w NBS w 1966 r. L_s z wartościami L_n otrzymanymi z komparacji L-C omawianą metodą. Badania przeprowadzono w układzie przedstawionym na rysunku 5.6.2. Jako odnośnika pojemnościowego użyto dwóch kondensatorów firmy Ulrich kl. 0,1% wzorcowany z dokładnością 0,01% mostkiem firmy General Radio, typ 1620-A, w temperaturze $T = 22,8^{\circ}\text{C}$. Na podstawie badań stabilnościowych tych wzorców założono, że dokładność kondensatora C była nie gorsza niż 0,02%. Porównano następujące wzorce:

1. $C = 10 \text{ nF}$ z $L = 0,1 \text{ H}$ przy $\omega = 10^4$ ($\sim 1592 \text{ Hz}$)
2. $C = 10+10 \text{ nF}$ z $L = 0,1 \text{ H}$ przy $\omega = \frac{1}{2} \cdot 10^4$ ($\sim 796 \text{ Hz}$)
3. $C = 10 \text{ nF}$ z $L = 1 \text{ H}$ przy $\omega = 10^4$
4. $C = 10+10 \text{ nF}$ z $L = 1 \text{ H}$ przy $\omega = \frac{1}{2} \cdot 10^4$

Wybrane wyniki badań przedstawiono w tabeli 5.6.5.

Tabela 5.6.5. Wyniki komparacji L-C w układzie transformatorowym. Wariant a

Parametry i wielkości mierzone		P o m i a r y			
oznaczenie	objaśnienie	1	2	3	4
T [°C]	temp.	23,3	23,1	22,4	22,9
L _{nom} [H]	wartość nominalna	0,1	0,1	0,1	0,1
C [nF]		10	20	10	20
δ _C %		0,02	0,02	0,02	0,02
n	rys.4.6.3	20	20	10	20
m	rys.4.6.3	2	1	10	10
n ₀	rys.4.6.3	-1	-2	-1	-1
n ₁	rys.4.6.3	-1	-2	-1	-1
k	n/m	10	20	1	2
k _R	n ₀ /m	-1/2	-2	-0,1	-0,1
k _C	n ₁ /m	-1/2	-2	-0,1	-0,1
ω [rad/s]		10 ⁴ -0,040	5·10 ³ -0,012	10 ⁴ -0,002	5·10 ³ -0,002
δ _ω		≤10 ⁻⁶	≤10 ⁻⁶	≤10 ⁻⁶	≤10 ⁻⁶
C ₀ [pF]	rys.5.6.2	1447,5	5168,5	1306,8	6596,1
δ _{C0} [%]		0,1	0,1	0,1	0,1
R ₀ [Ω]	rys.5.6.2	6234,7	6353,3	16534,0	4147,9
δ _{R0} %		0,05	0,05	0,05	0,05
ψ	/5.4.4'/	0,0072375	0,0258425	0,0130679	0,0164902
φ	/5.4.4'/	0,0801778	0,1573960	0,0604814	0,1205431
Q	/5.4.4/	12,382	6,1892	16,318	8,1586
R _S [Ω]	rys.5.2.1	80,823	80,819	618,71	618,62
δ _k		3,2·10 ⁻⁶	1,5·10 ⁻⁶	0***	≤0,1·10 ⁻⁶
$\frac{1}{1+Q^2} \delta_{C_0}$	/5.4.7/	7,2·10 ⁻⁶	26·10 ⁻⁶	13·10 ⁻⁶	16·10 ⁻⁶
$\frac{2}{1+Q^2} \delta_{R_0}$	/5.4.7/	7,1·10 ⁻⁶	25·10 ⁻⁶	38·10 ⁻⁶	15·10 ⁻⁶

Oznaczenie	Objaśnienie	1	2	3	4
δ_{L-C}	/5.4.7/	$1,8 \cdot 10^{-5}$	$5,2 \cdot 10^{-5}$	$1,8 \cdot 10^{-5}$	$3,1 \cdot 10^{-5}$
δ_L	$\delta_{L-C} + \delta_c$	$2,2 \cdot 10^{-4}$	$2,5 \cdot 10^{-4}$	$2,2 \cdot 10^{-4}$	$2,3 \cdot 10^{-4}$
$\delta_{Lc}^s \times 10^{-6}$	/5.4.8/	3	1,7	0***	$\leq 0,1$
$\delta_{Lk}^s \times 10^{-6}$	/5.4.9/	-1,5	0,7	0***	-0,7
$\delta_{Lef}^s \times 10^{-6}$	/5.4.11/	0,7	0,2	0,7	0,2
$\delta_{Rr+Rkd+Rlg}^s \times 10^{-6}$	/5.4.12/	-0,5	-0,3	-0,08	-1,6
$\delta_{Lo}^s \times 10^{-6}$	/5.4.14/	0,1	0,1	0,003	0,12
$\delta_{LcLc}^s \times 10^{-6}$	/5.4.17/	20	10	25	18,6
$\delta_{ig\delta}^s \times 10^{-6}$	/5.4.18/	≤ 1	≤ 1	≤ 1	≤ 1
$\delta_T^s \times 10^{-6}$	/5.4.19/	0,8	3	1,2	2,5
$\Sigma \delta^s \times 10^{-6}$		24	15	27	19,1
$L_n [H]$	/5.4.4/	0,100077	0,100041	1,009510	1,001720
δ_{Ln}	$\delta_{L-C} + \delta_c + \Sigma \delta^s$	$2,5 \cdot 10^{-4}$	$2,7 \cdot 10^{-4}$	$2,5 \cdot 10^{-4}$	$2,5 \cdot 10^{-4}$
$L_B [H]$	/5.4.4/	0,100084	0,100045	1,009790	1,001834
δ'_{Ls}	$\delta_{Ls} + \delta_{tr}$	$3 \cdot 10^{-4}$	$2,5 \cdot 10^{-4}$	$8 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-4}$
$\delta_{Ln} + \delta_{Ls}$	/5.6.5/	$5,5 \cdot 10^{-4}$	$5,2 \cdot 10^{-4}$	$10,5 \cdot 10^{-4}$	$7,5 \cdot 10^{-4}$
δ	/5.6.5/	$0,77 \cdot 10^{-4}$	$0,4 \cdot 10^{-4}$	$2,8 \cdot 10^{-4}$	$1,2 \cdot 10^{-4}$

* - Główny parametr metody - dokładność komparacji L-C

** - Dokładność wyznaczenia wartości indukcyjności w odniesieniu do wartości pojemności znanej z dokładnością 0,02%.

Uwagi do oznaczeń w tabeli

0*** - Podana wartość błędu równa zero wynika z tego, że oba elementy L,C zasilane są z tego samego odczepu transformatora. Teoretycznie błąd stosunku napięcia k równy jest zero. W praktyce będzie miał wartość różną od zera, z powodu wystąpienia spadku napięcia na przewodzie podłączo-

nym do kondensatora C. W omawianym przypadku błąd ten jest mniejszy niż 10^{-6} ,

L_n - Oznacza indukcyjność otrzymaną w wyniku pomiaru w omawianym układzie transformatorowym odniesioną do pojemności C ;

L_s, δ_s - Wartość i dokładność wzorcowania w N.B.S. mierzonego wzorca transformowana odpowiednio:

do pulsacji ω , przy której wyznaczono L_n za pomocą schematu zastępczego z rys.2.3.4,

do temperatury T, przy której wyznaczono wartość L_n ;

δ_{tr} - Dokładność transformacji indukcyjności w funkcji częstotliwości;

$\sum \delta^s$ - Suma błędów systematycznych.

Przedstawione wyniki pomiarów wzorców indukcyjności w układzie transformatorowym różnią się od wartości otrzymanych w NBS mniej niż wynosi dokładność wzorcowania. Warunek /5.6.5/ jest spełniony. Potwierdza to poprawność przeprowadzonych dotychczas rozważań.

Wnioski

- W badanym układzie otrzymano dokładność komparacji L-C (δ_{L-C}) zależnie od wartości wzorca i częstotliwości w granicach $(1,5 \div 5,2) \cdot 10^{-5}$. O wielkości tego błędu decydowały dwa czynniki: dokładność wyznaczenia pojemności C_0 i rezystancji R_0 . Dokładność pojemności C_0 równa w przedstawionym przykładzie 0,1%, w wyrażeniu na błąd komparacji występu-

je ze współczynnikiem $\frac{1}{1-p}$. Wpływ ten był nie większy niż kilka $\times 10^{-5}$. Dokładność pojemności C_0 może być poprawiona do poziomu 0,01%. Omawiana składowa błędu komparacji zmniejszy się do poziomu poniżej kilka $\times 10^{-6}$, a więc pomijalnie małego.

Dokładność rezystora R_0 równa jest w przedstawionym przykładzie 0,05%. W wyrażeniu na błąd komparacji występuje ze współczynnikiem $\frac{2}{1+Q^2}$ i nie przekracza wartości $2 \cdot 10^{-5}$. Dokładność R_0 może być poprawiona przynajmniej do poziomu 0,01% co obniża tę składową błędu do wartości nie większej niż $2 \cdot 10^{-6}$, a więc pomijalnie małej.

- Suma błędów systematycznych $\Sigma \delta^s$ jest nie większa niż $5 \cdot 10^{-5}$. Głównym źródłem błędu jest tu indukcyjność rozproszenia transformatora. Po uwzględnieniu jej w charakterze poprawki wartość błędów systematycznych spadnie do poziomu kilka $\times 10^{-6}$.
- Sumaryczny błąd komparacji L-C może w omawianym przykładzie być zmniejszony do poziomu mniejszego niż $1 \cdot 10^{-5}$. Zastosowanie dostępnych w kraju kondensatorów o dokładności 0,01% umożliwia wzorcowanie indukcyjności ze stosowaną obecnie w najbardziej znanych ośrodkach /NBS, Sullivan/ dokładnością.

Z przeprowadzonych dotychczas rozważań wynika, że największą dokładność komparacji L-C można uzyskać dla wzorca $L = 1 \text{ H}$ przy porównaniu z wzorcem $C = 10 \text{ nF}$ przy pulsacji

$\omega = 10^4$. W przypadku tym oba wzorce mogą być zasilane z jednego odczepu transformatora, stąd minimalny błąd przekładni i parametrów resztkowych transformatora. Charakterystyka częstotliwościowa wzorca 1 H w tym zakresie częstotliwości jest mało dokładnie aproksymowana przez schemat zastępczy z rysunku 2.3.4. W zakresie tych częstotliwości wzorzec $L = 0,1$ H posiada znacznie dokładniejszy opis charakterystyki częstotliwościowej. Dokładność wyznaczenia wartości indukcyjności $L = 0,1$ H w omawianym układzie jest na poziomie $1 \cdot 10^{-5}$. Większą dokładność w omawianym zakresie częstotliwości /od około 500 Hz do 2 kHz zapewnia wzorzec $L = 0,1$ H. Przy mniejszych częstotliwościach /poniżej 500 Hz/ dokładność wyznaczenia indukcyjności $L = 0,1$ H maleje. Dokładność aproksymacji schematem zastępczym indukcyjności $L = 1$ H rośnie. W zakresie tym największą dokładność wyznaczenia wartości indukcyjności można osiągnąć za pomocą wzorca 1 H.

6. WYZNACZANIE CHARAKTERYSTYKI CZĘSTOTLIWOŚCIOWEJ WZORCA W OPARCIU O WYNIKI POMIARÓW

Największą dokładność komparacji L-C omawianą metodą można uzyskać, jeśli elementy układu spełniają pewne założenia. Przekładnia transformatora przyjmuje wartości okrągłe i niezbyt duże; na przykład 1, 2, 3, 4, 5, ..., 10..., 20. Otrzymuje się wtedy największą dokładność przekładni i minimalne parametry resztkowe. Kondensator C musi mieć wartość na ogół nie większą niż 10 do 100 nF /kondensatory powietrzne/. Wartość pojemności powinna być typu 10^{-k} lub $2 \cdot 10^{-k}$, gdzie k - całkowite. Kondensatory o tych wartościach mają największe dokładności.

Przy tych założeniach bardzo dokładne wyznaczenie wartości indukcyjności omawianą metodą możliwe jest przy określonych częstotliwościach, przy których pulsacja przyjmuje wartości okrągłe, na przykład $\omega = 10^3, 2 \cdot 10^3, \dots, 10^4, \dots$. Dalsze zagęszczanie punktów pomiarowych jest pracochłonne i nie daje zadowalającej poprawy dokładności. Zagadnienie pełnego opisu charakterystyki częstotliwościowej wzorca rozwiążemy więc analitycznie. W oparciu o zjawiska fizyczne zachodzące we wzorcu, wyprowadzimy funkcję zmian indukcyjności z częstotliwością zależną od pewnych stałych. Stałe te znajdziemy w oparciu o wyniki pomiarów indukcyjności w najkorzystniejszych punktach pomiarowych. W ten sposób otrzymamy dokładny opis charakterystyki częstotliwościowej wzorca w całym rozpatrywanym paśmie częstotliwości.

6.1. Matematyczne podstawy wyznaczania parametrów wzorca indukcyjności

W punkcie 2.3 pokazaliśmy, że przy dużych dokładnościach pomiaru na poziomie 10^{-4} i lepszym, zmiany indukcyjności z częstotliwością zależą głównie od dwóch czynników: pojemności zastępczej C /rys.2.3.4/ i prądów wirowych /rys.2.3.5/. Zależność indukcyjności od częstotliwości opisana jest funkcją /2.3.9/, zależną od parametrów L_0 , ω_0 /lub C /, M , R_e , L_e , których nie da się wydzielić i niezależnie zmierzyć. Wyznamy je na podstawie charakterystyki częstotliwościowej danej w postaci ciągu wartości indukcyjności. W tym celu przekształcimy równanie /2.3.9/ do postaci

$$L(\omega) = L_0 \left[\frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} - \frac{(\omega M)^2}{R_e^2 + (\omega L_e)^2} \frac{L_e}{L_0} \right]$$

Wprowadzimy oznaczenia pomocnicze

$$\omega_k^2 = \frac{R_e^2 L_0}{M^2 L_e}, \quad k^2 = \frac{M^2}{L_e L_0}$$

wtedy rozpatrywany wzór przyjmie wygodną do dalszej analizy postać

$$L(\omega, L_0, \omega_0, \omega_k, k) = L_0 \left[\frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{\omega_k}{\omega}\right)^2 - \frac{1}{k^2}} \right] \quad /6.1.1/$$

Okazuje się, że ilość parametrów nieznanych została sprowadzona do czterech. Dwa poprzednio stosowane L_0 , ω_0

i dwa nowe ω_k , k . Wprowadzimy nazwy tych parametrów:

- L_0 - indukcyjność wzorca przy $\omega = 0$
- ω_0 - pulsacja rezonansu własnego cewki
- ω_k - pulsacja rezonansu prądów wirowych
- k - współczynnik sprzężenia magnetycznego L_e , L_0

Pokazaliśmy poprzednio, że metoda transformatorowa pozwala na bardzo dokładne wyznaczenie wartości indukcyjności wzorca w punkcie ω_1 oraz wyznaczenie dokładnych zmian indukcyjności z częstotliwością w pewnym przedziale $\langle \omega_a, \omega_b \rangle$. W związku z tym, wyniki pomiarów indukcyjności można przedstawić w postaci

$$\begin{aligned} \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N \\ l_1, l_2, \dots, l_N \\ \delta_{l1}, \delta_{l2}, \dots, \delta_{lN} \end{aligned}$$

gdzie: N - ilość pomiarów

$l_1, l_2, \dots, l_N$ - wyniki pomiarów

$\delta_{l1}, \delta_{l2}, \dots, \delta_{lN}$ - błędy pomiarów

W dalszym ciągu będziemy starali się wyznaczyć wartości parametrów $L_0, \omega_0, \omega_k, k$, takich, żeby funkcja /6.1.1/ przybliżała w najlepszy sposób, w sensie pewnego kryterium, rzeczywistą funkcję indukcyjności $L(\omega)$ danej w postaci punktów pomiarowych. Zauważmy, że ponieważ mamy wyznaczyć cztery elementy, musimy mieć minimum cztery punkty pomiarowe, czyli $N \geq 4$.

Rozważania przeprowadzone w pracy [35] wskazują, że najlepsze oszacowanie daje metoda najmniejszych kwadra-

tów. Jeżeli założymy, że pomiary $1, 2, \dots, N$ są niezależne i mają rozkład łącznie normalny, to estymacja oparta na ocenie najmniejszych kwadratów jest najefektywniejsza, tzn. elementy macierzy informacji Fishera przyjmują wartości minimalne [29, 35]. W naszym przypadku zagadnienie sprowadzi się do wyznaczenia parametrów $L_0, \omega_0, \omega_k, k$, dla których wyrażenie

$$f(L_0, \omega_0, \omega_k, k) = \sum_{i=1}^N \varrho_i (l_i - L(\omega_i))^2 = \text{minimum} \quad \dots /6.1.2/$$

gdzie:

l_i - wynik pomiaru indukcyjności przy pulsacji ω_i

$L(\omega_i)$ - wartość wyrażenia /6.1.1/ w punkcie ω_i .

Dla uproszczenia zapisu pominięto tu parametry $L_0, \omega_0, \omega_k, k$ w zapisie wartości funkcji

ϱ_i - waga i -tego pomiaru

Do dalszych rozważań założymy, że wagi są znormalizowane, czyli spełniają warunek [35]

$$\varrho_i = \frac{1}{\delta_{li}^2 \sum_{j=1}^N \frac{1}{\delta_{lj}^2}} \quad /6.1.3/$$

6.2. Numeryczna metoda wyznaczania parametrów wzorca indukcyjności

Funkcja /6.1.2/ ma postać na tyle skomplikowaną, że wyznaczenie dokładne jej minimum jest bardzo trudne. Rozwiążemy więc zagadnienie metodami przybliżonymi. W tym celu zróżniczkujemy wyrażenie /6.1.2/ po szukanych parametrach L_0 , ω_0 , ω_k , k . Szukanie minimum funkcji sprowadzi się do rozwiązania układu czterech równań. Równania rozwiążemy metodą Newtona [6].

Wprowadzimy oznaczenia pomocnicze

$$L_0 = x_1, \quad \frac{1}{\omega_0^2} = x_2, \quad \omega_k^2 = x_3, \quad \frac{1}{k^2} = x_4, \quad \omega_i^2 = a_i, \quad \frac{1}{\omega_i^2} = b_i \quad /6.2.1/$$

wtedy funkcja /6.1.1/ przyjmie postać

$$L(\omega_i) = x_1 \left(\frac{1}{1 - a_i x_2} - \frac{1}{b_i x_3 + x_4} \right) \approx x_1 \left(1 + a_i x_2 - a_i^2 x_2^2 - \frac{1}{b_i x_3 + x_4} \right) \quad /6.2.2/$$

Pierwszy człon w nawiasie został rozwinięty w szereg potęgowy z uwzględnieniem pierwszych trzech wyrazów. Przy warunku $\omega \leq 0,1 \omega_0$ /patrz punkt 2.3/ błąd wynikający z pominięcia następnych wyrazów jest mniejszy niż $1 \cdot 10^{-6}$. Warunek najmniejszych kwadratów /6.1.2/ zapiszemy teraz w postaci

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{i=1}^N \rho_i (l_i - L(\omega_i))^2 = \text{minimum} \quad /6.2.3/$$

Po zróżniczkowaniu równania kolejno po elementach x_1 , x_2 , x_3 , x_4 otrzymamy układ równań

$$\frac{\partial f(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\partial x_j} = 2 \sum_{i=1}^N \rho_i (l_i - L(\omega_i)) \frac{\partial L(\omega_i)}{\partial x_j} = 0 \quad /6.2.4/$$

($j = 1, 2, 3, 4$)

Wprowadzimy oznaczenie

$$f_j(X) = \sum_{i=1}^N g_i (l_i - L(\omega_i)) \frac{\partial L(\omega_i)}{\partial x_j} \quad (j=1,2,3,4) \quad /6.2.5/$$

wtedy układ równań /6.2.4/ przyjmuje prostą postać

$$f_j(X) = 0 \quad (j = 1,2,3,4) \quad /6.2.6/$$

Układ równań /6.2.6/ zapiszemy w postaci wektorowej

$$F(X) = 0 \quad /6.2.7/$$

gdzie

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad F(X) = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} \quad 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad /6.2.8/$$

Wprowadzimy oznaczenie

$$f_j^i = \frac{\partial L(\omega_i)}{\partial x_j} \quad /6.2.9/$$

Stąd po obliczeniu pochodnych cząstkowych /6.2.9/ równania /6.2.2/ otrzymamy macierz o wymiarach $N \times 4$:

$$\begin{bmatrix} f_j^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + a_i x_2 - a_i^2 x_2^2 - \frac{1}{b_i x_3 - x_4} \\ a_i x_1 (1 - 2a_i x_2) \\ \frac{x_1 b_i}{(b_i x_3 + x_4)^2} \\ \frac{x_1}{(b_i x_3 + x_4)^2} \end{bmatrix} \quad (i = 1,2,3, \dots N) \quad /6.2.9/$$

Rozwiązany układ równań /6.2.6/ zapisuje się teraz w formie

$$f_j(\mathbb{X}) = \sum_{i=1}^N g_i(l_i - L(\omega_i)) f_j^i = 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4) \quad /6.2.10/$$

Do rozwiązania tego układu równań zastosujemy metodę Newtona. Jest to metoda kolejnych przybliżeń, która polega na tym, że jeśli dane jest p -te przybliżenie szukanego punktu

$$\mathbb{X}^p = (x_1^p, x_2^p, \dots, x_n^p)$$

pierwiastka układu równań /6.2.10/, to $p+1$ przybliżenie rozwiązania obliczamy ze wzoru [6]

$$\mathbb{X}^{p+1} = \mathbb{X}^p - \mathbb{A}^{-1} \mathbb{F}(\mathbb{X}^p) \quad /6.2.11/$$

gdzie $\mathbb{A}$ jest macierzą Jacobiego układu równań /6.2.7/, natomiast $\mathbb{A}^{-1}$ jest macierzą odwrotną do niej. Elementy macierzy $\mathbb{A}$ zdefiniowane są wzorami

$$a_{kl} = \frac{\partial f_k(\mathbb{X})}{\partial x_l} \quad /k, l = 1, 2, 3, 4/ \quad /6.2.12/$$

Na podstawie /6.2.4/ otrzymamy wzór na wartości elementów macierzy $\mathbb{A}$

$$\begin{aligned} a_{kl} &= \sum_{i=1}^N g_i \left[-\frac{\partial L(\omega_i)}{\partial x_l} f_k^i + (l_i - L(\omega_i)) \frac{\partial f_k^i}{\partial x_l} \right] = \\ &= \sum_{i=1}^N g_i \left[-f_l^i f_k^i + (l_i - L(\omega_i)) + a_{kl}^i \right] \end{aligned} \quad /6.2.13/$$

gdzie

$$a_{kl}^i = \frac{\partial f_k^i}{\partial x_l} \quad /i = 1, 2, \dots, N/ \quad /6.2.14/$$

Wprowadźmy oznaczenie $[a_{kl}^i] = A^i \quad /i = 1, 2, \dots, N; k, l = 1, 2, 3, 4/$

Po zróżniczkowaniu elementów macierzy $[f_j^i]$ zgodnie ze wzorem /6.2.14/ otrzymamy następującą postać elementów macierzy A^i

$$A^i = \begin{bmatrix} 0 & a_i(1-2a_ix_2) & b_ic_i^2 & c_i^2 \\ a_i(1-2a_ix_2) & -2a_i^2x_1 & 0 & 0 \\ b_ic_i^2 & 0 & 2x_1b_i^2c_i^2 & -2x_1b_ic_i^3 \\ c_i^2 & 0 & -2x_1b_ic_i^3 & -2x_1c_i^3 \end{bmatrix} \quad /6.2.15/$$

($i = 1, 2, \dots, N$)

gdzie

$$c_i = \frac{1}{b_1 x_3 + x_4} \quad /i = 1, 2, \dots, N/$$

Wprowadzimy oznaczenia

$$b_{kl}^i = f_k^i \cdot f_l^i \quad /i = 1, 2, \dots, N; k, l = 1, 2, 3, 4/$$

... /6.2.16/

i macierze o wymiarze 4×4

$$B^i = [b_{kl}^i] \quad /i = 1, 2, \dots, N/ \quad /6.2.17/$$

Wzór na macierz Jacobiego w punkcie X^P zapiszemy teraz w postaci

$$A = \sum_{i=1}^N \xi_i [(l_i - L(\omega_i)) A^i - B^i] \quad /6.2.18/$$

gdzie: l_i - wynik i -tego pomiaru indukcyjności

$L(\omega_i)$ - wartość indukcyjności obliczona ze wzoru /6.2.1/ w punkcie X^P ,

$\mathbb{A}^i$ - wartości elementów tych macierzy w punkcie $\mathbb{X}^p$
 należy obliczać ze wzoru /6.2.15/,

$\mathbb{B}^i$ - wartości elementów tych macierzy w punkcie $\mathbb{X}^p$
 należy obliczać ze wzorów /6.2.16/ i /6.2.9/.

Mnożenie macierzy przez liczbę rozumiane jest tu jako mnożenie każdego elementu macierzy przez tę liczbę.

Zauważmy, że macierze $\mathbb{A}^i$ i $\mathbb{B}^i$ / $i = 1, 2, \dots, N$ / są symetryczne więc i macierz $\mathbb{A}$ jest symetryczna. Do odwracania macierzy $\mathbb{A}$ można więc stosować metody odwracania macierzy symetrycznych, które są prostsze niż dowolnej macierzy. Macierz $\mathbb{A}$ ma wymiar 4×4 . Bezpośrednie wyliczenie macierzy odwrotnej $\mathbb{A}^{-1}$ jest bardzo pracochłonne. Obliczenia będą prowadzone na maszynie cyfrowej. Każda większa maszyna cyfrowa ma w swojej bibliotece gotowe procedury na odwracanie macierzy więc nie będziemy zajmowali się dalej tym zagadnieniem. Przyjmiemy, że dana jest macierz $\mathbb{A}^{-1}$ i p -te przybliżenie rozwiązania $\mathbb{X}^p$. Wtedy $p+1$ -sze przybliżenie $\mathbb{X}^{p+1}$ obliczymy ze wzoru /6.2.11/, co w rozwiniętej postaci zapiszemy wzorem

$$\begin{bmatrix} x_1^{p+1} \\ x_2^{p+1} \\ x_3^{p+1} \\ x_4^{p+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^p \\ x_2^p \\ x_3^p \\ x_4^p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_1(\mathbb{X}^p) \\ f_2(\mathbb{X}^p) \\ f_3(\mathbb{X}^p) \\ f_4(\mathbb{X}^p) \end{bmatrix} \quad /6.2.19/$$

gdzie c_{ij} - elementy macierzy $\mathbb{A}^{-1}$

Po otrzymaniu $p+1$ -wszego przybliżenia wektora $\mathbb{X}$ należy sprawdzić dokładność wyznaczenia minimum, czyli wartość funkcji /6.2.3/ w punkcie $\mathbb{X}^p$. Jeśli jest niewystarczająca należy pod $\mathbb{X}^p$ podstawić $\mathbb{X}^{p+1}$ i powtórzyć obliczenia. Proces kontynuujemy aż do otrzymania wymaganej dokładności obliczeń. Pozostał obecnie problem wyznaczenia pierwszego przybliżenia $\mathbb{X}' = (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4)$.

6.3. Wyznaczanie pierwszego przybliżenia wektora

Przy wyznaczaniu przybliżenia początkowego będziemy korzystali z danych typowych wzorców indukcyjności. W dalszym ciągu założymy, że pomiary są uporządkowane, tzn. $\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_N$ oraz, że $\omega_N \gg \omega_1$.

Do wyznaczenia wstępnego przybliżenia elementu x_1 ($x_1 = L_0$) założymy, że funkcja /6.2.2/ jest dla małych ω liniowa. x_1 jest wartością indukcyjności dla $\omega = 0$, więc wartość x_1 wyznaczymy z punktu przecięcia prostej przechodzącej przez dwa pierwsze punkty pomiarowe $(\omega_1, l_1)(\omega_2, l_2)$ i oś $\omega = 0$. Wtedy

$$L_0 = x'_1 = \frac{\omega_1 l_2 - \omega_2 l_1}{\omega_1 - \omega_2} \quad /6.3.1/$$

Do wyznaczenia przybliżenia początkowego pozostałych parametrów rozpatrzmy przypadki a/ gdy $l_N > L_0$ i b/ gdy $l_N \leq L_0$.

a. W przypadku a wpływ prądów wirowych /drugiego członu wzoru /6.1.1/ w punkcie ω_N jest mniejszy niż wpływ pojemności rozproszonych. Założymy, że pomijalnie mały $\left(\frac{1}{b_i x_3 + x_4} = 0 \right)$, wtedy na podstawie wzorów /6.1.1/ i /6.2.2/

$$x_2^1 = \frac{1}{\omega_o^2} = \frac{1}{\omega_N^2} \left(1 - \frac{x_1^1}{l_N} \right) \quad /6.3.2/$$

Do wyznaczenia elementów ω_k , k wyznaczymy punkt pomiarowy l_m o najmniejszej wartości indukcyjności uzyskanej z pomiarów

$$l_m = \min_{k=1,2,\dots,N} l_k$$

Mogą zachodzić dwa przypadki: a.1. gdy $m > 1$, a.2. gdy $m = 1$

a.1. $m > 1$. Wtedy wpływ prądów wirowych w pewnym podprzedziale jest większy niż wpływ pojemności rozproszonych. Założymy, że zachodzi warunek $\omega_m \ll \omega_o / \omega_N < 0,1 \omega_o$. Wtedy $\left(\frac{\omega_k}{\omega} \right)^2 \gg \frac{1}{k^2}$ /patrz punkt 2.3/ i wzór /6.1.1/ sprowadza się do postaci

$$\frac{L(\omega)}{L_o} = 1 + \omega^2 \left(\frac{1}{\omega_o^2} - \frac{1}{\omega_k^2} \right) \quad /6.3.3/$$

Stąd dla punktu ω_m

$$\frac{1}{x_3^1} = \frac{1}{\omega_k^2} = \frac{1}{\omega_o^2} + \frac{1}{\omega_m^2} \left(1 - \frac{l_m}{L_o} \right) \quad /6.3.4/$$

Założmy dalej, że w punkcie ω_m wpływ współczynnika k jest równy wpływowi ω_k . Oznacza to, że elementy wzoru /6.1.1/ spełniają warunek

$$\left(\frac{\omega_k}{\omega_m} \right)^2 = \frac{1}{k^2}$$

stąd

$$x_4^1 = \frac{1}{k^2} = \left(\frac{\omega_k}{\omega_m} \right)^2 \quad /6.3.5/$$

a.2. Gdy $m = 1$, wtedy wpływ pojemności rozproszonej jest większy niż wpływ prądów wirowych. Niech m_0 numer pierwszego pomiaru większego od l_1 ($l_{m_0} > l_1$). Przyjmiemy, że w punkcie ω_{m_0} wpływ prądów wirowych wynosi $1/3$ całkowitych zmian indukcyjności z częstotliwością, tzn.

$$\frac{l_{m_0}}{l_1} - 1 = \frac{1}{3} \left(\frac{\omega_{m_0}}{\omega_k} \right)^2$$

Pominięto tu wpływ współczynnika sprzężenia k . Po rozwiązaniu równania otrzymamy

$$\frac{1}{x_3^1} = \frac{1}{\omega_k^2} = \frac{3}{\omega_{m_0}^2} \left(\frac{l_{m_0}}{l_1} - 1 \right) \quad /6.3.6/$$

Natomiast do oszacowania parametru k przyjmujemy, że wpływ $\frac{1}{k^2}$ jest w przybliżeniu równy wpływowi parametru ω_k w punkcie ω_{m_0} . Wtedy otrzymamy

$$x_4^1 = \frac{1}{k^2} = \left(\frac{\omega_k}{\omega_{m_0}} \right)^2 \quad /6.3.7/$$

b. Rozpatrzmy obecnie przypadek, gdy $l_N \ll L_0 = x_1^1$. Wtedy w rozpatrywanym zakresie częstotliwości wpływ prądów wirowych jest większy niż wpływ pojemności rozproszonej. Dotyczy to głównie wzorców o małej wartości nominalnej w zakresie niskich częstotliwości $\omega_N \ll \omega_0$. Pomiaru te nie dają podstaw do obliczenia ω_0 . Założymy tylko, że $\omega_0 = 10^3 \omega_N$, wtedy

$$x_2' = \frac{1}{\omega_0^2} = \frac{1}{10^6 \omega_N^2} \quad /6.3.8/$$

W dalszym ciągu wyróżnimy przypadek szczególny, gdy

$l_N = l_0$, wtedy założymy, że

$$x_3' = \omega_k^2 = \omega_0^2 \quad /6.3.9/$$

Natomiast w przypadku, gdy $l_N < L_0 = x_1$ założymy, że zmiana indukcyjności w punkcie ω_N spowodowana jest tylko wpływem prądów wirowych oraz, że wpływ współczynnika k jest pomijalnie mały. Wtedy na podstawie /6.1.1/ otrzymamy

$$\frac{l_N}{L_0} - 1 = - \left(\frac{\omega_N}{\omega_k} \right)^2$$

stąd

$$\frac{1}{x_3'} = \frac{1}{\omega_k^2} \left(1 - \frac{l_N}{L_0} \right) \quad /6.3.10/$$

Do oszacowania parametru k przyjmiemy, że w punkcie ω_N wpływ współczynnika $\frac{1}{k^2}$ jest w przybliżeniu równy wpływowi parametru ω_k . Stąd otrzymamy

$$x_4' = \frac{1}{k^2} = \left(\frac{\omega_k}{\omega_N} \right)^2 \quad /6.3.11/$$

W powyższej analizie uwzględniono wszystkie spotykane w praktyce rodzaje charakterystyk częstotliwościowych wzorców L . Przy szacowaniu parametrów $x_2, x_3, x_4 (\omega_0, \omega_k, k)$ stosowano często duże uproszczenia. Wielkość wpływu tych parametrów na indukcyjność jest na ogół mniejsza niż 10^{-3} .

Obliczenia wykazały, że nawet przy bardzo grubych oszacowaniach tych parametrów proces iteracyjny Newtona jest zbieżny.

6.4. Wyniki obliczeń

Do obliczeń praktycznych napisano program w języku Algol 1204. Dla wzorca firmy General Radio o wartości nominalnej $L = 0,1 \text{ H}$, typ 1482-L otrzymano wyniki

$$L_0 = 0,10003476 \text{ H}$$

$$\omega_0 = 423627 \text{ rad/s}$$

$$\omega_k = 65455 \text{ rad/s}$$

$$k = 6,88 \cdot 10^{-3}$$

W tabeli 6.4.1 porównano wartości indukcyjności otrzymane z pomiarów L_{zm} z wartościami funkcji aproksymującej /6.1.1/ L_{obl} .

Tabela 6.4.1. Porównanie wyników pomiarów z wartościami funkcji aproksymującej dla wzorca f-my General Radio, $L = 0,1 \text{ H}$, typ 1482-L

f	L_{zm}	L_{obl}	$\frac{L_{obl} - L_{zm}}{L_{zm}}$
[Hz]	[H]	[H]	$\times 10^{-6}$
100	0,100032	0,1000319	- 1
200	0,100031	0,1000313	+ 2
400	0,100034	0,1000338	- 2
1000	0,100052	0,1000520	< 1

Z przedstawionych danych wynika, że funkcja /6.1.1/ aproksymuje indukcyjność rzeczywistej cewki ze znacznie większą dokładnością niż dotychczas stosowana funkcja oparta o schemat zastępczy z rysunku 2.3.4.

- Jeśli dane są wartości indukcyjności w punktach $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$; $\omega_N \leq 0,1 \omega_0$, to metoda pozwala na dokładne wyznaczenie wartości indukcyjności w każdym punkcie przedziału częstotliwości $\langle \omega_1, \omega_N \rangle$.

- Załóżmy, że postać funkcji /6.1.1/ pozwala na dokładniejszą aproksymację indukcyjności rzeczywistej cewki niż wynosi dokładność pomiaru indukcyjności. Niech $L_{ri}, L_{obl_i}, L_{zm_i}$ oznaczają odpowiednio wartość rzeczywistą, wartość obliczoną ze wzoru /6.1.1/ i wartość zmierzoną indukcyjności przy pulsacji ω_i / $i = 1, 2, \dots, N$ /. Wtedy dla każdej pulsacji ω_i / $i = 1, 2, \dots, N$ / i każdej liczby $\varepsilon > 0$ zachodzi [35]

$$P \left\{ |L_{ri} - L_{obl_i}| < \varepsilon \right\} > P \left\{ |L_{ri} - L_{zm_i}| < \varepsilon \right\}$$

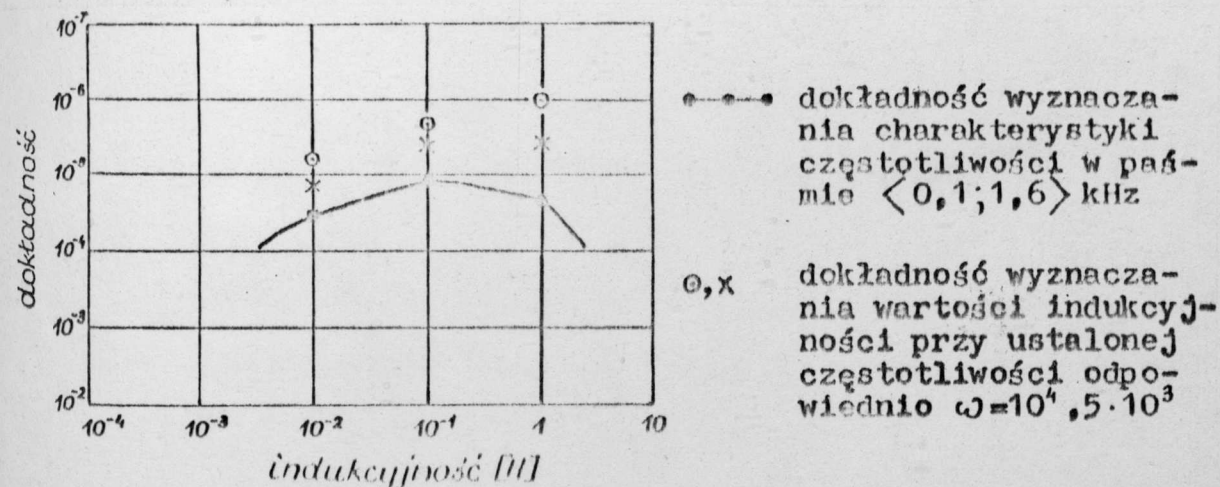
Stąd wynika, że wartość obliczona indukcyjności L_{obl_i} jest w każdym punkcie częstotliwości lepsza niż wartość zmierzona. Przedstawiona metoda pozwala więc dodatkowo na poprawę dokładności wyznaczenia wartości indukcyjności.

7. PODSUMOWANIE

Głównym ograniczeniem dokładności pomiaru indukcyjności w dolnym paśmie częstotliwości akustycznych jest dokładność wyznaczenia wartości wyróżnionego wzorca. Błąd ten jest rzędu $1 \cdot 10^{-4}$, podczas gdy pozostałe składowe dokładności pomiaru L - błąd wyznaczenia wartości wzorców indukcyjności w odniesieniu do wzorca odnośnikowego oraz błąd porównania wielkości mierzonej z wzorcem - mogą być utrzymane na poziomie $1 \cdot 10^{-5}$. Parametry produkowanych wzorców pozwalają na poprawę dokładności ich wyznaczenia dożądanego poziomu $1 \cdot 10^{-5}$. Stosunkowo duże i trudne do analitycznego określenia zmiany indukcyjności w funkcji częstotliwości powodują, że wyznaczenie wartości wyróżnionego wzorca z założoną dokładnością sprowadza się do wyznaczenia na podstawie pomiarów całej jego charakterystyki częstotliwościowej. Osiągnięcie wymaganych dokładności pomiaru $/10^{-5}/$ możliwe jest przy stosowaniu impedancji trójjaciskowych. Największe szanse pozytywnego rozwiązania zagadnienia rokuje odniesienie wartości wzorców indukcyjności do wzorców pojemności /komparacja L-C/ w układach transformatorowych.

Wśród układów transformatorowych do porównań L-C najwięcej zalet posiadają mostki wieloramienne. Niektóre warianty tych mostków pozwalają na wyznaczenie wartości indukcyjności w szeregowym, inne w równoległym układzie zastępczym. Większą dokładność i wiarygodność wyników pomia-

rów można osiągnąć w układach wyznaczających indukcyjność w równoległym układzie zastępczym. Błędy przypadkowe komparacji L-C, a więc i dokładności wyznaczenia wartości indukcyjności /niedokładność wzorca odnośnikowego C może być mniejsza niż $1 \cdot 10^{-6}$ / mogą być utrzymane na poziomie lepszym niż $2 \cdot 10^{-6}$ przy dobroci $Q > 3$. Błędy systematyczne są na ogół mniejsze niż $2 \cdot 10^{-6}$. W przypadkach, w których osiągają większe wartości mogą być uwzględnione w formie poprawek. Możliwe do osiągnięcia dokładności wyznaczenia wartości L przy ustalonych częstotliwościach w zależności od wartości indukcyjności zaznaczono na rysunku 7.1 kółkami i krzyżykami.



Rys.7.1. Możliwa do osiągnięcia dokładność wyznaczenia wartości indukcyjności w transformatorowym komparatorze L-C

Widać, że dla pulsacji $\omega = 10^4$ może być osiągnięta dokładność lepsza niż $1 \cdot 10^{-5}$ dla indukcyjności 10 mH, 100 mH, 1 H.

Wyznaczanie charakterystyki częstotliwościowej wzorców można przeprowadzić drogą zagęszczania punktów pomiarowych, jest to droga pracochłonna i nie daje zadowalającej poprawy dokładności. Największą dokładność komparacji L-C uzyskuje się

tylko przy niektórych częstotliwościach. Opracowano analityczny opis charakterystyki wzorca zależny od czterech parametrów. Zaproponowano wyznaczenie tych parametrów metodą najmniejszych kwadratów. Wyniki obliczeń wykazują, że indukcyjność rzeczywistej cewki aproksymowana jest przez proponowaną funkcję dokładniej niż dotychczas stosowane schematy zastępcze. Możliwą do osiągnięcia dokładność wyznaczenia wartości wzorca indukcyjności w paśmie częstotliwości $\langle 0,1 - 1,6 \rangle$ kHz zaznaczono na rysunku 7.1.

Widać, że największą dokładność wyznaczenia wartości indukcyjności w całym paśmie częstotliwości otrzymuje się dla wzorca o wartości nominalnej 0,1 H. Możliwa do osiągnięcia dokładność tego wzorca wynosi $\sim 1 \cdot 10^{-5}$ i jest na poziomie pozostałych składowych błędów pomiaru indukcyjności.

Uważam, że teza pracy została udowodniona - proponowana metoda komparacji L-C w układzie transformatorowym pozwala na poprawę dokładności pomiaru indukcyjności w dolnym paśmie częstotliwości akustycznych.

O dokładności komparacji L-C decydują parametry elementów R_0 , C_0 i parametry transformatora stosunkowego. Zastosowano najprostsze rozwiązanie: regulacja elementami R_0 , C_0 , regulowanymi dzielnikami indukcyjnymi o małej impedancji wyjściowej.

Dalsze kontynuowanie prac nad dokładnymi pomiarami indukcyjności własnej powinno iść w kierunkach:

- badania stabilności wzorców indukcyjności w oparciu o opracowaną metodę - jeden wzorzec odnośnikowy pojemności,
- badania dokładności aproksymacji różnych wzorców proponowaną funkcją w zależności od zakresu częstotliwości,
- badanie możliwości rozszerzenia zakresu częstotliwości i zakresu pomiarów indukcyjności omawianą metodą,
- opracowanie konstrukcji wzorca o podwyższonej dobroci i odpowiednio dużej stabilności krótkoterminowej. Na przykład w oparciu o efekt żyratorowy.

Pragnę złożyć podziękowania
doc.dr.A.Zboruckiemu i pozostałym
Kolegom z zespołu za cenne uwagi
udzielone mi w czasie wykonywania
tej pracy

Autor

L I T E R A T U R A

1. Arri E., Noce G., A high accuracy self-calibrating bridge with coupled inductive ratio arms used for standard inductors comparison, IEEE Trans.Instrum. and Meas., vol.IM-23, No 1, March 1974, s.72.79.
2. Atabiekow G.J., Teoria liniowych obwodów elektrycznych. WNT, Warszawa 1964.
3. Bloch A., Temperature coefficient of air-cored self-inductances, Wireless Enger. vol.21, No 8, 1944.
4. Clothier W.K., A calculable standard of capacitance. Metrologia, vol.I-7, s.245-253, december 1958.
5. Deacon T.A., Hill I.I., Two-stage inductive voltage dividers Proc.IEE, vol.115, No 6, June 1968, s.888-892.
6. Demidowicz B.P., Maron I.A., Metody numeryczne, PWN, Warszawa 1965.
7. Drude P., Annalen der Physik 9, 1902, s.293.
8. Dwight H.B., The selfinductance of toroidal coil without iron, Electronic Eng. 1945, vol.64, nr 11.
9. Dummer G.W.H., Inductors, London 1957, Pitman and Sons.
10. Dunn A.F., Tsao S.H., Ratio comparisons of impedance standards.
11. Ebert J., Rezonans wielokrotny cewek indukcyjnych. Archiwum Elektrotechniki, t.XVII, 1968/V-1, s.125.
12. Ebert J., Wpływ dielektryka na pojemność własną i dobroć cewki selenoidalnej. Archiwum Elektrotechniki 1974, t.XXIII/z 1, s.75.
13. Griffiths W.H., Electrical standards for research and industry, London 1949, H.W.Sullivan.

14. Griffiths W.H., Recent improvements in air-cored inductances, Wireless Engineer, Vol.XIX, No 220, s.8-19 i Vol.XIX, No 221, s.56-63.
15. Grover F.W., Methods for derivation and expansion of formulas for the mutual inductance of coaxial circles and for the inductance of single-layer-solenoids, BJ, /1928/, RP 16.
16. Grover F.W., Inductance calculation-working formulas and tables, 1 st ed. New York, Van Nostrand, 1946.
17. Grover F.W., Inductance calculation-working formulas and tables, 1 st ed. New York: Van Nostrand, 1946.
18. Harrison P.W., Rayner G.H., A primary standard of mutual inductance, Metrologia, vol.3, No 1, January 1967.
19. Helke H., Ausgewählte induktivitäts - messbrücken für nieder und tonfrequenz, ATM 1969, No 339, s.85-90.
20. Hersh J.E., Connection errors in inductance measurement, General Radio Experimenter, Vol.34, No 10, October 1960.
21. Hilhouse D.L., Klein H.W., A ratio transformer bridge for standardisation of inductors and capacitors, IRE Trans. Instrum. vol.I-9, s.251-257, september 1960.
22. Hilhouse D.L., Resonant capacitance-inductance transfer using the ratio transformer. IEEE Trans. Commun. Electron, vol.82, s.158-164, 1963.
23. Igarashi T., Koizumi Y., Kanno M., Determination of an absolute capacitance by a horizontal cross capacitor. IEEE Transactions on instrumentation and measurement, Vol.IM-17, No 4, December 1968.

24. Jellonek A., Pomiar pojemności własnej cewek indukcyjnych. Rozprawy Elektrotechniki, t.IV, z.1, 1958, s.287-322.
25. Kałantarow P.L., Ciejtlin L.D., Rascziot induktiwnostiej. Gosudarstwiennojje Energeticzeskoje Izdatielstwo, Moskwa 1955.
26. Karandiejew K.B., Transformatornyje izmieritielnyje mosty, Energia, Moskwa 1970.
27. Krotkow K., Tocznyje izmierienija elektriczeskich jomkosti i induktiwnosti. Izdatielstwo standartow, Moskwa 1966.
28. Linckh H.F., Brasack F., Eine Methode zur Bestimmung des Widerstandswertes aus induktivität. Metrologia vol.4, No 3, July 1968, s.94-101.
29. Linnik Y. Metoda najmniejszych kwadratów. PWN, Warszawa 1962.
30. Liwszic E.S., Nowiejszije mosty pieriemiennowo toka powyższennoj tocznosti. Izmieritielnaja Tiechnika Nr 4, 1963, s.55-59.
31. Liwszic E.S., Mietody izmierienija koeficienta dobrotnosti katuszek induktiwnosti. Izmieritielnaja tiechnika nr 11, 1963.
32. Mc Gregor M.C., Hersh J.F., Cutkosky R.D., New apparatus at the National Bureau of Standards for absolute capacitance measurment. IRE Transaction on Instr. Volume I-7, No 3, december 1958.
33. Millea A., Ilic P., A class of double-balance quadratura bridges for the intercomparison of three-terminal resistance, inductance and capacitance standards, Metrologia, vol.5, No 1, January 1969, s.14-20.
34. Muciek A., Porównanie wzorców indukcyjności własnej z wzorcami pojemności i rezystancji. Komunikat nr 2, IME, Politechnika Wrocławska, Wrocław 1972.

35. Muciek A., Wyznaczenie parametrów dwójnika elektrycznego metodą najmniejszych kwadratów. Praca dyplomaowa, Instytut Matematyki, Uniwersytet Wrocławski, 1975.
36. Painter H., Impedance comparator adaptable to many kinds of measurments and tests, General Radio Experimenter, vol.34, No 4, April 1960.
37. Puczyński J., Zastosowanie metody Ritza do obliczania pojemności własnej cewek indukcyjnych. Archiwum Elektrotechniki. t.XX, 23/73, s.611.
38. Rainer G.H., The calibration of inductors at power and audio frequencies. IEEE. P.C., 1959, 106, s.38.
39. Rietz W., Über die Kapazität von Spulen. Jahrbuch der Drahtlosen Telegr. und Teleph. 7, 1913, s.535.
40. Rusin E.F., Izmierienije sobstwiennoj jomkosti katuszek induktiwnosti s żeleznym serdecznikom. Izmieritielnaja Tiechnika, Nr 10, 1965.
41. Silsbee F.B., Extension and dissemination of electrical and magnetic units by the National Bureau of Standards, Precision Measurment and Calibration, National Bureau of Standards Handbook -77, vol.I, February 1961.
42. Sobolewskij K.M., Pankow B.N., Most s induktiwno swiazanymi pleczami dla izmierienija paramietrow /katuszek induktiwnosti/; Awt.swid.Nr 178897. Biulietien' izobrietienij, 1966, No 4.
43. Sobolewskij K.M., Pankow B.N., Butt W.J., Cifrowoj most dla izmierienija paramietrow katuszek induktiwnosti, Awt. Swid. No 245903, Biulietien' izobrietienij, 1969, No 20.

44. Szczudło M., Porównanie własności transformatorów napięcia i prądu w układach mostków transformatorowych do pomiaru pojemności. Praca dyplomowa IME, Politechnika Wrocławska, 1974.
45. Szulkin P., Pogorzelski S., Podstawy teorii pola elektromagnetycznego. WNT, Warszawa 1964.
46. Terrien J., Fundamantal Metrology, Metrologia Vol.8, No 3, July 1972, s.99-108.
47. Thomson A.M., The precise measurment of small capacitances I.R.E., Trans.Instrumentation, Vol.I-7, December 1958, s.245-253.
48. Thomson A.M., An absolute determination of resistance based on a calculable standard of capacitance. Metrologia, Vol.4, No 1, January 1968, s.1-7.
49. Todorow J., Nieposriedstwiennoj izmierienije sobstwiennoj jomkosti katuszek induktiwnosti . Izmieritielnaja Tiechnika, No 11, 1963.
50. Todorow J., Induktiwnosti soprotiwlienija, potieri i dobrotnosti katuszek induktiwnosti, Izmieritielnaja Tiechnika No 7, 1961.
51. Zborucki A., Spójny system wzorców impedancji. Prace Naukowe IME 1973, No 5, seria 1, s.169.

Katalogi

52. Katalog firmy General Radio, Impedance standards, January 1971.
53. Katalog firmy Sullivan, Electrical standards and measuring instruments for research and industry, 1965.

D O D A T E K

D.1. System dokładnych pomiarów jednej wielkości

Założmy, że zakres mierzonej wielkości wynosi a, b . Wartości wzorców stanowią pewne wybrane punkty w tym przedziale. Z grupy wzorców wyróżnimy wzorzec, który przy danym stanie techniki można określić z największą dokładnością. Wartość tego wzorca powinna leżeć w optymalnym /najdokładniejszym/ zakresie pomiaru tej wielkości. Wyznaczenie wartości tego wyróżnionego wzorca przeprowadza się najczęściej albo w sposób absolutny /obliczana z podstawowych zjawisk fizycznych/, jeśli jest to technicznie realizowalne z odpowiednio dużą dokładnością, albo przez porównanie z wzorcami innych wielkości. Wartości pozostałych wzorców wyznacza się przez bezpośrednie lub pośrednie porównanie z wyróżnionym wzorcem.

Niech x_0 oznacza wartość wyróżnionego wzorca. Pozostałe wzorce tej wielkości uporządkujemy według wzrastających wartości nominalnych i oznaczmy symbolem x_i , gdzie $i = 1, 2, 3, \dots$ będzie dotyczyło wzorców o większej wartości nominalnej od x_0 , a $i = -1, -2, -3, \dots$ wzorców o mniejszej wartości nominalnej od x_0 . Względną dokładność i -tego wzorca oznaczmy symbolem δ_{x_i} ($i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Założymy, że będziemy porównywali bezpośrednio wzorce, których wartości nie przekraczają stosunku 1:N. Jest to na ogół warunek konieczny przy dużych dokładnościach pomiaru /najczęściej

$N \leq 10$. Wartości wzorca różniącego się więcej niż $1:N$, będziemy wyznaczać w stosunku do x_0 w kilku porównaniach pośrednich. Jeżeli wartość wzorca równa x_i spełnia warunek

$$N^{k-1} x_0 < x_i \leq N^k x_0$$

lub warunek

$$N^{-k} x_0 \leq x_i < N^{-(k-1)} x_0$$

gdzie $k = 1, 2, 3, \dots$

to minimalna ilość pośrednich porównań i -tego wzorca z wzorcem o wartości nominalnej x_0 wynosi k . Oznaczmy przez δ_{pi} dokładność porównania i -tego wzorca z wzorcem $i-1$. Wtedy dokładność porównania tego wzorca z wzorcem x_0 po k kolejnych porównaniach wyniesie

$$\sum_{i=1}^k \delta_{pi}$$

Natomiast dokładność wyznaczenia wzorca o wartości nominalnej x_i wyrazi się wzorem

$$\delta_{xi} = \sum_{j=1}^i \delta_{pj} + \delta_{x_0} \quad (k=i) \quad /1.1/$$

We wzorze tym założyliśmy, że pomiar dowolnej wartości x odbywa się przez porównanie z wzorcem o najbliższej /w sensie dokładności porównania/ wartości nominalnej. Załóżmy, że wartość najbliższego wzorca wynosi x_i i spełniony jest warunek

$$|x - x_i| \ll x$$

To znaczy, różnica między wielkością mierzoną a wzorcem jest mała w porównaniu z jego wartością. Najdokładniejszą metodą wyznaczenia x jest metoda podstawienia, którą sprowadza się w tym przypadku do pomiaru różnicy wartości mierzonej x i wzorca x_i , czyli $\Delta x = x - x_i$. Wartość x wyznaczamy ze wzoru

$$x = x_i + \Delta x$$

Stąd błąd wyznaczenia wartości x wynosi

$$\delta_x = \frac{x_i}{x} \delta_{xi} + \frac{\Delta x}{x} \delta_{\Delta x}$$

jeśli spełniony jest warunek $\delta_{\Delta x} > \delta_{xi}$, to po przekształceniach otrzymamy

$$\delta_x = \delta_{xi} + \frac{\Delta x}{x} (\delta_{\Delta x} - \delta_{xi}) \approx \delta_{xi} + \frac{\Delta x}{x} \delta_{\Delta x} \quad /1.2/$$

Ze wzoru tego wynika, że błąd jest funkcją liniową różnicy między wartością mierzoną a wartością wzorca. W praktyce jest to spełnione tylko w przybliżeniu. Po podstawieniu /1.1/ do /1.2/ otrzymujemy wzór określający dokładność pomiaru wielkości x

$$\delta_x = \delta_{x_0} + \sum_{j=1}^i \delta_{pj} + \frac{\Delta x}{x} \delta_{\Delta x} \quad /1.3/$$

D.2. Wyprowadzenie wzorów /5.2.4/ i /5.2.5/ na warunki równowagi mostka z rysunku 5.2.2

Wzory opisują warunki równowagi mostka z rysunku 5.2.2 bez uwzględnienia pojemności C' . Mostek ten jest typem mostka wieloramienneego z rysunku 5.1.5a, którego warunek równowagi przedstawia wzór /5.1.10/. Dla rozpatrywanego przypadku wzór ten przyjmie postać

$$\frac{m p}{Z_x} \text{sign}(m) \text{sign}(p) + \frac{n_o p_o}{Z_o} \text{sign}(n_o) \text{sign}(p_o) + \frac{n q}{Z} \text{sign}(n) \text{sign}(q) \quad /2.1/$$

gdzie

$$Z_x = R_x + j\omega L_x = \omega L_x \left(\frac{R_x}{\omega L_x} + j \right) = X_x (\text{tg} \delta_x + j)$$

$$\text{tg} \delta_x = \frac{1}{Q_x} = \frac{R_x}{\omega L_x}$$

$$Z_o = R_o - j \frac{1}{\omega C_o} = \frac{1}{\omega C_o} (\omega C_o R_o - j) = X_o (\text{tg} \delta_o - j) \quad /2.2/$$

$$\text{tg} \delta_o = \omega C_o R_o$$

$$Z = -j \frac{1}{\omega C} = -j X$$

Z rysunku 5.2.2 otrzymamy /patrz wzór /5.1.6//:

$$\begin{aligned} \text{sign}(m) = \text{sign}(p_o) = \text{sign}(p) = 1; \text{sign}(n_o) = \text{sign}(n) = \\ = \text{sign}(q) = -1 \end{aligned}$$

Po podstawieniu wzorów /2.2/ i /2.3/ do /2.1/ oraz uwzględnieniu oznaczeń z rysunku 5.2.2 otrzymamy

$$m p Y_x \frac{1}{\text{tg} \delta_x + j} - n_o p_o Y_o \frac{1}{\text{tg} \delta_o - j} + j n q Y = 0 \quad /2.4/$$

Po pomnożeniu obu stron równania przez $(\text{tg} \delta_x + j)(\text{tg} \delta_o - j)$ otrzymamy

$$\begin{aligned} & mp \operatorname{tg} \delta_o Y_x - j mp Y_x + nq Y \operatorname{tg} \delta_x - nq Y \operatorname{tg} \delta_o + j nq Y \operatorname{tg} \delta_o \operatorname{tg} \delta_x + j nq Y = \\ & = n_o p_o Y_o \operatorname{tg} \delta_x + j n_o p_o Y_o \end{aligned}$$

a po porównaniu części rzeczywistej i urojonej otrzymujemy układ równań liniowych względem Y_x , $\operatorname{tg} \delta_x$

$$\begin{cases} mp Y_x \operatorname{tg} \delta_o + (nq Y - n_o p_o Y_o) \operatorname{tg} \delta_x = nq Y \operatorname{tg} \delta_o \\ -mp Y_x + nq Y \operatorname{tg} \delta_o \operatorname{tg} \delta_x = nq Y - n_o p_o Y_o \end{cases}$$

z równań tych otrzymujemy

$$X_x = \frac{1}{Y_x} = mp \frac{nq Y \operatorname{tg}^2 \delta_o + (nq Y - n_o p_o Y_o)}{(nq Y \operatorname{tg} \delta_o)^2 + (nq Y - n_o p_o Y_o)^2} \quad /2.5/$$

$$Q_x = \frac{1}{\operatorname{tg} \delta_x} = \frac{nq Y \operatorname{tg}^2 \delta_o + (nq Y - n_o p_o Y_o)}{n_o p_o Y_o \operatorname{tg} \delta_o} \quad /2.6/$$

Jeżeli narzucimy dodatkowy warunek

$$nq Y - n_o p_o Y_o = 0 \quad \Leftrightarrow \quad nq C = n_o p_o C_o \quad /2.7/$$

to po uwzględnieniu go otrzymamy szukane wzory na warunek równowagi mostka

$$\omega L_x = X_x = \frac{mp}{nq} \quad \frac{1}{\omega C} \quad /2.8/$$

$$Q_x = \operatorname{tg} \delta_o = \omega C_o R_o \quad /2.9/$$

D.3. Wyprowadzenie wzorów /5.2.6/ i /5.2.7/

Wzory opisują warunki równowagi mostka z rysunku 5.2.2 z uwzględnieniem pojemności C' . W przypadku tym nie możemy bezpośrednio stosować wzoru /5.1.10/. Strumień magnetyczny wywołany prądem I płynącym przez uzwojenia p_0 /rys.5.2.2/ musimy obliczyć nieco inaczej. W tym celu rozważymy układ złożony z pojemności C_0 , C' i rezystancji R_0 . Napięcie na odczepie transformatora n_0 wyraża się wzorem /patrz 5.1.8/

$$E_{n_0} = E n_0 \text{ sign}(n_0)$$

Wtedy prąd I_{p_0} wynosi

$$I_{p_0} = E n_0 \text{ sign}(n_0) \frac{Y_0}{\text{tg} \delta_0 \left(1 + \frac{C'}{C_0}\right) - j}$$

gdzie

$$Y_0 = \omega C_0, \quad \text{tg} \delta_0 = \omega C_0 R_0$$

Strumień magnetyczny wywołany prądem I_{p_0} przyjmie postać /5.1.5/

$$\psi_0 = \alpha E n_0 \text{ sign}(n_0) \frac{Y_0}{\omega(C_0 + C')R_0 - j} p_0 \text{ sign}(p_0)$$

Pozostałe składowe strumienia magnetycznego w transformatorze prądowym wywołane prądami I_L , I_C mają taką samą postać jak we wzorze /2.1/. Po uwzględnieniu wzorów /2.2/ i /2.3/ otrzymujemy wzór na warunek równowagi mostka

$$m_p Y_x \frac{1}{\operatorname{tg} \delta_x + j} - n_o p_o Y_o \frac{1}{\omega(C_o + C') R_o - j} + j n_q Y = 0 \quad /3.1/$$

Wyjaśnienie oznaczeń - patrz D.2.

Wprowadzimy oznaczenie $\operatorname{tg} \delta_{o1} = \omega(C_o + C') R_o$, wtedy wzór /3.1/ sprowadza się do wzoru /2.4/, którego rozwiązaniem są równania /2.5/ i /2.6/, więc

$$X_x = \frac{1}{Y_x} = m_p \frac{n_q Y \operatorname{tg}^2 \delta_{o1} + (n_q Y - n_o p_o Y_o)}{(n_q Y \operatorname{tg} \delta_{o1})^2 + (n_q Y - n_o p_o Y_o)^2} \quad /3.2/$$

$$Q_x = \frac{1}{\operatorname{tg} \delta_x} = \frac{n_q Y \operatorname{tg}^2 \delta_{o1} + (n_q Y - n_o p_o Y_o)}{n_o p_o Y_o \operatorname{tg} \delta_o} \quad /3.3/$$

Jeżeli podobnie jak poprzednio narzucimy warunek

$$n_q Y - n_o p_o Y_o = 0 \quad \Leftrightarrow \quad n_q C = n_o p_o C_o \quad /3.4/$$

otrzymamy warunki równowagi mostka

$$\omega L_x = X_x = \frac{m_p}{n_q} \frac{1}{\omega C} \quad /3.5/$$

$$Q_x = \operatorname{tg} \delta_{o1} = \left(1 + \frac{C'}{C_o}\right) \omega C_o R_o \quad /3.5/$$

D.4. Wyprowadzenie warunków równowagi mostka z rys.5.3.1
/wzory /5.3.1/, /5.3.2//

Rozpatrywany mostek jest typem mostka wieloramiennego z rysunku 5.1.5a, którego ogólny warunek równowagi przedstawia wzór /5.1.10/. Dla rozpatrywanego przypadku wzór ten sprowadza się do postaci

$$m p \left(\frac{1}{j \omega L_p} - \frac{1}{R_p} \right) \text{sign}(m) \text{sign}(p) + \frac{n_o p_o}{R_o} \text{sign}(n_o) \text{sign}(p_o) + \quad /4.1/ \\ + n q j \omega C \text{sign}(n) \text{sign}(q) = 0$$

Na podstawie /5.1.6/ otrzymamy

$$\text{sign}(m) = \text{sign}(p_o) = \text{sign}(p) = 1 ; \text{sign}(n_o) = \text{sign}(n) = \\ = \text{sign}(q) = -1$$

więc wzór /4.1/ przyjmie postać

$$m p \left(-j \frac{1}{\omega L_p} + \frac{1}{R_p} \right) - \frac{n_o p_o}{R_o} + n q j \omega C = 0$$

Porównamy części rzeczywiste i urojone obu stron i po przekształceniu otrzymamy

$$\omega L_p = \frac{m p}{n q} \frac{1}{\omega C} \quad /4.2/$$

$$R_p = \frac{m p}{n_o p_o} R_o \quad /4.3/$$

a po przeliczeniu na szeregowy układ zastępczy

$$\omega L_s = \frac{m p}{n q} \frac{1}{\omega C} \frac{1}{1 + \frac{1}{Q^2}} \quad /4.4/$$

$$Q = \frac{n q}{n_o p_o} \omega C R_o \quad /4.5/$$

D.5. Wyprowadzenie wzorów /5.3.5/ i /5.3.6/ na równowagę mostka z rysunku 5.3.2

Mostek jest typowym układem mostka wieloramiennego.

Warunek równowagi /5.1.10/ przyjmie postać

$$\frac{m_p}{Z} \text{sign}(m) \text{sign}(p) + \frac{n_o p_o}{R_o} \text{sign}(n_o) \text{sign}(p_o) + n_1 p_1 j \omega C_o \text{sign}(n_1)$$

$$\text{sign}(p_1) + \frac{n_q}{Z_c} \text{sign}(n) \text{sign}(q) = 0 \quad /5.1/$$

Na podstawie /5.1.6/ otrzymamy

$$\begin{aligned} \text{sign}(m) = \text{sign}(p) = \text{sign}(p_o) = 1 ; \text{sign}(n_o) = \text{sign}(n_1) = \\ = \text{sign}(n) = \text{sign}(q) = -1 \end{aligned}$$

Natomiast wartość $\text{sign}(p_1)$ nie jest znana, gdyż punkt p_1 jest przełączany. Elementy L-C przedstawimy wstępnie w równoległym układzie zastępczym. Wtedy impedancje elementów L-C zapiszemy wzorami

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R_p} - j \frac{1}{\omega L_p}, \quad Z_c = \frac{1}{R_c} + j \omega C$$

Po podstawieniu tych wzorów do /5.1/ równanie to przyjmie postać

$$m_p \left(\frac{1}{R_p} - j \frac{1}{\omega L_p} - \frac{n_o p_o}{R_o} - n_1 p_1 j \omega C_o \text{sign}(p_1) + n_q \left(j \omega C + \frac{1}{R_c} \right) \right) = 0$$

Porównamy części rzeczywiste i urojone równania

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{m_p}{R_p} - \frac{n_o p_o}{R_o} + \frac{n_q}{R_c} = 0 \quad | : m_p \\ - \frac{m_p}{\omega L_p} - n_1 p_1 \omega C_o \text{sign}(p_1) + n_q \omega C = 0 \quad | : m_p \end{array} \right.$$

wprowadzimy pomocnicze oznaczenia

$$G_p = \frac{1}{R_p}, \quad G_o = \frac{1}{R_o}, \quad G_c = \frac{1}{R_c}, \quad k_o = \frac{n_o p_o}{m p}, \quad k_c = \frac{n_q}{m p},$$

$$k_1 = \frac{n_1 p_1}{m p} \operatorname{sign}(p_1), \quad Y = \omega C, \quad Y_{c_o} = \omega C_o, \quad Y_{L_p} = \frac{1}{\omega L_p}$$

wtedy otrzymamy następującą postać równań

$$G_p = k_o G_o - k_c G_c$$

$$Y_{L_p} = k_c Y - k_1 Y_{c_o}$$

/5.2/

stąd dobroć cewki

$$Q = \frac{Y_p}{G_p} = \frac{k_c Y - k_1 Y_{c_o}}{k_o G_o - k_c G_c}$$

/5.3/

Przeliczmy indukcyjność na szeregowy układ zastępczy

/5.2.2/

$$\omega L_s = \frac{1}{Y_{L_p}} \frac{Q^2}{1+Q^2}$$

a po przekształceniu

$$\omega L_s Y_{L_p} \left(1 + \frac{1}{Q^2}\right) = 1$$

Na podstawie /5.2/

$$Y_{L_p} = k_c Y \left(1 - \frac{k_1 Y_{c_o}}{k_c Y}\right) = k_c \omega C \left(1 - \frac{k_1 C_o}{k_c C}\right)$$

Stąd po uwzględnieniu wprowadzonych oznaczeń otrzymamy

$$\omega^2 L_s C \frac{n_q}{m p} \left(1 - \frac{n_1 p_1 C_o}{n_q C} \operatorname{sign}(p_1) \left(1 + \frac{1}{Q^2}\right)\right) = 1$$

gdzie dobroć cewki

$$Q = \frac{k_c \omega C - k_1 \omega C_o}{k_o / R_o - k_c \omega C \operatorname{tg} \delta} = \frac{1 - \frac{k_1 C_o}{k_c C}}{\frac{k_o}{k_c \omega C R_o} - \operatorname{tg} \delta}$$

$$\operatorname{tg} \delta_{R_0} = \frac{1}{\omega C R_0}$$

Wprowadzimy oznaczenia

$$\gamma' = \frac{k_1 C_0}{k_c C} = \frac{n_1 p_1 C_0}{n_q C} \operatorname{sign} (p_1) \quad /5.4/$$

oraz

$$\varphi = \frac{k_0}{k_c \omega C R_0} - \operatorname{tg} \delta = \frac{n_0 p_0}{n_q} \cdot \frac{1}{\omega C R_0} - \operatorname{tg} \delta \quad /5.5/$$

Warunki równowagi sprowadzimy do postaci

$$\omega^2 LC \frac{n_q}{m p} (1 - \gamma') \left(1 + \frac{1}{Q^2} \right) = 1 \quad /5.6/$$

$$Q = \frac{1 - \gamma'}{\varphi} \quad /5.7/$$

D.6. Tabele

Tabela 6.1. Parametry wzorców indukcyjności
firmy Sullivan

Wartość nominalna	Odstroje- nie od nominalnej wartości	Dokład- ność wzorco- wania	Współ- czynnik temper. zmian induk- cyjności	Pojem- ność własna cewki	Rezy- stan- cja przy prą- dzie stałym	Dopusz- czalny prąd przy zachowaniu klasy wzorców
[μH]			$\times 10^{-6} / \text{deg}$	[pF]	[Ω]	[A]
1	0,01 μH	0,005 μH	5	4	0,016	2,0
2	0,01 μH	0,005 μH	5	4	0,03	2,0
3	0,01 μH	0,005 μH	5	4	0,07	2,0
5	0,01 μH	0,005 μH	5	4	0,09	2,0
10	0,01 μH	0,005 μH	5	5	0,13	1,5
20	0,01 μH	0,01 μH	5	5	0,18	1,0
30	0,02 μH	0,01 μH	5	5	0,20	1,0
50	0,02 μH	0,02 μH	5	5,5	0,27	1,0
100	0,01 μH	0,01 μH	5	5,5	0,40	1,0
200	0,01 %	0,01 %	5	9	0,35	1,0
300	0,01 %	0,01 %	5	9	0,45	1,0
500	0,01 %	0,01 %	5	10	1,1	0,7
1000	0,01 %	0,01 %	5	10	1,4	0,5
2000	0,01 %	0,01 %	5	12	2,1	0,3
3000	0,01 %	0,01 %	5	13	2,7	0,3
5000	0,01 %	0,01 %	5	13	3,0	0,5
10000	0,01 %	0,01 %	5	13	4,5	0,4
20000	0,01 %	0,01 %	5	14	9,5	0,3
30000	0,01 %	0,01 %	5	15	12	0,2
50000	0,01 %	0,01 %	5	15	16	0,15
100000	0,01 %	0,01 %	5	15	47	0,1
200000	0,01 %	0,01 %	5	60	60	0,1
400000	0,01 %	0,01 %	5	90	90	0,1
1000000	0,01 %	0,01 %	5	150	150	0,1

Tabela 6.2. Parametry wzorców indukcyjności
firmy GENERAL RADIO

Wartość nominalna	Dokład- ność wzorco- wania [%]	Często- tliwość rezonan- sowa [kHz]	Rezy- stancja przy prądzie stałym [Ω]	Dobroć przy 100 Hz	Dopuszczalny prąd	
					200 mW [mA]	3 W [mA]
50 μH	±0,5	3100	0,039	0,81	2260	8770
100 μH	±0,25	2250	0,083	0,76	1550	6010
200 μH	±0,25	1400	0,15	0,84	1150	4470
500 μH	±0,1	960	0,384	0,83	725	2810
1 mH	±0,1	800	0,84	0,75	490	1890
2 mH	±0,1	580	1,52	0,83	360	1400
5 mH	±0,1	320	3,8	0,83	230	890
10 mH	±0,1	220	8,2	0,77	156	600
20 mH	±0,1	145	14,5	0,87	117	450
50 mH	±0,1	84	36,8	0,85	74	280
100 mH	±0,1	71	81	0,78	50	192
200 mH	±0,1	39,0	109	1,15	43	166
500 mH	±0,1	24,5	280	1,12	27	103
1 H	±0,1	14,6	616	1,02	18	70
2 H	±0,1	10,6	1125	1,12	13,3	52
5 H	±0,1	6,8	2920	1,08	8,3	32
10 H	±0,1	4,9	6400	0,98	5,6	22

Współczynnik temperaturowy $\alpha = 3 \cdot 10^{-5}$ /deg

Lista odbiorców:

1. Biblioteka Główna Politechniki Wrocławskiej	1 egz.
2. Biblioteka Instytutu Metrologii Elektrycznej	1 "
3. OINT IME	1 "
4. Promotor pracy	1 "
5. Recenzenci	2 "
6. Autor	1 "

Symbol UKD Słowny odpowiednik symbolu UKD:

621.317.089.68 Wzorce elektryczne
621.317.334.2. Pomiar indukcyjności

Dyscyplina naukowa: własnej

Symbol identyfikacji pracy:

75: Inst.Metrol.El.
PWr.
MNSzWiT

05	Elektrotechnika i Elektroenergetyka
----	--

Specjalność:

04	Miernictwo elektryczne	R	I-21
----	------------------------	---	------

Autor: Muciek Andrzej

T Tytuł pracy: Metoda wyznaczania wartości wzorców indukcyjności
własnej w odniesieniu do wzorców pojemności.

: ☐ ☐ ☐

ss. 154 rys. 37 tabl. 8 wykr. - poz. bibliogr. 53

(w przypadku pracy opublikowanej podać pełny opis bibliograficzny publikacji).

Data zgłoszenia pracy w Urzędzie Patentowym PRL:

Nr tematu	Nr zlecenia	Nr archiwum	APW	CINTE
:		I-21/K-141/75	nie	tak

Rodzaj pracy: doktorska, rozwojowa

Data rozpoczęcia pracy: 00.71

Data zakończenia pracy: 06.75

Promotor (tytuł, nazwisko, imię): Doc.dr inż.Andrzej Zborucki

Wyniki badań (zastosowane w praktyce - gdzie; przekazane do zastosowania -
komu; nadają się do przekazania - komu; stanowią podstawę do dalszych badań;
jeśli praca była zamówiona, podać przez kogo):

Stanowią podstawę do dalszych badań.

na odwrocie analiza (zachować układ pionowy)

Nazwa modelu (prototypu) urządzenia:

Główne parametry techniczne:

Praca obejmuje analizę prostych układów transformatorowych do porównań L-C. Przedstawiony został i zbadany układ pozwalający na poprawę dokładności pomiaru indukcyjności własnej wzorców L w dolnym paśmie częstotliwości akustycznych. Zaproponowano metodę analitycznego wyznaczenia charakterystyki częstotliwościowej wzorców L w oparciu o wyniki pomiaru indukcyjności w określonych punktach częstotliwości.

(miejsce na fotografię)

: słowa kluczowe: pomiary indukcyjności własnej,
wzorzec indukcyjności własnej,
mostki transformatorowe.

&&&&

