

A 3435I

Dz.5

Prace Naukowe Instytutu Metrologii Elektrycznej
Politechniki Wrocławskiej

25

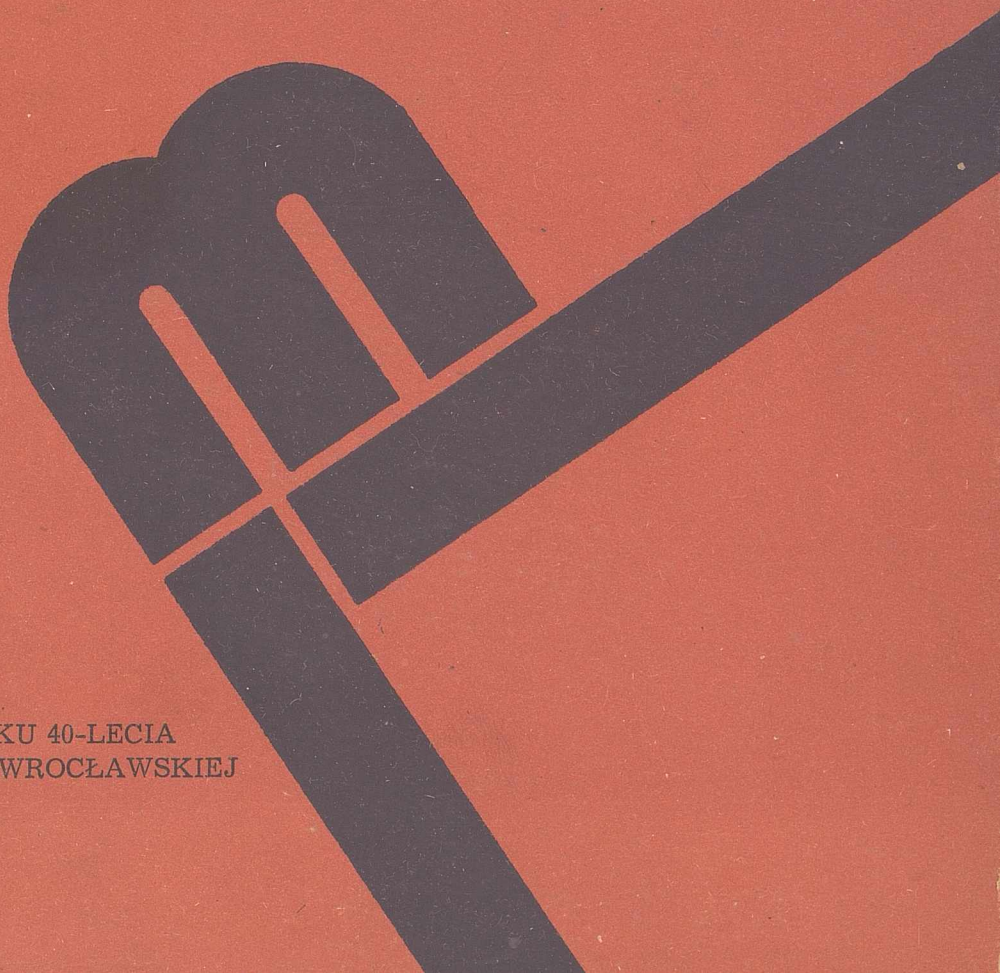
Seria: Monografie

6

Andrzej Muciek

**Precyzyjne pomiary indukcyjności własnej
w zakresie małej częstotliwości**

Wrocław 1985



WYDANO W ROKU 40-LECIA
POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ

Andrzej Muciek

**Precyzyjne pomiary indukcyjności własnej
w zakresie małej częstotliwości**



Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej · Wrocław 1985

PRACE NAUKOWE POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ

Scientific Papers of the Institute of Electrical Metrology

No 25 of the Technical University of Wrocław No 25

Monographs

No 6

1985

Andrzej MUCIEK

Accurate measurements of inductance at low-frequency range

Recenzenci

Jerzy DUDZIEWICZ

Jan EBERT

Andrzej JELLONEK

Redaktor naczelny Prac Naukowych

Jerzy CIEKOT

Redaktor naukowy

Danuta KOCZELA

Opracowanie redakcyjne i korekta

Maria KOPEĆ

© Copyright by Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1985

WYDAWNICTWO POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ

Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław

ISSN 0324 – 9549

Nakład 160 + 75 egz. Ark. wyd. 8,5. Ark. druk. 7 1/8. Papier offset. kl. III, 70 g, B1.

Oddano do druku w kwietniu 1985 r. Druk ukończono w maju 1985 r.

Zakład Graficzny Politechniki Wrocławskiej. Zam. nr 596/85 – Z-7 – Cena zł 95,-

*Indukcyjność własna,
mała częstotliwość,
pomiar*

Andrzej MUCIEK*)

Precyzyjne pomiary indukcyjności własnej w zakresie małej częstotliwości

Przedstawiono problemy i tendencje rozwojowe precyzyjnych pomiarów indukcyjności w zakresie małych częstotliwości. Podano definicję indukcyjności opartą na teorii pola i przedyskutowano jej związki z impedancją cewki. Omówiono rodzaje i własności produkowanych seryjnie wzorców indukcyjności i podano zasady obliczeń konstrukcji absolutnych (liczalnych) wzorców indukcyjności. Przedstawiono rodzaje i własności najczęściej stosowanych schematów zastępczych cewek indukcyjnych. Przeanalizowano układy służące do precyzyjnych pomiarów indukcyjności: mostki Wheatstone'a, transformatorowe i podwójnie równoważone. Przedyskutowano sposoby pomiarów elementów schematów zastępczych zarówno klasyczne, oparte na metodzie Rietza, jak i nowe propozycje oparte na metodach statystycznych. Podano sposób obliczeń i zestawienia grupowego wzorca indukcyjności własnej, składającego się z elementów o różnych wartościach nominalnych. Zaproponowano system odtwarzania i realizacji jednostki indukcyjności.

WYKAZ WAŻNIEJSZYCH SKRÓTÓW I OZNACZEŃ

- BIPM - Bureau International des Poids et Mesures (Sevres, Francja)
- ETL - Electrotechnical Laboratory (Japonia)
- NBS - National Bureau of Standards (USA)
- NML - National Measurement Laboratory (Australia. dawniej NSL)
- NPL - National Physical Laboratory (Wielka Brytania)

*) Instytut Metrologii Elektrycznej Politechniki Wrocławskiej, Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław.

- NRC - National Research Council (Kanada)
 PKNMiJ - Państwowy Komitet Normalizacji Miar i Jakości
 PTB - Physikalisch - Technische Bundesanstalt (RFN)
 WNIIMM - Vsesojuznyj Naučno-Issledovatel'skij Institut Metrologii im. Mendelejewa (ZSRR)
 IME - Instytut Metrologii Elektrycznej, Politechnika Wrocławska
 GR - General Radio
 IDN - indukcyjny dzielnik napięcia
- B - wektor indukcji magnetycznej
 B - susceptancja
 c - prędkość światła
 C - pojemność elektryczna
 COV- kowariancja
 D - współczynnik strat cewki kondensatora, średnica
 f - częstotliwość
 G - konduktancja
 i, I - prąd elektryczny
 k - współczynnik sprzężenia
 l, L - indukcyjność własna
 M - indukcyjność wzajemna
 P - moc
 ppm - części na milion (parts per million)
 Q - dobroć cewki
 r, R - rezystancja
 S - powierzchnia, przekładnia IDN
 s^2 - estymator wariancji
 t - czas
 t_n - zmienna losowa o rozkładzie studenta (n - liczba stopni swobody)
 T - stała czasowa rezystora
 U, u - napięcie elektryczne
 V[x] - wariancja zmiennej losowej x
 X - reaktancja
 $\hat{x}$ - estymator x otrzymany metodą najmniejszych kwadratów
 Y - admitancja
 Z - impedancja
 α - składowa rzeczywista błędu podziału napięcia IDN
 β - składowa urojona błędu podziału napięcia IDN
 γ - przewodność właściwa (elektryczna)
 δ - błąd względny pomiaru
 Δ - błąd bezwzględny pomiaru
 μ - przenikalność magnetyczna

- μ_0 - przenikalność magnetyczna próżni
- σ - odchylenie standardowe
- τ - stała czasowa cewki
- Φ - strumień wektora indukcji
- ω - prędkość kątowna (pulsacja).

WPROWADZENIE

Precyzyjne pomiary indukcyjności własnej są elementem szerszego systemu pomiarów impedancji i są ściśle związane z pomiarami pojemności i rezystancji. Problem pomiarów indukcyjności w zakresie małych częstotliwości pojawił się wraz z rozwojem elektrotechniki. Opracowane wtedy układy, np. mostek Maxwella, są stosowane do tej pory. Badania, które później rozwinęto, koncentrowały się głównie na konstrukcji wzorców indukcyjności i na różnych rozwiązaniach mostków Wheatstone'a (cztero- i wieloramiennych). Układy te zaspokajały w zasadzie potrzeby aż do lat sześćdziesiątych, kiedy to opracowanie absolutnego wzorca pojemności, oparcie na nim pomiarów impedancji i szybki rozwój układów transformatorowych radykalnie zmienił wymagania dotyczące pomiarów impedancji, w tym także indukcyjności. Hillhouse i Kline z National Bureau of Standards (NBS) opracowali bardzo dokładny transformatorowy układ do wzajemnych porównań indukcyjności. Znacznie trudniejsze okazało się odpowiednio dokładne określenie wartości indukcyjności w odniesieniu do absolutnego wzorca pojemności. Opracowano wiele układów transformatorowych, ale żaden z nich nie uzyskał szerszego zastosowania. Większość laboratoriów stosuje w dalszym ciągu rozwiązania własne.

Wzrost dokładności pomiarów spowodował pojawienie się nowych problemów, a przede wszystkim wskazał na potrzebę stosowania bardziej złożonych schematów zastępczych cewek indukcyjnych i metod wyznaczania ich elementów. Istotnym czynnikiem ograniczającym dokładność pomiaru jest obecnie długoterminowa niestabilność wzorców indukcyjności, która dla najlepszych produkowanych obecnie wzorców wynosi 0,01%/rok. Większe dokładności pomiarów otrzymuje się dzięki zastosowaniu grupowych wzorców indukcyjności.

Całość pracy podzielono na pięć części. W pierwszej (rozdz. 1,2,3 i 4) omówiono zagadnienia związane z definicją indukcyjności i jej związku z impedancją. Szczególną uwagę poświęcono schematom zastępczym ze względu na ich coraz większą rolę. Omówiono również absolutne wzorce indukcyjności własnej, zajmujące wciąż ważne miejsce w systemie pomiarów impedancji. Część druga (rozdz. 5, 6 i 7) poświęcona jest układom do precyzyjnych pomiarów indukcyjności. Omówiono w niej mostki Wheatstone'a, transformatorowe i podwójnie równoważone. Część trzecia (rozdz. 8,9,10 i

11) zawiera metody wyznaczania schematów zastępczych cewek. Wydaje się, że tkwią tu duże możliwości poprawy dokładności tym bardziej cenne, bo nie wymagające kosztownej aparatury pomiarowej. W części czwartej omówiono metodę analizy danych grupowego wzorca indukcyjności oraz podano przykład rozwiązania tego problemu. Na zakończenie przedstawiono propozycję organizacji systemu odtworzenia i przekazania jednostki indukcyjności.

Zasadnicze elementy opracowań własnych powstały w Instytucie Metrologii Elektrycznej (IME) Politechniki Wrocławskiej przy współpracy z Polskim Komitetem Normalizacji Miar i Jakości w Warszawie (PKNMiJ).

W całym okresie moich prac korzystałem z cennych rad prof. Andrzeja Jellonka, któremu chciałbym serdecznie podziękować. Chciałbym również podziękować mgrowi Mirosławowi Piaseckiemu z PKNMiJ w Warszawie za udostępnienie danych grupowego wzorca indukcyjności.

CEWKI INDUKCYJNE

Cewki indukcyjne, nazywane krótko cewkami lub induktorami, są jednym z trzech elementów biernych obwodów elektrycznych. Podstawowym parametrem cewki jest indukcyjność własna. Pojęcie indukcyjności własnej cewki indukcyjnej pojawia się przy omawianiu różnych zjawisk fizycznych, np. określaniu strumienia pola magnetycznego skojarzonego z obwodem cewki, określaniu energii magazynowanej w polu magnetycznym, czy też określaniu impedancji cewki. Wymienione pojęcia indukcyjności dotyczą jedynie cewki idealnej. Pojęcia dotyczące rzeczywistych cewek różnią się nieraz znacznie, co ma istotne znaczenie, zwłaszcza w pomiarach precyzyjnych. W rozważaniach teoretycznych stosuje się najczęściej definicję indukcyjności opartą na strumieniu magnetycznym lub zależnościach energetycznych, natomiast w pomiarach precyzyjnych wykorzystuje się impedancję cewki. Zależności między różnymi pojęciami indukcyjności można określić na podstawie schematów zastępczych (modeli) cewki indukcyjnej, opartych na elementach RLC.

W pomiarach precyzyjnych podstawową rolę odgrywają wzorce indukcyjności - cewki indukcyjne, których zadaniem jest przechowywanie i odtwarzanie określonej wartości indukcyjności. Stosowane są zazwyczaj wzorce wtórne, których wartości są określane eksperymentalnie przez porównanie z wartościami innych wzorców (zarówno indukcyjności, jak i rezystancji i pojemności), lub wzorce absolutne, których wartość jest określana obliczeniowo-eksperymentalnie (są mierzone ich wymiary geometryczne i na tej podstawie jest obliczana indukcyjność).

W dalszych punktach tego rozdziału zostaną omówione podstawowe pojęcia i problemy związane z definicją indukcyjności i cewkami indukcyjnymi.

1. Indukcyjność własna

Indukcyjność własna jest podstawowym parametrem cewek indukcyjnych. Jest ona bezpośrednio związana z pojęciem strumienia magnetycznego sprzężonego z obwodem elektrycznym. Wartość indukcyjności własnej L definiuje się jako stosunek strumienia samoindukcji Ψ obwodu do prądu i , płynącego w tym obwodzie

$$L = \Psi / i. \quad (1.1)$$

Jeśli przenikalność magnetyczna ośrodka, w którym zamykają się linie pola magnetycznego samoindukcji, nie zależy od natężenia pola magnetycznego (a takie założenie przyjęto w pracy), to indukcyjność L nie zależy od wartości prądu płynącego w obwodzie. Gdy prąd jest stały, wartość L określona jest kształtem i wymiarami geometrycznymi obwodu (cewki) oraz wartością współczynnika przenikalności magnetycznej ośrodka. Gdy prąd jest zmienny, wartość indukcyjności zależy ponadto od rozkładu gęstości prądu w przekroju poprzecznym przewodnika. Gdy prąd ma kształt nie-sinusoidalny, problem zdefiniowania indukcyjności staje się szczególnie złożony. Rozważania w dalszej części ograniczone zostaną do przebiegów sinusoidalnych. Gdy prąd jest zmienny, wartość prądu zmienia się (zależnie od własności otoczenia cewki) wzdłuż przewodnika. Sposób rozwiązania tego problemu, stosowany w precyzyjnych pomiarach indukcyjności, zostanie podany w dalszej części pracy.

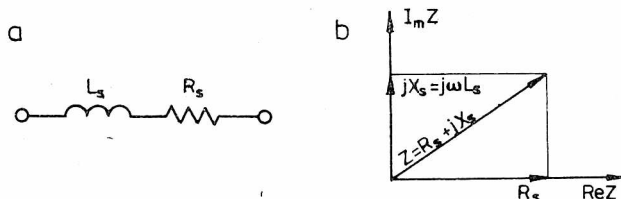
Wartość indukcyjności obwodów (cewek) może być wyznaczona bezpośrednio z definicji (wzór (1.1)) na podstawie znajomości, kształtu i wymiarów geometrycznych lub pośrednio przez pomiar wielkości fizycznych, związanych z indukcyjnością pewnym prawem fizycznym. Pierwszy sposób prowadzi do obliczania całek krzywoliniowych po konturze i przekroju poprzecznym [26,66] i jest zagadnieniem bardzo złożonym. W praktyce obliczenia takie wykonuje się jedynie dla obwodów o prostych kształtach geometrycznych z wykorzystaniem gotowych wzorów podanych w literaturze (por. [43,66]).

W większości przypadków indukcyjność L wyznaczana jest w sposób pośredni przez wykorzystanie zależności między prądem i a napięciem u , która dla idealnej cewki (tj. abstrakcyjnego elementu obwodu elektrycznego, który gromadzi energię w polu magnetycznym bez strat i bez gromadzenia energii w polu elektrycznym) ma postać

$$u = L \frac{di}{dt}. \quad (1.2)$$

Wynika stąd, że impedancja Z przy pulsacji ω wynosi

$$Z = jX = j\omega L. \quad (1.3)$$



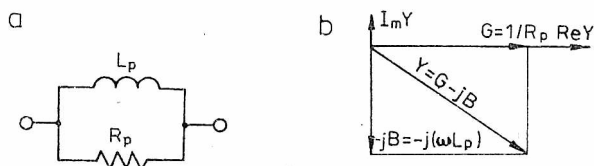
Rys.1.1. Szeregowy schemat zastępczy cewki - (a) i wykres
wskazowy - (b)
Fig.1.1. Series equivalent circuit of the inductor - (a), and
vector diagram - (b)

Indukcyjność L może być więc wyznaczona przez pomiar reaktancji X i pulsacji ω lub przez porównanie impedancji cewki mierzonej z impedancją cewki wzorcowej przy określonej pulsacji ω .

W rzeczywistej cewce indukcyjnej oprócz pola magnetycznego pojawia się nieuniknione pole elektryczne oraz występują straty energii. Mogą to być straty omowe w przewodniku, straty dielektryczne, straty spowodowane indukowaniem się prądów wirowych, promieniowaniem energii itp. Występowanie tych zjawisk powoduje, że rzeczywista cewka spełnia wzory (1.2) i (1.3) jedynie w przybliżeniu. Szczególnie impedancja zespolona rzeczywistej cewki indukcyjnej przy wymuszeniu sinusoidalnym $i = I_m \sin(\omega t + \varphi)$ jest liczbą zespoloną zawierającą oprócz części urojonej X_s reaktancji, część rzeczywistą R_s : $Z = R_s + jX_s$. Impedancji Z odpowiada szeregowy schemat zastępczy cewki (rys.1.1), w którym indukcyjność L_s jest określana wzorem

$$L_s = X_s / \omega . \quad (1.4)$$

Rezystancja R_s charakteryzuje całkowite straty energii w cewce.



Rys.1.2. Równoległy schemat zastępczy cewki indukcyjnej - (a)
i wykres wskazowy - (b)
Fig.1.2. Parallel equivalent circuit of the inductor - (a)
and vector diagram - (b)

Określając admitancję $Y = 1/Z = G_p + jB$ otrzymujemy równoległy schemat zastępczy cewki indukcyjnej (rys.1.2). Indukcyjność L_p w równoległym układzie zastępczym jest określona wzorem:

$$L_p = 1/(\omega B) . \quad (1.5)$$

T a b e l a 1.1

Wzory do przekształcenia układu szeregowego na równoległy

$L_s = \frac{Q^2}{1+Q^2} L_p = \frac{1}{1+D^2} L_p$	$L_p = \frac{1+Q^2}{Q^2} L_s = (1 + D^2)L_s$
$R_s = \frac{1}{1+Q^2} R_p$	$R_p = (1 + Q^2) R_s$
$Q = \frac{1}{D} = \frac{\omega L_s}{R_s} = \frac{R_p}{\omega L_p}$	

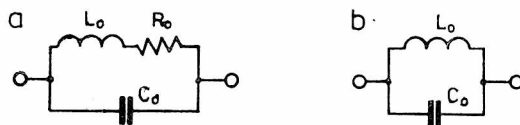
Związki między parametrami cewki, w szeregowym i równoległym układzie zastępczym, przedstawiono w tabeli 1.1, w której parametr $Q = X_s/R_s = B/G$ jest nazywany dobrocią, natomiast $D = 1/Q$ współczynnikiem strat cewki. Stosunek rezystancji R_s do indukcyjności L_s nazywany jest stałą czasową cewki i oznaczony symbolem $\tau = R_s/L_s$. Wartości L_s i L_p pokrywają się z indukcyjnością L jedynie dla cewki idealnej. Dla cewki rzeczywistej spełniona jest nierówność $L_s < L_p$.

W analizie zagadnień związanych z polem magnetycznym przyjmuje się definicję indukcyjności własnej opartą na strumieniu magnetycznym (wzór (1.1)), natomiast podczas analizy obwodów elektrycznych indukcyjność określa się przez reaktancję (wzór (1.4)) lub susceptancję (wzór (1.5)). Częściej stosowany jest szeregowy schemat zastępczy, w którym indukcyjność L_s ma wartość bardziej zbliżoną do indukcyjności L (zdefiniowanej na podstawie strumienia magnetycznego) niż indukcyjność L_p . Wartości L_s i L_p są ściśle ustalone jedynie dla prądu sinusoidalnego określonej pulsacji ω .

2. Schematy zastępcze cewek indukcyjnych

Do opisu zachowania się cewek indukcyjnych szczególnie w szerszym pasmie częstotliwości niezbędne jest wprowadzenie modeli matematycznych, które sprowadzają się zazwyczaj do schematów zastępczych. Dwie najprostsze wersje schematów: szeregowy i równoległy podane w poprzednim punkcie podczas omawiania impedancji cewki nie wystarczają do wielu zastosowań. W zależności od przeznaczenia spotyka się wiele różnych schematów zastępczych i definicji ich parametrów. Do opisu zależności energetycznych cewki Ebert [32] zaproponował dwójnik złożony z równolegle połączonych elementów RLC. Wartości elementów L i C można wyznaczyć na podstawie

zmian susceptancji dwójnika w funkcji częstotliwości. Schemat ten pozwala na dobre odwzorowanie zjawisk fizycznych w cewce z zachowaniem dużej prostoty. Nie jest on jednak odpowiedni do aproksymacji zmian impedancji cewki w funkcji częstotliwości.



Rys.2.1. Schematy zastępcze cewki dla małych częstotliwości:
a - aproksymujące impedancję, b - aproksymujące indukcyjność
Fig.2.1. Equivalent circuits of the inductor at low frequencies: a) for impedance approximation, b) for inductance approximation

W zastosowaniach wymaga się zazwyczaj, aby schemat zastępczy przybliżał możliwie najdokładniej impedancję cewki lub tylko jej indukcyjność w pewnym pasmie częstotliwości. Najczęściej stosowany jest schemat z rys. 2.1a i jego uproszczona wersja (rys.2.1b), służąca do aproksymacji indukcyjności. L_0 jest indukcyjnością, a R_0 rezystancją cewki przy prądzie stałym, natomiast C_0 jest pojemnością własną cewki. Stosowane są również pojęcia pulsacji ω_0 i częstotliwości f_0 rezonansu własnego cewki, zdefiniowanych wzorami $\omega_0^2 = 1/(L_0 C_0)$ i $\omega_0 = 2\pi f_0$.

Sposób połączenia elementów L_0 , C_0 i R_0 tłumaczony jest tym, że straty w cewkach bezrdzeniowych powstają głównie w przewodzie miedzianym, którym nawinięta jest cewka (straty w miedzi), natomiast pole elektryczne (reprezentowane przez pojemność C_0) występuje głównie między zwojami i zaciskami, a więc bocznikuje indukcyjność.

Impedancja dwójnika z rys.2.1a, przy pulsacji ω , określona jest wzorem:

$$Z = R_s = j\omega L_s = \frac{R_0 + j\omega [L_0(1 - \omega^2 L_0 C_0) - R_0^2 C_0]}{(1 - \omega^2 L_0 C_0)^2 + (\omega R_0 C_0)^2}.$$

Człon $R_0^2 C_0$ oraz w zakresie małych częstotliwości ($\omega \ll \omega_0$) człon $(\omega R_0 C_0)^2$ można zaniedbać i wtedy indukcyjność "szeregowa" L_s wyraża się wzorem:

$$L_s \cong L_0 / (1 - \omega^2 / \omega_0^2), \quad (2.1)$$

natomiast rezystancja szeregową

$$R_s \cong R_0 / (1 - \omega^2 / \omega_0^2)^2. \quad (2.2)$$

Dobroć cewki

$$Q = \frac{\omega L_0}{R_0} (1 - \omega^2 / \omega_0^2). \quad (2.3)$$

Gdy pulsacja $\omega \ll \omega_0$, powyższe wyrażenia można uprościć do postaci

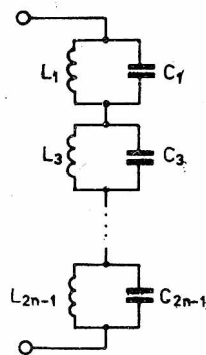
$$L_s \cong L_0 (1 + \omega^2/\omega_0^2), \quad R_s \cong R_0 (1 + 2\omega^2/\omega_0^2). \quad (2.4)$$

Wartości parametrów L_0 , R_0 i C_0 definiuje się na podstawie indukcyjności szeregowej L_s i rezystancji szeregowej R_s następująco:

$$L_0 = \lim_{\omega \rightarrow 0} L_s(\omega), \quad R_0 = \lim_{\omega \rightarrow 0} R_s(\omega).$$

Istnieje zasadniczy problem z definicją pojemności własnej C_0 . Najczęściej definiuje się C_0 na podstawie pulsacji ω_0 rezonansu własnego cewki [32,63], a więc ze wzoru $\omega_0^2 L_0 C_0 = 1$. Definicja ta nie zapewnia jednak optymalnej aproksymacji indukcyjności w funkcji częstotliwości. Lepsze wyniki pod tym względem uzyskujemy definiując pojemność własną ze wzoru $L_s = L_0 / (1 - \omega^2 L_0 C_0)$. Jednak ze względu na przybliżony charakter schematu zastępczego pojemność własna C_0 może być w ten sposób zdefiniowana jedynie przy określonej częstotliwości.

Przedstawiony na rys.2.1 prosty schemat zastępczy cewki indukcyjnej umożliwia dokładną aproksymację impedancji przy częstotliwościach znacznie mniejszych od częstotliwości rezonansu własnego cewek indukcyjnych. Dla wzorców indukcyjności przyjmuje się często zakres stosowności tego schematu od 0 do $0,1 f_0$ [85]. Jednak dla wzorców (cewek) o dużych wartościach nominalnych (np. 1 H) granica ta jest zbyt ostra i zachodzi konieczność dokonywania pomiarów przy częstotliwościach zbliżonych do rezonansu własnego cewki. Dla tego zakresu proponowany jest łańcuchowy schemat zastępczy [31,63] przedstawiony na rys.2.2, w którym uwzględnia się kolejne rezonanse wewnętrzne cewki indukcyjnej.

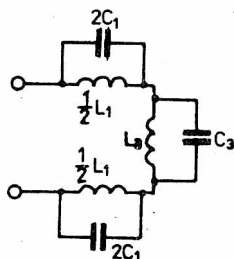


Rys.2.2. Łańcuchowy schemat zastępczy cewki indukcyjnej
Fig.2.2. Chain equivalent circuit of the inductor

Zależność indukcyjności szeregowej L_s od częstotliwości wyraża się wzorem [31]

$$L_s(\omega) = L_0 \frac{(1 - \omega^2/\omega_2^2)(1 - \omega^2/\omega_4^2) \dots (1 - \omega^2/\omega_{2n-2}^2)}{(1 - \omega^2/\omega_1^2)(1 - \omega^2/\omega_3^2) \dots (1 - \omega^2/\omega_{2n-1}^2)},$$

w którym $L_0 = \lim_{\omega \rightarrow 0} L_s(\omega)$. Pulsacje $\omega_1, \omega_3, \dots, \omega_{2n-1}$ stanowią częstotliwości rezonansów równoległych (bieguny impedancji cewki), natomiast pulsacje $\omega_2, \omega_4, \dots, \omega_{2n-2}$ stanowią częstotliwości rezonansów szeregowych (punkty zerowe).



Rys.2.3. Schemat zastępczy cewki dla częstotliwości zbliżonych do rezonansu własnego

Fig.2.3. Equivalent circuit of the inductor at the range of self-resonance frequency

W praktyce wystarczającą dokładność zapewnia uwzględnienie tylko kilku rezonansów własnych cewki. Dla wzorców indukcyjności firmy General Radio typu 1482 w zakresie częstotliwości zbliżonych do rezonansu własnego proponowany jest schemat zastępczy z rys.2.3.

Indukcyjność szeregową L_s dla tego schematu wyraża się wzorem

$$L_s = \frac{L_1 + L_3}{1 - \omega^2/\omega_1^2} \frac{1 - \omega^2/\omega_2^2}{1 - \omega^2/\omega_3^2},$$

gdzie ω_1 i ω_3 są biegunami, a ω_2 zerem impedancji cewki. Np. częstotliwości rezonansowe f_1 , f_2 i f_3 wzorca o wartości nominalnej 1 mH wynoszą odpowiednio 0,72; 1,08 i 1,12 MHz [85].

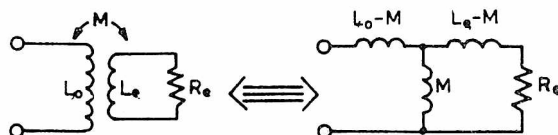
W przedstawionych schematach zastępczych indukcyjność L_s wzrasta monotonicznie w funkcji częstotliwości (dla zakresu częstotliwości od zera do f_0 lub f_1 w zależności od przyjętego schematu zastępczego cewki). Tymczasem wyniki pomiarów przeprowadzonych np. dla toroidalnych wzorców indukcyjności (por. rys.3.2) wykazują często niewielkie zmniejszenie, a następnie dopiero wzrost wartości indukcyjności. To niewielkie zmniejszenie indukcyjności tłumaczone jest [85,92] zazwyczaj prądami wirowymi indukującymi się w korpusie cewki, w przewodzie nawojowym i w innych przewodnikach znajdujących się w polu magnetycznym cewki. Wpływ prądów wirowych można opisać za pomocą schematu zastępczego o parametrach skupionych [56,92] jak na rys.2.4. Impedancja Z na zaciskach cewki określona jest wzorem

$$Z = \frac{\omega M^2}{R_e^2 + (\omega L_e)^2} R_e + j\omega \left[L_0 - \frac{(\omega M)^2}{R_e^2 + (\omega L_e)^2} L_e \right]. \quad (2.5)$$

Autor [92] zaproponował, aby wpływ prądów wirowych rozważyć łącznie z innymi parametrami pasożytniczymi. Po uwzględnieniu przede wszystkim wpływu pojemności pasożytniczych i pominięciu mniej istotnych członów, sumaryczną zależność indukcyjności od częstotliwości można opisać wzorem [92]:

$$L(\omega) = L_0 \left[1 - \frac{(\omega M)^2}{R_e^2 + (\omega L_e)^2} \frac{L_e}{L_0} \right] / (1 - \omega^2/\omega_0^2). \quad (2.6)$$

Dokładna analiza powyższego wzoru jest utrudniona, ponieważ nie jest możliwe bezpośrednie określenie wartości M , L_e i R_e . Przy bardzo



Rys.2.4. Schemat zastępczy cewki indukcyjnej służący do opisu wpływu prądów wirowych na wartość indukcyjności; L_0 - indukcyjność własna cewki, L_e - wypadkowa indukcyjność elementów, w których indukują się prądy wirowe, M - indukcyjność wzajemna, R_e - rezystancja zastępcza elementów, w których indukują się prądy wirowe

Fig.2.4. Equivalent circuit of the inductor, used for description of the influence of eddy currents on the inductor frequency characteristic; L_0 - self inductance of inductor, L_e - resultant inductance of elements in which eddy currents are induced, M - mutual inductance, R_e - equivalent resistance of elements in which eddy currents are induced

małych częstotliwościach zachodzi warunek: $R_e^2 \gg (\omega L_e)^2$, który pozwala na uproszczenie wzoru (2.6). Autor zaproponował metodę wyznaczania parametrów [92] wzoru (2.6), która zostanie opisana w rozdz. 10.

W typowej cewce indukcyjnej o wartości większej niż kilkadziesiąt μH , zmiany indukcyjności spowodowane prądami wirowymi nie przekraczają 0,1% [56,64].

W podsumowaniu można stwierdzić, że dla cewek nieekranowanych umieszczonych z dala od przewodników elektryczności, stosuje się: przy częstotliwościach $f < 0,1 f_0$, schematy zastępcze z rys.2.1, a przy $f > 0,1 f_0$ - schematy z rys.2.2 lub 2.3. Natomiast do cewek ekranowanych zaleca się stosować podane schematy z uwzględnieniem wpływu prądów wirowych (rys.2.4). Jeśli ograniczymy się do pasma częstotliwości $f < 0,1 f_0$, to zależność indukcyjności od częstotliwości można określić wzorem (2.6).

3. Wtórne wzorce indukcyjności własnej

Wzorce indukcyjności przeznaczone są do przechowywania i odtwarzania jednostki indukcyjności - henra. Ze względu na przeznaczenie można wzorce indukcyjności podzielić na dwie grupy: wzorce absolutne i wzorce wtórne. Wzorce absolutne są tak skonstruowane, że ich indukcyjność może być obliczona odpowiednio dokładnie z ich wymiarów geometrycznych. Z kolei wzorce wtórne są tak skonstruowane, aby mogły przechowywać możliwie najdokładniej w długim okresie, nadaną im w pomiarze wartość i umożliwić jej łatwe odtworzenie. W rozdziale tym zostaną omówione rodzaje i własności najczęściej spotykanych wtórnych wzorców indukcyjności własnej.

Wzorce wtórne produkowane są seryjnie przez wiele firm. Można je podzielić na wzorce z rdzeniem magnetycznym i wzorce z "rdzeniem po-

wietrznym", przy czym zarówno jedno, jak i drugie, są wykonywane jako wzorce stałe i regulowane.

Wzorce z rdzeniem magnetycznym mają dużą dobroć (200 i więcej) i małą wrażliwość na zewnętrzne, zakłócające pola magnetyczne. Jednak podstawowe ich wady takie, jak zależność indukcyjności od prądu płynącego przez cewkę, dochodząca do kilku dziesiętnych procenta oraz mała stałość powodują, że wzorce z rdzeniem magnetycznym są rzadko stosowane w pomiarach precyzyjnych małej częstotliwości.

Znacznie lepsze parametry mają wzorce z rdzeniem powietrznym, które odznaczają się bardzo dużą stałością indukcyjności w czasie i praktycznie niewrażliwością na wartość prądu (liniowością) - jeżeli nie występuje zauważalne grzanie się cewki. Wśród najdokładniejszych powietrznych wzorców są stosowane dwa typy: "wzorce z otwartym polem magnetycznym", nawinięte na karkasie o kształcie cylindrycznym lub zbliżonym do cylindrycznego i wzorce z "zamkniętym polem magnetycznym", nawinięte na karkasie o kształcie toroidalnym.

W grupie pierwszej najbardziej rozpowszechnione są wzorce firmy Sullivan. Parametry tych wzorców zamieszczono w tabeli 3.1. W grupie drugiej - wzorce firmy General Radio o parametrach podanych w tabeli 3.2. Wzorce z otwartym polem magnetycznym mają mniejsze pojemności własne i mniejszy wpływ prądów wirowych niż wzorce z zamkniętym polem magnetycznym. Są jednak bardziej kłopotliwe w pomiarach. Muszą być odsunięte na większą odległość od układu pomiarowego, co zwiększa błędy spowodowane połączeniami, i są wrażliwe na pojemności pasożytnicze elementów wzorca do masy.

Wzorce konstruuje się tak, aby mogły wykazywać możliwie małe zmiany indukcyjności w funkcji częstotliwości. O zmianach tych, podobnie jak w zwykłych cewkach, decydują dwa czynniki: pojemności międzyzwojowe i prądy wirowe, przy czym pierwszy z nich powoduje wzrost, a drugi zmniejszenie się indukcyjności. Na rysunku 3.1 w formie wykresu przedstawiono maksymalne częstotliwości, dla których zmiany indukcyjności poszczególnych wzorców firmy Sullivan, spowodowane pojemnościami międzyzwojowymi i prądami wirowymi, nie przekraczają 0,01%. Przykładowo wzorzec 1 mH wykazuje nie większy niż 0,01% przyrost indukcyjności spowodowany pojemnościami międzyzwojowymi w zakresie do około 10 kHz i nie większe niż 0,01% zmniejszenie się indukcyjności spowodowane prądami wirowymi w pasmie częstotliwości od zera do około 10 kHz.

Firma GR dla produkowanych przez siebie wzorców podaje całkowite zmiany indukcyjności w funkcji częstotliwości bez wyszczególnienia poszczególnych źródeł zmian. Typową charakterystykę częstotliwościową wzorców z zamkniętym polem magnetycznym przedstawiono na rys. 3.2. Obserwowane

T a b e l a 3.1

Parametry wzorców firmy Sullivan typu R 1900

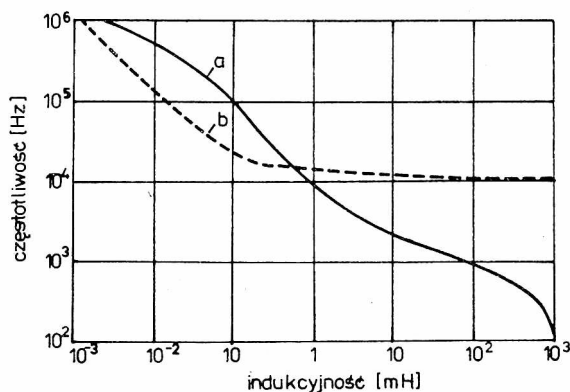
Wartość nominalna	Maksymalne odchylenie od wartości nominalnej	Dokładność wzorcowania	Pojemność własna cewki (pF)	Rezystancja przy prądzie stałym (Ω)	Dopuszczalny prąd z zachowaniem klasy wzorców A
1 μH	0,01 μH	0,005 μH	4	0,016	2,0
2 μH	0,01 μH	0,005 μH	4	0,03	2,0
3 μH	0,01 μH	0,005 μH	4	0,07	2,0
5 μH	0,01 μH	0,005 μH	4	0,09	2,0
10 μH	0,01 μH	0,005 μH	5	0,13	1,5
20 μH	0,01 μH	0,01 μH	5	0,18	1,0
30 μH	0,02 μH	0,01 μH	5	0,20	1,0
50 μH	0,02 μH	0,02 μH	5,5	0,27	1,0
100 μH	0,01 μH	0,01 μH	5,5	0,40	1,0
0,2 mH	0,01 %	0,01 %	9	0,35	1,0
0,9 mH	0,01 %	0,01 %	9	0,45	1,0
0,5 mH	0,01 %	0,01 %	10	1,1	0,7
1 mH	0,01 %	0,01 %	10	1,4	0,5
2 mH	0,01 %	0,01 %	12	2,1	0,3
3 mH	0,01 %	0,01 %	13	2,7	0,3
5 mH	0,01 %	0,01 %	13	3,0	0,5
10 mH	0,01 %	0,01 %	13	4,5	0,4
20 mH	0,01 %	0,01 %	14	9,5	0,3
30 mH	0,01 %	0,01 %	15	12	0,2
50 mH	0,01 %	0,01 %	15	16	0,15
100 mH	0,01 %	0,01 %	15	47	0,1
0,2 H	0,01 %	0,01 %	60	60	0,1
0,4 H	0,01 %	0,01 %	90	90	0,1
1 H	0,01 %	0,01 %	150	150	0,1

Współczynnik temperaturowy = $5 \times 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$ (skompensowany).

Parametry wzorców firmy General Radio typu 1482

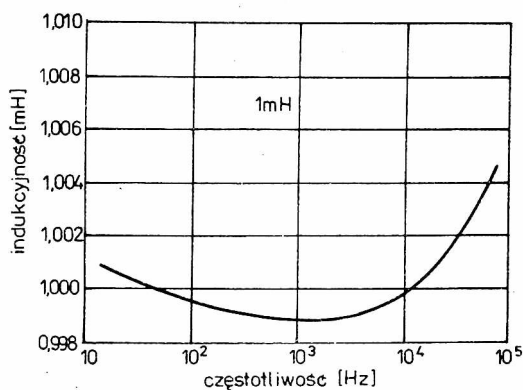
Wartość nominalna	Maksymalne odchylenie od wartości nominalnej (%)	Częstotliwość rezonansowa (kHz)	Rezystancja przy prądzie stałym (Ω)	Dobroć przy 100 Hz	Dopuszczalny prąd z zachowaniem klasy wzorca (mA)
50 μ H	0,5	3100	0,039	0,81	2260
100 μ H	0,25	2250	0,083	0,76	1550
200 μ H	0,25	1400	0,15	0,84	1150
500 μ H	0,1	960	0,384	0,83	725
1 mH	0,1	800	0,84	0,75	490
2 mH	0,1	580	1,52	0,83	360
5 mH	0,1	320	3,8	0,83	230
10 mH	0,1	270	8,2	0,77	156
20 mH	0,1	145	14,5	0,87	117
50 mH	0,1	84	36,8	0,85	74
100 mH	0,1	71	81	0,78	50
200 mH	0,1	390	109	1,15	43
500 mH	0,1	245	280	1,12	27
1 H	0,1	146	616	1,02	18
2 H	0,1	106	1125	1,12	13,3
5 H	0,1	68	2920	1,08	8,3
10 H	0,1	49	6400	0,98	5,6

Współczynnik temperaturowy = $3 \times 10^{-5}/^{\circ}\text{C}$.



Rys.3.1. Wykres maksymalnych częstotliwości, dla których poszczególne wzorce firmy sullivan typu R1900 wykazują nie większe niż 0,01% zmiany indukcyjności: spowodowane pojemnościami międzyzwojowymi (krzywa a) i prądami wirowymi (krzywa b)

Fig.3.1. Plot of the maximum frequencies at which the inductance changes of the separate inductor standards of the R 1900 type (Sullivan) are less than 0.01%: curve a - due to intercoil capacitances, curve b - due to eddy currents



Rys.3.2. Charakterystyka częstotliwościowa wzorca indukcyjności 1 mH typu 1482 E firmy GR

Fig.3.2. Frequency characteristic of 1 mH inductance standard, type 1482 E, GR

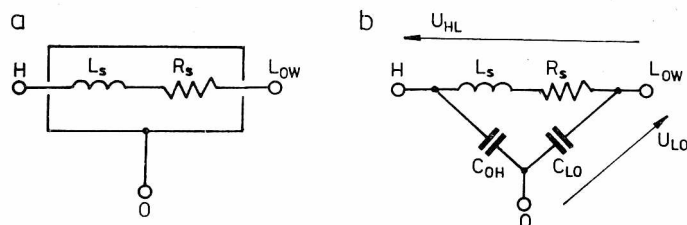
minimum tłumaczone jest przewagą wpływu prądów wirowych nad wpływem pojemności międzyzwojowych w pasmie małych częstotliwości.

Dla zmniejszenia wpływu prądów wirowych wzorce indukcyjności nawijane są zwykle "licą".

Ważnym parametrem jest stałość wzorców indukcyjności. Dla omawianych typów wzorców zmiany indukcyjności są mniejsze (według katalogów [71,72] niż 0,01% na rok. Aby dokładniej zilustrować ten problem, w ta-

Długookresowa niestabilność indukcyjności wzorców typu 1482 (GR)
(pomiaru wykonywane w NBS dla częstotliwości 100 Hz)

1 H (Nr fabr. 1415)			10 mH (Nr fabr. 1683)		
Data	Indukcyjność (H)	Dokładność pomiaru (%)	Data	Indukcyjność (mH)	Dokładność pomiaru (%)
I. 1960	1,00001	0,03	I. 1960	9,9980	0,03
X. 1963	1,00000	0,02	X. 1963	9,9970	0,02
X. 1960	1,00007	0,02	V. 1968	9,9973	0,02
VII. 1969	1,00003	0,02	XI. 1973	9,9968	0,02



Rys.3.3. Trzyzaciskowy wzorec indukcyjności: a - sposób ekranowania, b - schemat zastępczy; H, L_O, O - zaciski, C_{HO}, C_{LO} - pojemności ekranu

Fig.3.3. Three-terminal inductance standard; a) way of shielding, b) equivalent circuit; H, L_O and O - terminals; C_{HO}, C_{LO} - stray capacitances

beli 3.3 zamieszczono przykładowe wyniki badań stałości wzorców firmy General Radio typu 1482 [85], przeprowadzonych w NBS.

Ważną zaletą wzorców z zamkniętym polem magnetycznym jest możliwość stosowania ich w układach trzyzaciskowych, co umożliwia eliminację wpływu zewnętrznych pojemności pasożytniczych i w konsekwencji poprawę dokładności pomiarów dużych indukcyjności. Schemat trzyzaciskowego wzorca indukcyjności przedstawiono na rys. 3.3. Indukcyjność L_S wzorca trzyzaciskowego zdefiniowana jest za pomocą zależności prądowo-napięciowych wzorem:

$$\left. \frac{U_{HL}}{I_L} \right|_{U_{LO}=0} = R_S + j\omega L_S,$$

gdzie U_{HL} i I_L oznaczają odpowiednio napięcie i prąd zespolony o pulsacji ω.

Produkowane są również regulowane wzorce indukcyjności, przy czym regulacja odbywa się w sposób ciągły lub skokowy. Do regulacji ciągłej stosuje się zazwyczaj wariometry [72,73]. Wariometry są przyrządami mało dokładnymi, ponieważ ich parametry zmieniają się wraz ze zmianami położenia cewek, z których są wykonane.

W podsumowaniu należy stwierdzić, że parametry produkowanych seryjnie wzorców umożliwiają pomiary indukcyjności przy określonej częstotliwości z błędami znacznie mniejszymi niż 0,01%. Określenie własności cewki w szerszym pasmie częstotliwości wymaga stosowania schematów zastępczych. Najczęściej stosowane są schematy z rys.2.1, a do określenia zmian indukcyjności w funkcji częstotliwości wzór (2.1). Pozwala to na aproksymację zmian indukcyjności z dokładnością większą niż 0,1% w pasmie częstotliwości od zera do $0,1 f_0$. Większą dokładność aproksymacji można otrzymać przez stosowanie bardziej złożonych schematów zastępczych, a przede wszystkim uwzględnienie wpływu prądów wirowych. Stwarza to jednak znaczne trudności, gdyż nie jest możliwy bezpośredni pomiar elementów takiego schematu.

4. Absolutne wzorce indukcyjności własnej

Indukcyjność własną określić można albo metodą eksperymentalną albo eksperymentalno-obliczeniową. Metoda eksperymentalna polega na porównaniu reaktancji indukcyjnej z rezystancją lub reaktancją pojemnościową albo też iloczynem pewnej liczby rezystancji i reaktancji pojemnościowych. W tym przypadku niezbędne jest posiadanie wzorców rezystancji i pojemności o dużej dokładności. Druga z wymienionych metod eksperymentalno-obliczeniowa polega na skonstruowaniu cewki o prostych kształtach, której indukcyjność może być obliczana z wymiarów geometrycznych na podstawie definicji (1.1) z dużą dokładnością. Cewki takie nazywają się absolutnymi lub liczalnymi wzorcami indukcyjności. W rozdziale tym zostaną omówione zasady obliczeń i konstrukcji absolutnych wzorców indukcyjności własnej, proponowane przez Krotkova [78].

4.1. Problemy ogólne obliczania indukcyjności

Obliczanie indukcyjności cewek z dużą dokładnością stanowi bardzo złożony problem nawet dla prostych konturów. Dlatego też analizę przeprowadza się przy następujących założeniach upraszczających:

- geometryczne wymiary cewki są pomijalnie małe w porównaniu z długością fali elektromagnetycznej,
- zmiany prądu i ładunku zachodzą równomiernie w całym obwodzie.

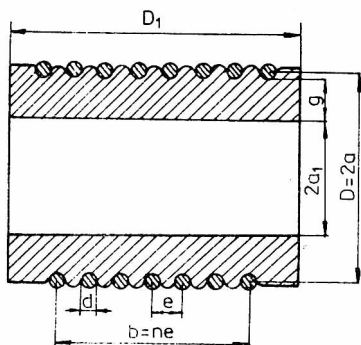
Nawet przy tych założeniach obliczanie indukcyjności pozostaje wciąż zadaniem złożonym. I jeśli uwzględni się dodatkowo fakt, że aby

zabezpieczyć dokładne pomiary, cewka powinna mieć indukcyjność co najmniej 10 mH, to najlepszym konturem jest jednowarstwowy solenoid. Indukcyjność solenoidu obliczana jest przy stacjonarnych warunkach pracy (L_0), a następnie przechodzi się do znacznie bardziej złożonego problemu określenia indukcyjności (L_ω) w quasi-stacjonarnych warunkach pracy (przy prądzie zmiennym o pulsacji ω). Opracowano wiele różnych wyrażeń umożliwiających określenie zarówno L_0 , jak i L_ω . Niezależnie jednak od tych pracowań, problem określenia dokładności otrzymanych wyników, a zwłaszcza dotyczących L_ω , nie został do tej pory zadowalająco rozwiązany.

Wartości indukcyjności L_0 i L_ω obliczane są na podstawie teorii pola (wzór (1.1)). Wykorzystanie cewki w obwodzie elektrycznym (np. pomiarowym) wymaga znajomości jej impedancji, co sprowadza się zwykle do określenia indukcyjności L_s i rezystancji R_s w szeregowym układzie zastępczym.

4.2. Obliczanie indukcyjności solenoidu w stacjonarnych warunkach pracy

Nad problemem obliczenia indukcyjności L_0 jednowarstwowego solenoidu w stacjonarnych warunkach pracowano przez wiele lat. Stosując różne metody obliczeń i założenia upraszczające otrzymano wiele wzorów przybliżonych [78]. Obecnie uważa się, że najdokładniejszy wzór otrzymał Snow [78,124,125,126]. Ze względu jednak na złożoność wzoru Snowa i związaną z tym możliwością popełnienia omyłek w obliczeniach, wskazane jest skontrolowanie otrzymanych wyników za pomocą mniej dokładnych, ale prostszych wzorców - np. z pracy [102].



Rys.4.1. Przekrój jednowarstwowego solenoidu
Fig.4.1. Cross-section of a single-layer solenoid

Przekrój jednowarstwowego solenoidu z zaznaczeniem podstawowych wymiarów przedstawiono na rys.4.1.

Gdy założymy równomierny rozkład prądu w przekroju poprzecznym okrągłego przewodu nawojowego o średnicy $d \ll D = 2a$ (rys.4.1), wówczas wzór Snowa przyjmuje następującą postać:

$$L_0 = L_g + \Delta L = L_g + \sum_{i=1}^5 \Delta L_i,$$

gdzie L_g jest członem głównym, natomiast $\Delta L_1, \dots, \Delta L_5$ są członami poprawkowymi, uwzględniającymi odstępstwa od wyidealizowanego kształtu. Wyrażenia określające poszczególne elementy wzoru Snowa zamiesz-

T a b e l a 4.1

Wyrażenia określające poszczególne elementy wzoru Snowa

Oznaczenie	Poszczególne wyrażenia wzoru Snowa	Liczba cyfr niezbędnych do określenia indukcji z dokładnością 1×10^{-7}
L_g	$\frac{\mu_o n^2 D}{3} \left[\frac{F-E}{k} + \left(\frac{D}{b} \right)^2 \left(\frac{F}{k} - 1 \right) \right]$	7
ΔL_1	$-\frac{\mu_o D}{4} \left[2n \left(\ln \frac{n \pi d}{b} - \frac{1}{4} \right) - \frac{1}{3} \ln \left(\frac{n \pi D}{b} \right) \right]$	4
ΔL_2	$\frac{\mu_o b}{4} \left[\ln \left(\frac{1+k'}{1-k'} \right) + k' \ln 4 \right]$	3
ΔL_3	$-\frac{\mu_o D}{\pi} \left(\frac{E}{k} - 1 \right) + \frac{\mu_o a}{2} \left(\frac{E}{k} - 1 \right) \left(\frac{n \pi d}{2b} \right)^2$	3
ΔL_4	$\frac{\mu_o D}{6} \left(\frac{F-E}{k} - \frac{kF}{2} \right)$	1
ΔL_5	$-\frac{\mu_o D}{6} \left(1 - \frac{k'}{k} \arcsin k \right) \frac{k'}{k}$	1

czono w tabeli 4.1. W tabeli F i E oznaczają pełne całki eliptyczne modułu $k = 2a/\sqrt{b^2 + D^2}$ odpowiednio

$$F = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \quad \text{pierwszego rodzaju i}$$

$$E = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \quad \text{drugiego rodzaju, gdzie } k' = \sqrt{1 - k^2}, n -$$

liczba zwojów solenoidu.

W ostatniej kolumnie tabeli podano liczbę cyfr niezbędną do określenia indukcyjności z dokładnością większą niż 1×10^{-7} (pod warunkiem, że wymiary solenoidu określone są bez błędu). Podany wzór nie uwzględnia członów wpływających w mniejszym stopniu niż 1×10^{-8} .

4.3. Obliczanie poprawki do wzoru Snowa związanej z pozostałościami magnetycznymi w karkasie

Wzór Snowa został wyprowadzony także przy założeniu, że przenikalność magnetyczna przestrzeni równa jest μ_0 . W rzeczywistości przenikalności magnetyczne miedzi, z której wykonany jest drut nawojowy, oraz materiału, z którego wykonany jest kartas, są nieco większe niż μ_0 . Ma to wpływ na wartość indukcyjności. Zagadnieniem tym zajmowali się Curis, Moon i Sparks [17]. Badania ich wykazały, że decydujący wpływ ma materiał karkasu, natomiast wpływ przewodu nawojowego jest pomijalnie mały. Znalezienie ogólnego wyrażenia określającego zmianę indukcyjności prowadzi do bardzo złożonych i niepraktycznych wyników. Dlatego w praktyce przyjmuje się uproszczony wzór

$$L = \mu S n^2 / b$$

określający indukcyjność cewki i bada się zmiany indukcyjności w zależności od μ , gdzie $S = \pi D^2 / 4$. Po prostych przekształceniach powyższego wzoru można oszacować względny przyrost indukcyjności δL , spowodowany przenikalnością magnetyczną μ karkasu:

$$\delta L = k_m [1 - (a_1/a)^2],$$

gdzie $k_m = \mu/\mu_0 - 1$, a_1 oznacza wewnętrzny promień karkasu (rys.4.1).

Przy zastosowaniu odpowiednich materiałów oraz sposobu obróbki mechanicznej karkasu wartość k_m może być utrzymana na poziomie nie większym niż 1×10^{-5} . Stąd względna zmiana indukcyjności spowodowana materiałem karkasu nie przekracza 1×10^{-6} (jeżeli spełniony jest warunek $a_1 > 0,3a$).

4.4. Obliczanie indukcyjności L_0 solenoidu przy prądzie zmiennym

Jak już wcześniej wspomniano, obliczanie wartości indukcyjności przy prądzie stałym wymaga złożonej analizy. Opracowane metody umożliwiają określenie indukcyjności z wymaganą dokładnością (większą niż 1×10^{-7}).

Podczas obliczania indukcyjności dla prądu zmiennego dodatkowo należy uwzględnić:

- a) wpływ parametrów pasywnych (pola elektrycznego, strat energii, itd.),
- b) zjawisko naskórkowości,
- c) opóźnianie się potencjałów spowodowane skończoną prędkością przepływu energii wzdłuż obwodu solenoidu.

Efekty związane z wymienionymi zjawiskami zależą od pulsacji ω prądu wytwarzającego pole elektromagnetyczne, od wymiarów geometrycznych solenoidu i od charakterystycznych parametrów otoczenia μ i ϵ oraz od przewodności właściwej drutu nawojowego cewki γ . Należy więc obliczyć indukcyjność L_ω dla pulsacji ω , która różni się od indukcyjności L_0 .

Określanie wartości L_ω analizowano od dawna. Zajmował się nim między innymi Maxwell. Najbardziej znaczące wyniki otrzymali Hartshorn i Denton [52], Moullin [90] i Krotkow [78].

Hartshorn i Denton nie wyprowadzili określonych wzorów, ograniczając się do wyboru i analizy schematu zastępczego cewki. Moullin wyprowadził nowe wyrażenia wartości indukcyjności, które nie zostało jednak w pełni zaakceptowane. Krotkow zaproponował oszacowanie zmian wartości L_0 spowodowanych prądem zmiennym. Metodę Krotkova przedstawiono poniżej.

Wartość indukcyjności jest określona nie przez kształt i wymiary geometryczne obwodu (jak się zazwyczaj przyjmuje), ale przez kształt i wymiary geometryczne rurek prądu płynącego przez obwód. W warunkach stacjonarnych prąd w przekroju poprzecznym przewodnika rozłożony jest równomiernie; wymiary geometryczne (a , b , d) rurek prądu i obwodu (a_0 , b_0 , d_0) pokrywają się. Gdy prąd jest zmienny, wówczas różne zjawiska np. naskórkowości powodują, że wymiary geometryczne (a , b , d) rurek, zwane wymiarami efektywnymi solenoidu, różnią się od wymiarów geometrycznych (a_0 , b_0 , d_0) obwodu. Indukcyjność obwodu dla prądu sinusoidalnego można zapisać:

$$L_\omega = L(a, b, d).$$

Po rozłożeniu funkcji $L(a, b, d)$ w szereg Taylora i pozostawieniu tylko członów liniowych, otrzymuje się:

$$\begin{aligned} L_\omega &= L_0 \left[1 + \frac{\partial L_\omega}{\partial a} \frac{a_0}{L_0} \frac{\Delta a}{a_0} + \frac{\partial L_\omega}{\partial b} \frac{b_0}{L_0} \frac{\Delta b}{b_0} + \frac{\partial L_\omega}{\partial d} \frac{d_0}{L_0} \frac{\Delta d}{d_0} \right] = \\ &= L_0 \left[1 + F_1 \left(\frac{a}{b} \right) \frac{\Delta a}{a_0} + F_2 \left(\frac{a}{b} \right) \frac{\Delta b}{b_0} + F_3 \left(\frac{a}{b} \right) \frac{\Delta d}{d_0} \right], \end{aligned}$$

gdzie: $L_0 = L(a_0, b_0, d_0)$ jest indukcyjnością dla prądu stałego określoną zwykle ze wzoru Snowa, $\Delta a = a - a_0$, $\Delta b = b - b_0$, $\Delta d = d - d_0$.

Wyrażenie w nawiasie, dodawane do 1, nazywa się członem poprawkowym. Dla typowych wykonń solenoidów nie przekracza on wartości 10^{-4} ([78], s.169).

Człon poprawkowy oblicza się w dwóch krokach. Pierwszy polega na określeniu pochodnych L_ω względem każdego z geometrycznych wymiarów solenoidu (a, b, c). Do tego celu wystarczy uwzględnić najwyżej dwa pierwsze człony wzoru Snowa. Funkcje F_1 , F_2 , F_3 otrzymane w ten sposób przez Krotkova zestawiono w tabeli 4.2 ([78] s.169).

Uproszczone wyrażenia do obliczania członu poprawkowego
indukcyjności L_ω solenoidu

Definicja funkcji $F_1(\frac{a}{b})$	Postać funkcji	Średnia wartość funkcji $F_1(\frac{a}{b})$
$F_1(\frac{a}{b}) = \frac{\partial L_o}{\partial a} \frac{a_o}{L_o}$	$2 \frac{(\frac{D}{b})^2 (\frac{E}{k} - 1)}{(\frac{D}{b})^2 (\frac{E}{k} - 1) + \frac{F-E}{k}}$	+1,5
$F_2(\frac{a}{b}) = \frac{\partial L_o}{\partial d} \frac{d_o}{L_o}$	$-\frac{3}{16} \frac{(\frac{d}{a})^2}{\frac{E}{k} - 1} F_1(\frac{a}{b})$	$-6,5 \times 10^{-6}$
$F_3(\frac{a}{b}) = \frac{\partial L_o}{\partial b} \frac{b_o}{L_o}$	$-1 + \frac{1}{2} F_1(\frac{a}{b})$	-2,3

Drugi krok polega na określeniu efektywnych zmian Δa , Δb i Δd wymiarów solenoidu podczas przejścia od prądu stałego do zmiennego o pulsacji ω . Uwzględniając wpływ prądów wirowych Krotków otrzymał następujące oszacowane indukcyjności L_ω

$$L_\omega = L_o \left\{ 1 - \frac{(pd)^4}{5} \left[\frac{1}{9} \frac{d}{a} F_1\left(\frac{a}{b}\right) - \frac{1}{5} F_2\left(\frac{a}{b}\right) \right] \right\},$$

gdzie $p = (\omega \mu \gamma / 2)^{1,2}$, γ - przewodność elektryczna właściwa drutu nawojowego. Dla typowych absolutnych wzorców indukcyjności człon poprawkowy jest mniejszy niż 1×10^{-6} .

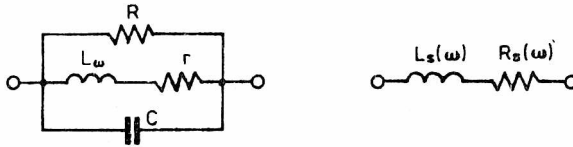
Krotkow badał również wpływ opóźniania się potencjału na wartość indukcyjności. Otrzymane wyrażenie przy pulsacji ω ([78], s. 178) ma postać:

$$L_\omega = L_o [1 - (\omega b/c)^2],$$

gdzie c jest prędkością rozchodzenia się fal elektromagnetycznych w wolnej przestrzeni. Dla częstotliwości akustycznych wpływ opóźniania się potencjału można zaniedbać.

4.5. Wyznaczenie indukcyjności L_s w szeregowym układzie zastępczym

Wskutek istnienia parametrów pasożytniczych indukcyjność L_ω różni się od indukcyjności L_s w szeregowym układzie zastępczym. Wśród parametrów pasożytniczych największy wpływ na wartość indukcyjności ma pole elektryczne między zwojami. Oszacowanie tego wpływu stanowi jeden z najważniejszych problemów w określaniu indukcyjności L_s . We wzorcach solenoidalnych, podobnie jak w zwykłych cewkach, zmianę indukcyjności w funkcji częstotliwości wyznacza się na podstawie schematów zastępczych.



Rys. 4.2. Schemat zastępczy jednowarstwowego solenoidu
Fig. 4.2. Equivalent circuit of a single-layer solenoid

Dla jednowarstwowego solenoidu najczęściej stosowany jest schemat zastępczy przedstawiony na rys. 4.2 [78], w którym oprócz indukcyjności L_ω i rezystancji r uzwojeń wprowadzono rezystancję R , charakteryzującą rezystancję powierzchniową karkasu, i pojemność C charakteryzującą głównie pole elektryczne między zwojami i między zaciskami cewki.

Pojemność C można obliczyć z warunków geometrycznych [63], ale dokładność takiego obliczenia nie jest wystarczająca. Lepsze wyniki otrzymuje się, gdy wyznacza się C metodą eksperymentalną. Sposoby pomiaru C będą omówione w rozdziałach 8 i 9.

Po przekształceniu wyrażenia określającego impedancję schematu zastępczego solenoidu i pominięciu nieistotnych członów otrzymuje się wzór [78]

$$L_s(\omega) = L_\omega(1 - 2r/R)(1 - Cr^2/L_\omega)/(1 - \omega^2 L_\omega C)$$

określający zależność indukcyjności L_s od częstotliwości.

Człony $2r/R$, $\omega^2 L_\omega C$, Cr^2/L_ω zazwyczaj są pomijalnie małe i wtedy zależność indukcyjności od częstotliwości można uprościć do postaci:

$$L_s(\omega) = L_\omega(1 + \omega^2 L_\omega C).$$

Indukcyjność L_s w szeregowym układzie zastępczym dla pulsacji ω oblicza się kolejnymi krokami. W pierwszym oblicza się indukcyjność L_0 w stacjonarnych warunkach pracy. Następnie indukcyjność L_ω przy pulsacji ω . W ostatnim kroku oblicza się indukcyjność L_s w szeregowym układzie zastępczym.

Dotychczas nie została wykonana analiza pozwalająca na pełną ocenę dokładności poszczególnych wzorców. Najczęściej przyjmuje się, że podane wzory pozwalają na określenie indukcyjności $L_s(\omega)$ solenoidalnych wzorców z dokładnością 1×10^{-5} w zakresie częstotliwości 0-1000 Hz [78].

4.6. Wykonania absolutnych wzorców indukcyjności własnej

Absolutne wzorce indukcyjności własnej były wykonywane niemal we wszystkich czołowych laboratoriach pomiarowych (NBS, WNIIMM, NRC itd.). Są to jednowarstwowe solenoidy nawinięte przewodem miedzianym o przekroju kołowym na karkas z marmuru, porcelany, szkła (pireks) lub szkła kwarcowego. Indukcyjność obliczana jest dla prądu stałego na ogół za pomocą wzoru Snowa. Następnie stosując poprawki określa się wartość indukcyjności w szeregowym układzie zastępczym dla prądu zmiennego. W typowych wykonaniach dokładność określenia L_0 szacowana jest od 5×10^{-6} [78] do 2×10^{-6} [81].

Karkas najpierw obrabia się zgodnie z założonymi wymiarami, a następnie nacina się linię śrubową. Cała obróbka mechaniczna musi być bardzo staranna. Stosowane są specjalne narzędzia, które nie wprowadzają wtrąceń ferromagnetycznych. Druć nawojowy wykonywany jest z wysokogatunkowej miedzi, a średnica jest kalibrowana z bardzo dużą dokładnością. Nanosi się go wstępnie na cylinder o mniejszej średnicy, a następnie pod stałym naprężeniem i w podwyższonej temperaturze - około 28°C - na karkas właściwy.

Przykładowe parametry absolutnych wzorców indukcyjności własnej zamieszczono w tabeli 4.3.

T a b e l a 4.3

Parametry wybranych wzorców absolutnych indukcyjności własnej

Labora- torium	Rok wy- konania	Materiał karkasu	D	b	c	d	g	Liczba zwojów
			(mm)					
NBS (USA)	1930	pireks	460	260	1	0,71	75	263
	1930	kwarc	280	1000	1	0,71	25	1000
	1936	pireks	340	1200	1	0,71	65	1000
WNIIMM (ZSRR)	1950	pireks	261	402	0,9	0,35	16	444
	1951	pireks	270	438	0,9	0,6	18	488
	1951	kwarc	233	370	1,1	0,6	23	330
ETL (Japonia)	1951	pireks	300	350	1	0,7	25	350
	1951	pireks	300	350	1	0,7	25	350
	1951	pireks	300	370	1	0,7	25	370

4.7. Pomiary wymiarów geometrycznych solenoidów

Bardzo ważną czynnością są pomiary wymiarów geometrycznych solenoidalnych absolutnych wzorców indukcyjności własnej. Mierzone są przede wszystkim: średnica drutu d , średnica D (przez pomiar średnicy $D_0 = D + d$) i długość b (przez pomiar sumaryczny długości $b + d$) solenoidu (rys.4.1). Pomiary te są wykonywane metodami optycznymi [24,78]. Każdy parametr mierzony jest wielokrotnie, np. średnica solenoidu mierzona jest 30-40 razy w różnych punktach. Niezbędną dokładność pomiaru poszczególnych wymiarów geometrycznych można oszacować na podstawie analizy dwu pierwszych składników wzoru Snowa:

$$L_0 = L_g + \Delta L_1 = \frac{\mu_0 D n^2}{3} \left[\frac{F-E}{k} + \frac{D}{b} \left(\frac{E}{k} - 1 \right) - \frac{\mu_0 D}{4} 2n \ln \left(\frac{n\pi d}{b} - \frac{1}{4} \right) - \frac{1}{3} \ln \frac{n\pi D}{b} \right].$$

Aby błąd ΔL_0 wyznaczenia indukcyjności L_0 nie przekraczał założonej wartości, błędy określenia wymiarów geometrycznych Δa , Δb , Δd powinny spełniać warunek:

$$\left(\frac{\Delta L_0}{L_0} \right)^2 \leq \left(\frac{\partial L_0}{\partial a} \frac{a}{L_0} \right)^2 \left(\frac{\Delta a}{a} \right)^2 + \left(\frac{\partial L_0}{\partial d} \frac{d}{L_0} \right)^2 \left(\frac{\Delta d}{d} \right)^2 + \left(\frac{\partial L_0}{\partial b} \frac{b}{L_0} \right)^2 \left(\frac{\Delta b}{b} \right)^2.$$

Po uwzględnieniu przeciętnych wartości pochodnych podanych w tabeli 4.2, otrzymuje się wzór

$$\left(\frac{\Delta L_0}{L_0} \right)^2 \leq 2,3 \left(\frac{\Delta a}{a} \right)^2 + 4 \times 10^{-11} \left(\frac{\Delta d}{d} \right)^2 + 5,3 \left(\frac{\Delta b}{b} \right)^2.$$

Z powyższego wzoru wynika, że aby $\Delta L_0/L_0 \leq 1 \times 10^{-6}$, błędy wymiarów geometrycznych powinny spełniać warunek ΔD i $d \leq 1 \mu\text{m}$, $\Delta b \leq 2 \mu\text{m}$. Wymagania te są bardzo duże i mogą być spełnione tylko dzięki zastosowaniu specjalnej aparatury pomiarowej, np. metodami interferencyjnymi i światłem laserowym.

4.8. Podsumowanie

Konstrukcja absolutnych wzorców indukcyjności własnej umożliwia określenie indukcyjności z dokładnością około 1×10^{-5} w zakresie częstotliwości od 0 Hz do 1 kHz. Wykonanie ich jest jednak bardzo kosztowne i wymaga specjalnej aparatury pomiarowej. Pole magnetyczne solenoidu zajmuje dużą przestrzeń, dlatego w dokładnych pomiarach wzorzec absolutny musi być oddalony o kilka metrów od układu pomiarowego i innych materiałów, a szczególnie ferromagnetyków. Stwarza to znaczne problemy z us-

taleniem i pomiarem temperatury wzorca, która musi być znana z dokładnością kilku setnych kelwina.

Duże oddalenie wzorca od układu pomiarowego wymaga długich przewodów doprowadzających. Ich parametry reszkowe: indukcyjność, pojemność międzyprzewodowa i rezystancja mogą być źródłem znacznych błędów, które muszą być wyznaczone i uwzględniane w formie poprawek. Znaczne trudności sprawia również sprzęganie się magnetyczne wzorca absolutnego z innymi elementami układu pomiarowego. W celu eliminacji szkodliwych sprzężeń muszą być przeprowadzone dodatkowe badania, szczególnie gdy w układzie znajdują się inne elementy indukcyjne, np. porównywany wzorzec indukcyjności. Stałość wartości indukcyjności wzorców jest nie mniejsza niż kilka razy 10^{-5} /rok [114]. Pomiary geometryczne są wykonywane bezpośrednio przed wykorzystaniem wzorca [81]. Wszystko to powoduje, że określenie indukcyjności wzorców wtórnych w odniesieniu do wzorca absolutnego z dokładnością zbliżoną do 1×10^{-5} wymaga żmudnych pomiarów zarówno parametrów podstawowych, jak i pasywnych. Dlatego też absolutne wzorce indukcyjności własnej stosowane są obecnie rzadko.

POMIARY INDUKCYJNOŚCI

Pomiary indukcyjności cewek polegają na określeniu ich podstawowego parametru, którym jest zazwyczaj indukcyjność w szeregowym układzie zastępczym oraz parametru reszkowego (rezystancji R_s , stałej czasowej τ lub dobroci Q). Układy pomiarowe i ich elementy są tak dobierane, aby parametr podstawowy był mierzony możliwie najdokładniej, co często odbywa się kosztem dokładności pomiaru parametrów reszkowych.

Charakterystyczną cechą cewek, szczególnie przy małej częstotliwości, jest duża wartość szeregowej rezystancji, która jest często porównywalna, a nawet większa niż reaktancja indukcyjna. Właściwość ta komplikuje pomiary i zmniejsza ich dokładność.

Precyzyjne pomiary indukcyjności sprowadzają się do porównań reaktancji indukcyjnej mierzonej cewki z rezystancją lub reaktancją indukcyjną i pojemnościową wzorców R, L, C . Porównania te wykonuje się za pomocą układów mostkowych, wśród których można wyróżnić: mostki Wheatstone'a (czteroramienne i pochodne), mostki typu T, mostki transformatorowe i mostki podwójnie równoważone. Najczęściej stosowane w pomiarach precyzyjnych są mostki Wheatstone'a. Układy tych mostków zostaną omówione w rozdz. 5. Mostki typu T są obecnie stosowane do pomiarów indukcyjności dla wielkiej częstotliwości. Opisy ich można znaleźć w podanej literaturze [64, 65, 78]. Mostki transformatorowe i podwójnie równoważone są stosowane w najdokładniejszych pomiarach indukcyjności (około 0,01% i

większych). Stanowią one grupę układów, która wyznacza możliwe do osiągnięcia dokładności pomiaru indukcyjności. Mostki te zostaną omówione w rozdz. 6 i 7.

5. Pomiary indukcyjności własnej mostkami czteroramiennymi

5.1. Wprowadzenie

Mostki Wheatstone'a stanowią podstawę klasycznych metod pomiaru indukcyjności własnej i poświęcona jest im bogata literatura [46,47,65,67,68, 78]. Są one powszechnie stosowane w pomiarach indukcyjności w zakresie częstotliwości akustycznych. Do grupy mostków Wheatstone'a są zaliczane mostki wieloramienne (np. mostek Andersona), które można sprowadzić do podstawowego układu mostka czteroramiennego przez przekształcenie "trójkąt-gwiazda".

W rozdziale tym zostaną omówione najczęściej stosowane układy mostków służących do pomiarów indukcyjności z analizą ich możliwości i źródeł błędów pomiarów.

5.2. Warunki równowagi mostka czteroramiennego

Podstawowy układ mostka czteroramiennego prądu zmiennego przedstawiono na rys.5.1.

Na ogół zakłada się, że Z_1 jest impedancją mierzoną, natomiast impedancje Z_2 , Z_3 i Z_4 są impedancjami wzorcowymi o znanych wartościach. Prąd I_p w przekątnej mostka (gdy $Z_5 = 0$) jest określony wzorem:

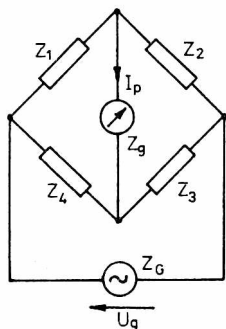
$$I_p = \frac{Z_1 Z_3 - Z_2 Z_4}{Z_5(Z_1 + Z_2)(Z_3 + Z_4) + Z_1 Z_2(Z_3 + Z_4) + Z_3 Z_4(Z_1 + Z_2)} U_g. \quad (5.1)$$

Mostek jest zrównoważony wówczas, gdy prąd w przekątnej mostka równy jest zeru niezależnie od napięcia zasilania. Spełnione jest wtedy równanie

$$Z_1 Z_3 = Z_2 Z_4 \quad (5.2)$$

nazywane warunkiem równowagi mostka. Porównując części rzeczywiste i urojone równania (5.2) otrzymuje się dwa warunki umożliwiające wyznaczenie wartości dwóch parametrów impedancji Z_1 , np. indukcyjności i rezystancji cewki.

W pomiarach indukcyjności własnej są stosowane również mostki z indukcyjnością wzajemną. Indukcyjność wzajemna pojawia się także jako element pasożytniczy, szczególnie, gdy mostek zawiera co najmniej dwie cewki indukcyjne. Uwzględniając indukcyjności wzajemne między ramionami mostka



Rys.5.1. Schemat mostka czteroramiennego
Fig.5.1. General circuit of a four-arm bridge

z rys.5.1 otrzymuje się tzw. mostek uogólniony, którego warunek równowagi jest określony wzorem [46]

$$(Z_1 + \zeta_1)(Z_3 + \zeta_3) = (Z_2 + \zeta_2)(Z_4 + \zeta_4), \quad (5.3)$$

w którym

$$\begin{aligned} \zeta_1 = & m_{12} + m_{14} + m_{15} + m_{16} - \\ & - m_{25} - m_{46} + m_{24} - m_{56}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \zeta_2 = & m_{21} + m_{23} + m_{25} + m_{26} - \\ & - m_{15} - m_{36} + m_{13} + m_{56}, \end{aligned}$$

$$\zeta_3 = m_{32} + m_{34} + m_{35} + m_{36} - m_{45} + m_{26} + m_{24} - m_{56},$$

$$\zeta_4 = m_{41} + m_{43} + m_{45} + m_{46} - m_{35} - m_{16} + m_{13} + m_{56},$$

$$m_{ij} = j\omega M_{ij} - \text{reaktancje}, \quad M_{ij} (i, j = 1, 2, \dots, 6, M_{ij} = M_{ji})$$

indukcyjności wzajemne między poszczególnymi ramionami.

Różne konfiguracje elementów w ramionach mostka dają wiele układów mostkowych. Dobór elementów nie jest dowolny. Zasady doboru ramion oraz klasyfikację mostków można znaleźć w literaturze [46, 78]. W wyniku wieloletnich doświadczeń wielu laboratoriów zostały określone układy mostków wykazujących najwięcej zalet w pomiarach indukcyjności. Mostki te wraz z ich podstawowymi zaletami i wadami oraz warunkami równowagi zestawiono w tabeli 5.1. Poniżej omówiono kolejne mostki ze szczególnym uwzględnieniem źródeł błędów pomiarów indukcyjności.

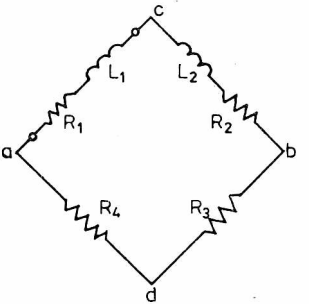
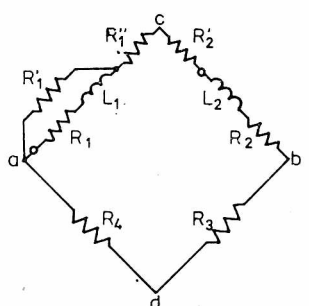
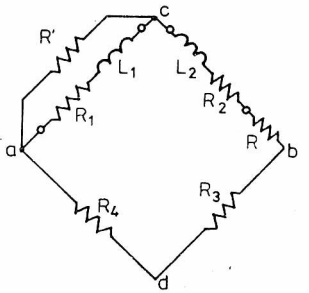
5.3. Mostek Maxwella

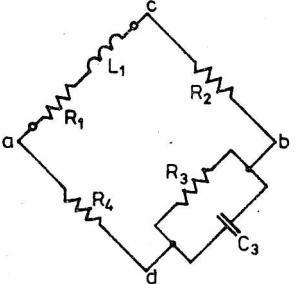
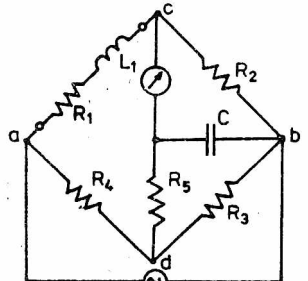
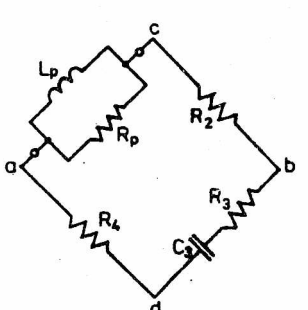
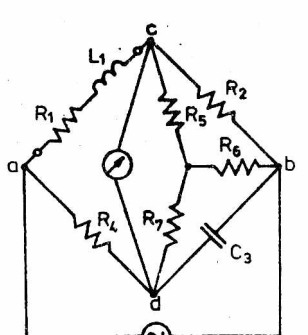
Maxwell opisał prosty układ ([46], s. 309-321) przeznaczony do porównań indukcyjności własnych cewek, który ze względu na liczne zalety jest w dalszym ciągu często stosowany. Schemat mostka Maxwella i warunki równowagi podano w tabeli 5.1, poz. 1. Mostek odznacza się dużą prostotą, szybką zbieżnością i niezależnością równowagi od częstotliwości. Najlepsze warunki pracy mostka otrzymuje się, gdy wzorcowa cewka indukcyjna L_2 ma regulowaną indukcyjność bez zmiany rezystancji R_2 . Budowa takiej cewki stwarza jednak znaczne problemy konstrukcyjne.

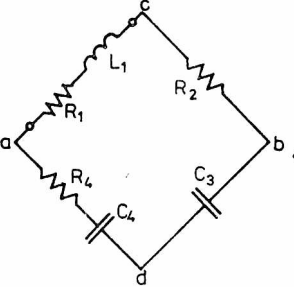
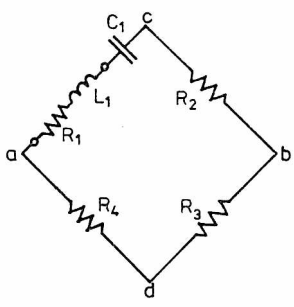
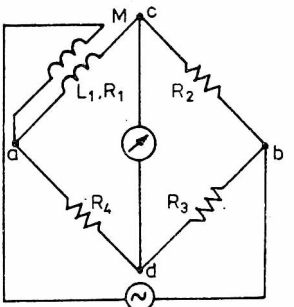
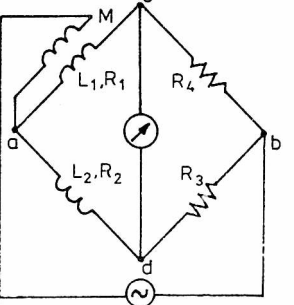
Źródła błędów. Jednym z głównych źródeł błędów są prądy wirowe, które powodują zmiany zarówno indukcyjności, jak i rezystancji ramion mostka. Wpływ prądów wirowych należy minimalizować przez stosowanie rezystorów i cewek o specjalnej konstrukcji.

T a b e l a 5.1

Podstawowe układy mostków do pomiarów
indukcyjności własnej

1. Mostek Maxwella do wzajemnych porównań indukcyjności Podstawowy układ służący do porównań indukcyjności. Stosowany przy niskich częstotliwościach - do kilku kHz. Dodatkowo dodawana jest rezystancja szeregowo do induktora o mniejszej dobroci. Pokazany układ szeregowy - może być także równoległy		$L_1 = L_2 R_4 / R_3$ $R_1 = R_2 R_4 / R_3$
2. Mostek Wiena do pomiaru indukcyjności w odniesieniu do rezystancji Układ umożliwia precyzyjne określenie indukcyjności w odniesieniu do rezystancji i częstotliwości. Stosowany w dolnym pasmie częstotliwości akustycznych		$\omega^2 L_1 L_2 = \frac{(R_1 + R_1') [R_4 (R_2 + R_2') - R_3 R_4]}{R_4 (R_1 + R_1')}$ $L_1 / L_2 = \frac{R_4 (R_1 + R_1')}{R_3 (R_1' + R_1) - R_4 (R_2 + R_2')}$ gdzie: $R = R_1'' + \frac{R_1 R_1'}{R_1 + R_1'}$
3. Mostek Doleżaleka Modyfikacja mostka Wiena do precyzyjnego określenia indukcyjności w odniesieniu do rezystancji w dolnym pasmie częstotliwości akustycznych. Mostek częściej stosowany niż mostek Wiena		$\omega^2 L_1^2 = (R_1 + R_1')^2 \times \frac{R_2 + R_2' - \frac{R_1 R_1' R_3}{(R_1 + R_1') R_4}}{R_1' R_3 / R_4 - (R_2 + R_2')}$

4. Mostek Maxwella-Wiena Najczęściej spotykany mostek do pomiaru indukcyjności zarówno w wykonaniach fabrycznych, jak i specjalnych, w celu zapewnienia precyzyjnych pomiarów		$L_1 = R_2 R_4 C_3$ $R_1 = R_2 R_4 / R_3$ lub $\tau = R_3 C_3$
5. Mostek Andersona Stosowany w precyzyjnych pomiarach indukcyjności. Ma podobne zalety jak mostek Maxwella-Wiena z tym, że odznacza się szybszą zbieżnością. Szeregowo z cewką włączony jest zwykle regulowany rezystor		$R_1 R_3 = R_2 R_4$ $L_1 = C R_2 [R_5 (1 + R_4 / R_3) + R_4]$ lub $L_1 = C [R_5 (R_1 + R_2) + R_2 R_4]$
6. Mostek Haya Szczególnie użyteczny do pomiarów indukcyjności w równoległym układzie zastępczym. Zalecany do pomiaru indukcyjności z podmagnesowaniem prądem stałym. Nadaje się również do pomiarów cewek o dużej stałej czasowej		$L_p = R_2 R_4 C_3$ $R_p = R_2 R_4 / R_3$ lub $Q = 1 / (\omega R_3 C_3)$
7. Mostek Wirka Charakteryzuje się podobnymi cechami jak mostek Maxwella-Wiena. Jest szczególnie przydatny do pomiarów cewek o dużej stałej czasowej, gdy rezystancja R_3 w mostku Maxwella-Wiena wypadła niepraktycznie wielka		$L_1 = R_2' R_4 C_3$ $\tau = R_6 R_7 C_3$ gdzie: $R_2 = \frac{R_2 R_5 R_6}{R_2 + R_5 R_6}$ $R_{56} =$ $(R_5 R_6 + R_5 R_7 + R_6 R_7) / R_7$ $R_{67} =$ $(R_5 R_6 + R_5 R_7 + R_6 R_7) / R_5$

8. Mostek Owena Bardzo przydatny w precyzyjnych pomiarach indukcyjności. Przez równoległe połączenie kondensatora C_4 i rezystora R_4 umożliwia również pomiar w równoległym układzie zastępczym. Przydatny w pomiarach indukcyjności z podmagnesowaniem prądem stałym		$L_1 = R_2 R_4 C_3$ $R_1 = R_2 C_3 / C_2$
9. Mostek rezonansowy Rzadko stosowany do bezpośrednich pomiarów indukcyjności. Przedstawiono rezonans szeregowy. Stosowany jest również rezonans równoległy. Mostek jest stosowany w pomiarach częstotliwości rezonansu własnego cewek i w pomiarach pojemności własnej cewek		$\omega^2 L_1 C_1 = 1$ $R_1 R_3 = R_2 R_4$
10. Mostek Maxwella do porównania indukcyjności własnej z wzajemną Jest stosowany w precyzyjnych porównaniach indukcyjności własnej z wzajemną		$L_1 = -(1 + R_2 / R_3) M$ $R_1 = R_2 R_4 / R_3$
11. Mostek Campbella Jest stosowany w precyzyjnych porównaniach wzorców indukcyjności własnej z indukcyjnością wzajemną		$L_1 - L_2 R_4 / R_2 = -(1 + R_4 / R_2) M$ $R_1 = R_2 R_4 / R_3$

Istotną wadą tego mostka są pasożytnicze sprzężenia magnetyczne, występujące między ramionami, a zwłaszcza indukcyjność wzajemna M między cewką wzorcową L_2 a mierzoną L_1 . W celu zbadania wpływu wartości M na wyniki pomiarów założono, że pozostałe indukcyjności wzajemne są pomijalnie małe. Wtedy reaktancje indukcyjności wzajemnej występujące we wzorze (5.3) wynoszą $\zeta_1 = \zeta_2 = j\omega M$ oraz $\zeta_3 = \zeta_4 = 0$. Po podstawieniu tych zależności do wzoru (5.3) i przekształceniach otrzymuje się następujące warunki równowagi mostka:

$$L_1 = L_2 R_3 / R_4 + M(R_4 / R_3 - 1),$$

$$R_1 = R_2 R_4 / R_3,$$

w których M może być zarówno dodatnie, jak i ujemne.

Z równań tych wynika, że indukcyjność wzajemną M jest źródłem błędu proporcjonalnego do jej wartości. Błąd ten jest mały, gdy mierzona indukcyjność jest w przybliżeniu równa indukcyjności wzorcowej $L_1 \approx L_2$ oraz $R_3 \approx R_4$. W pozostałych przypadkach należy wartość M starannie minimalizować przez zmianę położenia i odległości cewki L_1 od L_2 . Należy przy tym pamiętać, że zwiększanie odległości między elementami zwiększa błąd spowodowany połączeniami. Wartość M jest mała, gdy płaszczyzny cewek są do siebie prostopadłe. Na ogół jednak wzorzec indukcyjności L_2 składa się z kilku cewek (3-4) o płaszczyznach ustawionych do siebie prostopadłe i znalezienie optymalnego położenia cewki L_1 względem L_2 wymaga dodatkowych badań. Badania te polegają na pomiarach indukcyjności L_1 przy zamianie doprowadzeń (zmienia się wtedy znak M) i poszukiwaniu takiego położenia cewki, dla którego różnica w otrzymanych wartościach jest pomijalnie mała. Jeżeli jednak nie udało się odpowiednio zmniejszyć tej różnicy, to za wynik pomiaru wartości L można przyjąć średnią arytmetyczną z dwóch pomiarów otrzymanych wskutek zamiany zacisków cewki L_1 .

Istotnym źródłem błędów pomiaru mogą być indukcyjności i pojemności pasożytnicze rezystorów R_3 i R_4 . Dowolny rezystor o charakterze indukcyjnym można przedstawić jako szeregowe połączenie rezystancji R i indukcyjności L ; wtedy stała czasowa $T = L/R$. Jeśli rezystor ma charakter pojemnościowy, to przedstawiony jest jako równoległe połączenie rezystancji R i pojemności C ; wtedy stała czasowa $T = -RC$. Impedancje rezystorów R_3 i R_4 można zatem zapisać odpowiednio: $Z_3 = R_3(1 + j\omega T_3)$, $Z_4 = R_4(1 + j\omega T_4)$. Podstawiając te wyrażenia do warunków równowagi mostka ($Z_1 = R_1 + j\omega L_1$, $Z_2 = R_2 + j\omega L_2$), po rozwiązaniu otrzymuje się:

$$L_1/L_2 = R_4/R_3 + (T_4 R_4 R_2 - T_3 R_3 R_1)/(L_2 R_3) = R_4/R_3 + \delta_1, \quad (5.4)$$

$$R_1/R_2 = R_4/R_3 + \omega^2 (L_1 R_3 T_3 - L_2 R_4 T_4)/(R_2 R_3) = R_4/R_3 + \delta_2.$$

Ponieważ $R_2 R_4 = R_1 R_3$, równanie (5.4) można uprościć do postaci:

$$L_1/L_2 \cong R_4/R_3 + (T_4 - T_3)R_1/L_2. \quad (5.5)$$

Stałe czasowe (szczególnie dla rezystancji małych około 10 Ω i dużych (10 k Ω) rezystorów R_3 i R_4) mogą być źródłem znacznych błędów. Należy stosować rezystory o małych indukcyjnościach resztkowych i starannie minimalizować pojemności pasożytnicze.

Wymienione błędy można zmniejszyć wykonując pomiary metodą podstawiania. Metoda ta wymaga jednak zastosowania regulowanych rezystorów o bardzo małych i stałych indukcyjnościach pasożytniczych, tzw. rheostatów [46].

Charakterystyka częstotliwościowa cewek. Zmiany indukcyjności spowodowane pojemnością własną cewek stanowią główne ograniczenie dokładności pomiaru mostkiem Maxwella, szczególnie dla dużych wartości indukcyjności przy wyższych częstotliwościach. Na przykład w mostku typu AC 1100 firmy Sullivan, zbudowanym na podstawie omawianego układu Maxwella, pomiary indukcyjności $L > 100$ mH wymagają poprawek dla pierwszej dekady regulacji (tab.5.1, p.1) przy częstotliwości $f > 2$ kHz i dla drugiej dekady przy częstotliwości $f > 6$ kHz. Źródłem znacznych błędów pomiaru mogą być pojemności pasożytnicze mostków, stąd konieczność stosowania ziemi Wagnera.

Podsumowanie. Mostek Maxwella wykazuje wiele zalet: prostą budowę, łatwe i szybkie równoważenie, ale ma również wiele wad, z których główna, to konieczność stosowania regulowanego wzorca indukcyjności. Mostek nadaje się dobrze do dokładnych pomiarów niezbyt dużych indukcyjności przy małych częstotliwościach (do ~ 2 kHz). Typowe wykonanie wspomnianego wyżej mostka, typu AC 1100 firmy Sullivan, wykazuje dokładność 0,1% lub 0,1 μ H w zależności od tego, który z tych błędów jest większy.

5.4. Mostek Maxwella-Wiena

Mostek Maxwella-Wiena (tab.5.1, poz.1) należy obecnie do układów najczęściej stosowanych w precyzyjnych pomiarach indukcyjności własnej. Mostek jest równoważony rezystancją R_2 (lub R_4), skalowaną w wartościach mierzonej indukcyjności i rezystancją R_3 , skalowaną w wartościach stałej czasowej cewki. Równoważenie mostka rezystorami stanowi jego ważną zaletę. Innymi zaletami są niezależność warunków równowagi od częstotliwości, określenie indukcyjności w odniesieniu do pojemności i równoległe połączenie rezystora R_3 z kondensatorem C_3 . Do wad zaliczyć można słabą zbieżność mostka i to, że podczas pomiaru cewek o dużej stałej czasowej rezystor R_3 musi mieć niepraktycznie duże wartości.

Źródła błędów pomiarów. Podstawowym źródłem błędów pomiarów są parametry pasywnicze elementów mostka: stałe czasowe T_2, T_3, T_4 rezystorów R_2, R_3 i R_4 oraz współczynnik strat D kondensatora C_3 . Po uwzględnieniu parametrów pasywniczych impedancje poszczególnych ramion wynoszą: $Z_1 = R_1 + j\omega L_1$, $Z_2 = R_2 (1 + j\omega T_2)$, $Z_4 = R_4 (1 + j\omega T_4)$, $Z_3 = R_3 (1 + j\omega T_3)(1 + jD) / [1 + j\omega C_3 R_3 (1 + j\omega T_3) + jD]$, gdzie $D = r\omega C_3$ (C_3 jest pojemnością, natomiast r rezystancją kondensatora w szeregowym układzie zastępczym). Po podstawieniu powyższego wyrażenia do wzoru (5.2), po przekształceniu i pominięciu małych członów drugiego rzędu, otrzymuje się:

z porównania części rzeczywistych równanie

$$R_1 = R_2 R_4 / R_3 - \omega^2 R_2 R_4 C_3^2 T_3 - \omega^2 R_2 R_4 C_3^2 T_2 - \omega^2 R_2 R_4 C_3^2 T_4 - \omega^2 L_1 T_3 + \omega D L_1,$$

a z porównania części urojonych równanie

$$L_1 = R_2 R_4 C_3 + R_2 R_4 T_2 / R_3 + R_2 R_4 T_4 / R_3 + R_2 R_4 D / (\omega R_3) - R_1 T_3 - \omega R_1 D / \omega,$$

z obu równań, po uproszczeniach

$$L_1 (1 + D^2) = R_2 R_4 C_3 + \frac{R_2 R_4}{R_3} (T_2 + T_4 - T_3). \quad (5.6)$$

Jeśli współczynnik strat D kondensatora C nie przekracza wartości 5×10^{-4} , to jego wpływ na błąd pomiaru indukcyjności można pominąć.

Drugi człon prawej strony wzoru (5.6) pozwala na określenie względnego błędu δL_1 pomiaru indukcyjności, spowodowanego stałymi czasowymi rezystorów:

$$\delta L_1 = (T_3 - T_2 - T_4) / \tau.$$

Dla typowych wartości $T = 1 \times 10^{-7}$ s, $\tau = 1 \times 10^{-3}$ s błąd ten wynosi około 0,03%, a dla mniej korzystnych warunków może być większy. Dlatego należy używać rezystorów o małych stałych czasowych. Do takich należą cienkowsarstwowe rezystory, których stałe czasowe wynoszą około 1×10^{-9} s [72].

Jak można oszacować z powyższych wzorów, błąd pomiaru rezystancji R_1 cewki spowodowany stałymi czasowymi jest pomijalnie mały.

Typowymi wykonaniami mostka Maxwella-Wiena są: mostek impedancji typu 1608-A firmy General Radio, który w optymalnych warunkach osiąga dokładność pomiaru indukcyjności $0,05\% \pm 0,15 \mu\text{H}$ i mostek typu 110 PGH, Fernmeldenmessgerätebau, Berlin DDR o dokładności pomiaru $0,1\% \pm 0,1 \mu\text{H}$ w zakresie 10 μH –11 H. Przykładem specjalnego wykonania mostka Maxwella-Wiena jest mostek skonstruowany w PTB o dokładności pomiaru 0,01% [133].

5.5. Mostek Andersona

Mostek Maxwella-Wiena posiada bardzo dużo zalet, dlatego podjęte zostały prace zmierzające do usunięcia wady tego mostka, jaką jest słaba zbieżność. W rezultacie opracowano różne modyfikacje mostka Maxwella-Wiena, z których najbardziej znane są mostki: Rimingtona, Ilovici, Andersona i Butterwortha ([46], s.377). Wśród wszystkich tych mostków najwięcej zalet wykazuje mostek Andersona przedstawiony w tabeli 5.1, poz. 5. Mostek może być równoważony jednym z elementów R_1, R_2, R_3 lub R_4 i rezystorem R_5 . Zmiana rezystancji rezystora R_5 umożliwia pomiary indukcyjności w szerokim zakresie.

Źródła błędów. Podstawowym źródłem błędów pomiarów są stałe czasowe rezystorów. Jeżeli stałe czasowe rezystorów R_1, R_2, R_3, R_4 i R_5 oznaczymy odpowiednio symbolami, T_1, T_2, T_3, T_4 i T_5 , to można wykazać, że indukcyjność L_1 w zakresie częstotliwości akustycznych może być określona wzorem:

$$L_1 = CR_2 \left[R_5 (1 + R_4/R_3) + R_4 \right] + (T_4 - T_1 - T_3 + T_2)R_1, \quad (5.7)$$

gdzie rezystancja ramienia AC obliczona jest ze wzoru

$$R_1 = R_2 R_4 / R_3.$$

Można zauważyć, że błąd pomiaru indukcyjności spowodowany parametrami pasożytniczymi wyraża się podobnym wzorem jak w mostku Maxwella-Wiena. A więc błąd względny pomiaru indukcyjności spowodowany stałymi czasowymi rezystorów można oszacować wzorem $\delta L_1 = -(T_4 - T_1 - T_3 + T_2)/\tau_1$ gdzie τ_1 jest stałą czasową cewki indukcyjnej L_1 . Typowe cewki indukcyjne (powietrzne) mają stałe czasowe około 1 ms, dlatego utrzymanie błędu δL_1 na poziomie nie większym niż 0,01% wymaga rezystorów o stałych czasowych mniejszych niż 1×10^{-7} s. Błąd δL_1 wzrasta, jak to wykazali Rosa i Grover ([46], s.384) w miarę zmniejszania wartości mierzonej indukcyjności. Jeśli np. dla badanego przez nich mostka błąd δL_1 pomiaru indukcyjności $L_1 = 10$ mH wynosił 0,04%, to dla $L_1 = 1$ mH już 0,4%.

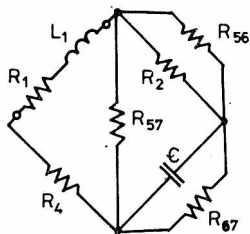
Błąd δL_1 można zmniejszyć przez dobranie rezystorów tak, aby ich stałe czasowe miały małe i zarazem zbliżone wartości. Innym sposobem zmniejszenia błędu δL_1 , zalecanym szczególnie podczas pomiaru małych indukcyjności, jest pomiar metodą podstawiania. W miejsce mierzonej cewki podłącza się rezystor o znanej (np. liczałnej) stałej czasowej. Różnica między zmierzoną a obliczoną indukcyjnością rezystora pozwala na oszacowanie błędu δL_1 .

Straty kondensatora C, podobnie jak w mostku Maxwella-Wiena, w małym stopniu zmieniają główny warunek równowagi i w pomiarze indukcyjności mogą być pominięte.

Przykładem mostka Andersona jest mostek typu YMIIT-2 przeznaczony do wzorcowania wzorców indukcyjności w zakresie częstotliwości akustycznych. Dokładność pomiaru indukcyjności tym mostkiem dla częstotliwości 1 kHz wynosi $\pm(0,03 + 1/L[\text{mH}])\%$.

5.6. Mostek Haya

Mostek Haya (tab.5.1, poz.6) jest szczególnie użyteczny do pomiarów indukcyjności w równoległym układzie zastępczym oraz do pomiaru dużych dobroci Q , kiedy rezystancja R_3 w mostku Maxwella-Wiena musiałaby być bardzo duża (10^7 - 10^9) Ω . Mostek ten jest również przydatny do pomiarów indukcyjności cewek z rdzeniem żelaznym pod magnesowanym prądem stałym, ponieważ cały prąd doprowadzony do mostka płynie przez mierzoną indukcyjność.



Rys.5.2. Schemat mostka Wirka po przekształceniu gwiazdy (R_5, R_6, R_7) w trójkąt
Fig.5.2. Wirka's bridge after the star-triangle transformation (R_5, R_6, R_7)

Do równoważenia mostka służą zazwyczaj elementy C_3 i R_3 . Konieczność stosowania regulowanego wzorca pojemności jest wadą tego mostka. Parametry pasożytnicze elementów mostka Haya wpływają na dokładność pomiaru podobnie jak w mostku Maxwella-Wiena.

5.7. Mostek Wirka

Jak już wspomniano, mostek Maxwella-Wiena jest mało przydatny do pomiaru cewek o dużej stałej czasowej ze względu na duże wartości rezystancji R_3 . Aby ominąć tę niedogodność, Wirk zaproponował 7-ramienny mostek, którego schemat i warunki równowagi przedstawiono w tab.5.1, poz.7. Po przekształceniu gwiazdy (R_5, R_6, R_7) w trójkąt otrzymuje się układ Maxwella-Wiena (rys.5.2). Rezystancje przekształconych elementów wynoszą: $R_{56} = (R_5 R_6 + R_5 R_7 + R_6 R_7) / R_7$, $R_{67} = (R_5 R_6 + R_5 R_7 + R_6 R_7) / R_5$. Można więc otrzymać dużą wartość rezystancji R_{67} bocznikującej pojemność C_3 (odpowiednik rezystancji R_3 w mostku Maxwella-Wiena) przez zmniejszanie rezystancji R_5 .

Własności mostka, źródła błędów oraz wpływ parametrów pasożytniczych mostka Wirka są analogiczne do mostka Maxwella-Wiena.

5.8. Mostek Owena

Mostek Owena (tab.5.1, poz.8) jest modyfikacją mostka Grovera [46] i jest przeznaczony do precyzyjnych pomiarów indukcyjności własnej. Szeregowo z cewką L_1 jest włączony regulowany rezystor o bardzo małej i stałej indukcyjności pasożytniczej. Najlepsze warunki pracy mostka uzyskuje

się, gdy jest on równoważony rezystorami R_1 i R_4 . Aby przeanalizować wpływ parametrów pasożytniczych, oznaczono szeregowo indukcyjności ramion odpowiednio symbolami l_1, l_2, l_3, l_4 , a zastępcze szeregowo rezystancje strat kondensatorów C_3 i C_4 odpowiednio r_3 i r_4 . Impedancje poszczególnych ramion wynoszą: $Z_1 = R_1 + j\omega(L_1 + l_1)$, $Z_2 = R_2 + j\omega l_2$, $Z_3 = r_3 + j(\omega l_3 - 1/(\omega C_3))$, $Z_4 = R_4 + r_4 + j(\omega l_4 - 1/(\omega C_4))$.

Na podstawie wzoru (5.2) po prostych przekształceniach otrzymuje się ogólny warunek równowagi:

$$C_3 R_2 R_4 = L_1 + l_1 + C_3 (R_1 r_3 - R_2 r_4) - \\ - l_2 C_3 / C_4 + \omega^2 [l_2 l_4 - l_3 (L_1 + l_1)] C_3, \quad (5.8)$$

$$R_2 / C_4 = R_1 / C_3 + \omega^2 [l_2 (R_4 + r_4) + l_4 R_2 - (L_1 + l_1) r_3 - l_3 R_1]. \quad (5.9)$$

Podczas pomiaru indukcyjności mniejszych niż kilkadziesiąt mH niezbędne jest wyeliminowanie wpływu indukcyjności doprowadzeń. W tym celu równoważy się dodatkowo mostek przy zwartych zaciskach mierzonej cewki. Jeśli zwarty mostek zrównoważy się elementami R_1 i R_4 , a elementy zrównoważone będą miały wartość odpowiednio R_1^0 i R_4^0 , to warunek równowagi ma postać:

$$C_2 R_2 R_4^0 = L_1^0 + C_3 (r_3 R_1^0 - r_4 R_2) - l_2 C_3 / C_4 + \omega^2 C_3 (l_4^0 l_2 - l_3 l_1^0); \quad (5.10)$$

l_1^0 i l_2^0 oznaczają indukcyjności pasożytnicze zrównoważonego mostka po zwarcu.

Pod odjęciu stronami równania (5.8) i (5.10) otrzymuje się:

$$C_3 R_2 (R_4 - R_4^0) = L_1 + (l_1 - l_1^0) + C_3 r_3 (R_1 - R_1^0) + \\ + \omega^2 C_3 [l_2 (l_4 - l_4^0) - l_3 (l_1 - l_1^0) - l_3 L_1].$$

Przy częstotliwościach akustycznych dwa ostatnie człony można na ogół pominąć i indukcyjność oblicza się z wzoru

$$L_1 = C_3 R_2 (R_4 - R_4^0) - (l_1 - l_1^0). \quad (5.11)$$

Rezystor regulacyjny R_1 jest tak skonstruowany, aby jego regulacja odbywała się przy minimalnej zmianie indukcyjności pasożytniczej (np. R_1 jest rheostatem). W tym przypadku człon $l_1 - l_1^0$ we wzorze (5.11) jest pomijalnie mały.

Mostek indukcyjności Owena wykonany w Bell Telephone Laboratories w Nowym Jorku wykazuje dokładność pomiaru 0,03% ([46], s.409).

5.9. Mostek rezonansowy

Omawiane dotychczas układy mostkowe pozwalają na określenie indukcyjności pod warunkiem, że co najmniej dwa elementy wzorcowe są znane, np. w mostku Maxwella-Wiena konieczna jest znajomość pojemności i dwóch rezystancji. Naturalnej tendencji ograniczania liczby wzorców wychodzi naprzeciw mostek rezonansowy (tab.5.1, poz.9). Dzięki wykorzystaniu zjawiska rezonansu w mostku tym określa się indukcyjność przez porównanie ze wzorcem pojemności. Stanowi to zaletę mostka. Ale konieczność stosowania dużych wartości pojemności C i rozwój mostków transformatorowych sprawiły, że mostki rezonansowe są obecnie rzadko stosowane do pomiarów indukcyjności. Stosuje się je do wyznaczania częstotliwości rezonansu własnego lub pojemności własnej cewek. Dodatkową wadą mostka rezonansowego, która ogranicza jego zastosowanie do specjalnych wykonń, jest zależność warunku równowagi od częstotliwości.

Jeśli uwzględnimy parametry pasywnych elementów, to impedancje ramion mostka wynoszą: $Z_1 = R_1 + j\omega L_1 + 1/(j\omega C_1)$, $Z_2 = R_2(1 + j\omega T_2)$, $Z_3 = R_3(1 + j\omega T_3)$, $Z_4 = R_4(1 + j\omega T_4)$, gdzie T_2, T_3, T_4 są stałymi czasowymi rezystorów odpowiednio R_2, R_3, R_4 . Po podstawieniu powyższego wyrażenia do wzoru (5.2), po przekształceniach i pominięciu członów małych drugiego rzędu, otrzymuje się wypadkowy warunek równowagi

$$\omega^2 L_1 C_1 = 1 + \omega^2 C_1 (T_2 + T_4 - T_3) R_2 R_4 / R_3. \quad (5.12)$$

Po uwzględnieniu wzorów $R_1 \approx R_2 R_4 / R_3$ i $\omega^2 L_1 C_1 \approx 1$, równanie (5.12) można zapisać w uproszczonej formie

$$\omega^2 L_1 C_1 = 1 + (T_2 + T_4 - T_3) / \tau,$$

gdzie τ jest stałą czasową cewki. Człon poprawkowy jest tu podobny do członu poprawkowego w mostku Maxwella-Wiena. Należy więc stosować, podobnie jak w poprzednio omówionych mostkach, rezystory o bardzo małych stałych czasowych.

5.10. Kombinowany mostek Maxwella-Wiena - rezonansowy

Jednym ze sposobów poprawienia dokładności pomiarów mostkami jest stosowanie pomocniczych układów pomiarowych złożonych z elementów, które umożliwiają otrzymanie dodatkowych warunków równowagi [76]. Przykładem jest zaproponowane przez Krotkova dodatkowe równoważenie mostka Doleżaleka [78].

Poniżej opisano inne rozwiązanie tego typu, którym jest kombinowany mostek Maxwella-Wiena - rezonansowy, przeznaczony do precyzyjnych porównań rezystancji z indukcyjnością [81]. W mostku jak na rys.5.3 induk-

cyjność L_1 jest porównywana z rezystancjami R_2 i R_4 . Elementy R_5 , C_5 , R_6 tworzą gałąź Wagnera. Mostek ten łączy zalety mostków Maxwella-Wiena i rezonansowego eliminując ich podstawową wadę, jaką jest zbyt duża pojemność kondensatora C . Kondensator C w omawianym mostku pracuje w dwóch pozycjach. Jeśli włączony jest do ramienia bd , otrzymuje się układ mostka Maxwella-Wiena i warunki równowagi $R_1 R_3 = R_2 R_4$, $L_1 = R_2 R_4 C$ (R_1 jest sumaryczną rezystancją ramienia ac). Po przełączeniu kondensatora C do ramienia ac otrzymuje się mostek rezonansowy i warunki równowagi $R_1 R_3 = R_2 R_4$, $\omega^2 L_1 C = 1$. Z porównania części urojonych otrzymuje się równanie

$$R_2 R_4 = \omega^2 L_1^2,$$

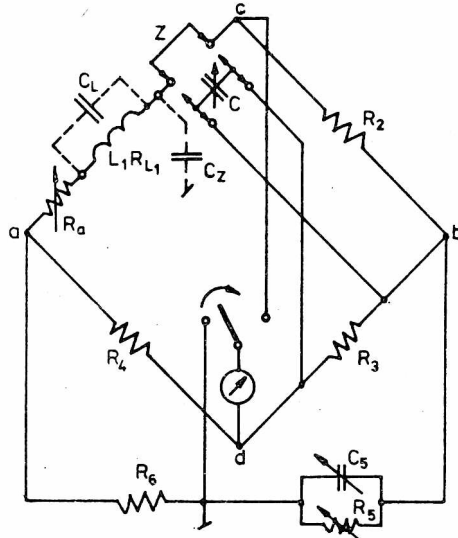
które umożliwia porównanie rezystancji z reaktancją. Wartość pojemności C nie musi być znana, wystarczy, aby była odpowiednio stała w czasie pomiarów. Warunek równowagi mostka Maxwella-Wiena z uwzględnieniem stałych czasowych T_2, T_3, T_4 rezystorów R_2, R_3 i R_4 oraz współczynnika strat D kondensatora C jest określony wzorem (5.6). Należy uwzględnić jeszcze wpływ pojemności własnej C_L cewki.

Pojemność C_L zmienia indukcyjność cewki zgodnie ze wzorem $L_1 = L_0(1 + \omega^2 L_0 C_L)$, gdzie L_0 jest indukcyjnością cewki dla częstotliwości zerowej. Wtedy wzór (5.6) określający równowagę mostka Maxwella-Wiena przyjmuje postać:

$$L_0(1 + \omega^2 L_0 C_L + D^2) = R_2 R_4 C + R_1(T_2 + T_4 - T_3).$$

Podczas wyznaczania warunku równowagi mostka rezonansowego należy uwzględnić, oprócz stałych czasowych rezystorów i pojemności własnej cewki, również pojemność do ziemi C_Z (rys.5.3). Pojemności C_L i C_Z zachowują się (z pominięciem członów resztkowych drugiego rzędu) tak, jakby dawały się do pojemności C , stąd na mocy równania (5.12) główny warunek równowagi mostka rezonansowego ma teraz postać:

$$\omega^2 L_0(C + C_L + C_Z) = 1 + \omega^2 R_1 C(T_2 + T_4 - T_3).$$



Rys.5.3. Kombinowany mostek Maxwella-Wiena rezonansowy
Fig.5.3. Combined Maxwell-Wien resonance bridge

Po przekształceniu powyższego równania otrzymuje się (z pominięciem członów resztkowych drugiego rzędu) sumaryczny warunek równowagi mostka kombinowanego

$$\sqrt{R_2 R_4} = \omega L_0 \left[1 + D^2/2 + C_L/C + C_Z/(2C) - (T_2 + T_4 - T_3)/(CR_3) \right]. \quad (5.13)$$

Zaleca się stosować kondensatory mikowe o pojemności kilku μF . Współczynnik strat D takich kondensatorów jest mniejszy niż 3×10^{-4} , a więc człon poprawkowy: $D^2/2 < 1 \times 10^{-7}$. Pojemności C_L i C_Z mogą wynosić kilkadziesiąt pF i przy dokładnych pomiarach powinny być uwzględnione w formie poprawki. Iloczyn CR_3 jest w przybliżeniu równy stałej czasowej τ cewki, a więc $(T_2 + T_4 - T_3)/(CR_3) \approx (T_2 + T_4 - T_3)/\tau$. Ponieważ wartość τ wynosi około 1×10^{-3} s, zaleca się stosować rezystory o bardzo małych stałych czasowych około 1×10^{-9} s.

Elementy mostka i częstotliwość pracy dobiera się tak, aby oba mostki składowe były wstępnie zrównoważone. Następnie równoważy się mostek Maxwella-Wiena kondensatorem C (i rezystorem R_a) i otrzymuje równowagę dla wartości równej C_m . Z kolei przełącza się kondensator i równoważy mostek rezonansowy i otrzymuje równowagę dla wartości C_r kondensatora C .

Mostek rezonansowy można zrównoważyć także przez podłączenie kondensatora o pojemności C_r oraz dołączenie równoległe do pojemności C_Z dodatkowego kondensatora o pojemności $C_r - C_m$. Wtedy na mocy (5.12) warunek równowagi mostka kombinowanego przyjmuje postać:

$$\sqrt{R_2 R_4} = \omega L_0 \left[1 + D^2/2 + C_L/C + (C_Z + C_r - C_m)/(2C) - (T_2 + T_4 - T_3)/(CR_3) \right]. \quad (5.14)$$

Stosując opisany mostek Linckh i Brasack z Physikalisch-Technische Bundesanstalt wyznaczyli rezystancje R_2 i R_4 (o wartościach 100 Ω i 200 Ω) w odniesieniu do absolutnego wzorca indukcyjności własnej $L = 0,10003$ H. Porównania przeprowadzono dla częstotliwości 224 i 317 Hz. Stosując wzór (5.14) uzyskali dokładność porównania lepszą niż 5×10^{-7} [81].

5.11. Mostki z indukcyjnością wzajemną

Istnieje duża grupa układów mostkowych zawierających obok elementów RLC elementy charakteryzujące się indukcyjnością wzajemną M ([46], s. 414-490). Mostki te umożliwiają bezpośrednie pomiary indukcyjności własnej, lecz stosowane są głównie do dokładnych porównań indukcyjności własnej z indukcyjnością wzajemną.

Precyzyjne porównania indukcyjności wzajemnej z indukcyjnością własną są realizowane w tych laboratoriach (np. NPL), w których system pomiarów impedancji opiera się na absolutnym wzorcu indukcyjności wzajemnej.

Do dokładnych porównań L z M jest stosowany zazwyczaj mostek Maxwella (tab.5.1, poz.10) lub mostek Campbella (poz.11). Dokładność takiego porównania przeprowadzonego w NPL wynosi kilkadziesiąt ppm. Obecnie jednak istnieje tendencja do opierania systemu pomiarów impedancji na absolutnych wzorcach pojemności i mostki z indukcyjnością wzajemną stosowane są rzadko.

5.12. Podsumowanie

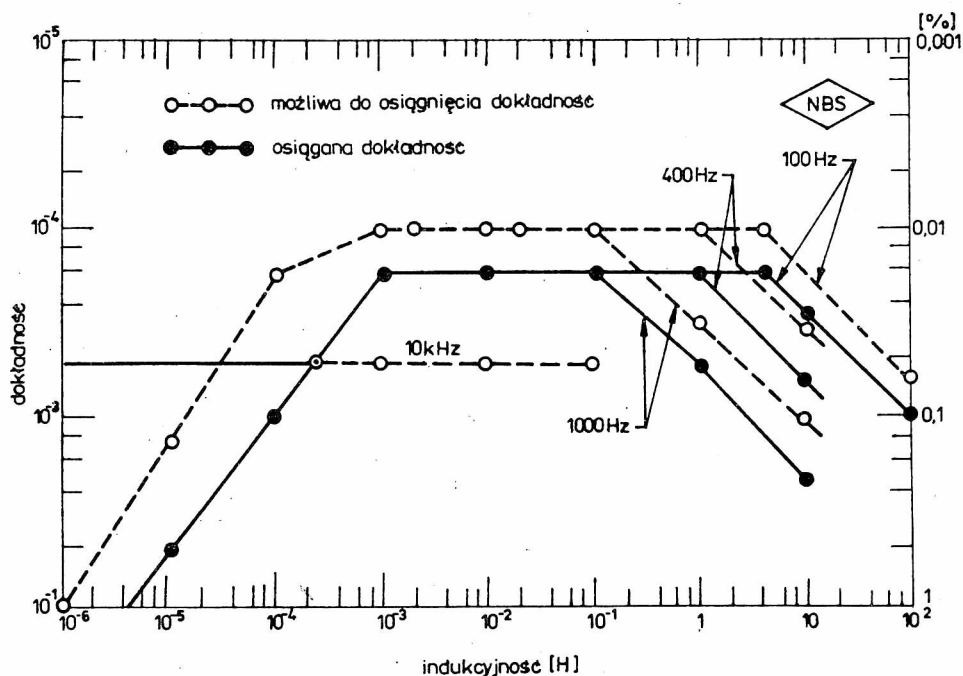
Mostki prądu zmiennego, cztero- i wieloramiennie, stanowią podstawową grupę układów służących do precyzyjnych pomiarów indukcyjności własnej. Wykazują one wiele zalet takich, jak niezależność warunków równowagi od częstotliwości, prosty sposób równoważenia itd. Do podstawowych wad tych mostków zaliczyć można konieczność stosowania ziemi Wagnera oraz określenie indukcyjności w odniesieniu do kilku różnych wzorców (np. w mostku Maxwella-Wiena indukcyjność odnoszona jest do trzech wzorców R_2, R_4, C), co ogranicza dokładność pomiarów. Warto zauważyć, że parametry pasożytnicze wpływają na dokładność pomiarów w podobny sposób we wszystkich typach mostków. Na przykład stałe czasowe rezystorów powodują błąd pomiaru indukcyjności równy stosunkowi sumy ich wartości do stałej czasowej τ cewki.

Ważny jest wybór układu mostkowego, który zależy od: wymaganej dokładności pomiaru, uniwersalności układu (np. możliwość łatwego przekształcenia układu na inny typ służący do pomiarów rezystancji lub pojemności), przyjętego schematu zastępczego cewki (szeregowy lub równoległy), możliwości podmagnesowania cewki prądem stałym, zakresu częstotliwości pomiarowej oraz wartości stałej czasowej cewki. Najczęściej w precyzyjnych pomiarach stosowane są mostki Maxwella-Wiena, Owena, Andersona i Maxwella.

Realizacje techniczne mostkowych układów pomiarowych można podzielić na dwie zasadnicze grupy. Do pierwszej należą fabryczne wyroby umożliwiające bezpośrednie pomiary indukcyjności. Dokładność pomiarów tymi mostkami wynosi zazwyczaj $\pm 0,1\%$ $\pm 0,1 \mu H$.

Drugą grupę mostków stanowią zestawiane układy pomiarowe, w których wzorce rezystancji i pojemności są dołączane z zewnątrz na czas pomiaru. Osiągane dokładności pomiaru mostkami Wheastone'a wynoszą $0,01\%$ ($[103, 130]$, rys.5.4).

Należy podkreślić, że mostki Wheastone'a należą do najlepszych układów służących do pomiarów indukcyjności o dokładności $0,1-0,02\%$. W pomiarach o dokładności $0,1\%$ stosowanych jest wiele układów tych mostków. Natomiast dla dokładności około $0,02\%$ najczęściej stosowany jest mostek Maxwella-Wiena.



Rys.5.4. Dokładność pomiaru indukcyjności osiągnięta w National Bureau of Standards (NBS) za pomocą mostka Maxwella-Wiena
Fig.5.4. Accuracy of inductance measurements achieved at the National Bureau of Standards

6. Pomiary indukcyjności mostkami transformatorowymi

Podstawową wadą mostków Wheastone'a jest określenie indukcyjności w odniesieniu do przynajmniej trzech wzorców, co ogranicza możliwości osiągnięcia dużych dokładności pomiarów. Wadę tę można wyeliminować przez zastosowanie silnie sprzężonych ramion indukcyjnych. Układy takie nazywają się mostkami transformatorowymi. Wykazują wiele zalet, z których najważniejsze, to: bardzo duża stabilność i dokładność stosunku napięć (o dwa rzędy większa niż w razie użycia elementów RLC), brak wrażliwości na zakłócenia zewnętrzne, duża impedancja wejściowa i mała wyjściowa, dzięki czemu nie trzeba stosować "gałęzi Wagnera". Wadą jest natomiast trudniejsza regulacja elementów równoważących, ograniczona w zasadzie do jednego ramienia. Mostki transformatorowe są stosowane do pomiarów indukcyjności o największej dokładności, około 0,01% i większej.

Mostki transformatorowe przeznaczone do bardzo dokładnych pomiarów indukcyjności można podzielić na dwie grupy: mostki do wzajemnych porów-

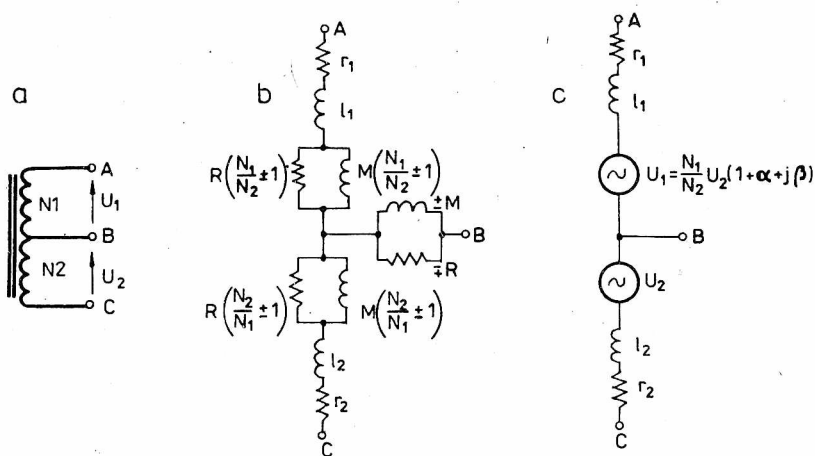
nań indukcyjności (komparatory L-L) oraz mostki do porównań indukcyjności z pojemnością (komparatory L-C).

Komparatory L-L są budowane najczęściej w prostym układzie mostka transformatorowego z jednym ramieniem mierzonym, a drugim wzorcowym. Mostek taki został wykonany po raz pierwszy przez Hillhouse'a i Kline'a z NBS [59]. Do komparacji L-C, która jest bardziej złożonym zagadnieniem niż komparacja L-L, stosowanych jest wiele rozwiązań: począwszy od transformatorowego transfera L-C proponowanego przez Hillhouse'a [56], i Hahnmanna [45], komparatora impedancji proponowanego przez Dunna i Tsao z NRC [28], do rozwiązań proponowanych przez autora - transformatorowego mostka wieloramiennego [97,101] i mostka kombinowanego [91].

W rozdziale tym będą omówione ogólne zasady konstrukcji mostków transformatorowych przeznaczonych do precyzyjnych pomiarów indukcyjności.

6.1. Transformatory stosunkowe

Schemat zastępczy transformatora stosunkowego. Podstawowym elementem mostków transformatorowych są silnie sprzężone ramiona indukcyjne (transformatory stosunkowe), których celem jest bardzo dokładny podział napięć. Zasadę pracy takich ramion wyjaśnić można na schemacie zastępczym dla małej częstotliwości (rys.6.1), w którym:



Rys.6.1. Silnie sprzężone ramiona indukcyjne: a - oznaczenie, b - schemat zastępczy, c - uproszczony schemat zastępczy, α, β - składowa rzeczywista i urojona błędów
Fig.6.1. Strong coupled inductance arms: a) denotation, b) equivalent circuit, c) simplified equivalent circuit: α and β in-phase and quadrature errors, respectively

N_1, N_2 - oznaczają liczby poszczególnych zwojów,

l_1 i l_2 - indukcyjności rozproszenia uzwojeń odpowiednio N_1 i N_2

r_1 i r_2 - rezystancje uzwojeń (są one równe rezystancji uzwojeń dla prądu stałego lub małej częstotliwości),

M - indukcyjność wzajemna uzwojeń,

R - reprezentuje straty od prądów wirowych oraz histerezy (jest funkcją częstotliwości).

Jeśli przyjmie się, że indukcyjność każdego zwoju jest taka sama i wynosi L_2 oraz sprzężenie magnetyczne jest tak silne, że współczynnik sprzężenia magnetycznego ma wartość równą 1, to impedancje elementów schematu zastępczego silnie sprzężonych ramion indukcyjnych przyjmują wartości podane na rys.6.1 oraz $M = N_1 N_2 L_2$, gdzie M jest indukcyjnością wzajemną ramion.

Na powyższym rysunku nie uwzględniono pojemności pasożytniczych. Są one rozłożone wzdłuż uzwojeń, ale można z wystarczającą dokładnością analizować ich wpływ przy małych częstotliwościach przyjmując, że reprezentująca jest skupiona pojemność dołączona jest do zacisków, i traktować ją jako obciążenie zewnętrzne. Należy podkreślić, że nawet dla częstotliwości większych od rezonansu własnego transformatora stosunkowego silnie sprzężone ramiona indukcyjne zachowują swoje właściwości.

Na rysunku 6.1c podano uproszczony schemat zastępczy transformatora, w którym elementy z rysunku 6.1c zastąpiono źródłami napięcia. Ze względu na prostotę schemat ten jest bardzo przydatny w analizie mostków transformatorowych.

Dokładność określenia stosunku napięć. Jeśli napięcie doprowadzone jest do obu uzwojeń, to iloraz napięć po pominięciu małych członów drugiego rzędu można wyrazić wzorem [107]

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2} \left[1 + \left(\frac{N_2(r_1 + j\omega l_1) - N_1(r_2 + j\omega l_2)}{N_1 + N_2} \right) \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega M} \right) \right] =$$

$$= \frac{N_1}{N_2} (1 + \alpha + j\beta), \quad (6.1)$$

gdzie $\alpha = [(N_2 r_1 - N_1 r_2)/R + (N_2 l_1 - N_1 l_2)/M]/(N_1 + N_2)$ jest składową rzeczywistą, a $\beta = [\omega(N_2 l_1 - N_1 l_2)/R - (N_2 r_1 - N_1 r_2)/\omega M]/(N_1 + N_2)$ składową urojoną błędu podziału napięcia transformatora stosunkowego.

Silnie sprzężone ramiona indukcyjne powinny być tak skonstruowane, aby można było przyjąć, że stosunek napięć jest równy stosunkowi liczby zwojów, a więc, aby α i β były pomijalnie małe. W tym celu należy:

1. Stosować rdzeń (magnetowód) o bardzo dużym współczynniku przenikalności magnetycznej μ (aby zapewnić jak największe wartości M i L_2) oraz o małych stratach, aby R było jak największe. Produkowane są taśmy rdzeniowe, zwinięte w formie toroidu, o przenikalności magnetycznej

μ ponad 100 000 (krajowy permaloy 80). Blacha, z której zwinięty jest rdzeń, powinna być cienka, o grubości nie większej niż 0,1 mm.

2. Stosować odpowiednie uzwojenia (np. "skręcane"), umożliwiające otrzymanie małych indukcyjności pasywnych. Powinny one być jednakowo skonstruowane i mieć możliwie zbliżone wartości indukcyjności w każdym zwoju. Wtedy wpływ indukcyjności pasywnych redukuje się ($L_1 N_2 - L_2 N_1 \approx 0$).

3. Stosować - jeżeli to możliwe - duże liczby zwojów, aby stosunek $1/M$ był mały.

4. Stosować przewód o możliwie największym przekroju poprzecznym i używać tego samego przewodu na wszystkie uzwojenia. Rezystancja każdego uzwojenia będzie w przybliżeniu taka sama, gdyż wtedy $N_2 r_1 - N_1 r_2 \approx 0$.

Przykłady różnych nawojów spełniających wymienione wymagania można znaleźć w literaturze [20,70].

Typowe transformatory mają α i β na poziomie kilka ppm, natomiast r i l wynoszą od kilku m Ω do kilku Ω i ułamków μH - aż do kilkudziesięciu μH .

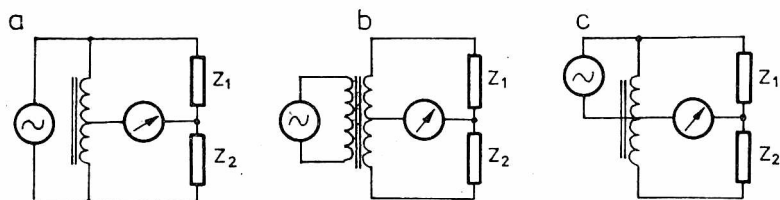
Wpływ obciążenia. Jeśli do uzwojenia N_2 podłączona zostanie impedancja Z_2 , to stosunek napięć U_1/U_2 ulegnie zmianie. Błąd względny δ stosunku napięć spowodowany włączeniem Z_2 jest równy w przybliżeniu:

$$\delta = \frac{(N_1/N_2)(r_2 + j\omega l_2) + (N_2/N_1)(r_1 + j\omega l_1)}{Z_2(N_1 + N_2)/N_2} . \quad (6.2)$$

Gdy $N_1 = N_2$, błąd $\delta \approx (r_2 + j\omega l_2)/Z_2$. Zbliżoną wartość miałby błąd podziału napięcia na ramionach stosunkowych, utworzonych z rezystancji uzwojeń i indukcyjności rozproszeń. Błąd δ jest zazwyczaj pomijalnie mały. Ta mała wrażliwość na obciążenie transformatorów stosunkowych jest ważną zaletą podczas bardzo dokładnych pomiarów.

6.2. Zasady konstrukcji mostków transformatorowych

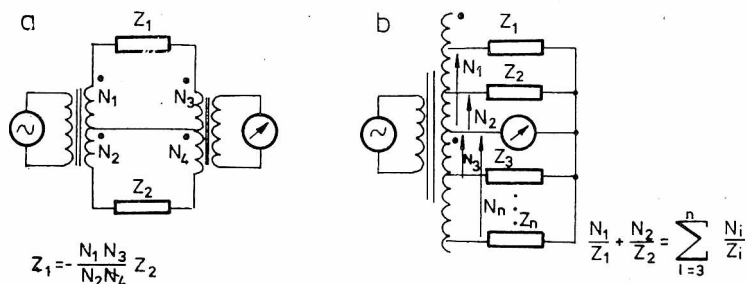
W mostkach stosowane są dwa rodzaje transformatorów: transformatory napięciowe (stosunkowe) i transformatory prądowe (komparatory prądów). Transformatory napięciowe wytwarzają stosunek napięć równy stosunkowi liczby zwojów. Transformatory prądowe - stosunek prądów równy stosunkowi liczby zwojów. Rolę transformatora napięciowego i prądowego mogą spełniać te same elementy zależnie od sposobu połączenia układu mostkowego. W transformatorach napięciowych rdzenie pracują ze znacznym polem magnetycznym, natomiast w transformatorach prądowych z zerowym polem magnetycznym. Współczynnik przenikalności magnetycznej rośnie z natężeniem pola i dlatego transformatory napięciowe wykazują na ogół lepsze właściwości niż prądowe.



Rys.6.2. Metody zasilania transformatorów napięciowych:
 a - połączenie jako dzielnik napięcia, b - zasilanie transformatorowe, c - połączenie Lyncha
 Fig.6.2. Methods of ratio transformer feeding; a) voltage divider, b) transformer, c) Lyncha's connection

Zarówno transformatory napięciowe, jak i prądowe, mogą być włączone w różny sposób. Trzy podstawowe sposoby połączeń transformatorów napięciowych przedstawiono na rys.6.2.

Połączenie typu a stosuje się do pomiaru małych impedancji, połączenie typu b - do pomiaru dużych impedancji. Trzeci typ (rys.6.2c), tzw. połączenie Lyncha, jest stosowane w specjalnych układach. Spotykane są także inne połączenia. Każdemu połączeniu transformatora napięciowego odpowiada dualne połączenie transformatora prądowego. Łączy się również jednocześnie transformatory napięciowe z prądowymi (rys.6.3a) lub stosuje się wiele odczepów, tzw. transformatory wieloramienne (rys.6.3b).

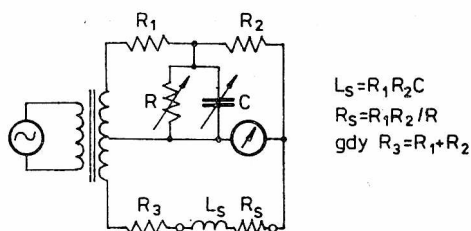


Rys.6.3. Transformatorowe mostki do pomiaru impedancji:
 a - dwuramienne, b - wieloramienne

Fig.6.3. Transformer bridges for measurements of impedance a) two-arm, b) multi-arm

Układy dwuramienne umożliwiają porównanie elementów o tym samym charakterze (np. indukcyjności dwóch cewek). Elementy o przeciwnym charakterze można porównywać w układach mostków wieloramiennych lub układach typu T, np. mostek przedstawiony na rys.6.4. Mostek ten ma własności jak mostek Maxwella-Wiena.

W następnych punktach omówiono najczęściej stosowane układy mostków transformatorowych.

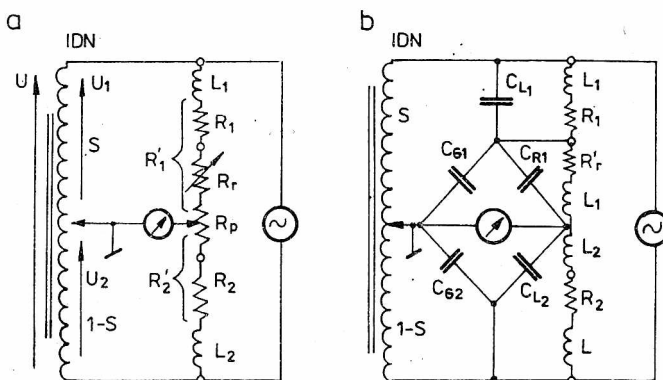


Rys.6.4. Mostek pomiaru indukcyjności z układem T
Fig.6.4. Bridge for inductance measurements in T configuration

6.3. Mostek do wzajemnych porównań indukcyjności (komparator L-L)

Zasada pracy. Jak wynika z rozważań przeprowadzonych w punkcie 6.1 mostki transformatorowe nadają się bardzo dobrze do porównań impedancji o tym samym charakterze. Opierając się na układzie z rys.6.2a, Hillhouse i Kline [59] opracowali w 1960 r. układ do dokładnych porównań wzorców indukcyjności. W następnych latach opublikowano wiele artykułów opisujących kolejne rozwiązania komparatorów L-L, opartych na tej zasadzie [1, 21, 28], między innymi komparator opracowany przez autora przy współpracy innych pracowników IME [75].

Zasadę pracy i sposób regulacji komparatora L-L przedstawiono na rys.6.5a.



Rys.6.5. Schemat komparatora indukcyjności: a - ilustrujący zasadę działania, b - pokazujący główne elementy pasożytnicze
Fig.6.5. Inductance comparator; a) basic diagram, b) diagram with main stray parameters

Równoważenie przeprowadzone jest za pomocą wielodekadowego indukcyjnego dzielnika napięcia IDN (7-dekadowego w komparatorze wykonanym

przez autora [75] i rezystorów R_r i R_p . Warunki równowagi określono równaniami:

$$L_1/L_2 = S/(1 - S) = R'_1/R'_2, \quad (6.3)$$

gdzie R'_1 i R'_2 są sumarycznymi rezystancjami odpowiednio pierwszego i drugiego ramienia, natomiast $S = U_1/U$ jest stosunkiem napięcia wyjściowego do wejściowego IDN. A więc stosunek porównywanych indukcyjności i stosunek rezystancji R_1 i R_2 zależą bezpośrednio od stosunku napięć S .

Rezystory R_r i R_p powinny się charakteryzować możliwie minimalną i niezależną od regulacji wartością indukcyjności pasożytniczych. W komparatorze wykonanym przez autora rezystor R_r składa się z dwóch części: z rezystora trzydekadowego $10 \times 1 \Omega$, $10 \times 10 \Omega$ i $10 \times 100 \Omega$, którego elementami są wykonane we własnym zakresie manganinowe rezystory zmiennoprądowe, oraz rezystora regulowanego płynnie w układzie tzw. rheostatu. Rezystor potencjometryczny R_p jest wykonany z użyciem specjalnie zaprojektowanego przełącznika zapewniającego stałość konfiguracji geometrycznej obwodu niezależnie od położenia suwaków [75]. Całkowita wartość rezystancji R_p jest mniejsza niż $0,15 \Omega$, natomiast stałość indukcyjności szacowana jest na lepszą niż $0,01 \mu\text{H}$.

Błędy pomiaru stosunku indukcyjności. Niedokładność pomiaru stosunku indukcyjności zależy przede wszystkim od dwóch czynników: błędu wyznaczenia stosunku napięć IDN oraz błędu wynikającego z wpływu parametrów pasożytniczych.

W obliczeniach przyjmuje się nominalną wartość podziału napięcia $S_n = U_1/U$. Rzeczywisty stosunek napięć $S = S_n(1 + \alpha' + j\beta')$ (α' i β' nie są tymi samymi pojęciami co α i β w punkcie 6.1, które odnoszą się do stosunku napięć wyjściowych IDN). Składowa rzeczywista α' obrazuje względny błąd pomiaru stosunku L_1/L_2 równy $-\alpha'/(1 - S_n) = -\alpha'(1 + L_1/L_2)$. Wartość bezwzględna tego błędu rośnie, gdy zwiększa się stosunek L_1/L_2 . Stosunek L_1/L_2 nie powinien przekraczać 10, aby zachować dokładność około 10 ppm.

Jeśli uwzględni się składową urojoną β' błędu IDN, to główny warunek równowagi komparatora przyjmuje postać [75]

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{S_n}{1 - S_n} \left[1 + \frac{\beta' (R'_1 + R'_2)}{\omega L_2} \right]. \quad (6.4)$$

Wynika stąd, że należy tak ustalić warunki pracy, aby rezystancja rezystorów regulacyjnych R_r i R_p była jak najmniejsza. Dla typowych danych [74] $\beta' = 1 \times 10^{-5}$, $(R'_1 + R'_2)/L_2 = 1 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$, $f = 160 \text{ Hz}$ ($\omega = 1 \times 10^3 \text{ rad/s}$) człon poprawkowy we wzorze (6.4) wynosi 10 ppm. A więc składowa urojoną błędu β' nie powinna być pomijana przy małych częstotliwościach.

Jeśli uwzględnimy indukcyjności pasożytnicze L_1 i L_2 ramion komparatora, to główny warunek równowagi przyjmuje postać:

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{S_n}{1-S_n} \left(1 + \frac{L_2}{L_2} - \frac{L_1}{L_1} \right); \quad (6.5)$$

wartości L_1 i L_2 wynoszą około 1-2 μH .

A więc w pomiarach indukcyjności mniejszych niż kilkadziesiąt mH o dokładności lepszej niż 0,01% należy wyznaczać stosunek indukcyjności L_1/L_2 ze wzoru (6.5). Jeżeli porównywane indukcyjności mają zbliżone wartości, to błędy spowodowane indukcyjnościami L_1 i L_2 częściowo kompensują się.

Wpływ pojemności pasożytniczych. Najważniejsze pojemności pasożytnicze, mogące powodować błędy pomiaru, zaznaczono na rys.6.5b. Pojemności cewek L_1 i L_2 do masy wpływają w pomijalnie małym stopniu na błąd pomiaru stosunku L_1/L_2 , jeśli impedancja wyjściowa IDN jest mała.

Pojemności C_{L1} i C_{L2} bocznikujące porównywane cewki powodują efektywny wzrost indukcyjności L_1 i L_2 cewek o wartości odpowiednio $\omega^2 L_1^2 C_{L1}$ i $\omega^2 L_2^2 C_{L2}$. Pojemności C_{L1} i C_{L2} są charakterystyczne dla pomiarów dwuzaciskowych. O ich wartościach (od kilku do kilkunastu pF) decydują głównie pojemności doprowadzeń cewek. Pojemności C_{L1} i C_{L2} stanowią główne ograniczenie dokładności dwuzaciskowych pomiarów indukcyjności przy wyższych częstotliwościach. Ograniczenie to związane jest z definicją "impedancyjną" indukcyjności cewki dwuzaciskowej i nie zależy od konkretnego układu pomiarowego.

Pojemność C_{R1} powoduje efektywne zmniejszenie indukcyjności L_1 o wartość $R_1 R_r C_{R1}$ [75]. Błąd ten jest na ogół pomijalnie mały, jedynie dla dużych indukcyjności może być istotny - wartości R_1 i R_r są wtedy duże. Podobnie można wykazać, że pojemność C_{G2} w pomijalnie małym stopniu wpływa na dokładność pomiaru.

Samokalibracja indukcyjności pasożytniczych. Jednym z podstawowych źródeł błędów porównań małych indukcyjności są indukcyjności pasożytnicze L_1 i L_2 . Ważną zaletą omawianego komparatora jest możliwość pomiaru L_1 i L_2 przez dodatkowe równoważenia mostka [75]. W tym celu po dokonaniu właściwego pomiaru, tj. zrównoważeniu mostka przy podłączonych cewkach L_1 i L_2 , w miejsce cewki L_1 włącza się wzorzec L'_1 o wartości 10-100 μH i po zwarceniu zacisków cewki L_2 równoważy się układ za pomocą IDN i rheostatu R_r lub rezystora potencjometrycznego R_p i otrzymuje równowagę dla $S = S'$. Następnie zwiera się zaciski wzorca L'_1 (zaciski cewki L_2 są w dalszym ciągu zwarte), ponownie równoważy się układ i otrzymuje równowagę dla $S = S''$. Wartości indukcyjności pasożytniczych oblicza się ze wzorów [75]:

$$l_1 = L_1' S'' (1 - S') / (S' - S''),$$

$$l_2 = L_1 (1 - S') / (1 - S'') / (S' - S'').$$

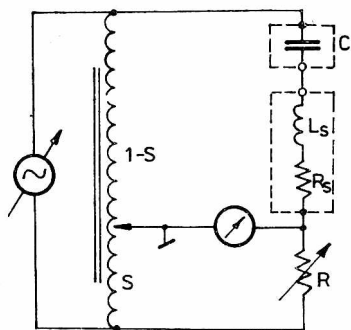
Metoda ta umożliwia pomiary indukcyjności l_1 i l_2 o wartościach 1-2 μH z dokładnością lepszą niż 0,1 μH .

Prezentowany komparator indukcyjności umożliwia pomiary stosunku indukcyjności z dokładnością około 10 ppm. Podstawową jego zaletą, umożliwiającą osiągnięcie dużych dokładności, jest możliwość samokalibracji indukcyjności pasożytniczych. Wadą jest brak bezpośredniego odczytu mierzonej wartości. Komparatory zbudowane z wykorzystaniem powyższej zasady znajdują się w wielu laboratoriach i są stosowane w pomiarach porównawczych grupowych wzorców indukcyjności.

6.4. Rezonansowy transfer L-C

Po opracowaniu przez Hillhouse'a komparatora L-L, który umożliwił znaczną poprawę dokładności porównania indukcyjności, pozostał problem odpowiednio dokładnego i absolutnego pomiaru indukcyjności w odniesieniu do innej wielkości. Rozwiązaniem tego zagadnienia jest zaproponowany przez Hillhouse'a transformatorowy układ rezonansowy, nazwany transferem L-C (rys.6.6). W układzie jest porównywana indukcyjność L_s z pojemnością C . Warunki równowagi, bez uwzględnienia parametrów pasożytniczych, są następujące:

$$\omega^2 L_s C = 1, \quad R/R_L = S/(1 - S). \quad (6.6)$$



Rys.6.6. Schemat transfera L-C
Fig.6.6. Diagram of the L-C transfer

Układ równoważony jest zmianą częstotliwości generatora i rezystora R . Hillhouse porównał specjalnie do tego celu zaprojektowany wzorzec indukcyjności o wartości $L = 253 \text{ mH}$ z kondensatorem wzorcowym $C = 0,1 \mu\text{F}$ przy częstotliwości 1 kHz z dokładnością 50 ppm. Oprócz rezonansu szeregowego stosowano również rezonans równoległy, dla którego warunki równowagi określono wzorem:

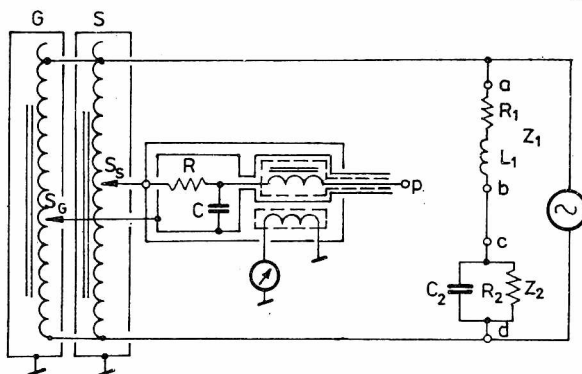
$$\omega^2 = \frac{1}{LC} - \left(\frac{R_s}{L} \right)^2, \quad (6.7)$$

$$\frac{R}{R_s} = \frac{S}{1 - S} \frac{1}{(1 - \omega^2 L_s C)^2 + (\omega R C)^2}. \quad (6.8)$$

Podstawową wadą rezonansowego transferu jest konieczność doprowadzenia do rezonansu porównywanych elementów L i C . Wartości ich w zakresie małych częstotliwości wypadają niepraktycznie duże. Połączenie wzorca L szeregowo z wzorcem C jest niekorzystne, gdyż pojawia się wiele pojemności pasożytniczych. Natomiast wady układu równoległego, to przede wszystkim złożone warunki równowagi oraz duża wartość rezystancji regulowanej R .

6.5. Komparator indukcyjności z dwoma transformatorami stosunkowymi

Dwuramiennie układy mostków transformatorowych (rys.6.2) nie nadają się do bezpośredniego porównania indukcyjności z pojemnością, gdyż jeśli porównywane elementy L i C podłączy się do odczepów transformatora mających napięcia w tej samej fazie, to składowe rzeczywiste prądów dodadzą się i niemożliwe jest uzyskanie pełnej równowagi mostka. W celu uniknięcia tej niedogodności Dunn i Tsao [28] zaproponowali układ (stosowany już uprzednio do kalibracji IDN) z dwoma wielodekadowymi IDN. Przekątna mostka połączona jest z odczepem jednego IDN przez rezystor R , a z odczepem drugiego przez kondensator C (rys.6.7). Pozwala to na zachowanie struktury podobnej do mostka dwuramiennego z jednoczesną możliwością zrównoważenia układu zmianą przekładni IDN (S_S i S_G).

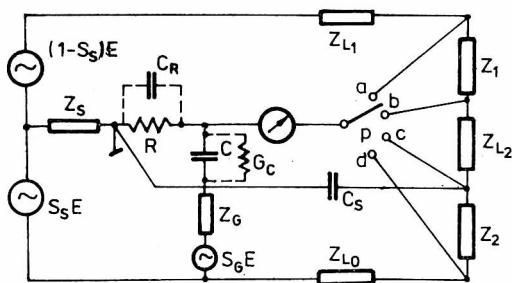


Rys.6.7. Układ komparacji impedancji cewki Z_1 z impedancją kondensatora Z_2

Fig.6.7. Circuit for comparison of the inductor impedance Z_1 with the capacitor impedance Z_2

Stosunek napięcia w punkcie p do napięcia zasilania (rys.6.8) z pominięciem pojemności C_S wynosi:

$$r_p = S_S + (S_G - S_S)(A + jB), \quad (6.9)$$



Rys.6.8. Schemat zastępczy komparatora z rys.6.7, ukazujący parametry pasywnicze: wyjściowe impedancje Z_S i Z_G IDN, impedancje pasywnicze doprowadzeń Z_{L0} , Z_{L1} , Z_{L2} oraz pojemności pasywnicze C_R i C_S

Fig.6.8. Equivalent circuit of the impedance comparator (Fig.6.7) with stray parameters; output impedances Z_S and Z_G of IDN, stray impedances of the connections Z_{L0} , Z_{L1} , Z_{L2} and stray capacitances C_R and C_S

gdzie $A + jB = (Z_R + Z_S)/(Z_R + Z_S + Z_G + Z_C)$. Założono, że impedancje poszczególnych elementów wynoszą: $Z_R = R$, $Z_S = R_S$, $Z_G = R_G$, $Z_C = R_C - j/\omega C$, $R_C = G_C/(\omega C)^2$ ($(G_C/\omega C)^2 \ll 1$). Wartości rezystancji wyjściowych R_S i R_G IDN mieszczą się w zakresie 0-5 Ω . Jeśli dobierze się rezystancję R tak, aby: R_S i $R_G \ll R$ oraz $\omega CR \leq 0,1$, to z wystarczającą dokładnością można wyrazić A i B za pomocą wzorów:

$$A = \frac{(1 + R_S/R) [1 + (R_S + R_G + R_C)/R]}{1 + 2R_C/R + 1/(\omega CR)^2}, \quad (6.10)$$

$$B = \frac{(1 + R_S/R)/(\omega CR)}{1 + 2R_C/R + 1/(\omega CR)^2}. \quad (6.11)$$

Cztery kolejne zrównoważenia mostka, podczas których punkt p przekątnej jest połączony z a , b , c , d , pozwalają na obliczenie stosunku napięcia U_1 na impedancji Z_1 (cewce) do napięcia U_2 na impedancji Z_2 (kondensatorze):

$$U_1/U_2 = (r_a - r_b)/(r_c - r_d) = \alpha_{12} + j\beta_{12}, \quad (6.12)$$

we wzorze tym r_a , r_b , r_c , r_d oznaczają stosunek napięcia odpowiednio w punktach a , b , c , d do napięcia zasilania.

Ponieważ przez impedancje Z_1 i Z_2 płyną te same prądy, więc

$$(R_1 + jX_1)/(R_2 + jX_2) = \alpha_{12} + j\beta_{12}. \quad (6.13)$$

W trzyczaskowych kondensatorach odnośnikowych C_2 pojemność C_S może być stosunkowo duża i wtedy założenie równości prądów płynących

przez impedancje Z_1 i Z_2 nie jest spełnione. Aby wyeliminować wpływ pojemności C_S , należy skorygować wzór (6.9) i obliczyć r_p ze wzoru:

$$r_p = [S_S + (S_G - S_S)(A + jB)] [1 - (S_G - S_S)(A + jB)\omega^2 L_1 C_S], \quad (6.14)$$

po przekształceniu wyrażenia (6.13) otrzymuje się następujące wzory określające parametry cewki:

$$X_1 = \omega L_1 = \frac{1}{\omega C_2} \left[-\alpha_{12} + \frac{G_2}{C_2} \beta_{12} \right], \quad (6.15)$$

$$R_1 = \frac{1}{\omega C_2} \left[\beta_{12} + \frac{G_2}{\omega C_2} \alpha_{12} \right], \quad (6.16)$$

$$Q_1 = \frac{-\alpha_{12} + (G_2/\omega C_2) \beta_{12}}{\beta_{12} + (G_2/\omega C_2) \alpha_{12}}. \quad (6.17)$$

Jeśli porównywane impedancje są większe od kilkuset omów, to można pominąć wpływ połączeń, co oznacza, że $r_a = 1$, $r_b = r_c$ oraz $r_d = 0$ we wzorze (6.12). Układ wystarczy wtedy zrównoważyć tylko raz, gdy punkt p jest włączony w położenie b lub c.

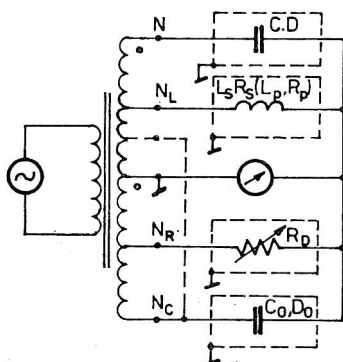
Podane warunki równowagi (6.15)-(6.17) uwzględniają parametry pasytywne, między innymi rezystancje wyjściowe IDN. Stosując opisany układ, Dunn porównywał wzorce indukcyjności o wartościach nominalnych 5:2;1; 0,5; 0,2; i 0,1 H z wzorcami pojemności 0,1, 1, 10 i 100 nF ($12 < 1/(\omega^2 LC) < 50$) dla precyzyjnie określonych częstotliwości 1000 i 400 Hz. Porównania przeprowadzono z dokładnością większą niż 30 ppm w całym zakresie mierzonych indukcyjności.

Układ komparatora proponowany przez Dunna i Tsao umożliwia absolutne określenie indukcyjności z bardzo dużą dokładnością. Ważną zaletą tego układu jest możliwość pracy przy małych impedancjach Z_1 , Z_2 . Natomiast podstawową wadą jest konieczność uwzględnienia wielu parametrów resztkowych, co komplikuje warunki równowagi oraz to, że przekątna mostka nie jest na potencjale zerowym.

6.6. Porównanie indukcyjności z pojemnością za pomocą wieloramiennych układów transformatorowych

Jak wykazano w punkcie 6.1 wieloramiennie mostki transformatorowe umożliwiają porównywanie indukcyjności z pojemnością (L-C). Autor analizował różne warianty mostków wieloramiennych pod kątem ich przydatności do precyzyjnego porównania indukcyjności z pojemnością [91,97,98]. Badania wykazały, że najdokładniejsze pomiary otrzymuje się w układzie z transformatorem napięciowym. Stosowanie dodatkowo komparatora prądów umożliwia wprawdzie porównanie L-C w szerszym zakresie ich wartości,

ale z większym błędem pomiaru. Zaproponowany przez autora układ (rys.6.9) został zrealizowany w dwóch wersjach - jako mostek zestawiony i jako



Rys.6.9. Wieloramienny transformatorowy mostek do precyzyjnych porównań L-C
Fig.6.9. Multi-arm ratio transformer bridge for precise L-C comparisons

być włączony zarówno na dodatnie, jak i ujemne odczepy transformatora (rys.6.9) w zależności od potrzeb.

Ze względu na zasadę działania układ najlepiej nadaje się do pomiarów indukcyjności L_P i rezystancji R_P w równoległym układzie zastępczym cewki, dla którego warunki równowagi są następujące:

$$\omega^2 C L_P N/N_L \left[1 \mp C_0 N_C/C_N \right] = 1, \quad (6.18)$$

$$R_P N_R = N_L R_0; \quad (6.19)$$

znak "-" występuje, gdy kondensator C_0 włączony jest w sposób zaznaczony linią ciągłą, znak "+" - linią przerywaną (rys.6.9). Warunek równowagi (6.18) przypomina wzór (6.6) transfera L-C Hillhouse'a z tą różnicą, że występuje tu człon N/N_L , który umożliwia stosowanie mniejszych, bardziej praktycznych, wartości porównywanych elementów L i C.

W praktyce częściej zachodzi potrzeba określenia parametrów cewki L_S , R_S lub Q w szeregowym układzie zastępczym. Warunki równowagi mostka dla takiego schematu są następujące:

$$\omega^2 C L_S N/N_L (1 \mp \gamma)(1 + 1/Q^2) = 1, \quad (6.20)$$

$$Q = (1 \mp \gamma) \omega C R_0 N/N_R, \quad (6.21)$$

gdzie $Q = \omega L_S/R_S$, jest dobrocią cewki, $\gamma = C_0 N_C/N_N$.

Wyznaczenie indukcyjności L_S ze wzoru (6.20) wymaga obliczenia dobroci Q ze wzoru (6.11). Porównanie jest korzystne, gdy indukcyjność $L_S = 100$ mH, a pojemność $C = 10$ nF dla częstotliwości 796 Hz ($\omega = 5 \times 10^3$ rad/s), 1000 Hz i 1592 Hz ($\omega = 10^4$ rad/s). Stosunki zwojów N/N_L są wtedy równe odpowiednio 40, 25, 10. Błędy komparacji L-C można podzielić na dwie grupy. Do pierwszej należą błędy spowodowane niedokładnością użytych elementów występujących w warunkach równowagi (6.20) i (6.21), a do drugiej błędy spowodowane parametrami resztkowymi. Analizy błędów dokonano dla pomiarów indukcyjności w szeregowym układzie zastępczym.

Błędy komparacji spowodowane niedokładnością elementów. Jeśli założy się, że błędy względne $\delta\omega$ pulsacji ω i δC pojemności C są znacznie mniejsze od błędów δC_0 , pojemności C_0 i δR_0 rezystancji R_0 , to błąd $\delta(L-C)$ komparacji L-C wynosi [101]:

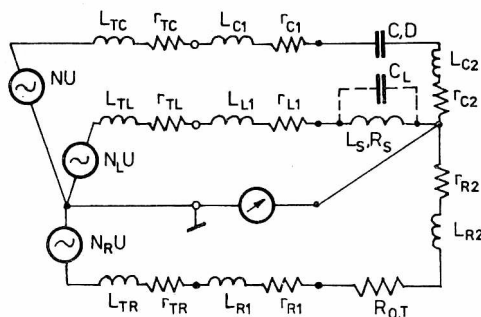
$$\delta(L-C) = 2\delta\omega + |\gamma|\delta C_0 + \frac{2}{1+Q^2}\delta R_0. \quad (6.22)$$

Dzięki stosowaniu generatora stabilizowanego kwarcem łatwo można utrzymać składową $2\delta\omega$ błędu na poziomie mniejszym niż 1 ppm. Wpływ błędu δC_0 zależy od wartości współczynnika $|\gamma|$, ta z kolei głównie od dobroci cewki ($|\gamma| \approx 1/Q^2$). Wartość pojemności regulacyjnej C_0 musi być dokładnie określona szczególnie dla małych częstotliwości. Dobroć typowego wzorca indukcyjności dla częstotliwości 1 kHz wynosi około 10, dlatego wpływ δC_0 i δR_0 na błąd komparacji $\delta(L-C)$ jest dla tej częstotliwości kilkadziesiąt razy mniejszy niż wynoszą wartości δC_0 i δR_0 . Drugi i trzeci człon wzoru (6.22) może być sprowadzony dla częstotliwości $f \geq 1$ kHz do poziomu kilku ppm, a więc pomijalnie małego.

Błędy komparacji spowodowane parametrami pasożytniczymi. Podstawowymi parametrami pasożytniczymi układu są pojemności, indukcyjności i rezystancje doprowadzeń i transformatora stosunkowego, błędy podziału napięcia, parametry resztkowe kondensatorów C i C_0 oraz stała czasowa rezystora R_0 . Omówione zostaną kolejno wpływy tych parametrów.

Ze względu na to, że układ zawiera tylko elementy włączone równolegle, a transformator stosunkowy ma bardzo małą impedancję wyjściową, można pominąć wpływ pojemności pasożytniczych. Wyjątek stanowi pojemność C_L bocznikująca cewkę, która powoduje efektywny wzrost indukcyjności L_S zgodnie ze wzorem $L_S(1 + \omega^2 L_S C_L)$. Pojemność C_L występuje w pomiarach dwuzaciskowych.

Podstawowe rezystancje i indukcyjności pasożytnicze zaznaczono na rys.6.10, gdzie nie uwzględniono ramienia kondensatora C_0 , gdyż parametry resztkowe tego ramienia wnoszą pomijalnie małe błędy.



Rys.6.10. Schemat zastępczy komparatora L-C z zaznaczonymi indukcyjnościami i rezystancjami pasożytniczymi
Fig.6.10. Equivalent circuit of the L-C comparator showing main stray inductances and resistances

Sumaryczna indukcyjność $l_c = l_{rc} + l_{c1} + l_{c2}$ ramienia C zwiększa pojemność C o wartość $\omega^2 C^2 l_c$ [98]. W mniej korzystnych warunkach ($\omega = 10^4$ rad/s, $C = 10$ nF, $l_c = 10$ μ H) względny wzrost wartości pojemności C wynosi 10 ppm. Wpływ pojemności l_c powinien być kontrolowany i w razie potrzeby uwzględniony w formie poprawki.

Wypadkowa indukcyjność $l_L = l_{TL} + l_{L1}$ ramienia cewki dodaje się bezpośrednio do mierzonej indukcyjności l_s . Indukcyjność l_L może być utrzymana na poziomie 1-2 μ H, co np. dla $l_s = 100$ mH daje błąd 10-20 ppm. Indukcyjności pasożytnicze ramion L i C (a szczególnie ramienia L) należą do podstawowych źródeł błędów pomiaru i powinny być kontrolowane i w razie potrzeby uwzględnione w formie poprawki.

Rezystancje resztkowe ramion wnoszą pomijalnie małe błędy komparacji L-C z wyjątkiem rezystancji $r_c = r_{TC} + r_{C1} + r_{C2}$ ramienia kondensatora odniesienia. Rezystancja r_c i współczynnik strat D kondensatora C powodują względny błąd określenia indukcyjności w odniesieniu do pojemności C

$$- 2 (r_c \omega C + D)/Q.$$

Błąd ten może osiągnąć znaczne wartości do kilkudziesięciu ppm i dlatego należy stosować kondensatory o minimalnym współczynniku strat i transformatory o małej rezystancji wyjściowej.

Błędy podziału napięcia transformatora stosunkowego mogą być utrzymane na poziomie lepszym niż 2 ppm, co jest wystarczające do porównań z dokładnością 10 ppm.

Jednym z istotnych źródeł błędów może być stała czasowa T rezystora R_0 , jak również indukcyjności pasożytnicze l_{TR} , l_{R1} i l_{R2} (rys. 6.10). Stała czasowa T powoduje błąd T/τ , gdzie τ jest stałą czasową cewki indukcyjnej. Dla typowych wzorców indukcyjności stała czasowa

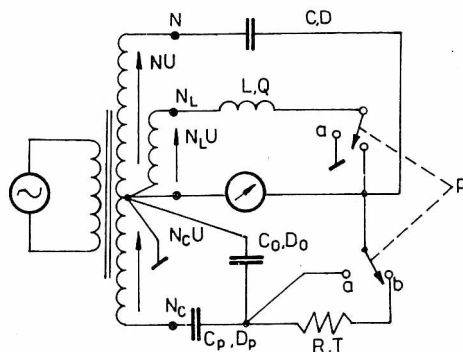
wa τ wynosi 10^{-3} s. Aby zapewnić dokładność pomiaru 10 ppm, stała czasowa rezystora R_0 powinna mieć poziom kilku $\times 10^{-9}$ s. Należy więc stosować odpowiednie rozwiązania konstrukcyjne rezystorów, np. cienkowarstwowe, a wartości rezystancji R_0 dobierać na tyle duże (przez dobór liczby zwojów N_R), aby wpływ indukcyjności L_{TR} , L_{R1} i L_{R2} był pomijalnie mały.

Przedstawiony układ może służyć do komparacji indukcyjności z pojemnością z dokładnością około 10 ppm. Otrzymanie tak dużej dokładności wymaga dobrania odpowiednich wzorców (L około 100 mH, C około 10 μ F) oraz utrzymania temperatury wzorców z dokładnością 0,1 $^{\circ}$ C. Zaleca się stosowanie wzorców trzyczaskowych z zamkniętym polem magnetycznym. Podstawowymi zaletami układu są: odniesienie indukcyjności wprost do pojemności oraz praca wszystkich elementów R , L , C w równoległym układzie zastępczym. Wadą układu jest wyznaczanie indukcyjności w równoległym układzie zastępczym, co powoduje, że pojemność regulacyjna C_0 wypada duża.

6.7. Kombinowany mostek transformatorowy do precyzyjnych porównań indukcyjności z pojemnością

Omówiony poprzednio wieloramienny układ do porównań indukcyjności z pojemnością ma oprócz wielu zalet również wady, z których najistotniejszą jest równoległy schemat zastępczy mierzonej cewki.

W wyniku badań nad przystosowaniem mostków wieloramiennych do pomiarów w szeregowym układzie zastępczym autor opracował kilka rozwiązań [91,98,100,101]. Jedno z nich, nazwane kombinowanym mostkiem transformatorowym do porównań L - C , przedstawiono w tym rozdziale. Schemat kombinowanego mostka obrazujący jego zasadę działania przedstawiono na rys. 6.11.



Rys.6.11. Schemat kombinowanego mostka do porównań L - C
Fig.6.11. Combined transformer bridge for L - C comparisons

Przełącznik P służy do zmiany konfiguracji mostka: pozycja b oznacza mostek podstawowy, pozycja a - mostek pomocniczy. Mostek podstawowy jest wieloramiennym mostkiem transformatorowym, w którym jedno ramie tworzy cewka indukcyjna L, a drugie kondensator C. Trzecie ramie złożone z kondensatorów C_p i C_o oraz rezystora R umożliwia pomiary indukcyjności w szeregowym układzie zastępczym. Mostek pomocniczy (pozycja a przełącznika P) jest dwuramiennym mostkiem transformatorowym przeznaczonym do porównania pojemności C i C_p . Cewka L, kondensator C_o i rezystor R są tak włączone, aby w minimalnym stopniu zmieniały prąd pobierany z transformatora po zmianie konfiguracji układu.

Warunki równowagi mostka podstawowego przy założeniu, że współczynniki strat D , D_o i D_p kondensatorów odpowiednio C, C_o i C_p oraz stała czasowa T rezystora R są pomijalnie małe, wyrażają się wzorami [91]:

$$X = \omega L = \frac{N_L}{\omega CN} \frac{H^2 + 1 - C_p N_C / CN}{H^2 + (1 - C_p N_C / CN)^2}, \quad (6.23)$$

$$Q = HCN / C_p N_C - (1 - CN / C_p N_C) / H, \quad (6.24)$$

gdzie $H = \omega(C_o + C_p)R$.

Jeśli doda się warunek

$$CN = C_p N_C, \quad (6.25)$$

to równania (6.23) i (6.24) upraszczają się:

$$\omega^2 LC N / N_L = 1, \quad (6.26)$$

$$Q = \omega(C_o + C_p)R, \quad \tau = (C_o + C_p)R. \quad (6.27)$$

Z równań tych można obliczyć indukcyjność L i dobroć Q cewki, jeśli pojemność C i pulsacja ω znane są dokładnie. Wzór (6.26) przypomina warunek równowagi szeregowego układu rezonansowego. Występowanie członu N/N_L ułatwia dobór wartości porównywanych elementów L i C.

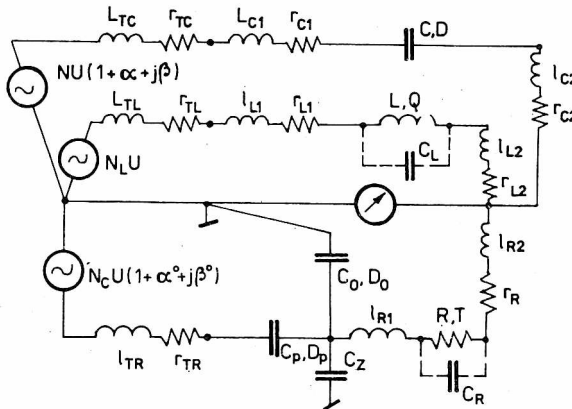
W praktyce warunek równowagi (6.25) jest spełniony w przybliżeniu, co wprowadza dodatkowy błąd podczas stosowania wzorów (6.26) i (6.27). Niech $\delta = 1 - C_p N_C / CN$ będzie względnym błędem określenia warunku (6.25), wtedy błąd względny δL obliczenia indukcyjności z uproszczonego wzoru (6.26) jest w przybliżeniu równy δ / Q^2 . Zazwyczaj $Q^2 \geq 10$, aby więc dokładność pomiaru nie przekraczała 10 ppm, wartość $|\delta|$ powinna być mniejsza niż 2×10^{-5} . Warunek ten jest trudny i do jego spełnienia służy mostek pomocniczy (por. wzór (6.25)). Jeśli współczynniki strat ($\text{tg} \delta$) D i D_p kondensatorów C i C_p są na poziomie 0,0002 lub mniejszym, to mostek pomocniczy może być zrównoważony z odpowiednią dokładnością tyl-

ko za pomocą kondensatora C_p . W przeciwnym razie należałoby dodać dodatkowe ramię w celu zrównoważenia różnicy między D i D_p .

Mostek kombinowany można równoważyć kilkoma sposobami. W układzie wykonanym dla PKNMiJ mostek podstawowy równoważony jest za pomocą pojemności C (warunek (6.26)) i pojemności C_o (warunek (6.27)), przy czym regulacja pojemności C odbywa się w specjalnym układzie włączonym przez dodatkowy IDN. Mostek pomocniczy regulowany jest za pomocą pojemności C_p . Oba mostki równoważone są na przemian.

Badania wykazały, że do otrzymania odpowiednio dobrej równowagi wystarczają trzy kolejne zmiany.

Źródła błędów. Dokładność pomiaru indukcyjności o wartości około 10 ppm wymaga rozważenia wpływu parametrów pasożytniczych: przede wszystkim: błędów transformatora stosunkowego, szeregowych rezystancji i indukcyjności, parametrów resztkowych elementów C , C_o , C_p i R oraz pojemności bocznikujących (rys.6.12).



Rys.6.12. Najważniejsze parametry pasożytnicze mostka kombinowanego

Fig.6.12. Main stray parameters of the combined transformer bridge

Pojemności bocznikujące wnoszą pomijalnie małe błędy z wyjątkiem pojemności C_L bocznikującej mierzoną cewkę, na którą składają się pojemności między zaciskami cewki i między przewodami doprowadzającymi. Pojemność C_L jest źródłem błędów w pomiarach dwuzaciskowych.

Składowe rzeczywiste α i α^0 błędów transformatora stosunkowego wpływają w pomijalnie małym stopniu na dokładność pomiaru, jeśli nie przekraczają wartości kilku ppm, natomiast składowe urojone β i β^0 powodują względny błąd pomiaru indukcyjności równy $2(\beta - \beta^0)/Q$, który jest na ogół pomijalnie mały (z wyjątkiem pomiarów przy małych częstotliwościach).

Stała czasowa T powoduje błąd pomiaru indukcyjności T/τ .

Zapewnienie odpowiedniej dokładności wymaga stosowania rezystorów o stałej czasowej T nie większej niż około 2×10^{-9} s. Należy również minimalizować indukcyjności doprowadzeń L_{R1} , L_{R2} i pojemność bocznikującą C_R .

Współczynniki strat D_o i D_p kondensatorów C_o i C_p powodują względny błąd określenia indukcyjności $RC_o(D_p - D_o)/\omega\tau^2$. Dla typowych danych wartość tego błędu nie przekracza kilku ppm i jest pomijalnie mała.

Współczynnik strat kondensatora C i całkowita rezystancja $r_c = r_{TC} + r_{C1} + r_{C2}$ ramienia (rys.6.10) powodują błąd pomiaru indukcyjności określony wzorem $-2(r_c C + D/\omega)/\tau$. Dla typowych danych błąd ten może być na poziomie 10 ppm. Musi więc być starannie minimalizowany przez stosowanie kondensatorów o małych stratach i transformatorów stosunkowych o minimalnej rezystancji wyjściowej.

Jednym z głównych źródeł błędów są indukcyjności pasożytnicze ramienia kondensatora C i cewki L . Indukcyjność $l_c = l_{TC} + l_{C1} + l_{C2}$ ramienia kondensatora C (rys.6.10) powoduje efektywny wzrost pojemności C o wartość $\omega^2 l_c C^2$. Natomiast indukcyjność $l_L = l_{TL} + l_{L1} + l_{L2}$ ramienia cewki dodaje się bezpośrednio do indukcyjności L . Stąd względny błąd pomiaru indukcyjności spowodowany indukcyjnościami l_c i l_L ma postać $(l_L + l_c N_L/N)/L$. Indukcyjność l_L wynosi około 1 μH , natomiast l_c - kilka μH . Wynika stąd, że aby osiągnąć dokładność 10 ppm pomiaru indukcyjności mniejszych niż 100 mH, należy uwzględnić l_L i l_c w formie poprawki. Pozostałe parametry pasożytnicze wprowadzają błędy na poziomie 1 ppm i mniejszym [100] i nie będą obecnie omawiane.

Analiza i wyniki badań kombinowanego mostka wykonanego dla PKNMiJ potwierdziły możliwość pomiaru z dokładnością około 10 ppm [100]. Mostek ten jest przyrządem z bezpośrednim odczytem różnicy wartości mierzonej i nominalnej indukcyjności, co jest ważną zaletą w pomiarach precyzyjnych.

Najdokładniejsze pomiary uzyskano dla cewek dwuzaciskowych o indukcyjności 20-100 mH i dla cewek trzyczaciskowych o wartościach 100 mH - 1 H w zakresie częstotliwości 200-2000 Hz.

6.8. Podsumowanie

Mostki transformatorowe omówione w tym rozdziale umożliwiają bardzo dokładne pomiary indukcyjności w zakresie małych częstotliwości. Możliwych rozwiązań tych mostków jest bardzo dużo i można się spodziewać pojawienia nowych. Mostki transformatorowe umożliwiają zarówno precyzyjne wzajemne porównanie indukcyjności, jak również określenie indukcyjności w odniesieniu do pojemności. Do wzajemnych porównań indukcyjności zalecany jest układ Hillhouse'a (rozdz.6.3), natomiast do określenia L w od-

niesieniu do C - mostek kombinowany (rozdz.6.7) lub komparator Dunna i Tsao (rozdz.6.5). Otrzymane w tych układach dokładności około 10 ppm są na poziomie możliwości pomiarowych (bariery stabilnościowej) produkowanych obecnie wtórnych wzorców indukcyjności.

Główną wadą transformatorowych mostków są złożone warunki równowagi. Powoduje to, że mostki transformatorowe stosowane są zazwyczaj do najdokładniejszych pomiarów - na poziomie 0,01% i wyższym. Precyzyjne pomiary indukcyjności o dokładności 0,1-0,01% są często wykonywane za pomocą klasycznych mostków typu Wheatstone'a. Można się jednak spodziewać, że w miarę rozwoju zastosowań mikroprocesorów, które mogą pamiętać i uwzględniać parametry pasożytnicze, rola mostków transformatorowych będzie rosła również w zakresie mniejszych dokładności pomiarów (0,1-0,01%). Przykładem może tu być komparator impedancji opracowany przez Halla [48] z General Radio, w którym mikroprocesor steruje pomiarem i oblicza relację między porównywanymi wzorcami.

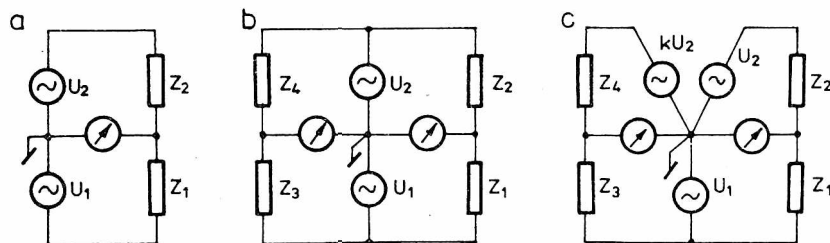
7. Pomiary indukcyjności mostkami podwójnie równoważonymi

Mostki podwójnie równoważone zostały opracowane przez Cutkosky'ego [19] i Thompsona [132] do absolutnego określenia rezystancji w odniesieniu do liczalnych wzorców pojemności. W 1969 r. Millea i Ilie [88] opublikowali ogólną teorię tych mostków i zbadali ich możliwości do wzajemnych porównań między elementami RLC. Mostki podwójnie równoważone są stosowane do precyzyjnych porównań między impedancjami, których kąt przesunięcia wynosi $\pi/2$ lub π np. rezystancji z pojemnością. W rozdziale tym omówiono układy mostków podwójnie równoważonych, szczególnie przydatnych do porównań indukcyjności z rezystancją i pojemnością.

7.1. Zasada pracy

Budowę mostka podwójnie równoważonego przedstawiono na rys. 7.1. W części a umieszczono podstawowy element składowy mostka podwójnie równoważonego, jakim jest znany dobrze mostek "pojedynczo równoważony". Składa się on z dwóch porównywalnych impedancji Z_1 i Z_2 oraz z dwóch źródeł napięcia tej samej częstotliwości o napięciach U_1 i U_2 . Źródłami napięcia są zazwyczaj transformatory stosunkowe.

Przez połączenie dwu mostków pojedynczo równoważonych zasilanych ze wspólnych generatorów otrzymuje się mostek podwójnie równoważony z dwoma generatorami (rys.7.1b). Jeśli zamiast generatora U_2 zastosuje się dwa sprzężone generatory U_2 i $k U_2$, to otrzyma się mostek podwójnie równoważony z trzema generatorami (rys.7.1c). Teoretycznie wartość k może być dowolną liczbą zespoloną. Jeżeli jednak stosuje się silnie sprzężone ramiona indukcyjne, to k jest liczbą wymierną (rzeczywistą) równą



Rys.7.1. Układy mostkowe do porównań impedancji: a - mostek pojedynczo równoważony, b - mostek podwójnie równoważony z dwoma generatorami, c - mostek podwójnie równoważony z trzema generatorami

Fig.7.1. Bridges for impedance comparisons; a) single-balanced bridge, b) double-balanced bridge with two oscillators, c) double-balanced bridge with three oscillators

stosunkowi liczby zwojów IDN ze znakiem "+" lub "-", zależnie od sposobu połączenia uzwojeń. Mostek podwójnie równoważony może być sprowadzony do mostka z dwoma generatorami, jeśli przyjmie się $k = 1$. Dlatego dalsza analiza zostanie ograniczona do najczęściej stosowanych mostków podwójnie równoważonych z trzema generatorami. Warunek równowagi tego mostka określa wzór

$$Z_1 Z_4 = k Z_2 Z_3 \quad (7.1)$$

Równanie (7.1) przypomina warunek równowagi mostka czteroramiennego z tym, że występuje tu dodatkowo liczba k , która pozwala na rozszerzenie klasy tych mostków.

7.2. Podstawowe własności

Niech symbole Z_1, Z_2, Z_3 i Z_4 oznaczają "czyste" impedancje, tzn. impedancje z kątami fazowymi 0 lub $\pi/2$. Rzeczywiste impedancje ramion mostka można zapisać jako:

$$Z_1(1 + j\varphi_1), \quad Z_2(1 + j\varphi_2), \quad Z_3(1 + j\varphi_3) \quad \text{i} \quad Z_4(1 + j\varphi_4),$$

gdzie $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ są kątami fazowymi ramion. Podstawiając powyższe wyrażenia do równania (7.1) i porównując część "rzeczywistą" i "urojoną", otrzymuje się warunki:

$$Z_1 Z_4 (1 - \varphi_1 \varphi_4) = k Z_2 Z_3 (1 - \varphi_2 \varphi_3), \quad (7.2)$$

$$(\varphi_1 + \varphi_4)(1 - \varphi_1 \varphi_4) = (\varphi_2 + \varphi_3)(1 - \varphi_2 \varphi_3), \quad (7.3)$$

tak więc zależności między impedancjami nie zależą od napięć U_1 i U_2 .

Zazwyczaj kąty fazowe ramion spełniają założenia $\varphi_1, \varphi_4 \ll 1$ oraz $\varphi_2, \varphi_3 \ll 1$, przy których warunki równowagi można uprościć do:

$$Z_1 Z_4 = k Z_2 Z_3, \quad (7.4)$$

$$\varphi_1 + \varphi_4 = \varphi_2 + \varphi_3. \quad (7.5)$$

Takie same, proste warunki równowagi otrzymuje się dla symetrycznych kątów fazowych, tj. gdy $\varphi_1 = \varphi_2$ oraz $\varphi_3 = \varphi_4$. Jest to bardzo przydatne, gdy mierzonymi elementami są cewki indukcyjne, odznaczające się małą "czystością impedancji".

Oprócz wymienionych warunków równowagi, w celu zrównoważenia obu mostków składowych pojedynczo zrównoważonych niezbędne jest spełnienie następującego równania:

$$U_1 Z_2 (1 + j\varphi_2) + U_2 Z_1 (1 + j\varphi_1) = 0. \quad (7.6)$$

Dlatego przynajmniej jedno z napięć U_1 lub U_2 powinno być regulowane zarówno w amplitudzie, jak i fazie.

Ogólnie mostek może być zrównoważony przez regulację czterech z następujących parametrów: $Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, |U_1/U_2|, \arg(U_1/U_2)$. Osiągnięcie warunku równowagi jest zagadnieniem stosunkowo złożonym, gdyż zrównoważenie jednego składowego mostka, np. z impedancjami Z_1 i Z_2 , powoduje rozrównoważenie drugiego, z impedancjami Z_3, Z_4 . Millea i Ilie opracowali ogólną procedurę równoważenia, przystosowaną do dowolnego mostka podwójnie zrównoważonego. Opracowane są również procedury dostosowane do poszczególnych rodzajów mostków.

7.3. Przykłady poszczególnych rozwiązań mostków

Istnieje duża liczba możliwych rozwiązań mostków podwójnie zrównoważonych. Wiele z nich ma jednak stosunkowo ograniczone zastosowanie. Najbardziej użyteczne są mostki "iloczynowe", których warunki równowagi są takie, że nie można ich otrzymać w klasycznych mostkach transformatorowych. Trzy z tych układów szczególnie przydatnych w precyzyjnych pomiarach indukcyjności przedstawiono wraz z warunkami równowagi w tab. 7.1. Impedancje elementów mostków zapisano za pomocą następujących wyrażeń:

rezystory: $R(1 + j\varphi_R) = R(1 + j\omega T)$, $\varphi_R = \omega T$;

cewki: $j\omega L(1 - j\varphi_L) = j\omega L(1 - j/Q)$, $\varphi_L = 1/Q$;

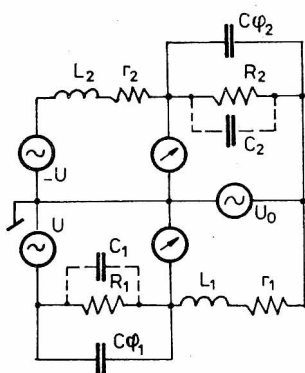
kondensatory: $(1 + j\varphi_C)/j\omega C = (1 + jD)/j\omega C$, $\varphi_C = D$.

Założono, że D i ωT nie przekraczają wartości 3×10^{-4} oraz że $Q \geq 10$. Wyrażenia wnoszące błędy na poziomie mniejszym niż 1×10^{-7} zostały pominięte.

Mostek rezystancyjno-indukcyjnościowy (tab. 7.1a). Mostek zrównoważony jest za pomocą kondensatorów C_1 i C_2 włączonych równolegle do rezystorów R_1 i R_2 . Warunki równowagi podano w tab. 7.1. Jeśli $Q_1 = Q_2 = Q$,

Układy mostków podwójnie równoważonych

a) Mostek rezystancyjno-indukcyjnościowy



$$\frac{R_1 R_2}{\omega^2 L_1 L_2} =$$

$$= [1 - 1/(Q_1 Q_2)] [1 - (\theta_1 - T_1)(\theta_2 - T_2)] +$$

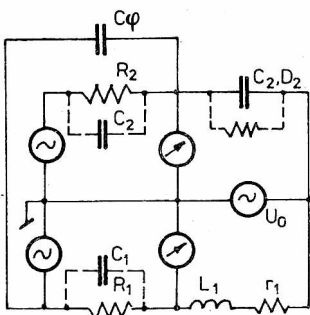
$$+ (1/Q_1 + 1/Q_2)(\theta_1 + \theta_2 - \omega T_1 - \omega T_2),$$

$$\frac{Q_1 Q_2}{Q_1 Q_2 - 1} = \frac{\theta_1 - \omega T_1 + \theta_2 - \omega T_2}{1 - (\theta_1 - \omega T_1)(\theta_2 - \omega T_2)},$$

gdzie $\theta_1 = \omega C_{\varphi 1} R_1$, $\theta_2 = \omega C_{\varphi 2} R_2$

b) Mostek rezonansowy

b' - do pomiaru indukcyjności w szeregowym układzie zastępczym

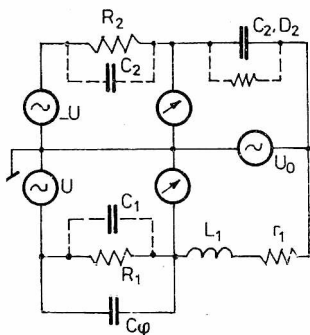


$$\omega^2 L_1 C_2 = \frac{R_1}{R_2} [1 + (\omega T_1 + D_2)/Q],$$

$$1/Q - \omega T_2 + (\omega T_1 + D_2)(1 + 1/Q^2) =$$

$$= \omega C_{\varphi} R_2$$

b'' - do pomiaru indukcyjności w równoległym układzie zastępczym



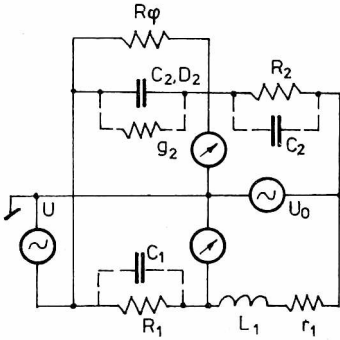
$$\omega^2 L_1 C_2 = \frac{R_1}{R_2} [1 + (\omega T_2 - D_2)/Q],$$

$$1/Q + \omega T_1 - (\omega T_2 - D_2)(1 + 1/Q^2) =$$

$$= \omega C_{\varphi} R_1$$

c) Mostek Maxwella

c' - do pomiaru indukcyjności w szeregowym układzie zastępczym

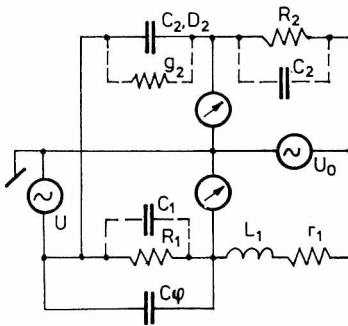


$$L_1 = C_2 R_1 R_2 \left[1 + (T_1 + T_2)/\tau_1 \right],$$

$$\begin{aligned} 1/Q_1 - D &= \omega(T_1 + T_2)(1 + 1/Q^2) = \\ &= 1/(\omega C_2 R_\phi), \end{aligned}$$

$$\text{gdzie } \tau_1 = Q_1/\omega$$

c'' - do pomiaru indukcyjności w równoległym układzie zastępczym



$$L_{1p} = C_2 R_1 R_2 \left[1 - T_2/\tau_1 + D/(\omega \tau_1) \right],$$

$$\begin{aligned} 1/Q_1 &= \omega T_1 + (\omega T_2 - D_2)(1 + 1/Q_1^2) = \\ &= \omega C_\phi R_1 \end{aligned}$$

$T_1 = T_2 = T$ oraz $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ (tab.7.1), to warunki równowagi przyjmują prostą postać

$$R_1 R_2 / (\omega^2 L_1 L_2) = (1 + 1/Q^2)^2,$$

$$1/Q + \omega T = \theta.$$

Jeśli z kolei R_1 i R_2 oraz L_1 i L_2 mają odpowiednio tę samą wartość nominalną, to

$$\bar{R} = \omega \bar{L} (1 + 1/Q^2)$$

lub

$$\bar{R} = \omega \bar{L}_p ,$$

gdzie $\bar{R} = (R_1 + R_2)/2$, $\bar{L} = (L_1 + L_2)/2$, $\bar{L}_p = \bar{L} (1 + 1/Q^2)$.

Mostek rezystancyjno-indukcyjnościowy najlepiej nadaje się do porównań średniej arytmetycznej indukcyjności cewek o tej samej wartości nominalnej ze średnią arytmetyczną rezystancji. Najdokładniejsze pomiary uzyskuje się, gdy obie cewki mają zbliżone parametry resztkowe ($Q_1 \approx Q_2$).

Mostek rezonansowy. Istnieje wiele możliwych realizacji mostków rezonansowych. Dwa z nich, wykazujące najwięcej zalet w precyzyjnych pomiarach, przedstawiono w tab.7.1. Pierwszy z wymienionych - mostek b' przeznaczony jest do pomiarów w układzie szeregowym, a drugi b'' - w równoległym schemacie zastępczym. Pierwszy z nich równoważony jest za pomocą "ujemnej" pojemności C_ϕ włączonej równolegle do rezystora R_2 . Drugi równoważony jest za pomocą pojemności C_ϕ włączonej równolegle do rezystora R_1 . Mostki nadają się do precyzyjnych porównań L-C.

Mostek Maxwella. Dwa warianty tego mostka, jeden do pomiarów w szeregowym, drugi w równoległym układzie zastępczym, przedstawiono wraz z warunkami równowagi w tab.7.1c.

Pierwszy z nich c' jest w rzeczywistości klasycznym mostkiem Maxwella-Wiena z ziemią Wagnera, wykorzystującym rezystor R do regulacji. Drugi mostek regulowany jest za pomocą kondensatora C_ϕ , włączonego równolegle do rezystora R_1 . Oba warianty mostków Maxwella-Wiena nadają się dobrze do precyzyjnych pomiarów indukcyjności w odniesieniu do pojemności i rezystancji.

Przeprowadzona przez autora analiza wymienionych mostków wykazała, że najlepszymi właściwościami w pomiarach indukcyjności odznacza się mostek Maxwella. Potwierdzają to również wyniki innych badań [139].

7.4. Podsumowanie

Mostki podwójnie równoważone-charakteryzują się wieloma zaletami. Nadają się szczególnie do porównań indukcyjności z pojemnością i rezystancją (jak również rezystancji z pojemnością). Nie są one jednak dotychczas często stosowane w precyzyjnych pomiarach indukcyjności prawdopodobnie między innymi z powodu małej "elastyczności" tych mostków w przystosowaniu ich do porównań elementów dla różnych częstotliwości i różnych wartości nominalnych. Zastosowanie ogranicza również złożona budowa i kłopotliwe równoważenie tych mostków. Najprawdopodobniej rola ich będzie rosła w miarę rozwoju techniki pomiarowej.

WYZNACZANIE ELEMENTÓW SCHEMATÓW ZASTĘPCZYCH CEWEK INDUKCYJNYCH

Do opisu złożonych zjawisk zachodzących w cewkach indukcyjnych stosowano schematy zastępcze. Różne rodzaje i przeznaczenia tych schematów omówiono w rozdz. 2 bez podania doświadczalnych metod wyznaczania ich elementów. Analiza metod pomiaru impedancji cewek indukcyjnych wykazuje, że stosowane metody umożliwiają wyznaczenie dla każdej częstotliwości tylko dwóch parametrów, np. części rzeczywistej (rezystancji) i urojonej (reaktancji) impedancji cewki. Do wyznaczenia parametrów schematów zastępczych złożonych zazwyczaj z większej liczby elementów niezbędne są metody pośrednie polegające na wyznaczeniu zmian rezystancji i reaktancji (lub indukcyjności L_g) w funkcji częstotliwości.

W pomiarach precyzyjnych ważne jest określenie zmian indukcyjności L_g w szeregowym układzie zastępczym w funkcji częstotliwości, które opisano za pomocą schematu zastępczego złożonego z indukcyjności i pojemności (rys.2.1b) własnej cewki. Pojemność własną cewki (lub częstotliwość rezonansu własnego) wyznacza się za pomocą metody Rietza lub pochodnej [63]. Metody te przedstawiono w rozdz. 8. W rozdziale 9 podano proponowaną przez autora metodę wyznaczania pojemności własnej cewek, opartą na metodzie regresji liniowej. Dla ekranowanych wzorców indukcyjności opis zmian indukcyjności w funkcji częstotliwości jedynie za pomocą pojemności własnej cewki nie jest wystarczający. Autor zaproponował rozwiązanie tego problemu przez wprowadzenie bardziej złożonego schematu zastępczego i wyznaczenie jego elementów metodą najmniejszych kwadratów [92] (rozdz. 10). W rozdziale 11 przedstawiono proponowaną przez autora metodę wyznaczania elementów schematów zastępczych cewek indukcyjnych aproksymujących impedancję cewki.

8. Wyznaczanie pojemności własnej cewek indukcyjnych metodą Rietza

W zastosowaniach praktycznych wymaga się zazwyczaj, aby schemat zastępczy miał prostą strukturę i możliwie najdokładniej aproksymował zmiany impedancji cewki lub tylko jej indukcyjności w funkcji częstotliwości. Elementy schematu zastępczego powinny być stałe - niezależne od częstotliwości. W zakresie częstotliwości znacznie mniejszych od częstotliwości rezonansu własnego cewki do aproksymacji impedancji jest stosowany najczęściej schemat z rys.2.1a, natomiast do aproksymacji indukcyjności - schemat z rys.2.1b. Dla obu tych schematów zmiany indukcyj-

ności określone są głównie przez pojemność własną cewki C_0 . Tylko dla cewek o bardzo prostym kształcie można obliczyć wartość C_0 na podstawie wymiarów geometrycznych [63]. W większości przypadków pojemność C_0 musi być wyznaczana eksperymentalnie.

Pierwsza propozycja pomiaru pojemności własnej cewki pochodzi od Rietza [116]. W latach późniejszych opracowano wiele metod pomiaru pojemności własnej cewek [79, 104, 119], które jak wykazał Jellonek [63] są modyfikacjami metody Rietza. Ciekawą metodę przydatną jednak dla wyższych częstotliwości zaproponował Ebert [33, 32]. W rozdziale tym zostanie omówiona metoda Rietza i jej modyfikacje charakteryzujące się najlepszymi parametrami w zakresie małych częstotliwości.

Jeśli przyjmie się schemat zastępczy z rys. 2.1a, to po doprowadzeniu do rezonansu własnego zachodzi wzór

$$\omega_0^2 L_0 C_0 = 1 - R_0^2 C_0 / L_0, \quad (8.1)$$

który umożliwia określenie wartości pojemności C_0 , gdy są znane wartości częstotliwości rezonansu własnego ω_0^2 , indukcyjności L_0 i rezystancji R_0 cewki. Zazwyczaj człon $R_0^2 C_0 / L_0$ jest pomijalnie mały i pojemność C_0 można obliczyć ze wzoru

$$\omega_0^2 L_0 C_0 = 1. \quad (8.2)$$

Bezpośrednie doprowadzenie cewki do rezonansu w celu określenia C_0 nie jest zazwyczaj stosowane przede wszystkim dlatego, że C_0 zależy od częstotliwości, a pulsacja rezonansowa ω_0 wypada poza zakresem stosowności cewki, który zazwyczaj leży w przedziale od 0 do 0,1 ω_0 .

Aby obniżyć częstotliwość rezonansową dołącza się równolegle do cewki dodatkowy kondensator o pojemności C i dostroja układ do rezonansu. Wartość pojemności C_0 obliczyć można ze wzoru

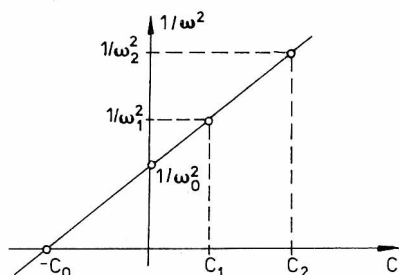
$$C_0 = 1/\omega^2 L_0 - C. \quad (8.3)$$

Wymaga to jednak, oprócz znajomości pulsacji ω , dokładnej znajomości indukcyjności L_0 . W celu uniknięcia tej niedogodności Rietz [109] zaproponował sposób polegający na dwukrotnym dostrojeniu układu do rezonansu dla pulsacji ω_1 i ω_2 (metoda dwupunktowa) lub wielokrotnym (metoda wielopunktowa).

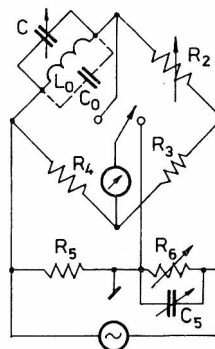
Jeśli C_1 i C_2 oznaczają wartości pojemności C w rezonansie dla pulsacji odpowiednio ω_1 i ω_2 , to pojemność własną C_0 oblicza się ze wzoru

$$C_0 = (C_2 \omega_2^2 - C_1 \omega_1^2) / (\omega_1^2 - \omega_2^2) \quad (8.4)$$

lub odczytuje z wykresu funkcji $C(\omega)$, narysowanej w siatce współrzędnych $1/\omega^2$ i C (rys.8.1). Wykres ten przedstawia tzw. prostą Rietza, która przecina oś $1/\omega^2$ w punkcie $1/\omega_0^2$ i oś C w punkcie C_0 .



Rys.8.1. Prosta Rietza
Fig.8.1. Rietza's straight line



Rys.8.2. Równoległy mostek rezonansowy do pomiaru pojemności własnej C_0 cewek indukcyjnych
Fig.8.2. Parallel resonance bridge for measurements of the inductor self-capacitance

Głównym źródłem błędów pomiaru pojemności własnej są: niedokładność dostrojenia układu do rezonansu oraz niedokładność określenia pojemności C_1 i C_2 .

Niedokładność dostrojenia układu do rezonansu powoduje błąd wyznaczenia pojemności C . Błąd ten może przyjmować znaczne wartości szczególnie przy większych częstotliwościach [63]. Przy małych częstotliwościach błąd ten może być sprowadzony do pomijalnie małej wartości, jeśli do określenia rezonansu zastosuje się równoległy mostek rezonansowy przedstawiony na rys.8.2. Dużą dokładność dostrojenia układu do rezonansu można również osiągnąć za pomocą obserwacji zmian fazy prądu względem napięcia.

Niedokładność określenia pulsacji. Jeśli pojemność własna C_0 jest określona na podstawie wzoru (8.3), to pulsacja ω układu w rezonansie musi być znana bardzo dokładnie, gdyż wartość C_0 obliczana jest jako różnica dwóch niezależnych członów o zbliżonych wartościach ($1/\omega^2 L_0$, $C \ll C_0$).

Jeśli pojemność C_0 jest określana ze wzoru (8.4), to wystarcza znajomość stosunku pulsacji ω_1/ω_2 . Stosunek ten może być określony bardzo dokładnie, jeśli zastosuje się stabilny generator (np. kwarcowy) i dokona podziału (lub powielenia) częstotliwości. Jeśli pulsacje ω_1 i ω_2 są efektem podziału pulsacji generatora ω_g odpowiednio przez m i n , a więc $\omega_1 = \omega_g/m$, $\omega_2 = \omega_g/n$, to pojemność własną C_0 oblicza się ze wzoru

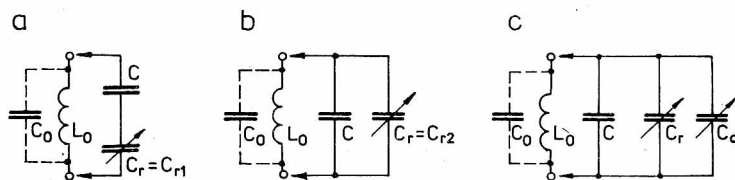
$$C_0 = (m^2 C_2 - n^2 C_1) / (n^2 - m^2), \quad (8.5)$$

który nie wymaga znajomości częstotliwości. Obecnie stosowane techniki pomiarowe pozwalają na łatwe uzyskanie odpowiednio dokładnych pomiarów częstotliwości.

Niedokładność pojemności regulacyjnej jest zazwyczaj głównym źródłem błędu pomiaru pojemności własnej C_0 . Względny błąd C_0 określenia pojemności C_0 ze wzoru (8.5) (lub ze wzoru (8.4)), gdy pulsacje ω_1 i ω_2 znane są odpowiednio dokładnie, spowodowany względnymi błędami δC_1 pojemności δC_1 i δC_2 pojemności C_2 , spełnia warunek:

$$\delta C_0 \leq \frac{C_1}{C_2 - C_1} \left(1 + \frac{C_2}{C_0}\right) \delta C_1 + \frac{C_2}{C_2 - C_1} \left(1 + \frac{C_1}{C_0}\right) \delta C_2. \quad (8.6)$$

Zwykle pojemności C_1 i C_2 są wielokrotnie, nawet około 100 razy większe od C_0 , a więc δC_1 i δC_2 mogą być źródłem znacznego błędu. Opracowano więc wiele metod mających na celu jego minimalizację. W zakresie małych częstotliwości najlepszymi własnościami odznacza się metoda Scroggiego [119], zmodyfikowana przez Jellonka [63].



Rys.8.3. Układ pomiarowy przyjęty w metodzie Scroggiego: a - szeregowe połączenie dwóch kondensatorów o tej samej wartości, b - równoległe połączenie kondensatorów o zbliżonej wartości ($C_2 = C_1 + \Delta C$), c - zmodyfikowana przez Jellonka metoda Scroggiego; dostrajanie do rezonansu za pomocą dodatkowego kondensatora C_0

Fig.8.3. Scroggie's measurement circuit; a) series connection of two capacitors of the same value, b) parallel connection of two capacitors of similar values ($C_2 = C_1 + \Delta C$), c) Scroggie's circuit modified by Jellonek; adjustment to resonance by an additional capacitor C_0

Scroggie zaproponował użycie dwóch kondensatorów do strojenia obwodu do rezonansu; jednego - C o pojemności ustalonej wstępnie, drugiego - C_r o pojemności regulowanej. Wartość pojemności C dobiera się tak, aby po połączeniu szeregowym C z C_r (rys.8.3a) i dostrojeniu za pomocą kondensatora C_r do rezonansu, oba kondensatory miały tę samą pojemność: $C = C_r = C_{r1}$, gdzie C_{r1} jest pojemnością kondensatora C_r w rezonansie. Spełnione jest wtedy równanie

$$L\omega^2 [C_0 + CC_{r1}/(C + C_{r1})] = L\omega^2 (C_0 + C_{r1})/2 = 1. \quad (8.7)$$

Następnie łączy się kondensatory C i C_r równolegle, a obwód zasila przebiegiem o dwukrotnie mniejszej częstotliwości i dostraja układ do rezonansu za pomocą kondensatora regulowanego C_r , otrzymując rezonans dla pojemności $C_r = C_{r2}$. Zachodzi wtedy równanie

$$L(\omega/2)^2 (C_0 + C_{r1} + C_{r2}) = 1. \quad (8.8)$$

Z porównania obu powyższych wzorów otrzymuje się wyrażenie

$$C_0 = (C_{r2} - C_{r1})/3 \quad (8.9)$$

umożliwiające określenie pojemności C_0 z różnicy odczytu kondensatora regulowanego. Względny błąd δC_0 pomiaru pojemności C_0 , spowodowany względnymi błędami δC_{r1} i δC_{r2} odczytu kondensatora regulacyjnego, spełnia warunek

$$\delta C_0 \leq \frac{1}{3} \left(\frac{C_{r1}}{C_0} \delta C_{r1} + \frac{C_{r2}}{C_0} \delta C_{r2} \right). \quad (8.10)$$

Przez porównanie tego wyrażenia z nierównością (8.6) widać, że nastąpiło zmniejszenie błędu pomiaru pojemności własnej.

Jellonek zaproponował, aby po pierwszym kroku w metodzie Scroggiego, polegającym na doprowadzeniu do rezonansu układu z rys.8.3a, połączyć oba kondensatory równolegle i ponownie dostroić układ do rezonansu przy pulsacji $\omega_2 = \omega/2$ za pomocą dodatkowego kondensatora C_d (rys.8.3c). Wartość pojemności C_0 oblicza się teraz ze wzoru

$$C_0 = C_d/3. \quad (8.11)$$

Błąd względny określenia C_0 jest więc równy błędowi kondensatora dodatkowego C_d . Spełnione jest to jednak pod warunkiem, że równość $C = C_r = C_{r1}$ zachowana jest odpowiednio dokładnie. Aby to osiągnąć, należy stosować dodatkowy układ pomiarowy, np. transformatorowy mostek pojemności oraz odpowiednio skonstruowany układ przełączania, zapewniający stałość pojemności po zmianie konfiguracji układu.

Przykład. Jako przykład podane zostaną wyniki pomiarów pojemności własnej absolutnego wzorca indukcyjności własnej $L = 0,1003$ H, otrzymane w PTB [81]. Pomiary przeprowadzono w układzie mostkowym jak na rys.8.2, którego elementy spełniały warunek: $R_3 = R_4 = R_6 = 30$ k Ω . Rezonans otrzymano dla pojemności kondensatora $C = C_1 = 626,3$ pF przy częstotliwości $f_1 = 20$ kHz oraz $C = C_2 = 152,7$ pF i $f_2 = 40$ kHz. Po podstawieniu do wzoru (8.4) otrzymuje się wynik $C_0 = 5,2 \pm 0,1$ pF.

Metoda dwupunktowa, omówiona poprzednio, polegała na doprowadzeniu układu do rezonansu dla dwóch pulsacji i wyznaczeniu prostej Rietza. Stosowana jest również metoda wielopunktowa, polegająca na tym, że układ doprowadza się do rezonansu dla większej liczby pulsacji $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$,

otrzymując rezonans dla pojemności $C_1, C_2, \dots, C_n$ kondensatora C . Prostą Rietza wyznacza się metodą najmniejszych kwadratów. Metoda ta polega w tym przypadku na minimalizacji wyrażenia $\sum (a + bC_i - 1/\omega_i)^2$ względem a i b , stąd otrzymuje się wzór określający wartość pojemności:

$$C_0 = \frac{a}{b} = \frac{\sum C_i^2 \cdot \sum 1/\omega_i^2 - \sum C_i \cdot \sum C_i/\omega_i^2}{n \sum C_i/\omega_i^2 - \sum C_i \cdot \sum 1/\omega_i^2}, \quad (8.12)$$

w którym wszystkie sumy obliczane są od $i=1$ do n .

Metoda Rietza umożliwia dokładne pomiary pojemności własnej cewek indukcyjnych. Częstotliwość sygnału zasilającego układ powinna być znana dokładnie. Regulowany wzorzec pojemności powinien być bardzo dokładny. Największą dokładność pomiaru można osiągnąć stosując metodę Scroggiego lub metodę Scroggiego zmodyfikowaną przez Jellonka. Rezonans należy określić w układzie mostkowym (np. z rys. 8.2), przy czym rezystory mostka powinny mieć bardzo małe stałe czasowe. Należy starannie rozważyć dobór częstotliwości pomiarowych, które powinny być kompromisem uwzględniającym przede wszystkim dwa podstawowe aspekty: ze względu na dokładność metody pomiarowej należy stosować jak najmniejsze pojemności C , czyli częstotliwości zbliżone do rezonansu własnego; natomiast ze względu na to, że przyjęty schemat zastępczy cewki jest tylko aproksymacją rzeczywistej cewki, należy stosować częstotliwości z zakresu pracy cewki. Podstawowymi wadami metody Rietza są trudności w wyborze optymalnych częstotliwości pomiarowych oraz nierównomierne rozłożenie punktów na prostej Rietza [33]. Drugą z tych wad można zmniejszyć przez zastosowanie innej siatki współrzędnych, jak to zaproponował Ebert [32,33]. Zamiast $C, 1/\omega^2$ wykreśla się prostą we współrzędnych $\omega^2 C^2, \omega^2$. Metoda Eberta umożliwia lepsze wykorzystanie otrzymanych wyników dla częstotliwości zbliżonych do pierwszego rezonansu własnego cewki [33] i jest szczególnie przydatna przy wysokich częstotliwościach.

9. Wyznaczanie indukcyjności i pojemności własnej cewek za pomocą regresji liniowej

W poprzednim rozdziale omówiono wyznaczanie pojemności własnej C_0 metodą Rietza. Metoda ta nie zapewnia optymalnej aproksymacji zmian indukcyjności z częstotliwością, gdyż opiera się na przybliżonym schemacie zastępczym cewki. Lepsze wyniki można uzyskać w pomiarach mostkami transformatorowymi, które umożliwiają bardzo dokładne pomiary zarówno samej indukcyjności, jak i zmian indukcyjności w funkcji częstotliwości. Z drugiej strony coraz łatwiejszy dostęp do programowanych kalkulatorów pozwala na stosowanie metod, które poprzednio nie były rozwijane ze względu na dużą pracochłonność obliczeń.

Autor zbadał możliwość wyznaczenia parametrów solenoidalnych cewek indukcyjnych za pomocą regresji liniowej z wykorzystaniem wyników precyzyjnych pomiarów indukcyjności. Poniżej przedstawiono otrzymane wyniki badań. Metoda ta umożliwia "lepsze" dopasowanie wyników pomiarów do modelu niż tradycyjna metoda Rietza.

9.1. Oceny punktowe

Jeśli przyjmie się schemat zastępczy cewki przedstawiony na rys. 2.1b, to w zakresie od 0 do 0,1 ω_0 (ω_0 jest pulsacją rezonansu własnego cewki) zmiany indukcyjności w funkcji częstotliwości można opisać za pomocą wyrażenia

$$L(\omega) = L_0 + \omega^2 L_0 C_0 = L_0 + L_0 \omega^2 / \omega_0^2 = L_0 + L_0 f^2 / f_0^2.$$

Funkcja $L(\omega)$ jest więc określona przez parametry L_0 i ω_0 lub C_0 (jak również L_0 i f_0). Punktem wyjścia do dalszej analizy są wyniki pomiarów indukcyjności $L_1, L_2, \dots, L_n$ wykonane dla pulsacji $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ (częstotliwości $f_1, f_2, \dots, f_n$). Założono, że wyniki te nie są obciążone błędami systematycznymi, są losowo niezależne, łącznie normalne i mają tę samą dokładność. Oznacza to, że wartość oczekiwana $E[L_1]$ poszczególnych wyników jest równa wartości rzeczywistej oraz, że wariancja $V[L_1] = \sigma^2$ jest na ogół nieznana; można ją oszacować na podstawie obserwowanych wartości $L_1, \dots, L_n$. Założono, że pulsacja ω mierzona jest z pomijalnie małym błędem. Wprowadzając pomocnicze oznaczenia:

$$L_0 = a, \quad L_0 / \omega_0^2 = b, \quad \omega^2 = x, \quad (\omega_1^2 = x_1) \quad (9.1)$$

otrzymuje się model liniowy

$$L = a + bx, \quad (9.2)$$

który jest stosowany w regresji liniowej. Analiza regresji [6] daje punktową ocenę a i b parametrów a i b , które przy powyższych założeniach pokrywają się z ocenami (estymatorami) otrzymanymi metodą największej wiarygodności:

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \bar{x}, \quad (9.3)$$

$$\hat{b} = \frac{\sum (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})}{\sum (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum y_i (x_i - \bar{x})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}, \quad (9.4)$$

gdzie: $\bar{x} = \sum x_i / n$, $\bar{y} = \sum y_i / n$. Znak $\sum$ w tym wzorze i w następnych oznacza sumowanie od 1 do n .

Wyrażenia (9.3) i (9.4) wygodnie jest stosować w następującej formie;

$$\hat{a} = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}, \quad (9.5)$$

$$\hat{b} = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}, \quad (9.6)$$

z której po uwzględnieniu oznaczeń (9.1) otrzymuje się szukane oceny

$$\hat{a} = \hat{L}_0 = \bar{L} - b(\bar{\omega}^2),$$

$$\hat{b} = \frac{\sum L_i (\omega_i^2 - \bar{\omega}^2)}{\sum (\omega_i^2 - \bar{\omega}^2)^2}, \quad (9.8)$$

gdzie $\bar{L} = \sum L_i / n$, $\bar{\omega}^2 = \sum \omega_i^2 / n$.

Widać, że ocena parametru a jest bezpośrednio oszacowaniem indukcyjności. Natomiast oceny punktowe pozostałych wielkości są następujące: ocena pulsacji rezonansu własnego cewki

$$\hat{\omega}_0^2 = \hat{a} / \hat{b} \quad (9.9)$$

i pojemności własnej cewki

$$\hat{C}_0 = 1 / (\hat{\omega}_0^2 L_0) = \hat{b} / \hat{a}^2. \quad (9.10)$$

Często obliczenia wygodnie jest prowadzić stosując zamiast pulsacji ω częstotliwość f . Wtedy we wzorach (9.1) zamiast $\omega^2 = x$ należy podstawić $f^2 = x$, a odpowiednie oceny mają postać:

$$\hat{a} = \hat{L}_0 = \bar{L} - \hat{b} \bar{f}^2, \quad (9.11)$$

$$\hat{b} = \frac{\sum L_i (f_i^2 - \bar{f}^2)}{\sum (f_i^2 - \bar{f}^2)^2}, \quad (9.12)$$

$$\hat{f}_0^2 = \hat{a} / \hat{b}, \quad (9.13)$$

$$\hat{C}_0 = 1 / (4 \pi^2 \hat{f}_0^2 \hat{L}_0), \quad (9.14)$$

gdzie $\bar{f} = \sum f_i / n$, $\bar{f}^2 = \sum f_i^2 / n$.

Metoda regresji liniowej umożliwia oszacowanie błędów przypadkowych (odchyłeń standardowych) mierzonych wartości. Macierz kowariancji wektora losowego $\begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix}$ ocen jest określona wzorem ([6], s.202):

$$V \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V[\hat{a}] & \text{cov}[\hat{a}, \hat{b}] \\ \text{cov}[\hat{a}, \hat{b}] & V[\hat{b}] \end{bmatrix} = \frac{\sigma^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2} \begin{bmatrix} \frac{1}{n} \sum x_i^2 & -\bar{x} \\ -\bar{x} & 1 \end{bmatrix}, \quad (9.15)$$

gdzie σ^2 jest wariancją pomiarów indukcyjności ($\sigma^2 = V[L_1]$). Wartość wariancji σ^2 (jeśli jest nieznana) można oszacować ze wzoru ([6], s.202)

$$s^2 = \sum (L_1 - \hat{L}_1)^2 / (n-2). \quad (9.16)$$

Na podstawie (9.15) wariancje parametrów $\hat{a}$ ($\hat{L}_0$) i $\hat{b}$ określono wzorami

$$V[\hat{a}] = V[\hat{L}_0] = \frac{\sigma^2 \sum x_i^2}{n \sum (x_i - \bar{x})^2}, \quad (9.17)$$

$$V[\hat{b}] = \sigma^2 / \sum (x_i - \bar{x})^2. \quad (9.18)$$

Po wstawieniu do powyższych wzorów ocen pulsacji i pojemności (wzory (9.9) i (9.10)) oraz zastosowaniu pierwszych liniowych członów rozwinięcia w szereg Taylora i prawa propagacji błędów pomiarów ([6], s. 34) otrzymuje się oszacowanie wariancji ocen $\hat{\omega}_0^2$ i $\hat{C}_0$:

$$V[\hat{\omega}_0^2] = V[\hat{a}]/\hat{b}^2 + 2\hat{a}\hat{b} \text{cov}[\hat{a}, \hat{b}] + V[\hat{b}] \hat{a}^2/\hat{b}^2, \quad (9.19)$$

$$V[\hat{C}_0] = 4 \hat{b}^2 V[\hat{a}]/\hat{a}^6 - 4\hat{b} \text{cov}[\hat{a}, \hat{b}]/\hat{a}^5 + V[\hat{b}]/\hat{a}^4, \quad (9.20)$$

gdzie

$$\text{cov}[\hat{a}, \hat{b}] = -\sigma^2 \bar{x} / \sum (x_i - \bar{x})^2. \quad (9.21)$$

Wartość σ^2 można ocenić ze wzoru (9.16). Znajomość wariancji ocen poszczególnych parametrów pozwala na oszacowanie błędów ocen, o których zwykle zakłada się, że są dwa lub trzy razy większe niż odchylenia standardowe.

9.2. Punktowa i przedziałowa ocena indukcyjności

Podstawowym zadaniem schematu zastępczego cewki jest określenie impedancji, a szczególnie indukcyjności L przy dowolnej pulsacji ω . Mając wyznaczone oceny $\hat{L}_0$ i $\hat{C}_0$ możemy obliczyć wartość L ze wzoru:

$$\hat{L}(\omega) = \hat{L}_0 (1 + \omega^2 \hat{L}_0 \hat{C}_0). \quad (9.22)$$

Ocena $\hat{L}(\omega)$ nie jest obciążona błędem systematycznym i jest oceną najefektywniejszą, a więc stanowi optymalne wykorzystanie wyników pomiarów indukcyjności.

Wariancję $\hat{L}(\omega)$ można określić ze wzoru ([6], s. 202)

$$V[\hat{L}(\omega)] = s^2 [1/n + (\omega^2 - \bar{\omega}^2) / \Sigma (\omega_i^2 - \bar{\omega}^2)^2], \quad (9.23)$$

gdzie s^2 jest oszacowaniem σ^2 (9.16). Jeśli wstawi się do wzoru (9.22) $\omega = \omega_i$ (ω_i - pulsacje, dla których wykonano pomiary), to otrzymuje się wyrównane oceny $\hat{L}(\omega_i)$ indukcyjności, które są dokładniejsze niż wyniki bezpośrednich pomiarów L_i ($V[L_i] = \sigma^2$).

Analiza regresji umożliwia również ocenę indukcyjności L za pomocą przedziałów ufności, a więc przedziałów, które z zadaniem prawdopodobieństwem α , zwanym poziomem ufności, zawierają rzeczywistą wartość indukcyjności. Jeśli obserwacje L_i mają rozkład normalny, to przedział ufności dla $L(\omega)$ wynosi ([6], s.202-203)

$$\langle \hat{L}(\omega) - \gamma_\alpha s \sqrt{\Phi}, \quad \hat{L}(\omega) + \gamma_\alpha s \sqrt{\Phi} \rangle, \quad (9.24)$$

gdzie $\Phi = 1/n + (\omega^2 - \bar{\omega}^2) / \Sigma (\omega_i^2 - \bar{\omega}^2)$, s jest estymatorem σ (wzór 9.16), natomiast γ_α jest liczbą zdefiniowaną wzorem $P\{|t_{n-2}| < \gamma_\alpha\}$, określającą przedział liczbowy $\langle -\gamma_\alpha, \gamma_\alpha \rangle$, w którym mieści się statystyka Studenta t_{n-2} z $n-2$ stopniami swobody. Wartość γ_α odczytuje się z tablic rozkładu Studenta [6].

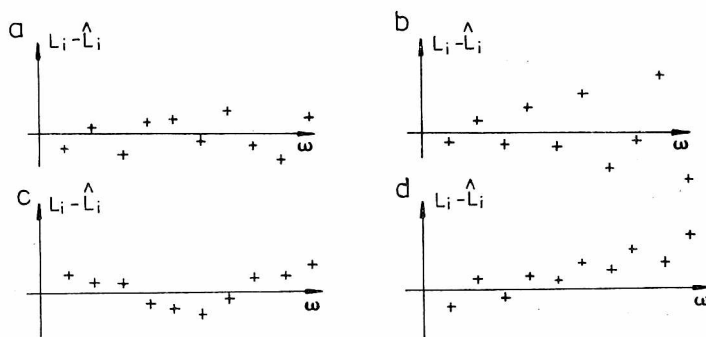
Wyznaczając przedziały ufności dla dowolnej pulsacji ω otrzymuje się pas ufności dla indukcyjności L . Pas ten jest najwęższy (indukcyjność określona jest najdokładniej) dla średniej wartości indukcyjności $\bar{L}$ i rozszerza się (błąd rośnie) w miarę oddalania się od tego punktu w kierunku zarówno większych, jak i mniejszych wartości indukcyjności.

Powyższe wzory wyprowadzono dla najważniejszego przypadku, gdy pomiary indukcyjności mają jednakową dokładność. Metodę można łatwo uogólnić na niejednakowo dokładne pomiary po wprowadzeniu pojęcia tzw. wag i stosowaniu metody regresji liniowej ([120], s. 190-194).

9.3. Sprawdzenie założeń wyjściowych

Otrzymane oceny $\hat{L}_0, \hat{L}(\omega), \hat{\omega}_0^2$ są optymalne (najefektywniejsze i nie obciążone błędem systematycznym) pod warunkiem, że spełnione są założenia wyjściowe eksperymentu: model cewki (wzór (2.4)) jest dokładny, obserwacje L_i nie są obciążone błędem systematycznym, są losowo niezależne i jednakowo dokładne. W badaniach nie ma często pewności co do spełnienia tych założeń. Analiza regresji może ujawnić niespełnienie niektórych założeń przez obserwację reszt. Resztą d_i nazywana jest różnica między wynikiem pomiaru L_i a wyrównaną wartością $\hat{L}_i$:

$$d_i = L_i - \hat{L}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (9.25)$$



Rys.9.1. Rodzaje wykresów reszt: a - prawidłowy wykres, b - błąd przypadkowy pomiaru (odchylenie standardowe) rośnie ze wzrostem pulsacji, c - krzywa regularna wskazuje na niedokładność modelu, d - układ liniowy wskazuje na błędy w obliczeniach

Fig.9.1. Kinds of residual plots; a) correct, b) with random measurement error (standard deviation increases with the increasing frequencies), c) regular curve - shows the inaccuracy of the model, d) straight line trend - shows calculation errors

W celu sprawdzenia założeń wyjściowych należy zbadać zależności reszt od mierzonej indukcyjności lub pulsacji ω . Wykresy reszt i przyczyny, które mogą je powodować przedstawiono na rys.9.1.

9.4. Wyniki badań

Przydatność opisanej metody wyznaczania parametrów C_0 i L_0 cewek indukcyjnych sprawdzono dla wzorców indukcyjności typu 0187 produkcji Funkwerk Erfurt NRD. Pomiaru indukcyjności przeprowadzono za pomocą mostka indukcyjności typu 110 firmy PGH Berlin oraz mostka typu 1100 firmy Sullivan o dokładności (obu mostków) 0,1%. Przykładowe wyniki badań dla wzorca o wartości nominalnej 1H i parametrach katalogowych $L_0=1,0001$ H, $C_0 = 53$ pF zamieszczono w tab. 9.1.

Wartości parametrów L_0 i C_0 obliczonych metodą regresji liniowej (wzory (9.7) i (9.10)) są następujące: $\hat{L}_0 = 1000$ mH, $\hat{C}_0 = 81$ pF, a ich wariancje (wzory (9.17) i (9.20)):

$$\hat{\sigma}_{L_0} = \sqrt{V[\hat{L}_0]} = 0,54 \text{ mH}, \quad \hat{\sigma}_{C_0} = \sqrt{V[\hat{C}_0]} = 1,6 \text{ pF}.$$

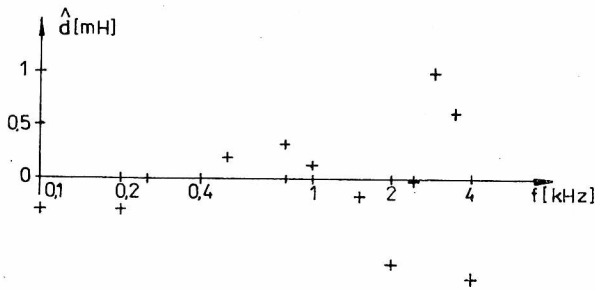
Stąd niedokładności (3σ) wyznaczania tych parametrów wynoszą: $\Delta\hat{L}_0 = 1,6$ mH, $\Delta\hat{C}_0 = 4,8$ pF. Obliczenia przeprowadzono na EMC, stosując program napisany w języku FORTRAN. Wykres reszt d_1 w funkcji częstotliwości przedstawiono na rys.9.2.

Zachowanie się różnic $\hat{d}_1$ wskazuje (por. rys.9.1c), że głównym źródłem ich rozrzutu jest błąd modelu (zależności $L = L_0(1 + \omega^2 L_0 C_0)$), który wynosi około 0,1% w całym wykorzystywanym zakresie (od częstotli-

T a b e l a 9.1

Wyniki pomiarów i obliczeń wzorca indukcyjności 1 H ($L_0 = 1,0001$ H, $C_0 = 53$ pF)
firmy Funkwerh Erfurt NRD, typ 0187

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
f [kHz]	0,1	0,2	0,5	0,8	1,0	1,6	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
L_1 [mH]	1000,00	1000,10	1001,25	10002,55	1002,53	1008,29	1012,25	1020,24	1030,00	1040,01	1050,52
$\hat{L}_1$ [mH]	1000,26	1000,36	1001,05	1002,27	1003,42	1008,41	1013,02	1020,21	1029,00	1039,39	1051,38
$\hat{\alpha}_1$ [mH]	-0,26	-0,26	0,22	0,28	0,11	-0,12	-0,77	0,03	1,00	0,62	-0,86
L_{01} [mH]	1000,02	1000,08	1000,52	1001,34	1002,09	1005,36	1008,37	1013,09	1018,85	1025,66	1033,51
$L_1 - L_0$ [mH]	-0,02	0,02	0,73	1,21	1,44	2,93	3,88	7,15	11,15	14,35	17,01



Rys.9.2. Zależność różnic $\hat{d}_i = L_i - \hat{L}_i$
w funkcji częstotliwości
Fig.9.2. The differences $\hat{d}_i = L_i - \hat{L}_i$
versus frequency

wości zerowej do 4 kHz) oraz na poziomie mniejszym niż 0,08% w zakresie od 0 do 2,2 kHz, tj. do $0,1 f_0$. Błąd modelu rośnie znacznie po przekroczeniu częstotliwości około 1,5 kHz. Dla całego zakresu jest na poziomie dokładności pomiaru indukcyjności. Lepszą dokładność aproksymacji indukcyjności uzyskać można jedynie wprowadzając bardziej złożony model.

W tabeli 9.1 (przedostatni wiersz) zamieszczono wartości indukcyjności L_{0i} obliczone ze wzoru $L_0(1 + \omega_i^2 L_0 C_0)$, w którym wartości L_0 i C_0 przyjęto na podstawie świadectwa wzorca podanego przez producenta. Dane te (por. ostatni wiersz tab. 9.1) wskazują na wzrastającą z częstotliwością rozbieżność między wynikami pomiarów a wartościami L_{0i} . Rozbieżność ta dla częstotliwości większych od 800 Hz przekracza błąd pomiaru mostka (0,1%). Ponieważ wyniki pomiarów dwoma mostkami nie różniły się istotnie, otrzymane wartości różnic $L_i - L_{0i}$ można przypuszczalnie wytłumaczyć tym, że producent wyznaczył C_0 dla częstotliwości albo małych albo zbliżonych do rezonansu własnego cewki. Podobną rozbieżność wykazały wyniki pomiarów wzorców o innych wartościach nominalnych.

Zależność $\hat{L}(\omega)$ określona metodą regresji liniowej nie odbiega od wyników pomiarów o więcej niż 0,1%, a więc mieści się w granicach błędów pomiarów, co świadczy o poprawności analizy.

9.5. Podsumowanie

Przytoczona metoda wyznaczania parametrów schematu zastępczego wykazuje wiele zalet. Przede wszystkim umożliwia kontrolę dokładności modelu w zależności od pasma częstotliwości. Pozwala to na wybór przedziałów częstotliwości, dla których otrzymuje się aproksymację indukcyjności z założoną dokładnością. Obserwacja zachowania się reszt umożliwia wykrycie naruszenia założeń wyjściowych, błędów popełnianych w obliczeniach, jak również wprowadzenie korekty modelu, jeśli zachodzi taka potrzeba. Metoda ta pozwala również na łatwą ocenę dokładności wyznaczanych parametrów L_0 i C_0 .

Rozpatrywany model jest tylko przybliżeniem rzeczywistej zależności indukcyjności od częstotliwości, a więc parametry L_0 i C_0 są zależne od zakresu częstotliwości, w którym dokonano pomiarów. Pełne wykorzystanie proponowanej metody i otrzymanie odpowiednio wiarygodnych wyników wymaga precyzyjnej aparatury, której dokładność jest lepsza niż błąd aproksymacji.

Wadą metody regresji liniowej jest duża pracochłonność obliczeń. Dlatego metoda ta może być stosowana z wykorzystaniem programowanych kalkulatorów odpowiedniej mocy lub EMC.

10. Wyznaczenie parametrów schematu zastępczego cewek ekranowych

W precyzyjnych pomiarach stosowane są najczęściej ekranowane, trzyzaciskowe wzorce indukcyjności, np. wzorce typu 1482 firmy General Radio. Liniowy model (9.2) opisujący zmiany indukcyjności tych wzorców w funkcji częstotliwości jest niewystarczający. Przede wszystkim nie uwzględnia istotnego dla nich wpływu prądów wirowych indukujących się w obudowie i innych elementach.

Dokładniejszą aproksymację zmian indukcyjności cewek ekranowanych można otrzymać stosując wyrażenie (2.6), które uwzględnia dwa podstawowe czynniki wpływające na zmianę indukcyjności: pojemności pasożytnicze i prądy wirowe. Zastosowanie tego wyrażenia jest utrudnione, gdyż nie ma metod bezpośredniego pomiaru elementów schematu zastępczego z rys. 2.4. Autor przeanalizował możliwości rozwiązania tego problemu metodą najmniejszych kwadratów [92]. Otrzymane wyniki przedstawiono poniżej.

10.1. Charakterystyka częstotliwościowa cewek

Uwzględniając łącznie wpływ pojemności pasożytniczych cewki i prądów wirowych otrzymujemy wyrażenie (2.6) opisujące zmiany indukcyjności w szeregowym układzie zastępczym w funkcji częstotliwości. Wyrażenie to ma pięć parametrów, L_0 , C_0 , M , L_e i R_e (rys.2.4). Jeśli wprowadzi się oznaczenia

$$\omega_0^2 = 1/(L_0 C_0), \quad \omega_k^2 = R_e^2 L_0 / (M^2 L_e), \quad k^2 = M^2 / (L_e L_0), \quad (10.1)$$

to wyrażenie (2.6) przyjmuje postać

$$L(\omega) = \frac{L_0}{1 - (\omega/\omega_0)^2} \left[1 - \frac{1}{(\omega_k/\omega)^2 + 1/k^2} \right]. \quad (10.2)$$

Liczba parametrów została zredukowana do czterech. Dwa z nich L_0 i ω_0 (lub C_0) stosowane były już dotychczas, natomiast pozostałe ω_k i k są nowe. Parametr ω_k ma wymiar pulsacji, natomiast k jest współczynnikiem sprzężenia magnetycznego, a więc jest bezwymiarowy. W zakresie

częstotliwości od zera do jednej dziesiątej rezonansu własnego cewki ($\omega < 0,1 \omega_0$) względne zmiany indukcyjności spowodowane pojemnością C_0 nie przekraczają wartości 1×10^{-2} . Natomiast względne zmiany indukcyjności spowodowane prądami wirowymi są nie większe niż kilka razy 10^{-4} [85]. Dla tych częstotliwości wyrażenie (10.2) z pomijalnie małym błędem można zapisać w wygodniejszej do dalszych obliczeń postaci:

$$L(\omega) = L_0 \left[\frac{1}{1 - (\omega/\omega_0)^2} - \frac{1}{(\omega_k/\omega)^2 + 1/k^2} \right]. \quad (10.3)$$

Pozostaje problem wyznaczenia wartości parametrów L_0 , ω_0 , ω_k i k .

10.2. Ocena parametrów metodą najmniejszych kwadratów

Do dalszej analizy założono, że wykonano pomiary indukcyjności w szeregowym układzie zastępczym dla pulsacji $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ i otrzymano wyniki odpowiednio $L_1, L_2, \dots, L_n$ obarczone błędami $\Delta L_1, \Delta L_2, \dots, \Delta L_n$. Wyniki pomiarów $L_1, L_2, \dots, L_n$ są losowo niezależne i nie są obciążone błędem systematycznym. Wariancje $V[L_i]$ wyników pomiarów mogą być nieznanne, ale założono, że są proporcjonalne do kwadratów błędów pomiarów ΔL_i^2 ; $i=1, 2, \dots, n$, a współczynnik proporcjonalności jest taki sam dla wszystkich pomiarów.

Wprowadzono wagi pomiarów p_i , które definiuje się jako liczby odwrotnie proporcjonalne do wariancji wyników pomiarów. A więc dla dowolnej liczby $\sigma^2 > 0$ liczba $p_i = \sigma^2 / V[L_i]$, $i=1, 2, \dots, n$, jest wagą pomiaru L_i . Za wagi pomiarów $L_1, \dots, L_n$ można przyjąć dowolny ciąg liczb $p_1, \dots, p_n$ spełniających warunki $p_i/p_j = V[L_j]/V[L_i] = \Delta L_j^2/\Delta L_i^2$ $i, j = 1, 2, \dots, n$. Wygodnie jest przyjąć wagi unormowane określone wzorami:

$$1/p_i = V[L_i] \sum_{k=1}^n 1/V[L_k] = \Delta L_i^2 \sum_{k=1}^n 1/\Delta L_k^2, \quad i=1, \dots, n. \quad (10.4)$$

Druga równość wyrażenia (10.4) wynika z założenia proporcjonalności kwadratów błędów i wariancji. Pozwala ona na oszacowanie wag na podstawie błędów pomiarów.

Ocena parametrów L_0 , ω_0 , ω_k i k metodą najmniejszych kwadratów sprowadza się do znalezienia takich ich wartości, które minimalizują ważoną sumę kwadratów

$$Y = \sum_{i=1}^n p_i (L_i - L(\omega_i))^2, \quad (10.5)$$

gdzie $L(\omega_i)$ jest wartością funkcji (10.3) dla $\omega = \omega_i$. Liczba pomiarów n musi być równa lub większa niż 4.

10.3. Wyznaczenie minimum sumy kwadratów

Stosowane w metodzie najmniejszych kwadratów algorytmy nie pozwalają na bezpośrednie wyznaczenie minimum wyrażenia Y określonego wzorem (10.5), gdyż funkcja $L(\omega)$ (wzór (10.3)) nie jest liniowa względem szukanych parametrów i nie daje się sprowadzić do modelu liniowego przez transformację. Poszukiwane minimum sprowadzić można do rozwiązania układu równań, którymi są pochodne wyrażenia (10.5) przyrównane do zera. Równania te są nieliniowe i do ich rozwiązania zastosowano iteracyjną metodę Newtona [22].

W celu uproszczenia analizy wyznaczono oceny parametrów pomocniczych x_1, x_2, x_3, x_4 określonych wzorami:

$$x_1 = L_0, \quad x_2 = 1/\omega_0^2, \quad x_3 = \omega_k^2, \quad x_4 = 1/k^2, \quad (10.6)$$

dla których funkcja $L(\omega)$ przyjmuje postać:

$$L(\omega) = x_1 \left[\frac{1}{1 - \omega^2 x_2} - \frac{1}{\omega^2 x_3 + x_4} \right]. \quad (10.7)$$

Ważoną sumę kwadratów X można zapisać:

$$Y(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{i=1}^n p_i (L_i - L(\omega_i))^2. \quad (10.8)$$

Po zróżniczkowaniu wyrażenia $Y(x_1, x_2, x_3, x_4)$ względem x_j otrzymuje się układ równań:

$$f_j = \frac{1}{2} \frac{\partial Y}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^n p_i (L_i - L(\omega_i)) \frac{\partial L(\omega_i)}{\partial x_j} = 0, \quad j=1,2,3,4, \quad (10.9)$$

którego rozwiązanie minimalizuje wartość Y , a więc określa szukane oceny parametrów x_j . Po wprowadzeniu oznaczeń macierzowych

$$F(X) = [f_1, f_2, f_3, f_4]^T = \frac{1}{2} [\partial Y / \partial x_1, \dots, \partial Y / \partial x_4]^T, \quad (10.10)$$

gdzie $X = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$, natomiast T oznacza transpozycję macierzy, układ równań (10.9) można zapisać w prostej formie:

$$F(X) = 0. \quad (10.11)$$

Metoda Newtona polega na tym, że po przyjęciu z pewnego punktu $X^1 = [x_1^1, x_2^1, x_3^1, x_4^1]^T$, będącego pierwszym przybliżeniem szukanego rozwiązania, konstruuje się ciąg $X^1, X^2, \dots$, zbieżny monotonicznie do rozwiązania $\hat{X}$ układu równań. Podstawowymi problemami są tu: znalezienie pierw-

szego przybliżenia X^1 rozwiązania oraz iteracyjne konstruowanie kolejnych elementów ciągu. Pierwszy z nich zależy od rozpatrywanej funkcji i zostanie omówiony w punkcie 10.5.

Konstruowanie ciągu iteracyjnego polega na tym, że jeśli znany jest m -ty element ciągu, X^m , $m = 1, 2, \dots$, to element $m+1$ oblicza się ze wzoru ([22], rozdz. XIII)

$$X^{m+1} = X^m - A(X^m)^{-1} F(X^m), \quad (10.12)$$

w którym $A(X^m)$ jest macierzą Jacobiego równania (10.11), obliczoną w punkcie X^m , natomiast $A(X^m)^{-1}$ jest macierzą odwrotną do niej. Jeśli ciąg $\{X\}$ nie jest zbieżny, co można zauważyć obserwując zachowanie się sumy kwadratów (10.8), to należy znaleźć dokładniejsze przybliżenie początkowe.

10.4. Wyznaczenie elementów macierzy Jacobiego

Elementy macierzy Jacobiego $A = [a_{kl}]$, występujące we wzorze (10.12), są definiowane wzorami,

$$a_{kl} = \frac{\partial f_k}{\partial x_l}, \quad k, l = 1, 2, 3, 4, \quad (10.13)$$

gdzie $f_k = (1/2) \partial Y / \partial x_k$ (por. (10.10)). Po zróżniczkowaniu prawej strony równania (10.9) otrzymuje się wyrażenie

$$a_{kl} = \sum_{i=1}^n p_i \left[-b_k^i b_l^i + (L_i - L(\omega_i)) c_{kl}^i \right], \quad k, l = 1, 2, 3, 4, \quad (10.14)$$

w którym $b_k^i = \partial L(\omega_i) / \partial x_k$, $c_{kl}^i = \partial^2 L(\omega_i) / (\partial x_k \partial x_l)$. Po wprowadzeniu notacji macierzowej

$$B^i = \begin{bmatrix} b_1^i \\ \vdots \\ b_4^i \end{bmatrix} \quad C^i = \begin{bmatrix} c_{11}^i & \dots & c_{14}^i \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{41}^i & \dots & c_{44}^i \end{bmatrix}$$

macierz Jacobiego A dla $X = X^m$ można zapisać w postaci

$$A(X^m) = \sum_{i=1}^n p_i \left[-R^i(X^m)^T B^i(X^m) + (L_i - L(\omega_i)) C^i(X^m) \right]. \quad (10.15)$$

Jeśli pierwsze przybliżenie X^1 jest "bliskie" rozwiązaniu, to można obliczyć macierz Jacobiego jeden raz dla $X = X^1$, a kolejne elementy ciągu $\{X\}$ obliczać ze wzoru:

$$X^{m+1} = X^m - A(X^1)^{-1} F(X^m), \quad (10.16)$$

w którym macierz Jacobiego i odwrotną do niej oblicza się tylko raz.

Do obliczenia elementów b_k^1 i c_{kl}^1 macierzy B^1 i C^1 można zastosować uproszczoną postać funkcji $L(\omega)$ (10.7):

$$L(\omega) = x_1 \left[1 + \omega^2 x_2 + \omega^4 x_2^2 - 1/(x_3/\omega^2 + x_4) \right]. \quad (10.17)$$

Skąd na mocy definicji elementów b_k^1 i c_{kl}^1 otrzymuje się:

$$B^1 = \begin{bmatrix} 1 + \omega_1^2 x_2 + \omega_1^4 x_2^2 - d_1 \\ x_1 \omega_1^2 (1 + 2 \omega_1^2 x_2) \\ x_1 d_1^2 / \omega_1^2 \\ x_1 d_1^2 \end{bmatrix},$$

$$C^1 = \begin{bmatrix} 0 & \omega_1^2 (1 + 2 \omega_1^2 x_2) & d_1^2 / \omega_1^2 & d_1^2 \\ \omega_1^2 (1 + 2 \omega_1^2 x_2) & 2 \omega_1^4 x_1 & 0 & 0 \\ d_1^2 / \omega_1^2 & 0 & -2 d_1^3 x_1 / \omega_1^4 & -2 d_1^3 x_1 / \omega_1^2 \\ d_1^2 & 0 & -2 d_1^3 x_1 / \omega_1^2 & -2 d_1^3 x_1 \end{bmatrix},$$

gdzie $1/d_1^2 = x_3/\omega_1^2 + x_4$.

Po wyznaczeniu elementów macierzy A należy znaleźć macierz odwrotną do niej i podstawić do wzoru (10.12). Obliczenia macierzy odwrotnej najlepiej przeprowadzić dla wartości liczbowych, gdyż znalezienie ogólnych wyrażeń prowadzi do złożonych i niepraktycznych wzorów.

Po wyznaczeniu kolejnych elementów ciągu $\{X\}$ należy w każdym kroku obliczyć sumę Y ze wzoru (10.5), która powinna monotonicznie maleć. Obliczenia prowadzi się do momentu, gdy wartość Y nie zmniejsza się istotnie. Element X^k ciągu $\{X\}$, dla którego przzerwano obliczenia, jest szukanym przybliżeniem rozwiązania, $\hat{X} \approx X^k$, jeśli wartość sumy kwadratów Y jest odpowiednio mała. Dla unormowanych wag wartość Y powinna być mniejsza od kwadratów błędów ΔL_1^2 pomiarów indukcyjności. Po oszacowaniu parametrów pomocniczych oceny parametrów cewki oblicza się we wzorów (10.6), np. $\hat{L}_0 = \hat{x}_1$.

10.5. Oszacowanie pierwszego przybliżenia

Pierwsze przybliżenie X^1 powinno być możliwie dokładne, gdyż zwiększa to szansę, że ciąg iteracyjny $\{X\}$ jest zbieżny do rozwiązań równania i pozwala na stosowanie uproszczonego wzoru (10.16). Istnieje wiele możliwości znalezienia X^1 . Jeden z nich zapewniający dużą dokładność podano poniżej.

Założono, że punkty pomiarowe są uporządkowane, tj.

$$\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_n \text{ oraz, że } L_n > L_1.$$

Dla małych pulsacji funkcja $L(\omega)$ jest w przybliżeniu liniowa. Wartość x_1^1 ($x_1 = L_0$) można określić przez przeprowadzenie prostej przez dwa pierwsze punkty pomiarowe (ω_1, L_1) i (ω_2, L_2) :

$$x_1^1 = (\omega L_1 - \omega L_2) / (\omega_1 - \omega_2).$$

Zakładamy, że przyrost indukcyjności L_n w odniesieniu do L_0 spowodowany jest głównie pojemnością własną C_0 cewki (oznacza to, że pominięte zostały we wzorze (10.7) człony związane z prądami wirowymi), otrzymuje się oszacowanie

$$x_2^1 = (1 - x_1^1 / L_n) \omega_n^2.$$

Niech j będzie numerem tego wyniku pomiaru indukcyjności $L_1, L_2, \dots, L_j, \dots, L_n$, który ma wartość najmniejszą. Jeśli jest kilka takich minimalnych wartości, to za j należy przyjąć numer największy z nich. Do wyznaczenia wartości x_3^1 wyróżniono dwa przypadki: $j = 1$ oraz $j > 1$.

1. Przypadek $j = 1$ oznacza, że najmniejsza jest wartość L_1 , czyli wpływ prądów wirowych na indukcyjność jest mniejszy niż wpływ pojemności własnej w całym rozpatrywanym zakresie częstotliwości. Zakładamy, że dla pulsacji $\omega = \omega_{j+1}$ wpływ prądów wirowych wynosi $1/3$ całkowitych zmian indukcyjności, wtedy na mocy (10.7) i po zaniedbaniu parametru k otrzymuje się oszacowanie

$$1/x_3^1 = (L_{j+1}/L_1 - 1) / (3\omega_{j+1}^2).$$

2. Jeśli $j > 1$, to w pewnym zakresie częstotliwości, w którym leży ω_j , wpływ prądów wirowych na zmiany indukcyjności jest większy niż wpływ pojemności własnej. Zakładamy, że $\omega_j \ll \omega_0$ ($\omega_j \leq \omega_n \leq 0,1 \omega_0$), pomijamy wpływ parametru k , otrzymujemy ze wzoru (10.3) równanie

$$L(\omega)/L_0 \approx 1 + (\omega/\omega_0)^2 - (\omega/\omega_k)^2,$$

a stąd po podstawieniu $\omega = \omega_j$ i $L_0 = L_1$, oszacowanie parametru x_3^1 :

$$1/x_3^1 = x_2^1 + (1 - L_j/L_1)/\omega_j^2.$$

Parametr x_4^1 można oszacować przy założeniu, że dla pulsacji $\omega = \omega_j$ wpływ parametru k na indukcyjność jest zbliżony do wpływu parametru ω_k . Na mocy wzoru (10.7) otrzymuje się:

$$x_4^1 = x_3^1/\omega_j^2.$$

10.6. Wyniki obliczeń

W celu eksperymentalnego sprawdzenia metody opracowano program na EMC w języku ALGOL 1204. Pierwsze przybliżenie X^1 obliczono ze wzorów podanych w punkcie 10.5. Kolejne elementy ciągu $\{X\}$ obliczano za pomocą uproszczonego wzoru (10.16). Program umożliwia kontrolę wartości sumy kwadratów Y w kolejnych krokach.

T a b e l a 10.1

Wyniki obliczeń parametrów wzorca $L_N = 100$ mH

$$\hat{L}_0 = 100,0348 \text{ mH} \quad \hat{\omega}_k = 65\,460 \text{ rad/s}$$

$$\hat{\omega}_0 = 423\,630 \text{ rad/s} \quad \hat{k} = 0,00688$$

$i \setminus$	f_i Hz	L_i mH	$\hat{L}_i$ mH	$(\hat{L}_i - L_i)/L_N$ $\times 10^{-6}$
1	100	100,032	100,0319	-1
2	200	100,031	100,0313	3
3	400	100,034	100,0338	-2
4	1000	100,052	100,0520	0

Obliczenia wykonano dla wzorców indukcyjności typu 1482 firmy GR o wartościach nominalnych 10, 100 i 1000 mH. Wykorzystano wartości indukcyjności tych wzorców pouane z dokładnością 0,02% w świadectwach firmowych. Wybrane wyniki obliczeń dla wzorca o $L_N = 100$ mH zestawiono w tab. 10.1. Względna różnica $(\hat{L}_i - L_i)/L_N$ obliczonej oceny indukcyjności $\hat{L}_i$ i podanej w świadectwie L_i nie przekracza kilku ppm dla wszystkich badanych wzorców. Świadczy to o lepszej aproksymacji zmian indukcyjności za pomocą proponowanego modelu (wzór (2.6)) w porównaniu z modelem stosowanym (wzór (2.1)).

10.7. Podsumowanie

Przytoczona analiza i wyniki eksperymentu potwierdzają możliwość aproksymacji zmian indukcyjności cewek ekranowanych funkcją zależną od czterech parametrów: $L_0, \omega_0, \omega_k, k$. Wzorcowanie cewki indukcyjnej może być więc sprowadzone do wyznaczania tych parametrów. Wydaje się bardzo prawdopodobne, że stabilność parametrów ω_0, ω_k i k jest wystarczająca, aby wyznaczyć je jednorazowo. Przy ponownym wzorcowaniu wystarczy wyznaczyć tylko wartość parametru L_0 , dzięki czemu unika się złożonych obliczeń.

Podstawowa wada metody, jaką jest znaczne skomplikowanie obliczeń, wydaje się mało istotna w świetle rozwoju kalkulatorów programowych.

11. Wyznaczanie schematów zastępczych aproksymujących impedancję cewek

W poprzednich rozdziałach omówiono metody wyznaczania elementów schematów zastępczych, których podstawowym celem jest aproksymacja zmian indukcyjności cewek w funkcji częstotliwości. W wielu zastosowaniach ważne jest jednak, aby schemat zastępczy aproksymował całą impedancję cewki - zarówno rezystancję, jak i reaktancję.

W tym rozdziale zostanie omówione rozwiązanie tego problemu metodą zaproponowaną przez autora [99]. W metodzie tej na podstawie precyzyjnych wyników pomiarów wyznacza się wartości elementów schematu zastępczego cewki metodą najmniejszych kwadratów.

Założono, że badanej cewce indukcyjnej można przypisać pewien schemat zastępczy złożony z idealnych elementów R, L, C niezależnych od częstotliwości. Aby ujednolicić zapis, wartości elementów R, L, C oznaczono symbolami $a_1, a_2, \dots, a_N$, gdzie $a_i (i=1, \dots, N)$ może być zarówno rezystancją, indukcyjnością i pojemnością. Układy mostkowe umożliwiają precyzyjne pomiary rezystancji R i indukcyjności L w szeregowym układzie zastępczym dla dowolnej częstotliwości.

Impedancję analizowanego schematu zastępczego zapisuje się w formie odpowiadającej wynikom pomiarów:

$$Z(\omega) = R(\omega, a_1, \dots, a_N) + j \omega L(\omega, a_1, \dots, a_N). \quad (11.1)$$

Aby wyznaczyć wartości parametrów $a_1, \dots, a_N$, dokonuje się pomiarów R i L dla pulsacji $\omega_1, \dots, \omega_n$ i otrzymuje wyniki

$$\begin{aligned} &\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n \\ &R_1, R_2, \dots, R_n \end{aligned}$$

$$\Delta R_1, \Delta R_2, \dots, \Delta R_n,$$

$$L_1, L_2, \dots, L_n$$

$$\Delta L_1, \Delta L_2, \dots, \Delta L_n$$

gdzie ΔR_i i ΔL_i , $i=1, \dots, n$ są błędami pomiarów; pulsacje $\omega_1, \dots, \omega_n$ znane są dokładnie. Wyniki pomiarów R_i i L_i są losowo niezależne, a ich wariancje proporcjonalne do kwadratów błędów pomiarów (ΔR_i^2 , ΔL_i^2). Współczynniki proporcjonalności mogą być nieznane, ale takie same w obrębie każdej grupy: $R_1, \dots, R_n$ i $L_1, \dots, L_n$.

Unormowane wagi pomiarów p_i i q_i ($i=1, \dots, n$) określono wzorami

$$1/p_i = \Delta R_i^2 \sum_{k=1}^n 1/\Delta R_k^2, \quad (11.2)$$

$$1/q_i = \Delta L_i^2 \sum_{k=1}^n 1/\Delta L_k^2. \quad (11.3)$$

Oszacowanie parametrów $a_1, \dots, a_N$ schematu zastępczego polega na znalezieniu ocen (estymatorów) $\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_N$, które minimalizują wyrażenie [99]:

$$Y = r \sum_{i=1}^n p_i [R_i - R(\omega_i, a_1, \dots, a_N)]^2 + \\ + (1 - r) \sum_{i=1}^n q_i \omega_i^{2u} [L_i - L(\omega_i, a_1, \dots, a_N)]^2. \quad (11.4)$$

We wzorze tym przyjmuje się $u = 1$, gdy aproksymowana jest impedancja cewki oraz $u = 0$, gdy aproksymowana jest indukcyjność. Wartość parametru r ($0 \leq r < 1$) przyjmuje się zależnie od relacji, jaka zachodzi między błędami pomiarów rezystancji i indukcyjności oraz od tego, którą część - rzeczywistą czy urojoną impedancji chcemy aproksymować dokładniej i w jakim stopniu.

Do obliczenia estymatorów $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_N$ minimalizujących wyrażenie (11.4) opracowano program na EMC w języku ALGOL 1204 [99], w którym wykorzystano procedurę biblioteczną "minig". Jest to procedura iteracyjna, która wymaga podania postaci funkcji $R(\omega, a_1, \dots, a_N)$ i $L(\omega, a_1, \dots, a_N)$ oraz przybliżenia początkowego.

Obliczenia wykonano dla schematu zastępczego z rys.2.1a, którego elementy R_0, C_0, L_0 oznaczono odpowiednio: $a_1 = R_0$, $a_2 = L_0$, $a_3 = C_0$. Przy tych oznaczeniach impedancja wyraża się wzorami:

$$Z = R(\omega, a_1, a_2, a_3) + j\omega L(\omega, a_1, a_2, a_3) =$$

$$= \frac{a_1}{(1 - \omega^2 a_2 a_3)^2 + (\omega a_1 a_2)^2} + j\omega \frac{a_2(1 - \omega^2 a_2 a_3) - a_1^2 a_3}{(1 - \omega^2 a_2 a_3)^2 + (\omega a_1 a_2)^2} \quad (11.5)$$

Obliczenia wykonano dla wzorców indukcyjności firmy GR typu 1482, których świadectwa firmowe podają wyniki pomiarów z błędami odpowiednio $\delta L_1 = 0,02\%$, $\delta R_1 = 0,1\%$. W tabeli 11.1 zestawiono otrzymane wyniki obliczeń z wynikami pomiarów. Różnice porównywanych wartości nie przekraczają błędów wyników pomiarów, co wskazuje na poprawność obliczeń.

T a b e l a 11.1

Wyniki pomiarów i obliczeń elementów schematu zastępczego
wzorca indukcyjności 1 H, typu 1482 firmy GR

1	f_1 Hz	R_1 Ω	$R(\omega_1, a_1, a_2, a_3)$ Ω	L_1 H	$L(\omega_1, a_1, a_2, a_3)$ H
1	100	621	620,8	0,99994	0,999811
2	200	621	621,0	1,00004	0,999928
3	400	621	621,6	1,00020	1,000394
4	1000	626	625,6	1,00338	1,000367
$\hat{a}_1 = \hat{R}_0 = 620,78 \Omega$, $\hat{a}_2 = \hat{L}_0 = 0,999810 \text{ H}$, $\hat{a}_3 = \hat{C}_0 = 98,5 \text{ pF}$, $\sqrt{Y} = 2,4 \times 10^{-4}$					

Wartość współczynnika Y pozwala na ocenę jakości dopasowanie rzeczywistej charakterystyki częstotliwościowej cewki do impedancji określonej schematem zastępczym. Może stanowić więc kryterium jakości analizowanego schematu. Jeśli porównywanych jest kilka schematów, to w świetle tego kryterium za najlepszy należy przyjąć ten, który zawiera najmniejszą wartość sumy kwadratów Y .

GRUPOWY WZORZEC INDUKCYJNOŚCI WŁASNEJ

Opracowane w ostatnich latach mostki transformatorowe umożliwiają pomiary indukcyjności z dokładnościami 10 ppm, tymczasem stabilność najlepszych wzorców indukcyjności własnej jest niewiele większa niż 100 ppm/rok (por. rozdz. 3 oraz [114]). Podstawowym sposobem przekroczenia tej bariery jest zastosowanie grupowego wzorca indukcyjności. Jest to starannie wybrana pod względem stabilności grupa wzorców, której elementy są porównywane między sobą z dużą dokładnością. Wyniki tych porównań umożliwiają wyznaczenie "wartości grupowej" i przetransformowanie jej

na wartości poszczególnych wzorców. Oceny te odznaczają się znacznie większą dokładnością i stabilnością niż wartości poszczególnych wzorców otrzymane z pomiarów bezwzględnych. Grupowy wzorzec indukcyjności jest przeznaczony zwykle do zrealizowania, zachowania i odtworzenia jednostki indukcyjności - henra [24].

Przygotowanie wzorca grupowego składa się z trzech etapów [24]:

- dobór grupy próbnej o liczebności większej niż docelowa,
- "hodowanie" wzorca grupowego,
- ustalenie ostatecznego składu wzorca grupowego i wyznaczenie jego elementów.

Sposoby realizacji poszczególnych etapów omówiono szczegółowo w pracy [24]. Ze względu na różne własności cewek, ich zmiany w funkcji częstotliwości i własności układów pomiarowych korzystne jest, aby grupowy wzorzec indukcyjności składał się z elementów o różnych wartościach nominalnych z zakresu od 10 mH do 1 H.

"Hodowanie" wzorca grupowego polega na kontroli wzajemnej stabilności wzorców w okresie kilku lat i wyborze takich elementów, które charakteryzują się przede wszystkim największą stabilnością przy odpowiedniej dokładności.

Podstawowymi problemami, które trzeba rozwiązać zarówno w przygotowaniu, jak i wykorzystaniu wzorca, jest opracowanie systemu wzajemnych porównań i opracowanie statystycznej metody analizy wyników pomiarów.

System wzajemnych porównań grupowego wzorca indukcyjności składającego się z elementów o różnych wartościach nominalnych zależy od własności układu porównania. Należy przede wszystkim włączyć do systemu te porównania, które odznaczają się znacznie większą dokładnością niż bezwzględne pomiary samych wzorców.

Spotykane w literaturze [10,24,60] statystyczne metody analizy wyników pomiarów grupowych wzorców były opracowywane zazwyczaj dla wzorców SEM, rezystancji lub pojemności i nie uwzględniały specyficznego charakteru grupowego wzorca indukcyjności własnej i stosowanych metod pomiaru indukcyjności. Wykorzystanie analizy wzorców grupowych innych wielkości do indukcyjności ograniczone jest głównie dużym zróżnicowaniem błędów pomiarów grupowego wzorca indukcyjności własnej i trudnościami w ustaleniu wag pomiarów.

Autor opracował [94] metody analizy wyników pomiarów grupowego wzorca indukcyjności własnej (rozdz. 12). Uwzględnia ona występowanie pomiarów niejednakowej dokładności i nie wymaga znajomości wszystkich wag. Przykład zastosowania opracowanej metody do analizy grupy wzorców indukcyjności znajdujących się w PKNM1J w Warszawie przedstawiono w rozdz.13.

12. Statystyczna ocena elementów grupowego wzorca indukcyjności

W rozdziale tym przedstawiono metodę wyznaczania estymatorów wartości wzorców w warunkach, gdy wagi nie są określone dla wszystkich pomiarów. Pomiary podzielono na dwie grupy: pomiary wartości bezwzględnych wzorców i wzajemne porównania wzorców. Wagi pomiarów są wyznaczane dla każdej grupy oddzielnie, co znacznie ułatwia rozwiązanie problemu, gdyż w obrębie każdej grupy pomiary są wykonywane tą samą aparaturą pomiarową. Zakłada się tylko, co jest zwykle spełnione, że porównania są dokładniejsze niż pomiary wartości bezwzględnych.

Estymatory wartości wzorców wyznaczono metodą najmniejszych kwadratów w przypadku, gdy porównania polegają na pomiarach różnic wartości wzorców, a następnie pokazano jak wykorzystać metodę, gdy porównania polegają na pomiarze wzajemnych stosunków indukcyjności. Konsekwencją podziału pomiarów na grupy jest wykonanie obliczeń w dwóch krokach; w pierwszym są wyznaczane estymatory różnic lub stosunków indukcyjności wzorców, a w drugim estymatory wartości wzorców.

Metoda została opracowana do analizy wyników pomiarów grupy wzorców indukcyjności, ale można ją stosować do grupy wzorców innych wielkości, jeśli są spełnione jej podstawowe założenia.

12.1. Sformułowanie problemu

Grupa wzorców składa się z $n+1$ elementów numerowanych od 0 do n , mających rzeczywiste wartości indukcyjności $\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_n$. Założono, że przynajmniej jeden wzorec z grupy ma zmierzoną wartość bezwzględną, a wyniki tych pomiarów $L_i = \mathcal{L}_i + \delta_i$, gdzie δ_i jest błędem pomiarów, są losowo niezależne, nie obciążone błędem systematycznym o wariancji $V[L_i] = \sigma_i^2$. Wariancje te są zazwyczaj nieznane, ale można oszacować ich wzajemne stosunki. Dla dowolnej liczby σ_L^2 stosunek $q_i = \sigma_L^2 / \sigma_i^2$ jest nazywany wagą pomiaru L_i , $i=0,1,\dots,n$. Dla wzorców, które nie mają zmierzonej wartości bezwzględnej, przyjęto $q_i=0$ (jako wynik pomiaru L_i takiego wzorca można przyjąć dowolną skończoną liczbę).

Zbiór różnic wartości rzeczywistych wzorców $\mathcal{D}_{ij} = \mathcal{L}_i - \mathcal{L}_j$ ($j < i$), mający $n(n+1)/2$ elementów, uporządkowano następująco: $\mathcal{D}_{10}, \mathcal{D}_{20}, \dots, \mathcal{D}_{n0}; \mathcal{D}_{21}, \mathcal{D}_{31}, \dots, \mathcal{D}_{n1}; \dots, \mathcal{D}_{n-1,n-2}, \mathcal{D}_{n,n-1}$. Założono, że pewne różnice są mierzone, a otrzymane wyniki $D_{ij} = \mathcal{D}_{ij} + \varepsilon_{ij}$ (ε_{ij} - błędy pomiarów) są losowo niezależne, nie obciążone błędami systematycznymi i mają wariancje $V[D_{ij}] = \sigma_{ij}^2$, których wzajemne stosunki są znane. Zbiór mierzonych różnic (porównań) musi być taki, aby dowolne dwa wzorce były porównane, jeśli nie bezpośrednio, to przynajmniej pośrednio przez inne wzorce. Jeśli warunek ten nie jest spełniony, to należy grupę odpowied-

nio podzielić na podgrupy, z których każda spełnia powyższy warunek. Dla dowolnego parametru σ_D^2 liczby $p_{ij} = \sigma_D^2 / \sigma_{ij}^2$ ($j < i$) są nazywane wagami pomiarów różnic. Dla $j > i$ zachodzi $D_{ji} = -D_{ij}$, $p_{ji} = p_{ij}$ oraz $p_{ii} = 0$, gdyż $D_{ii} = D_{ii} = 0$. Dla niemierzonych różnic - analogicznie jak w pomiarach wartości bezwzględnych - przyjmuje się $p_{ij} = 0$.

Założenie, że porównania są dokładniejsze niż pomiary wartości bezwzględnych rozumiane jest następująco: dla dowolnych dwóch wyników pomiarów L_i i L_j , ich wariancje σ_i^2 i σ_j^2 oraz wariancja σ_{ij}^2 wyniku pomiaru różnicy D_{ij} spełniają nierówność $\sigma_{ij}^2 \leq \max\{\sigma_i^2, \sigma_j^2\}$. Warunek ten jest zawsze spełniony, gdy przynajmniej jeden z pary wzorców L_i, L_j nie jest mierzony - wariancja takiego pomiaru jest równa nieskończoności.

Kluczowym zadaniem przedstawionej analizy jest wyznaczenie wag pomiarów p_i i q_i . Zwykle nie można ich wyznaczyć bezpośrednio z podanej definicji, gdyż wariancje pomiarów są nieznane i nie dysponuje się danymi pozwalającymi na ich oszacowanie. W metodzie najmniejszych kwadratów wystarczy znać wagi z dokładnością do stałej, a do tego celu można wykorzystać błędy graniczne Δ pomiarów charakteryzujące zastosowaną metodę i aparaturę pomiarową. Jeśli wszystkie pomiary danej grupy (różnic lub wartości bezwzględnych wzorców) są przeprowadzane za pomocą tej samej metody i aparatury pomiarowej, to można założyć, że sumaryczny błąd pomiaru Δ , będący wynikiem działania wielu niezależnych czynników, jest proporcjonalny do odchylenia standardowego σ , a więc $\Delta = k\sigma$. Współczynnik proporcjonalności k jest wprawdzie nieznany, ale taki sam dla wszystkich pomiarów danej grupy. Tak więc, jeśli Δ_i i Δ_j są znanymi błędami dowolnych dwóch pomiarów wykonanych za pomocą tej samej aparatury, to stosunek ich wariancji, a więc i wag, można wyznaczyć z wyrażenia

$$p_j/p_i = \sigma_i^2 / \sigma_j^2 = \Delta_i^2 / \Delta_j^2. \quad (12.1)$$

Podobnie można wyznaczyć wagi p_{ij} .

Założenia wyjściowe można sformułować następująco: znane są wyniki pomiarów L_i i D_{ij} , wartości wzorców i ich różnic; znane są wzajemne stosunki wariancji σ_i^2 , pomiarów bezwzględnych i wzajemne stosunki wariancji σ_{ij}^2 pomiarów różnic, które umożliwiają wyznaczenie wag q_i, p_{ij} , pomiary różnic są dokładniejsze niż pomiary bezwzględne w sensie zdefiniowanym poprzednio.

Opierając się na tych założeniach należy wyznaczyć, metodą najmniejszych kwadratów, estymatory rzeczywistych wartości wzorców różnic i ich wariancje.

Najpierw zostaną wyznaczone estymatory różnic, następnie estymatory wartości rzeczywistych wzorców.

Zastosowane te same oznaczenia na zmienne losowe opisujące wyniki pomiarów, jak i zaobserwowane wartości. Nie powoduje to niejasności, gdyż z tekstu wynika, które pojęcie jest omawiane.

12.2. Estymatory różnic $\mathcal{D}_{ij}$

Przypadek ogólny. Różnice trzech dowolnych wzorców L_i, L_j i L_k (dla uproszczenia rozwiązań założono, że $0 \leq k < j < i \leq n$) spełniają równanie

$$\mathcal{D}_{ij} = \mathcal{D}_{ik} - \mathcal{D}_{jk}. \quad (12.2)$$

Istnieje $n(n-1)(n+1)/6$ takich równań. Między nimi można wybrać maksymalny zbiór niezależnych równań składający się z $n(n-1)/2$ elementów, np. odnosząc różnice do jednego tylko wzorca L_0 :

$$\mathcal{D}_{ij} = \mathcal{D}_{i0} - \mathcal{D}_{j0}, \quad 0 < j < i \leq n. \quad (12.3)$$

Wyniki pomiarów $\mathcal{D}_{ij}$ są obciążone błędami pomiarów i zwykle nie spełniają równań (12.2). Zgodnie z zasadą najmniejszych kwadratów estymatory $\hat{\mathcal{D}}_{ij}$ różnic $\mathcal{D}_{ij}$ minimalizują ważoną sumę kwadratów

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j<i} p_i (\mathcal{D}_{ij} - \hat{\mathcal{D}}_{ij})^2 \quad (12.4)$$

i jednocześnie spełniają warunki (12.2). Stosując metodę elementów ([82], s. 261), która - jak wykazano [94] - daje w tym przypadku najprostsze obliczenia, można obliczyć estymatory różnic odniesionych do wzorca L_0 po rozwiązaniu równań normalnych [94], które w formie macierzowej ma postać

$$C \hat{\mathcal{D}}_0 = B, \quad (12.5)$$

gdzie

$$C = \begin{bmatrix} p_1 & -p_{12} & -p_{13} & \dots & -p_{1n} \\ -p_{21} & p_2 & -p_{23} & \dots & -p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & -p_{n2} & -p_{n3} & \dots & p_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} p_{10} d_{10} + p_{11} d_{11} + \dots + p_{1n} d_{1n} \\ p_{20} d_{20} + p_{21} d_{21} + \dots + p_{2n} d_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n0} d_{n0} + p_{n1} d_{n1} + \dots + p_{nn} d_{nn} \end{bmatrix},$$

$$p_i = p_{0i} + p_{1i} + \dots + p_{ni} \quad \text{dla } i=1, \dots, n \quad (p_{ji} = p_{ij}, p_{ii} = 0).$$

Tak więc i -ty diagonalny element symetrycznej macierzy C jest równy sumie wag odpowiadających wzorcowi L_i , natomiast i -ty element jednokolumnowej macierzy B jest równy "ważonej" sumie wyników pomiarów, $\mathcal{D}_{ij}$ odpowiadających i -temu wzorcowi.

Przy podanych założeniach macierz C jest nieosobliwa i istnieje jednoznaczne rozwiązanie równania (12.5):

$$\hat{D}_0 = C^{-1} B. \quad (12.7)$$

Po obliczeniu estymatorów $\hat{D}_{10}$ z powyższego wzoru, estymatory pozostałych różnic mostka można obliczyć ze wzoru

$$\hat{D}_{1j} = \hat{D}_{10} - \hat{D}_{j0}, \quad i, j = 0, \dots, n. \quad (12.8)$$

Macierz kowariancji estymatora $\hat{D}_0$ jest określona wzorem $\sigma_D^2 C^{-1}$ ([8] s. 183), stąd wariancja estymatora

$$V[\hat{D}_{10}] = \sigma_D^2 c_{11}, \text{ gdzie } [c'_{ij}] = C^{-1}.$$

Ogólnie wariancja dowolnego estymatora [94]

$$V[\hat{D}_{1j}] = \sigma_D^2 (c'_{11} - 2c'_{1j} + c'_{jj}). \quad (12.9)$$

Wartość parametru σ_D^2 występująca w powyższych wyrażeniach może być oszacowana ze wzoru

$$\sigma_D^2 = \sum_{i=0}^n \sum_{j < i} p_{ij} (\hat{D}_{1j} - D_{1j})^2 / (N-n), \quad (12.10)$$

gdzie N jest liczbą mierzonych różnic (dla których wagi są różne od zera). Jeśli mierzone są wszystkie różnice, to $N = n(n+1)/2$.

Porównania o jednakowej dokładności. Jeśli porównania mają jednakową dokładność, to powyższe wzory znacznie się upraszczają. Jeśli dodatkowo wszystkie wzorce są porównywane raz z jednakową dokładnością, to wagi pomiarów równe są 1 i macierz C przyjmuje prostą formę ($c_{11} = n$, $c_{ij} = -1$, gdy $i \neq j$), łatwą do odwrócenia:

$$C^{-1} = \frac{1}{n+1} \begin{bmatrix} 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 2 \end{bmatrix}.$$

Stąd oceny różnic:

$$\hat{D}_{1j} = \bar{D}_1 - \bar{D}_j, \quad i, j = 0, \dots, n, \quad (12.11)$$

gdzie $\bar{D}_1 = \sum_{j=0}^n D_{1j} / (n+1)$. A więc estymator $\hat{D}_{1j}$ wyraża się w prosty sposób jako funkcja wyników porównań odniesionych do wzorców L_1 i L_j . Wariancja $V[\hat{D}_{1j}] = 2\sigma_D^2 / (n+1)$. Oznacza to, że np. jeśli grupa składa się z ośmiu wzorców ($n=7$), to estymator $\hat{D}_{1j}$ ma dwukrotnie mniejsze odchylenie standardowe, a więc jest dwa razy dokładniejszy niż wynik pomiaru D_{1j} .

12.3. Estymatory wartości rzeczywistej wzorców

Rozważony zostanie obecnie problem znalezienia estymatorów $\hat{L}_0, \hat{L}_1, \dots, \hat{L}_n$ rzeczywistych wartości indukcyjności wzorców z wykorzystaniem wyników pomiarów $L_0, L_1, \dots, L_n$ oraz estymatorów $\hat{D}_{ij}$. Zgodnie z zasadą najmniejszych kwadratów wyznaczmy estymatory $\hat{L}_1$ minimalizujące ważoną sumę kwadratów

$$\sum_{i=0}^n q_i (L_i - \hat{L}_1)^2 \quad (12.12)$$

pod warunkiem, że spełnione są równania

$$\hat{L}_1 - \hat{L}_0 = \hat{D}_{10}, \quad i=1, \dots, n. \quad (12.13)$$

Po wyznaczeniu minimum warunkowego sumy (12.12) otrzymuje się wyrażenie

$$\hat{L}_1 = \sum_{i=0}^n q_i (L_i - \hat{D}_{10}) / q + \hat{D}_{10} = \hat{L}_0 + \hat{D}_{10}, \quad i=0, \dots, n \quad (12.14)$$

gdzie $q = q_0 + \dots + q_n$, które określa szukane estymatory.

Na mocy prawa propagacji błędów pomiarów wariancja estymatora [94]

$$V[\hat{L}_1] = \sigma_L^2 / q + \sigma_D^2 \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^n q_k q_l (c'_{kl} - 2c'_{kl} + c'_{il}) / q^2, \quad (12.15)$$

gdzie c'_{kl} są elementami macierzy C^{-1} dla $k, l=1, \dots, n$ oraz są równe zero, gdy przynajmniej jeden ze wskaźników k lub l jest równy zero (np. $c'_{k0} = 0$).

Wartość parametru σ_L^2 można oszacować z wyrażenia

$$\sigma_L^2 = \sum_{i=0}^n q_i (L_i - \hat{L}_1)^2 / (N_t - 1), \quad (12.16)$$

gdzie N_t jest liczbą wzorców mierzonych bezpośrednio, tj. takich, których wagi pomiarów q_i są różne od zera. Gdy porównania są znacznie dokładniejsze niż bezpośrednie pomiary wzorców, wtedy drugi człon we wzorze (12.15) można zaniedbać.

Pomiary bezwzględne o jednakowej dokładności. Jeśli pomiary bezwzględne mają jednakową dokładność, to wagi q_i przyjmują wartość równą 1 (wagi wzorców niemierzonych równe są zero).

Ważny i często spotykany jest przypadek, gdy spełnione są założenia:

- wszystkie wzorce mają wartość określoną w sposób bezwzględny z jednakową dokładnością: $q_0 = q_1 = \dots = 1$,
- wszystkie porównania są tak samo dokładne: $p_{ij} = 1$ dla wszystkich i oraz j .

Wtedy szukane estymatory (12.14) określone są prostym wyrażeniem:

$$\hat{L}_i = \bar{L} + \bar{D}_i, \quad i = 0, \dots, n, \quad (12.17)$$

gdzie $\bar{L} = (L_0 + L_1 + \dots + L_n)/(n+1)$. Tak więc estymator $\hat{L}_i$ jest równy sumie średniej arytmetycznej $\bar{L}$ bezpośrednich pomiarów i średniej arytmetycznej $\bar{D}_i$ różnic odnoszących się do i -tego wzorca. Wyrażenie to pokrywa się ze stosowanym powszechnie w laboratoriach wzorem podanym przez Thiesena [62].

12.4. Pomiary stosunków indukcyjności wzorców

Powyższą analizę można zastosować do przypadku, gdy porównania sprowadzają się do pomiarów stosunku wzorców. Narzucającym się sposobem przekształcenia ilorazów w różnice jest logarytmowanie, ale prowadzi ono do uciążliwych i niepraktycznych obliczeń. Obliczenia zostaną wykonane dla względnych odchyłek wzorców od ich wartości nominalnych. Obliczenia takie są szczególnie proste, gdy wzorce mają dziesiętne wartości (typu 10^k , $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

Niech N_i , $i=0, \dots, n$, oznacza wartość nominalną i -tego wzorca. Dokonywane są pomiary stosunków $R_{ij} = L_i/L_j$ wartości wzorców i otrzymywane wyniki $R_{ij} = \mathcal{R}_{ij} + \epsilon_{ij}$, o których założono, że są losowo niezależne, nie obciążone błędami systematycznymi i posiadają wariancję $V[R_{ij}]$ (ϵ_{ij} - błędy pomiarów).

Liczby ϵ_i definiowane równaniem $L_i/N_i = 1 + \epsilon_i$, $i=0, \dots, n$ nazywane są względnymi odchyłkami od wartości nominalnych N_i . Zastępując L_i w powyższym równaniu wynikiem pomiaru L_i , otrzymuje się wynik E_i pomiaru odchyłki ϵ_i :

$$E_i = L_i/N_i - 1, \quad i=0, 1, \dots, n, \quad (12.18)$$

mający wariancję $V[E_i] = V[L_i]/N_i^2$. Dla dowolnego parametru σ^2 wagi q_i obserwacji E_i wynoszą $q_i = \sigma^2/V[E_i] = \sigma^2 N_i^2/V[L_i]$. Tak więc wzajemne stosunki wag są w tym przypadku równe wzajemnym stosunkom kwadratów względnych błędów $(q_i/q_j = (L_j/N_j)^2/(L_i/N_i)^2)$.

Do określenia wag powinny być więc znane wzajemne stosunki błędów. W szczególnym przypadku, gdy wszystkie bezwzględne pomiary wzorców są wykonane z tym samym błędem względnym, wtedy $q_i = 1$, $i = 0, \dots, n$. Zazwyczaj $|\epsilon_i| \ll 1$, więc stosunki R_{ij} mogą być sprowadzone do różnic $\epsilon_i - \epsilon_j$ za pomocą wzorów

$$\epsilon_i = \epsilon_j = R_{ij} N_j/N_i - 1. \quad (12.19)$$

Podobnie, jeśli oznaczy się $\mathcal{D}_{ij} = \epsilon_i - \epsilon_j$, to warunki (12.2), które dla stosunków mają postać $R_{ij} = \mathcal{R}_{ik}/\mathcal{R}_{jk}$, sprowadzają się dla odchyłek ϵ_i do postaci (12.2). Na mocy (12.19) równanie

$$D_{ij} = R_{ij} N_j / N_i - 1; \quad i, j = 0, 1, \dots, n \quad (12.20)$$

określa wynik pomiaru różnicy $\mathcal{D}_{ij} = \varepsilon_{i2} - \varepsilon_{j2}$ odchyłek i ma wariancję $V[D_{ij}] N_j^2 / N_i^2$. Dla dowolnego parametru σ_R wagi p_{ij} obserwacji D_{ij} są równe $\sigma_R / V[D_{ij}]$. Tak więc można założyć, że wzajemne stosunki wag są równe wzajemnym stosunkom kwadratów względnych błędów pomiarów R_{ij} (w pomiarze różnic występowały bezwzględne błędy pomiarów). Jeśli np. wszystkie stosunki są mierzone z tym samym błędem, to $p_{ij} = 1$.

Wynika stąd, że obliczenia, w razie pomiarów stosunków, należy przeprowadzać następująco: najpierw należy obliczyć wartości E_i oraz D_{ij} ze wzorów (12.18) i (12.20), następnie ze wzoru (12.7) wyznaczyć estymatory $\hat{D}_{i0}$ różnic $\mathcal{D}_{i0} = \varepsilon_i - \varepsilon_0$ odchyłek i ze wzoru (12.14) estymatory $\hat{E}_i$ odchyłek, w końcu przejść od odchyłek do estymatorów wartości rzeczywistych wzorców na podstawie wzoru (por.(12.18)):

$$\hat{\Gamma}_i = N_i (1 + \hat{E}_i), \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (12.21)$$

Wzory określające wariancje są takie same jak dla różnic, z tym, że odnoszą się do odchyłek.

12.5. Podsumowanie

Proponowana metoda znajdowania estymatorów wartości indukcyjnych grupowego wzorca indukcyjności jest prosta i może być stosowana również do wzorców grupowych innych wielkości. Odznacza się ona stosunkowo małymi komplikacjami w obliczeniach w porównaniu z innymi metodami. Na przykład główne zadanie obliczeniowe polega na odwróceniu macierzy C rzędu $(n-1) \times (n-1)$, podczas gdy w metodzie proponowanej przez Hughesa [60] odpowiednia macierz, którą trzeba odwrócić, ma wymiar $(n+1) \times (n+1)$. Zaletą metody jest również to, że wyeliminowanie wzorców z grupy, wykazujących np. małą stabilność, wymaga jedynie zmiany wag. Obliczenia przebiegają według tego samego algorytmu.

Proponowana metoda wykazuje wiele zalet zarówno w pomiarach o jednakowej, jak i niejednakowej dokładności, i łatwo można ją uogólnić do przypadku, gdy wyniki pomiarów są losowo zależne [94].

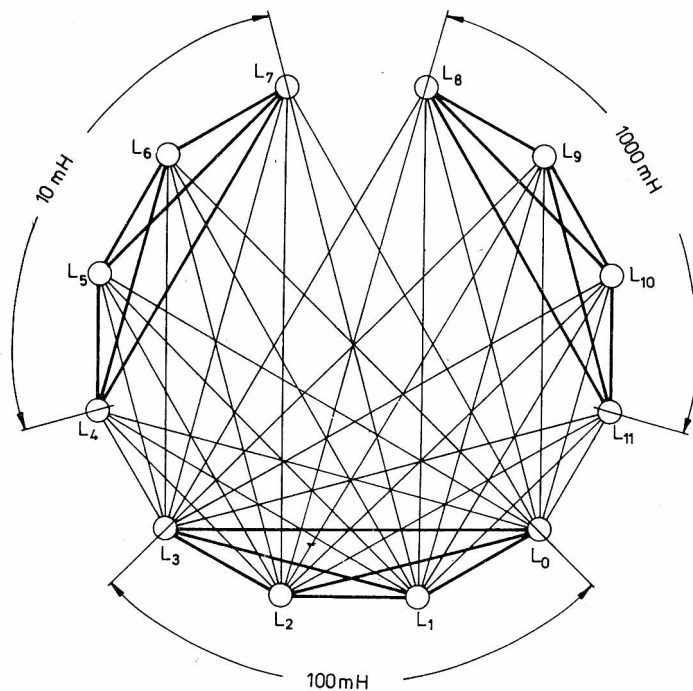
13. Obliczenia grupy wzorców indukcyjności (PKNMiJ)

Przedstawioną w poprzednim punkcie metodę statystyczną oceny wzorców zastosowano do estymacji grupy wzorców indukcyjności znajdujących się w PKNMiJ w Warszawie. Grupa składa się z dwunastu wzorców typu 1482 firmy GR, podzielonych na trzy podgrupy: wzorce L_0, L_1, L_2, L_3 o wartości nominalnej 100 mH, wzorce L_4, L_5, L_6, L_7 - 10 mH i wzorce L_8, L_9, L_{10} ,

$L_{11} - 1 \text{ H}$. Do obliczeń wykorzystano wyniki porównań między wzorami wykonane w PKNMiJ oraz pomiary bezwzględne zamieszczone w świadectwach wzorców, a ponadto dla wzorców L_0 , L_4 i L_8 świadectwa wydane przez NBS i WNIIMM.

13.1. Estymatory różnic

Schemat porównań przedstawiono na rys.13.1. Kółka reprezentują wzorce, a linie ciągłe - porównania. Otrzymane wyniki zestawiono w tabeli 13.1. Błędy względne poszczególnych pomiarów oszacowano następująco: porównania 100/100 mH - 10 ppm, 10/10 mH i 1000/1000 mH - 15 ppm, 10/100 mH i 100/1000 mH - 30 ppm. Dla porównań obciążonych błędem 30 ppm przyjęto wagi p_{ij} równe 1, dla pozostałych porównań obliczono je metodą podaną w punkcie 12.4 (tab.13.1).



Rys.13.1. Schemat porównań grupy wzorców indukcyjności
Fig.13.1. Comparison scheme of a group of inductance standards

Na podstawie danych z tab.13.1 i wzorów (12.6) obliczono elementy macierzy C i B , a następnie macierz C^{-1} . Wzór (12.7) dla analizowanego przykładu ma postać

Wyniki porównań D_{ij} wzorców i ich wagi p_{ij} (PKNMiJ Warszawa)

Wagi p_{ij} porównań L_i z L_j												
L_j	100 mH				10 mH				1000 mH			
	L_0	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6	L_7	L_8	L_9	L_{10}	L_{11}
L_1												
L_0		9	9	9	1	1	1	1	1	1	1	1
L_1	-19		9	9	1	1	1	1	1	1	1	1
L_2	-544	-533		9	1	1	1	1	1	1	1	1
L_3	-38	-21	494		1	1	1	1	1	1	1	1
L_4	-283	-235	264	-215		4	4	4	0	0	0	0
L_5	-195	-182	324	-162	49		4	4	0	0	0	0
L_6	-578	-560	-67	-536	-336	-389		4	0	0	0	0
L_7	-554	-527	16	-513	-278	-320	51		0	0	0	0
L_8	2845	2833	3400	2886	-	-	-	-		4	4	4
L_9	2699	2701	2265	2760	-	-	-	-	-130		4	4
L_{10}	2670	2668	3227	2708	-	-	-	-	-182	-51		4
L_{11}	3022	3032	3592	3083	-	-	-	-	187	308	361	

 $D_{ji} = -D_{ij}$ $D_{ii} = 0$, $p_{ji} = p_{ij}$, $p_{ii} = 0$. Temp. 23.5 °C, częstł. 1 kHzPrzekształcone wyniki porównań L_i z L_j :
 $D_{ij} = R_{ij} N_j / N_i - 1$ (ppm)

$$\hat{D}_0 = C^{-1}B = \frac{1}{880} \begin{bmatrix} 40 & 20 & 20 & 20 & 20 & 20 & 20 & 20 & 20 & 20 & 20 \\ 20 & 40 & 20 & 20 & 20 & 20 & 20 & 20 & 20 & 20 & 20 \\ 20 & 20 & 40 & 20 & 20 & 20 & 20 & 20 & 20 & 20 & 20 \\ 20 & 20 & 20 & 103 & 59 & 59 & 59 & 15 & 15 & 15 & 15 \\ 20 & 20 & 20 & 59 & 103 & 59 & 59 & 15 & 15 & 15 & 15 \\ 20 & 20 & 20 & 59 & 59 & 103 & 59 & 15 & 15 & 15 & 15 \\ 20 & 20 & 20 & 59 & 59 & 59 & 103 & 15 & 15 & 15 & 15 \\ 20 & 20 & 20 & 15 & 15 & 15 & 15 & 103 & 59 & 59 & 59 \\ 20 & 20 & 20 & 15 & 15 & 15 & 15 & 59 & 103 & 59 & 59 \\ 20 & 20 & 20 & 15 & 15 & 15 & 15 & 59 & 59 & 103 & 59 \\ 20 & 20 & 20 & 15 & 15 & 15 & 15 & 59 & 59 & 59 & 103 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4915 \\ -28160 \\ -6096 \\ 1791 \\ 2817 \\ -4845 \\ -3766 \\ 12464 \\ 9877 \\ 8897 \\ 16153 \end{bmatrix}$$

Po pomnożeniu powyższych macierzy otrzymuje się estymatory różnic:

$$\hat{D}_0^T = [-16, -544, -43, -261, -210, -593, -539, 2842, 2713, 2664, 3026] \text{ (ppm)}.$$

Wartość parametru σ_D^2 oszacowana ze wzorów (12.9) i (12.10) dla liczby porównań $N = 50$ wynosi 169×10^{-12} . Uwzględniając wzór $V[\hat{D}_{10}] = \sigma_D^2 c_{ii}'$, określający wariancje estymatorów różnic D_{10} , otrzymuje się $V[\hat{D}_{10}] = V[\hat{D}_{20}] = V[\hat{D}_{30}] = 7,7 \times 10^{-12}$, $V[\hat{D}_{40}] = \dots = V[\hat{D}_{110}] = 20 \times 10^{-12}$. A więc błędy (3σ) estymatorów różnic wynoszą: 7,4 ppm dla $\hat{D}_{10}$, $\hat{D}_{20}$ i $\hat{D}_{30}$ oraz 13,5 ppm dla $\hat{D}_{40}, \dots, \hat{D}_{110}$.

13.2. Estymatory wartości wzorców

Wyniki L_1 bezwzględnych pomiarów wzorców po przetransformowaniu na odchyłki E_1 za pomocą wzoru (12.18) przedstawiono w tab.13.2. Wagi q_1 odchyłek E_1 wyznaczono po przyjęciu wartości q_1 równej 1 dla wyników pomiarów obarczonych błędem 200 ppm i zastosowaniu wzoru (12.1) dla pozostałych wyników pomiarów. Otrzymane wyniki zamieszczono w tab.13.2.

Wartość estymatora $\hat{E}_0$ obliczono ze wzoru

$$\hat{E}_0 = \sum_{i=0}^{11} q_i (E_i - \hat{D}_{10}) / q$$

(por. wzór (12.14)), a pozostałe estymatory ze wzoru

$$\hat{E}_i = \hat{E}_0 + \hat{D}_{10}, \quad i=1, \dots, 11$$

(tab.13.2). Wartość ocen $\hat{L}_1$ oblicza się ze wzoru (12.21), np. dla $i=0$, $\hat{L}_0 = 100(1 + \hat{E}_0) = 100(1 + 192 \times 10^{-6}) = 100,0192 \text{ mH}$.

W celu obliczenia błędów estymatorów oszacowano najpierw wartość parametru σ_L^2 ze wzoru (12.16), stąd otrzymano wyniki $\sigma_L^2 = 4886 \times 10^{-12}$. Porównania w analizowanym przykładzie są znacznie dokładniejsze niż bezwzględne pomiary, a więc drugi człon wzoru (12.15) można zaniedbać.

T a b e l a 13.2

Transformowane wyniki bezwzględnych pomiarów E_i i ich estymatory $\hat{E}_i$
(wzorców PKNMJJ, Warszawa)

Wzory	L_0	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6	L_7	L_8	L_9	L_{10}	L_{11}
$E_i = L_i/N_i - 1$ (ppm)	108 ^a	180	-310	260	-67 ^a	20	-340	-400	3085	2990	2910	3020
błąd δL_i (ppm)	115	200	200	200	115	200	200	200	200	500	500	500
waga q_i pom. L_i	3	1	1	1	3	1	1	1	1	0,16	0,16	0,16
$E_i - \hat{D}_{i0}$ (ppm)	108	196	234	303	194	230	253	139	243	277	246	-6
$\hat{E}_i = \hat{E}_0 + \hat{D}_{i0}$ (ppm)	192	176	-352	149	-69	-18	-401	-347	3034	2905	2856	3218
Temp. 23,5 °C, częstotl. 1 kHz												

^a Średnia arytmetyczna trzech niezależnych wyników pomiarów tej samej dokładności

Wariancje estymatorów $\hat{E}_1$ są w przybliżeniu takie same i wynoszą $V[\hat{E}_1] = 367 \times 10^{-12}$, a w rezultacie błędy wszystkich estymatorów (30) wartości wzorców $\hat{E}_1$ (oraz $\hat{L}_1$) są takie same i wynoszą 57 ppm. Estymatory L_1 są więc 2 - 4 razy dokładniejsze niż wynoszą dokładności bezwzględnych pomiarów L_1 wzorców (por. tab.13.2).

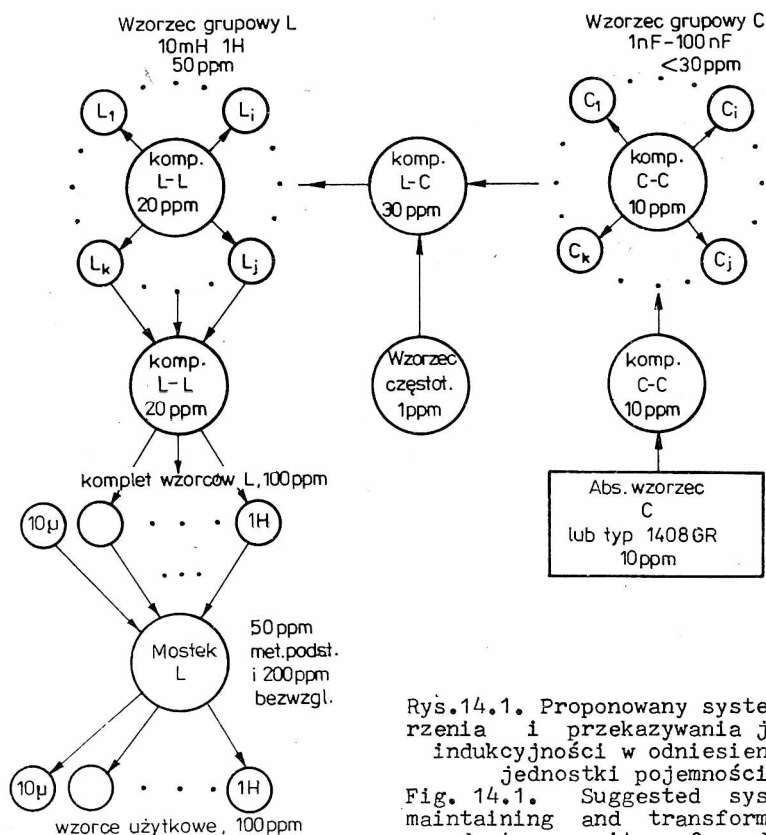
Przeprowadzona analiza pozwala również na kontrolę stabilności poszczególnych wzorców, co ma duże znaczenie szczególnie w okresie "hodowania" wzorca grupowego. W tym celu należy śledzić zachowanie się w czasie różnic $L_1 - \hat{L}_1$ (lub $E_1 - \hat{E}_1$) bezwzględnych pomiarów i ich estymatorów. W rozpatrywanym przykładzie różnice te nie przekraczają rocznej stabilności wzorców 100 ppm z wyjątkiem wzorca L_3 (por. tab. 13.2), dla którego $E_1 - \hat{E}_1 = 111$ ppm. Wzorzec ten należy poddać kontroli i w razie utrzymywania się zmian jego wartości wymienić lub usunąć z grupy.

14. Propozycja systemu odtworzenia i przekazania jednostki indukcyjności

Bezwzględną wartość indukcyjności można określić (odtworzyć jednostkę indukcyjności) za pomocą liczalnego wzorca indukcyjności własnej lub przez odniesienie do liczalnego wzorca pojemności. Drugi sposób jest obecnie częściej stosowany, gdyż liczarne wzorce pojemności wykazują znacznie lepsze własności metrologiczne niż liczarne wzorce indukcyjności. Powoduje to rozwój komparatorów L-C, którym poświęcono dużo uwagi w pracy.

Poniżej przedstawiono propozycję odtworzenia, przekazywania i realizacji jednostki indukcyjności. Propozycja dotyczy systemu przystosowanego do warunków krajowych. Możliwość realizacji takiego systemu potwierdzają wykonane w IME prototypy komparatorów i wyniki badań. System (rys.14.1) jest oparty na liczalnym (absolutnym) wzorcu pojemności. Ze względu jednak na brak takiego wzorca można go zastąpić odpowiednio dokładnym wtórnym wzorcem pojemności. Wystarczające do tego celu parametry ma wzorzec pojemności firmy GR typu 1408 o wartości 10 pF i 100 pF.

Wzorzec absolutny lub zastępujący go wzorzec wtórny służą do określenia wartości elementów grupowego wzorca pojemności. A te wartości z kolei za pomocą komparatora L-C wyznaczają indukcyjność grupowego wzorca indukcyjności. Najlepiej do tego celu nadaje się mostek kombinowany lub komparator impedancji, opracowany przez Dunna i Tsao. Wartości nominalne porównywanych wzorców dobiera się tak, aby otrzymać możliwie największą dokładność porównania dla określonej częstotliwości. Porównania między elementami wzorca grupowego oraz przeniesienie wartości z wzorca grupowego na podstawowy komplet użytkowych wzorców indukcyjności przeprowadza się za pomocą transformatorowego komparatora L-L, np. układu proponowane



Rys.14.1. Proponowany system odtworzenia i przekazywania jednostki indukcyjności w odniesieniu do jednostki pojemności

Fig. 14.1. Suggested system for maintaining and transforming inductance unit, referred to capacitance unit

go przez Hillhouse'a. Wartość indukcyjności jest przekazywana z podstawowego kompletu wzorców na inne wzorce użytkowe, kontrolowane okresowo, metodą podstawienia za pomocą mostka Maxwella-Wiena o podwyższonej dokładności. Mostek ten jest znacznie wygodniejszy w obsłudze niż komparator L-L.

Proponowany system powinien zapewnić dokładność wzorcowania użytkowych wzorców indukcyjności z dokładnością lepszą niż 0,01%, a więc na poziomie określonym stabilnością najlepszych produkowanych obecnie wzorców indukcyjności.

PODSUMOWANIE

W pracy przedstawiono aktualny stan i tendencje rozwojowe precyzyjnych pomiarów indukcyjności w zakresie małych częstotliwości. Jak to już

podkreślono, seryjnie produkowana aparatura pomiarowa umożliwia pomiary indukcyjności z dokładnością 0,1%. Są to zazwyczaj zmiennoprądowe mostki Wheatstone'a: Maxwella-Wiena, Maxwella i Owena. Do pomiarów o dokładności większej niż 0,1% jest wytwarzana wyspecjalizowana aparatura pomiarowa. W zakresie 0,1-0,02% są wykonywane mostki Maxwella-Wiena i Andersona. Do najdokładniejszych pomiarów (o błędzie 0,01% i mniejszym) najlepiej nadają się układy transformatorowe. Stosowane są dwa typy tych układów: do wzajemnych porównań indukcyjności (L-L) i do pomiarów indukcyjności względem pojemności (L-C). Do wzajemnych porównań indukcyjności wykorzystuje się zazwyczaj komparator indukcyjności proponowany przez Hillhouse'a. Osiągana dokładność takich porównań wynosi 10 ppm. Do absolutnego określenia indukcyjności względem pojemności różne laboratoria stosują własne rozwiązania o dokładności 100-30 ppm. Rolę taką w warunkach krajowych może spełniać zaprojektowany i wykonany przez autora kombinowany mostek L-C.

Rozwój układów transformatorowych umożliwił obecnie pomiary indukcyjności z dokładnościami przewyższającymi stałość wzorców, która dla najlepszych produkowanych obecnie wzorców indukcyjności wynosi 0,01%/rok. Przekroczenie tej bariery wymaga zastosowania grupowych wzorców indukcyjności. Korzystniejsze jest zestawienie wzorca grupowego z cewek o różnych wartościach nominalnych. Wynika to głównie z dwóch przesłanek: z istotnych zmian indukcyjności z częstotliwością oraz z tego, że lepsze jest porównanie L-C cewek o różnych wartościach nominalnych dla różnych częstotliwości.

Pełny opis własności cewek indukcyjnych, a szczególnie wzorców indukcyjności, wymaga wyznaczenia z odpowiednią dokładnością ich charakterystyki częstotliwościowej. Do tego celu służą schematy zastępcze cewek, którym autor poświęcił w pracy wiele miejsca. Wybór schematu zastępczego i sposób wyznaczania wartości jego elementów zależą od rodzaju cewki, typu aproksymacji (zmian indukcyjności czy impedancji) i zakresu częstotliwości. Zagadnienie to można rozwiązać przez stosowanie precyzyjnych pomiarów indukcyjności przy różnych częstotliwościach, a następnie wyznaczenie elementów schematu zastępczego metodą najmniejszych kwadratów. Metoda ta umożliwia jednocześnie ocenę dokładności aproksymacji i wybór najlepszego schematu zastępczego.

Podsumowaniem rozważań jest propozycja systemu odtwarzania jednostki indukcyjności, który zapewniłby pomiary indukcyjności na osiąganym obecnie poziomie dokładności. System taki obejmuje w zasadzie większość poruszanych w pracy zagadnień i choć niektóre z nich wymagają analiz i badań, to należy się liczyć z tym, że ciągły rozwój metod i środków i w tej dziedzinie będzie wymagał rozwijania zastosowania mikroprocesorów do automatyzacji równoważenia, jak i obliczeń wyników końcowych.

Literatura

- [1] Arri E., Noce G., A high accuracy self-calibrating bridge with coupled inductive ratio arms used for standard inductors comparison, IEEE Trans. Instrum. Meas., vol. IM-23, March 1974.
- [2] Arytjunov V.O., Osnovy sovershenstvovaniya sistemy etalonov edinic električeskich veličin, Izmeritelnaja Technika Nr 10, 1974.
- [3] Bloch A., Temperature coefficient of air-cored self-inductances, Wireless Engng., vol. 21, No 8, 1944.
- [4] Bogle A.G., The effective inductance and resistance of screened coils, JIEE, vol. 87, September 1940.
- [5] Boháček J., Fajtl V., A transformer bridge for the measurement of inductances, 9-th IMEKO World Congress Berlin 24-28 May 1982 (preprint vol. V/V).
- [6] Brandt A., Metody statystyczne i obliczeniowe analizy danych, PWN, Warszawa 1976.
- [7] Breit G., Distributed capacity of inductance coils, Phys. Review, June 1921.
- [8] Calvert R., The transformer ratio-arm bridge, Instruments and Control Systems, No 34, 1961.
- [9] Campbell A., On a standard of mutual inductance. Proc. Roy. Soc. (London), A 79, 1907.
- [10] Cardfelt O., The use of an electric network analogue in least square method evaluations of measurements, Metrologia vol. 5, No 2, 1969.
- [11] Cejtlín L.A., Induktivnosti provodov i konturov, Gosenergoizdat, Moskva 1950.
- [12] Cholewicki T., Elektrotechnika teoretyczna, WNT, Warszawa t. 1 - 1973, t. 2 - 1972.
- [13] Clark H.A.M. Wanderlyn P.B., AC bridges with inductively coupled ratio arms, Proc. IEE (London), vol. 96, May 1949.
- [14] Connor J.A., Measuring distributed capacitance of coil, Electronics, November 1951.
- [15] Calvert R., The transformer ratio-arm bridge, Wayne Kerr Monograph No 1, New Malden, Surrey, 1964.
- [16] Cook, Theory of Wagner ground balance, J. Res. Bur., Stand. 40(1948).
- [17] Curtis, Hartman, A dual bridge for the measurement of self inductance in term of resistance and time, Bur. Stand. Journ. Res., 25, 1940.
- [18] Curtis, Monn and Sparks, A determination of the absolute ohm using improved self-inductor, NBS Journ. Res. 21, 1938.
- [19] Cutkosky R.D., New NBS measurements of the absolute farad and ohm, IEEE Trans. on Instrum and Meas, vol IM 23, December 1974.
- [20] Cutkosky R.D., Four-terminal-pair networks as precision admittance and impedance standards, Commun. Electronics, vol. 70 January 1964.
- [21] Cutkosky R.D., Shields J.Q., The precision measurement of transformer ratios, IRE Trans on Instrum, vol 1-9, 1960.
- [22] Davis M., The ratio transformer in a calibration laboratory, Instruments and Control Systems, January 1967.
- [23] Demidowicz B.P., Maron I.A., Metody numeryczne, cz.I. PWN, Warszawa 1965.
- [24] Dix C.H., Bailey A.E., Electrical standards of measurement, Proc. IEEE, No 10R, 1975.
- [25] Dudziewicz S. (red.) Etalony i precyzyjne pomiary wielkości elektrycznych, WKiŁ, Warszawa 1982.
- [26] Dudziewicz J., Pomiary teletransmisyjne, WKiŁ, Warszawa 1975.

- [26] Dudziewicz J., Podstawy elektromagnetyzmu, WNT, Warszawa 1972.
- [27] Dummer G.W., Inductors, Pitman and Sons, London 1957.
- [28] Dunn A.F., Tsao S.H., Ratio comparisons of impedance standards, IEEE Trans. Instrum Meas, vol IM-15, December 1969.
- [29] Dunn A.F., Primary electrical units at the National Research Council of Canada, Metrologia vol. 4, October 1968.
- [30] Dwight H.B., Electrical coils and conductors, Mc Graw-Hill, 1945.
- [31] Ebert J., Rezonanse wielokrotne cewek indukcyjnych, Archiwum Elektrotechniki z. 1, 1968.
- [32] Ebert J., Parametry cewek indukcyjnych w zakresie wielkich częstotliwości, Archiwum Elektrotechniki z. 1, 1965.
- [33] Ebert J., Pomiar indukcyjności i pojemności własnej cewek indukcyjnych w zakresie wielkich częstotliwości, PAK Nr 10/11, 1963.
- [34] Ebert J., Optymalne rozmiary solenoidu w ekranie, Archiwum Elektrotechniki z. 1, 1967.
- [35] Ebert J., Wpływ dielektryka na pojemność własną i dobroć cewki solenoidalnej, Archiwum Elektrotechniki z.1, 1974.
- [36] Ebert J., Improving of standard inductors and capacitors accuracy, Acta IMEKO 1979, 3.
- [37] Ebert J., Four-terminal parameters of h.f. inductors, Bull. de l'Acad. Pol. des Sc., vol. XVI, No 5, 1968.
- [38] Fajt V., Boháček J., Etalonaz vlastni indukčnosti (Standardization of self inductance), Slaboproudý Obzor 39, Nr 1, 1978.
- [39] Fiebigler A., Dröge K., Bestimmung der Temperaturkoeffizient von Induktivitätsnormalen des Typs GR 1482, PTB-Mitteilungen 94, 1/1984.
- [40] Ford H.L., Rayner G.H., The stability of inductance standards, Jour. of Sci. Instr. vol. 27, No 1, 1950.
- [41] Goworkow W.A., Pola elektryczne i magnetyczne, WNT, Warszawa 1962.
- [42] Griffiths, Inductance of high permanence, Journ. Sci. Instr. 6, 1929.
- [43] Grover F.W., Inductance calculations, Von Nostrand, New York 1946.
- [44] Guščina T.M., Kuročkin F.J., Krotkov I.N., Peredača rozmerov edinic električeskoj jomkosti, soprotivlenija, induktivnosti v novoj sisteme etalonov, Izmeritel'naja Technika Nr 4, 1976.
- [45] Hahnemann H., Resonanzmessbrücke für frequenzabhängige Präzisionsmessungen von Induktivitätsnormalen, ELEKTRIE 35 (1981) H.3.
- [46] Hague B., Alternating current bridge methods, Sir Isaac Pitman and Sons Ltd, London 1957.
- [47] Hague B., Ford F.R., Alternating current bridge methods, Pitman Publ. 1971.
- [48] Hall H.P., A digital impedance comparator with high resolution, IEEE Trans. Instr. Meas. vol. IM-29, December 1980.
- [49] Hanks R., An alternating current bridge for comparing four-terminal-pair impedances at $\omega = 10^4$ rad/s, IEEE Trans. Instrum.Meas. vol. IM-31, September 1982.
- [50] Harris F.K., Electrical measurements, Wiley, Inc. 1952.
- [51] Harrison P.W., Rayner G.H., A primary standard of mutual inductance, Metrologia, vol. 3, January 1967.
- [52] Hartshorn, Denton, The calibration of inductance standards at radio frequencies, Proc. IER, pt. B, vol. 103, July 1956.
- [53] Hersh J.F., Connection errors in inductance measurement, Gen. Rad. Experimenter vol. 34, October 1960.
- [54] Hersh J.F., A close look at connection errors in capacitance measurements, Gen. Rad. Experimenter, July 1959.

- [55] H e r s h J.F., New standard inductors, Gen. Rad. Experimenter, vol. 34, October 1960.
- [56] H e r t w i g H., Induktivitäten, Verlag für Radio-Foto Kinotechnik, GMBH, Berlin-Borsgiwalde 1954.
- [57] H i l l h o u s e D.L., Resonant capacitance-inductance transfer using the ratio transformer, IEEE Trans, Commun. Electron. vol.82, January 1963.
- [58] H i l l h o u s e D.L., K l i n e J.W., A ratio transformer bridge for standarization of inductors and capacitors, IRE Trans. Instr. vol. I-9, September 1960.
- [59] H o l t j e M.C., H a l l H.P., A high-precision impedance comparator, Gen. Rad. Experimenter, April 1956.
- [60] H u g h e s C.G., M u s k H.A., A least squares method for analysis of pair comparison measurement, Metrologia vol. 8, 1972.
- [61] Instrukcija 179-55 po proverke katušek induktivnosti wzaimnoj induktivnosti i magazinov induktivnosti, Komitet Standartov Mer i Izmeritelnyh Proborov, Moskva 1957.
- [62] J a e g e r W., Elektrische Messtechnik, Verlag von Johann Ambrosius Barth, Leipzig 1928.
- [63] J e l l o n e k A., Pomiarы pojemności własnej cewek indukcyjnych, Rozprawy Elektrotechniczne, z.3, 1958.
- [64] J e l l o n e k A., Miernictwo radiotechniczne, PWT, Warszawa 1952.
- [65] J e l l o n e k A., K a r k o w s k i Z., Miernictwo radiotechniczne, WNT, Warszawa 1972.
- [66] K a l a n t a r o v P.L., C e j t l i n L.A., Rasclot induktivnostej, Gosenergoizdat, Moskva 1955.
- [67] K a r a n d e e v K.B., Pomiarы elektryczne metodami mostkowymi i kompensacyjnymi, WNT, Warszawa 1969.
- [68] K a r a n d e e v K.B., Mostovye metody izmerenij, Gostechizdat, Moskva 1953.
- [69] K a r a n d e e v K.B., Metody električeskich izmerenij, Gostechizdat, Moskva 1952.
- [70] K a r a n d e e v K.B., (red.), Transformatornye izmeritelnye mosty, Energija, Moskva 1970.
- [71] Katalog firmy Sullivan, Electrical standards and measuring instruments for research and industry, 1965.
- [72] Katalogi firm: General Radio 1978 i Vishy 1980.
- [73] Katalog firmy General Radio, Impedance Standards, January 1971.
- [74] K l a r n e r - S n i a d k o w s k a M., Niektóre zagadnienia projektowania i konstrukcji wzorców indukcyjności oraz przykłady rozwiązań praktycznych, Wyd. PKNMiJ, Komunikat 1/75, Warszawa 1975.
- [75] K ł o s Z., M u c i e k A., P ł o c i e n i a k R., Komparator wzorców indukcyjności własnej, Raport nr 149, Inst. Metrol. PWr., Wrocław 1978.
- [76] K o H a r a , An absolute determination of the henry, Res.Electr. Lab. 608, Tokyo 1961.
- [77] K r o t k o v I.N., Vosproizvedenie edinicy električeskovo soprotivlenija ZSRR, Trudy VNIIMM, wys. 31/91, 1957.
- [78] K r o t k o v I.N., Točnye izmerenija električeskich jomkosti i induktivnosti, Izdat. Standartov, Moskva 1966.
- [79] L a m s o n H.W., Measurement of self capacitance, Electronic Eng. November 1956.
- [80] Le Bureau International des Poids et Mesures 1875-1975, Electricite, Sevres 1975.
- [81] L i n c k h H.E., B r a s a c k F., Eine Methode zur Bestimmung des Widerstandswertes aus Induktivität, Metrologia vol.4, July 1968.
- [82] L i n n i k J.W., Metoda najmniejszych kwadratów i teoria opracowania obserwacji. PWN, Warszawa 1962.
- [83] L i v š i c E.S., Novšie mosty peremennovo toka powyžšionnoj točnosti, Izmeritel'naja Technika Nr 4, 1963.

- [84] L i v š i c E.S., Metody izmerenija koeficienta dobrotnosti katusek induktivnosti, Izmeritel'naja Technika. Nr 11, 1963.
- [85] List prywatny firmy General Radio.
- [86] Luneburger, Frequenzverhalten von Induktivitätsnormalen, Elektrische 29 (1975), H.4.
- [87] M a l k i n a D.G., Izmerenie kompleksnykh soprotivlenij metodom magnitosvjaznykh cepej, Izmeritel'naja Technika. Nr 6, 1959.
- [88] M i l l e a A., I l i e P., A class of double-balance quadrature bridges for the intercomparison of three terminal resistance, inductance and capacitance standards, Metrologia vol.5, January 1969.
- [89] M o s t a f a A.E., G o k a r M.K., Determination of volt, current and magnetic field distribution together with self capacitance inductance and R.F. resistance of single layer coil, PIRE, 41. 1953.
- [90] M o u l l i n E., The Proc. of the Institute of Elektr. Ing. vol. 96, 1949.
- [91] M u c i e k A., A combined transformer bridge for precise comparison of inductance with capacitance, IEEE Trans. Instrum. Meas. vol. IM-32. September 1983.
- [92] M u c i e k A., The frequency characteristic of an air-core inductance standards, Archiwum Elektrotechniki vol. 27, No 4, 1978.
- [93] M u c i e k A., A combined transformer bridge for precise comparison of inductors and capacitors, conf. (digest) on Precision Electromagnetic Measurements, CPEM'80, Braunschweig, June 23-27, 1980.
- [94] M u c i e k A., A least squares method for pair comparison measurements analysis, Proceedings of 4th International Symposium IMEKO TC7, Measurement and Estimation, Bressanone, Italy, May 1984.
- [95] M u c i e k A., Absolutne wzorce indukcyjności własnej, Normalizacja Nr 8, 1978.
- [96] M u c i e k A., Obliczanie błędów w niektórych pomiarach pośrednich, Pomiary Automatyka Kontrola Nr 3, 1978.
- [97] M u c i e k A., Komparacja wzorców indukcyjności własnej z wzorcami pojemności i rezystancji, Prace nauk. Inst. Metrol. PWr., nr 10, Wrocław 1976.
- [98] M u c i e k A., Metoda wyznaczania wartości wzorców indukcyjności w odniesieniu do wzorców pojemności, Komunikat nr 140, Inst. Metrol. PWr., Wrocław 1975.
- [99] M u c i e k A., Wyznaczanie parametrów dwójnika elektrycznego metodą najmniejszych kwadratów, Komunikat nr 151, Inst. Metrol. PWr., Wrocław 1975.
- [100] M u c i e k A., Kombinowany mostek transformatorowy do dokładnych porównań indukcyjności z pojemnością, Raport nr 38, Inst. Metrol. PWr., Wrocław 1980.
- [101] M u c i e k A., Z b o r u c k i A., Komparacja wzorca indukcyjności z wzorcem pojemności w układzie z transformatorem stosunkowym, Rozprawy Elektrotechniczne nr 1, 1979.
- [102] N a g a o k a , S a k u a r i , Tables for facilitating the calculation of self-inductance of circular coil and of coaxial circular currents, Tokio 1927.
- [103] N e u m a n K., Präzisionsmessungen von Induktivitäten, Elektrische 29 (1975) H.4.
- [104] N e w s c a m e J.P., Measurement of the self-capacitance of an inductor at high frequencies, Electronic Eng., August 1956.
- [105] N i ż n i j S.M., Mery i magazyny jomkostej, induktivnostej i wzaimnych induktivnostej, Izd. Energija, Moskva 1967.
- [106] N i ż n i j S.M., Mosty peremennovo toka, Izd. Energija, Moskva 1966.
- [107] O l i v e r B.M., Pomiary i przyrządy elektroniczne, WKiŁ, Warszawa 1978.
- [108] O w e n D., A bridge for measurement of self induction in terms of capacity and resistance, Proc. Phys. Soc. vol. 27, 1915.
- [109] P a i n t e r H., Impedance comparator adaptable to many kinds of measurements and tests, General Radio Experimenter, vol.34, No 4, April 1960.

- [110] P ł o c i e n i a k R., Synteza i analiza układu pomiarowego do porównań impedancji w szeregowym układzie zastępczym, Raport nr 38, Inst. Metrol. PWr., Wrocław 1979.
- [111] Polska Norma, Metrologia, Nazwy i określenia, PN-71/N-02050, Wydawnictwa Normalizacyjne, Warszawa 1971.
- [112] P r y t k o v V.T., T a l i c k i j A.V., Kurs elektrycznych izmerenij, Gosenergoizdat, Moskva 1960.
- [113] R a y n e r G.H., An absolute determination of resistance by Campbell's method, Metrologia vol. 3, January 1967.
- [114] R a y n e r G.H., F o r d L.H., The stability of inductance standards, J. of Sci. Instrum. vol. 27, No 1, 1950.
- [115] R a y n e r G.H., The calibration of inductors at power and audio frequencies, IEEE P.C. 1959.
- [116] R i e t z W., Über die Kapazität von Spulen, Annalen der Physik, (4), 41, 1913.
- [117] R u s i n E.F., Izmerenie sobstvennoj jomkosti катуšek induktivnosti s železnym serdecnikom, Izmeritel'naja Technika nr 10, 1965.
- [118] S a l o m o n R.D., Inductance measurement the Owen and Anderson bridge networks, Elecn. vol 113, 1934.
- [119] S c r o g g i e M.G., Measurement of self-capacitance, Electronic Eng. 28, November 1956.
- [120] S e b e r J., Linejnyj regresionnyj analiz, Izd. Mir, Moskva 1980.
- [121] S e m i o n o v J.P., G u š č i n a T.M., K r o t k o v I.N., Chranenie edinic elektryčeskoj jomkosti soprotivlenija i induktivnosti, Izmeritel'naja Technika nr 4, 1976.
- [122] S i l s b e e F.B., Establishment and maintenance of the electrical units, National Bureau of Standards, Circular 475, Washington D.C., 1949.
- [123] S i l s b e e F.B., Extension and dissemination of electrical and magnetic units by the National Bureau of Standards Precision Measurement and Calibration, NBS Handbook-77, vol. 1, February 1961.
- [124] S n o w, A simplified precision formula of the inductance of a helix with corrections for lead in wires, Bur. Stand. Journ. Res., 9, 1932.
- [125] S n o w, Theory of a single-layer bifilar absolute standard of mutual inductance, Bur. Stand. Journ. Res. 24, 1940.
- [126] S n o w Formulas for computing capacitance and inductance, NBS Circular 544, September 1954.
- [127] S n o w, The effect of small variations in pitch upon the inductance of a standard solenoid, Bur. Stand. Journ. Res. Nr 6 1931.
- [128] S o r o k o w s k i S.(red.), Wybrane zagadnienia miernictwa elektrycznego, Polski Komitet Normalizacji i Miar, Warszawa 1978.
- [129] S t r u ż a k R., J e l e n i e w i c z M., Distributed model of 2:1 inductive voltage divider, conf. CPEM 1976, Boulder.
- [130] S z u l k i n P., P o g o r z e l s k i S., Podstawy teorii pola elektromagnetycznego, WNT, Warszawa 1964.
- [131] T a r b e y e v Ju., R o z h d e s t v e n s k a y a T., K r o t k o v I., G a l k h o w a D., New system of primary standards for electrical units and its development at the D.I. Mendelejev Research Institute of Metrology (WNIIMM), Acta IMEKO, 1979.
- [132] T h o m p s o n A.M., AC bridge methods for the measurement of three terminal admittances, IEEE Trans. Instrum. Meas., vol. IM-13, December 1964.
- [133] Testing and Measurement in the Physikalish-Technische Bundesanstalt, PTB Braunschweig 1980.
- [134] T o d o r o v J., Induktivnosti soprotivlenija, poteri i dobrotnosti катуšek induktivnosti, Izmeritel'naja Technika nr 7, 1961.
- [135] T o d o r o v J., Neposredstvennoe izmerenie sobstvennoj jomkosti катуšek induktivnosti, Izmeritel'naja Technika nr 11, 1963.

- [136] T r z e b a E., Spulenkapazitäten und Induktivitäten einlaiger Zylinderspulen bei verschiedener Strom-Spannungsverteilung Über der Spule, Hoch-Frequenz Technik V.El-akustik, 70, Oktober, 1961.
- [137] U n o M., I s h i k a w a T., A direct-reading instrument for measurements of inductance and Q of ferrite core coils, IEEE Trans. Instrum. Meas., vol. IM-30, March 1981.
- [138] Z a p f T.L., Calibration of inductance standards in the Maxwell-Wien bridge circuit., Journ. Res. NBS, vol. 65 C, September 1961.
- [139] Z b o r u c k i A., Rezystancyjno-rezonansowy układ komparacji wzorców indukcyjności i pojemności. Archiwum Elektrotechniki z.4, 1979.
- [140] Z i e k n e r G., Absolute Induktivitätsnormale, ATM, Z-121-Z, Mai 1935.

Praca wpłynęła do Redakcji 22 VI 1984 r.

ACCURATE MEASUREMENTS OF INDUCTANCE AT LOW-FREQUENCY RANGE

The problems and developmental trends in precise measurements of inductance within low-frequency range have been presented. A definition of inductance based on the theory of field, has been presented, and its relations with inductor impedance have been discussed. The kinds and properties of serially produced standards of inductance have been discussed and the design principles of absolute calculable inductance standards given. The kinds and properties of the most frequently applied equivalent circuits inductors have been presented. The systems used for accurate measurements of conductance: Wheatstone transformer and double-balanced bridges have been analysed. Both classical methods of measurements, based on Rietz method, as well as new propositions based on statistical methods have been discussed. The ways of design and assembling in group a self-inductance standard consisting of elements of different nominal values, have been presented. A system of the inductance unit reproduction and realization has been suggested.

ПРЕЦИЗИОННЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ СОБСТВЕННОЙ ИНДУКТИВНОСТИ В КРУГУ НИЗКИХ ЧАСТОТ

Представлено проблемы и тенденции развития прецизионных измерений индуктивности в кругу низких частот. Представлено дефиницию индуктивности основанную на теории поля и обсуждено её связи с сопротивлением катушки. Обсуждено типы и особенности серийно производимых образцов индуктивности и представлено принципы расчётов обмоточных конструкций образцов индуктивности. Представлено типы и особенности очень часто применяемых схем заменяющих индуктивных катушек. Проанализировано системы служащие для прецизионных измерений индуктивности: мосты Чистона, трансформаторные и вдвойне уравновешенные. Обсуждено способы измерений элементов заменяющих схем так и классические, основанные методе Rietza, как и новые предложения основанные на статистических методах. Представлено способ расчётов и группового составления образца собственной индуктивности, состоящего из элементов с разными номинальными значениями. Представлено систему воспроизведения и реализации единицы индуктивности.

Contents

ABBREVIATIONS AND DENOTATIONS	3
INTRODUCTION	5
INDUCTORS	6
1. Notion of self-inductance of inductors	7
2. Equivalent circuits of inductors	9
3. Secondary inductance standards	13
4. Absolute inductance standards	19
INDUCTANCE MEASUREMENTS	28
5. Inductance measurements by Wheatstone's bridges	29
6. Inductance measurements by transformer bridges	44
7. Inductance measurements by double-balanced bridges	63
FREQUENCY CHARACTERISTICS OF INDUCTORS	69
8. Determination of self-inductance of inductors by the Rietz method	69
9. Determination of inductance L_0 and capacitance C_0 by the linear regression method	74
10. Determination of elements of equivalent circuit of shield- ed inductors	82
11. Determination of equivalent circuits approximating the .. inductor impedance	89
GROUP INDUCTANCE STANDARD	91
12. Statistical evaluation of elements of the inductance stan- dard group	93
13. Analysis of a group of PKNMIJ standards	99
14. Traceable system of the inductance unit maintaining	104
SUMMARY	105
REFERENCES	107

Spis rzeczy

WYKAZ WAŻNIEJSZYCH SKRÓTÓW I OZNACZEŃ	3
WPROWADZENIE	5
CEWKI INDUKCYJNE	6
1. Pojęcie indukcyjności własnej cewek indukcyjnych	7
2. Schematy zastępcze cewek indukcyjnych	9
3. Wtórne wzorce indukcyjności	13
4. Absolutne wzorce indukcyjności	19
POMIARY INDUKCYJNOŚCI	28
5. Pomiary indukcyjności mostkami Wheatstone'a	29
6. Pomiary indukcyjności mostkami transformatorowymi	44
7. Pomiary indukcyjności mostkami podwójnie równoważonymi ...	63
CHARAKTERYSTYKA CZĘSTOTLIWOŚCIOWA CEWEK INDUKCYJNYCH	69
8. Wyznaczanie pojemności własnej cewek indukcyjnych metodą Rietza	69
9. Wyznaczanie indukcyjności L_0 i pojemności C_0 metodą regresji liniowej	74
10. Wyznaczanie elementów schematu zastępczego cewek ekranowych	82
11. Wyznaczanie schematów zastępczych aproksymujących impedancję cewki	89
GRUPOWE WZORZEC INDUKCYJNOŚCI	91
12. Statystyczna ocena elementów grupowego wzorca indukcyjności	93
13. Analiza grupy wzorców PKNM1J	99
14. System odtwarzania i przekazywania jednostki indukcyjności	104
PODSUMOWANIE	105
LITERATURA	107

PRACE NAUKOWE INSTYTUTU METROLOGII ELEKTRYCZNEJ
(wydane w latach 1979—1984)

Nr 19, Konferencje nr 7, <i>Metrologia — jako czynnik postępu w nauce i technice</i> , Wrocław 1979	48,—
Nr 20, Monografie nr 4, R. Rymaszewski, <i>Modelowanie operacyjno-mnogościowe i jego zastosowanie do badań pomiarów stochastycznych</i> , Wrocław 1982	40,—
Nr 21, Monografie nr 3, <i>Teoria wiedzy i metodologia nauk empirycznych</i> , cz. I, Wrocław 1980	62,—
Nr 22, Konferencje nr 8, <i>Mikrokomputery i mikroprocesory w dydaktyce i zastosowaniach przemysłowych</i> , Wrocław 1982	67,—
Nr 23, Konferencje nr 9, <i>Rechnergestützte Diagnosefindung in der Lungendiagnostik, Komputerowe wspomaganie diagnostyki płuc</i> , Wrocław 1983	104,—
Nr 24, Monografie nr 5, J. Jaskulski, <i>Indukcyjne dzielniki napięcia</i> , Wrocław 1984	120,—
Nr 25, Konferencje nr 10, <i>Technika pomiarów wielkości elektrycznych i nieelektrycznych w zastosowaniach przemysłowych i laboratoryjnych</i> , Wrocław 1984	107,—

Cena zł 95,—

Subscription should be sent (at any time of the year) to:

„Ars Polona”

Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa
or OR PAN, 00-901 Warszawa, PKiN, POLAND

Bank account number: NBP, VIII OM Nr 1550-6-81574 Warszawa/Poland

Wydawnictwa Politechniki Wrocławskiej
ma stale na składzie Księgarnia Wr 49
Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław
oraz Wojewódzka Księgarnia Techniczna
ul. Świdnicka 8, 50-067 Wrocław

ISSN 0324-9549