Wojciech Glabisz

Pakietowa analiza falkowa w zagadnieniach mechaniki

Oficyna Wydawnicza
Politechniki Wrocławskiej

EX LIBRIS
IZ
BIBLIOTEKI
POLITECHNIKI
WROCŁAWSKIEJ

Wojciech Glabisz

Pakietowa analiza falkowa w zagadnieniach mechaniki

Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej
Wrocław 2004

111443

Recenzent
Paweł ŚNIADY

Opracowanie redakcyjne
Aleksandra WAWRZYNKOWSKA

Biblioteka Główna i OINT
Politechniki Wrocławskiej
100024494

Projekt okładki
Agnieszka ŚCIEPURO

POLITECHNIKA WROCŁAWSKA Biblioteka Główna
318316 L/1

© Copyright by Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2004

OFICYNA WYDAWNICZA POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ
Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław

ISBN 83-7085-773-6

Drukarnia Oficyny Wydawniczej Politechniki Wrocławskiej. Zam. nr 266/2004.

4785

2004/0137/D

Spis treści

1. Wstęp 5
2. Podstawy analizy falkowej 8
   2.1. Wprowadzenie 8
   2.2. Hierarchiczna skalowalna reprezentacja sygnału 9
   2.3. Funkcje skalujące i falki 10
   2.4. Dyskretna transformata falkowa 14
3. Podstawy pakietowej analizy falkowej 19
   3.1. Wprowadzenie 19
   3.2. Pakiety falkowe 19
   3.3. Pakietowe bazy falkowe 21
4. Falkowa analiza sygnałów 25
   4.1. Wprowadzenie 25
   4.2. Pakietowa analiza sygnału 26
   4.3. Podsumowanie 31
5. Analiza falkowa sygnałów chaotycznych 33
   5.1. Wprowadzenie 33
   5.2. Krótkie wprowadzenie do problematyki drgań chaotycznych 34
   5.3. Równanie ruchu nieliniowego układu o jednym stopniu swobody 35
   5.4. Analiza numeryczna 36
   5.5. Podsumowanie 48
6. Identyfikacja liniowych i nieliniowych układów dyskretnych 50
   6.1. Wprowadzenie 50
   6.2. Wprowadzenie do zagadnień identyfikacji układów 51
   6.3. Falkowa analiza pakietowa Walsha w wyznaczaniu pochodnych sygnału 52
   6.4. Przykłady numeryczne 55
   6.5. Podsumowanie 61
7. Analiza zagadnień początkowych liniowych równań różniczkowych o współczynnikach zmiennych w czasie 63
   7.1. Wprowadzenie 63
   7.2. Podstawy zagadnień początkowych równań różniczkowych zwyczajnych 64
   7.3. Analiza stanu układów liniowych 66
   7.4. Macierze operacyjne całkowania 70
   7.5. Przykłady numeryczne 72
   7.6. Podsumowanie 79
8. Pakiety falkowe Walsha w liniowych zagadnieniach brzegowych 81
   8.1. Wprowadzenie 81
   8.2. Metody residualne w mechanice 82
   8.3. Sformułowanie zagadnienia brzegowego 87
   8.4. Przykłady numeryczne 91
   8.5. Podsumowanie 102

9. Pakiety falkowe Walsha w zagadnieniach wariacyjnych ... 104
9.1. Wprowadzenie ... 104
9.2. Metody bezpośrednie bazujące na sformułowaniach wariacyjnych ... 106
9.3. Metoda bezpośrednia oparta na pakietowych bazach Walsha ... 109
9.4. Przykłady numeryczne ... 111
9.5. Podsumowanie ... 120
10. Pakietowa analiza falkowa liniowych cząstkowych równań różniczkowych ... 121
10.1. Wprowadzenie ... 121
10.2. Operatory całkowania i różniczkowania w falkowych bazach pakietowych Walsha ... 122
10.3. Analiza różniczkowych równań cząstkowych ... 125
10.4. Podsumowanie ... 131
Literatura ... 133
Rozdział 1 ... 133
Rozdział 2 ... 133
Rozdział 3 ... 133
Rozdział 4 ... 134
Rozdział 5 ... 134
Rozdział 6 ... 135
Rozdział 7 ... 135
Rozdział 8 ... 136
Rozdział 9 ... 137
Rozdział 10 ... 138
Packet wavelet analysis in mechanics problems. Summary ... 140

1. Wstęp

Od lat siedemdziesiątych ubiegłego stulecia obserwowany jest dynamiczny rozwój analizy falkowej, która wywodzi się zarówno z czystej matematyki – szczególnie z takich jej działów, jak analiza harmoniczna, analiza funkcjonalna czy teoria aproksymacji – jak i z matematyki stosowanej zajmującej się głównie przetwarzaniem sygnałów i zagadnieniami fizyki matematycznej (Chui [1.1], Resnikoff i Wells [1.2], Mallat [1.3], Aboufadel i Schlicker [1.4], Wojtaszczyk [1.5], Białasiewicz [1.6]). Jak z tego wynika, analiza falkowa nie bazuje na całkowicie nowych ideach, które stanowiły podstawę jej powstania i rozwoju, ale na koncepcjach, które w różnej formie istniały w różnych dziedzinach nauki. Wspólny wysiłek naukowców wielu specjalności, którzy zauważyli, że niezależnie od siebie stosują podobne idee, zaowocował powstaniem i sformalizowaniem teorii powszechnie dzisiaj nazywanej teorią falek lub teorią analizy falkowej. Teorię fałek można postrzegać jako systematyczne, nowe podejście do analizy tak zwanych struktur wielorozdzielczych, przez które należy rozumieć takie obiekty (np. sygnały, operatory), które można analizować na różnych poziomach dokładności ich aproksymacji. Powszechność występowania w naturze i nauce obiektów o strukturze wielorozdzielczej jest jedną z przyczyn dynamicznego rozwoju analizy falkowej. Falki stanowią również podstawę budowania różnego rodzaju baz ortogonalnych, pozwalających na zwarty, efektywny zapis nawet złożonych funkcji niestacjonarnych.

Obecnie analiza falkowa znajduje szerokie zastosowanie w wielu dziedzinach nauki i techniki, do których między innymi można zaliczyć: astronomię, biologię, telekomunikację, chemię, medycynę, ekonomię, fizykę, matematykę stosowaną i mechanikę (Chui, Montefusco i Puccio [1.7], Goswami i Chan [1.8], Percival i Walden [1.9]). Z zestawienia wybranych, różnych dziedzin, w których stosowana jest analiza falkowa wynika, że ten typ analizy jest uniwersalnym, atrakcyjnym i skutecznym narzędziem wielu badaczy. Dowodem zainteresowania analizą falkową jest literatura przedmiotu, licząca tysiące artykułów naukowych oraz setki opracowań zwartych w postaci skryptów, monografii i podręczników.

Niniejsza monografia jest poświęcona wykorzystaniu analizy falkowej, a szczególnie jej odmiany – pakietowej analizy falkowej, w wybranych działach mechaniki teoretycznej i stosowanej. Przedstawiony materiał dotyczy zarówno zagadnień czysto

technicznych, do których zalicza się analizę sygnału, jak i zagadnień teoretycznych, które za swój cel mają analizę często złożonych modeli matematycznych. W monografii pokazano, jak analizę falkową, a szczególnie pakietową analizę falkową można wykorzystać jako uniwersalne narzędzie badawcze szerokiego spektrum praktycznych i teoretycznych zagadnień współczesnej mechaniki.

W rozdziale drugim przedstawiono ideę analizy falkowej, a w rozdziale trzecim podstawy – dalej w monografii wykorzystywanej – pakietowej analizy falkowej.

Celem rozdziału czwartego jest pokazanie, że pakietowa transformata falkowa jest skutecznym narzędziem analizy spektralnej sygnału i umożliwia identyfikację efektów lokalnych w nim zawartych. W rozdziale tym przedstawiono wyłącznie praktyczny aspekt stosowania pakietowej analizy falkowej w analizie sygnału.

W rozdziale piątym – na przykładzie nieliniowej analizy układu o jednym stopniu swobody z wiskoelastycznymi jednostronnymi więzami – zademonstrowano skuteczność dyskretnej analizy falkowej i pakietowej analizy falkowej odpowiedzi układu w szybkiej, jakościowej identyfikacji jego stanów chaotycznych.

W rozdziale szóstym pokazano skuteczność pakietowej analizy falkowej z bazą Walsha w procesie poszukiwania dobrych reprezentacji pochodnych sygnału, które są następnie wykorzystywane w procesie identyfikacji parametrycznej i w procedurze identyfikacji nieparametrycznej.

Celem rozdziału siódmego jest sformułowanie – opartych na falkowych bazach pakietowych Walsha – algorytmów analizy zagadnień początkowych liniowych równań różniczkowych o stałych i zmiennych współczynnikach oraz pokazanie postaci tak zwanych modyfikowanych macierzy operacyjnych całkowania i zbadanie ich wpływu na dokładność obliczeń.

W rozdziale ósmym – korzystając z metody najmniejszych kwadratów – przedstawiono algorytm metody residualnej, bazujący na pakietowych funkcjach falkowych Walsha, do rozwiązywania wielopunktowych zagadnień brzegowych, a zwłaszcza do analizy problemów dwupunktowych, do których sprowadza się wiele zagadnień mechaniki.

W rozdziale dziewiątym pokazano algorytm rozwiązywania niektórych problemów wariacyjnych mechaniki metodą bezpośrednią, bazującą na, dotychczas nie stosowanych w tego typu zagadnieniach, falkowych bazach pakietowych Walsha.

Tematem rozdziału dziesiątego jest zastosowanie baz pakietowych Walsha do rozwiązywania liniowych równań różniczkowych cząstkowych z wykorzystaniem sformułowanych wcześniej uogólnionych operacyjnych macierzy całkowania i analiza wpływu postaci tych macierzy na otrzymywane rozwiązania.

Po rozdziałach wprowadzających w tematykę analizy falkowej i pakietowej analizy falkowej w każdym z rozdziałów następnych szczegółowo omówiono literaturę dotyczącą poruszanej tematyki i na tym tle pokazano rozwiązania oryginalne autora. Nie dążono do całkowitego ujednolicenia systemu oznaczeń w kolejnych rozdziałach, co pozwoliło na zachowanie tradycyjnie w literaturze stosowanych oznaczeń w różnych przedstawianych tutaj działach mechaniki.

Rozdziały, poczynając od wstępu, są numerowane cyframi arabskimi; dotyczy to również podpunktów występujących w rozdziałach. Pozycje cytowanej literatury, wzory i rysunki oznaczono numerem rozdziału i liczbą wskazującą na kolejną pozycję literatury czy kolejny wzór lub rysunek, pojawiające się w ramach rozdziału.

2. Podstawy analizy falkowej

2.1. Wprowadzenie

W rozdziale tym przedstawiono podstawowe informacje dotyczące analizy falkowej jedynie w tym zakresie, jaki jest bezpośrednio wykorzystywany w monografii. Pełne informacje dotyczące teorii analizy falkowej zainteresowany czytelnik znajdzie w cytowanej literaturze.

Falki $\psi(t)$ to, jak sama nazwa wskazuje, „małe fale", które mają ograniczony zakres i oscylacyjny charakter. W określeniu falek często pomija się słowo funkcja, gdyż poza nielicznymi wyjątkami nie mają one analitycznego zapisu, a ich wartości są określane schematami rekurencyjnymi praktycznie jedynie w skończonym zbiorze punktów. Zmienną niezależną t nazywa się w tym rozdziale czasem, choć równie dobrze może to być na przykład zmienna przestrzenna. Nazwanie zmiennej niezależnej jest czasem podyktowane tym, że z reguły podstawy analizy falkowej są wyjaśniane na przykładach badania sygnałów właśnie z czasem jako naturalną zmienną niezależną.

Falki stanowią specyficzne zbiory funkcji bazowych w opisie przestrzeni funkcyjnych. Funkcje te są szczególnie przydatne w opisie funkcji nieciągłych i nieregularnych, z którymi głównie mamy do czynienia w odpowiedzi realnych układów fizycznych. W przeciwieństwie do bazy Fouriera, której elementami są proste funkcje trygonometryczne o nieskończonym zakresie, falki ze swoim ograniczonym zakresem i z reguły szybkim zanikaniem stanowią bazy dobrze lokalizowane w czasie t. Funkcje bazowe Fouriera są doskonale zlokalizowane w dziedzinie częstości i tym samym stanowią idealną bazę dla funkcji stacjonarnych, okresowych, w opisie których nie jest konieczna lokalizacja składowych harmonicznych w czasie. Jest to prostą konsekwencją nieograniczonego zasięgu funkcji bazowych – funkcji tych nie można zlokalizować w czasie i tym samym w opisie zjawisk niestacjonarnych ten typ analizy prowadzi do licznego zbioru funkcji aproksymacyjnych, które nie dostarczają informacji o czasie pojawiania się bądź znikania składowych sygnału związanych z konkretną częstością czy zakresem częstości. W przeciwieństwie do baz Fourierowskich, bazy funkcji falkowych są na ogół dobrze lokalizowane zarówno w dziedzinie częstości, jak i czasu. Bazy funkcji falkowych powstają przez skalowanie (parametrem a) i prze-

suwanie w czasie, translacje (parametrem b) falki wyjściowej (falki matki) $\psi(at+b)$, co prowadzi do tak zwanej skalowalnej, hierarchicznej reprezentacji badanej funkcji.

Przy opracowywaniu tego rozdziału korzystano z podręczników Chui [1.1], Resnikoffa i Wellsa [1.2], Mallata [1.3], Daubechies [2.1], Meyera [2.2] oraz Vetterli i Kovacevica [2.3].

2.2. Hierarchiczna skalowalna reprezentacja sygnału

Na badaną funkcję możemy spojrzeć jako na kompozycję jej części zgrubnej, gładkiej, stanowiącej podstawę opisu ($f_j(t)$) i części, w której znajdujemy informacje o, z reguły drobnych, jej fluktuacjach – szczegółach ($d_j(t)$). Takie podejście – przez analogię do reprezentacji terenu na mapie o ustalonej skali – pozwala spojrzeć na funkcje właśnie z punktu widzenia przyjętej skali, która ustala granicę postrzegania szczegółów. Przyjmując skalę postrzegania funkcji, zaniedbujemy w jej opisie szczegóły, które można „dostrzec" jedynie przyjmując skale niższe. Wynika z tego, że precyzyjniejszy opis funkcji (opis funkcji na wyższym poziomie rozdzielczości j+1 $f_{j+1}(t)$) otrzymamy po dodaniu do opisu funkcji na niższym poziomie rozdzielczości (j) ($f_j(t)$) szczegółów ($d_j(t)$), na których postrzeganie pozwala skala, którą definiujemy jako $1/2^j$

$$f_{j+1}(t) = f_j(t) + d_j(t) \tag{2.1}$$

Należy podkreślić, że zdefiniowana skala $1/a^j = 1/2^j$ zakłada wartość parametru skalowania $a = 2$, co przyjmuje się tradycyjnie przy formułowaniu dyskretnej analizy falkowej.

Sukcesywne zmniejszanie skali prowadzi do bardziej precyzyjnego opisu badanej funkcji (do postrzegania funkcji na wyższym poziomie rozdzielczości j+1), a w przejściu granicznym ze skalą do zera postępowanie to daje pełny opis funkcji, który można zapisać jako

$$f(t) = f_j(t) + \sum_{k=j}^{\infty} d_k(t) \tag{2.2}$$

Przedstawione podejście w opisie przestrzeni funkcji całkowalnych z kwadratem ($f(t) \in L^2(R)$) można interpretować jako poszukiwanie opisu funkcji w przestrzeni V_j ($f(t) \in V_j$), który uzupełniamy szczegółami jej opisu w przestrzeniach $\{W_k\}$ ($d_j(t) \in W_j$). Z formalnego punktu widzenia $f_j(t)$ jest rzutem f na przestrzeń V_j. Jeżeli przez V_{j+1} oznaczymy przestrzeń V_j uzupełnioną o przestrzeń W_j, to zapis tego faktu możemy przedstawić jako

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j \tag{2.3}$$

Relację (2.3) można interpretować jako dekompozycję przestrzeni V_{j+1} na przestrzeń V_j i ortogonalną do V_j przestrzeń W_j ($W_j \perp V_j$). Łatwo zauważyć, że proces dekompozycji można prowadzić dalej (np. do poziomu J), co przedstawia następująca relacja:

$$V_{j+1} = W_j \oplus V_j = W_j \oplus W_{j-1} \oplus V_{j-1} = \ldots = W_j \oplus W_{j-1} \oplus \ldots \oplus W_{j-J} \oplus V_{j-J} \tag{2.4}$$

gdzie $W_j \perp W_k \ (j \neq k)$ i $W_j \perp V_k \ (j > k)$. Jak widać, przestrzeń V_{j+1} (a tym samym elementy, funkcje, należące do tej przestrzeni) można przedstawić w postaci szeregu podprzestrzeni W_j stanowiących „frakcje" przestrzeni wyjściowej (podprzestrzeni zawierających informacje na różnych poziomach rozdzielczości – dla różnych skal postrzegania funkcji) i podprzestrzeni V_{j-J} zawierającej jedynie „zgrubny" opis elementów należących do V_{j+1}. Jeżeli procedurę (2.4) będziemy prowadzić dalej, to w przejściu granicznym otrzymamy $\lim_{j\to-\infty} V_j = \{0\}$ z jednej strony i $\lim_{j\to\infty} V_j = L^2(R)$ ze strony drugiej.

Jeżeli $f(t) \in V_0$ (V_0 czasami nazywana jest przestrzenią centralną), to przesunięcie k funkcji f należy do V_0 ($f(t-k) \in V_0$), co pokazuje, że przestrzeń V_0 (oraz pozostałe V_j dla $j \neq 0$) są niezmiennicze z uwagi na translację. Jeżeli $f(t) \in V_j$, to – na tym poziomie aproksymacji – $f(t)$ nie zawiera fluktuacji (szczegółów), które można „dostrzec" przy skalach mniejszych od $1/2^j$, a jej postać przeskalowana $f(2t)$ nie zawiera szczegółów zauważalnych przy skalach mniejszych od $1/2^{j+1}$. Wynika z tego, że $f(2t) \in V_{j+1}$. Jeżeli przyjmiemy, że w przestrzeni centralnej V_0 istnieje funkcja $\phi(t)$ (tak zwana funkcja skalująca), której translacje generują ortonormalną bazę tej przestrzeni, to, po przyjęciu wyżej przedstawionych warunków, funkcje $\phi_{jk} = 2^{j/2}\phi(2^j t - k)$ tworzą ortonormalną bazę przestrzeni V_j.

Powyższe warunki definiują hierarchiczną (stopniowaną), skalowalną (wynikającą z przeskalowywania baz podprzestrzeni) reprezentację przestrzeni i tym samym reprezentację sygnałów (funkcji) w tych przestrzeniach zawartych.

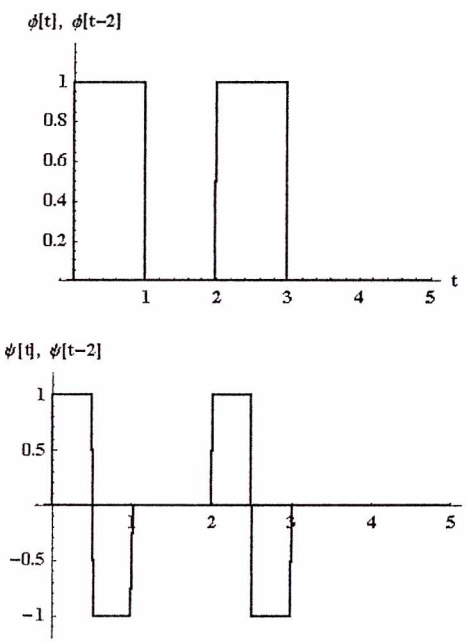
2.3. Funkcje skalujące i falki

Jedynie funkcje spełniające warunki przedstawione w punkcie 2.2 mogą stanowić bazy przestrzeni V_j i (po przekształceniach) bazy ich ortogonalnych uzupełnień W_j.

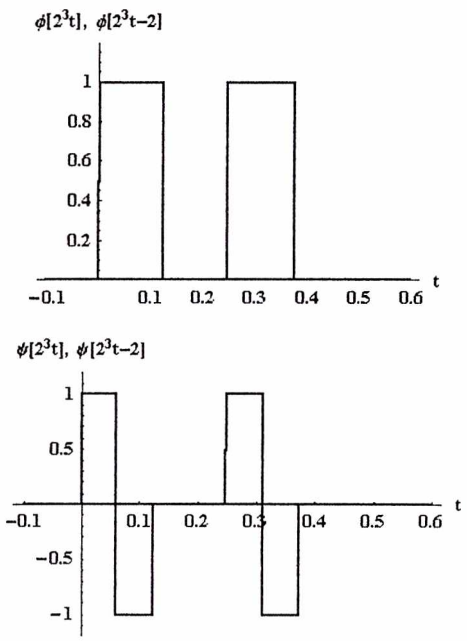
Funkcja skalująca $\phi(t)$ wraz z funkcjami powstałymi przez jej przesunięcia k stanowią bazę $\{\phi_{jk}(t)\}$ przestrzeni V_j, gdzie $\phi_{jk} = 2^{j/2}\phi(2^j t - k)$. Jak wiemy, $V_0 \subset V_1$, a tym samym każda funkcja w V_0 może być przedstawiona za pomocą bazy przestrzeni V_1. Szczególnie funkcję skalującą $\phi(t) \in V_0$ można wyrazić w bazie $\{\phi_{1k}(t)\}$ jako

$$\phi(t) = \sum_k h_k \phi_{1k}(t) = \sqrt{2}\sum_k h_k \phi(2t - k) \tag{2.5}$$

Równanie (2.5) nosi nazwę równania skalującego (ang. *dilation equation*), a zbiór współczynników rozwinięcia $\{h_k\}$ nazywa się filtrem dolnoprzepustowym.



Rys. 2.1. Funkcja Haara $\phi(t)$ i $\phi(t-2)$ oraz falka Haara $\psi(t)$ i $\psi(t-2)$
Fig. 2.1. Haar functions $\phi(t)$ i $\phi(t-2)$ and Haar wavelets $\psi(t)$ i $\psi(t-2)$



Rys. 2.2. Funkcja Haara $\phi(2^3 t)$ i $\phi(2^3 t - 2)$ oraz falka Haara $\psi(2^3 t)$ i $\psi(2^3 t - 2)$
Fig. 2.2. Haar functions $\phi(2^3 t)$, $\phi(2^3 t - 2)$ and Haar wavelets $\psi(2^3 t)$, $\psi(2^3 t - 2)$

Przestrzeń W_0 stanowi ortogonalne dopełnienie przestrzeni V_0 do przestrzeni V_1

$$V_1 = V_0 \oplus W_0 \tag{2.6}$$

i tym samym z tego, że falka $\psi(t-k) \in W_0$, a z $W_0 \subset V_1$ wynika, że $\psi(t)$ można przedstawić jako superpozycję funkcji bazowych V_1

$$\psi(t)=\sum_k g_k\phi_{1k}(t)=\sqrt{2}\sum_k g_k\phi(2t-k) \tag{2.7}$$

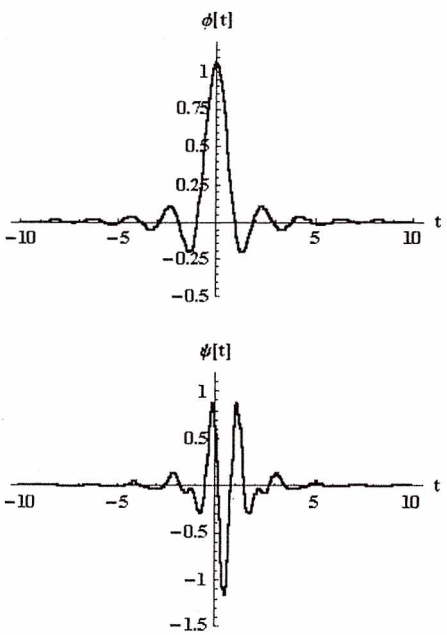
gdzie zbiór współczynników $\{g_k\}$ nosi nazwę filtra górnoprzepustowego.

Równanie (2.7) nazywa się równaniem falkowym (ang. *wavelet equation*). Skalowane funkcje $\psi(t)$ stanowią bazy przestrzeni $W_j:\{\psi_{jk}(t)=2^{j/2}\psi(2^j t-k)\}$.

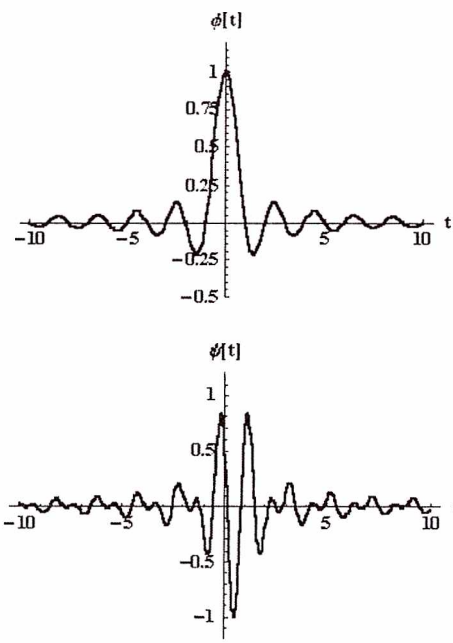
Pierwszą (chronologicznie) z funkcji skalujących była funkcja Haara i towarzysząca jej falka, które przy dwóch parametrach przesunięcia pokazano przykładowo na rys. 2.1.

Funkcje Haara tworzą bazę funkcji odcinkowo stałych; w przestrzeni V_0 funkcje te przyjmują stałą wartość na odcinkach $[k,k+1)(k\in\mathbf{N})$, a w przestrzeni V_j (przestrzeni o wyższym od V_0 stopniu odwzorowania funkcji odcinkowo stałych) funkcje te są stałe na odcinkach $\left[k/2^j,(k+1)/2^j\right)$.

Jeżeli $j\to\infty$, to funkcje Haara mogą stanowić dobrą bazę aproksymacji funkcji całkowalnych z kwadratem $f(t)\in L^2(R)$. Na rysunku 2.2 pokazano funkcję Haara i towarzyszące jej falki przy $j=3$.



Rys. 2.3. Funkcja skalująca $\phi(t)$ i falka $\psi(t)$ rzędu 5 typu Battle-Lemarie
Fig. 2.3. 5 order Battle-Lemarie scale function $\phi(t)$ and wavelet $\psi(t)$



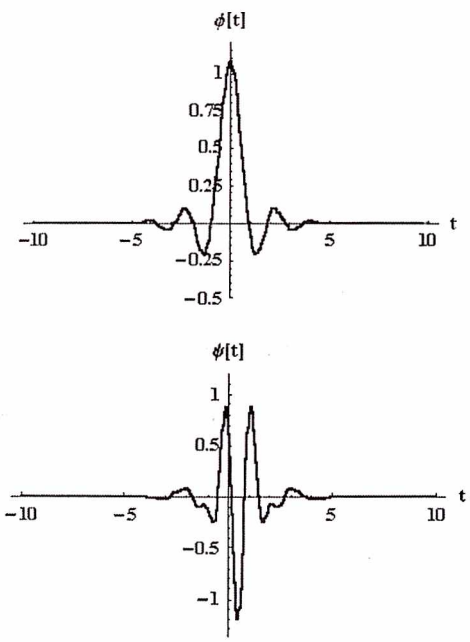
Rys. 2.4. Funkcja skalująca $\phi(t)$ i falka $\psi(t)$ typu Shannona
Fig. 2.4. Shannona scale function $\phi(t)$ and wavelet $\psi(t)$

Jak łatwo zauważyć, funkcje Haara wraz z towarzyszącymi im falkami tworzą bazę funkcji ortogonalnych. Z uwagi na to, że funkcje bazowe są odcinkowo stałe, zadowalający opis funkcji prowadzi zwykle do dużej liczby elementów szeregu aproksymacyjnego.

Oprócz skalującej funkcji Haara istnieje wiele innych funkcji, które spełniają warunki hierarchicznej reprezentacji przestrzeni. Dalej – nie wnikając w sposoby konstruowania tych funkcji – przedstawiono wybrane funkcje skalujące i falki, które znajdują praktyczne zastosowanie między innymi w wielu zagadnieniach mechaniki. Szczegółowy opis sposobów budowania tych funkcji można znaleźć w literaturze cytowanej we wprowadzeniu.

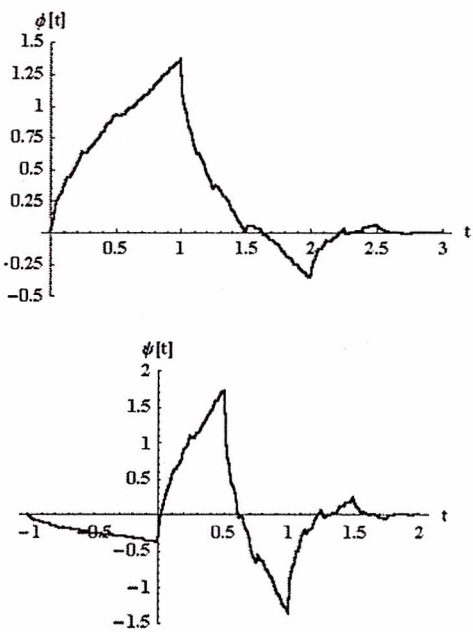
Na rysunku 2.3 przedstawiono (przy $n = 5$) przykład funkcji skalującej i towarzyszącej jej falki, zbudowanych ze sklejanych wielomianów stopnia n – są to funkcje zbudowane przez Battle i Lemarie.

Na rysunku 2.4 pokazano funkcję skalującą i falkę Shannona. Należy zwrócić uwagę na to, że – w przeciwieństwie do wcześniej pokazanych przykładów – funkcje te nie są określone na skończonym odcinku (nośniku) zmiennej niezależnej.



Rys. 2.5. Funkcja skalująca $\phi(t)$ i falka $\psi(t)$ typu Meyera rzędu 1

Fig. 2.5. First order Meyera scale function $\phi(t)$ and wavelet $\psi(t)$

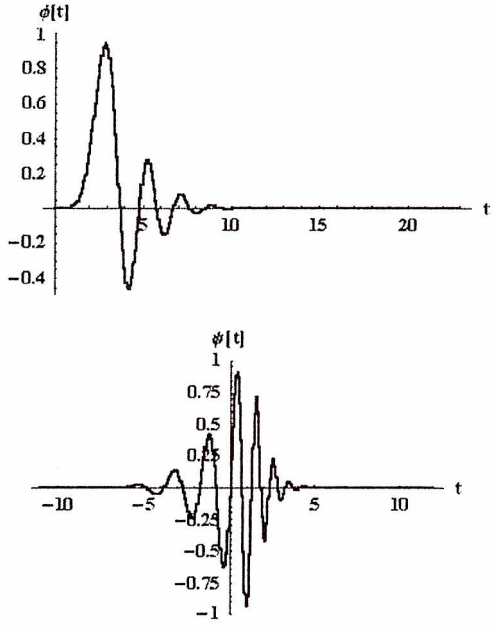


Rys. 2.6. Funkcja skalująca $\phi(t)$ i falka $\psi(t)$ Daubechies rzędu 2

Fig. 2.6. Second order Daubechies scale function $\phi(t)$ and wavelet $\psi(t)$

W przeciwieństwie do funkcji Shannona, funkcje Meyera (rys. 2.5) są funkcjami szybko zanikającymi, zbudowanymi między innymi na bazie wielomianów stopnia n.

Biblioteka Pol. Wrocł.



Rys. 2.7. Funkcja skalująca $\phi(t)$
i falka $\psi(t)$ Daubechies rzędu 12
Fig. 2.7. 12 order Daubechies scale
function $\phi(t)$ and wavelet $\psi(t)$

Funkcjami, które ze względu na swoje właściwości (zwarty nośnik, znikanie szeregu momentów, cechy samopodobieństwa) znalazły szerokie zastosowanie, są rozwiązania skonstruowane przez Ingrid Daubechies [2.1]. Na rysunkach 2.6 i 2.7 pokazano funkcje skalujące i falki Daubechies odpowiednio rzędu 2 i 12 – w tych przypadkach funkcje falkowe spełniają warunki znikania momentów odpowiednio rzędu do 2 i 12 włącznie ($\int_{-\infty}^{\infty} t^n \psi(t) dt = 0,\ n = 0, 1, ..., 12$).

Przedstawiono tutaj jedynie kilka wybranych (z olbrzymiej ich liczby) funkcji skalujących i falek, których użyteczność i skuteczność w rozwiązaniach konkretnych zagadnień jest ciągle weryfikowana.

2.4. Dyskretna transformata falkowa

Załóżmy, że znamy postać $f_j(t)$ funkcji $f(t)$ na j-tym poziomie rozdzielczości, co oznacza, że szczegóły funkcji dla skal mniejszych od 2^{-j} są nam nieznane. For-

malnie funkcję $f_j(t) \in V_j$ możemy przedstawić (dokonać jej transformacji falkowej) w bazie przestrzeni V_j relacją

$$f_j(t) = \sum_k f_k^j \phi_{jk}(t) \tag{2.8}$$

gdzie współczynniki rozwinięcia f_k^j są dane przez

$$f_k^j = \langle \phi_{jk}, f \rangle = \langle \phi_{jk}, f_j \rangle = \int f_j(t) \phi_{jk}(t) dt \tag{2.9}$$

Przez $\langle \ldots, \ldots \rangle$ oznaczono operację iloczynu skalarnego. Przy dyskretnych wartościach wskaźników $j, k \in N$ relacja (2.8) jest nazywana dyskretną transformacją falkową.

Przy ustalonej bazie $\{\phi_{jk}\}$ przestrzeni V_j współczynniki $\{f_k^j\}$ w sposób jednoznaczny określają funkcję $f_j(t)$. Jeżeli w opisie funkcji $f_j(t)$ wyróżnimy jej część zgrubną $f_{j-1} \in V_{j-1}$ i szczegóły $d_{j-1} \in W_{j-1}$, to dekompozycję $f_j(t)$ możemy przedstawić jako

$$f_j(t) = f_{j-1}(t) + d_{j-1}(t) = \sum_k f_k^{j-1} \phi_{j-1,k}(t) + \sum_k d_k^{j-1} \psi_{j-1,k}(t) \tag{2.10}$$

gdzie $d_k^{j-1} = \langle \psi_{j-1,k}, f \rangle$. Relacja (2.10) odpowiada dekompozycji przestrzeni V_j na $V_{j-1} \oplus W_{j-1}$ i określa związek między współczynnikami rozwinięcia $\{f_k^{j-1}\}$ i $\{d_k^{j-1}\}$ funkcji $f_j(t)$ w przestrzeniach V_{j-1} i W_{j-1}, a współczynnikami f_k^j rozwinięcia funkcji $f_j(t)$ w przestrzeni V_j.

Z uwagi na to, że $V_{j-1} \subset V_j$, funkcje bazowe $\phi_{j-1,k}(t)$ przestrzeni V_{j-1} możemy przedstawić jako superpozycję funkcji bazowych przestrzeni V_j

$$\phi_{j-1,k}(t) = \sum_l \langle \phi_{jl}, \phi_{j-1,k} \rangle \phi_{jl}(t) \tag{2.11}$$

gdzie

$$\begin{aligned} \langle \phi_{jl}, \phi_{j-1,k} \rangle &= \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(2^{j-1}t - k) \phi(2^j t - l) 2^{j-1} dt \\ &= \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(u) \phi(2ut - (l - 2k)) du \end{aligned} \tag{2.12}$$

Biorąc pod uwagę (2.5), relację (2.12) możemy zapisać jako

$$\langle \phi_{jl}, \phi_{j-1,k} \rangle = h_{l-2k} \tag{2.13}$$

Podobnie jak wyżej – z uwagi na to, że $W_{j-1} \subset V_j$ – funkcje bazowe $\psi_{j-1,k}$ przestrzeni W_{j-1} możemy przedstawić jako

$$\psi_{j-1,k}(t) = \sum_l \langle \phi_{jl}, \psi_{j-1,k} \rangle \phi_{jl}(t) \tag{2.14}$$

gdzie

$$\langle \phi_{jl}, \psi_{j-1,k} \rangle = g_{l-2k} \tag{2.15}$$

Na podstawie relacji (2.11) i (2.13) oraz (2.14) i (2.15) możemy zapisać, że:

$$\begin{aligned} \phi_{j-1,k}(t) &= \sum_l h_{l-2k} \phi_{jl}(t) \\ \psi_{j-1,k}(t) &= \sum_l g_{l-2k} \phi_{jl}(t) \end{aligned} \tag{2.16}$$

Ze związku (2.16) wynikają proste relacje między współczynnikami $\{f_k^{j-1}\}$ i $\{d_k^{j-1}\}$ a współczynnikami $\{f_k^j\}$, które można przedstawić za pomocą relacji:

$$\begin{aligned} f_k^{j-1} &= \langle \phi_{j-1,k}, f \rangle = \sum_l h_{l-2k} \langle \phi_{jl}, f \rangle = \sum_l h_{l-2k} f_l^j \\ d_k^{j-1} &= \langle \psi_{j-1,k}, f \rangle = \sum_l g_{l-2k} \langle \phi_{jl}, f \rangle = \sum_l g_{l-2k} f_l^j \end{aligned} \tag{2.17}$$

Relacje (2.17) definiują procedurę dyskretnej dekompozycji falkowej funkcji $f_j(t)$ na $f_{j-1}(t)$ i $d_{j-1}(t)$, którą możemy sukcesywnie realizować aż do wybranego poziomu rozdzielczości j_0, co pozwala na zapisanie $f_j(t)$ jako

$$f_j(t) = \sum_k f_k^j \phi_{jk}(t) = \sum_{l=j_0}^{j-1} \sum_k d_k^l \psi_{lk}(t) + \sum_k f_k^{j_0} \phi_{j_0 k}(t) \tag{2.18}$$

Skalowalna reprezentacja sygnału może być łatwo uogólniona na funkcje wielowymiarowe. W przypadku dwóch wymiarów (x, y) funkcję skalującą można przedstawić w postaci iloczynu dwóch jednowymiarowych funkcji skalujących

$$\phi(x,y) = \phi(x)\phi(y) \tag{2.19}$$

a równanie skalujące przyjmuje wtedy postać

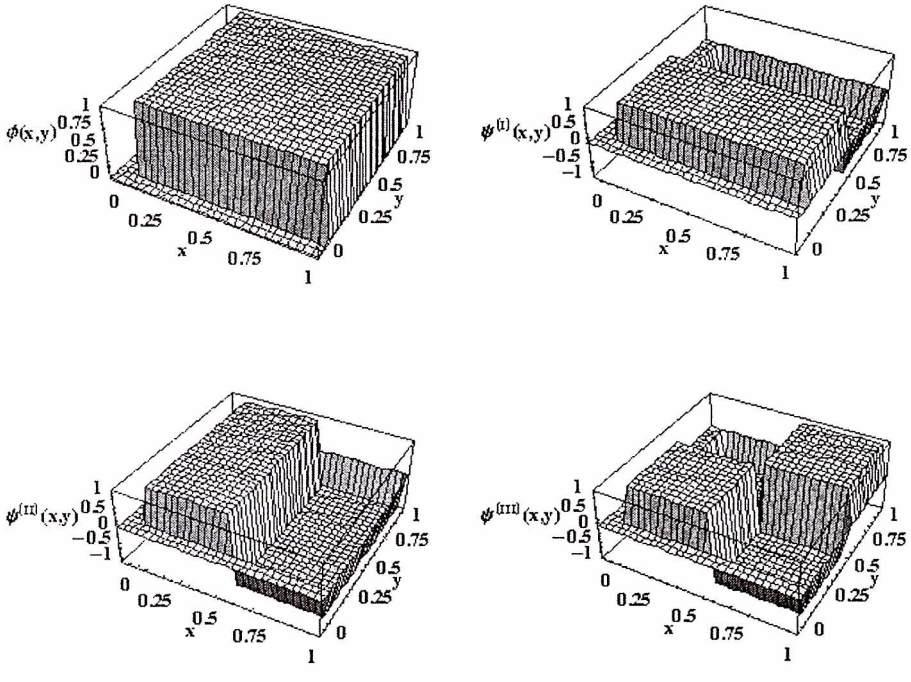
$$\phi(x,y)=2\sum_{k,l}h_{kl}\phi(2x-k,2y-l) \tag{2.20}$$

Ponieważ zarówno $\phi(x)$, jak i $\phi(y)$ spełniają równanie skalujące (2.5), mamy więc $h_{kl}=h_k h_l$.

W analogiczny sposób jak przy konstruowaniu wielowymiarowej funkcji skalującej postępujemy, budując wielowymiarowe falki. W przypadku wielu wymiarów mamy do czynienia z grupą falek, które przy dwóch wymiarach definiujemy jako:

$$\begin{aligned}\psi^{(\mathrm{I})}(x,y)&=\phi(x)\psi(y)\\ \psi^{(\mathrm{II})}(x,y)&=\psi(x)\phi(y)\\ \psi^{(\mathrm{III})}(x,y)&=\psi(x)\psi(y)\end{aligned} \tag{2.21}$$

Na rysunku 2.8 przykładowo pokazano dwuwymiarową funkcję skalującą i podstawowe falki Haara.



Rys. 2.8. Dwuwymiarowa funkcja skalująca i falki Haara
Fig. 2.8. Two-dimensional Haar scaling function and wavelets

Uogólnione na dwa wymiary równania falkowe przyjmują postać:

$$\psi^{(\mathrm{I})}(x,y)=2\sum_{k,l} g_{kl}^{(\mathrm{I})}\phi(2x-k,2y-l)$$

$$\psi^{(\mathrm{II})}(x,y)=2\sum_{k,l} g_{kl}^{(\mathrm{II})}\phi(2x-k,2y-l) \qquad (2.22)$$

$$\psi^{(\mathrm{III})}(x,y)=2\sum_{k,l} g_{kl}^{(\mathrm{III})}\phi(2x-k,2y-l)$$

gdzie: $g_{kl}^{(\mathrm{I})}=h_k g_l$, $g_{kl}^{(\mathrm{II})}=g_k h_l$, a $g_{kl}^{(\mathrm{III})}=g_k g_l$.

3. Podstawy pakietowej analizy falkowej

3.1. Wprowadzenie

W rozdziale drugim przedstawiono ideę funkcjonowania algorytmów dyskretnej analizy falkowej, które bazują na różnych typach funkcji skalujących i na towarzyszących im falkach. Algorytmy te sukcesywnie dekomponują zgrubne frakcje opisu funkcji czy sygnału na kolejną część zgrubną i szczegóły, które w następnych etapach analizy nie podlegają dalszej dekompozycji.

Jak się okazuje, w niektórych praktycznych zastosowaniach procedura analizy falkowej jest niewystarczająca, na przykład do identyfikacji pewnych zjawisk, których oznaki są zakodowane jedynie w przestrzeniach szczegółów. Jednym z możliwych sposobów modyfikacji algorytmów dyskretnej analizy falkowej jest zastąpienie ustalonego parametru skali a parametrem o ciągłej zmianie wartości, co prowadzi do sformułowania ciągłej transformacji falkowej. Zastosowanie ciągłej transformacji falkowej, które w algorytmach numerycznych sprowadza się do dyskretnej analizy falkowej z nieskończenie małymi zmianami parametru skali, prowadzi z reguły do radykalnego, uciążliwego zwiększenia liczby operacji numerycznych.

Innym sposobem szczegółowej analizy funkcji czy sygnału – bardziej precyzyjnym od analizy falkowej – jest tak zwana pakietowa analiza falkowa, której podstawy sformułowali Coifman, Meyer i Wickerhauser [3.1].

W punkcie drugim rozdziału przedstawiona zostanie idea pakietowej analizy falkowej w zakresie dalej w tym opracowaniu wykorzystywanym, a w punkcie trzecim pokazane zostaną pakietowe bazy falkowe, które będą podstawą analiz numerycznych prowadzonych w kolejnych rozdziałach.

3.2. Pakiety falkowe

Jak pokazano w poprzednim rozdziale, transformacja falkowa polega na przedstawieniu funkcji $f(t) \in L^2$ (funkcji całkowalnej z kwadratem) w ortogonalnych pod-

przestrzeniach $\{W_j\}$ z bazami w postaci falek $\{\psi_j(t)\}$ i podprzestrzeni $\{V_j\}$ z bazą funkcji skalujących $\{\phi_j(t)\}$. Kolejne etapy analizy falkowej polegają na dekompozycji jedynie podprzestrzeni V_j zawierających zgrubne opisy badanej funkcji czy sygnału.

Jak się okazuje, algorytm analizy falkowej można zastosować również do dekompozycji podprzestrzeni W, co prowadzi do tak zwanej pakietowej analizy falkowej. W pakietowej analizie falkowej dekompozycji podlegają zarówno podprzestrzenie V, jak i podprzestrzenie szczegółów W.

Jeżeli przez analogię do (2.5) i (2.7) – wykorzystując te same co w analizie falkowej współczynniki filtrów: dolnoprzepustowego h_k i górnoprzepustowego g_k – przykładowo zdefiniujemy:

$$w_2(t)=\sqrt{2}\sum_k h_k\psi(2t-k)$$
$$w_3(t)=\sqrt{2}\sum_k g_k\psi(2t-k) \tag{3.1}$$

to $\{w_2(t-k)\}$ i $\{w_3(t-k)\}$ będą ortonormalną bazą funkcji dwóch podprzestrzeni, których suma jest podprzestrzenią W_1.

Ogólnie, dla $n=0,1,...$ można zdefiniować funkcje:

$$w_{2n}(t)=\sqrt{2}\sum_k h_k w_n(2t-k)$$
$$w_{2n+1}(t)=\sqrt{2}\sum_k g_k w_n(2t-k) \tag{3.2}$$

które tworzą sekwencję funkcji bazowych przestrzeni V_J.

<table>
<tr><td colspan="8">$\mathbf{w}_{0,3}$</td></tr>
<tr><td colspan="4">$\mathbf{w}_{0,2}$</td><td colspan="4">$\mathbf{w}_{1,2}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\mathbf{w}_{0,1}$</td><td colspan="2">$\mathbf{w}_{1,1}$</td><td colspan="2">$\mathbf{w}_{2,1}$</td><td colspan="2">$\mathbf{w}_{3,1}$</td></tr>
<tr><td>$\mathbf{w}_{0,0}$</td><td>$\mathbf{w}_{1,0}$</td><td>$\mathbf{w}_{2,0}$</td><td>$\mathbf{w}_{3,0}$</td><td>$\mathbf{w}_{4,0}$</td><td>$\mathbf{w}_{5,0}$</td><td>$\mathbf{w}_{6,0}$</td><td>$\mathbf{w}_{7,0}$</td></tr>
</table>

Rys. 3.1. Schemat pakietowej dekompozycji przestrzeni $\mathbf{w}_{0,3}$ (V_3)
Fig. 3.1. Diagram of the wavelet-packet decomposition of the space $\mathbf{w}_{0,3}$ (V_3)

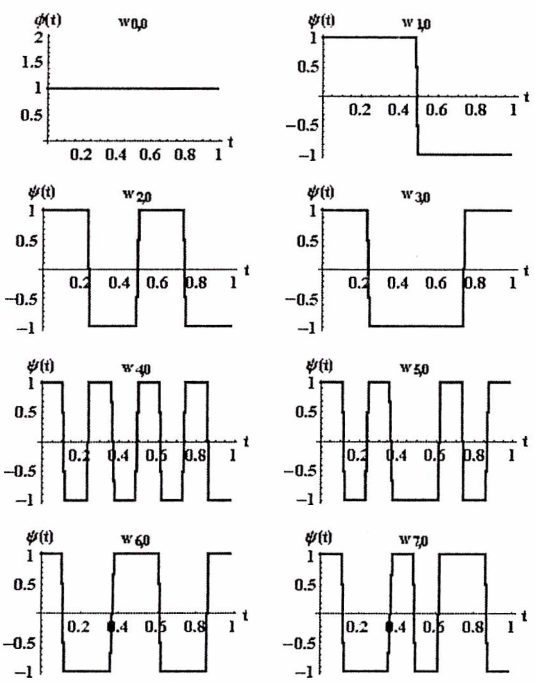
Różne kombinacje funkcji (3.2) oraz funkcji będących efektem ich skalowania i translacji tworzą całą kolekcję ortonormalnych baz $\{w_n(t)\}$, które mogą stanowić podstawę opisu obiektów przestrzeni V_J. Taką kolekcję funkcji bazowych nazywa się

biblioteką falkowych baz pakietowych, a funkcje $w_{n,j,k} = 2^{j/2} w_n\left(2^j t - k\right)$ określa się mianem pakietu falkowego. Jeżeli przestrzeń z bazą $\{w_{n,j,k}(t)\}$ oznaczymy jako $\mathbf{w}_{n,j}$, to przykładowy schemat dekompozycji przestrzeni $\mathbf{w}_{0,3}$ (V_3) z wykorzystaniem pakietowej analizy falkowej można przedstawić tak jak na rys. 3.1.

3.3. Pakietowe bazy falkowe

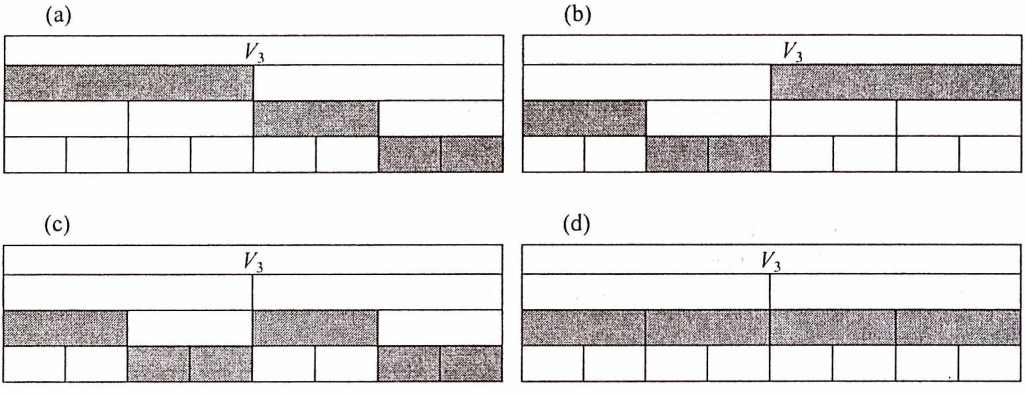
Pakietowe bazy falkowe można budować, wykorzystując każdy rodzaj funkcji skalujących i towarzyszących im falek określonych współczynnikami filtrów dolno- i górnoprzepustowych (Goswami i Chan [1.8], Mallat [1.3], Wolfram Res. [3.2]). Dalej na ogół korzysta się z pakietów falkowych generowanych na podstawie filtrów Haara: $h_0 = h_1 = g_0 = -g_1 = 1/\sqrt{2}$.

Na rysunku 3.2 pokazano funkcje $\mathbf{w}_{0,0}$, $\mathbf{w}_{1,0}$, $\mathbf{w}_{2,0}$, $\mathbf{w}_{3,0}$, $\mathbf{w}_{4,0}$, $\mathbf{w}_{5,0}$, $\mathbf{w}_{6,0}$ i $\mathbf{w}_{7,0}$, które tworzą bazę przestrzeni V_3 po jej trzech etapach pakietowej dekompozycji. Jest to tak zwana baza Walsha, której funkcje bazowe są funkcjami określonymi na całym przedziale zmiennej niezależnej $t \in \langle 0,1 \rangle$.

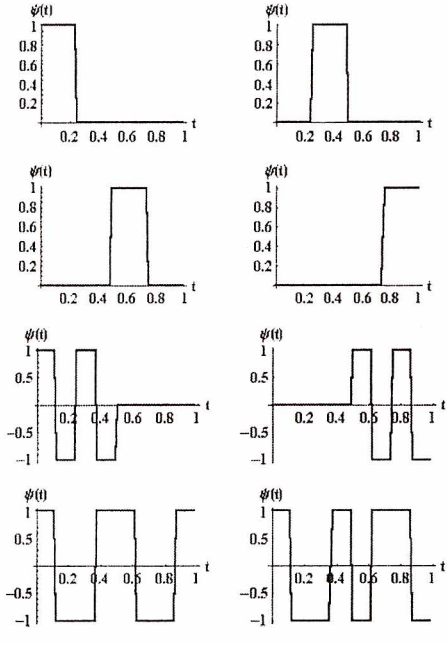


Rys. 3.2. Funkcje bazowe Walsha
Fig. 3.2. Walsh wavelet basis functions

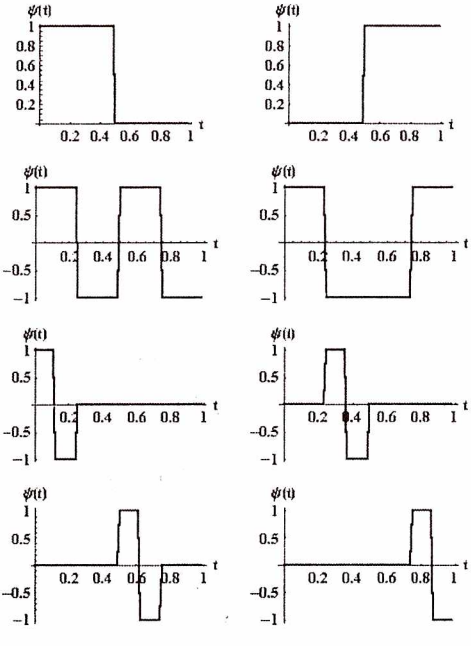
Oczywiście do opisu przestrzeni można użyć różnych falkowych baz pakietowych. Na rysunku 3.3 przedstawiono wybrane cztery kombinacje funkcji bazowych, których usytuowanie – na przykładzie dekompozycji przestrzeni V_3 – zaznaczono przez zaczernienie obszarów reprezentujących podprzestrzenie V_3.



Rys. 3.3. Przykładowe usytuowanie falkowych baz pakietowych Walsha
Fig. 3.3 Examples of Walsh wavelet-packet basis location

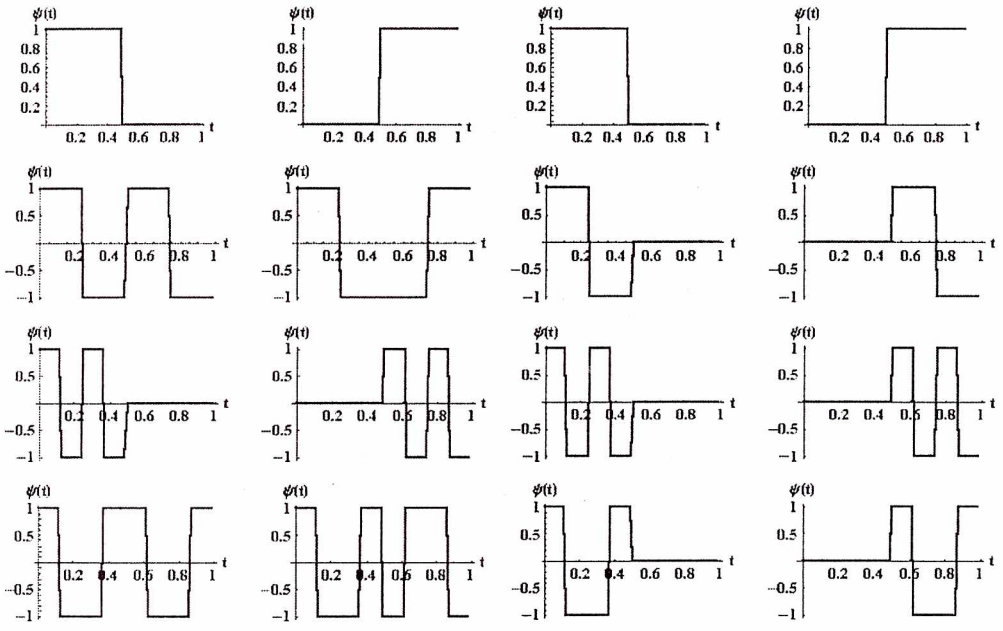


Rys. 3.4. Funkcje bazowe bazy pakietowej z rys. 3.3a
Fig. 3.4. Wavelet-packet functions for basis in Fig. 3.3a



Rys. 3.5. Funkcje bazowe bazy pakietowej z rys. 3.3b
Fig. 3.5. Wavelet-packet functions for basis in Fig. 3.3b

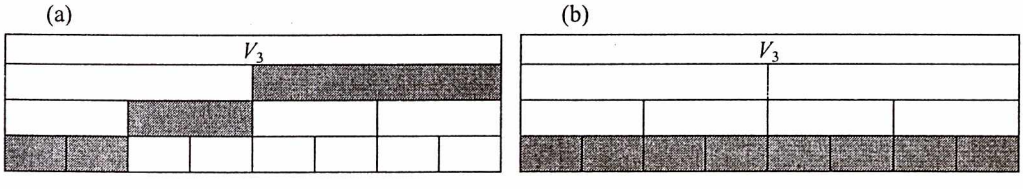
Na rysunkach od 3.4 do 3.7 pokazano funkcje bazowe baz pakietowych, których usytuowanie na diagramie dekompozycji przestrzeni V_3 przedstawiono odpowiednio na rysunku 3.3a, b, c i d.



Rys. 3.6. Funkcje bazowe bazy pakietowej z rys. 3.3c
Fig. 3.6. Wavelet-packet functions for basis in Fig. 3.3c

Rys. 3.7. Funkcje bazowe bazy pakietowej z rys. 3.3d
Fig. 3.7. Wavelet-packet functions for basis in Fig. 3.3d

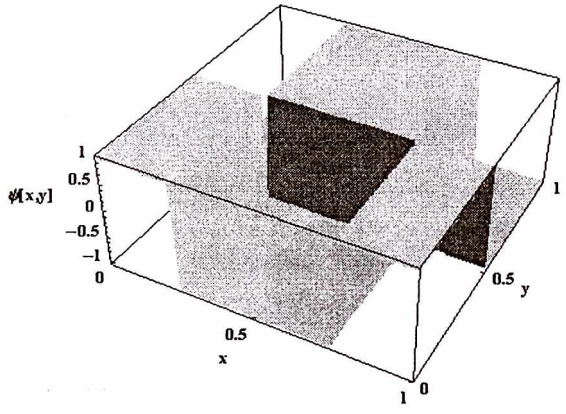
Usytuowanie na diagramie dekompozycji przestrzeni V_3 bazy analizy falkowej pokazano na rys. 3.8a, a funkcji bazy Walsha – pokazanych na rys. 3.2 – zademonstrowano na rys. 3.8b. Funkcje bazowe Walsha można także otrzymać jako iloczyn funkcji Rademachera (Weisstein [3.3]).



Rys. 3.8. Usytuowanie bazy falkowej (a) i bazy Walsha (b)
Fig. 3.8. Diagram of the wavelet basis (a) and Walsh basis (b) locations

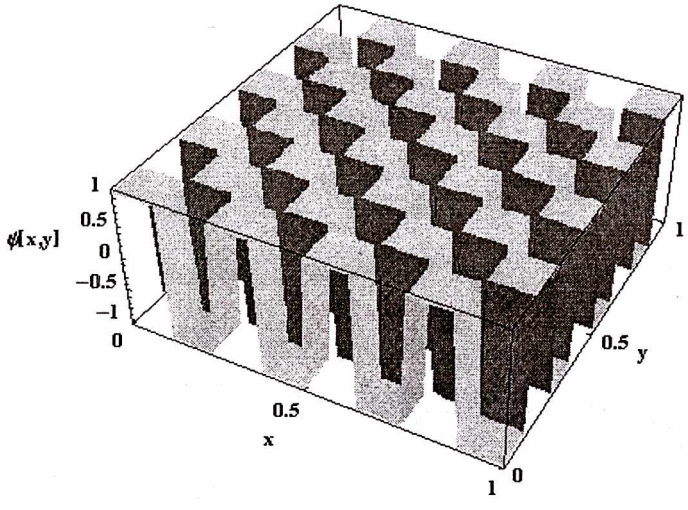
Funkcje bazowe, które należą do jednego wiersza diagramu dekompozycji przestrzeni V_j oznaczać się będzie jako B_w. Przykładowo, funkcje bazowe, których usytuowanie pokazano na rys. 3.3d oznaczono jako B_2, a te z rys. 3.8b jako B_3.

W analogiczny sposób, jak przedstawiono w punkcie drugim, można bazy pakietowe stosować do analizy funkcji czy sygnałów wielowymiarowych. Na rysunkach 3.9 i 3.10 pokazano przykładowo jedynie dwie funkcje bazowe dla funkcji dwuwymiarowych, które zbudowano na bazie funkcji pakietowych Walsha.



Rys. 3.9. Pakietowa funkcja bazowa $\psi(x,y)=w_{1,0}(x)w_{3,0}(y)$

Fig. 3.9. Wavelet-packet basis $\psi(x,y)=w_{1,0}(x)w_{3,0}(y)$



Rys. 3.10. Pakietowa funkcja bazowa $\psi(x,y)=w_{5,0}(x)w_{5,0}(y)$

Fig. 3.10. Wavelet-packet basis $\psi(x,y)=w_{5,0}(x)w_{5,0}(y)$

Przedstawione w następnych rozdziałach algorytmy funkcjonują dla dowolnych jedno- i dwuwymiarowych falkowych baz pakietowych Walsha.

4. Falkowa analiza sygnałów

4.1. Wprowadzenie

Istotnym zagadnieniem współczesnej inżynierii jest analiza sygnału otrzymanego w trakcie prowadzonych pomiarów. Sygnałami mogą być między innymi szeregi liczb będące efektem pomiaru stanu przemieszczenia, prędkości czy przyspieszenia wybranego punktu konstrukcji, pomiary stanu odkształcenia lub natężenia dźwięku.

Celem, który chcemy osiągnąć analizując sygnał, może być uzyskanie informacji o podstawowych cechach badanej konstrukcji, o jej stanie, czy też pojawiających się uszkodzeniach.

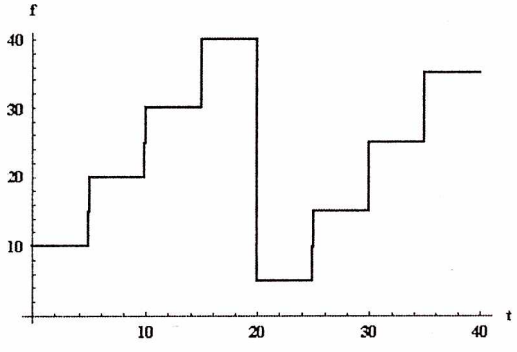
Najczęściej stosowanym narzędziem analizy sygnału jest transformata Fouriera wraz z szeregiem jej odmian oraz metoda Wignera–Villa (Maia i Silva [4.1]). Tutaj wykorzystywana analiza falkowa bazuje na odmiennej idei od przyjętych we wcześniej wymienionych metodach. Jak już powiedziano w poprzednich rozdziałach, analiza falkowa czy pakietowa analiza falkowa pozwala na przedstawienie sygnału w bazie funkcji falkowych, które są obiektami zwartymi, lokalnymi, a nie – jak w metodach analiz fourierowskich – funkcjami harmonicznymi, globalnymi.

Każda z funkcji falkowych jest usytuowana w innym miejscu na osi czasu, a jej zakres (dziedzina) zależy od zastosowanego w analizie przedziału skal. Skalowanie zakresu funkcji falkowych jest podstawowym atrybutem transformacji falkowej, który decyduje o tym, że transformata falkowa czy pakietowa transformata falkowa mogą być bardziej efektywnym – od na przykład krótkiej transformaty Fouriera – narzędziem analizy sygnałów niestacjonarnych.

Celem tego rozdziału jest pokazanie, że pakietowa transformata falkowa jest skutecznym narzędziem analizy spektralnej sygnału, a także umożliwia identyfikację efektów lokalnych w nim zawartych. W rozdziale przedstawiony zostanie wyłącznie praktyczny aspekt stosowania pakietowej analizy falkowej w analizie sygnału – rozważania teoretyczne można znaleźć w cytowanej literaturze.

4.2. Pakietowa analiza sygnału

W punkcie tym – na wybranych, przykładowych sygnałach – zostaną pokazane wyniki spektralnej analizy fourierowskiej i rezultaty pakietowej analizy falkowej bazującej na różnych typach falek. Skalowanie osi częstości na wykresach zależności częstości od czasu – które są wynikiem pakietowej analizy sygnału – przeprowadzono zgodnie z twierdzeniem Nyquista–Shannona (Chui [1.1], Newland [4.2]). Rezultaty pakietowej analizy sygnału – w przeciwieństwie do wyników analizy falkowej – pozwalają na uzyskanie informacji o strukturze częstości sygnału dzięki równomiernemu podziałowi osi częstości na stałe jej zakresy, które odpowiadają aktualnemu parametrowi skali.

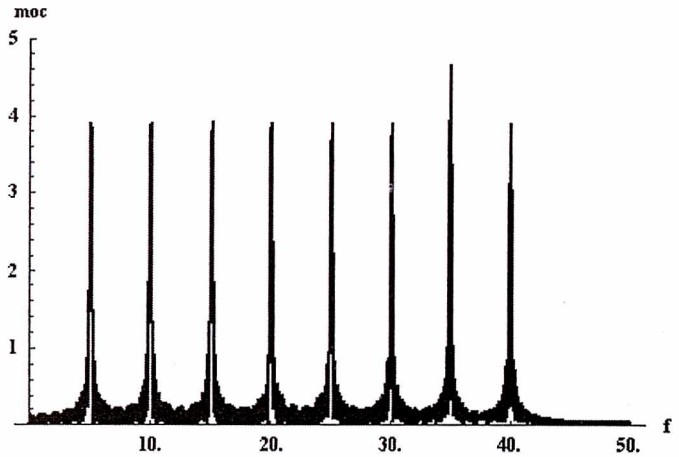


Rys. 4.1. Zależność częstości f sygnału od czasu t
Fig. 4.1. Time t depended frequency f function

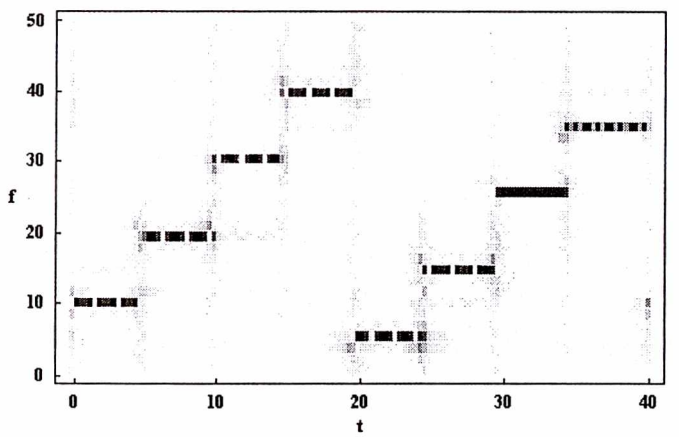
Zostaną tu omówione wyniki analizy sygnałów o odcinkowo zmiennych i liniowo zmiennych częstościach, a także sygnałów o lokalnych, małych zakłóceniach, których identyfikacja jest trudna, a czasami niemożliwa, za pomocą tradycyjnych metod analizy sygnałów. Na rysunku 4.1 pokazano zadaną funkcję zmienności częstości f w czasie t odpowiedzialną za generowany sygnał $y(t)$, który ma następującą postać analityczną:

$$y(t) = \sin[2\pi f(t)t] \tag{4.1}$$

Wyniki spektralnej analizy fourierowskiej sygnału (4.1) przedstawiono na rys. 4.2, a rezultaty pakietowej analizy tego sygnału, która bazuje na falce Meyera rzędu piątego – na rys. 4.3. Falka Meyera jest transformacją falki Shannona, która wygładza jej funkcję skalującą w dziedzinie częstości, skutkując szybszym zanikaniem od mało praktycznej, słabo zanikającej falki Shannona. W obserwowanym czasie sygnał był próbkowany ze stałą częstością 100 Hz, a rezultaty pakietowej analizy falkowej wynikają ze współczynników pakietowej dekompozycji sygnału po piątym jej etapie.



Rys. 4.2. Spektralna analiza Fouriera sygnału (4.1)
Fig. 4.2. Fourier power spectrum of signal (4.1)



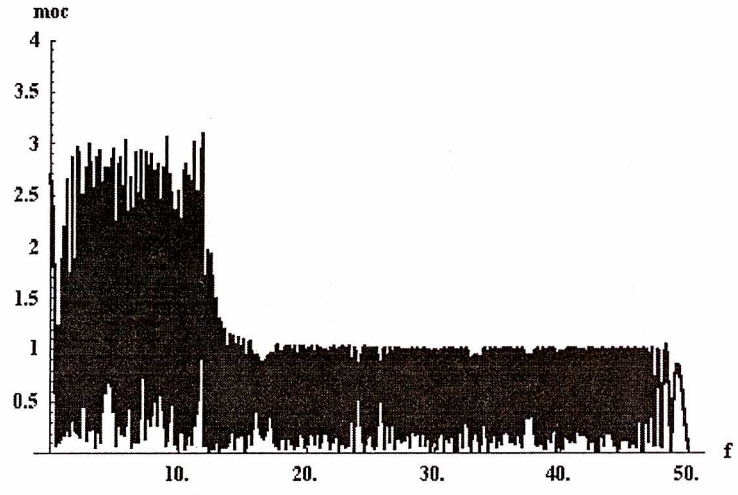
Rys. 4.3. Pakietowa analiza sygnału (4.1) bazująca na falce Meyera
Fig. 4.3. Based on Meyer wavelet packet analysis of (4.1) signal

Jak łatwo zauważyć, wyniki pakietowej analizy falkowej w sposób idealny odzwierciedlają zmiany częstości w czasie – analiza spektralna nie daje informacji o zmianach częstości, wykazuje jedynie ich istnienie (uśrednione po całym czasie obserwacji). Oczywiście falkowa analiza pakietowa dostarcza takich informacji o strukturze sygnału, która jest zgodna z zasadą nieoznaczoności w dziedzinie częstotliwościowo-czasowej analizy sygnału (Chui [4.1], Newland [4.2, 4.3, 4.4]).

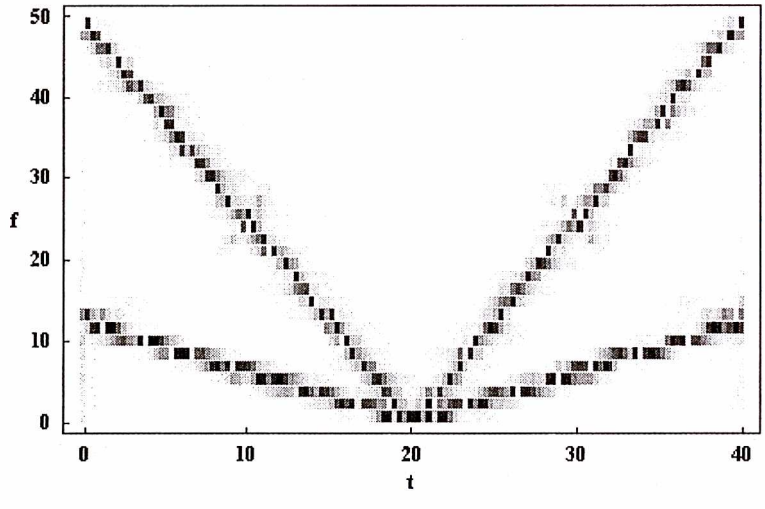
Wyniki analizy dla bardziej złożonego sygnału

$$y(t)=\sin\frac{100(41-t)}{41\pi t}+\sin\frac{25(41-t)}{41\pi t} \tag{4.2}$$

pokazano odpowiednio na rys. 4.4 i 4.5 analogicznie do przedstawionych na rys. 4.2 i 4.3.



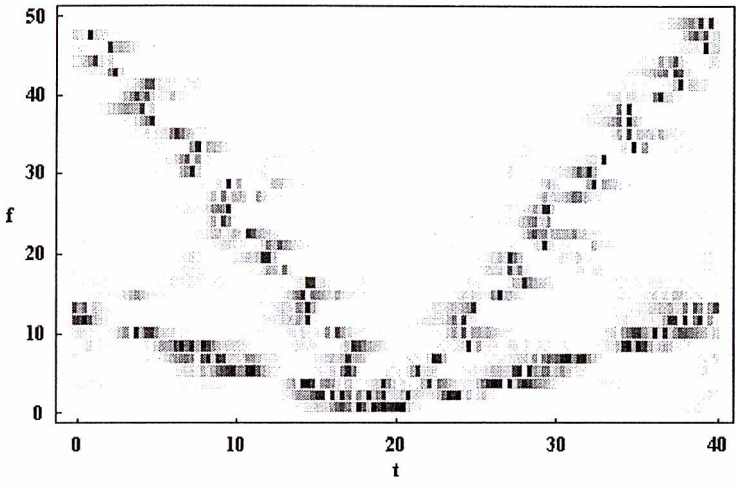
Rys. 4.4. Spektralna analiza Fouriera sygnału (4.2)
Fig. 4.4. Fourier power spectrum of signal (4.2)



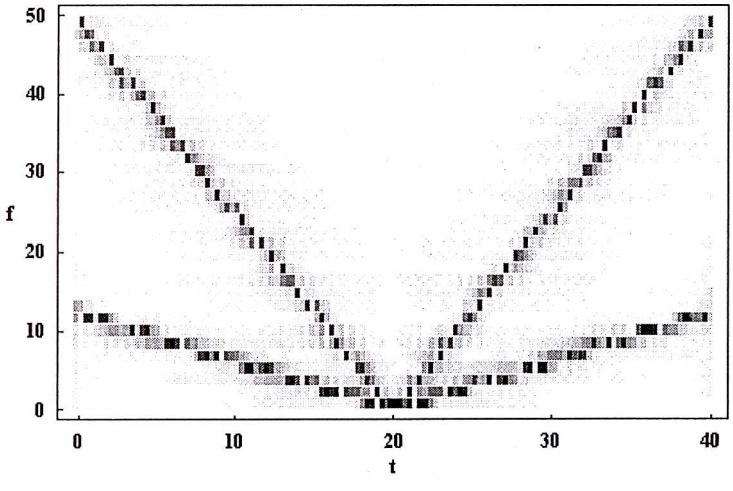
Rys. 4.5. Pakietowa analiza sygnału (4.2) bazująca na falce Meyera
Fig. 4.5. Based on Meyer wavelet packet analysis of (4.2) signal

W przypadku sygnału (4.2) analiza pakietowa dała również zadowalające rezultaty.

Jeżeli w analizie pakietowej wykorzystamy inne rodzaje falek, to wyniki nie muszą być każdorazowo identyczne. Na rysunku 4.6 pokazano wyniki pakietowej analizy sygnału (4.2), która bazowała na falce Daubechies 16 rzędu, a na rys. 4.7 – rezultaty analizy bazującej na falce Shannona rzędu piątego.



Rys. 4.6. Pakietowa analiza sygnału (4.2) bazująca na falce Daubechies
Fig. 4.6. Based on Daubechies wavelet packet analysis of (4.2) signal



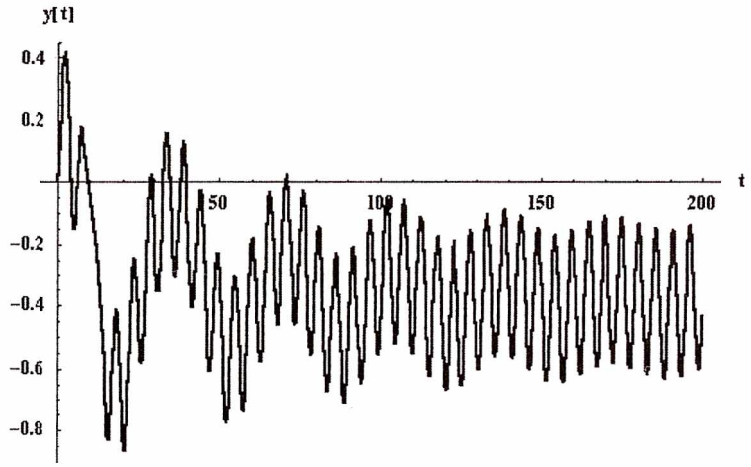
Rys. 4.7. Pakietowa analiza sygnału (4.2) bazująca na falce Shannona
Fig. 4.7. Based on Shannon wavelet packet analysis of (4.2) signal

Rozpatrzmy teraz odpowiedź układu nieliniowego o jednym stopniu swobody, którego równanie ruchu ma następującą postać:

$$30y''(t)+y'(t)+5y'(t)^2+0{,}1y(t)+2y(t)^3=10\cos(1{,}2t) \tag{4.3}$$

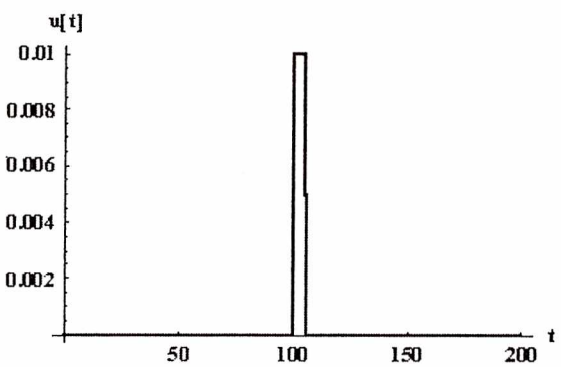
a warunki początkowe ruchu są zerowe ($y(0)=y'(0)=0$).

Na rysunku 4.8 pokazano przebieg odpowiedzi układu (4.3) obserwowany w czasie 200 s.

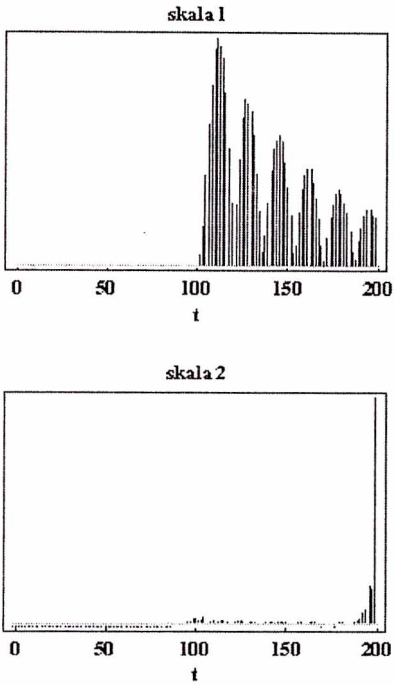


Rys. 4.8. Odpowiedź $y(t)$ układu (4.3)
Fig. 4.8. Response $y(t)$ of (4.3) system

Jeżeli do prawej strony równania (4.3) dodamy funkcję zakłócającą $u(t)$, której przebieg pokazano na rys. 4.9, to odpowiedź tak zmodyfikowanego układu (4.3) jest identyczna z pokazaną na rys. 4.8. Brak różnicy w odpowiedziach układu niezakłóconego i zakłóconego wynika z przyjętej postaci funkcji $u(t)$. Jeżeli przeprowadzimy spektralną analizę fourierowską układu niezakłóconego i zakłóconego, to otrzymane wyniki również nie wykażą jakichkolwiek różnic. Obecność zakłócenia z łatwością możemy zidentyfikować, przeprowadzając pakietową analizę obu sygnałów, a następnie obliczając różnicę wartości bezwzględnych współczynników pakietowych rozwinięć sygnałów przy różnych skalach. Na rysunku 4.10 pokazano te różnice przy dwóch najniższych poziomach rozdzielczości analizowanych sygnałów. W analizie pakietowej wykorzystano falkę Meyera.



Rys. 4.9. Postać funkcji zakłócającej
Fig. 4.9. Shape of disturbance function



Rys. 4.10. Różnice w pakietowych współczynnikach rozwinięć sygnału niezakłóconego i zakłóconego
Fig. 4.10. Wavelet-packet coefficients differences of disturbed and undisturbed signal

Falkowa i pakietowa falkowa analiza sygnału są skutecznym i często wykorzystywanym narzędziem badania wielu istotnych zjawisk występujących w problemach współczesnej mechaniki (Ruzzene, Fasana, Garibaldi i Piombo [4.5], Staszewski [4.6, 4.7], Sung, Tai i Chen [4.8], Rubini i Meneghetti [4.9] oraz Neild, McFadden i Williams [4.10]).

4.3. Podsumowanie

W rozdziale tym przedstawiono jedynie praktyczny aspekt wykorzystania pakietowej analizy falkowej do ustalania częstotliwościowo-czasowej struktury sygnału próbkowanego ze stałą częstością. Rezultaty pakietowej analizy falkowej pokazano na płaszczyźnie czasu i częstości, zestawiając je z wynikami tradycyjnej spektralnej analizy fourierowskiej. Zwrócono uwagę na istotne znaczenie doboru filtra falkowego, który jest podstawą analizy falkowej. Rezultaty testów numerycznych wskazują na to, że:

- pakietowa analiza falkowa jest skutecznym narzędziem częstotliwościowo -czasowej analizy sygnału, szczególnie przydatnej do badania sygnałów rzeczywistych, które są na ogół niestacjonarne,
- analiza pakietowa pozwala na jednoznaczne wskazanie różnic między pozornie identycznymi sygnałami, co może być na przykład podstawą do identyfikacji uszkodzeń konstrukcji.

5. Analiza falkowa sygnałów chaotycznych

5.1. Wprowadzenie

Poszukiwanie precyzyjnych opisów zjawisk rzeczywistych w naturalny sposób prowadzi do modeli nieliniowych. Matematyczny opis zachowania się tych modeli formułowany na gruncie mechaniki nieliniowej sprowadza się z reguły do złożonych układów równań różniczkowych cząstkowych. Jednym ze zjawisk, które na bazie opisu nieliniowego może być analizowane jest zjawisko chaosu (Parker i Chua [5.1], Argyris, Faust i Haase [5.2], Chen i Dong [5.3], Chen i Leung [5.4], Robinson [5.5]). Analiza – z reguły numeryczna – zjawisk chaotycznych jest jednym z podstawowych elementów poznania stanów krytycznych modeli nieliniowych. O stanie chaotycznym badanego układu mogą na przykład świadczyć jego portrety fazowe, analiza Fouriera jego odpowiedzi, mapy Poincare czy diagramy bifurkacji, ale jednoznacznego rozstrzygnięcia dostarcza nam numerycznie żmudna analiza jego wykładników Lapunova.

Jednym z narzędzi pozwalającym pokazać cechy charakterystyczne stanów chaotycznych układów jest analiza falkowa ich odpowiedzi (Chui [1.1], Newland [4.2], Resnikoff i Wells [1.2], Goswami i Chan [1.8], Flandrin [5.6], Mallat [1.3]). Analiza ta, z uwagi na charakter przyjmowanych funkcji bazowych (falek), szczególnie dobrze nadaje się do opisu stanów niestacjonarnych i tym samym może stanowić jakościowy, alternatywny sposób – w stosunku do wyżej wspomnianych – identyfikacji stanów chaotycznych badanych układów.

Celem rozdziału jest pokazanie, na przykładzie nieliniowej analizy układu o jednym stopniu swobody z wiskoelastycznymi jednostronnymi więzami, skuteczności dyskretnej analizy falkowej i pakietowej analizy falkowej odpowiedzi układu w szybkiej, jakościowej identyfikacji jego stanów chaotycznych. Analizowany układ o jednym stopniu swobody może być modelem zachowania się dynamicznie obciążanych, wspornikowych elementów konstrukcyjnych o ograniczanych przemieszczeniach i zmiennych w czasie więzach.

Proponowane tutaj podejście wykrywania stanów chaotycznych, choć demonstrowane na prostym przykładzie modelu nieliniowego, jest ogólne i można je stosować w analizie układów złożonych.

Mimo bardzo licznych zastosowań w wielu dziedzinach współczesnej nauki analiza falkowa dotychczas stosunkowo rzadko wykorzystywana była w analizie układów chaotycznych. Między innymi analizę falkową Permann i Hamilton [5.7] zastosowali do detekcji składowych harmonicznych o małych amplitudach w ruchach uznawanych za chaotyczne. Wykorzystując ciągłą transformatę falkową Staszewski i Warden [5.8] analizowali statystyczne miary współczynników rozwinięcia falkowego w wariancie Uedy oscylatora Duffinga, a Jibing, Hangshang i Yinchao [5.9], stosując tak zwaną harmoniczną transformatę falkową i mapy Poincare, identyfikowali typy możliwych ruchów nieliniowych układów dynamicznych. Mastroddi i Bettoli [5.10] zastosowali ciągłą transformatę falkową w analizie sygnału układu nieliniowego w okolicach jego punktu bifurkacji typu Hopfa, a Kyprianou i Staszewski [5.11] w analizie oscylatora Duffinga wykorzystali pewną odmianę klasycznej analizy falkowej.

W punkcie drugim rozdziału przedstawiono krótkie wprowadzenie do problematyki drgań chaotycznych, w punkcie trzecim sformułowano równanie ruchu nieliniowego geometrycznie i fizycznie układu o jednym stopniu swobody z więzami jednostronnymi pod obciążeniem dynamicznym, w punkcie czwartym omówiono szereg analiz numerycznych, które pozwoliły potwierdzić skuteczność pokazanego podejścia w identyfikacji stanów chaotycznych, a w punkcie piątym podsumowano otrzymane rezultaty i sformułowano wnioski ogólne.

5.2. Krótkie wprowadzenie do problematyki drgań chaotycznych

Jak już wspomniano, jednym ze zjawisk, które można analizować za pomocą nieliniowych modeli matematycznych, jest zjawisko chaosu. Przez chaos rozumiana jest tutaj nieregularna i nieprzewidywalna ewolucja deterministycznych układów nieliniowych.

Możliwość wystąpienia zjawisk chaotycznych jako pierwszy przewidział Poincare, który zwrócił uwagę na to, że wpływ małych różnic warunków początkowych może skutkować olbrzymimi różnicami w rozwiązaniach końcowych. Ewolucję tak zachowujących się układów można uznać za nieprzewidywalną, przypadkową, czyli chaotyczną. Należy podkreślić, że choć zachowanie układów chaotycznych przypomina zachowanie układów stochastycznych, to źródłem zjawisk chaotycznych jest dynamika samego deterministycznego układu, a nie nieprzewidywalne wpływy otoczenia.

Istotny wzrost zainteresowania naukowców zjawiskami chaotycznymi nastąpił w drugiej połowie dwudziestego wieku, gdy pojawiła się możliwość stosowania efektywnych narzędzi numerycznych niezbędnych w analizie układów nieliniowych. Już wtedy okazało się, że zjawisko chaosu nie jest zjawiskiem rzadkim, i że występuje w wielu obserwowalnych zachowaniach dynamicznych układów nieliniowych. Chaos obserwowany jest w wielu zagadnieniach mechaniki, chemii, optyki, biologii, fizyki atmosfery, a także w zjawiskach elektromagnetycznych i akustycznych.

Z uwagi na to, że zjawiska chaotyczne są powszechne w zachowaniach układów nieliniowych, istnieje potrzeba identyfikacji tych zakresów parametrów opisujących matematyczne modele układów, przy których z tym zjawiskiem mamy do czynienia. Ogólnie metody identyfikacji zjawisk chaotycznych można podzielić na metody jakościowe i ilościowe. Metody jakościowe z reguły w sposób ostateczny nie rozstrzygają o charakterze zjawiska, ale ich stosowanie jest na ogół łatwiejsze i mniej pracochłonne od opisów ilościowych. Do sposobów jakościowych oceny ewentualnego chaotycznego charakteru odpowiedzi układu zaliczamy między innymi: obserwację zmienności w czasie jego odpowiedzi, ocenę portretów fazowych ruchu, ocenę charakteru rozkładu fourierowskiego spektrum sygnału, a także charakter tak zwanych map Poincare i diagramów bifurkacji. Zjawiska chaotyczne charakteryzują się bardzo skomplikowaną historią przebiegów ich odpowiedzi, portretami fazowymi z reguły wypełniającymi złożonymi trajektoriami w sposób zupełny całe fragmenty przestrzeni fazowych, ciągłymi i rozłożonymi spektrami częstości, mapy Poincare ruchów chaotycznych tworzą tak zwane obrazy fraktalne, a w diagramach bifurkacji obserwujemy kaskady bifurkacji – rozszczepiania trajektorii ruchu.

Do sposobów ilościowych oceny zjawisk chaotycznych można zaliczyć analizę ich wymiarów fraktalnych oraz analizę wykładników Lapunova λ, których wartości w sposób jednoznaczny rozstrzygają o charakterze badanego zjawiska.

W rozdziale tym sformułowano sposób jakościowej oceny zjawiska chaosu, w którym wykorzystuje się analizę falkową badanych sygnałów, i który stanowi alternatywę dla wyżej wspomnianych podejść jakościowych oceny tego typu zjawisk.

5.3. Równanie ruchu nieliniowego układu o jednym stopniu swobody

Rozpatrzmy drgania układu składającego się ze sprężyście zamocowanego, nieskończenie sztywnego bezmasowego pręta o długości l z masą skupioną m, której położenie na pręcie określa współrzędna x (rys. 5.1). Załóżmy, że układ obciążony jest nie posiadającą potencjału (niekonserwatywną) dynamiczną siłą $P(t)$, której kierunek działania określa dynamicznie zmienny parametr śledzenia $\alpha(t)$. Jako współrzędną uogólnioną zadania przyjęto obrót pręta $q(t)$, który określa wychylenie pręta z jego pionowej postaci.

Beznaprężeniową postać wychylonego pręta określa imperfekcja wychylenia q_0. Sztywność sprężystego zamocowania pręta dana jest zmienną w czasie funkcją $k(t)$, a jej wiskotyczne tłumienie funkcją $c(t)$. Dodatkowe ograniczenie ruchu badanego układu spowodowane jest istnieniem sprężysto-tłumiących dwóch więzi jednostronnych, których sztywność, wiskotyczne tłumienie oraz pionowe i poziome położenie charakteryzują odpowiednio funkcje: ($k_l(t)$, $c_l(t)$, $h_l(t)$, $\Delta_l(t)$) dla sprężyny z lewej (l) strony i ($k_r(t)$, $c_r(t)$, $h_r(t)$, $\Delta_r(t)$) dla sprężyny ze strony prawej (r).

Rozpatrując warunek dynamicznej równowagi układu w postaci znikania sumy momentów wszystkich sił (wraz z siłą bezwładności) względem punktu sprężystego zamocowania pręta i wprowadzając wielkości bezwymiarowe $\xi = x/l$, $\xi_l = h_l/l$, $\xi_r = h_r/l$, $\xi_{\Delta l} = \Delta_l / l$ i $\xi_{\Delta r} = \Delta_r / l$ określające położenie masy m oraz lewej i prawej więzi jednostronnej, łatwo otrzymamy (przy założeniu liniowości geometrycznej zadania, czyli przy nieskończenie małych $q(t)$) następujące równanie jego ruchu

$$\begin{aligned} m(\xi l)^2 \ddot{q}(t) + c(t)\dot{q}(t) + c_r(t)(\xi_r l)H[q(t)(\xi_r l) - \xi_{\Delta r} l]\dot{q}(t)(\xi_r l) \\ + c_l(t)(\xi_l l)H[\xi_{\Delta l} l - q(t)(\xi_l l)]\dot{q}(t)(\xi_l l) + k(t)[q(t) - q_0(t)] \\ + k_r(t)(\xi_r l)H[q(t)(\xi_r l) - \xi_{\Delta r} l][q(t)(\xi_r l) - \xi_{\Delta r} l] \\ + k_l(t)(\xi_l l)H[\xi_{\Delta l} l - q(t)(\xi_l l)][q(t)(\xi_l l) - \xi_{\Delta r} l] = P(t)q(t)l\eta(t) \end{aligned} \tag{5.1}$$

gdzie $\eta(t) = [1 - \alpha(t)]$, różniczkowanie po czasie t oznaczono kropkami, $H(.)$ jest funkcją Haevisida.

Jeżeli dopuścimy możliwość występowania skończonych obrotów $q(t)$, to równanie zagadnienia nieliniowego geometrycznie przyjmie postać

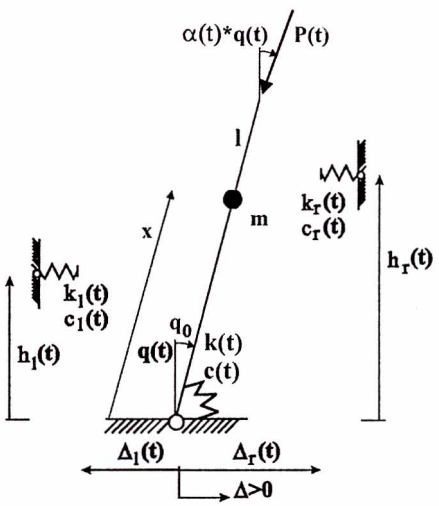
$$\begin{aligned} m(\xi l)^2 \ddot{q}(t) + c(t)\dot{q}(t) + c_r(t)(\xi_r l)H[\tan q(t)(\xi_r l) - \xi_{\Delta r} l]\frac{1}{\cos^2 q(t)}\dot{q}(t)(\xi_r l) \\ + c_l(t)(\xi_l l)H[\xi_{\Delta l} l - \tan q(t)(\xi_l l)]\frac{1}{\cos^2 q(t)}\dot{q}(t)(\xi_l l) + k(t)[q(t) - q_0(t)] \\ + k_r(t)(\xi_r l)H[\tan q(t)(\xi_r l) - \xi_{\Delta r} l][\tan q(t)(\xi_r l) - \xi_{\Delta r} l] \\ + k_l(t)(\xi_l l)H[\xi_{\Delta l} l - \tan q(t)(\xi_l l)][\tan q(t)(\xi_l l) - \xi_{\Delta l} l] = P(t)l\sin[q(t)l\eta(t)] \end{aligned} \tag{5.2}$$

Zarówno równanie (5.1), opisujące zagadnienie geometrycznie liniowe, jak i równanie (5.2), opisujące zagadnienie geometrycznie nieliniowe, z uwagi na istnienie więzi jednostronnych oraz przyjęcie dowolnych postaci funkcji sztywności układu są równaniami opisującymi zagadnienie nieliniowo fizycznie. Równania te stanowią podstawę analizy numerycznej, której rezultaty pokazano w następnym punkcie.

5.4. Analiza numeryczna

Badany układ, niezależnie od tego, czy jego zachowanie jest opisywane równaniem (5.1) czy (5.2), przy odpowiednim doborze parametrów zachowuje się chaotycznie, o czym – jak już wspomniano – jednoznacznie rozstrzyga analiza ilościowa jego wykładników Lapunova.

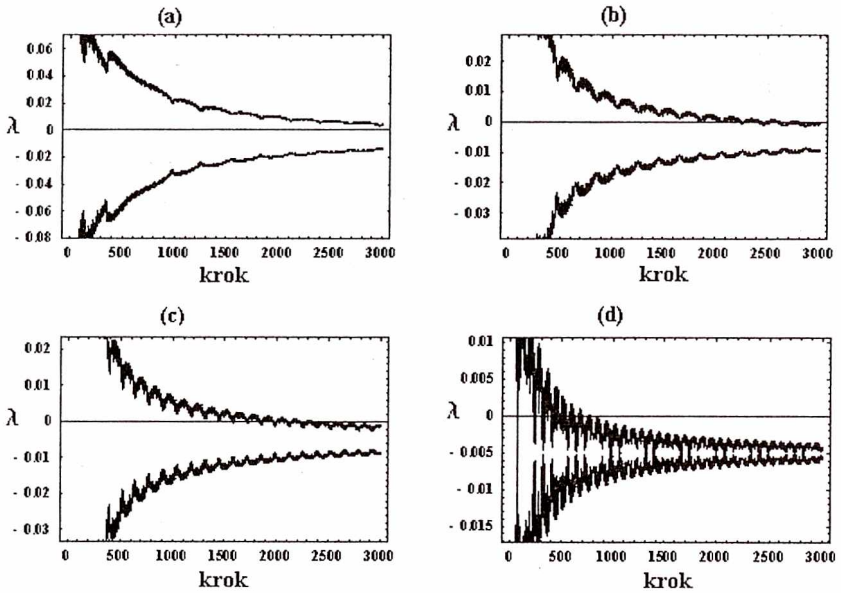
Na przykładzie badanego układu obciążonego dynamiczną siłą niekonserwatywną, pokazana zostanie analiza jego wykładników Lapunova przy różnych parametrach śledzenia α. Przykładowo wyznaczone zostaną zakresy zmienności parametru α, przy których układ przechodzi do stanów krytycznych (chaotycznych), a odpowiedzi układu przy tych parametrach poddane zostaną analizie falkowej. Modelem matematycznym zachowania się układu będzie równanie (5.2) oraz równanie (5.1) opisujące zagadnienie geometrycznie liniowe.



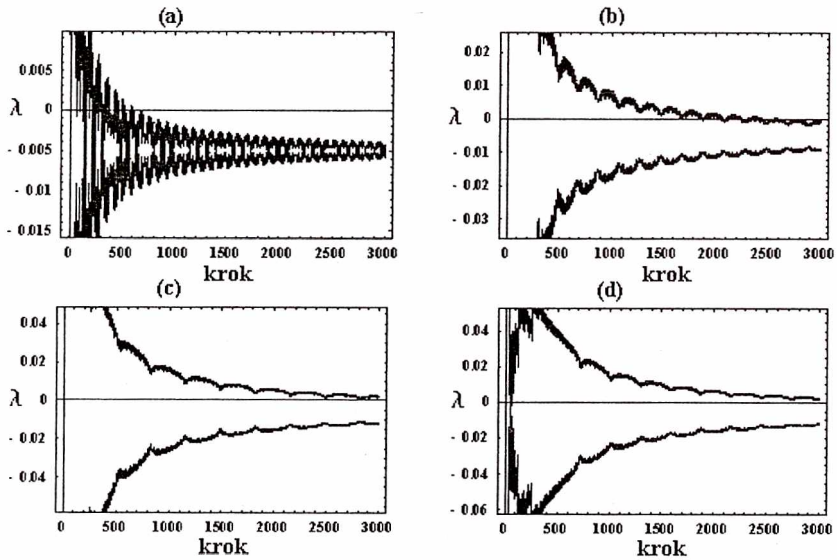
Rys. 5.1. Schemat analizowanego modelu
Fig. 5.1. Diagram of analysed model

W przykładach przyjęto, że $m = l = \xi = 1$, $q_0 = 0$, $c = c_r = c_l = 0{,}01$, $k = 10$, $k_r = k_l = 1000$, $\xi_l = \xi_r = 0{,}5$, $\Delta_r = -\Delta_l = 0{,}1$, $P(t) = 5\sin(3t)$, a wychylenie początkowe i prędkość początkowa mają odpowiednio wartości $q(0) = 0{,}1$ i $\dot{q}(0) = 0{,}0$. Badając wpływ zmienności parametru śledzenia α w przykładowym zakresie $\alpha \in (-0{,}5; 2{,}5)$ i obserwując wykładniki Lapunowa, można zauważyć, że gdy $\alpha < 0{,}0$ i $\alpha > 2{,}0$, wtedy jeden z wykładników jest dodatni i tym samym układ jest chaotyczny. Precyzyjne poszukiwanie granic rozwiązań chaotycznych pozwala stwierdzić, że granica bliska zeru zawarta jest w przedziale $\alpha \in (0{,}02; 0{,}04)$, a granica bliska $\alpha = 2{,}0$ zawiera się w przedziale $\alpha \in (1{,}98; 1{,}99)$.

Wykresy zbieżności poszukiwanych wykładników Lapunova w okolicy $\alpha = 0{,}0$ i $\alpha = 2{,}0$ pokazano na rys. 5.2 i 5.3, gdzie na osi rzędnych odłożono wartości wykładników Lapunova, a na osi odciętych liczbę kroków czasowych prowadzonej analizy. Przyjęto tutaj, że jeden krok czasowy wynosi $\Delta t = 0{,}025$ s. Analiza zbieżności wykładników Lapunova w dwukrotnie dłuższym czasie potwierdziła wnioski wynikające z rys. 5.2 i 5.3.



Rys. 5.2. Analiza zbieżności wykładników Lapunowa λ przy $\alpha = 0{,}0$ (a), $\alpha = 0{,}02$ (b), $\alpha = 0{,}04$ (c) i $\alpha = 0{,}1$ (d)
Fig. 5.2. Convergence plot of Lyapunov exponents λ at $\alpha = 0.0$ (a), $\alpha = 0.02$ (b), $\alpha = 0.04$ (c) and $\alpha = 0.1$ (d)



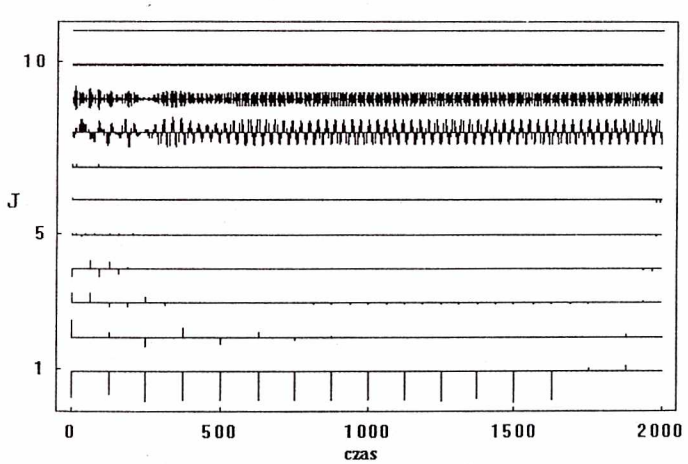
Rys. 5.3. Analiza zbieżności wykładników Lapunowa λ przy $\alpha = 1{,}9$ (a), $\alpha = 1{,}98$ (b), $\alpha = 1{,}99$ (c) i $\alpha = 2{,}0$ (d)
Fig. 5.3. Convergence plot of Lyapunov exponents λ at $\alpha = 1.9$ (a), $\alpha = 1.98$ (b), $\alpha = 1.99$ (c) and $\alpha = 2.0$ (d)

Przy wyznaczaniu wykładników Lapunowa wykorzystano algorytmy prezentowane w pracy Benettina, Galgani, Giorgillia i Strelcyna [5.12] oraz w pracy Eckmanna i Ruellea [5.13], a ocenę zbieżności algorytmów oparto na teście zaproponowanym przez Parkera i Chua [5.1]. Oscylacyjny charakter wykresów zbieżności wykładników Lapunova jest typowy dla niektórych stanów chaotycznych, a przykłady tego typu stanów można znaleźć między innymi w pracach Geista, Parlitza i Lauterborna [5.14], Cederbauma i Monda [5.15] oraz Van Doorena [5.16].

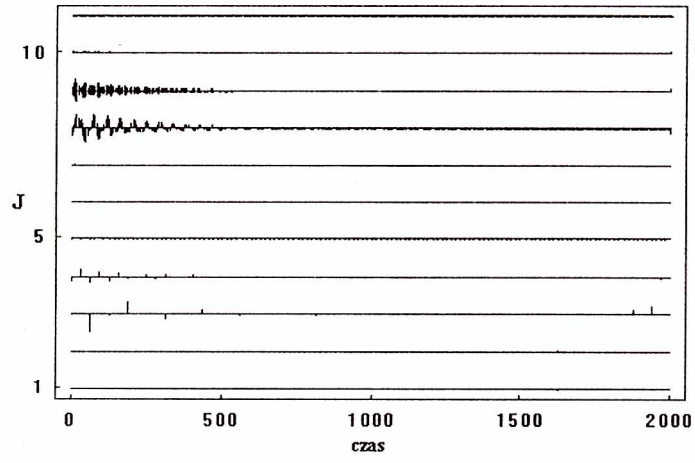
Podstawą analizy falkowej jest odpowiedź układu (sygnał) w postaci dyskretnego zbioru przemieszczeń $q(t)$ o liczebności $N = 2^{14}$ jednakowo w czasie odległych odczytów q_i z pierwszych 2000 sekund czasu trwania drgań układu. Przyjęta częstość próbkowania sygnału odpowiada około 15 odczytom w okresie drgań własnych badanego układu.

W analizie falkowej sygnałów przyjęto tak zwane periodyczne ($q_{i+N} = q_i$) warunki brzegowe. Do analizy sygnału wykorzystano falkę Daubechies rzędu 12 (Chui [1.1]). Sygnał analizowano także przyjmując inne falki: falkę Shannona, Mallata i Haara (Chui [1.1], Resnikoff i Wells [1.2], Goswami i Chan [1.8], Mallat [1.3]). W każdej z tych analiz – z wyjątkiem analizy wykorzystującej falkę Haara – otrzymano wyniki zgodne. W przypadku falki Haara, choć oznaki przejścia do chaosu były w zasadzie zachowane, to jednak i w tym zastosowaniu potwierdziły się słabości opisu sygnału bazującego na tego typie falki (Chui [1.1], Resnikoff i Wells [1.2]), które są związane z licznymi zbiorami współczynników rozwinięcia o porównywalnych wartościach bezwzględnych.

Na rysunkach 5.4 i 5.5 pokazano rozkład w czasie wielkości współczynników rozwinięcia falkowego odpowiedzi układu odpowiednio w stanie niechaotycznym (α = 0,0) i chaotycznym (α = 0,1) na poszczególnych poziomach (skalach) postrzegania sygnału.



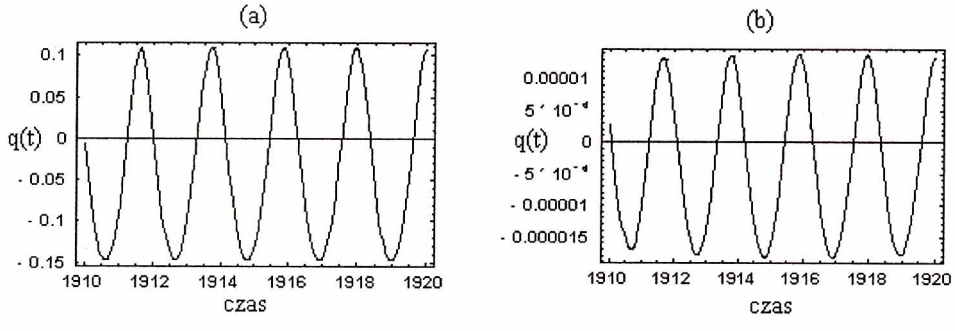
Rys. 5.4. Współczynniki rozwinięcia falkowego sygnału chaotycznego (α = 0,0) na różnych poziomach rozdzielczości J
Fig. 5.4. Chaotic signal (α = 0.0) wavelet expansion coefficients at different resolutions J



Rys. 5.5. Współczynniki rozwinięcia falkowego sygnału niechaotycznego ($\alpha = 0{,}1$) na różnych poziomach rozdzielczości J
Fig. 5.5. Non-chaotic signal ($\alpha = 0.1$) wavelet expansion coefficients at different resolutions J

Jak łatwo zauważyć, istnieją zasadnicze różnice między tymi rozwinięciami, szczególnie widoczne na wyższych poziomach rozdzielczości, co w prosty sposób pozwala na ich rozróżnienie.

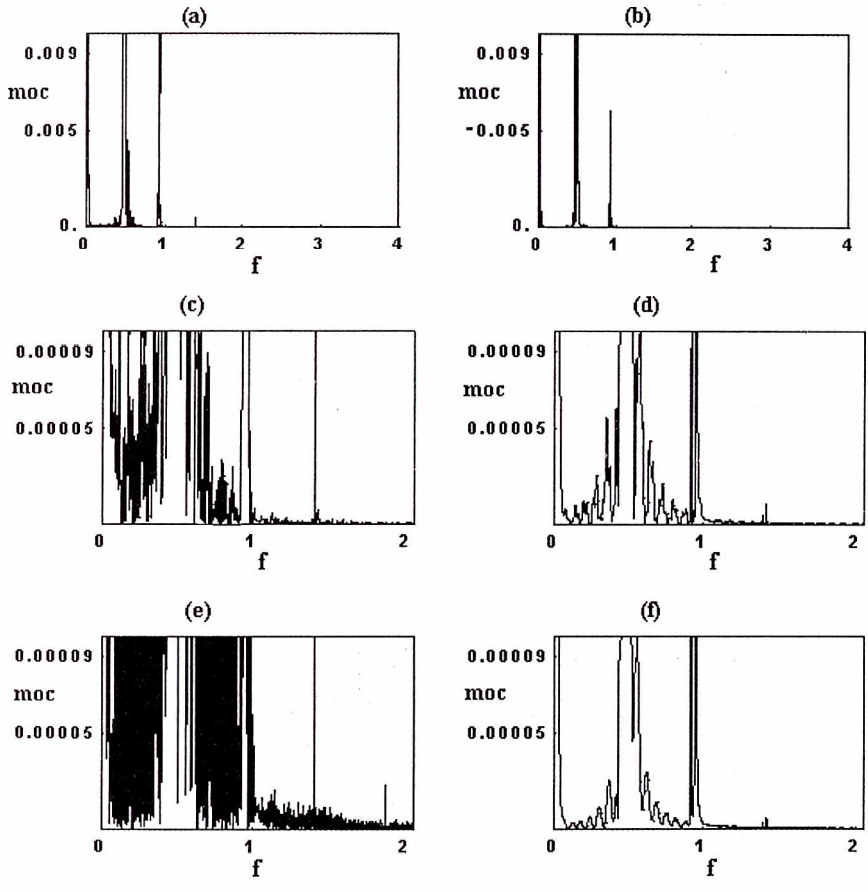
Obserwacja przebiegów czasowych analizowanych stanów nie daje możliwości ich praktycznego rozróżnienia. Na potwierdzenie tego na rys. 5.6 przedstawiono fragmenty przebiegów czasowych odpowiedzi układu w stanie niechaotycznym ($\alpha = 0{,}0$) (rys. 5.6a) i chaotycznym ($\alpha = 0{,}1$, rys. 5.6b), które – z wyjątkiem skali amplitud – można uznać prawie za identyczne.



Rys. 5.6. Przebiegi czasowe odpowiedzi układu $q(t)$ przy $\alpha = 0{,}0$ (a) i $\alpha = 0{,}1$ (b)
Fig. 5.6. Fragments of the response of the system $q(t)$ at $\alpha = 0.0$ (a) and $\alpha = 0.1$ (b)

Na rysunku 5.7 pokazano różnice w fourierowskich spektrach mocy sygnałów chaotycznych (przy $\alpha = 0{,}0$ – rys. 5.7a i 5.7c oraz przy $\alpha = -0{,}05$ – rys. 5.7e) i sygna-

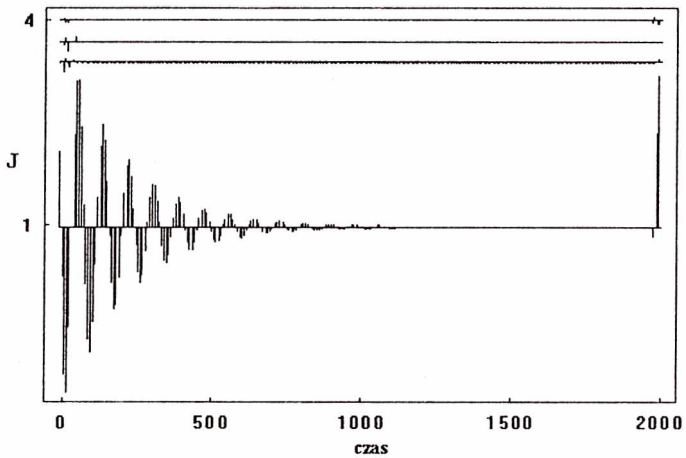
łów niechaotycznych (przy $\alpha = 0{,}1$ – rys. 5.7b i 5.7d oraz przy $\alpha = 0{,}15$ – rys. 5.7f). Istniejące jakościowe różnice w rozkładach spektrów mocy sygnałów nie są tak ewidentne jak różnice w rozkładach współczynników rozwinięć falkowych przy $\alpha = 0{,}0$ (rys. 5.4) i przy $\alpha = 0{,}1$ (rys. 5.5). Przy $\alpha = 0{,}05$ (rys. 5.7e) i przy $\alpha = 0{,}15$ (rys. 5.7f) spektra rozkładów mocy sygnałów pozwalają jednoznacznie, jakościowo rozróżnić sygnały chaotyczne od niechaotycznych.



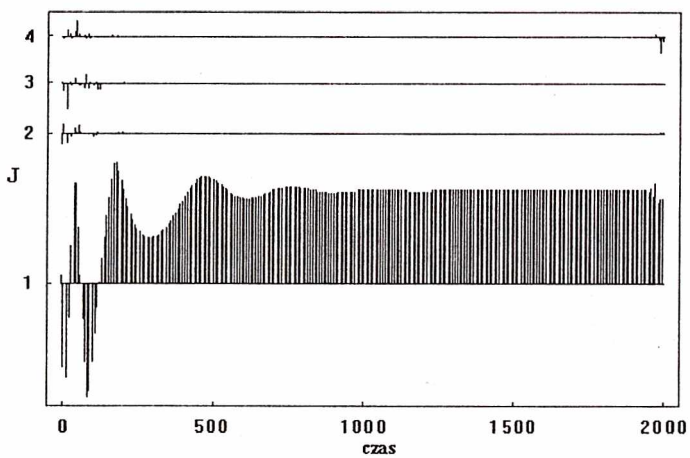
Rys. 5.7 Spektra mocy sygnałów chaotycznych przy $\alpha = 0{,}0$ (a), (c), przy $\alpha = -0{,}05$ (e) i sygnałów niechaotycznych przy $\alpha = 0{,}1$ (b), (d), i $\alpha = 0{,}15$ (f)
Fig. 5.7. Power spectrum of chaotic signal $\alpha = 0.0$ (a), (c), $\alpha = -0.05$ (e) and non-chaotic signal $\alpha = 0.1$ (b), (d) and $\alpha = 0.15$ (f)

Różnice między stanami chaotycznymi i niechaotycznymi jeszcze łatwiej można obserwować, wykorzystując pakietową analizę falkową sygnału. Jej zastosowanie (po sześciu etapach dekompozycji, których wynikiem jest 64 poziomów rozdzielczości)

pokazano na przykładzie badania sygnałów w okolicy drugiej, z wcześniej wyznaczonych (rys. 5.3) granic stanów niechaotycznych i chaotycznych.



Rys. 5.8. Współczynniki pakietowej analizy sygnału niechaotycznego ($\alpha = 1{,}96$) najniższych poziomów rozdzielczości J
Fig. 5.8. Non-chaotic signal ($\alpha = 1.96$) wavelet coefficients at the lowest resolutions J



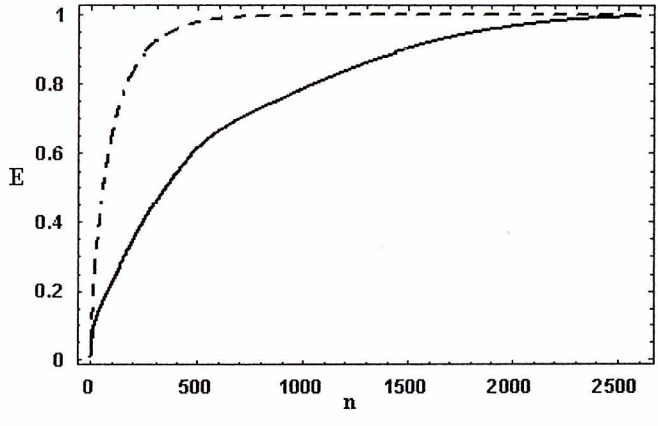
Rys. 5.9. Współczynniki pakietowej analizy sygnału chaotycznego ($\alpha = 2{,}0$) najniższych poziomów rozdzielczości J
Fig. 5.9. Chaotic signal ($\alpha = 2.0$) wavelet coefficients at the lowest resolutions J

Na rysunkach 5.8 i 5.9 pokazano wybrane (dla obu stanów te same) poziomy pakietowej, falkowej dekompozycji sygnałów odpowiednio niechaotycznych (przy $\alpha = 1.96$) i chaotycznych (przy $\alpha = 2{,}0$). Sygnały analizowano za pomocą filtru Daubechies rzędu 12. Przedstawione poziomy odpowiadają częstościom analizowa-

nego sygnału z zakresu (0,0 Hz; 0,25 Hz). Różnice w rozkładzie i wielkościach współczynników rozwinięć są ewidentne.

Przykłady istotnych różnic w analizie pakietowej sygnału niechaotycznego i chaotycznego można także łatwo znaleźć w innych zakresach częstości. Czas poszukiwania granic rozwiązań chaotycznych i niechaotycznych z wykorzystaniem analizy falkowej odpowiedzi układu był przynajmniej o dwa rzędy krótszy od czasu żmudnej analizy zmienności jego wykładników Lapunova.

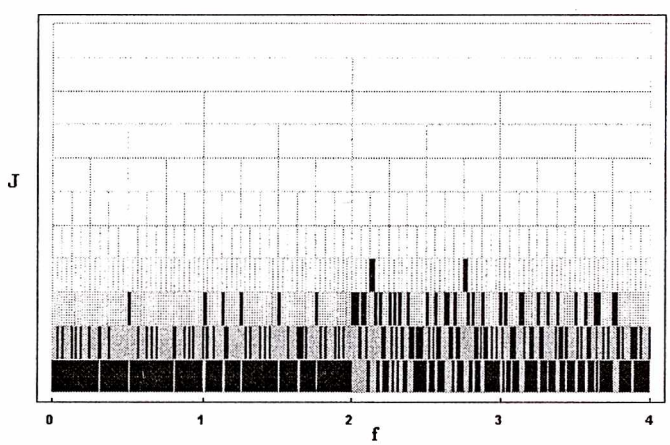
Jeżeli zdefiniujemy skumulowaną energię falkowego rozwinięcia sygnału jako $E = \sum_{i=1}^{n} |c_i|^2$, gdzie $|c_i| \geq |c_{i+1}|$ i unormujemy tę energię do 1, to analiza liczby n współczynników, które są „energetycznie" istotne może dać pogląd na charakter badanej odpowiedzi. Jeżeli sporządzimy wykresy energii sygnału w funkcji liczby uwzględnianych współczynników (uszeregowanych, poczynając od największych co do wartości bezwzględnej), to łatwo zauważyć, że stany chaotyczne charakteryzują się większą liczbą istotnych współczynników rozwinięć falkowych. Oznacza to, że chcąc zachować ten sam poziom energii sygnału w stanach chaotycznych, musimy uwzględnić wyraźnie większą liczbę n współczynników od tej, która opisuje ten sam poziom energii w stanie niechaotycznym (rys. 5.10).



Rys. 5.10. Energia E sygnału niechaotycznego ($\alpha = 1{,}96$ – linia przerywana) i chaotycznego ($\alpha = 2{,}0$ – linia ciągła) w funkcji liczby n współczynników rozwinięcia falkowego
Fig. 5.10. Non-chaotic ($\alpha = 1.96$ – dashed line) and chaotic ($\alpha = 2.0$ – solid line) signal energy E versus number n of wavelet coefficients

Rodzaj wykorzystanej falki jak również przyjęte w analizie warunki brzegowe mogą wprowadzać lokalne (na brzegach) zaburzenia w rozkładach współczynników falkowych. Zakłócenia te, które w prowadzonej tutaj analizie dotyczą mniej niż 10 spośród 16384 współczynników, w sposób zaniedbywalny wpływają na rozkład energii sygnału.

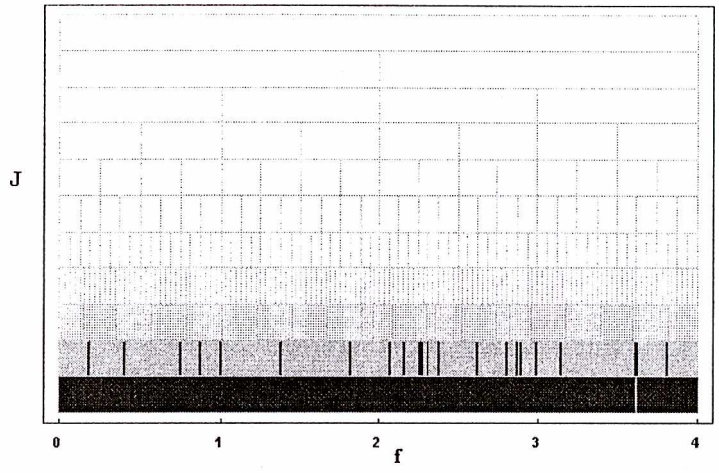
W wyniku falkowej analizy pakietowej sygnału otrzymuje się różne możliwe jego reprezentacje. Istnieje zatem możliwość wyboru reprezentacji najbardziej efektywnej. Z reguły przez najbardziej efektywny sposób reprezentacji sygnału rozumiemy taki dobór baz podprzestrzeni, który prowadzi do małej liczby istotnych (co do wartości bezwzględnej) współczynników rozwinięcia falkowego. Algorytmy, które są na ogół stosowane przy doborze baz pozwalających na efektywną reprezentację sygnału bazują na kryterium minimum entropii (Coifman i Wickerhauser [5.17]). Jako entropię sygnału definiuje się w opisywanej tu analizie nieujemną wielkość $-\sum_i v_i^2 / \|v\|^2 \log_2\left(v_i^2 / \|v\|^2\right)$, gdzie $\|v\|^2 = \sum_i v_i^2$ i która jest określona dla zbioru $\{v_i\}$ współczynników pakietowej dekompozycji sygnału. Tak zdefiniowana entropia jest miarą liczby istotnych (co do wartości bezwzględnej) współczynników falkowych, pakietowych rozwinięć sygnału w wybranej bazie. Za najlepszą bazę reprezentacji sygnału uznaje się tą, która minimalizuje jego entropię.



Rys. 5.11. Usytuowanie najlepszej bazy opisu sygnału niechaotycznego przy $\alpha = 0{,}1$
Fig. 5.11. Position of the best basis for the non-chaotic state ($\alpha = 0.1$)

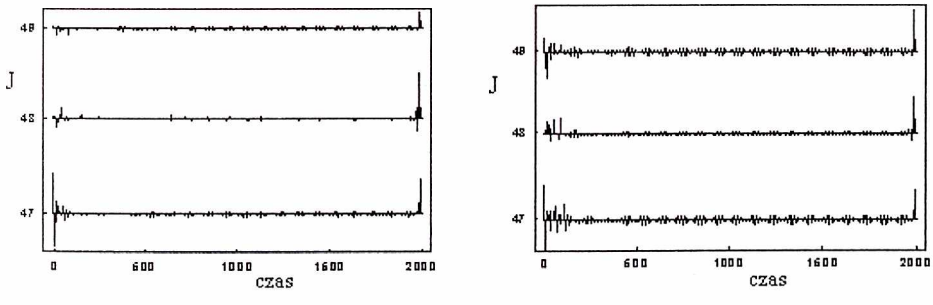
Usytuowanie bazy można przedstawić na diagramie pakietowej dekompozycji sygnału. Na rysunku 5.11 pokazano najlepszą bazę reprezentacji sygnału niechaotycznego ($\alpha = 0{,}1$). Górny wiersz diagramu reprezentuje całe spektrum częstości f sygnału, które w kolejnych etapach transformacji pakietowej jest sukcesywnie dzielone na zakresy mniejsze – w każdym z etapów, każdy z zakresów częstości etapu poprzedniego jest połowiony. Najlepsza baza jest kombinacją baz z zaczernionych na rysunku podprzestrzeni.

Na rysunku 5.12 pokazano usytuowanie bazy sygnału chaotycznego ($\alpha = 0{,}1$). Z reguły najlepszymi bazami reprezentującymi sygnały chaotyczne są bazy z ostatnich wierszy diagramów falkowej, pakietowej dekompozycji sygnału.



Rys. 5.12. Usytuowanie najlepszej bazy opisu sygnału chaotycznego przy $\alpha = 0{,}0$
Fig. 5.12. Position of the best basis for the chaotic state ($\alpha = 0.0$)

Analiza wykładników Lapunova geometrycznie liniowego układu opisywanego równaniem (5.1) przy przyjęciu identycznych jak poprzednio parametrów, w całym analizowanym zakresie zmienności parametru śledzenia $\alpha \in (-0{,}5; 2{,}5)$ wykazuje pełną zgodność z wynikami uzyskanymi na podstawie równania (5.2). Analiza falkowa odpowiedzi układu opisywanego równaniem (5.1) zachowuje podobne – do wyżej pokazanych – jakościowe cechy, charakterystyczne dla przejścia ze stanów niechaotycznych do chaotycznych. Różnice między analizą na podstawie równania (5.1) i (5.2) uwidaczniają się szczególnie w zakresie niższych skal, co odpowiada wyższym frakcjom częstości składowych sygnałów.

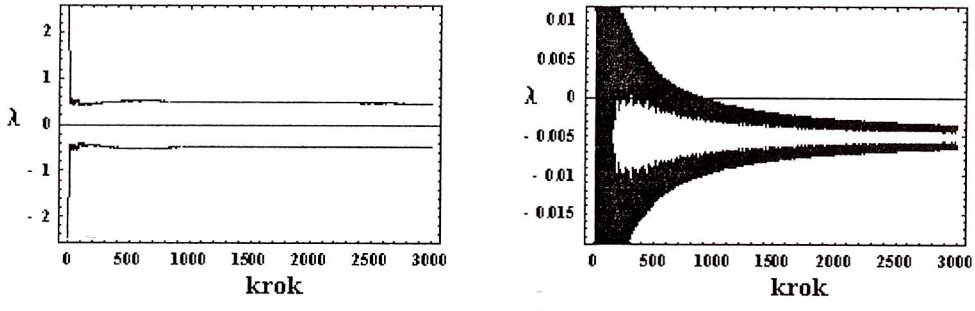


Rys. 5.13. Wybrane poziomy współczynników pakietowej analizy sygnału chaotycznego ($\alpha = 2{,}0$) przy opisie układu równaniem (5.1) (a) i równaniem (5.2) (b)
Fig. 5.13. Selected resolution levels of chaotic signal ($\alpha = 2.0$) wavelet coefficients for descriptions by equation (5.1) (a) and equation (5.2) (b)

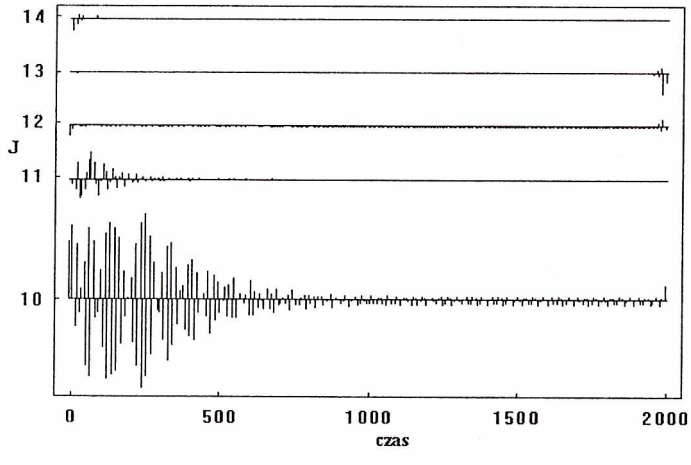
Na rysunku 5.13 przedstawiono wyniki pakietowej analizy falkowej sygnałów będących odpowiedziami układu opisanymi równaniem (5.1) (rys. 5.13a) i równaniem (5.2) (rys. 5.13b) przy $\alpha = 2{,}0$. Pokazano przykładowy zakres częstości, w którym występują

różnice. Są one różnicami wyłącznie ilościowymi. Uzyskana zgodność podejść wykorzystujących opis geometrycznie liniowy (5.1) i opis dopuszczający powstanie skończonych przemieszczeń $q(t)$ wynika ze specyficznego doboru parametrów zadania.

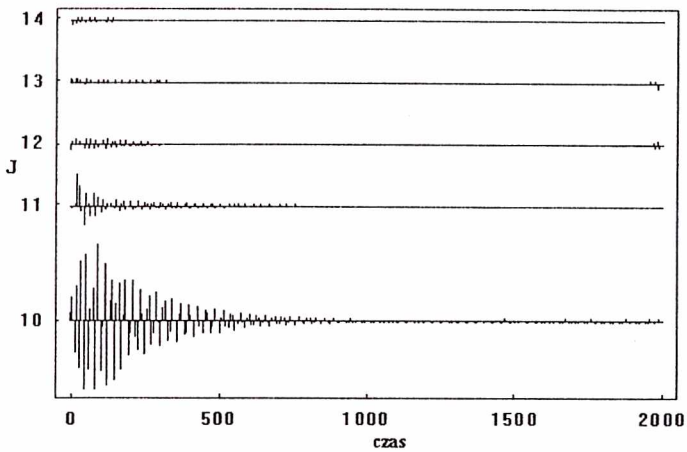
Jeżeli przyjmiemy, że $m = l = \xi = 1$, $q_0 = 0$, $c = c_r = c_l = 0{,}01$, $k = 10$, $k_r = k_l = 1000$, $\xi_l = \xi_r = 0{,}5$, $\Delta_r = -\Delta_l = 0{,}3$, $P(t) = \sin(6t)$, $\alpha = 9{,}0$, a wychylenie początkowe i prędkość początkowa mają odpowiednio wartości $q(0) = 0{,}1$ i $\dot{q}(0) = 0{,}0$, to charakter odpowiedzi układu wykorzystujący równania (5.1) i (5.2) może być diametralnie różny zarówno pod względem jakościowym, jak i ilościowym. Analiza wykładników Lapunova przy tych parametrach pokazuje, że równanie (5.1) wynikające z założenia geometrycznej liniowości układu wykazuje cechy zachowań chaotycznych (rys. 5.14a). Analiza wykładników Lapunova oparta na równaniu (5.2) definiującym podejście geometrycznie nieliniowe nie wykazuje cech układu chaotycznego (rys. 5.14b).



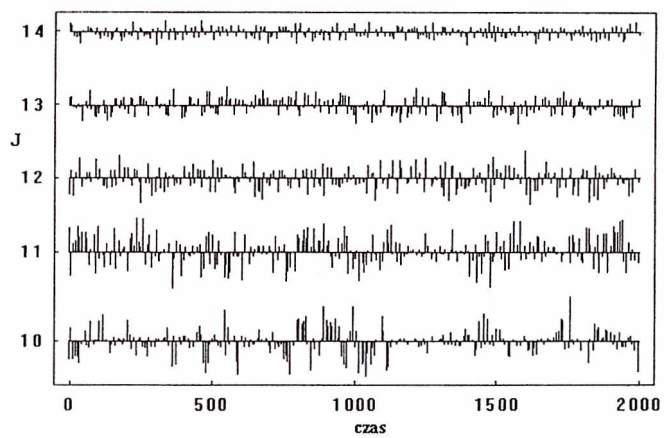
Rys. 5.14. Analiza wykładników Lapunova λ przy opisie układu równaniem (5.1) (a) i równaniem (5.2) (b)
Fig. 5.14. Convergence plot of Lyapunov exponents λ for system descriptions by equation (5.1) (a) and equation (5.2) (b)



Rys. 5.15. Współczynniki pakietowej analizy sygnału układu opisywanego równaniem (5.2)
Fig. 5.15. Wavelet coefficients of signal of system described by equation (5.2)



Rys. 5.16 Współczynniki pakietowej analizy sygnału układu opisywanego zlinearyzowanym równaniem (5.2) z uwzględnieniem czterech członów rozwinięcia $q(t)$ w szereg Taylora
Fig. 5.16. Wavelet coefficients of signal of system described by linearized equation (5.2) with four terms of expansion $q(t)$ into Taylor series



Rys. 5.17. Współczynniki pakietowej analizy sygnału układu opisywanego zlinearyzowanym równaniem (5.2) z uwzględnieniem dwóch członów rozwinięcia $q(t)$ w szereg Taylora
Fig. 5.17. Wavelet coefficients of signal of system described by linearized equation (5.2) with two terms of expansion $q(t)$ into Taylor series

Na rysunkach 5.15–5.17 pokazano wyniki pakietowej analizy sygnałów będących odpowiedzią układu opisywanego odpowiednio: równaniem (5.2) (rys. 5.15), zlinearyzowanym równaniem (5.2) z uwzględnieniem czterech członów rozwinięcia $q(t)$ w szereg Taylora (rys. 5.16) i zlinearyzowanym równaniem (5.2) z uwzględnieniem dwóch członów rozwinięcia (rys. 5.17). Przedstawione na tych rysunkach skale rozwinięć falkowych odpowiadają w każdym z tych przypadków temu samemu zakresowi częstości (0,576 Hz; 0,896 Hz).

Wyniki analizy przedstawione na ostatnich rysunkach świadczą o konieczności formułowania precyzyjnych modeli matematycznych badanych układów, szczególnie wtedy, kiedy badamy tak złożone zjawisko, jakim jest chaos. Współczynniki rozwinięć falkowych wskazują na istotne różnice między badanymi sygnałami, choć same przebiegi czasowe tych sygnałów są praktycznie nierozróżnialne. Rozwiązania chaotyczne charakteryzują się znacznie większą liczbą (porównywalnych co do modułu) współczynników rozwinięcia falkowego i z reguły współczynniki te są rozłożone w ciągu trwania całego sygnału. Podobnie jak poprzednio, tak i tutaj czas trwania analizy falkowej sygnału był wielokrotnie krótszy od czasu poszukiwania jego wykładników Lapunova.

5.5. Podsumowanie

Przedstawiono numeryczny sposób – bazujący na wykorzystaniu dyskretnej analizy falkowej sygnału – poszukiwania stanów chaotycznych układu. Na przykładzie nieliniowego układu o jednym stopniu swobody (1DOF) z wiskoelastycznymi więzami jednostronnymi pokazano, jak przejście ze stanu niechaotycznego do chaotycznego demonstruje się w wielkości i rozkładzie współczynników rozwinięcia falkowego jego odpowiedzi.

W analizie zastosowano klasyczny algorytm analizy falkowej i falkową analizę pakietową, korzystając z reguły z falek Daubechies. Wnioski wynikające z analizy falkowej stanów chaotycznych i niechaotycznych weryfikowano przez analizę wykładników Lapunova badanego układu.

Przeprowadzone próby numeryczne określania stanów chaotycznych układu pozwalają na sformułowanie następujących spostrzeżeń:

- analiza falkowa odpowiedzi układu, a szczególnie analiza pakietowa, stanowi skuteczne narzędzie jakościowego rozróżniania jego stanów chaotycznych i niechaotycznych,
- czas trwania analizy falkowej niezbędny do rozróżnienia stanu chaotycznego od niechaotycznego układu jest przynajmniej o dwa rzędy krótszy od czasu trwania analizy jego wykładników Lapunova,
- rozróżnienie stanów chaotycznych i niechaotycznych układu jest możliwe na bazie analizy falkowej skończonych, a nawet czasowo krótkich jego odpowiedzi,
- cechą charakterystyczną sygnału chaotycznego w analizie falkowej jest na ogół duża liczba istotnych współczynników rozwinięcia, które z reguły występują na niskich i wysokich poziomach częstości badanego sygnału,
- skumulowana energia sygnału może stanowić dobre narzędzie rozróżniania jego stanów – stany chaotyczne charakteryzują się dużą liczbą porównywalnych co do wartości bezwzględnej współczynników rozwinięcia,

- usytuowanie najlepszych baz opisu sygnałów – wynikające z kryterium minimum entropii – pozwala na rozróżnienie analizowanych sygnałów; sygnały chaotyczne wykorzystują bazy z ostatnich wierszy diagramów falkowej, pakietowej dekompozycji sygnału,
- próby upraszczania modeli matematycznych układów, w których może wystąpić zjawisko chaosu prowadzą z reguły do fałszywych wniosków co do ich stanu i tym samym są niedopuszczalne; analiza falkowa odpowiedzi modeli zlinearyzowanych w pełni potwierdziła powyższe stwierdzenie.

Analiza falkowa może stanowić pewną alternatywę dla innych, jakościowych sposobów numerycznej identyfikacji sygnałów chaotycznych, choć podobnie do tych technik nie może stanowić narzędzia jednoznacznie rozstrzygającego o stanie układu.

W rozdziale tym wykorzystano wyniki przedstawione w pracy autora [5.18].

6. Identyfikacja liniowych i nieliniowych układów dyskretnych

6.1. Wprowadzenie

Jednym z ważniejszych zadań, przed którym stoi współczesna mechanika, jest identyfikacja układów rzeczywistych. Identyfikacji dokonuje się zwykle na podstawie ciągów pomiarów, np. wzbudzenia i odpowiedzi (na przykład przemieszczeń) badanego układu.

Z uwagi na szerokie spektrum zagadnień i różnorodność stosowanych metod istnieje wiele różnych podziałów identyfikacji. Podstawą jednego z tych podziałów jest przestrzeń, w której szuka się opisu identyfikowanego układu. W tym podziale identyfikację dzieli się na parametryczną i nieparametryczną. Identyfikacja parametryczna polega na poszukiwaniu rozwiązań w bazie parametrów i określeniu ich wartości w przyjętym modelu matematycznym identyfikowanego układu. Identyfikacja nieparametryczna polega na poszukiwaniu rozwiązań w bazie funkcji i znalezieniu najlepszego funkcyjnego zapisu zmienności wielkości charakteryzujących identyfikowany układ, bez przyjmowania jego matematycznego modelu.

Krytyczny przegląd metod identyfikacji parametrycznej i nieparametrycznej wraz z próbą ich oceny przedstawiono w pracach Ljunga [6.1] oraz Petsounisa i Fassoisa [6.2].

Ostatnio jednym z narzędzi wykorzystywanych w procesie identyfikacji układów liniowych i nieliniowych jest analiza falkowa (Mallat [1.3], Resnikoff i Wells [1.2], Percival i Walden [1.9]). W tych zastosowaniach poszukuje się rozwiązań zagadnienia, rozwijając zakładane postacie modeli matematycznych w bazach falkowych (Ghanem i Romeo [6.3], [6.4]).

Istotnym numerycznym problemem identyfikacji parametrycznej jest wyznaczanie pochodnych mierzonego sygnału. Szczególnego znaczenia nabiera to zagadnienie wtedy, kiedy w wyniku przeprowadzonych pomiarów dysponujemy często losowo zaburzonym i obarczonym błędem pomiarem na przykład przemieszczenia punktu konstrukcji, a przyjęty model matematyczny ma postać równania różniczkowego zawierającego wysokie pochodne mierzonej wielkości.

Z kolei podstawowym problemem identyfikacji nieparametrycznej jest taki dobór funkcji bazowych, które w sposób efektywny pozwolą opisać poszukiwane – leżące poza obszarami wykonanych pomiarów – powierzchnie odpowiedzi identyfikowanego układu. Niezależnie od tego, czy wybraną metodę identyfikacji badanego zjawiska zaliczamy do grupy metod identyfikacji parametrycznej czy nieparametrycznej, z reguły stajemy przed problemem zbyt małej liczby informacji opisujących zachowanie się identyfikowanego obiektu.

Celem tego rozdziału jest:

- pokazanie skuteczności pakietowej analizy falkowej z bazą Walsha w procesie poszukiwania dobrych reprezentacji pochodnych sygnału, które są następnie wykorzystywane w procesie identyfikacji parametrów w procedurze najmniejszych kwadratów,
- zastosowanie baz pakietowych Walsha w procedurze identyfikacji nieparametrycznej.

W punkcie drugim przedstawiono krótkie wprowadzenie do zagadnień związanych z identyfikacją układów, w punkcie trzecim pokazano algorytm wyznaczania pochodnych sygnału na podstawie rozwinięć falkowych w pakietowej analizie z bazą Walsha; w punkcie czwartym przedstawiono wyniki testów numerycznych proponowanych algorytmów identyfikacji parametrycznej i nieparametrycznej, które podsumowano w punkcie piątym.

6.2. Wprowadzenie do zagadnień identyfikacji układów

Prowadzone pomiary na obiektach rzeczywistych mogą być podstawą do identyfikacji ich modeli matematycznych. Zidentyfikowane modele matematyczne stanowią nieocenione źródło informacji o aktualnym stanie konstrukcji i możliwych jej odpowiedzi na zmieniające się warunki eksploatacji. Procedurę identyfikacji modelu przeprowadzamy mając do dyspozycji ograniczone ciągi pomierzonych wielkości odpowiedzi konstrukcji na z reguły znane wymuszenia.

W zależności od analizowanego obiektu i jego stopnia złożoności można wyróżnić procedury, które są stosowane do identyfikacji:

- układów liniowych i nieliniowych,
- układów stacjonarnych i niestacjonarnych,
- układów dyskretnych i układów ciągłych,
- układów z pojedynczymi lub wielokrotnymi sygnałami wejściowymi,
- układów deterministycznych i układów stochastycznych.

Wybór zastosowanej procedury identyfikacji zależy także od stanu naszej wiedzy o badanym obiekcie. Szczegółowy przegląd literatury w zakresie metod identyfikacji wymienionych klas obiektów można znaleźć w monografii Ljunga [6.1].

Jak już wspomniano we wstępie, metody identyfikacji – w zależności od tego, czy interesuje nas pełny matematyczny model identyfikowanego obiektu, czy wiedza o jego odpowiedzi w niepomierzonych zakresach parametrów – można podzielić na metody parametryczne i nieparametryczne.

Do podstawowych grup metod parametrycznej identyfikacji układów należy zaliczyć:

- metody prognozowania błędu,
- metody liniowej regresji i metody najmniejszych kwadratów,
- metody statystyczne i probabilistyczne.

Grupy metod identyfikacji nieparametrycznej to:

- metody poszukiwania funkcji przejścia oraz metody formułowane w dziedzinie częstości, które najczęściej znajdują zastosowanie w analizie układów liniowych,
- metody aproksymacji funkcji opisujących zachowanie się analizowanego modelu za pomocą różnego typu funkcji bazowych, głównie wielomianowych.

W procedurach identyfikacji parametrycznej wyznaczamy parametry założonego i ustalonego typu modelu matematycznego. Jednoznacznie zidentyfikowany model matematyczny jest bardzo wygodnym narzędziem wszelkiego typu analiz. Jednak w sytuacjach, w których nasza wiedza na temat analizowanego obiektu jest ograniczona, a tym samym przyjęty model matematyczny nie jest odpowiedni, wnioskowanie o zachowaniu się konstrukcji może być błędne.

W sytuacjach, w których wiedza o obiekcie jest niepełna, bądź wykonane pomiary są ograniczone, skutecznych narzędzi dostarczają metody identyfikacji nieparametrycznych. Wynikiem stosowania tego typu metod są z reguły formuły, funkcje bądź powierzchnie w przestrzeniach wielowymiarowych opisywane przyjętą klasą funkcji bazowych, które pozwalają na przewidywanie zachowania się identyfikowanego obiektu w niepomierzonych zakresach parametrów. Przyjęcie bazy funkcji w metodach identyfikacji nieparametrycznej prowadzi oczywiście do parametryzacji zagadnienia, gdyż celem procedury staje się poszukiwanie mnożników dla funkcji bazy. Jednak w tej sytuacji, w odróżnieniu od metod identyfikacji parametrycznej, poszukiwane parametry na ogół nie mają interpretacji fizycznej, a ich liczba zależy od wybranej bazy aproksymacyjnej.

6.3. Falkowa analiza pakietowa Walsha w wyznaczaniu pochodnych sygnału

Załóżmy, że pomierzoną – będącą do naszej dyspozycji – wielkością fizyczną jest np. przemieszczenie czy obrót. Jest to z reguły ciąg N liczb opisujących zmieniającą się w czasie trwania sygnału t wielkość fizyczną. Załóżmy, że pomiar prowadzony jest ze stałą częstością odczytu.

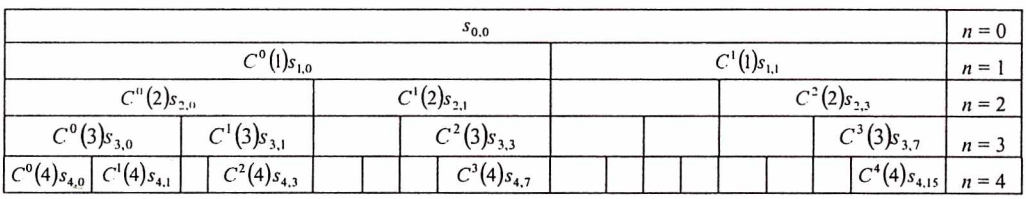
Poszukując modelu matematycznego opisującego pomierzoną wielkość fizyczną, zwykle zakładamy, że należy on do wybranej klasy opisów matematycznych z niezna-

nymi, poszukiwanymi w procesie jego identyfikacji współczynnikami. Na ogół opis ten przyjmujemy w postaci równania bądź równań różniczkowych ustalonego rzędu. Dalej zakłada się, że jest to jedno liniowe lub nieliniowe równanie różniczkowe zwyczajne o stałych w czasie współczynnikach. Tego typu model matematyczny jest często wykorzystywany (Bellomo i Preziosi [6.5]) i daje zadowalające rezultaty nie tylko w opisie prostych układów mechanicznych. W zależności od przyjętego rzędu równania różniczkowego z reguły stajemy przed problemem poprawnego wyznaczenia szeregu pochodnych pomierzonego sygnału. Jak się okazuje, w rozwiązaniu tego zadania szczególnie przydatna jest pakietowa analiza falkowa bazująca na filtrze Haara.

Stosowanie dolno- i górnoprzepustowego filtru Haara polega na sukcesywnym obliczaniu dla następujących po sobie (w ciągu pomiarów) par liczb (np. a i b) ich ważonej sumy i ważonej różnicy, które odpowiednio przyjmują postać $(a+b)/\sqrt{2}$ i $(a-b)/\sqrt{2}$. Zastosowanie dolnoprzepustowego filtra do sygnału o liczbie elementów N powoduje ważone uśrednianie sygnału, a produktem wyjściowym jest zbiór o liczebności $N/2$, który jest przeskalowaną, wygładzoną reprezentacją sygnału wejściowego. Z uwagi na to, że podczas pomiaru rejestrowane są również z założenia małe losowe zaburzenia, a sam pomiar rejestrowany jest z błędem, pożądane jest wyeliminowanie wspomnianych wielkości, co w pewnym zakresie spełnia właśnie proces filtrowania sygnału filtrem dolnoprzepustowym. Efektem działania górnoprzepustowego filtra Haara na próbie o liczebności N jest zbiór (o liczebności $N/2$) przeskalowanych różnic par liczb, a więc zbiór, który z dokładnością do znaku, częstości próbkowania i skali wprowadzonej przez filtr jest reprezentacją pierwszej pochodnej sygnału wejściowego. Zastosowanie górnoprzepustowego filtra Haara jest procesem różnicowego obliczania skalowanej pochodnej sygnału. Jeżeli zbiór reprezentujący skalowaną pochodną sygnału wejściowego ponownie zostanie poddany procesowi filtracji górnoprzepustowym filtrem Haara, to efektem tego działania będzie zbiór (dwukrotnie mniej liczny od zbioru wejściowego – zbiór o liczebności $N/4$), reprezentujący skalowaną drugą pochodną sygnału pierwotnie poddawanego filtracji. Takie właśnie wielokrotne filtrowanie między innymi realizuje algorytm pakietowej analizy falkowej Walsha. Jak z tego wynika, po znalezieniu stosownych mnożników powodujących wspomniane skalowanie, rezultat pakietowej analizy falkowej Walsha może być wprost źródłem wygładzonego sygnału wejściowego i różnicowo obliczanych jego pochodnych rzędu wymaganego przez przyjęty, identyfikowany model.

Na rysunku 6.1 pokazano schemat algorytmu analizy pakietowej. Najwyższy wiersz schematu przedstawia sygnał wejściowy $s_{0,0}$, który w procedurze analizy pakietowej jest poddawany kolejnym n etapom filtracji. Sygnał $s_{0,0}$ nie był poddawany filtracji i dlatego przypisano mu $n = 0$. Wynikiem następujących po sobie etapów filtracji są równoliczne, dla ustalonego n, bloki współczynników $s_{i,j}$. Na schemacie z rysunku 6.1 współczynniki te pomnożono przez mnożniki $C^p(n)$, gdzie przez $p \geq 0$ oznaczono rząd pochodnej sygnału. Iloczyny współczynników rozwinięcia pakieto-

wego i mnożników są: dla $p=0$ ($C^0(n)s_{i,j}$) przefiltrowanym sygnałem wejściowym, dla $p=1$ ($C^1(n)s_{i,j}$) pierwszą pochodną filtrowanego sygnału wejściowego, a dla $p=2$ ($C^2(n)s_{i,j}$) jego drugą pochodną. Mnożniki $C^p(n)$ są zależne od etapu filtracji n, współczynników filtrów Haara, liczebności N zbioru opisującego sygnał wejściowy, częstości próbkowania sygnału $\Delta = t/N$ oraz rzędu p szukanej pochodnej sygnału. Na rysunku 6.1 przedstawiono jedynie cztery etapy filtracji i, jak łatwo zauważyć, współczynniki rozwinięć sygnału ostatniego etapu $s_{4,j}$ mogą stanowić bazę odtworzenia filtrowanego sygnału wejściowego ($C^0(4)s_{4,0}$) oraz pierwszej ($C^1(4)s_{4,1}$), drugiej ($C^2(4)s_{4,3}$), trzeciej ($C^3(4)s_{4,7}$) i czwartej ($C^4(4)s_{4,15}$) jego filtrowanej pochodnej. Maksymalny rząd pochodnej (p) możliwy do odtworzenia na etapie (n) falkowej analizy pakietowej jest $p = n$.



Rys. 6.1. Schemat algorytmu analizy pakietowej
Fig. 6.1. Packet analysis algorithm chart

Pochodne sygnału można odtworzyć także na podstawie innych bloków współczynników rozwinięć sygnału na n-tym poziomie jego filtracji. Dalej ograniczono się do podania mnożników niezbędnych do identyfikacji sygnału i jego pochodnych dla ich pierwszych – licząc od lewej strony diagramu – reprezentacji na poziomie n.

Mnożniki $C^p(n)$ można łatwo otrzymać, śledząc sekwencje filtracji sygnału, której idee przedstawiono na początku tego punktu.

Filtrowana reprezentacja sygnału występuje zawsze jako pierwszy blok współczynników (ciąg liczb o liczebności $N/2^n$) rozwinięcia sygnału na etapie n jego analizy pakietowej. Mnożnik $C^0(n)$ ma postać

$$C^0(n)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \tag{6.1}$$

Filtrowane reprezentacje pierwszej, drugiej, trzeciej i czwartej pochodnej sygnału występują odpowiednio na 2, 4, 8 i 16 pozycji poziomu n, licząc od jego lewej strony. Liczebność każdego z tych zbiorów jest równa $N/2^n$. Odpowiednie mnożniki tych pochodnych przyjmują postać:

$$C^1(n)=(-1)\cdot 4\cdot\left(2^n\Delta\right)^{-1}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$$

$$C^2(n)=(-1)^2\cdot 32\cdot\left(2^n\Delta\right)^{-2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$$

$$C^3(n)=(-1)^3\cdot 512\cdot\left(2^n\Delta\right)^{-3}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \tag{6.2}$$

$$C^4(n)=(-1)^4\cdot 16384\cdot\left(2^n\Delta\right)^{-4}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$$

Ogólnie, mnożnik $C^p(n)$ pochodnej p-tego rzędu (przy założeniu, że $p \le n$) jest

$$C^p(n)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\prod_{i=1}^{i=p}(-1)\cdot 4\cdot 2^{(i-1)}\cdot\left(2^n\Delta\right)^{-1} \tag{6.3}$$

Pierwsza (licząc od lewej strony bloki elementów rozwinięcia pakietowego n-tego poziomu) przeskalowana reprezentacja pochodnej rzędu p sygnału występuje na pozycji 2^p.

Poprawność przedstawionych relacjami (6.1) i (6.3) mnożników łatwo sprawdzić, prowadząc pakietową analizę z bazą Walsha dyskretnych reprezentacji funkcji gładkich, których pochodne są znane.

6.4. Przykłady numeryczne

Możliwości praktycznego wykorzystania wyników falkowej analizy pakietowej z bazą Walsha do identyfikacji parametrycznej prostych modeli układów mechanicznych testowano na wielu przykładach. Jak już wspomniano, w procesie identyfikacji współczynników przyjmowanych modeli matematycznych wykorzystano metodę najmniejszych kwadratów (Chen, Billings i Luo [6.6]).

Pierwszym przykładem jest proces identyfikacji współczynników różniczkowego równania rzędu drugiego, którym można opisywać na przykład drgania układu o jednym stopniu swobody. Podstawą identyfikacji są znane, niezakłócone ciągi liczb będące efektem próbkowania ze stałą częstością odpowiedzi układu i wymuszenia. Załóżmy, że matematycznego opisu układu poszukujemy w postaci

$$ay''(t)+by'(t)+cy(t)=f(t) \tag{6.4}$$

gdzie a, b, c są poszukiwanymi stałymi parametrami, a $y(t)$ i $f(t)$ są funkcjami opisanymi ciągami liczb y_i i f_i powstałymi w wyniku próbkowania, np. wychylenia

i wymuszenia. Przez $y_i'(t)$ i $y_i''(t)$ oznaczono odpowiednio dyskretne wartości pierwszej i drugiej pochodnej sygnału $y(t)$, gdzie $i = 1, 2, 3, ..., N$.

Wyniki przeprowadzonej identyfikacji równania (6.4) przy $a = 2$, $b = 0{,}1$, $c = 5$ i $f = 11\cos(t)$ w zależności od etapu n analizy pakietowej sygnału, który jest źródłem równolicznych zbiorów (o liczebności l) opisujących w sposób dyskretny $y(t)$, $y'(t)$ i $y''(t)$ przedstawiono w tabelach 6.1 i 6.2, zestawiając estymowane wartości parametrów i ich procentowe błędy odniesione do wartości dokładnych. Podstawą tych wyników były zbiory o liczebności odpowiednio $N = 16\,384$ i $N = 32\,768$, które opisywały odpowiedź układu $y_i = y(t_i)$ i wymuszenie $f_i = 11\cos(t_i)$ dla $t \in \langle 0{,}10 \rangle$.

Jak łatwo zauważyć, parametry modelu można określić z błędem nie przekraczającym 8% już na podstawie 4×8 = 32 liczb, z których 24 to współczynniki pakietowego rozwinięcia sygnału, a pozostałych 8 to wyniki pomiarów wymuszenia. Błąd procentowy określanych współczynników nie przekracza 0,5%, jeżeli w procesie identyfikacji wykorzystamy 4×32 = 128 liczb.

Tabela 6.1. Wyniki identyfikacji liniowego układu (6.4) dla $N = 16\,384$
Table 6.1. Identification results of the linear system (6.4) for $N = 16\,384$

Etap n analizy pakietowej	Liczba elementów l	Parametry (wartości dokładne: $a = 2$, $b = 0{,}1$, $c = 5$)					
		a		b		c	
		Oszacowanie	Błąd %	Oszacowanie	Błąd %	Oszacowanie	Błąd %
5	512	1,9999	–0,0046	0,1001	0,1349	5,0000	0,0007
7	128	1,9993	–0,0324	0,1001	0,1529	5,0005	0,0100
9	32	1,9902	–0,4862	0,1003	0,3901	5,0057	0,1531
11	8	1,8417	–7,9114	0,1042	4,2850	5,1245	2,4904

Tabela 6.2. Wyniki identyfikacji liniowego układu (6.4) dla $N = 32\,768$
Table 6.2. Identification results of the linear system (6.4) for $N = 32\,768$

Etap n analizy pakietowej	Liczba elementów l	Parametry (wartości dokładne: $a = 2$, $b = 0{,}1$, $c = 5$)					
		a		b		c	
		Oszacowanie	Błąd %	Oszacowanie	Błąd %	Oszacowanie	Błąd %
5	1024	1,9999	–0,0011	0,1000	0,0752	5,0000	0,0005
7	256	1,9998	–0,0087	0,1000	0,0783	5,0000	0,0024
10	32	1,9903	–0,4849	0,1003	0,3306	5,0076	0,1528
11	16	1,9611	–1,9441	0,1010	1,0962	5,0300	0,6139
12	8	1,8418	–7,9095	0,1042	4,2199	5,1245	2,4905

Drugim przykładem zastosowania pakietowej analizy Walsha jest proces identyfikacji współczynników modelu nieliniowego, do którego często sprowadza się pro-

blem drgań układów wykazujących cechy ruchów chaotycznych (Argyris, Faust i Haase [5.2]). W tym przypadku model matematyczny przyjmuje postać równania typu Duffinga

$$ay''(t)+by'(t)+cy^3(t)=f(t) \tag{6.5}$$

Tabela 6.3. Wyniki identyfikacji nieliniowego układu (6.5) dla N = 16 384
Table 6.3. Identification results of the non-linear system (6.5) for N = 16 384

Etap n analizy pakietowej	Liczba elementów l	Parametry (wartości dokładne: a = 1, b = 0,1, c = 1)					
		a		b		c	
		Oszacowanie	Błąd %	Oszacowanie	Błąd %	Oszacowanie	Błąd %
5	512	0,9999	−0,0084	0,1001	0,1179	1,0002	0,0215
7	128	0,9997	−0,0274	0,1004	0,4184	1,0037	0,3721
9	32	0,9956	−0,4346	0,1046	4,6929	1,0598	5,9847
10	16	0,9647	−3,5217	0,0864	−13,518	1,2393	23,932

Tabela 6.4. Wyniki identyfikacji nieliniowego układu (6.5) dla N = 32 768
Table 6.4. Identification results of the non-linear system (6.5) for N = 32 768

Etap n analizy pakietowej	Liczba elementów l	Parametry (wartości dokładne: a = 1, b = 0,1, c = 1)					
		a		b		c	
		Oszacowanie	Błąd %	Oszacowanie	Błąd %	Oszacowanie	Błąd %
5	1024	0,9999	−0,0039	0,1000	0,0590	1,0000	0,0049
7	256	0,9999	−0,0085	0,1001	0,1384	1,0009	0,0926
9	64	0,9991	−0,0893	0,1012	1,2984	1,0149	1,4946
10	32	0,9956	−0,4307	0,1046	4,6435	1,0598	5,9855
11	16	0,9648	−3,5174	0,0864	−13,557	1,2393	23,932

W tabelach 6.3 i 6.4 przedstawiono wyniki identyfikacji parametrów modelu (6.5), gdy a = 1, b = 0,1, c = 1 i $f = 11\cos(t)$, przy różnych częstościach próbkowania odpowiedzi i wymuszenia układu w czasie $t \in \langle 0,10 \rangle$.

Jak widać, w przypadku identyfikacji parametrów układu nieliniowego wymagana jest większa liczebność – w porównaniu z układami liniowymi – zbiorów opisujących przefiltrowany sygnał i filtrowane jego pochodne; gdy l = 64, błąd procentowy wyznaczenia współczynników jest rzędu 1%.

Możliwe losowe zakłócenia w mierzonym sygnale $y(t)$ generowano, używając rozkładu równomiernego i losując liczby z zakresu ±5% wartości amplitudy y_i, które następnie dodawano do y_i. Wyniki identyfikacji parametrów modelu liniowego i nieliniowego przy uwzględnieniu losowych zakłóceń sygnału y_i pokazano odpowiednio w tabelach 6.5 i 6.6. Z zestawienia wyników widać, że proces filtracji pakie-

towej analizy Walsha jest wystarczający do identyfikacji parametrów modelu, tutaj przy $l = 16$ i $l = 32$ odpowiednio dla modelu liniowego i nieliniowego.

W podanych przykładach identyfikowane były parametry równań niskiego (drugiego) rzędu. Załóżmy teraz, że matematycznego opisu pomierzonych wielkości (y_i, f_i) szukamy w klasie równań różniczkowych rzędu czwartego. Niech przykładowe równania, których stałych współczynników poszukujemy, mają postać:

$$ay''''(t) + by'''(t) + cy''(t) + dy'(t) + ey(t) = f(t) \tag{6.6}$$

$$ay''''(t) + by'''(t) + cy''(t) + dy'(t) + ey^3(t) = f(t) \tag{6.7}$$

odpowiednio dla zagadnienia liniowego i nieliniowego.

Tabela 6.5. Wyniki identyfikacji liniowego układu (6.4) z losowymi zakłóceniami dla $N = 16\,384$
Table 6.5. Identification results of the linear system (6.4) with random disturbance for $N = 16\,384$

Etap n analizy pakietowej	Liczba elementów l	Parametry (wartości dokładne: $a = 2$, $b = 0{,}1$, $c = 5$)					
		a		b		c	
		Oszacowanie	Błąd %	Oszacowanie	Błąd %	Oszacowanie	Błąd %
9	32	1,4505	–27,472	0,1938	93,859	4,0966	–18,068
10	16	1,9267	–3,6619	0,0984	–1,5231	4,9983	–0,0333
11	8	1,8297	–8,5112	0,1144	14,453	5,0917	1,8347

Tabela 6.6. Wyniki identyfikacji nieliniowego układu (6.5) z losowymi zakłóceniami dla $N = 16\,384$
Table 6.6. Identification results of the non-linear system (6.5) with random disturbance for $N = 16\,384$

Etap n analizy pakietowej	Liczba elementów l	Parametry (wartości dokładne: $a = 1$, $b = 0{,}1$, $c = 1$)					
		a		b		c	
		Oszacowanie	Błąd %	Oszacowanie	Błąd %	Oszacowanie	Błąd %
8	64	0,5577	–44,224	0,0530	–46,949	0,6874	–31,257
9	32	1,0033	0,3313	0,0960	–3,9761	1,0802	8,0219
10	16	0,9661	–3,3852	0,0844	–15,555	1,2462	24,626

Podobnie jak poprzednio, wyniki identyfikacji parametrów tych równań dla różnych etapów analizy pakietowej n sygnału o liczebności $N = 16\,384$ pokazano w tabelach 6.7 i 6.8 odpowiednio dla modelu liniowego (6.6) i nieliniowego (6.7) przy $f(t) = 11\cos(t)$.

Jak wiadomo (Worden [6.7]), wyznaczanie wysokich pochodnych pomierzonego sygnału jest bardzo kłopotliwe i prowadzi na ogół do niezadowalających rezultatów. Pakietowa analiza sygnału z wykorzystaniem bazy Walsha umożliwia uzyskanie akceptowalnych postaci jego wysokich pochodnych, które – jak pokazano w tabelach 6.7 i 6.8 – z powodzeniem można wykorzystać do identyfikacji parametrów modeli.

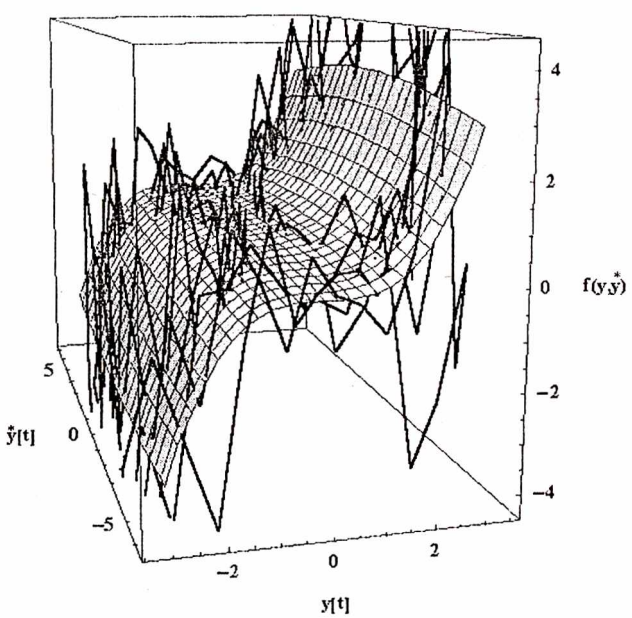
Tabela 6.7. Wyniki identyfikacji liniowego układu (6.6) dla $N = 16\,384$
Table 6.7. Identification results of the linear system (6.6) for $N = 16\,384$

Etap n analizy pakietowej	Liczba elementów l	Parametry (wartości dokładne: $a = 30$, $b = 8$, $c = 15$, $d = 6$, $e = 2$)									
		a		b		c		d		e	
		Oszacowanie	Błąd %	Oszacowanie	Błąd %	Oszacowanie	Błąd %	Oszacowanie	Błąd %	Oszacowanie	Błąd %
9	32	28,760	–4,132	8,515	6,439	13,197	–12,013	6,446	7,437	1,470	–26,481
10	16	30,258	0,862	7,876	–1,537	15,297	1,985	5,891	–1,806	2,078	3,921
11	8	30,631	2,105	8,104	1,300	15,256	1,711	6,126	2,116	2,046	2,344

Tabela 6.8. Wyniki identyfikacji nieliniowego układu (6.7) dla $N = 16\,384$
Table 6.8. Identification results of the non-linear system (6.7) for $N = 16\,384$

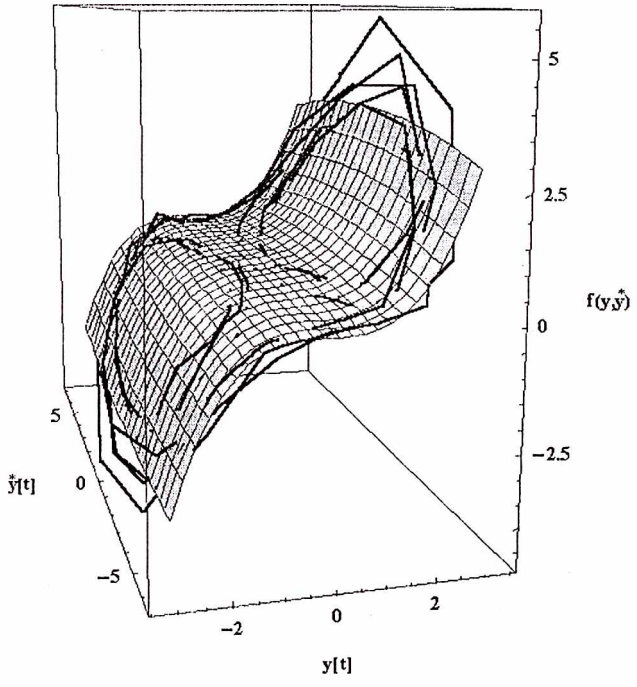
Etap n analizy pakietowej	Liczba elementów l	Parametry (wartości dokładne: $a = 30$, $b = 8$, $c = 15$, $d = 6$, $e = 2$)									
		a		b		c		d		e	
		Oszacowanie	Błąd %	Oszacowanie	Błąd %	Oszacowanie	Błąd %	Oszacowanie	Błąd %	Oszacowanie	Błąd %
8	64	27,228	–9,238	9,238	18,610	12,300	–18,000	6,367	6,124	1,881	–5,932
9	32	30,022	0,074	7,288	–8,894	15,361	2,412	5,580	–6,990	1,993	–0,345
10	16	30,883	2,943	6,644	–16,945	15,967	6,451	5,395	–10,070	2,061	3,056

Właściwości pakietowej transformaty falkowej Walsha można również wykorzystać w metodach identyfikacji nieparametrycznej. Zwykle w tego typu metodach poszukuje się powierzchni $f(y,\dot{y})$, która w zadowalający sposób aproksymuje wyniki przeprowadzonych pomiarów i pozwala na uzyskanie informacji (ich przewidywanie) o stanach układu, które nie są udokumentowane pomiarami. Jeżeli dla układu o jednym stopniu swobody, zgodnie z drugą zasadą Newtona zapiszemy, że $m\ddot{y}(t)+f(y,\dot{y})=F(t)$, gdzie m jest znaną masą układu, $F(t)$ znaną siłą wymuszającą, to – dysponując pomiarami wielkości $y(t)$ – do wyznaczenia funkcji $f(y,\dot{y})=F(t)-m\ddot{y}(t)$ musimy znać wiarygodną informację o prędkości $\dot{y}(t)$ i przyspieszeniu $\ddot{y}(t)$. Dalej bazując na równaniu Duffinga (6.5), którego odpowiedź $y(t)$ (w czasie $t=20$ s przy $N=16\,384$) jest jak poprzednio zakłócono losowo, wygenerowano – wykorzystując różne etapy analizy pakietowej – trójki liczb ($y_i,\dot{y}_i,f_i=f(y_i,\dot{y}_i)$), które stanowiły podstawę wyznaczenia funkcji $f(y,\dot{y})$.



Rys. 6.2. Aproksymacja powierzchni $f(y,\dot{y})$ po szóstym etapie analizy pakietowej
Fig. 6.2. Surface $f(y,\dot{y})$ approximation after 6 stages of wavelet-packet analysis

Na rysunkach 6.2 i 6.3 pokazano przestrzenne trajektorie ruchu układu (6.5) w przestrzeni $(y,\dot{y},f(y,\dot{y}))$ odpowiednio po szóstym i siódmym etapie pakietowej dekompozycji sygnału zakłóconego. Trajektorie te przedstawiono na tle ciągłych, wielomianowych (do trzeciego stopnia włącznie) powierzchni $f(y,\dot{y})$, które otrzymano, stosując aproksymacje średniokwadratowe.



Rys. 6.3. Aproksymacja powierzchni $f(y,\dot{y})$ po siódmym etapie analizy pakietowej
Fig. 6.3. Surface $f(y,\dot{y})$ approximation after 7 stages of wavelet-packet analysis

Zarówno przy $n = 6$, jak i przy $n = 7$ otrzymano zadowalającą aproksymację funkcji $f(y,\dot{y})$. Należy podkreślić, że zwykle w procedurze identyfikacji nieparametrycznej poszukuje się powierzchni $f(y,\dot{y})$, stosując różnego typu bazy funkcji aproksymujących (Chen, Billings i Luo [6.6], Masri, Sassi, i Caughey [6.9], Mohammad, Worden i Tomlinson [6.10]). Tutaj do wyznaczenia powierzchni $f(y,\dot{y})$ wykorzystano prostą aproksymację wielomianową, z tym jednak, że proces dopasowania powierzchni poprzedzono – bazującą na pakietowej analizie falkowej Walsha – procedurą generowania prędkości $\dot{y}(t)$ i przyspieszeń $\ddot{y}(t)$.

6.5. Podsumowanie

W rozdziale przedstawiono algorytm identyfikacji parametrów modeli, w postaci równań różniczkowych, bazujący na metodzie najmniejszych kwadratów i wykorzystujący właściwości pakietowej, falkowej analizy sygnału. Pokazano, że n-ty etap analizy pakietowej z bazą Walsha może być źródłem filtrowanych, wygładzonych postaci sygnału i jego pochodnych, które na ogół z powodzeniem pozwalają identyfikować poszukiwane parametry modeli lub powierzchnie w procedurach identyfikacji

nieparametrycznej. Sformułowano mnożniki, które są niezbędne do określania rzeczywistych, dyskretnych wartości funkcji i jej pochodnych. Zaproponowane podejście do identyfikacji parametrów modelu testowano na liniowych i nieliniowych równaniach różniczkowych do rzędu czwartego włącznie.

Przeprowadzone testy pozwoliły na sformułowanie kilku ogólnych spostrzeżeń:

- analiza pakietowa z bazą Walsha, dzięki właściwościom filtrów Haara, jest naturalnym źródłem – niezbędnych w procesie identyfikacji – pochodnych sygnału,
- uzyskane na n-tym etapie analizy pakietowej postacie skalowanych funkcji i jej pochodnych są reprezentowane przez równoliczne, dyskretne zbiory współczynników rozwinięć falkowych, z których – dzięki procesowi filtracji – częściowo wyeliminowano zaburzające proces identyfikacji błędy pomiaru i losowe zaburzenia mierzonych wielkości wejściowych,
- postacie dolno- i górnoprzepustowego filtru Haara pozwalają sformułować ścisłe mnożniki dla przeskalowanych funkcji i jej pochodnych, nie wprowadzając jednocześnie jakichkolwiek zaburzeń brzegowych charakterystycznych dla innych filtrów falkowych,
- na każdym – odpowiednio wysokim – etapie n analizy pakietowej można znaleźć wielokrotnie występujące reprezentacje pochodnej sygnału ustalonego rzędu; reprezentacje te z dokładnością do znanych mnożników są równoważne w procesie odtwarzania rzeczywistej postaci pochodnej,
- proces identyfikacji modeli, szczególnie dla modeli z wysokimi rzędami pochodnych sygnału, wymaga uwagi w doborze etapu n analizy pakietowej, którego współczynniki są podstawą odtwarzania sygnału i jego pochodnych.

W rozdziale tym wykorzystano wyniki przedstawione w pracy autora [6.11].

7. Analiza zagadnień początkowych liniowych równań różniczkowych o współczynnikach zmiennych w czasie

7.1. Wprowadzenie

Przedstawienie danej funkcji w bazach funkcji ortogonalnych jest od dawna znane i stosowane nie tylko w matematyce. Ten sposób przedstawiania funkcji – poczynając od lat siedemdziesiątych ubiegłego wieku – znalazł szerokie zastosowanie w rozwiązywaniu równań różniczkowych opisujących zagadnienia dynamiki, sterowania i identyfikacji.

Finlayson [7.1] oraz Villadsen i Michelson [7.2] rozwiązywali równania różniczkowe stosując aproksymacje ortogonalnymi wielomianami. Ortogonalne funkcje Walsha zastosowali Corrington [7.3] oraz Chen i Hsiao [7.4], którzy jako pierwsi zdefiniowali pojęcie macierzy operacyjnej całkowania dla tego typu funkcji. Macierze operacyjne całkowania, które stanowią istotny element algorytmów analizy równań różniczkowych formułowano dla różnych funkcji bazowych. Między innymi Chen, Tsay i Wu [7.5] macierz operacyjną zdefiniowali dla prostokątnej funkcji impulsowej, Hwang i Shih [7.6] oraz King i Paraskevopoulos [7.7] dla funkcji Laguerre'a, Chang i Wang [7.8] dla wielomianów Legendre'a, Praskevopoulos [7.9] dla funkcji Chebysheva, a Paraskevopoulos, Sparcis i Monroursos [7.10] dla szeregów Fouriera.

Ostatnio coraz częściej w opisach różnych klas funkcji stosowane są bazy falkowe (Resnikoff i Wells [1.2], Mallat [1.3]), które dzięki swym właściwościom okazują się wygodnym i uniwersalnym narzędziem analizy różnych zagadnień technicznych, a w tym i tych, których opis sprowadza się do zagadnień początkowych równań różniczkowych. Chen i Hsiao [7.11] jako pierwsi pokazali postać macierzy operacyjnej całkowania dla falek Haara i zastosowali ją do analizy układów dynamicznych. Stan systemów z opóźnieniem przy wykorzystaniu falek Haara analizował Hsiao [7.12]. Hsiao i Wang [7.13] zastosowali macierz operacyjną całkowania dla funkcji Haara w optymalizacji liniowych zagadnień kontroli. Bazując na macierzy operacyjnej całkowania dla falek Haara kompletną i prostą procedurę optymalizacji liniowych systemów dynamicznych przedstawili Chen i Hsiao [7.14]. Ostatnio Hsiao i Wang [7.15], [7.16] zastosowali falki Haara do analizy stanów i oceny parametrów systemów biliniowych i analizy nieliniowych układów źle uwarunkowanych.

Celem tego rozdziału jest:

- sformułowanie – bazujących na falkowych bazach pakietowych Walsha – algorytmów analizy zagadnień początkowych liniowych równań różniczkowych o stałych i zmiennych współczynnikach,
- pokazanie postaci tak zwanych modyfikowanych macierzy operacyjnych całkowania i zbadanie ich wpływu na dokładność obliczeń.

Zastosowanie falkowych baz pakietowych Walsha stanowi uogólnienie dotychczas wykorzystywanych baz Haara i Walsha, które są szczególnymi przypadkami tutaj omawianych baz pakietowych. W wyniku modyfikacji postaci macierzy operacyjnych całkowania poprzez przyjmowanie różnych punktów charakterystycznych dla przedziałów odcinkowo stałych baz pakietowych powstaje cała klasa tych macierzy, których szczególnymi przypadkami są macierze operacyjne całkowania Haara i Walsha.

W punkcie drugim rozdziału przedstawiono krótkie wprowadzenie do problemów związanych z zagadnieniami początkowymi równań różniczkowych zwyczajnych, w punkcie trzecim sformułowano – przystosowane do wykorzystania z dowolną falkową bazą pakietową Walsha – algorytmy analizy liniowych równań różniczkowych o stałych i zmiennych współczynnikach; w punkcie czwartym zdefiniowano tak zwane modyfikowane macierze operacyjne całkowania; w punkcie piątym pokazano przykłady analizy i omówiono otrzymane wyniki, a w punkcie szóstym przedstawiono wnioski ogólne wynikające z zastosowania baz pakietowych i modyfikowanych postaci macierzy operacyjnych całkowania w procesie rozwiązywania układów równań różniczkowych.

7.2. Podstawy zagadnień początkowych równań różniczkowych zwyczajnych

Przyjmijmy, że zagadnienie początkowe równań różniczkowych zwyczajnych można przedstawić w postaci

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \mathbf{z}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \tag{7.1}$$

gdzie: $\mathbf{x}(t) \in R^n$ jest wektorem zmiennych stanu, $\mathbf{z}(t, \mathbf{x}) \in R^n$ jest wektorem ciągłych funkcji z_i określonym w pewnym obszarze zmiennych $(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i spełniających warunek Lipschitza (Björck i Dahlquist [7.17], Krupowicz [7.18]). Dany wektor $\mathbf{x}_0$ określa warunki początkowe zadania. Z założenia warunku ciągłości funkcji z_i i z warunku Lipschitza wynika istnienie dokładnie jednego układu funkcji $\mathbf{x}$ będącego rozwiązaniem problemu (7.1). Rozwiązanie to istnieje na pewnym przedziale zmiennej niezależnej t, obejmującym jej wartość początkową t_0. Długość tego przedziału

zależy od właściwości funkcji z_i, które w konkretnych zastosowaniach są na ogół wielkościami ograniczonymi, określonymi na przedziałach nieskończonych. Z założenia ciągłości funkcji z_i wynika, że pierwsze pochodne rozwiązania są funkcjami ciągłymi zmiennej t, co pozwala spełnić minimalny warunek, jaki stawia teoria metod numerycznych.

Istnienie i jednoznaczność rozwiązania problemu (7.1) implikuje ciągłą zależność rozwiązań od warunków początkowych, która to zależność jest na ogół właściwością lokalną. Uogólnieniem pojęcia ciągłej zależności rozwiązania od warunków początkowych jest pojęcie stabilności rozwiązania, której na ogół nie zapewniają warunki istnienia i jednoznaczności rozwiązania. Rozwiązanie problemu (7.1) jest stabilne, jeżeli małe zmiany warunków początkowych powodują co najwyżej małe zmiany rozwiązania w całym obszarze zmiennej niezależnej t.

Numeryczna analiza zagadnień początkowych polega na obliczeniu – wychodząc z warunków początkowych – wartości przybliżonych $\mathbf{x}_i$ dla $t = t_i$ $(t_i > t_0)$ rozwiązania dokładnego $\mathbf{x}(t_i)$. Rozwiązania przybliżone są określane na dyskretnym zbiorze zmiennej niezależnej, który wynika z przyjętego stałego bądź zmiennego kroku całkowania. Cechą charakterystyczną numerycznego całkowania zagadnienia początkowego jest to, że rozwiązania przybliżone $\mathbf{x}_i$ są obliczane sukcesywnie dla następujących kolejno po sobie punktów podziału zmiennej niezależnej. Jeżeli w obliczeniach wartości rozwiązania przybliżonego w i-tym punkcie zmiennej t wykorzystywane jest wyłącznie rozwiązanie otrzymane w punkcie $i - 1$, to taką metodę obliczeń zaliczamy do tak zwanych metod jednokrokowych. Jeżeli w tych obliczeniach wykorzystujemy szereg rozwiązań, na przykład z k punktów poprzednich, to takie metody obliczeń nazywamy wielokrokowymi (k-krokowymi). Metody wielokrokowe, w zależności od tego, czy w algorytmie szukania rozwiązania w i-tym punkcie są wykorzystywane jedynie rozwiązania z punktów poprzednich, czy też z punktów poprzednich i z punktu i-tego, dzielimy odpowiednio na metody jawne i niejawne.

Podstawowym reprezentantem grupy metod jednokrokowych są metody Rungego –Kutty, a grupy metod wielokrokowych – metody Adamsa, które zaliczamy do liniowych metod wielokrokowych.

Metody jedno- i wielokrokowe stanowią podstawowe typy metod numerycznego całkowania zagadnień początkowych; do mniej popularnych metod zaliczamy między innymi metody ekstrapolacyjne, metody hybrydowe czy metody szeregów potęgowych.

Wszystkie metody numeryczne są obarczone tak zwanym błędem aproksymacji, który wnosi sama metoda w jednym kroku obliczeń, bez uwzględniania wpływu błędów popełnianych w krokach wcześniejszych. Błędem aproksymacji nazywamy różnicę między rozwiązaniem ścisłym a rozwiązaniem, które daje zastosowana metoda obliczeń, dla której błąd ten jest wielkością charakterystyczną.

Zwykle numeryczne całkowanie wiąże się z wielokrotnym stosowaniem przyjętej metody numerycznej, a z krokowego charakteru obliczeń wynika, że błędy popełniane

we wcześniejszych krokach kumulują się w trakcie obliczeń. Z powyższego faktu wynika konieczność oceny globalnej zastosowanej metody, której dokonuje się na podstawie przeprowadzonych badań błędu całkowitego rozwiązania i zbieżności metody. Przez błąd całkowity należy rozumieć różnicę między rozwiązaniem ścisłym a rozwiązaniem numerycznym w dowolnym kroku obliczeń.

Zbieżność metody oznacza, że rozwiązanie numeryczne, przy dostatecznie gęstym podziale analizowanego obszaru zmiennej niezależnej, jest dowolnie bliskie rozwiązaniu ścisłemu w całym tym obszarze.

W następnym punkcie przedstawiono algorytm numerycznego całkowania liniowych zagadnień początkowych, który bazuje na pakietowych funkcjach falkowych Walsha i jest odmianą metod jednokrokowych, dających rozwiązanie jednocześnie w m punktach następnych.

7.3. Analiza stanu układów liniowych

Rozpatrzmy układ n liniowych równań różniczkowych zwyczajnych, który można przedstawić w postaci

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \tag{7.2}$$

gdzie, jak poprzednio, $\mathbf{x}(t) \in R^n$ jest wektorem zmiennych stanu, wektor $\mathbf{u}(t) \in R^r$ reprezentuje dowolne, zadane wymuszenie, macierze $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ są znanymi macierzami współczynników odpowiednio o wymiarach $n \times n$ i $n \times r$, $\mathbf{x}_0$ jest wektorem definiującym stan początkowy układu, a zmienną niezależną jest t. Dalej zmienną niezależną nazywa się czasem. Kropką oznaczono pochodną wektora $\mathbf{x}$ po czasie.

Najpierw będzie rozpatrzony przypadek, w którym układ równań (7.2) ma stałe macierze współczynników $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$, a następnie taki, w którym współczynniki tych macierzy są dowolnymi funkcjami czasu t.

Załóżmy, że dana jest dowolna falkowa baza pakietowa Walsha przestrzeni V_J, której reprezentacją jest macierz $\mathbf{H}(t)$ o wymiarach $m \times m$, gdzie parametr $m = 2^J$ jest stopniem aproksymacji. Macierz $\mathbf{H}(t)$ może reprezentować bazę Haara, bazę Walsha bądź dowolną inną falkową bazę pakietową. Ponieważ bazy te są zdefiniowane dla $t \in [0,1]$, należy przeprowadzić normalizację czasu analizy t $(0 \le t \le t_f)$, wprowadzając zmienną τ tak, że $t = t_f \tau$. Tym samym układ (7.2) przyjmie postać

$$\dot{\mathbf{x}}(\tau) = t_f [\mathbf{A}\mathbf{x}(\tau) + \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)], \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \tag{7.3}$$

gdzie kropką oznaczono różniczkowanie po τ.

Znaną funkcję wymuszenia $\mathbf{u}(t)$ można przedstawić w bazie funkcji $\mathbf{H}(\tau)$ jako

$$\mathbf{u}(\tau) = \mathbf{C}\mathbf{H}(\tau) \tag{7.4}$$

gdzie $\mathbf{C}$ jest macierzą współczynników jej rozwinięcia.

Przy stałych macierzach $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ zostaną rozpatrzone dwa przypadki, w których w bazie $\mathbf{H}(\tau)$ przedstawia się $\dot{\mathbf{x}}(\tau)$ bądź $\mathbf{x}(\tau)$.

Jeżeli w bazie $\mathbf{H}(\tau)$ przedstawimy $\dot{\mathbf{x}}(\tau)$

$$\dot{\mathbf{x}}(\tau) = \mathbf{F}\mathbf{H}(\tau) \tag{7.5}$$

to po scałkowaniu (7.5) otrzymamy

$$\mathbf{x}(\tau) = \int_0^\tau \dot{\mathbf{x}}(\tau)d\tau + \mathbf{x}_0 = \mathbf{F}\int_0^\tau \mathbf{H}(\tau)d\tau + \mathbf{x}_0 = \mathbf{F}\mathbf{P}\mathbf{H}(\tau) + \mathbf{x}_0 \tag{7.6}$$

gdzie przez $\mathbf{F}$ oznaczono szukaną macierz o wymiarach $m \times m$, a

$$\int_0^\tau \mathbf{H}(\tau)d\tau \cong \mathbf{P}\mathbf{H}(\tau)$$

Przez $\mathbf{P}$ oznaczono tak zwaną macierz operacyjną całkowania (Chen i Hsiao [7.4], Chen i Hsiao [7.11], Hsiao [7.12], Hsiao i Wang [7.13], Chen i Hsiao [7.14]), która jest macierzą współczynników rozwinięcia w bazie $\mathbf{H}(\tau)$ całki z $\mathbf{H}(\tau)$. Znaku przybliżonej równości w definicji $\mathbf{P}$ użyto dla podkreślenia tego, że całka z $\mathbf{H}(\tau)$ w każdym z m przedziałów jest wyrażana (aproksymowana) jedną liczbą, która wynika z przyjęcia w tym przedziale granicy całkowania. Analiza możliwych różnych postaci macierzy $\mathbf{P}$ zostanie przedstawiona w następnym punkcie.

Po uwzględnieniu relacji (7.4), (7.5) i (7.6) równanie (7.3) można zapisać jako

$$\left[\mathbf{F} - t_f \mathbf{A}\mathbf{F}\mathbf{P}\right]\mathbf{H}(\tau) = t_f \left\{ \left[\underbrace{\mathbf{A}\mathbf{x}_0, \cdots, \mathbf{A}\mathbf{x}_0}_{k}, \mathbf{0}, \cdots, \mathbf{0} \right] + \mathbf{B}\mathbf{C} \right\} \mathbf{H}(\tau) \tag{7.7}$$

gdzie liczba k niezerowych kolumn macierzy po prawej stronie równania (7.7) jest zależna od stopnia aproksymacji m i postaci przyjętej bazy $\mathbf{H}(\tau)$. Dla bazy Haara i bazy Walsha $k = 1$, a dla innych możliwych falkowych baz pakietowych k jest równe liczbie funkcji bazowych z podprzestrzeni V_l najniższego rzędu, która występuje w dekompozycji analizowanej przestrzeni V ($V = V_l \oplus \ldots$).

Jeżeli sumę macierzy ujętą w nawiasy klamrowe po prawej stronie równania (7.7) oznaczymy przez $\mathbf{G}$

$$\mathbf{G} = t_f \left[\underbrace{\mathbf{A}\mathbf{x}_0, \cdots, \mathbf{A}\mathbf{x}_0}_{k}, \mathbf{0}, \cdots, \mathbf{0} \right] + t_f \mathbf{B}\mathbf{C} \tag{7.8}$$

to równanie (7.7) można przedstawić w postaci

$$[\mathbf{f}_0,\mathbf{f}_1,\cdots,\mathbf{f}_{m-1}]-t_f\,\mathbf{A}[\mathbf{f}_0,\mathbf{f}_1,\cdots,\mathbf{f}_{m-1}]\mathbf{P}=[\mathbf{g}_0,\mathbf{g}_1,\cdots,\mathbf{g}_{m-1}] \tag{7.9}$$

gdzie $\mathbf{f}_i$ i $\mathbf{d}_i$ są odpowiednio i+1 kolumnami szukanej macierzy **F** i danej macierzy **G**.

Równanie (7.9) można łatwo rozwiązać, stosując iloczyn Kroneckera (Brewer [7.19], Regalia i Mitra [7.20])

$$\begin{bmatrix}\mathbf{f}_0\\ \mathbf{f}_1\\ \vdots\\ \mathbf{f}_{m-1}\end{bmatrix}=\left[\mathbf{I}-t_f\,\mathbf{A}\otimes\mathbf{P}^T\right]^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{g}_0\\ \mathbf{g}_1\\ \vdots\\ \mathbf{g}_{m-1}\end{bmatrix} \tag{7.10}$$

gdzie **I** jest macierzą jednostkową, a iloczyn Kroneckera $\mathbf{A}\otimes\mathbf{P}^T$ definiuje się następująco:

$$\mathbf{A}\otimes\mathbf{P}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}P_{11}\mathbf{A} & P_{21}\mathbf{A} & \cdots & P_{m-1,1}\mathbf{A}\\ P_{12}\mathbf{A} & P_{22}\mathbf{A} & \cdots & P_{m-1,2}\mathbf{A}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ P_{1m}\mathbf{A} & P_{2m}\mathbf{A} & \cdots & P_{mm}\mathbf{A}\end{bmatrix} \tag{7.11}$$

Rozwiązanie równania (7.10) jest podstawą do znalezienia zmiennych stanu **x** analizowanego układu (7.3) w kolejnych m równoodległych punktach następujących po warunku początkowym.

Jeżeli założymy, że w bazie $\mathbf{H}(\tau)$ szukamy rozwinięcia $\mathbf{x}(\tau)$ (a nie jak poprzednio $\dot{\mathbf{x}}(\tau)$)

$$\mathbf{x}(\tau)=\widetilde{\mathbf{F}}\,\mathbf{H}(\tau) \tag{7.12}$$

to po scałkowaniu równania (7.3) i uwzględnieniu (7.4) oraz (7.12) otrzymujemy równanie analogiczne do (7.7), które ma postać

$$\left[\widetilde{\mathbf{F}}-t_f\mathbf{A}\widetilde{\mathbf{F}}\mathbf{P}\right]\mathbf{H}(\tau)=\left\{\left[\underbrace{\mathbf{x}_0,\cdots,\mathbf{x}_0}_{k},\mathbf{0},\cdots,\mathbf{0}\right]+t_f\mathbf{BCP}\right\}\mathbf{H}(\tau) \tag{7.13}$$

Dalej procedura rozwiązania (szukania $\widetilde{\mathbf{F}}$) przebiega analogicznie do procedury pokazanej wyżej.

Jeżeli założymy, że współczynniki macierzy **A** i **B** są funkcjami zmiennej niezależnej τ ($\mathbf{A}=\mathbf{A}(\tau)$ i $\mathbf{B}=\mathbf{B}(\tau)$), to procedura rozwiązania układu równań (7.3), przy założeniu szukanego rozwiązania w postaci (7.12), jest bardziej złożona.

Zależne od czasu macierze $t_f\mathbf{A}(\tau)$ i $t_f\mathbf{B}(\tau)\mathbf{u}(\tau)$ równania (7.3) przedstawimy w postaci szeregów:

$$t_f\mathbf{A}(\tau)=\sum_{i=1}^{p}\mathbf{A}_i\alpha_i(\tau), \qquad p\le n^2$$
$$t_f\mathbf{B}(\tau)\mathbf{u}(\tau)=\sum_{j=1}^{q}\mathbf{b}_j\beta_j(\tau), \qquad q\le n \tag{7.14}$$

gdzie $\mathbf{A}_i$ i $\mathbf{b}_j$ to odpowiednio $n\times n$ stała macierz i n-wektor, a $\alpha_i(\tau)$ i $\beta_j(\tau)$ są funkcjami czasu. Jeżeli wykorzystamy (7.14), to równanie (7.3) przyjmie postać

$$\dot{\mathbf{x}}(\tau)=\sum_{i=1}^{p}\mathbf{A}_i\alpha_i(\tau)\mathbf{x}(\tau)+\sum_{j=1}^{q}\mathbf{b}_j\beta_j(\tau), \qquad \mathbf{x}(\mathbf{0})=\mathbf{x}_0 \tag{7.15}$$

gdzie przez p i q oznaczono odpowiednio liczby zależnych od czasu elementów macierzy $\mathbf{A}(\tau)$ i iloczynu $\mathbf{B}(\tau)\mathbf{u}(\tau)$.

Rozwijając funkcje $\alpha_i(\tau)$ i $\beta_j(\tau)$ w bazie $\mathbf{H}(\tau)$

$$\alpha_i(\tau)=\mathbf{d}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{H}(\tau), \qquad \beta_j(\tau)=\mathbf{e}_j^{\mathrm{T}}\mathbf{H}(\tau) \tag{7.16}$$

całkując równanie (7.15) i korzystając z (7.12) i (7.16), otrzymamy

$$\widetilde{\mathbf{F}}\mathbf{H}(\tau)-\left[\underbrace{\mathbf{x}_0,\cdots,\mathbf{x}_0}_{k},\mathbf{0},\cdots,\mathbf{0}\right]\mathbf{H}(\tau)=\sum_{i=1}^{p}\mathbf{A}_i\widetilde{\mathbf{F}}\int_0^{\tau}\mathbf{H}(\tau)\mathbf{H}^{\mathrm{T}}(\tau)\mathbf{d}_i\,d\tau$$
$$+\sum_{j=1}^{q}\mathbf{b}_j\int_0^{\tau}\mathbf{e}_j^{\mathrm{T}}\mathbf{H}(\tau)d\tau \tag{7.17}$$

Przez $\mathbf{d}_i$ i $\mathbf{e}_j$ oznaczono n-wektory współczynników rozwinięć w bazie $\mathbf{H}(\tau)$ odpowiednio funkcji α_i i β_j. Pierwszy element prawej strony równania (7.17) zawiera całkę $\int_0^{\tau}\mathbf{H}(\tau)\mathbf{H}^{\mathrm{T}}(\tau)\mathbf{d}_i d\tau$, którą po rozwinięciu wyrażenia podcałkowego w bazie $\mathbf{H}(\tau)$

$$\mathbf{H}(\tau)\mathbf{H}^{\mathrm{T}}(\tau)\mathbf{d}_i=\mathbf{D}_i\mathbf{H}(\tau) \tag{7.18}$$

można zapisać w postaci $\mathbf{D}_i\int_0^{\tau}\mathbf{H}(\tau)d\tau$.

Uwzględniając (7.18) i podstawiając

$$\widetilde{\mathbf{G}} = \left[\underbrace{\mathbf{x}_0, \cdots, \mathbf{x}_0}_{k}, \mathbf{0}, \cdots, \mathbf{0}\right] + \sum_{j=1}^{q} \mathbf{b}_j \mathbf{e}_j^{\mathrm{T}} \mathbf{P} \tag{7.19}$$

możemy zapisać równanie (7.17) w postaci

$$\widetilde{\mathbf{F}} = \sum_{i=1}^{p} \mathbf{A}_i \widetilde{\mathbf{F}} \mathbf{D}_i \mathbf{P} + \widetilde{\mathbf{G}} \tag{7.20}$$

Jest to tak zwane uogólnione równanie Lapunova (Hsiao i Wang [7.13]), którego rozwiązanie $\widetilde{\mathbf{F}}$ otrzymuje się, korzystając z iloczynu Kroneckera

$$\begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{f}}_0 \\ \widetilde{\mathbf{f}}_1 \\ \vdots \\ \widetilde{\mathbf{f}}_{m-1} \end{bmatrix} = \left[\mathbf{I} - \sum_{i=1}^{p} \mathbf{A}_i \otimes (\mathbf{D}_i \mathbf{P})^{\mathrm{T}}\right]^{-1} \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{g}}_0 \\ \widetilde{\mathbf{g}}_1 \\ \vdots \\ \widetilde{\mathbf{g}}_{m-1} \end{bmatrix} \tag{7.21}$$

Przez $\widetilde{\mathbf{f}}_i$ i $\widetilde{\mathbf{g}}_i$ oznaczono $i+1$ kolumny odpowiednio macierzy $\widetilde{\mathbf{F}}$ i $\widetilde{\mathbf{G}}$.

Przedstawione jednokrokowe algorytmy wprowadzają podział czasu obserwacji t_f na m równych przedziałów, w których rozwiązanie jest odcinkowo stałe. Oczywiście analiza długich czasów obserwacji wymaga zwiększenia liczby m, a to w konsekwencji prowadzi do konieczności odwracania dużych macierzy równań o wymiarach $mn \times mn$ występujących w relacjach (7.10) lub (7.21). Tę niedogodność łatwo wyeliminować, wprowadzając podział czasu obserwacji na z równych przedziałów i szukając rozwiązania wspomnianych równań w każdym z tych przedziałów. Warunki początkowe w następnym kroku są końcowymi rozwiązaniami z kroku poprzedniego. W ten sposób otrzymujemy rozwiązanie w zm punktach analizowanego czasu t_f, które nawet przy niskim stopniu aproksymacji m i dostatecznie dużym z jest na ogół zadowalające.

7.4. Macierze operacyjne całkowania

Stała macierz $\mathbf{P}$ umożliwiająca przybliżone przedstawienie całki z funkcji bazowych w bazie tych funkcji

$$\int_0^{\tau} \mathbf{H}(\tau) d\tau \cong \mathbf{P}\,\mathbf{H}(\tau) \tag{7.22}$$

nazywana jest – jak już wspominano – macierzą operacyjną całkowania.

Macierz operacyjna jest istotnym elementem algorytmów rozwiązania przedstawionych w poprzednim punkcie. W literaturze pokazano (Chen i Hsiao [7.4], Chen, Tsay i Wu [7.5]), że macierz operacyjna **P** dla bazy Haara ma postać

$$\mathbf{P}_m = \frac{1}{2m}\begin{bmatrix} 2m\mathbf{P}_{m/2} & -\mathbf{H}_{m/2} \\ \mathbf{H}_{m/2}^{-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \end{bmatrix} \tag{7.23}$$

a dla bazy Walsha

$$\mathbf{P}_m = \frac{1}{2m}\begin{bmatrix} 2m\mathbf{P}_{m/2} & -\mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \end{bmatrix} \tag{7.24}$$

Macierze operacyjne (7.23) i (7.24) wyznaczono przyjmując, że punktem reprezentatywnym (granicą całkowania) dla każdego z m odcinków podziału czasu τ jest jego punkt środkowy – dalej macierze tego typu nazywa się standardowymi macierzami operacyjnymi całkowania. Zapis macierzy operacyjnej **P** dany relacją (7.24) jest znacznie uproszczony w stosunku do zapisu znanego z literatury (Chen, Tsay i Wu [7.5]). Relacje (7.23) i (7.24) formułują przepis wyznaczania macierzy operacyjnych rzędu m, jeżeli są dane macierze operacyjne i baza rzędu $m/2$.

Przyjmijmy, że położenie punktu reprezentatywnego dla każdego z m odcinków podziału czasu τ dane jest parametrem $\gamma \in \langle 0,1 \rangle$. Jeżeli parametr $\gamma = 0$, to punkt reprezentatywny odcinka jest położony na jego początku, a jeżeli $\gamma = 1$, to punkt ten leży na jego końcu. Macierze operacyjne całkowania, które wyznacza się wykorzystując różne położenia punktów reprezentatywnych, dalej nazywać się będzie modyfikowanymi macierzami operacyjnymi całkowania. Łatwo pokazać, przez analogię do dowodu przedstawionego przez Chen i Hsiao [7.11], że modyfikowana macierz operacyjna dla bazy Haara ma postać

$$\mathbf{P}_m = \frac{1}{2m}\begin{bmatrix} 2\left[m\mathbf{P}_{m/2} - (\gamma - 1/2)\mathbf{I}\right] & -\mathbf{H}_{m/2} \\ \mathbf{H}_{m/2}^{-1} & 2(\gamma - 1/2)\mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_1 = [\gamma] \tag{7.25}$$

a dla bazy Walsha

$$\mathbf{P}_m = \frac{1}{2m}\begin{bmatrix} 2\left[m\mathbf{P}_{m/2} - (\gamma - 1/2)\mathbf{I}\right] & -\mathbf{I} \\ \mathbf{I} & 2(\gamma - 1/2)\mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_1 = [\gamma] \tag{7.26}$$

Oczywiście, jeżeli $\gamma = 1/2$, to relacje (7.25) i (7.26) przechodzą odpowiednio w relacje (7.23) i (7.24).

Nie pokazuje się tutaj – choć stosunkowo łatwo je otrzymać – modyfikowanych macierzy operacyjnych dla innych możliwych falkowych baz pakietowych Walsha, gdyż ich zapisy są każdorazowo inne i zależą od baz przyjętego szeregu podprzestrzeni. Oczywi-

ście, dla dowolnej falkowej bazy pakietowej Walsha, modyfikowane macierze operacyjne łatwo wyznaczyć numerycznie, korzystając z relacji (7.22), z której wynika, że

$$\mathbf{P}_m = \left(\int_0^{\tau} \mathbf{H}_m(\tau) d\tau \right) \mathbf{H}_m^{-1} \tag{7.27}$$

Wpływ różnych możliwych postaci macierzy operacyjnych całkowania na dokładność obliczeń przy różnych falkowych bazach pakietowych Walsha będzie analizowany w punkcie następnym.

7.5. Przykłady numeryczne

W punkcie tym na przykładach liniowych układów równań różniczkowych ze stałymi i zmiennymi współczynnikami testowany będzie wpływ na otrzymywane rozwiązania przyjętej bazy $\mathbf{H}(\tau)$ oraz znaczenie przyjmowanych postaci modyfikowanych macierzy operacyjnych.

Niech przykładowy układ równań rzędu $n = 4$ zagadnienia początkowego będzie dany relacją

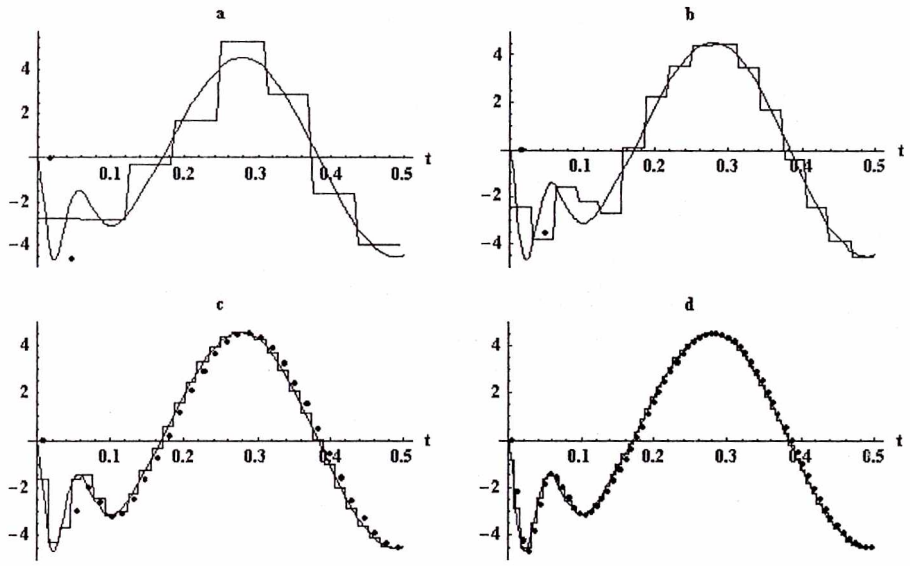
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 18 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 25 & 250 \\ 0 & 0 & 0 & 250 \\ -168 & -92{,}25 & 0 & -250 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 168\sin(15t) \\ 0 \\ 0 \\ 168\sin(15t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1{,}9 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7.28}$$

Rozwiązanie układu równań (7.28) poszukiwane będzie w czasie $0 \le t \le 0{,}5$ s przy szukanej postaci rozwiązania danej relacją (7.5) i standardowej postaci macierzy operacyjnej całkowania **P** dla bazy Haara. Przyjęto, że liczba podziału czasu trwania analizy $z = 1$, z czego wynika, że przyjęta baza **H** jest dla danego czasu analizy bazą globalną.

Na rysunku 7.1 pokazano – na tle rozwiązania ścisłego oznaczonego linią ciągłą – zmienność trzeciej (x_3) składowej wektora stanu **x** przy różnych stopniach aproksymacji m. Rozwiązanie otrzymane z wykorzystaniem bazy Haara i relacji (7.10) pokazano linią ciągłą odcinkowo stałą w każdym z m przedziałów analizowanego czasu t. Linią kropkowaną oznaczono rozwiązania otrzymane metodą Rungego–Kutty czwartego rzędu, przy założeniu, że analizowany czas dzielony jest w tej metodzie też na m równych przedziałów. Rozwiązania przy $m = 3$, $m = 4$, $m = 5$ i $m = 6$ pokazano odpowiednio na rys. 7.1a–7.1d.

Przyjmując inną bazę **H** (bazę Walsha bądź dowolną inną falkową bazę pakietową), otrzymuje się identyczne – z już pokazanymi – rozwiązania, z czego wynika, że

falkowe bazy pakietowe są (przy ustalonym m) równoważne w aproksymacji poszukiwanego rozwiązania.



Rys. 7.1. Rozwiązanie dokładne (linia ciągła), rozwiązanie Haara (linia odcinkowo stała) i rozwiązanie metodą Rungego–Kutty (kropki) trzeciej składowej wektora **x** układu (7.28) przy różnych stopniach aproksymacji: $m = 3$ (a), $m = 4$ (b), $m = 5$ (c) i $m = 6$ (d)
Fig. 7.1. Exact solution (solid line), Haar solution (piecewise constant line) and the solution by the Runge-Kutta method (dotted line) for third component of vector **x** of system (7.28) at different approximation degrees: $m = 3$ (a), $m = 4$ (b), $m = 5$ (c) and $m = 6$ (d)

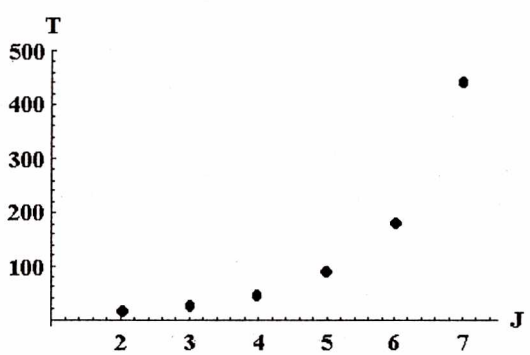
W szczególnych przypadkach układów równań źle uwarunkowanych mogą wystąpić na ogół pomijalne różnice w uzyskiwanych rezultatach przy stosowaniu różnych falkowych baz pakietowych. Ewentualne różnice wynikają z różnych zakresów niektórych bądź wszystkich funkcji bazowych $\mathbf{H}(\tau)$. W bazie Haara jedna (stała) funkcja bazowa obejmuje cały analizowany obszar, a zakresy pozostałych są mniejsze; w przypadku bazy Walsha wszystkie funkcje bazowe rozpościerają się na cały analizowany obszar. Przy innych falkowych bazach pakietowych obszary niezerowych wartości funkcji bazowych są mniejsze od analizowanego obszaru, a w szczególnych przypadkach doboru bazy mogą to być funkcje lokalne.

Metoda Rungego–Kutty czwartego rodzaju przy małych liczbach m podziału analizowanego czasu jest rozbieżna; przy większych m otrzymywane rozwiązanie może być zadowalające. Przeprowadzone analizy nie potwierdzają wniosków z pracy Hsiao i Wanga [7.16] o wielokrotnie wyższej efektywności algorytmów bazujących na macierzach operacyjnych całkowania dla funkcji Haara od algorytmu Rungego–Kutty czwartego rzędu. Czas analizy z wykorzystaniem tych algorytmów należy uznać za porównywalny, przynajmniej w analizowanych tutaj zagadnieniach liniowych.

Jeżeli przyjmiemy, że podstawą algorytmu analizy jest relacja (7.12), to otrzymamy rozwiązania identyczne z tymi, które uzyskujemy z relacji (7.5). W przypadku zastosowania relacji (7.12) praktyczny czas analizy jest średnio o około 10% krótszy od czasu funkcjonowania algorytmu bazującego na (7.5). Wynika to z różnych liczb operacji prowadzących do określenia zmiennych stanu **x**, które łatwo zauważyć, porównując relacje (7.6) i (7.12). Rozwiązania przedstawiane dalej bazują na algorytmach opartych na relacji (7.12).

Dłuższe czasy analizy wymagają oczywiście wyższego stopnia aproksymacji m i tym samym między innymi odwrócenia dużej macierzy, co przy dużych m może prowadzić do istotnego wzrostu czasu analizy. Jak już wspomniano, prostym rozwiązaniem w takich przypadkach jest podział czasu trwania analizy na z równych odcinków i przyjęciu w każdym z nich niższego stopnia aproksymacji. Okazuje się, że przy podziale czasu trwania na z odcinków i przyjęciu tego samego stopnia aproksymacji w każdym z nich, wszystkie z możliwych falkowych baz pakietowych dają rozwiązania o tej samej dokładności i w tym samym czasie.

Czas analizy przy ustalonej liczbie przedziałów z zależy oczywiście od stopnia aproksymacji m. Na rysunku 7.2 pokazano zależność trwania czasu analizy T układu (7.28) od stopnia dokładności $m = 2^{2J}$ przy $z = 1000$ i $t_f = 3$ s.



Rys. 7.2. Zależność trwania czasu T analizy układu (7.28) od poziomu rozdzielczości J przy $z = 1000$ i $t_f = 3$ s
Fig. 7.2. System (7.28) analysis time versus resolution degree J at $z = 1000$ and $t_f = 3$ s

Pokazane wyniki otrzymano stosując w algorytmach standardowe macierze operacyjne całkowania. Jeżeli w algorytmach wykorzystamy modyfikowane macierze operacyjne, to czas analizy oczywiście nie ulegnie zmianie, ale istotną różnicę daje się zaobserwować w błędzie obliczeń Δ_i^{γ}, który tutaj mierzy się wyrażoną w % mocą różnicy rozwiązania dokładnego (x_i^e) i przybliżonego (x_i^a) odniesioną do mocy rozwiązania dokładnego

$$\Delta_i^{\gamma}=\left(\sum_{j=1}^{zm}\left|x_{i,j}^{e}-x_{i,j}^{a}\right|^2 / \sum_{j=1}^{zm}\left|x_{i,j}^{e}\right|^2\right)\cdot 100\% \tag{7.29}$$

dla parametru γ. Przez $x_{i,j}^{e}$ i $x_{i,j}^{a}$ oznaczono odpowiednio wartości i-tej współrzędnej stanu **x** w j-tym, środkowym punkcie analizowanego przedziału odpowiednio dla rozwiązania dokładnego i przybliżonego.

W tabeli 7.1 pokazano błędy obliczeń składowej x_3 układu równań (7.28) przy $m = 3$ i $t_f = 3$ s dla różnych parametrów γ określających postać modyfikowanej macierzy operacyjnej całkowania i przy różnych liczbach z podziału czasu obserwacji.

Tabela 7.1. Błędy obliczeń składowej układu (7.28) przy $m = 3$ i $t_f = 3$ s dla różnych parametrów γ i przy różnych liczbach z podziału czasu obserwacji
Table 7.1. Errors in computing component x_3 of system (7.28) at $m = 3$ and $t_f = 3$ s for different parameters γ and different observation time division numbers z

z	Δ_3^{γ} [%]				
	$\gamma = 0{,}00$	$\gamma = 0{,}25$	$\gamma = 0{,}50$	$\gamma = 0{,}75$	$\gamma = 1{,}00$
4	$6{,}3 * 10^8$	23,5	1,25	1,38	2,81
6	104,2	6,17	0,721	0,879	1,89
10	11,0	2,21	0,452	0,433	0,975
20	3,14	1,25	0,424	0,199	0,339
100	2,10	1,10	0,455	0,111	0,0188
200	2,09	1,10	0,463	0,110	0,00493
600	2,09	1,11	0,468	0,110	0,000566
1000	2,09	1,11	0,469	0,111	0,000205
1200	2,09	1,11	0,470	0,111	0,000142
2000	2,09	1,11	0,470	0,111	0,0000515

Przedstawiony w tabeli 7.1 charakter zmienności zdefiniowanego relacją (7.29) błędu pokazuje, że błąd ten maleje wraz ze wzrostem liczby z i przy dostatecznie dużym z na ogół ustala się, a jego wartość jest funkcją parametru γ. Jeśli $0 \le \gamma < 0{,}5$, to błąd rozwiązania jest asymptotycznie zbieżny do wartości większych od błędu generowanego w rozwiązaniach bazujących na standardowych macierzach operacyjnych całkowania. Jeśli $0{,}5 < \gamma \le 1$, to błąd rozwiązania – przy dostatecznie dużym podziale z – jest istotnie mniejszy od błędu przy $\gamma = 0{,}5$, a dla $\gamma = 1$ błąd osiąga wartość minimalną ze wszystkich możliwych γ. Wartości błędu zestawione w poszczególnych kolumnach tabeli 7.1 dowodzą, że zastosowana metoda jest zbieżna i jest szczególnie efektywna przy $\gamma = 1$.

W tabeli 7.2 pokazano błędy obliczeń składowej x_3 układu (7.28) przy $z = 20$ i $t_f = 3$ s przy różnych parametrach γ i różnych stopniach aproksymacji m. Porównując kolumny tej tabeli, łatwo zauważyć, że błąd aproksymacji stosowanej metody zależy

od stopnia aproksymacji m i wraz ze wzrostem m istotnie maleje. Należy podkreślić, że proponowana jednokrokowa metoda numerycznego całkowania zagadnień początkowych daje rozwiązania w m równoodległych punktach czasowych, co odpowiada m krokom w tradycyjnych metodach numerycznego całkowania ze stałym (t_f/m) krokiem całkowania.

Tabela 7.2. Błędy obliczeń składowej x_3 układu (7.28) przy $z = 20$ i $t_f = 3$ s przy różnych parametrach γ i różnych stopniach aproksymacji m
Table 7.2. Errors in computing component x_3 of system (7.28) at $z = 20$ and $t_f = 3$ s for different parameters γ and different approximation degrees m

m	Δ_3^{γ} [%]				
	$\gamma = 0{,}00$	$\gamma = 0{,}25$	$\gamma = 0{,}50$	$\gamma = 0{,}75$	$\gamma = 1{,}00$
0	100,0	268,0	54,6	10,5	4,11
1	1073,2	43,5	10,0	2,88	2,30
2	22,2	6,46	1,94	0,765	0,975
3	3,14	1,25	0,424	0,199	0,339
4	0,631	0,278	0,0994	0,0512	0,103
5	0,143	0,0658	0,0240	0,0130	0,0288
6	0,0341	0,0160	0,00592	0,00329	0,00762
7	0,00834	0,00395	0,00146	0,000827	0,00196

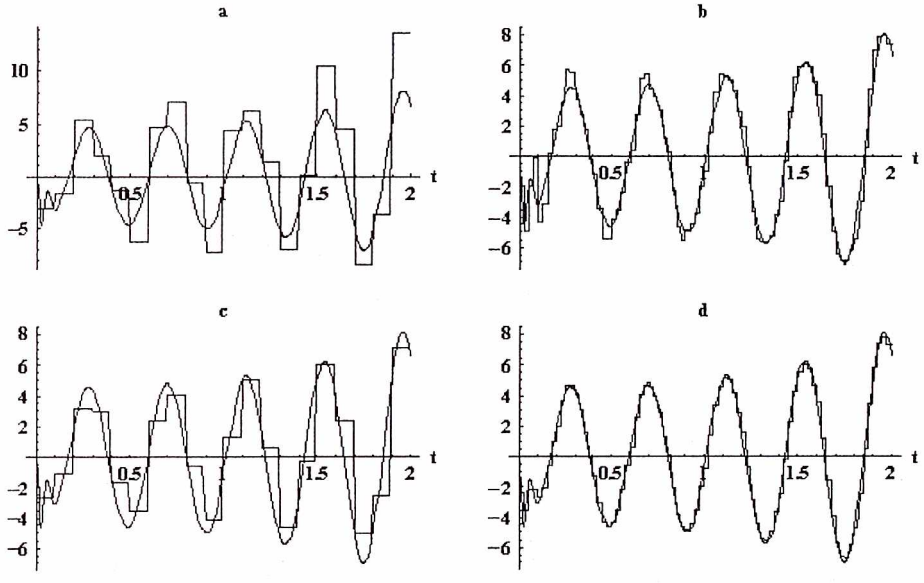
Czas obliczeń rośnie wraz ze wzrostem m, czemu towarzyszy zmniejszanie się błędu obliczeń. Okazuje się, że przy niskich m błąd jest najmniejszy gdy $\gamma = 1$, a wraz ze wzrostem m minimum błędu przesuwa się w kierunku niższych wartości γ – jeśli $m = 7$ i $z = 20$, to najmniejszy błąd otrzymujemy przy $\gamma = 0{,}71$. Wspomniane przesunięcie minimum błędu w kierunku niższych wartości γ maleje wraz ze wzrostem liczby z i na przykład przy $z = 100$ $(m = 7)$ minimum błędu osiągane jest przy $\gamma = 0{,}98$.

Niech przykładowy układ rzędu $n = 4$ równań różniczkowych ze zmiennymi współczynnikami zagadnienia początkowego będzie dany relacją

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 18\cos(0{,}5t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 25 & 250 \\ 0 & 0 & 0 & 250 \\ -168 & -92.25\cos(0{,}5t) & 0 & -250 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 168\sin(15t) \\ 0 \\ 0 \\ 168\sin(15t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1{,}9 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7.30}$$

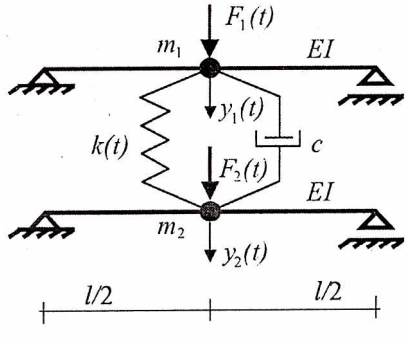
Na rysunku 7.3 przedstawiono rozwiązania drugiej składowej wektora stanu $\mathbf{x}$ układu równań (7.30) dla $0 \le t \le 2$ s. Na tle rozwiązania dokładnego, oznaczonego linią ciągłą, pokazano odcinkowo stałe rozwiązania wynikające z relacji (7.21) przy $z = 5$, $m = 2$ i $\gamma = 0{,}4$ (rys. 7.3a), przy $z = 5$, $m = 2$ i $\gamma = 0{,}6$ (rys. 7.3c) oraz przy $z = 10$, $m = 3$ i $\gamma = 0{,}4$ (rys. 7.3b) i przy $z = 10$, $m = 3$ i $\gamma = 0{,}6$ (rys. 7.3d).

Wszystkie spostrzeżenia poczynione przy omawianiu wyników analizy układu (7.28) w pełni potwierdziły wyniki analizy układu (7.30) ze zmiennymi współczynnikami.



Rys. 7.3. Rozwiązanie dokładne (linia ciągła) i rozwiązanie Walsha (linia odcinkowo stała) drugiej składowej wektora **x** układu (7.30) przy $z = 5$, $m = 2$ i $\gamma = 0{,}4$ (a), przy $z = 5$, $m = 2$ i $\gamma = 0{,}6$ (c) oraz przy $z = 10$, $m = 3$ i $\gamma = 0{,}4$ (b) i przy $z = 10$, $m = 3$ i $\gamma = 0{,}6$ (d)

Fig. 7.3. Exact solution (solid line) and Walsh solution (piecewise constant line) for second component of vector **x** of system (7.30) at: $z = 5$, $m = 2$ and $\gamma = 0.4$ (a); $z = 5$, $m = 2$ and $\gamma = 0.6$ (c); $z = 10$, $m = 3$ and $\gamma = 0.4$ (b); and $z = 10$, $m = 3$ and $\gamma = 0.6$ (d)



Rys. 7.4. Schemat dynamiczny analizowanego układu

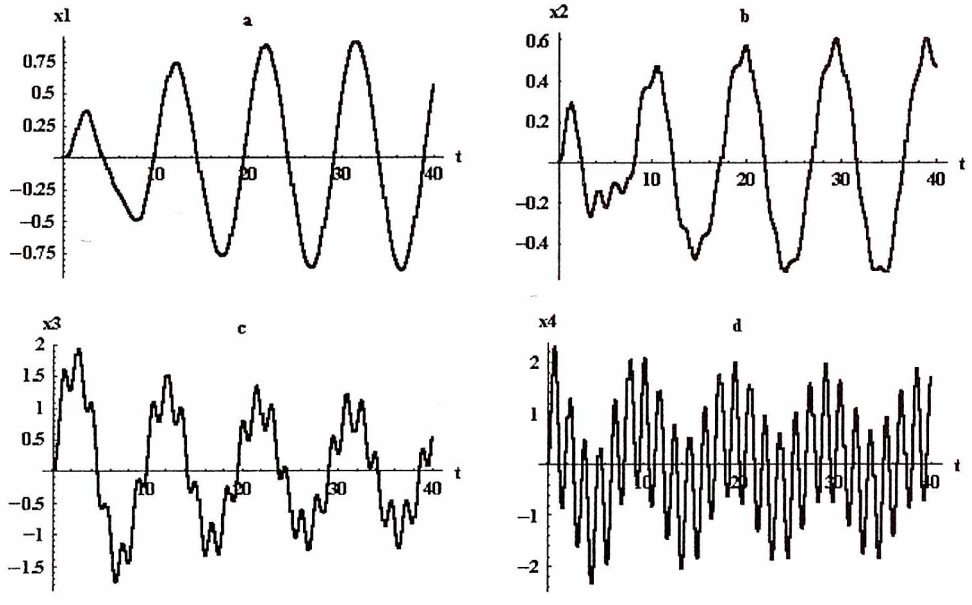
Fig. 7.4. Schema of analyzed dynamic system

Rozważmy drgania układu przedstawionego na rys. 7.4, którego stan opisują dwie współrzędne uogólnione $y_1(t)$ i $y_2(t)$. Załóżmy, że dane są: jednakowa dla obu belek

sztywność giętna EI, długość belek l, punktowe masy skupione m_1 i m_2, stała charakterystyka c tłumika wiskotycznego, zmienna w czasie charakterystyka $k(t)$ sprężyny łączącej belki oraz siły $F_1(t)$ i $F_2(t)$ wymuszające drgania układu przy zerowych jego warunkach początkowych. Korzystając z równań ruchu Lagrange'a, łatwo wyprowadzić równania, które przy uwzględnieniu w bezmasowych belkach jedynie efektów giętnych przyjmują postać

$$\begin{aligned} m_1\ddot{y}_1(t)+c[\dot{y}_1(t)-\dot{y}_2(t)]+k(t)[y_1(t)-y_2(t)]+k_0y_1(t)=F_1(t) \\ m_2\ddot{y}_2(t)+c[\dot{y}_2(t)-\dot{y}_1(t)]+k(t)[y_2(t)-y_1(t)]+k_0y_2(t)=F_2(t) \end{aligned} \tag{7.31}$$

gdzie przez k_0 oznaczono sztywność belki w punkcie i na kierunku obciążenia wymuszającego.



Rys. 7.5. Rozwiązanie układu równań (7.32) w czasie $t = 40$ s, przy wykorzystaniu bazy Walsha dla $m = 4$, $z = 200$ i $\gamma=1$
Fig. 7.5. Solution of system (7.32) for dla $m = 4$, $z = 200$ and $\gamma=1$ for Walsh basis

Jeżeli przyjmiemy, że

$$x_1(t)=y_1(t), \qquad x_2(t)=\dot{y}_1(t), \qquad x_3(t)=y_2(t), \qquad x_4(t)=\dot{y}_2(t)$$

oraz przykładowe wartości

$$EI = l = 1, \qquad m_1 = m_2 = 1, \qquad c = 0{,}1, \qquad k_0 = 20/48$$
$$k(t) = 10/96\sin(2t), \qquad F_1(t) = 0, \qquad F_2(t) = 5\sin(4t)$$

to równania (7.31) można zapisać jako

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{20}{48}[1+0{,}5\sin(2t)] & -0{,}1 & \frac{20}{96}\sin(2t) & 0{,}1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{20}{96}\sin(2t) & 0{,}1 & -\frac{20}{48}[1+0{,}5\sin(2t)] & -0{,}1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5\sin(4t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7.32}$$

Na rysunku 7.5 pokazano rozwiązanie układu równań (7.32) w przyjętym $t = 40$ s czasie analizy, otrzymane przy wykorzystaniu bazy Walsha, przy $m = 4$, $z = 200$ i $\gamma = 1$.

Przedstawione wyniki w pełni pokrywają się z rozwiązaniami ścisłymi, z czego wynika, że błąd całkowity stosowanej metody jest dowolnie mały.

7.6. Podsumowanie

W rozdziale pokazano możliwość wykorzystania falkowych baz pakietowych Walsha w algorytmach rozwiązywania zagadnień początkowych opisywanych układami liniowych równań różniczkowych ze stałymi bądź zmiennymi współczynnikami. Przedstawiono i porównano algorytmy oparte na rozwinięciu pochodnej zmiennych stanu i rozwinięciu zmiennej stanu w dowolnej bazie pakietowej. Wyniki analiz porównano z wynikami otrzymywanymi z klasycznych metod rozwiązywania zagadnień początkowych w ich różniczkowym sformułowaniu i z wynikami dokładnymi. Porównania te pozwoliły stwierdzić, że proponowane podejście jest zbieżne, że błąd aproksymacji maleje wraz ze wzrostem stopnia aproksymacji, a błąd całkowity metody jest dowolnie mały.

Testowano efektywność algorytmów, którą mierzono czasem trwania obliczeń. Szczególną uwagę zwrócono na możliwe różne postaci macierzy operacyjnych całkowania, które uogólniają ich tradycyjne sformułowania, i które mają istotny wpływ na dokładność obliczeń. Sformułowano tak zwane modyfikowane macierze operacyjne całkowania, których wpływ na otrzymywane wyniki testowano przy różnych bazach

i różnych stopniach aproksymacji przestrzeni rozwiązań. Testy numeryczne wykonane na przykładowych układach równań różniczkowych ze stałymi i zmiennymi współczynnikami były podstawą do sformułowania wielu wniosków szczegółowych.

Przedstawione wyniki badań uprawniają do sformułowania kilku istotnych, ogólnych spostrzeżeń dotyczących możliwości wykorzystywania falkowych baz pakietowych w numerycznej analizie liniowych zagadnień początkowych.

Można stwierdzić, że:

- wszystkie możliwe falkowe bazy pakietowe Walsha ustalonego rzędu aproksymacji są równoważne w opisie zmiennych stanu liniowych, różniczkowych zagadnień początkowych i na ogół prowadzą do identycznych rezultatów w tym samym czasie,
- metody wykorzystujące falkowe bazy pakietowe Walsha są zbieżne i są metodami o małych błędach metody i błędach całkowitych,
- postać przyjmowanej w obliczeniach macierzy operacyjnej całkowania ma istotny wpływ na dokładność obliczeń; wykorzystanie modyfikowanych macierzy operacyjnych całkowania przy współczynniku $0{,}5 < \gamma \leq 1$ daje – przy porównywalnych czasach obliczeń – na ogół dokładniejsze rozwiązania od wyników analiz z wykorzystaniem dotychczas stosowanych standardowych macierzy operacyjnych,
- przy założonej dokładności obliczeń algorytmy wykorzystujące gęsty podział czasu analizy przy niższym stopniu aproksymacji są na ogół bardziej efektywne od algorytmów przy ograniczonym podziale czasu i przy stosowanych wyższych stopniach aproksymacji.

W rozdziale tym wykorzystano wyniki przedstawione w pracy autora [7.21].

8. Pakiety falkowe Walsha w liniowych zagadnieniach brzegowych

8.1. Wprowadzenie

Zagadnienia brzegowe pojawiają się w wielu problemach współczesnej matematyki stosowanej, fizyki teoretycznej, problemach kontroli i optymalizacji, a przede wszystkim w wielu zadaniach mechaniki. Jeżeli zagadnienia brzegowe nie mogą być rozwiązane analitycznie – co się zwykle zdarza – stosowane są numeryczne metody dyskretne.

Metody dyskretyzacji ciągłych problemów brzegowych można podzielić na techniki wykorzystywane głównie przez matematyków i stosowane bezpośrednio do równań różniczkowych opisujących problem oraz na techniki podziału analizowanego continuum na jego podobszary, które to podejście na ogół stosują inżynierowie.

Do pierwszej z wymienionych technik rozwiązywania zagadnień brzegowych zaliczamy głównie metody różnic skończonych, różne metody residualne i procedury w sposób przybliżony wyznaczające punkty stacjonarności wcześniej zdefiniowanych funkcjonałów. Drugą grupę sposobów analizy zagadnień brzegowych stanowią głównie metoda elementów skończonych i metoda elementów brzegowych.

Do rozwiązywania szerokiego spektrum liniowych problemów brzegowych zostanie wykorzystana metoda residualna z funkcjami bazowymi w postaci falkowych baz pakietowych Walsha, które w przedstawianym tutaj ujęciu nie były dotychczas stosowane. Rezultaty stosowania aproksymacji falkowych w analizie wielu zagadnień technicznych, których modele matematyczne sprowadzają się do zagadnień brzegowych opisywanych równaniami różniczkowymi zwyczajnymi i cząstkowymi oraz równaniami całkowymi, wyczerpująco omówiono w książkach Resnikoffa i Wellsa [1.2] oraz Goswami i Chana [1.8].

Analizę falkową z powodzeniem stosowano też w wielu zagadnieniach współczesnej fizyki, których omówienie można znaleźć w książkach Fanga i Thewsa [8.1] oraz Goedeckera [8.2].

Ostatnio Youhe, Jizeng i Xiaojing [8.3] zastosowali FEM bazującą na metodzie Galekina do analizy zginanej płyty, wykorzystując w rozwinięciach falkowych funkcje skalujące Daubechies. Holmström [8.4] wykorzystał metodę bazującą na trans-

formacji falkowej do rozwiązywania jedno- i dwuwymiarowych zagadnień brzegowych opisywanych hiperbolicznymi równaniami cząstkowymi.

Możliwości wykorzystania rozwinięć falkowych jako funkcji kształtu w sformułowaniach metody elementów skończonych omówili Shaoming i Xiangwei [8.5]. Falki bazujące na wielomianach Legendre'a do rozwiązania zagadnień przepływu ciepła w sformułowaniu wariacyjnym zastosowali Razzaghi i Yousefi [8.6]. Steinberg, McCoy i Mirotznik [8.7] w złożonych zagadnieniach brzegowych zastosowali wielorozdzielczą aproksymację bazującą na rozwinięciach falkowych do rozwiązania zagadnień homogenizacji i analizy modalnej.

Standardowe sformułowanie BEM bazujące na metodzie Galerkina do analizy zagadnienia propagacji fali zastosowali Yu, Mansur, Carrer i Gang [8.8]. Nową klasę falek, tak zwane falki drugiej generacji, Vasilyev i Bowman [8.9] wykorzystali do rozwiązania szeregu równań różniczkowych cząstkowych. Avudainayagam i Vani [8.10] zastosowali bazy falkowe do rozwiązywania równań różniczkowo-całkowych. Efektywny algorytm wykorzystujący ciągłe falki do rozwiązywania całkowych równań drugiego rodzaju metodą Galerkina pokazali Liang, Liu i Che [8.11]. Abe, Koro i Itami [8.12] przedstawili sformułowanie metody brzegowej bazującej na falkach Haara.

Celem rozdziału jest zbudowanie, a następnie zastosowanie algorytmu metody residualnej – wykorzystującej metodę najmniejszych kwadratów – bazującej na pakietowych funkcjach falkowych Walsha do rozwiązywania wielopunktowych zagadnień brzegowych, szczególnie do analizy zagadnień dwupunktowych, do których sprowadza się wiele zadań mechaniki.

W punkcie drugim krótko przedstawiono przegląd metod residualnych najczęściej spotykanych w zagadnieniach mechaniki; w punkcie trzecim omówiono algorytm wykorzystania falkowych baz pakietowych Walsha do rozwiązywania liniowych wielopunktowych zagadnień brzegowych; w punkcie czwartym pokazano przykłady numeryczne wraz z analizą zbieżności i dokładności proponowanego podejścia, a w punkcie piątym podsumowano otrzymane rezultaty oraz sformułowano wnioski ogólne.

8.2. Metody residualne w mechanice

W punkcie tym zostaną przedstawione podstawy metod residualnych stosowanych w mechanice bazujących na – z reguły globalnej – aproksymacji rozwiązań problemu znanymi funkcjami próbnymi. Funkcje te na ogół spełniają rozwiązania równań różniczkowych lokalnie formułujących zagadnienie bądź spełniają warunki brzegowe. Wymagania te nakładane na funkcje próbne mogą być uchylone przy spełnieniu pewnych warunków, które pokrótce zostaną także przedstawione w tym punkcie.

Podstawowym elementem wpływającym na jakość otrzymywanych rozwiązań przy użyciu metod bezpośrednich jest dobór funkcji bazowych (funkcji testujących, funkcji próbnych), które, jak już wspomniano, powinny spełniać szereg kryteriów zapewniających poprawność rozwiązania.

Metody bezpośrednie z reguły formułowane nielokalnie odgrywają podstawową rolę w rozwiązywaniu problemów mechaniki. Sformułowania lokalne metod bezpośrednich w naturalny sposób prowadzą do metody elementów skończonych czy metody elementów brzegowych.

Przy opracowaniu tego punktu wykorzystano materiały zawarte w czterech podstawowych pozycjach literatury z tego zakresu (Reddy [8.13], Oden [8.14], Stakgold [8.15], Pilkey i Wunderlich [8.16]).

Punktem wyjścia do przyjętego tutaj sposobu poszukiwania rozwiązań zagadnień mechaniki będą ich lokalne sformułowania, z reguły w postaci równań różniczkowych. Najogólniej taki opis zagadnień można przedstawić w postaci równań operatorowych typu

$$\mathbf{Lu} = \bar{\mathbf{f}}, \qquad \mathbf{u} \in V \tag{8.1}$$

$$\mathbf{Bu} = \bar{\mathbf{g}}, \qquad \mathbf{u} \in S \tag{8.2}$$

Przez **L** i **B** oznaczono operatory różniczkowe, niekoniecznie liniowe, działające na poszukiwany wektor funkcji **u** o a składowych, przez $\bar{\mathbf{f}}$ i $\bar{\mathbf{g}}$ oznaczono znane, dane (co oznaczono nadkreśleniami) wektory określone wewnątrz analizowanego obszaru V bądź na jego brzegu S.

Równanie (8.1) opisuje lokalnie sformułowany problem, który ma spełniać warunki brzegowe dane równaniami (8.2). Dalej, w niektórych przypadkach, brzeg S rozbijać się będzie na część $\mathbf{S}_u$ i $\mathbf{S}_p$, na których odpowiednio określone będą przemieszczeniowe i siłowe warunki brzegowe.

Rozwiązania **u** zagadnienia danego równaniami (8.1) i (8.2) poszukuje się w postaci jego aproksymacji $\tilde{\mathbf{u}}$, którą można wyrazić jako

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{N}_{\mathbf{u}}(x)\hat{\mathbf{u}} \quad \left(\tilde{u}(x) = \sum_{i=1}^{a} \hat{u}_i N_{ui}(x) \right) \tag{8.3}$$

Przez $\mathbf{N}_{\mathbf{u}}(x)$ oznaczono macierz liniowo niezależnych funkcji próbnych $N_{ui}(x)$, a przez $\hat{\mathbf{u}}$ wektor nieznanych a parametrów $\hat{u}_i$, których wartości poszukujemy żądając, żeby otrzymane rozwiązanie problemu było zadowalające w przyjętym sensie. Funkcje próbne powinny być tak dobierane, żeby zwiększenie ich liczby w opisie zagadnienia prowadziło do poprawy rozwiązania, tj. $\hat{\mathbf{u}} \to \mathbf{u}$ przy $a \to \infty$. Z powyższego wynika, że funkcje próbne powinny tworzyć tak zwany układ zupełny funkcji analizowanego zagadnienia.

Jeżeli operatory zagadnienia (**L**, **B**) zawierają n-tą pochodną, to oczywiście funkcje próbne powinny być $n-1$ ciągle różniczkowalne w obszarze V czy brzegu S.

Metody wykorzystujące aproksymacje dane równaniem (8.3) dzieli się na tak zwane sformułowania wewnętrzne i brzegowe. W sformułowaniach wewnętrznych

zakłada się, że funkcje próbne $N_{ui}(x)$ spełniają warunki brzegowe problemu (8.2) i tym samym rozwiązanie $\hat{\mathbf{u}} \to \mathbf{u}$ poszukiwane jest przez taki dobór wektora $\hat{\mathbf{u}}$, żeby równania różniczkowe (8.1) były spełniane w możliwie najlepszy sposób. Z kolei w sformułowaniach brzegowych zagadnienia zakłada się, że funkcje próbne $N_{ui}(x)$ spełniają różniczkowy opis (8.1), a parametry $\hat{\mathbf{u}}$ dobiera się na bazie żądania najlepszego spełnienia warunków brzegowych (8.2). Trzecią możliwość poszukiwania rozwiązania (8.1) i (8.2) (obok sformułowania wewnętrznego i brzegowego) otrzymujemy, przyjmując taki układ funkcji $N_{ui}(x)$, które nie spełniają ani równań różniczkowych zagadnienia, ani warunków brzegowych i tym samym poszukujemy takiego układu parametrów $\hat{\mathbf{u}}$, który w zadowalający sposób aproksymuje równania (8.1) i (8.2).

Metody bezpośrednie można ogólnie podzielić na metody residualne, omawiane w tym rozdziale, i metody wariacyjne, których krótki opis zamieszczono w rozdziale następnym.

Metody residualne polegają na takim doborze parametrów problemu $\hat{u}_i$, że błąd (pozostałość, residuum) w określonym zbiorze punktów bądź osiąga 0 w uśrednionym sensie, bądź residuum to przyjmuje wartość minimalną. Stosownie do wprowadzonego równaniami (8.1) i (8.2) opisu zagadnienia, można zdefiniować residuum $\mathbf{R}_V$ w obszarze V i residuum $\mathbf{R}_S$ na brzegu S

$$\mathbf{R}_V = \mathbf{L}\tilde{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{f}} \tag{8.4}$$

$$\mathbf{R}_S = \mathbf{B}\tilde{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{g}} \tag{8.5}$$

Oczywiście, dla wspomnianych sformułowań zewnętrznych $\mathbf{R}_S = \mathbf{0}$. Dla takiego doboru funkcji próbnych, w którym spełniają one różniczkowy opis problemu (8.1), tj. przy tak zwanym sformułowaniu wewnętrznym, $\mathbf{R}_V = \mathbf{0}$.

Stosownie do powyższego, metody residualne można podzielić na metody wewnętrzne i metody brzegowe, których formalnym zapisem są następujące równania:

$$\int_V W_j h_1(\mathbf{R}_V) dV = 0, \qquad j = 1, ..., a \tag{8.6}$$

$$\int_S W_j h_2(\mathbf{R}_S) dS = 0, \qquad j = 1, ..., a \tag{8.7}$$

Przez W_j oznaczono wagi albo niezależne funkcje wagowe, a h_1 i h_2 są znanymi funkcjami odpowiednio residuów $\mathbf{R}_V$ i $\mathbf{R}_S$. Liczba a równań (8.6) i (8.7) pozwala na określenie nieznanych, poszukiwanych parametrów $\hat{u}_i$ i tym samym na znalezienie rozwiązania problemu. Zdecydowana większość przytaczanych dalej metod residualnych należy do grupy metod wewnętrznych typu (8.6), których uproszczony zapis – na ogół dalej stosowany – można przyjąć w postaci

$$\int_V \mathbf{W} h(\mathbf{R}) dV = 0 \tag{8.8}$$

Jedno z możliwych podejść wykorzystujących równania (8.8) – nazywane metodą kolokacyjną – polega na arbitralnym doborze a punktów w analizowanym obszarze V i żądaniu znikania residuów w tych punktach. Prowadzi to do a równań algebraicznych na a poszukiwanych parametrów $\hat{u}_i$. Z reguły przyjmuje się, że rozmieszczenie wspomnianych punktów kolokacyjnych jest równomierne w całym analizowanym obszarze V. Jeżeli przyjmiemy, że x_j określa położenie j-tego punktu kolokacyjnego, to formalny zapis tego podejścia w postaci równań typu (8.8) otrzymamy przyjmując $h(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$ oraz funkcje wagowe $\mathbf{W}$ w postaci funkcji Diraca $W_j = \delta(x - x_j)$. Równanie (8.8) przyjmuje postać

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_j) \mathbf{R}(x_j) dx = \mathbf{R}(x_j) = 0, \qquad j = 1, \ldots, a \tag{8.9}$$

Istnieje wiele odmian metod kolokacyjnych (np. tak zwane ortogonalne metody kolokacyjne), różniących się między sobą głównie specyficznym, ułatwiającym rozwiązanie, doborem punktów kolokacyjnych.

Inną metodą bezpośrednią jest metoda najmniejszych kwadratów, która polega na minimalizacji sumy kwadratów residuów w przyjętym zbiorze punktów kolokacyjnych. Formalny zapis tego podejścia można ująć w postaci

$$\sum_{j=1}^{b} R(x_j)^2 \text{ osiąga minimum} \tag{8.10}$$

Oczywiście w tym przypadku liczba punktów kolokacyjnych b nie musi być równa liczbie a poszukiwanych parametrów rozwiązania $\hat{u}_i$. Jeżeli operator $\mathbf{L}$ jest liniowy, sformułowanie (8.10) prowadzi do układu równań algebraicznych otrzymanych przez różniczkowanie $\sum_{j=1}^{b} R(x_j)^2$ po poszukiwanych parametrach $\hat{u}_i$ i przyrównaniu wyników tej operacji do zera.

Przy pewnych formalnych założeniach łatwo pokazać, że metodę najmniejszych kwadratów możemy sprowadzić do klasy tak zwanych metod ortogonalnych, których idea przedstawiona będzie dalej.

Metody bezpośrednie typu mini-max polegają na określeniu poszukiwanych a parametrów $\hat{u}_i$ w taki sposób, żeby maksymalne co do wartości bezwzględnej residuum w przyjętym b-licznym zbiorze punktów kolokacyjnych osiągnęło minimum

$$\max\left|R(x_j)\right| \text{ osiąga minimum}$$

albo

$$\min\max\left|R(x_j)\right| = \min\max\left|R_j\right| \quad j = 1, \ldots, b \tag{8.11}$$

Tak postawione zadanie, po przyjęciu stosownych oznaczeń, łatwo można sprowadzić do postaci standardowego zadania programowania liniowego, polegającego na poszukiwaniu minimum funkcji przy zadanych ograniczeniach.

Metoda podziału na podobszary polega na dowolnym podziale całego analizowanego obszaru na części V_j (części te mogą mieć różne kształty i niekoniecznie muszą się separować bądź przylegać do siebie w sposób ciągły) w takiej liczbie, na którą wskazuje liczba a poszukiwanych parametrów $\hat{u}_i$ i postulowaniu dla każdej z tych części z osobna znikania średniego residuum.

Formalny zapis tego podejścia prowadzi do równań

$$\int_{V_j} \mathbf{R} dV = 0, \quad j = 1, \ldots, a \tag{8.12}$$

które wynikają z ogólnego sformułowania (8.6) po przyjęciu $h_1(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$ oraz $W_j = 1$, jeżeli x należy do j-tego podobszaru (w przeciwnym wypadku $W_j = 0$). Metoda podziału na podobszary prowadzi do układu a równań algebraicznych na poszukiwane parametry zadania.

Metoda Galerkina, podobnie jak na przykład dalej omawiana metoda momentów, należy do podejść bazujących na postulowaniu ortogonalności określonych wektorów (z reguły macierzy $\mathbf{\Psi}$ funkcji liniowo niezależnych i wektora residuów $\mathbf{R}$). Ogólny zapis tak formułowanych podejść można przedstawić jako

$$\int_V \mathbf{\Psi R}\, dV = 0 \tag{8.13}$$

Jeżeli przyjmiemy, że elementami diagonalnej macierzy $\mathbf{\Psi}$ są funkcje próbne N_{ui} w liczbie a poszukiwanych parametrów $\hat{u}_i$, to z ogólnego sformułowania (8.13) otrzymujemy tak zwaną metodę Galerkina (Bubnova–Galerkina). Stanowi ona układ a równań algebraicznych w postaci

$$\int_V N_{ui} R dV = 0, \quad i = 1, \ldots, a \tag{8.14}$$

Funkcje próbne N_{ui} powinny spełniać wszystkie warunki brzegowe. Metoda Galerkina jest najczęściej stosowanym podejściem z klasy ważonych metod residualnych.

Elementami diagonalnymi wspomnianej wyżej macierzy $\mathbf{\Psi}$ mogą być kolejne funkcje tworzące zbiór zupełny; mogą to być zbiory wielomianów, funkcji trygonometrycznych, albo np. wielomiany Czebyszewa. Jeżeli przyjąć, że elementami Ψ_j macierzy $\mathbf{\Psi}$ są wielomiany w postaci $\Psi_j = x^{j-1}$, $j = 1,..., b$, to z ogólnego sformułowania (8.13) otrzymujemy tak zwaną metodę momentów. Oczywiście w pierwszym przybliżeniu, przy $j = 1$ mamy $\Psi_1 = 1$ i metoda momentów jest identyczna z metodą wykorzystującą podział na podobszary przy założeniu, że w tym przypadku podobszar jest tożsamy z całym analizowanym obszarem.

Wykorzystując ogólne sformułowanie (8.8), zakładając, że $h(\mathbf{R}) = \mathbf{R} = \mathbf{L}\tilde{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{f}}$ i wykonując całkowanie przez części, otrzymujemy alternatywne, tak zwane słabe sformułowania ważonych metod residualnych

$$\int_V (\mathbf{W}\mathbf{L}\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{W}\bar{\mathbf{f}})dV = \int_V \mathbf{L}^1\mathbf{W}\mathbf{L}^2\tilde{\mathbf{u}}\,dV + \int_S \mathbf{L}^3\mathbf{W}\mathbf{L}^4\tilde{\mathbf{u}}\,dS - \int_V \mathbf{W}\bar{\mathbf{f}}\,dV \tag{8.15}$$

Przez $\mathbf{L}^1$, $\mathbf{L}^2$, $\mathbf{L}^3$ i $\mathbf{L}^4$ oznaczono operatory różniczkowe.

W sformułowaniu (8.15) z reguły operatory działające na $\tilde{\mathbf{u}}$ ($\mathbf{L}^2$ i $\mathbf{L}^4$) są niższego rzędu niż operator $\mathbf{L}$ i tym samym mogą być osłabione (stąd też nazwa tego typu sformułowań) warunki określające ciągłość funkcji $\tilde{\mathbf{u}}$. Osłabienie tych warunków ułatwia dobór funkcji aproksymujących, choć jednocześnie należy zauważyć, że operatory $\mathbf{L}^1$ i $\mathbf{L}^3$ narzucają warunki ciągłości funkcji wagowych $\mathbf{W}$. Po prawej stronie równania (8.15) pojawiają się człony określone na brzegu S, co z reguły komplikuje otrzymywane równania; jeżeli przyjmiemy, że funkcje W_j i funkcje próbne spełniają warunki brzegowe, to człony te znikają.

Przedstawione ważone metody residualne prowadzą z reguły (z wyjątkiem tak zwanych sformułowań „kwadratowych", do których należy np. metoda najmniejszych kwadratów) do niesymetrycznych układów równań algebraicznych na poszukiwane parametry $\hat{u}_i$.

8.3. Sformułowanie zagadnienia brzegowego

Rozpatrzmy wielopunktowe zagadnienie brzegowe

$$\begin{aligned} &\dot{\mathbf{u}}(x) = \mathbf{A}(x)\mathbf{u}(x) + \mathbf{B}(x)\mathbf{f}(x), \qquad x \in \langle 0,1 \rangle \\ &\tilde{u}_j(0) = u_{j,0} + \sum_{i=1}^{s-1} \lambda_i u_j(\xi_i), \qquad \tilde{u}_k(1) = u_{k,1} + \sum_{i=1}^{t-1} \delta_i u_k(\xi_i) \end{aligned} \tag{8.16}$$

gdzie $\mathbf{u}(x) \in R^n$ jest wektorem n zmiennych stanu u_i, wektor $\mathbf{f}(x)$ o r składowych reprezentuje dane, dowolne wymuszenie, macierze $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ są znanymi, odpowiednio

o wymiarach $n \times n$ i $n \times r$ macierzami współczynników, które mogą zależeć od zmiennej niezależnej x. Kropką oznaczono pochodną wektora **u** po zmiennej niezależnej x.

Warunki brzegowe na końcach przedziału $(\tilde{u}_j(0), \tilde{u}_k(1))$ w liczbie $n = j + k$ sformułowano jako wielkości, które mogą być nie tylko zadane stałymi $(u_{j,0}, u_{k,1})$, ale także mogą być liniowymi funkcjami zmiennych stanu określonych dla $\xi_i \in (0,1)$ i $\eta_i \in (0,1)$ i stałych dowolnych λ_i i δ_i.

Tak postawione zagadnienie zgodnie z konwencją przyjętą na przykład w pracy Liu [8.17] można nazwać $(s + t)$-punktowym problemem brzegowym (warunki brzegowe zagadnienia zależą od punktu początkowego ($x = 0$), końcowego ($x = 1$) oraz od $s - 1$ punktów ξ_i i $t - 1$ punktów η_i).

Każde wielopunktowe zagadnienie brzegowe opisane równaniem różniczkowym wysokiego stopnia może być zredukowane do układu równań różniczkowych rzędu pierwszego ze stosownym zbiorem warunków brzegowych.

Załóżmy, że mamy dowolną, falkową pakietową bazę Walsha reprezentowaną przez macierz $\mathbf{H}(x)$ o wymiarach $m \times m$, gdzie parametr $m = 2^J$ nazywamy stopniem aproksymacji. Macierz $\mathbf{H}(x)$ może reprezentować bazę Haara, Walsha albo inną dowolną bazę pakietową zdefiniowaną dla $x \in \langle 0,1 \rangle$.

Załóżmy, że wektor zmiennych stanu $\mathbf{u}(x)$ przedstawiamy w bazie $\mathbf{H}(x)$

$$\mathbf{u}(x) = \mathbf{F}\mathbf{H}(x) \tag{8.17}$$

gdzie przez **F** oznaczono poszukiwaną macierz o wymiarach $n \times m$. Przyjęcie rozwinięcia (8.17) umożliwi algebraizację analizowanego układu równań różniczkowych; w przypadku tutaj rozpatrywanych liniowych równań różniczkowych otrzymany układ równań algebraicznych określających współczynniki f_{ij} macierzy **F** będzie układem liniowym.

Zależne od x $\mathbf{A}(x)$ i $\mathbf{B}(x)\mathbf{f}(x)$ występujące w równaniu (8.16) można przedstawić w postaci następujących szeregów:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(x) &= \sum_{i=1}^{p} \mathbf{A}_i \alpha_i(x), \qquad p \le n^2 \\ \mathbf{B}(x)\mathbf{f}(x) &= \sum_{j=1}^{q} \mathbf{b}_j \beta_j(x), \quad q \le n \end{aligned} \tag{8.18}$$

gdzie $\mathbf{A}_i$ i $\mathbf{b}_j$ są odpowiednio stałą macierzą o wymiarach $n \times n$ i stałym wektorem o n składowych, a $\alpha_i(x)$ i $\beta_j(x)$ są skalarnymi funkcjami. Przez p i q oznaczono odpowiednio liczbę zależnych od x elementów macierzy $\mathbf{A}(x)$ i iloczynu $\mathbf{B}(x)\mathbf{f}(x)$.

Po wykorzystaniu (8.18) równanie (8.16) przyjmie następującą postać:

$$\dot{\mathbf{u}}(x)=\sum_{i=1}^{p}\mathbf{A}_i\alpha_i(x)\mathbf{u}(x)+\sum_{j=1}^{q}\mathbf{b}_j\beta_j(x)$$

$$\widetilde{u}_j(0)=u_{j,0}+\sum_{i=1}^{s-1}\lambda_i u_j(\xi_i),\qquad \widetilde{u}_k(1)=u_{k,1}+\sum_{i=1}^{t-1}\delta_i u_k(\eta_i) \tag{8.19}$$

Jeżeli w bazie $\mathbf{H}(x)$ przedstawimy funkcje $\alpha_i(x)$ i $\beta_j(x)$

$$\alpha_i(x)=\mathbf{d}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{H}(x)$$

$$\beta_j(x)=\mathbf{e}_j^{\mathrm{T}}\mathbf{H}(x) \tag{8.20}$$

to po scałkowaniu równania (8.19) i uwzględnieniu (8.17) i (8.20) otrzymamy

$$\mathbf{F}\mathbf{H}(x)-\left[\underbrace{\mathbf{u}_0,\cdots,\mathbf{u}_0}_{t},\mathbf{0},\cdots,\mathbf{0}\right]\mathbf{H}(x)$$

$$=\sum_{i=1}^{p}\mathbf{A}_i\mathbf{F}\int_0^x\mathbf{H}(x)\mathbf{H}^{\mathrm{T}}(x)\mathbf{d}_i\,dx+\sum_{j=1}^{q}\mathbf{b}_j\int_0^x\mathbf{e}_j^{\mathrm{T}}\mathbf{H}(x)\,dx \tag{8.21}$$

gdzie przez $\mathbf{d}_i$ i $\mathbf{e}_j$ oznaczono odpowiednio wektory współczynników rozwinięć w bazie $\mathbf{H}(x)$ funkcji α_i i β_j. Przez $\mathbf{u}_0$ oznaczono tutaj nieznany wektor stanu początkowego $\mathbf{u}_0=\mathbf{u}(0)$, który zgodnie z (8.17) jest liniową funkcją współczynników szukanej macierzy $\mathbf{F}$. Liczba t niezerowych kolumn macierzy po lewej stronie równania (8.21) zależy od przyjętego stopnia aproksymacji m i przyjętej bazy $\mathbf{H}(x)$. Dla bazy Haara i Walsha $t=1$, a w pozostałych możliwych przypadkach wyboru bazy t jest równe liczbie funkcji bazowych podprzestrzeni V_l w dekompozycji przestrzeni V ($V=V_l\oplus\ldots$).

Pierwszy składnik prawej strony równania (8.21) zawiera całkę $\int_0^x\mathbf{H}(x)\mathbf{H}^{\mathrm{T}}(x)\mathbf{d}_i dx$, która po rozwinięciu w bazie $\mathbf{H}(x)$ wyrażenia podcałkowego

$$\mathbf{H}(x)\mathbf{H}^{\mathrm{T}}(x)\mathbf{d}_i=\mathbf{D}_i\mathbf{H}(x) \tag{8.22}$$

może być zapisana jako $\mathbf{D}_i\int_0^x\mathbf{H}(x)dx$. Dalej przyjmujemy, że $\int_0^x\mathbf{H}(x)dx\cong\mathbf{P}\,\mathbf{H}(x)$, gdzie $\mathbf{P}$ jest macierzą operacyjną całkowania, której różne postacie przedstawiono w rozdziale poprzednim.

Jak wiadomo (Pilkey i Wunderlich [8.16], Zienkiewicz i Taylor [8.18], Flecher [8.19]), rozwiązanie zagadnienia brzegowego (8.16) w zależności od przyjętych funkcji bazowych $\mathbf{H}(x)$ (8.17) może prowadzić do trzech możliwych – wcześniej wspomnianych – przypadków. Pierwszy z nich występuje wtedy, kiedy przyjęte funkcje bazowe spełniają warunki brzegowe, lecz nie spełniają równań różniczkowych. Z drugim przypadkiem mamy do czynienia wtedy, kiedy przyjęte funkcje bazowe spełniają równania różniczkowe, ale nie spełniają warunków brzegowych. Trzeci przypadek jest najczęściej spotykany i występuje wtedy, kiedy zarówno równania różniczkowe, jak i warunki brzegowe nie są spełnione przez funkcje bazowe. W takiej sytuacji należy poszukiwać rozwiązania, które w przybliżony sposób spełnia zarówno równania, jak i narzucone warunki brzegowe. Przyjęte tutaj falkowe bazy pakietowe Walsha nie spełniają ani równań różniczkowych, ani warunków brzegowych i oczywiście mamy do czynienia z trzecim z omówionych wyżej przypadków.

Dalej wykorzystana zostanie pewna odmiana metody kolokacyjnej, w której residua dla każdego z równań opisujących zagadnienie i warunków brzegowych liczone będą w równoodległych punktach kolokacyjnych, zgodnie z przyjętym, wcześniej zdefiniowanym stopniem aproksymacji m.

Residuum $\mathbf{R}_V$ i $\mathbf{R}_S$ niespełnienia równań (8.19) po uwzględnieniu (8.21) i (8.22) można przedstawić jako

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_V &= \left\{\mathbf{F} - \left[\underbrace{\mathbf{u}_0,\cdots,\mathbf{u}_0}_{t},\mathbf{0},\cdots,\mathbf{0}\right] - \sum_{i=1}^{p}\mathbf{A}_i\mathbf{F}\mathbf{D}\mathbf{P} - \sum_{j=1}^{q}\mathbf{b}_j\mathbf{e}_j^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\right\}\mathbf{H}(x) \\
&= \begin{bmatrix} r_{10} & r_{11} & \cdots & r_{1(m-1)} \\ r_{20} & r_{21} & \cdots & r_{2(m-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{n0} & r_{n1} & \cdots & r_{n(m-1)} \end{bmatrix} \\
\mathbf{R}_S &= \mathbf{u}(x) - \tilde{\mathbf{u}}\big|_{x=0,1} = \left[(\mathbf{u}_0 - \tilde{\mathbf{u}}(0)),\underbrace{\mathbf{0},\ldots,\mathbf{0}}_{m-2},(\mathbf{u}_{m-1} - \tilde{\mathbf{u}}(1))\right] \\
&= \begin{bmatrix} \tilde{r}_{10} & 0 & \cdots & \tilde{r}_{1(m-1)} \\ \tilde{r}_{20} & 0 & \cdots & \tilde{r}_{2(m-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \tilde{r}_{n0} & 0 & \cdots & \tilde{r}_{n(m-1)} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{8.23}$$

gdzie przez r_{ij} oznaczono residuum w punkcie kolokacyjnym j równania i, a przez $\tilde{r}_{ij}$ – residuum warunku brzegowego równania i w punkcie j ($j = 0$ albo $j = m - 1$).

Oczywiście przy takim doborze funkcji bazowych, które spełniają na przykład warunki brzegowe wszystkie elementy macierzy $\mathbf{R}_S$ są zerami. Należy podkreślić, że zarówno elementy r_{ij}, jak i $\tilde{r}_{ij}$ są liniowymi funkcjami współczynników f_{ij} poszukiwanej macierzy $\mathbf{F}$. W zagadnieniach wielopunktowych elementy $\tilde{r}_{ij}$ są funkcjami tych współczynników macierzy $\mathbf{F}$, które opisują stan badanego układu na brzegu oraz w punktach ξ_i i η_i.

Żądanie minimalizacji sumy kwadratów residuów prowadzi do nadokreślonego układu równań postaci

$$\frac{\partial\left(\mathbf{R}_V^2+\mathbf{R}_S^2\right)}{\partial \mathbf{F}}=[\mathbf{0}] \Rightarrow \mathbf{G}\begin{bmatrix}\mathbf{f}_1^{\mathrm{T}}\\ \mathbf{f}_2^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \mathbf{f}_n^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}=\mathbf{W} \tag{8.24}$$

gdzie przez $\mathbf{G}$, $\mathbf{W}$ i $\mathbf{f}_i$ oznaczono odpowiednio macierz współczynników układu równań o wymiarze $z(nm)$, wektor wyrazów wolnych o wymiarze $z\cdot 1$ oraz i-ty wiersz macierzy niewiadomych $\mathbf{F}$.

Takie podejście do zagadnienia prowadzi, jak już wspomniano, do nadokreślonego ($z>(nm)$) układu równań, którego rozwiązania poszukuje się metodą najmniejszych kwadratów, co daje następujący układ równań na poszukiwane niewiadome f_{ij}:

$$\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}\begin{bmatrix}\mathbf{f}_1^{\mathrm{T}}\\ \mathbf{f}_2^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \mathbf{f}_n^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}=\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\mathbf{W} \tag{8.25}$$

Układ ten będzie stanowić podstawę realizacji numerycznych, prezentowanych w kolejnym punkcie tego rozdziału.

8.4. Przykłady numeryczne

Przedstawiony w poprzednim punkcie algorytm numeryczny testowano na wielu zagadnieniach brzegowych, opisywanych równaniami zwyczajnymi do czwartego rzędu włącznie. Dalej podano przykładowe wyniki analizy nietrywialnego zagadnienia dwupunktowego z periodycznymi warunkami brzegowymi i wielopunktowego zagadnienia brzegowego, które sprowadza się do zadania brzegowego pięciopunktowego. Skuteczność proponowanego algorytmu pokazano na przykładach rozwiązań wielu zadań z mechaniki.

Rozpatrzmy dwupunktowe zagadnienie brzegowe opisane równaniem różniczkowym rzędu drugiego z periodycznymi warunkami brzegowymi

$$y''(x)-y(x)-\sin(2\pi x)\left(-1-4\pi^2\right)\left(x^3-\frac{4}{3}x^2+\frac{x}{3}\right)-\left(6x-\frac{8}{3}\right)\sin(2\pi x)$$

$$-4\pi\cos(2\pi x)\left(3x^2-\frac{8}{3}x+\frac{1}{3}\right)=0 \qquad (8.26)$$

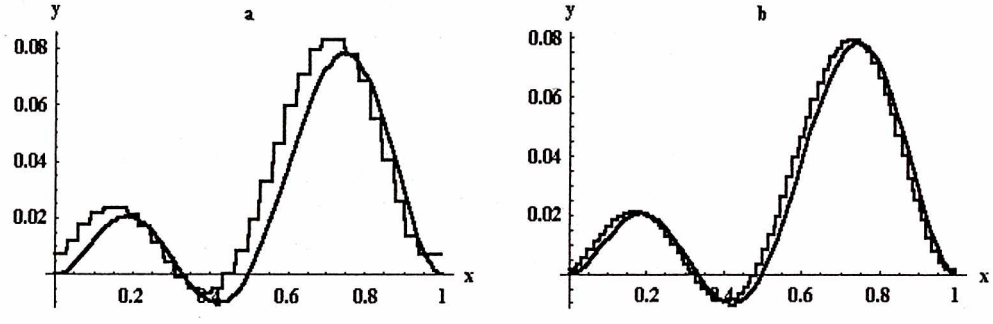
$$y(0)=y(1)$$

$$y'(0)=y'(1)$$

którego ścisłe rozwiązanie (Ciarlet, Schultz i Varga [8.20]) ma postać

$$y(x)=\left(x^3-\frac{4}{3}x^2+\frac{x}{3}\right)\sin(2\pi x) \qquad (8.27)$$

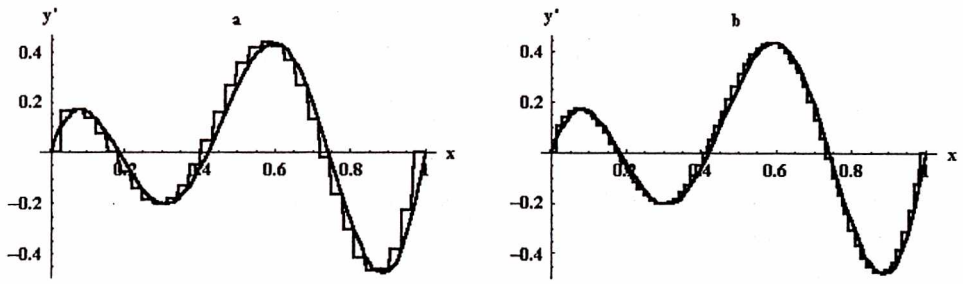
Numeryczne rozwiązanie zagadnienia (8.26) pokazali Katti, Baboo i Sivaloganathan [8.21], stosując metodę różnic skończonych.



Rys. 8.1. Rozwiązanie ścisłe (linia ciągła) i rozwiązanie numeryczne (linia odcinkowo stała) zmiennej $y(x)$ równania (8.26) przy $m = 32$ (a) i $m = 64$
Fig. 8.1. Exact solution (solid line) and numerical solution (piecewise constant line) of variable $y(x)$ in equation (8.26) for $m = 32$ (a) and $m = 64$

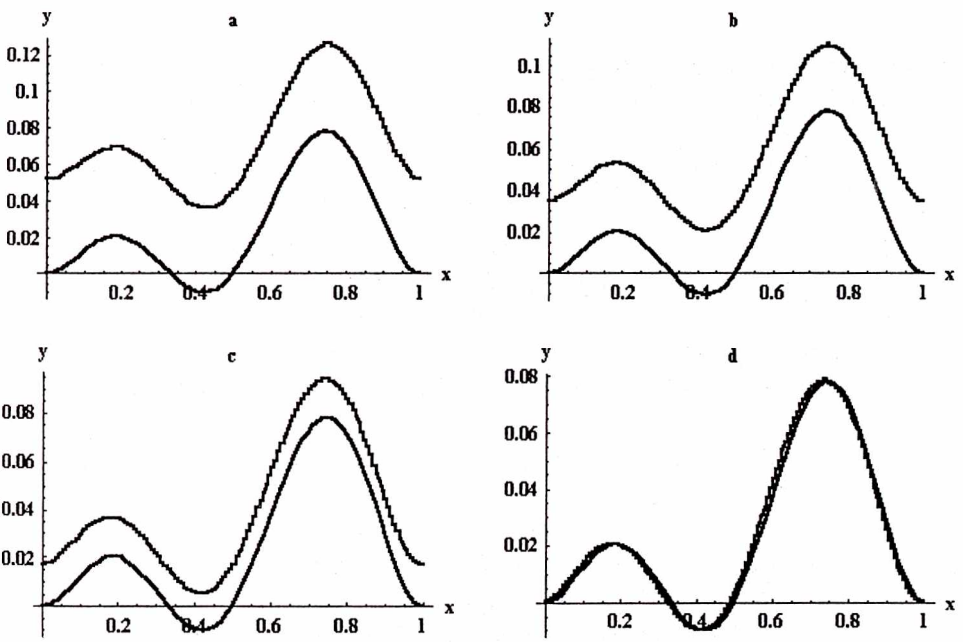
Na rysunku 8.1 na tle rozwiązania ścisłego (8.27), które oznaczono linią ciągłą, pokazano odcinkowo stałe rozwiązania, uzyskane przy różnym stopniu aproksymacji m i współczynniku $\gamma = 1$ określającym postać modyfikowanej macierzy operacyjnej. Na rysunkach 8.1a i 8.1b pokazano odpowiednio rozwiązania przy $m = 32$ i $m = 64$.

Przyjmując takie same parametry jak na rys. 8.1, na rys. 8.2 pokazano pochodne rozwiązania ścisłego (8.27). Jak widać, nawet przy niezbyt dużym stopniu aproksymacji m wyniki analizy są zadowalające.



Rys. 8.2. Rozwiązanie ścisłe (linia ciągła) i rozwiązanie numeryczne (linia odcinkowo stała) zmiennej $y'(x)$ równania (8.26) przy $m = 32$ (a) i $m = 64$
Fig. 8.2. Exact solution (solid line) and numerical solution (piecewise constant line) of variable $y'(x)$ in equation (8.26) for $m = 32$ (a) and $m = 64$

Zależność uzyskiwanych rozwiązań $y(x)$ od wartości parametru γ odpowiedzialnego za postać macierzy **P** pokazano na rys. 8.3a–d odpowiednio dla $\lambda = 0{,}25$, $\lambda = 0{,}5$, $\lambda = 0{,}75$ i $\lambda = 1{,}0$ przy $m = 128$.



Rys. 8.3. Rozwiązanie $y(x)$ równania (8.26) przy $\gamma = 0{,}25$ (a), $\gamma = 0{,}5$ (b), $\gamma = 0{,}75$ (c) i $\gamma = 1$ (d)
Fig. 8.3. Solution $y(x)$ of equation (8.26) for $\gamma = 0.25$ (a), $\gamma = 0.5$ (b), $\gamma = 0.75$ (c) and $\gamma = 1$ (d)

W tabeli 8.1 zestawiono (przy różnych parametrach m i γ) względną odchyłkę mocy Δ (wyrażoną w %) rozwiązania ścisłego i rozwiązania tutaj otrzymywanego w całym przedziale analizy, którą zdefiniowano podobnie jak w rozdziale 7.

$$\Delta = \left(\sum_{j=1}^{m} \left| y_j^e - y_j^a \right|^2 / \sum_{j=1}^{m} \left| y_j^e \right|^2 \right) \cdot 100\% \tag{8.28}$$

gdzie przez y_j^e i y_j^a oznaczono wartości $y(x)$ w j-tym centralnym punkcie analizowanego odcinka, odpowiednio dla rozwiązania ścisłego i rozwiązania numerycznego tutaj otrzymywanego.

Tabela 8.1. Względna odchyłka mocy Δ rozwiązania ścisłego i numerycznego w funkcji parametrów m i γ

Table 8.1. Relative percentage power Δ of the difference between exact and numerical solution as a function of m and γ parameters

m	Δ [%]		
	$\gamma = 0{,}8$	$\gamma = 0{,}9$	$\gamma = 1{,}0$
32	194,037	59,548	6,00746
64	50,1286	14,1960	1,24086
128	12,7094	3,4592	0,29787

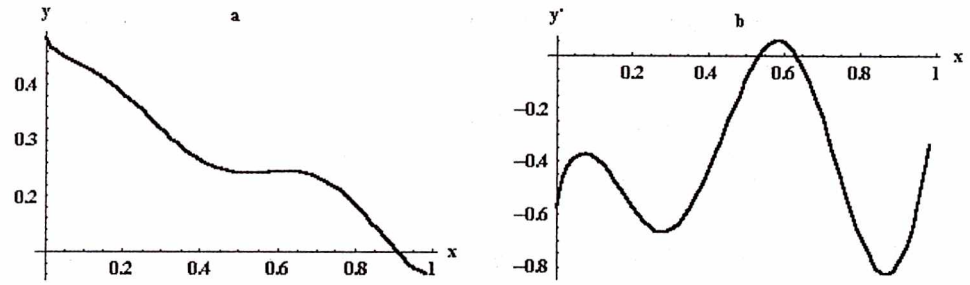
Rozwiązania, których wyniki pokazano wyżej, uzyskano wykorzystując bazę pakietową typu B_1. Zastosowanie w obliczeniach innych baz pakietowych, w tym klasycznej bazy Haara czy Walsha, prowadzi do tych samych rezultatów. Od przyjętej bazy zależy wymiar macierzy **G** ($z(nm)$) równania (8.25). I tak przy dyskretyzacji $m = 128$ i bazie B_1 dla równania (8.26) $z = 9468$, a przy bazie Walsha B_7 ($m = 2^7$), $z = 54\ 614$, co ma istotny wpływ na czas trwania analizy. Duża liczba równań przy wykorzystaniu bazy Walsha wynika z tego, że dziedziny wszystkich tego typu funkcji bazowych obejmują cały analizowany przedział zmiennej x.

W rozwiązaniach zagadnień brzegowych wpływ parametru γ odpowiedzialnego za postać macierzy operacyjnej **P** jest bardziej istotny niż w rozwiązaniach zagadnień początkowych. Zwykle w literaturze stosowane macierze operacyjne przy $\gamma = 0{,}5$ prowadzą w rozwiązaniach nietrywialnych zagadnień brzegowych do niezadowalających rezultatów, choć w przypadku prostych warunków brzegowych otrzymywane wyniki można uznać za dopuszczalne. Z przeprowadzonych testów numerycznych jednoznacznie wynika, że najlepsze rezultaty numeryczne uzyskuje się, gdy $\gamma = 1$.

Rozwiążmy równanie różniczkowe zagadnienia (8.26) z przykładowymi wielopunktowymi warunkami brzegowymi w postaci:

$$\begin{aligned} y(1) &= 2y(0{,}25) - 3y(0{,}75) \\ y'(0) &= 4y'(0{,}5) \end{aligned} \tag{8.29}$$

czyli tutaj przy warunkach (8.29) pięciopunktowe zagadnienie brzegowe.



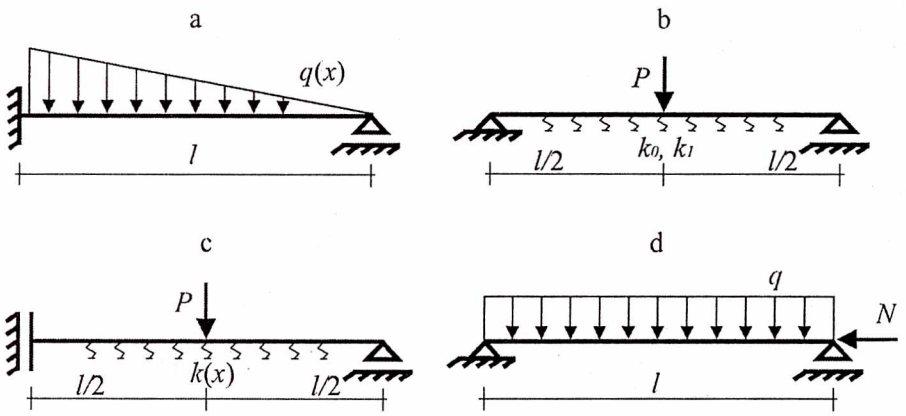
Rys. 8.4. Rozwiązanie $y(x)$ (a) i $y'(x)$ (b) równania (8.26) z warunkami brzegowymi (8.29) przy $m = 64$
Fig. 8.4. Solutions $y(x)$ (a) and $y'(x)$ (b) of equation (8.26) with boundary conditions (8.29) for $m = 64$

Na rysunkach 8.4a i 8.4b pokazano odpowiednio rozwiązania w zakresie poszukiwanej funkcji i jej pochodnej, uzyskane przy $m = 64$. Tym razem rozwiązania przedstawiono linią ciągłą, łącząc środki m odcinków podziału analizowanego przedziału. Jak łatwo sprawdzić, narzucone warunki brzegowe zostały spełnione idealnie:

$$y'(0) = 4y'(0{,}5) = -0{,}582152$$

oraz

$$y(1) = 2y(0{,}25) - 3y(0{,}75) = 2 \cdot 0{,}36464 - 3 \cdot 0{,}223327 = 0{,}0592979$$



Rys. 8.5. Schematy statyczne analizowanych zadań
Fig. 8.5. Static schemes of considered problems

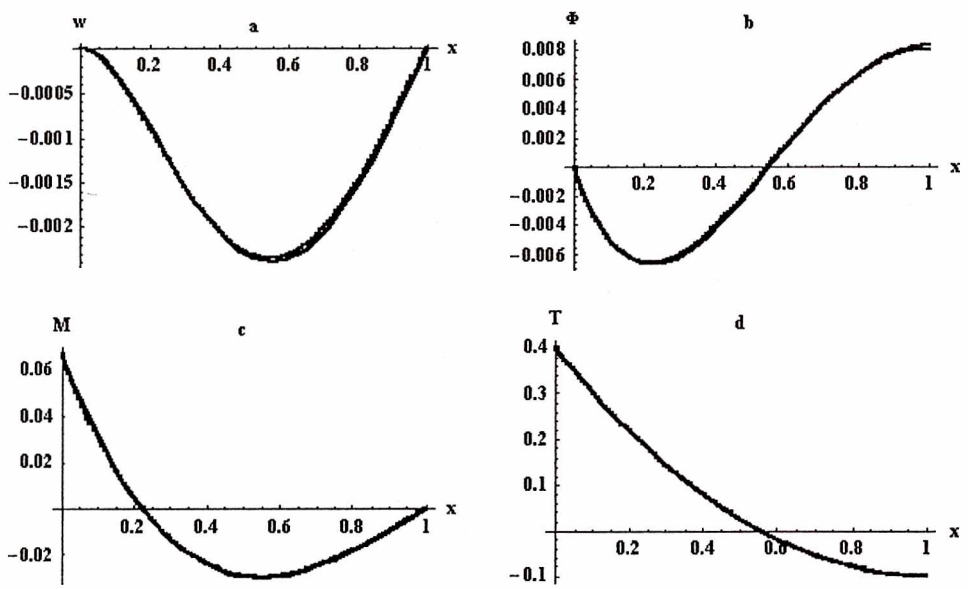
Rozwiązania te uzyskano wykorzystując bazę pakietową typu B_1, której funkcje bazowe charakteryzują się tym, że ich dziedzina określoności jest najmniejsza spośród wszystkich możliwych kombinacji pakietowych funkcji bazowych.

Na rysunku 8.5 pokazano schematy statyczne szeregu zadań z mechaniki, których rozwiązania w zakresie przemieszczeń, sił wewnętrznych i obciążeń krytycznych można uzyskać za pomocą przedstawionego algorytmu.

Dwupunktowe zagadnienia brzegowe, których schematy przedstawiono na rys. 8.5, można opisać równaniem:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2}\right)+N\frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2}+k_0 w(x)-k_1\frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2}=q(x) \tag{8.30}$$

gdzie $w(x)$ jest przemieszczeniem, E jest modułem Younga, I jest momentem bezwładności przekroju poprzecznego, N jest stałą, ściskającą siłą osiową, k_0 i k_1 są stałymi określającymi dwuparametrowe podłoże sprężyste, a $q(x)$ jest obciążeniem rozłożonym. Działanie siły skupionej P zastępuje się równoważnym sile obciążeniem równomiernie rozłożonym na odcinku l/m tak, że $P=ql/m$. Działanie momentu skupionego zastępuje się parą sił, realizowaną przez obciążenie równomiernie rozłożone o przeciwnych zwrotach, przyłożone do dwóch sąsiednich odcinków podziału o długości l/m każdy.



Rys. 8.6. Rozwiązania ścisłe (linia ciągła) i numeryczne (linia odcinkowo stała) ugięcia w (a), obrotów Φ (b), momentów zginających M (c) i sił tnących T (d) belki o schemacie z rys. 8.5a przy $m = 128$
Fig. 8.6. Exact solution (solid line) and numerical solution (piecewise constant line) for: deflection w (a), rotations Φ (b), bending moments M (c) and shear forces T (d) of beam whose static scheme is shown in Fig. 8.5a

Równanie (8.30) należy uzupełnić stosownymi do schematu warunkami brzegowymi.

Dalej przyjęto, co nie ogranicza ogólności rozwiązań a umożliwia uniknięcie przy opisie rysunków wymiarowych mnożników, że $EI=1, l=1, P=1$, $q(x)=(1-x)$, a także

$k_0 = k_1 = 30$, $k(x) = 50(x-0{,}5)^2$, $q = 1$. W opisie osi na prezentowanych rysunkach przez Φ oznaczono kąt obrotu, przez M moment zginający, a przez T siłę tnącą.

Warunki brzegowe belki o schemacie jak na rys. 8.5a można zapisać jako $w(0) = w'(0) = 0$ i $w(1) = w''(1) = 0$. Na rysunkach 8.6a, b, c, d przedstawiono rozwiązania tej belki odpowiednio w zakresie przemieszczeń, kątów obrotu, momentów zginających i sił tnących. W obliczeniach przyjęto, że $m = 128$. Rozwiązanie odcinkowo stałe pokazano na tle rozwiązań ścisłych (Pilkey i Wunderlich [8.16]), przedstawionych linią ciągłą.

Załóżmy, że zbiór funkcji aproksymacyjnych stanowi baza Haara przy $m = 128$. Jak wiadomo, poszukiwane zmienne stanu badanego układu spełniają relację (2.18) i tym samym ich aproksymacje (tutaj do poziomu rozdzielczości $J = 2$) poprzez uwzględnianie kolejnych poziomów przybliżeń powinno skutkować sukcesywną poprawą wyników. Na rysunkach 8.7–8.10 pokazano, na tle rozwiązań ścisłych oznaczonych liniami ciągłymi, odcinkowo stałe aproksymacje odpowiednio ugięć, kątów obrotu, momentów i sił tnących przy $J = 1$ (a), $J = 2$ (b), $J = 3$ (c) i $J = 4$ (d) na każdym z tych rysunków. Dla $J = 7$ rozwiązania te pokazano na rys. 8.6.

Na dalszych rysunkach linią ciągłą pokazano rozwiązania uzyskiwane przy zastosowaniu przedstawionego algorytmu. Na rysunkach 8.11a, b, c, d w identycznym układzie jak na rys. 8.6, pokazano rozwiązania belki o schemacie na rys. 8.5b z warunkami brzegowymi w postaci $w(0) = w''(0) = w(1) = w''(1) = 0$. Wyniki uzyskano przy $m = 64$.

Na rysunkach 8.16a, b, c, d przedstawiono rozwiązania, przy $m = 32$, belki o schemacie danym na rys. 8.5c, której warunki brzegowe mają postać $w'(0) = w'''(0) = 0$ i $w(1) = w''(1) = 0$. Belka ta spoczywa na jednoparametrowym podłożu sprężystym o zadanym rozkładzie $k(x)$.

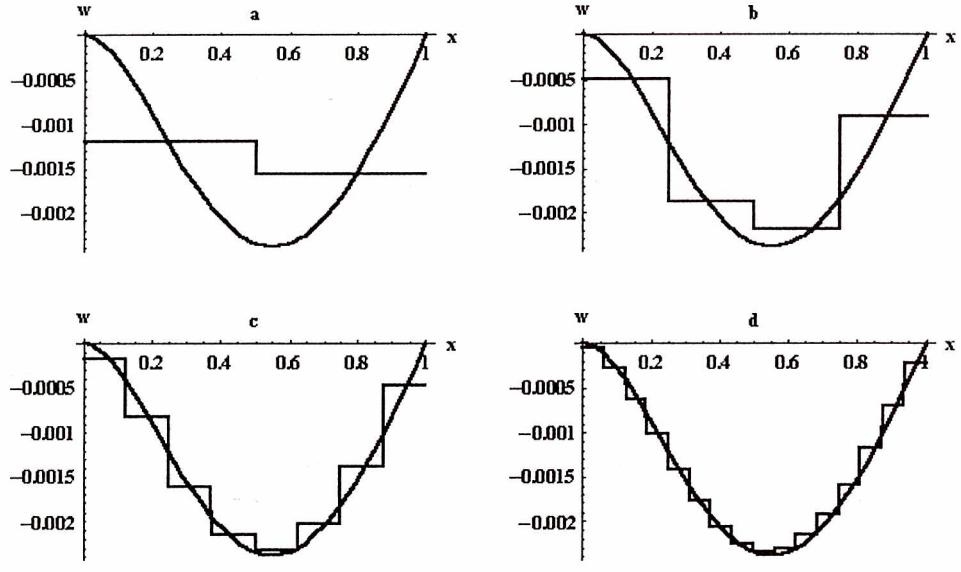
Stosując przedstawiony algorytm, można znaleźć także obciążenia krytyczne. W zadaniu, którego schemat pokazano na rys. 8.5d, wyznaczono (przy $m = 64$) pierwsze i drugie obciążenie krytyczne:

$$N^{I}_{cr,a} = 9{,}875\,EI/l^2 \quad \text{i} \quad N^{II}_{cr,a} = 39{,}725\,EI/l^2$$

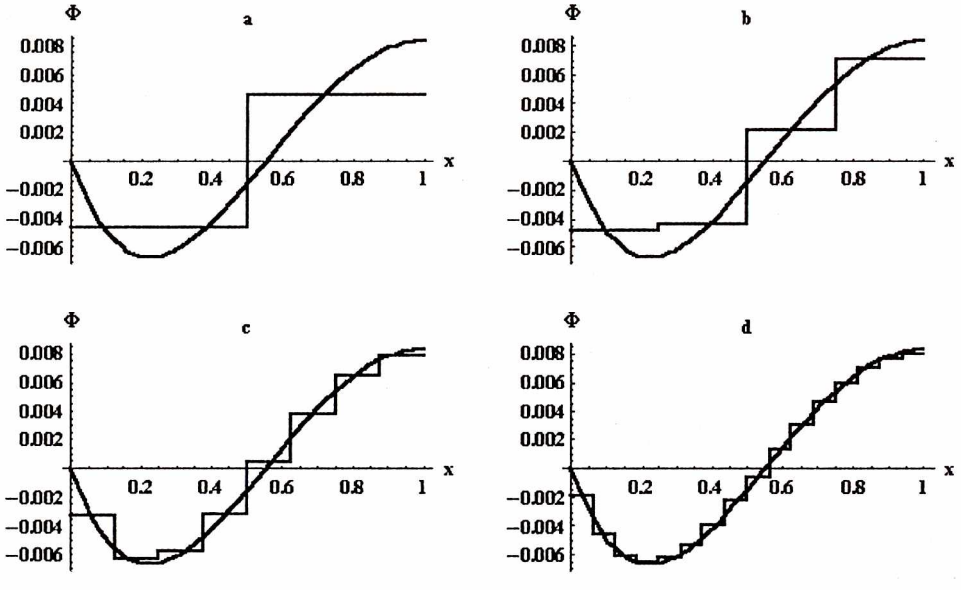
które odpowiadają niemal dokładnie rozwiązaniom teoretycznym:

$$N^{I}_{cr,e} = \pi^2 EI/l^2 \cong 9{,}869\,EI/l^2 \quad \text{i} \quad N^{II}_{cr,e} = 4\pi^2 EI/l^2 \cong 39{,}478\,EI/l^2$$

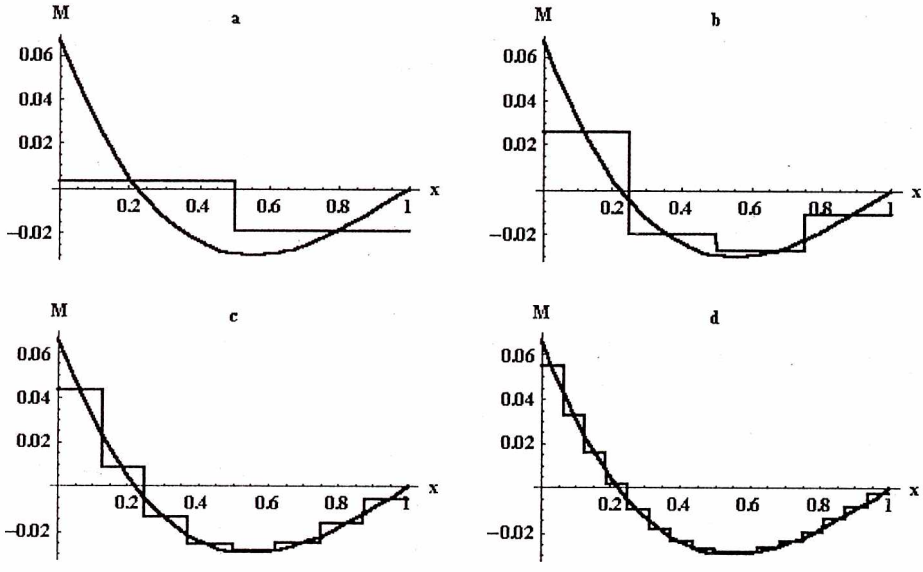
Oznaki utraty stateczności belki można znaleźć, analizując liczbę uwarunkowania macierzy $\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}$ występującej w równaniu (8.25), a także obserwując stan przemieszczenia belki. Na rysunkach 8.13a i 8.13b pokazano wartości liczby uwarunkowania (w opisie osi oznaczanym jako Cond) macierzy $\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}$, który to współczynnik osiąga lokalne ekstrema odpowiednio przy pierwszym i drugim obciążeniu krytycznym.



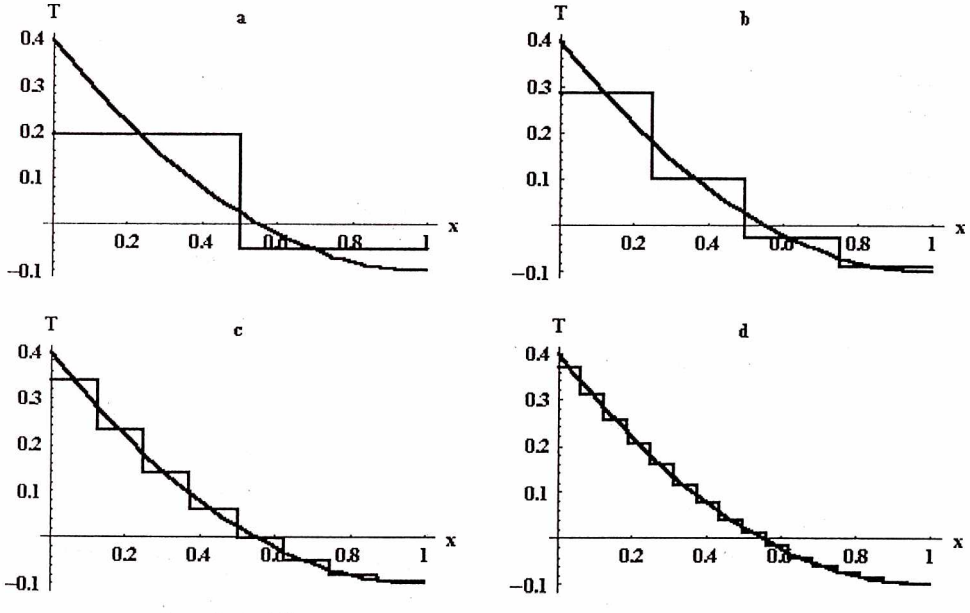
Rys. 8.7. Ugięcia w belki o schemacie na rys. 8.5a przy różnych poziomach aproksymacji: $J = 1$ (a), $J = 2$ (b), $J = 3$ (c) i $J = 4$ (d)
Fig. 8.7. Deflections w of beam whose static scheme is shown in Fig. 8.5a for different approximation levels: $J = 1$ (a), $J = 2$ (b), $J = 3$ (c) and $J = 4$ (d)



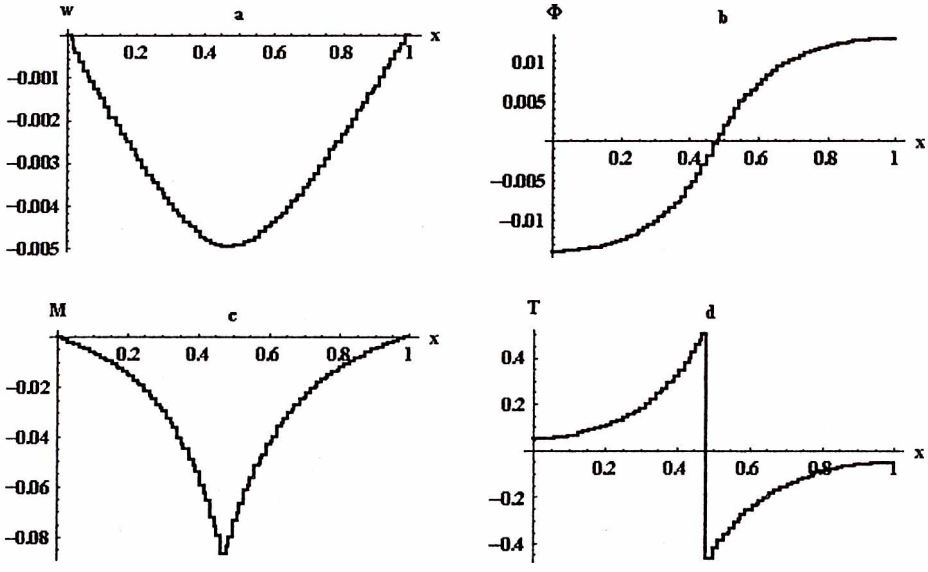
Rys. 8.8. Kąty obrotu Φ belki o schemacie na rys. 8.5a przy różnych poziomach aproksymacji: $J = 1$ (a), $J = 2$ (b), $J = 3$ (c) i $J = 4$ (d)
Fig. 8.8. Rotation Φ of beam whose static scheme is shown in Fig. 8.5a for different approximation levels: $J = 1$ (a), $J = 2$ (b), $J = 3$ (c) and $J = 4$ (d)



Rys. 8.9. Momenty zginające M belki o schemacie na rys. 8.5a przy różnych poziomach aproksymacji: $J = 1$ (a), $J = 2$ (b), $J = 3$ (c) i $J = 4$ (d)
Fig. 8.9. Bending moment M of beam whose static scheme is shown in Fig. 8.5a for different approximation levels: $J = 1$ (a), $J = 2$ (b), $J = 3$ (c) i $J = 4$ (d)

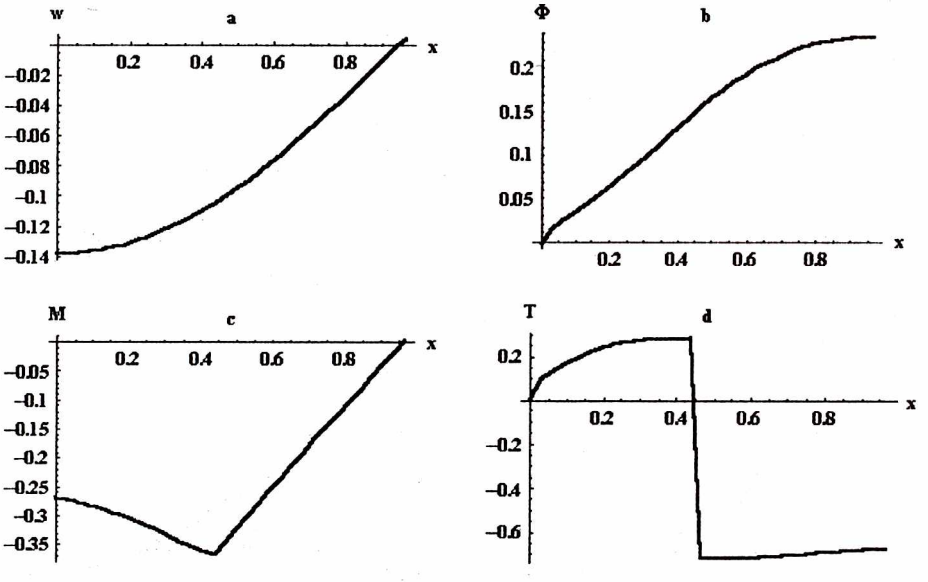


Rys. 8.10. Siły tnące T belki o schemacie na rys. 8.5a przy różnych poziomach aproksymacji: $J = 1$ (a), $J = 2$ (b), $J = 3$ (c) i $J = 4$ (d)
Fig. 8.10. Shear force T of beam whose static scheme is shown in Fig. 8.5a for different approximation levels: $J = 1$ (a), $J = 2$ (b), $J = 3$ (c) and $J = 4$ (d)



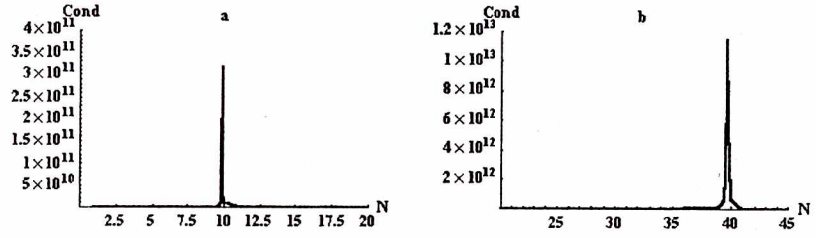
Rys. 8.11. Ugięcia w (a), obroty Φ (b), momenty zginające M (c) i siły tnące T (d) belki o schemacie z rys. 8.5b

Fig. 8.11. Deflections w (a), rotations Φ (b), bending moments M (c) and shear forces T (d) of beam whose static scheme is shown in Fig. 8.5b



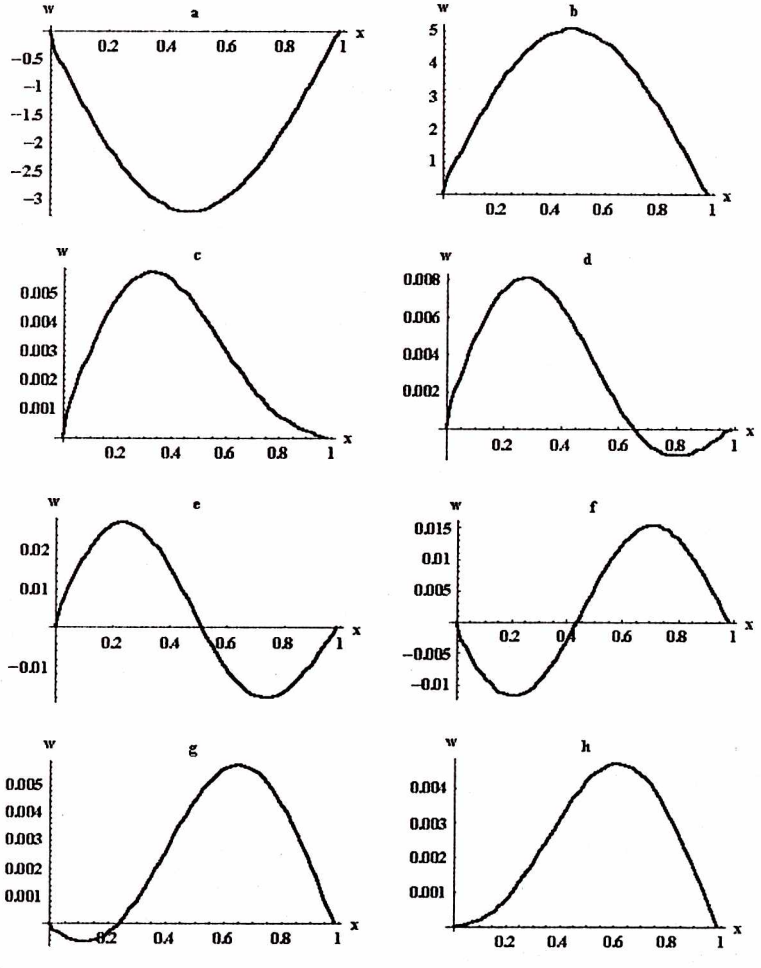
Rys. 8.12. Ugięcia w (a), obroty Φ (b), momenty zginające M (c) i siły tnące T (d) belki o schemacie z rys. 8.5c

Fig. 8.12. Deflections w (a), rotations Φ (b), bending moments M (c) and shear forces T (d) of beam whose static scheme is shown in Fig. 8.5c



Rys. 8.13. Zależność liczby uwarunkowania macierzy $\mathbf{G}^T\mathbf{G}$ od siły osiowej N w obszarze pierwszego (a) i drugiego (b) obciążenia krytycznego belki o schemacie z rys. 8.5d

Fig. 8.13. Condition number of matrix $\mathbf{G}^T\mathbf{G}$ versus axial force N in areas of: first (a) and second (b) critical load of beam whose scheme is shown in Fig. 8.5d



Rys. 8.14. Stany przemieszczeń w belki o schemacie 8.5d przy różnych siłach osiowych: $N = 9{,}85$ (a), $N = 9{,}90$ (b), $N = 38$ (c), $N = 39$ (d), $N = 39{,}7$ (e), $N = 39{,}75$ (f), $N = 41$ (g) i $N = 42$ (h)

Fig. 8.14. States of displacements w of beam with scheme 8.5d for different axial forces: $N = 9.85$ (a), $N = 9.90$ (b), $N = 38$ (c), $N = 39$ (d), $N = 39.7$ (e), $N = 39.75$ (f), $N = 41$ (g) and $N = 42$ (h)

Na rysunku 8.14 pokazano stan przemieszczenia belki przy: $(N=9{,}85)\le N^{I}_{cr,a}$ (rys. 8.14a), $N^{I}_{cr,a}\le(N=9{,}90)<N^{II}_{cr,a}$ (rys. 8.14b), $N^{I}_{cr,a}<(N=38)<N^{II}_{cr,a}$ (rys. 8.14c), $N^{I}_{cr,a}<(N=39)<N^{II}_{cr,a}$ (rys. 8.14d), $N^{I}_{cr,a}<(N=39{,}7)\le N^{II}_{cr,a}$ (rys. 8.14e), $(N=39{,}75)\ge N^{II}_{cr,a}$ (rys. 8.14f), $(N=41)>N^{II}_{cr,a}$ (rys. 8.14g) i $(N=42)\ge N^{II}_{cr,a}$ (rys. 8.14h) ($q=1$). Przy $N^{I}_{cr,a}$ następuje przeskok jednej półfali postaci wyboczenia, co dokładnie odpowiada rozwiązaniu teoretycznemu pokazanemu przez Timoshenko i Gere [8.22]. Formą wyboczenia, którą obserwuje się tuż przed osiągnięciem poziomu drugiego obciążenia krytycznego, są dwie półfale, których przeskok następuje przy $N^{II}_{cr,a}$.

8.5. Podsumowanie

W rozdziale przedstawiono algorytm numeryczny rozwiązywania problemów brzegowych z opisem w postaci liniowych równań różniczkowych o zmiennych współczynnikach. Opis matematyczny zagadnień sprowadza się do układów równań różniczkowych liniowych rzędu pierwszego o zmiennych współczynnikach. W algorytmie wykorzystuje się pakietowe bazy falkowe Walsha do aproksymacji poszukiwanych zmiennych. Rozwinięcia szukanych zmiennych stanu w falkowych bazach pakietowych sprowadzają układ równań różniczkowych do równań algebraicznych.

Rozwiązania równań algebraicznych po uwzględnieniu warunków brzegowych poszukuje się żądając minimalizacji sumy kwadratów błędów niespełnienia równań różniczkowych i warunków brzegowych w dyskretnych zbiorach punktów zmiennej niezależnej zagadnienia. Liczba tych punktów, punktów kolokacyjnych, w których stawia się warunek minimalizacji sumy kwadratów błędów, zależy od stopnia m aproksymacji związanej z przyjętą w analizie bazą pakietową. Warunek minimalizacji błędów prowadzi do nadokreślonych układów równań algebraicznych (układów o większej liczbie równań niż niewiadomych), który rozwiązuje się metodą najmniejszych kwadratów. Tak skonstruowany algorytm wykorzystano do analizy wielu dwu- i wielopunktowych zagadnień brzegowych mechaniki, które obejmują nietrywialne zadania statyki i stateczności.

Otrzymywane rozwiązania analizowano zarówno pod względem ich zbieżności, zależnej od przyjętego stopnia aproksymacji, jak i pod względem dokładności, porównując otrzymywane rezultaty do znanych rozwiązań ścisłych.

Na podstawie rozwiązań wielu zadań można sformułować kilka spostrzeżeń ogólnych:

- algorytm oparty na bazach pakietowych Walsha jest skutecznym narzędziem analizy wielopunktowych, liniowych zagadnień brzegowych,
- wszystkie możliwe bazy pakietowe prowadzą w prezentowanym podejściu do identycznych rezultatów numerycznych, choć liczby generowanych równań przy tych bazach są zasadniczo różne i są najmniejsze dla baz lokalnych,

- zasadniczą rolę w poprawności uzyskiwanych wyników numerycznych – ważniejszą od stopnia aproksymacji m – odgrywa postać modyfikowanej macierzy operacyjnej całkowania, która przy $\gamma = 1$ prowadzi zwykle do najlepszych rozwiązań,
- przyjęty sposób minimalizacji sumy kwadratów residuów niespełnienia równań zagadnienia i warunków brzegowych w połączeniu z wykorzystywaną metodą najmniejszych kwadratów wymaga uwagi podczas rozwiązywania problemów, których zmienne stanu w sposób zasadniczy (co do bezwzględnej wartości) różnią się między sobą.

W rozdziale tym wykorzystano wyniki przedstawione w pracy autora [8.23].

9. Pakiety falkowe Walsha w zagadnieniach wariacyjnych

9.1. Wprowadzenie

Modele matematyczne większości zagadnień współczesnej mechaniki sprowadzają się do układów równań różniczkowych, różniczkowo-całkowych bądź całkowych opisujących problemy brzegowo-początkowe. Równania te są często nieliniowe, co w praktyce oznacza, że w przypadkach nietrywialnych z reguły nie jest możliwe uzyskanie rozwiązań analitycznych.

Alternatywnym – do poszukiwania rozwiązań analitycznych – sposobem rozwiązywania tego typu zagadnień (często jedynie możliwym) jest formułowanie funkcjonałów wariacyjnych, których warunki stacjonarności prowadzą do równań opisujących zagadnienia. W tym przypadku rozwiązanie sprowadza się do szukania funkcji, dla których zbudowany funkcjonał jest stacjonarny, a otrzymane – w wyniku standardowych procedur rachunku wariacyjnego – równania Eulera–Lagrange'a są równaniami zagadnienia, którego rozwiązania poszukujemy. Typowym przykładem podejścia wariacyjnego jest zasada minimum energii potencjalnej bądź energii komplementarnej.

Rozwiązywanie zadań bazujących na sformułowaniach wariacyjnych ma wiele zalet. Użycie funkcjonałów wariacyjnych umożliwia skoncentrowanie w jednym wyrażeniu wszystkich skomplikowanych równań problemu i na ogół funkcjonały te mają określony sens fizyczny. Sformułowania wariacyjne zagadnień tworzą bazę tak zwanych metod bezpośrednich rachunku wariacyjnego, które umożliwiają uzyskiwanie rozwiązań przybliżonych oraz badanie ich stabilności i jednoznaczności.

Problem istnienia i formułowania zasad wariacyjnych należy do tak zwanych problemów odwrotnych rachunku wariacyjnego. Należy podkreślić, że – ujmując rzecz chronologicznie – pierwotnym opisem problemów brzegowo-początkowych są układy równań, na bazie których można budować opis zagadnienia w postaci zasady wariacyjnej.

Obszerny przegląd literatury w zakresie szeroko pojętej analizy funkcjonalnej i metod wariacyjnych można znaleźć między innymi w pracach Goldstine'a [9.1], Washizu [9.2], Odena i Reddy [9.3], Masona [9.4] i Reddy [8.13].

Zasady wariacyjne można podzielić na trzy podstawowe grupy w zależności od wzajemnej relacji równań Eulera–Lagrange'a funkcjonału i równań problemu, którego zasady wariacyjnej poszukujemy . Do pierwszej grupy zaliczamy zasady wariacyjne (tak zwane zasady potencjalne), których warunki stacjonarności odpowiadają wprost równaniom zagadnienia. Grupę drugą tworzą takie sformułowania wariacyjne (tak zwane alternatywne zasady potencjalne), których równania Eulera–Lagrange'a są pewną transformacją równań wyjściowych problemu. Trzecią grupę zasad wariacyjnych stanowią zasady (tak zwane złożone zasady potencjalne), w których oprócz oryginalnych zmiennych problemu występują zmienne do nich sprzężone, a punkty stacjonarności funkcjonałów tej grupy dają równania problemu wyjściowego i problemu do niego sprzężonego. Przedstawioną tu propozycję podziału zasad wariacyjnych można znaleźć w pracy Athertona i Homsy'a [9.5]. Jeśli funkcjonał jest traktowany jako opis zagadnienia, to problem sprowadza się do znalezienia jego ekstremali. Zadanie to można rozwiązać metodami bezpośrednimi.

Idea metod bezpośrednich rozwiązywania zagadnień wariacyjnych polega na zastąpieniu zadania szukania ekstremum (a częściej punktu stacjonarności) funkcjonału w przestrzeni funkcji zadaniem poszukiwania rozwiązania w skończonym zbiorze parametrów. Najczęściej stosowanym podejściem w metodach bezpośrednich rozwiązywania problemów wariacyjnych jest metoda Ritza (Gelfand i Fomin [9.6]), na ogół bazująca na podprzestrzeniach funkcji zupełnych kinematycznie dopuszczalnych.

Szczególną rolę wśród funkcji w przestrzeni, w których szuka się rozwiązań przybliżonych zagadnień wariacyjnych, odgrywają przestrzenie funkcji ortogonalnych. Funkcje te wraz z ich operacyjnymi macierzami całkowania pozwalają za pomocą metody Ritza sprowadzić zagadnienia wariacyjne do układów równań algebraicznych.

Chen i Hsiao [9.7] jako pierwsi przedstawili procedurę rozwiązywania zagadnień wariacyjnych bazującą na funkcjach Walsha. Hwang i Shih [9.8] do rozwiązania omawianego typu zagadnień wykorzystali szeregi Laguerre'a. Wielomianowe szeregi Legendre z przesunięciem zastosowali Chang i Wang [9.9]. Horng i Chou [9.10] przedstawili rozwiązania wariacyjne otrzymane przy zastosowaniu szeregów Chebysheva z przesunięciem, a Razzaghi i Razzaghi [9.11] stosowali szeregi Fouriera.

Obecnie wzrasta zainteresowanie naukowców wielu dziedzin stosowaniem funkcji falkowych, które na ogół tworzą wygodne w zastosowaniach bazy ortogonalne w przestrzeniach L^2 funkcji całkowalnych z kwadratem. Ostatnio w bezpośrednich metodach rozwiązywania zagadnień wariacyjnych funkcje falkowe Legendre'a zastosowali Razzaghi i Yousefi [9.12], a tak zwane znormalizowane funkcje Haara – Razzaghi i Ordokhani [9.13].

Celem rozdziału jest przedstawienie algorytmu rozwiązywania problemów wariacyjnych metodą bezpośrednią, bazującą na dotychczas nie stosowanych falkowych bazach pakietowych Walsha. Analizowane będą te sformułowania wariacyjne, które zalicza się do pierwszej grupy zasad przedstawionego podziału, choć nic nie stoi na przeszkodzie żeby prezentowane podejście stosować do zasad z pozostałych dwóch grup. Zastosowanie baz pakietowych, za pomocą których można zbudować cały sys-

tem możliwych opisów problemu, jest uogólnieniem dotychczas stosowanych baz Walsha czy Haara, które są przypadkami szczególnymi przedstawionego podejścia. Przedyskutowana zostanie rola postaci macierzy operacyjnych i ich wpływ na dokładność otrzymywanych rozwiązań, a zastosowanie w prezentowanym algorytmie wielu pól aproksymacji istotnie ułatwi wprowadzenie warunków brzegowych problemu.

W punkcie drugim przedstawiono krótkie wprowadzenie do metod bezpośrednich bazujących na sformułowaniach wariacyjnych, w punkcie trzecim sformułowano algorytm rozwiązania, który w punkcie czwartym wykorzystano do rozwiązania kilku problemów wariacyjnych. W punkcie piątym podsumowano otrzymane wyniki i sformułowano spostrzeżenia ogólne.

9.2. Metody bezpośrednie bazujące na sformułowaniach wariacyjnych

W przeciwieństwie do omówionych w poprzednim rozdziale metod residualnych bazujących na lokalnych sformułowaniach problemu, w metodach wariacyjnych sformułowania globalne są punktem wyjścia. Z reguły są to sformułowania w postaci funkcjonałów, których warunki stacjonarności prowadzą do trzech fundamentalnych relacji mechaniki: równań równowagi, związków geometrycznych i związków konstytutywnych. Jeżeli – na wzór postępowania przedstawionego w rozdziale poprzednim – we wspomnianych globalnych sformułowaniach problemu użyjemy aproksymacji (8.3), to prowadzić to będzie do tak zwanych bezpośrednich metod wariacyjnych, wyrażających się na ogół układami równań algebraicznych na poszukiwane współczynniki aproksymacji $\hat{u}_i$.

Metoda Ritza, czasami nazywana metodą Rayleigha–Ritza, jest jedną z najczęściej stosowanych metod analizy w mechanice konstrukcji. Punktem wyjścia metody Ritza jest zasada prac przygotowanych (prac wirtualnych)

$$\delta W = -\int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV + \int_V \delta \mathbf{u}^T \overline{\mathbf{p}}_V dV + \int_{S_p} \delta \mathbf{u}^T \overline{\mathbf{p}} dS = 0 \tag{9.1}$$

gdzie: δW, $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$ i $\delta \mathbf{u}$ są odpowiednio wariacjami (głównymi liniowymi częściami przyrostów) pracy W, odkształcenia $\boldsymbol{\varepsilon}$ i przemieszczeń $\mathbf{u}$. Przyjmując w związku (9.1) aproksymację (8.3), przy założeniu, że spełnia ona związki geometryczne i przemieszczeniowe warunki brzegowe (jest kinematycznie dopuszczalna) po prostych przekształceniach otrzymujemy symetryczny układ równań algebraicznych na poszukiwane współczynniki aproksymacji.

Przyjęcie aproksymacji (8.3) prowadzi do rozwiązań, w których sztywność układu jest większa od rzeczywistej, co powoduje zmniejszenie (w stosunku do rzeczywistych) reakcji statycznych (np. przemieszczeń) i zwiększenie częstości drgań wła-

snych. Jest to oczywiste, jeżeli się zauważy, że przyjmowana aproksymacja (przy założeniu, że różni się ona od stanu rzeczywistego) wprowadza do układu dodatkowe więzy.

Często wykorzystywanym, alternatywnym punktem wyjścia do formułowania metody Ritza jest (przy założeniu istnienia potencjału sił wewnętrznych i zewnętrznych) zasada stacjonarności energii potencjalnej Π. Przy założeniu aproksymacji kinematycznie dopuszczalnej zasada ta w postaci znikania wariacji $\delta\Pi$ prowadzi – w liniowych zagadnieniach mechaniki konstrukcji – do równań identycznych z tymi, które otrzymuje się, przyjmując za punkt wyjścia zasadę prac przygotowanych.

Metoda Galerkina, choć poprzednio zaliczana do metod residualnych, może być także wyprowadzona z pewnego sformułowania wariacyjnego. Jeżeli, jak poprzednio, przez $\mathbf{R}$ oznaczymy residuum, to – przy założeniu, że funkcje próbne spełniają wszystkie warunki brzegowe, a $\mathbf{R}$ interpretujemy jako siły nie będące w równowadze na skutek przyjęcia niedoskonałej aproksymacji rozwiązania – możemy postulować znikanie pracy tych niezrównoważonych sił na wirtualnych stanach przemieszczeń

$$\int_V \delta\tilde{\mathbf{u}}^T \mathbf{R} dV = 0 \tag{9.2}$$

Oczywiście sformułowanie to prowadzi do identycznych rozwiązań z tymi, które otrzymujemy metodą Galerkina, przedstawioną w poprzednim rozdziale.

Metoda Kantorowicza jest odmianą sposobu Ritza. Stosowana jest ona do redukcji zagadnień mechaniki sformułowanych w postaci równań różniczkowych cząstkowych do układów równań zwyczajnych. Takie przejście możliwe jest przy założeniu, na przykład w zagadnieniach dwuwymiarowych, aproksymacji typu

$$\tilde{u}(x,y) = \sum_{i=1}^{m} N_{ui}(y)\hat{u}_i(x) \tag{9.3}$$

która wykorzystana na przykład w zasadzie prac wirtualnych prowadzi do układu równań różniczkowych zwyczajnych wyznaczających poszukiwane funkcje $\hat{u}_i(x)$.

Metoda Ritza w swoim klasycznym, wariacyjnym sformułowaniu zakłada, że przyjęta baza próbnych funkcji aproksymujących spełnia przemieszczeniowe warunki brzegowe ($\mathbf{u} = \overline{\mathbf{u}}$ na S_u). W poszerzonym sformułowaniu tej metody, bazującym na zasadzie prac przygotowanych, dodajemy do prawej strony równania (9.1) przyrost pracy obciążenia $\mathbf{p}$ na niezgodnych z istniejącymi na brzegach ($\overline{\mathbf{u}}$) przemieszczeniami $\mathbf{u}$. Relacja (9.1) przyjmie wtedy następującą postać:

$$\delta W = \int_V \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV + \int_V \delta\mathbf{u}^T \overline{\mathbf{p}}_V dV + \int_{S_p} \delta\mathbf{u}^T \overline{\mathbf{p}} dS + \delta \int_{S_u} \mathbf{p}^T (\mathbf{u} - \overline{\mathbf{u}}) dS = 0 \tag{9.4}$$

Relacja (9.4) stanowi bazę tak zwanej poszerzonej metody Ritza, w której zakładana postać funkcji aproksymujących N_{ui} nie musi (jak w klasycznym sformułowaniu

tej metody) spełniać warunków przemieszczeniowych zadania. Podejście to poszerza więc istotnie bazę funkcji próbnych, a proces rozwiązania przebiega jak poprzednio.

Podobnie jak wyżej opisaną modyfikację metody Ritza łatwo można uogólnić metodę Galerkina w jej wariacyjnym sformułowaniu (9.2). W sformułowaniu tym wymagane jest spełnienie przez funkcje aproksymujące zarówno siłowych, jak i przemieszczeniowych warunków zadania na jego brzegu. Jeżeli uchylimy te żądania, sformułowanie poszerzone metody Galerkina przyjmie postać:

$$-\int_V \delta \mathbf{u}^T \left(\mathbf{D}^T \boldsymbol{\sigma} + \overline{\mathbf{p}}_V\right) dV + \int_{S_p} \delta \mathbf{u}^T (\mathbf{p} - \overline{\mathbf{p}})\, dS - \int_{S_u} \delta \mathbf{p}^T (\mathbf{u} - \overline{\mathbf{u}})\, dS = 0 \tag{9.5}$$

gdzie przez **D** oznaczono operator klasycznego związku geometrycznego $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{DU}$. Przy takim sformułowaniu zwolnieni jesteśmy od specjalnego doboru funkcji próbnych, które nie muszą już spełniać wszystkich warunków brzegowych.

Przyjęcie poszerzonych metod Ritza i Galerkina, z tym samym zestawem funkcji próbnych, prowadzi do identycznych rozwiązań.

Omówione klasyczne metody przybliżone wykorzystujące funkcje aproksymujące globalne bądź lokalne (metoda elementów skończonych) stają się mało użyteczne, szczególnie w zagadnieniach o dużych obszarach lub w zagadnieniach z osobliwościami. W tego typu zagadnieniach często znane jest rozwiązanie problemu (np. rozwiązanie równania różniczkowego) wewnątrz analizowanego obszaru i stajemy przed problemem spełnienia warunków brzegowych, co w naturalny sposób prowadzi do metod brzegowych.

Przyjęcie funkcji próbnych w postaci funkcji Greena prowadzi zwykle do układu równań całkowych, które stanowią bazę metody elementów brzegowych.

W metodzie Trefftza zakłada się, że funkcje próbne spełniają równania różniczkowe problemu (zwykle równania równowagi i związki geometryczne) wewnątrz analizowanego obszaru, a procedura rozwiązania sprowadza się do takiego doboru parametrów, przy których najlepiej spełnione są warunki brzegowe. Wariacyjne sformułowanie tak zdefiniowanego podejścia można przedstawić jako

$$\delta J = \int_{S_p} \delta \mathbf{u}^T (\mathbf{p} - \overline{\mathbf{p}}) dS + \int_{S_u} \delta \mathbf{p}^T (\overline{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) dS = 0 \tag{9.6}$$

a aproksymacji rozwiązania **u** poszukujemy w postaci

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{N}_p + \mathbf{N}_u \hat{\mathbf{u}} \tag{9.7}$$

gdzie $\mathbf{N}_p$ jest wektorem szczególnych rozwiązań równań różniczkowych problemu, a $\mathbf{N}_u \hat{\mathbf{u}}$ jest układem liniowo niezależnych funkcji spełniających jednorodne równania różniczkowe. Jak już wspomniano, procedura rozwiązania polega na poszukiwaniu takiego zbioru parametrów $\hat{\mathbf{u}}$, przy których najlepiej spełniane są warunki brzegowe.

Zastosowanie metody Trefftza wymaga znajomości rozwiązań równań różniczkowych, co w wielu przypadkach ogranicza możliwość jej stosowania.

Prezentowany w punkcie następnym algorytm bazuje na metodzie Ritza w jej poszerzonym sformułowaniu.

9.3. Metoda bezpośrednia oparta na pakietowych bazach Walsha

Zagadnienie poszukiwania ekstremum elementarnego funkcjonału typu

$$J(x)=\int_0^1 F(t,x(t),\dot{x}(t))\,dt \tag{9.8}$$

prowadzi, poprzez przyrównanie do 0 jego wariacji $\delta J(x)$, do warunku koniecznego w postaci dobrze znanych równań Eulera–Lagrange'a

$$\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}=0 \tag{9.9}$$

które należy uzupełnić stosownymi warunkami brzegowymi (Gelfand i Fomin [9.6]).

Rozwiązania równania (9.9), bądź układów tego typu równań, mogą być stosunkowo łatwo znalezione jedynie w nielicznych przypadkach. Stąd zwykłą praktyką jest szukanie ekstremum funkcjonału (9.8) za pomocą tak zwanych metod bezpośrednich typu Ritza czy Galerkina. Dalej stosowane będzie podejście typu Ritza z pakietowymi funkcjami Walsha jako funkcjami bazowymi zagadnienia.

W celu uniknięcia różniczkowania odcinkowo stałych funkcji bazowych $h_i(t)$, w ich bazie przedstawia się $\dot{x}(t)$

$$\dot{x}(t)=\sum_{i=0}^{m-1} f_i h_i(t)=\mathbf{f}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}(t) \tag{9.10}$$

gdzie $\mathbf{f}$ jest wektorem poszukiwanych współczynników rozwinięcia f_i. Całkując zależność (9.10), $x(t)$ można przedstawić jako

$$x(t)=\int_0^t \dot{x}(t')dt'+x(0)=\mathbf{f}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{H}(t)+\left[\underbrace{x(0),\ldots,x(0)}_{k},0,\ldots,0\right]\mathbf{H}(t) \tag{9.11}$$

gdzie k zależy od przyjętej bazy i stopnia aproksymacji m i jest równe liczbie funkcji bazowych z podprzestrzeni V_l dekompozycji przestrzeni V. Na przykład dla funkcji bazowych Haara i Walsha $k=1$, a dla funkcji bazowych typu B_1 $k=m/2$.

Zmienną niezależną t w przyjętej bazie można przedstawić jako

$$t = \mathbf{d}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}(t) \tag{9.12}$$

gdzie $\mathbf{d}$ jest wektorem współczynników jej rozwinięcia w bazie $\mathbf{H}(t)$.

Przyjęte funkcje bazowe z reguły nie będą spełniać żądanych warunków brzegowych. Korzystając z metody mnożników Lagrange'a, warunki te można wprowadzić do równania wyjściowego (9.8) zagadnienia i tym samym sprowadzić problem do szukania ekstremum warunkowego funkcjonału $\tilde{J}$. Takie postępowanie jest równoważne ze stosowaniem metody Ritza w jej poszerzonym sformułowaniu.

Funkcjonał $\tilde{J}$ ma postać

$$\tilde{J} = J + \sum_{i=1}^{b} \lambda_i (\text{b.c.})_i \tag{9.13}$$

gdzie przez λ_i oznaczono mnożniki Lagrange'a, a b równań warunków brzegowych symbolicznie oznaczono jako $(\text{b.c.})_i$. Na przykład, jeżeli pierwszy z warunków brzegowych ma postać $x(1) = a$, to przez $(\text{b.c})_1$ należy rozumieć $(\text{b.c})_1 = x(1) - a$.

Problem szukania rozwiązania sprowadza się teraz do rozwiązania $m + b$ równań algebraicznych, wynikających ze wzorów:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{J}}{\partial f_i} &= 0, \qquad i = 0, 1, \ldots, m-1 \\ \frac{\partial \tilde{J}}{\partial \lambda_j} &= 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, b \end{aligned} \tag{9.14}$$

Jak łatwo zauważyć, co wynika z (9.11), do funkcjonowania algorytmu poszukiwania ekstremum warunkowego musi być znane $x(0)$. Warunek ten na ogół jest spełniony, choć w zadaniach z końcami swobodnymi (albo lewym końcem swobodnym) wartość $x(0)$ nie jest znana i tym samym zadanie staje się nieokreślone. Problem ten można rozwiązać, przyjmując niezależną (od przyjętej aproksymacji $\dot{x}(t)$) aproksymację $x(t)$ w postaci

$$x(t) = \sum_{i=0}^{m-1} g_i h_i(t) = \mathbf{g}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}(t) \tag{9.15}$$

i żądając zgodności prawych stron równań (9.11) i (9.15).

Wspomniany warunek zgodności prowadzi do uzupełnienia funkcjonału $\tilde{J}$

$$\tilde{\tilde{J}} = \tilde{J} + \int_0^1 \left\{ \tilde{\lambda}(t) \left[\int_0^t \dot{x}(t')dt' + x(0) - x(t) \right] \right\} dt \tag{9.16}$$

Kosztem wprowadzenia dodatkowej aproksymacji (9.15) jest prawie trzykrotnie większy (od układu (9.14)) układ równań algebraicznych, będący rozwiązaniem zagadnienia:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\tilde{J}}}{\partial f_i} &= 0 \\ \frac{\partial \tilde{\tilde{J}}}{\partial g_i} &= 0 \\ \frac{\partial \tilde{\tilde{J}}}{\partial \tilde{\lambda}_i} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad i = 0, 1, \ldots, m-1$$

$$\frac{\partial \tilde{\tilde{J}}}{\partial \lambda_j} = 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, b \tag{9.17}$$

gdzie przez $\tilde{\lambda}_i$ oznaczono reprezentatywną dla i-tego odcinka podziału zmiennej $t \in \langle 0,1 \rangle$ wartość funkcji $\tilde{\lambda}(t)$ mnożnika Lagrange'a.

9.4. Przykłady numeryczne

Rozpatrzmy problem szukania ekstremum funkcjonału (Chan i Wang [9.9], Razzaghi i Yousefi [9.12], Razzaghi i Ordokhani [9.13])

$$J(x) = \int_0^1 \left(\dot{x}^2 + t\dot{x} + x^2\right) dt \tag{9.18}$$

z warunkami brzegowymi

$$x(0) = 0, \qquad x(1) = \frac{1}{4} \tag{9.19}$$

Jak łatwo sprawdzić, ścisłym rozwiązaniem tego zadania jest funkcja

$$x(t) = -\frac{e^{-t}\left(-1+e^t\right)\left(e-2e^2-2e^t+e^{1+t}\right)}{4\left(-1+e^2\right)} \tag{9.20}$$

która stanowi podstawę oceny dalej pokazywanych rozwiązań numerycznych.

W tabeli 9.1 zestawiono, przy różnych stopniach aproksymacji m i różnych wartościach parametru γ, względną odchyłkę mocy Δ (wyrażoną w %) rozwiązania ścisłego (9.20) i rozwiązania tutaj otrzymywanego w całym przedziale analizy, którą zdefiniowano identycznie jak w rozdziałach poprzednich jako

$$\Delta = \left(\sum_{j=0}^{m-1} \left| x_j^e - x_j^a \right|^2 / \sum_{j=0}^{m-1} \left| x_j^e \right|^2 \right) \cdot 100\% \tag{9.21}$$

gdzie x_j^e oraz x_j^a oznaczają odpowiednio wartości dokładne i wartości otrzymywane z algorytmu w j-tym centralnym punkcie analizowanego przedziału zmienności $x(t)$.

Tabela 9.1. Względna odchyłka mocy Δ rozwiązania ścisłego (9.20) i rozwiązania numerycznego w funkcji parametrów m i γ
Table 9.1. Relative percentage power Δ of the difference between exact (9.20) and numerical solution as a function of m and γ parameters

m	Δ [%]				
	$\gamma = 0{,}00$	$\gamma = 0{,}25$	$\gamma = 0{,}50$	$\gamma = 0{,}75$	$\gamma = 1{,}00$
8	0,731	0,198	0,538	0,802	0,899
16	0,174	0,082	0,145	0,208	0,235
32	0,042	0,021	0,037	0,053	0,060
64	0,010	0,005	0,009	0,013	0,015

Wyniki numeryczne uzyskano z układu równań wynikającego z relacji (9.14), którą można było wykorzystać z uwagi na charakter warunków brzegowych (9.19). Jak widać, odchyłka mocy jest zależna od parametru γ i nie jest najmniejsza przy zwykle (przy $\gamma = 0{,}5$) przyjmowanej macierzy operacyjnej całkowania.

Na rysunku 9.1, na tle rozwiązania ścisłego zaznaczonego linią ciągłą, pokazano rozwiązanie numeryczne odcinkowo stałe problemu ((9.18), (9,19)) przy różnych stopniach aproksymacji: m = 8 (rys. 9.1a), m = 16 (rys. 9.1b), m = 32 (rys. 9.1c) i m = 64 (rys. 9.1d). Analiza tego zagadnienia w przypadku różnych baz możliwych do skonstruowania za pomocą baz pakietowych Walsha (bazy Walsha, bazy Haara, prostokątne bazy impulsowe itp.) daje identyczne numeryczne rezultaty, choć czas trwania analizy istotnie wydłuża się wraz ze wzrostem liczby funkcji bazowych o większym zasięgu. Czas analizy jest oczywiście najdłuższy przy bazie Walsha, której dziedziną określoności wszystkich funkcji bazowych jest cały przedział zmienności zmiennej niezależnej t.

Rozpatrzmy teraz problem szukania ekstremum funkcjonału

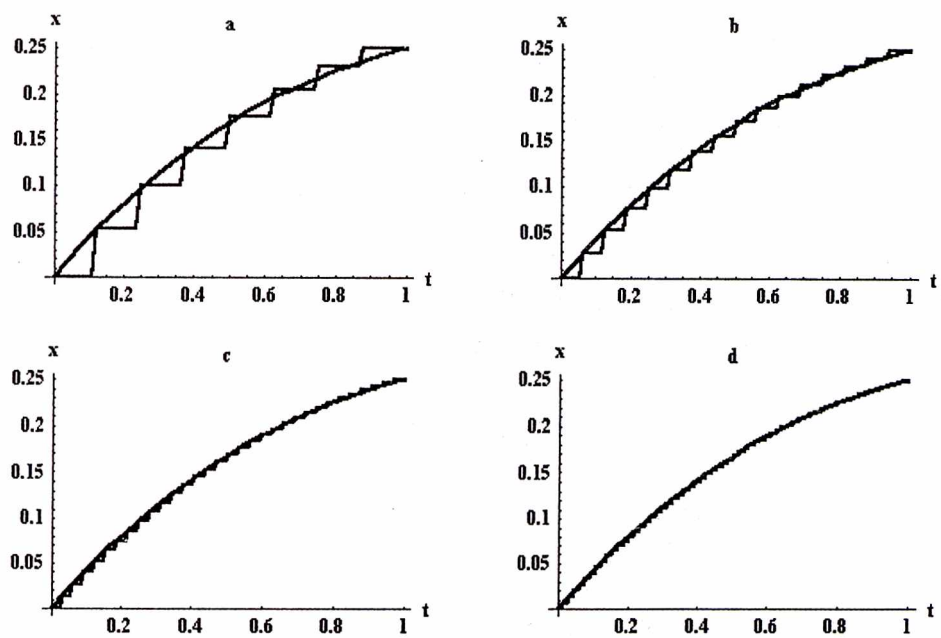
$$J = \int_0^1 \left[\frac{1}{2} \dot{x}(t)^2 - x(t) s(t) \right] dt \tag{9.22}$$

gdzie $s(t)$ jest znaną funkcją

$$s(t)=\begin{cases}-1 & 0\le t<\frac{1}{4},\quad \frac{1}{2}\le t\le 1\\ 3 & \frac{1}{4}\le t<\frac{1}{2}\end{cases} \tag{9.23}$$

spełniającą warunek

$$\int_0^1 s(t)dt=0 \tag{9.24}$$



Rys. 9.1. Rozwiązanie ścisłe (linia ciągła) i rozwiązania numeryczne (linie odcinkowo stałe) zagadnienia ((9.18), (9.19)) przy różnych stopniach aproksymacji $m = 8$ (a), $m = 16$ (b), $m = 32$ (c) i $m = 64$ (d)
Fig. 9.1. Exact solution (solid line) and numerical solutions (piecewise constant lines) of problem (9.18), (9.19) for different approximation degrees: $m = 8$ (a), $m = 16$ (b), $m = 32$ (c) and $m = 64$ (d)

Wartości $x(0)$ i $x(1)$ są nieokreślone, tak więc mamy do czynienia z zagadnieniem ze swobodnymi końcami. Wykorzystując klasyczne zasady rachunku wariacyjnego (Gelfand i Fomin [9.6]), łatwo znaleźć dwa warunki, które wynikają z warunków możliwych pionowych przesunięć końców poszukiwanej ekstremali. Przyjmują one następującą postać:

$$\dot{x}(0)=0$$
$$\dot{x}(1)=0 \tag{9.25}$$

Rozwiązaniem ścisłym tego zagadnienia jest funkcja

$$x(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}t^2+r & 0\le t\le\frac{1}{4}\\ -\frac{3}{2}t^2+t-\frac{1}{8}+r & \frac{1}{4}\le t\le\frac{1}{2}\\ \frac{1}{4}t^2-t+\frac{3}{8}+r & \frac{1}{4}\le t\le 1\end{cases} \tag{9.26}$$

gdzie przez r oznaczono stałą dowolną.

Z uwagi na (9.24) funkcja (9.26) spełnia równanie problemu (9.22) wraz z warunkami (9.25) przy dowolnej wartości parametru r. Wynika z tego, że poprawnie sformułowana procedura numeryczna nie może dać jednoznacznego rozwiązania bez dodatkowego warunku, na przykład na wartość rozwiązania w dowolnym punkcie t_0 zmiennej t.

Zagadnienie to będzie rozwiązane z zastosowaniem równań (9.17) po przyjęciu niezależnej aproksymacji $x(t)$ (9.15) i $\dot{x}(t)$ (9.10).

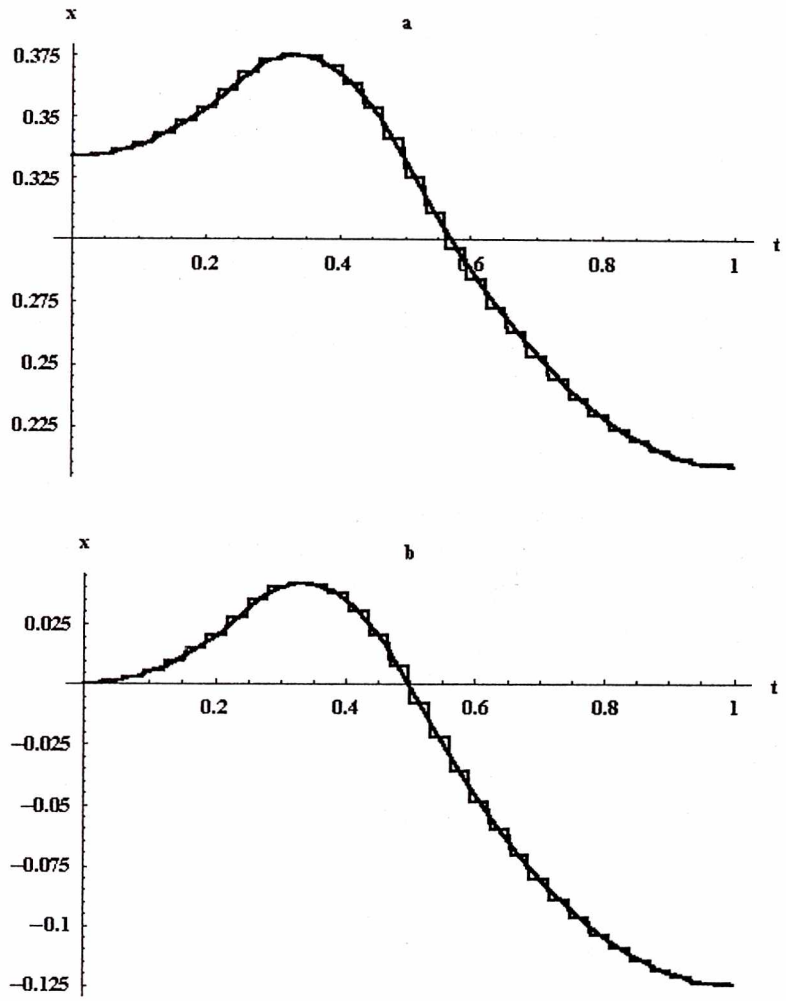
Wykorzystując relacje (9.10), (9.11) i (9.15) oraz rozwijając funkcję $s(t)$

$$s(t)=\sum_{i=0}^{m-1}s_i h_i(t)=\mathbf{s}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}(t) \tag{9.27}$$

funkcjonał (9.22) wraz z warunkami brzegowymi (9.25) i warunkiem zgodności założonych pól aproksymacji można przedstawić w postaci:

$$\begin{aligned}\tilde{\tilde{J}} &= \int_0^1\left[\frac{1}{2}\mathbf{f}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{f}-\mathbf{g}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{s}\right]dt\\ &+\int_0^1\tilde{\lambda}\left\{\mathbf{f}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{H}+\left[\underbrace{a,\ldots,a}_{k},\ 0,\ldots,0\right]\mathbf{H}-\mathbf{g}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}\right\}dt\\ &+\lambda_1\left[\mathbf{f}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}(0)-0\right]+\lambda_2\left[\mathbf{f}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}(1)-0\right]+\lambda_3\left[\mathbf{g}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}(t_0)-x(t_0)\right]\end{aligned} \tag{9.28}$$

gdzie $a=\mathbf{g}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}(0)$. Punkt $(t_0,x(t_0))$, przez który ma przechodzić ekstremala, wprowadza ostatni składnik funkcjonału (9.28).



Rys. 9.2. Rozwiązanie ścisłe (linia ciągła) i rozwiązania numeryczne (linie odcinkowo stałe) zagadnienia ((9.22), (9.23), (9.25)) przy $m = 32$ oraz $(t_0, x(t_0)) = (1/2,\ 1/3)$ (a) i $(t_0, x(t_0)) = (0,0)$ (b)

Fig. 9.2. Exact solution (solid line) and numerical solutions (piecewise constant lines) of problem (9.22), (9.23), (9.25) for $m = 32$ and $(t_0, x(t_0)) = (1/2,\ 1/3)$ (a) and $(t_0, x(t_0)) = (0,0)$ (b)

Na rysunkach 9.2a i 9.2b, na tle rozwiązań ścisłych (linia ciągła), pokazano rozwiązania przybliżone (linia odcinkowo stała) otrzymane przy $m = 32$ i $\gamma = 1$ odpowiednio przy $(t_0, x(t_0)) = (1/2, 1/3)$ i $(t_0, x(t_0)) = (0,0)$. Rozwiązania otrzymano stosując bazę B_1 w równaniach (9.17) wykorzystujących funkcjonał (9.28).

W tabeli 9.2 zestawiono względną odchyłkę mocy Δ rozwiązania ścisłego (9.26) i jego aproksymacji przy różnych stopniach aproksymacji m i różnych parametrach γ. Odchyłki mocy Δ są niezależne od stałej dowolnej r.

Tabela 9.2. Względna odchyłka mocy Δ rozwiązania ścisłego (9.26) i rozwiązania numerycznego w funkcji parametrów m i γ
Table 9.2. Relative percentage power Δ of the difference between exact (9.26) and numerical solution as a function of m and γ parameters

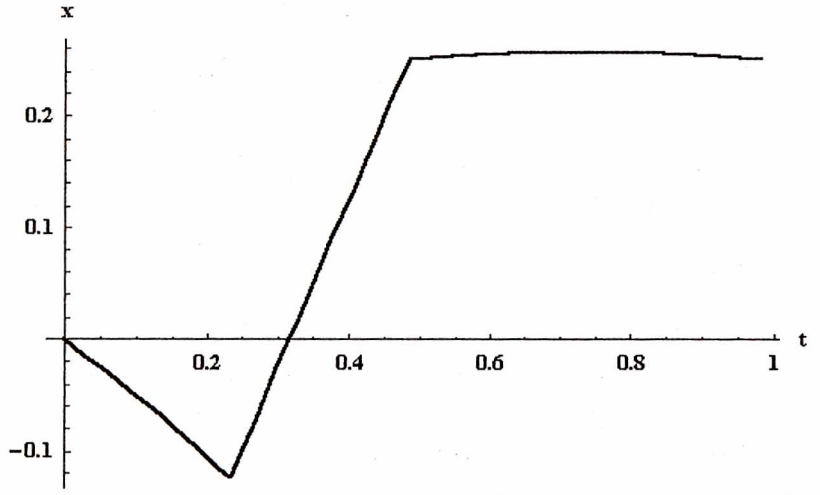
m	Δ [%]				
	$\gamma = 0{,}00$	$\gamma = 0{,}25$	$\gamma = 0{,}50$	$\gamma = 0{,}75$	$\gamma = 1{,}00$
8	4,834	2,751	1,441	0,461	0,763
16	0,329	0,183	0,0955	0,0270	0,0318
32	0,0213	0,0118	0,0061	0,0016	0,0015
64	0,00136	0,00075	0,00039	0,00010	0,00007

Wyniki zestawione w tabeli 9.2 uzyskano wykorzystując bazę Walsha; przy innych możliwych bazach pakietowych wyniki są identyczne.

Wprowadzenie dwóch pól aproksymacji, które w konsekwencji prowadzi do układów równań (9.17), pozwala skutecznie rozwiązywać złożone zagadnienia wariacyjne z końcami zamocowanymi bądź swobodnymi. Jeżeli problem opisany równaniem (9.18) i (9.19) uzupełnimy przykładowymi żądaniami typu:

$$x\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{8}, \qquad x\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \tag{9.29}$$

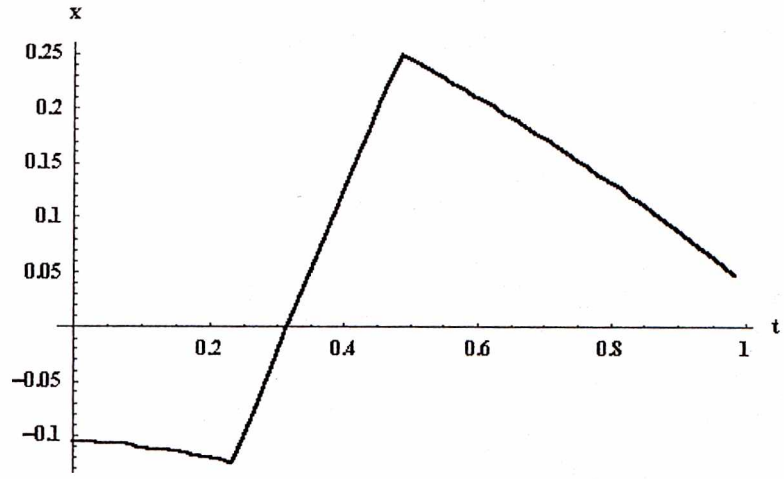
to ekstremala tego zagadnienia przyjmie postać pokazaną na rys. 9.3. Jak łatwo sprawdzić, rozwiązanie to pokrywa się z rozwiązaniami równania Eulera–Lagrange'a funkcjonału (9.18) ze stosownymi warunkami brzegowymi (9.19) i (9.29).



Rys. 9.3. Rozwiązanie numeryczne zagadnienia ((9.18), (9.19)) z dodatkowymi warunkami (9.29)
Fig. 9.3. Numerical solution of problem ((9.18), (9.19)) with additional conditions (9.29)

Przyjmijmy, że szukamy ekstremali funkcjonału (9.18) z końcami swobodnymi i dodatkowymi warunkami wewnętrznymi na przykład typu (9.29). Analizując pierwszą wariację funkcjonału (9.18) – warunki, które wynikają z tego, że końce przyjęto jako swobodne, mają postać

$$\dot{x}(0)=0, \qquad \dot{x}(1)=-\frac{1}{2} \tag{9.30}$$



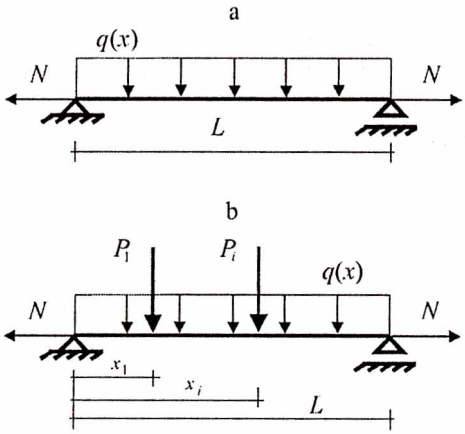
Rys. 9.4. Rozwiązanie numeryczne zagadnienia ((9.18), (9.30)) z dodatkowymi warunkami (9.29)
Fig. 9.4. Numerical solution of problem ((9.18), (9.30)) with additional conditions (9.29)

Postać rozwiązania tak sformułowanego zagadnienia przedstawiono na rys. 9.4. Jak widać, uzyskano pełną zgodność z rozwiązaniami teoretycznymi. Należy podkreślić, że w dwóch wyżej pokazanych rozwiązaniach zagadnień wariacyjnych nie mają – z uwagi na ustalenie punktów wewnętrznych (9.29) – zastosowania warunki Weierstrassa–Erdmanna, postulujące ciągłość zmiennych kanonicznych w punkcie kątowym (Gelfand i Fomin [9.6]). Rozwiązania pokazane na rys. 9.3 i 9.4 otrzymano, wykorzystując w obliczeniach bazę Haara przy $\gamma = 1$ i $m = 32$.

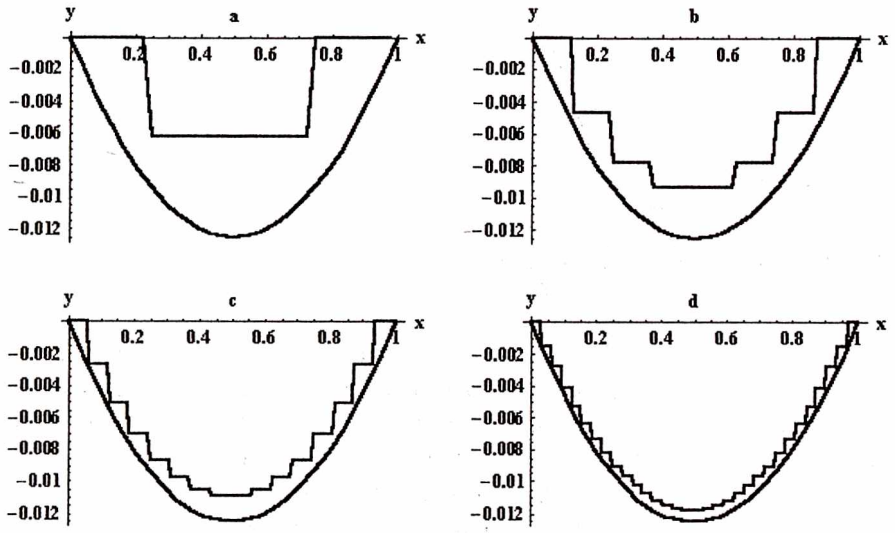
Rozważmy linię ugięcia $y(x)$ sprężystej struny o długości L rozciąganej siłami N, umieszczonej między stałymi punktami i obciążonej obciążeniem równomiernie rozłożonym q bądź obciążeniem q i układem n sił skupionych P_i (rys. 9.5). Jeżeli przyjmiemy, że energia potencjalna odkształcenia struny jest proporcjonalna do jej wydłużenia, to wyrażenie określające energię potencjalną J układu przyjmie postać

$$J = \int_0^L \left[\frac{N}{2} y'(x)^2 - q\, y(x) - \sum_{i=1}^{n} P_i \delta(x - x_i) y(x) \right] dx \tag{9.31}$$

gdzie $\delta(.)$ jest deltą Diraca.



Rys. 9.5. Schematy statyczne analizowanych strun
Fig. 9.5. Schemes of analyzed strings



Rys. 9.6. Rozwiązania ścisłe (linie ciągłe) i rozwiązania numeryczne (linie odcinkowo stałe) struny o schemacie na rys. 9.5a przy $m = 4$ (a), $m = 8$ (b), $m = 16$ (c) i $m = 32$ (d)
Fig. 9.6. Exact solution (solid line) and numerical solutions (piecewise constant lines) of string on Fig. 9.5a with $m = 4$ (a), $m = 8$ (b), $m = 16$ (c) and $m = 32$ (d).

Z zasady Lagrange'a (minimum energii potencjalnej), wykorzystując równanie (9.31), otrzymujemy związek

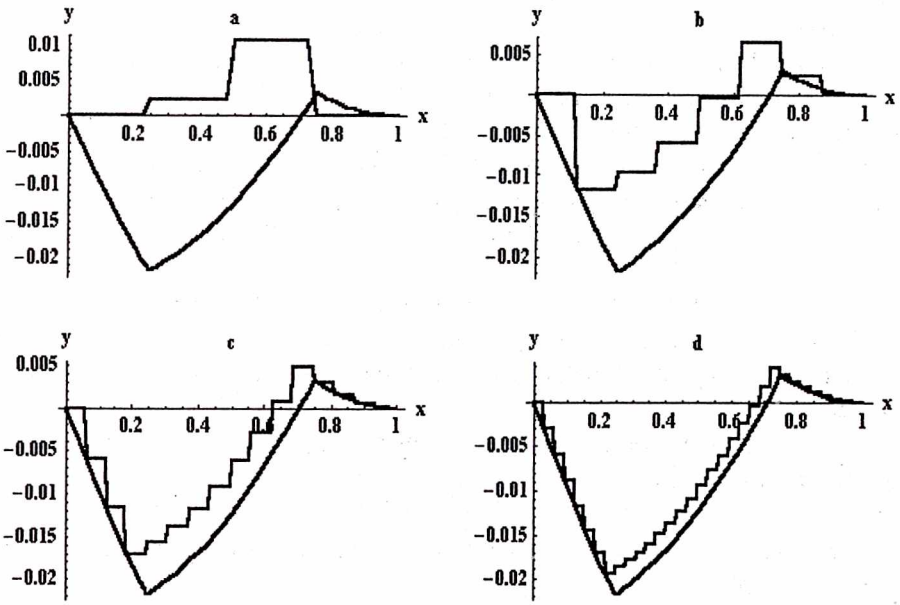
$$\delta J = \int_0^L \left[N\, y''(x) + q + \sum_{i=1}^{n} P_i \delta(x - x_i) \right] \delta y \; dx = 0 \tag{9.32}$$

w którym wyrażenie w nawiasie kwadratowym przyrównane do zera (z uwagi na dowolność wariacji δy) jest różniczkowym opisem zagadnienia struny. Przy formułowaniu związku (9.32) wykorzystano warunki brzegowe zadania w postaci

$$y(0)=0, \qquad y(L)=0 \tag{9.33}$$

Na rysunku 9.6 przedstawiono odcinkowo stałą linię ugięcia struny o schemacie jak na rys. 9.5a, otrzymaną przy różnych stopniach aproksymacji: m = 4 (rys. 9.6a), m = 8 (rys. 9.6b), m = 16 (rys. 9.6c) i m = 32 (rys. 9.6d). Rozwiązanie przybliżone, odcinkowo stałe, pokazano na tle rozwiązania ścisłego, które przy przyjętych tutaj wartościach N = 10, q = 1 i L = 1 ma postać

$$y(x)=\frac{1}{20}\left(x-x^2\right) \tag{9.34}$$



Rys. 9.7. Rozwiązania ścisłe (linie ciągłe) i rozwiązania numeryczne (linie odcinkowo stałe) struny o schemacie na rys. 9.5b przy m = 4 (a), m = 8 (b), m = 16 (c) i m = 32 (d)
Fig. 9.7. Exact solution (solid line) and numerical solutions (piecewise constant lines) of string on Fig. 9.5b with m = 4 (a), m = 8 (b), m = 16 (c) and m = 32 (d)

Na rysunku 9.7 pokazano odcinkowo stałą linię ugięcia struny o schemacie jak na rys. 9.5b, przy analogicznych jak na rys. 9.6 stopniach aproksymacji. Rozwiązanie przybliżone pokazano na tle rozwiązania ścisłego, które przy N = 10, q = 1, n = 2, $P_1 = 1$ $(x_1 = 1/4)$ i $P_2 = -1$ $(x_2 = 3/4)$ ma postać

$$y(x)=\frac{1}{40}\left[4x-2x^2-3H(-3+4x)+4xH(-3+4x)\right.$$
$$\left.+H(-1+4x)-4xH(-1+4x)\right] \tag{9.35}$$

gdzie przez $H(.)$ oznaczono funkcję Heaviside'a.

Rozwiązania pokazane na rys. 9.6 i 9.7 uzyskano z wykorzystaniem bazy Walsha przy $\gamma=1$.

9.5. Podsumowanie

Przedstawiono algorytm metody bezpośredniej rozwiązywania zagadnień wariacyjnych. W algorytmie wykorzystano podejście Ritza z dotychczas nie stosowanymi funkcjami bazowymi w postaci falkowych baz pakietowych Walsha. Podejście sformułowano dla jednego lub dwóch niezależnych pól aproksymacji, a warunki brzegowe wprowadzano metodą mnożników Lagrange'a.

Funkcjonowanie algorytmu, wraz z testami zbieżności przy różnych stopniach aproksymacji, pokazano na przykładzie zadań z końcami zamocowanymi i końcami ruchomymi, a rozwiązania otrzymywano wykorzystując różne bazy pakietowe. Analizowano także wpływ na dokładność obliczeń różnych postaci macierzy operacyjnych całkowania.

Na podstawie przeprowadzonych analiz można sformułować następujące wnioski:

- wykorzystanie w metodach bezpośrednich rozwiązywania problemów wariacyjnych różnych możliwych baz pakietowych prowadzi do tych samych rezultatów numerycznych,
- czas trwania analizy poszczególnych zagadnień zależy od przyjmowanych do rozwiązania baz i jest dłuższy w sytuacjach, w których dziedziny funkcji bazowych są większe,
- postaci macierzy operacyjnych całkowania mają istotny wpływ na uzyskiwane dokładności obliczeń,
- zastosowanie wielu pól aproksymacji umożliwia skuteczne rozwiązywanie zadań z końcami swobodnymi, choć w sposób istotny zwiększa liczbę równań formułujących rozwiązania.

W rozdziale tym wykorzystano wyniki przedstawione w pracy autora [9.14].

10. Pakietowa analiza falkowa liniowych cząstkowych równań różniczkowych

10.1. Wprowadzenie

Wiele problemów mechaniki opisywanych jest cząstkowymi równaniami różniczkowymi, w rozwiązywaniu których wykorzystywanych jest szereg metod numerycznych. Do metod tych zaliczamy między innymi metodę elementów skończonych, metodę różnic skończonych, metody kolokacyjne i odmiany klasycznych metod Galerkina i Ritza.

Poczynając od lat siedemdziesiątych ubiegłego stulecia, w analizie równań różniczkowych cząstkowych korzysta się z funkcji falkowych i pakietowych funkcji falkowych. Wykorzystanie tych baz pozwala sprowadzić problem rozwiązania równań różniczkowych cząstkowych do układów równań algebraicznych, które analizuje się standardowymi procedurami algebry liniowej. Shih i Han [10.1] jako pierwsi zastosowali podwójne szeregi Walsha do rozwiązywania cząstkowych, liniowych równań różniczkowych rzędu pierwszego. Bazując na funkcjach Haara, Okhita i Kobyashi [10.2] analizowali równania cząstkowe rzędu drugiego. Qian i Weiss [10.3] wykorzystali metodę Galerkina z falkami Daubechies do rozwiązania kilku nieliniowych równań cząstkowych z periodycznymi warunkami brzegowymi. Bertoluzza, Maday i Ravel [10.4] analizowali zbieżność i stabilność rozwiązania równania Burgersa metodą Galerkina z bazami falkowymi. Falkowe bazy pakietowe funkcji sklejanych, Joly, Maday i Perrier [10.5] wykorzystali do dyskretyzacji zmiennej przestrzennej w równaniu Burgersa z periodycznymi warunkami brzegowymi. Na przykładzie równania Burgersa, Lazaar, Ponenti, Liandrat i Tchamitchian [10.6] pokazali rozwinięcia operatorów różniczkowych w bazach falkowych. W książce pod redakcją Dahmena, Kurdili i Oswalda [10.7] w szeregu niezależnych przeglądowych rozdziałach podsumowano ówczesny stan wiedzy w zakresie zastosowań baz falkowych między innymi w analizie różniczkowych równań cząstkowych. Goedecker [8.2] przedstawił ogólne, teoretyczne rozważania dotyczące możliwości wykorzystania baz falkowych w analizie cząstkowych równań różniczkowych fizyki. Możliwości użycia metody Galerkina bazującej na funkcjach falkowych do rozwiązania szeregu równań cząstkowych pokazali Resnikoff i Wells [1.2].

Ostatnio bazy falkowe w rozwiązywaniu zagadnień opisywanych cząstkowymi równaniami różniczkowymi wykorzystywali między innymi: Holmström i Walden [10.8], Lieb i Sudret [10.9], Youhe, Jizeng i Xiaojing [10.10], [10.11], Holmström [10.12], Shaoming i Xiangwei [10.13], Christon i Roach [10.14], Vasilyev i Bowman [10.15], McWilliam, Knappett i Fox [10.16] oraz Cruz, Mendes i Magalhaes [10.17]. Ostatnio Cohen [10.18] podsumował dotychczasowe osiągnięcia w zakresie rozwoju metod numerycznych, korzystając z baz funkcji falkowych, a w tym także z metody analizy równań różniczkowych cząstkowych.

W rozdziale tym przedstawiono zastosowanie baz pakietowych Walsha do rozwiązywania liniowych równań różniczkowych cząstkowych, z wykorzystaniem sformułowanych wcześniej uogólnionych operacyjnych macierzy całkowania, i analizę wpływu postaci tych macierzy na otrzymywane rozwiązania. Pokazany algorytm analizy równań cząstkowych pozwala na przyjęcie dowolnych baz pakietowych Walsha i tym samym uogólnia algorytmy bazujące na funkcjach Walsha i Haara na całą klasę falkowych baz pakietowych.

W punkcie drugim rozdziału omówiono rozwinięcia w falkowych bazach pakietowych typowych operatorów występujących w liniowych równaniach różniczkowych cząstkowych rzędu drugiego. W punkcie trzecim pokazano algorytmy rozwiązywania równań cząstkowych rzędu pierwszego i drugiego, których funkcjonowanie – wraz z analizą zbieżności – testowano na wybranych przykładach. Uzyskane wyniki podsumowano w punkcie czwartym rozdziału.

10.2. Operatory całkowania i różniczkowania w falkowych bazach pakietowych Walsha

Niech funkcja $y(x,t)$ dwóch zmiennych niezależnych x (zmiennej przestrzennej) i t (czasu) będzie określona dla $0 \le x \le 1$ i $0 \le t \le 1$. Przyjęta dziedzina funkcji $y(x,t)$ jest podyktowana obszarem określoności pakietowych funkcji bazowych Walsha, choć nic nie stoi na przeszkodzie, żeby – przez proste skalowanie – zmienić zakresy zmiennych niezależnych x i t. Rozwijając funkcję $y(x,t)$ w podwójny szereg baz pakietowych Walsha odpowiednio o stopniach aproksymacji m_t i m_x dla zmiennej czasowej i przestrzennej otrzymujemy

$$\mathbf{y}(x,t) = \mathbf{H}_{m_x}^T(x)\mathbf{Y}\mathbf{H}_{m_t}(t) \tag{10.1}$$

gdzie składowe y_{ji} macierzy $\mathbf{Y}$ o liczbie wierszy 2^{m_x} i kolumn 2^{m_t} obliczamy z relacji

$$y_{ji} = \int_0^1 \int_0^1 h_j(x) y(x,t) h_i(t) dx\, dt \tag{10.2}$$

Dla funkcji $y(x,t)$ całkowalnej z kwadratem i przy odpowiednio wysokich stopniach aproksymacji m_t i m_x współczynniki y_{ji} dane relacją (10.2) można generować nie przez na ogół żmudny proces całkowania, lecz przez proste operacje macierzowe po przyjęciu, że funkcję $y(x,t)$ aproksymujemy funkcją odcinkowo stałą.

Przy takim założeniu macierz $\mathbf{Y}$, reprezentującą funkcję $y(x,t)$, otrzymujemy rozwijając odcinkowo stałą funkcję zmiennej t w bazie $\mathbf{H}_{m_t}(t)$, wynikiem czego jest macierz współczynników zależnych od zmiennej przestrzennej x, którą – przyjmując odcinkowo stałą aproksymację każdej składowej tej macierzy – rozwijamy w bazie funkcji $\mathbf{H}_{m_x}(x)$.

Rozpatrzmy operację całkowania funkcji $y(x,t)$ po zmiennej x, której rezultatem jest funkcja $g(x,t)$ dana relacją

$$g(x,t) = \int_0^x y(x,t)dx + g(0,t) \tag{10.3}$$

gdzie $g(0,t) = g(x,t)\big|_{x=0}$.

Wykorzystując związek (10.1), dyskretną postać $\mathbf{g}(x,t)$ funkcji $g(x,t)$ możemy przedstawić jako

$$\begin{aligned}\mathbf{g}(x,t) &= \int_0^x \mathbf{H}_{m_x}^T(x)\mathbf{Y}\mathbf{H}_{m_t}(t)dx + \mathbf{H}_{m_x}^T(x)\mathbf{G}_0\mathbf{H}_{m_t}(t) \\ &= \int_0^x \mathbf{H}_{m_x}^T(x)dx\,\mathbf{Y}\mathbf{H}_{m_t}(t) + \mathbf{H}_{m_x}^T(x)\mathbf{G}_0\mathbf{H}_{m_t}(t) \\ &\cong \mathbf{H}_{m_x}^T\mathbf{P}_{m_x}^T\mathbf{Y}\mathbf{H}_{m_t} + \mathbf{H}_{m_x}^T(x)\mathbf{G}_0\mathbf{H}_{m_t}\end{aligned} \tag{10.4}$$

gdzie

$$\mathbf{G}_0 = \begin{bmatrix} \underbrace{\begin{matrix}\mathbf{g}_0 \\ \dots \\ \mathbf{g}_0\end{matrix}}_{k_x} \\ \mathbf{0} \\ \dots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{10.5}$$

a $\mathbf{g}_0$ jest macierzą współczynników rozwinięcia dyskretnej postaci $\mathbf{g}(0,t)$

$$\mathbf{g}(0,t) = \mathbf{g}_0 \mathbf{H}_{m_t}(t) \tag{10.6}$$

Przez k_x oznaczono liczbę funkcji bazowych z najniższej wykorzystywanej w aproksymacji zmiennej x podprzestrzeni V_j, a przez $\mathbf{P}_{m_x}$ oznaczono operacyjną macierz całkowania zgodnie z relacją

$$\int_0^x \mathbf{H}_{m_x}(x)\,dx \cong \mathbf{P}_{m_x} \mathbf{H}_{m_x}(x)$$

Jeżeli funkcję $g(x,t)$ rozwiniemy w podwójny szereg z bazami pakietowymi Walsha

$$\mathbf{g}(x,t) = \mathbf{H}_{m_x}^T(x) \mathbf{G} \mathbf{H}_{m_t}(t) \tag{10.7}$$

to uwzględniając (10.7) w relacji (10.4), otrzymujemy

$$\mathbf{G} = \mathbf{P}_{m_x}^T \mathbf{Y} + \mathbf{G}_0 \tag{10.8}$$

Relacja (10.8) pozwala znaleźć macierz współczynników rozwinięcia $\mathbf{G}$ całki po zmiennej x z funkcji $y(x,t)$ danej macierzą współczynników jej rozwinięcia $\mathbf{Y}$.

Dalej wykorzystywana relacja odwrotna do (10.8) ma postać

$$\mathbf{Y} = \left(\mathbf{P}_{m_x}^{-1}\right)^T (\mathbf{G} - \mathbf{G}_0) \tag{10.9}$$

W analogiczny sposób, jaki pokazano wyżej, możemy znaleźć funkcję $d(x,t)$, która jest całką z funkcji $y(x,t)$ po zmiennej t

$$d(x,t) = \int_0^t y(x,t)dt + d(x,0) \tag{10.10}$$

gdzie $d(x,0) = d(x,t)\big|_{t=0}$.

Na podstawie relacji (10.1) możemy przedstawić dyskretną postać $\mathbf{d}(x,t)$ funkcji $d(x,t)$ jako

$$\begin{aligned} \mathbf{d}(x,t) &= \int_0^t \mathbf{H}_{m_x}^T(x) \mathbf{Y} \mathbf{H}_{m_t}(t)dt + \mathbf{H}_{m_x}^T(x) \mathbf{D}_0 \mathbf{H}_{m_t}(t) \\ &\cong \mathbf{H}_{m_x}^T \mathbf{P}_{m_x}^T \mathbf{Y} \mathbf{H}_{m_t} + \mathbf{H}_{m_x}^T(x) \mathbf{D}_0 \mathbf{H}_{m_t} \end{aligned} \tag{10.11}$$

gdzie

$$\mathbf{D}_0 = \left[\overbrace{\mathbf{d}_0, \ldots, \mathbf{d}_0}^{k_t}, \mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0} \right] \tag{10.12}$$

a $\mathbf{d}_0$ jest rozwinięciem dyskretnej postaci warunku $d(0,t)$

$$\mathbf{d}(0,t) = \mathbf{H}_{m_x}^T \mathbf{d}_0 \tag{10.13}$$

Przez k_t oznaczono liczbę funkcji bazowych z najniższej wykorzystywanej w aproksymacji zmiennej t podprzestrzeni V_i, a przez $\mathbf{P}_{m_t}$ oznaczono operacyjną macierz całkowania zgodnie z relacją

$$\int_0^t \mathbf{H}_{m_t}(t)dt \cong \mathbf{P}_{m_t} \mathbf{H}_{m_t}(t)$$

Uwzględniając, że funkcję $d(x,t)$ możemy w postaci dyskretnej przedstawić jako

$$\mathbf{d}(x,t) = \mathbf{H}_{m_x}^T(x)\mathbf{D}\mathbf{H}_{m_t}(t) \tag{10.14}$$

i korzystając z relacji (10.11), otrzymujemy

$$\mathbf{D} = \mathbf{Y}\mathbf{P}_{m_t} + \mathbf{D}_0 \tag{10.15}$$

Relacja (10.15) pozwala znaleźć macierz współczynników rozwinięcia $\mathbf{D}$ całki po zmiennej t z funkcji $y(x,t)$ danej macierzą współczynników jej rozwinięcia $\mathbf{Y}$.

Dalej wykorzystywana relacja odwrotna do (10.15) ma postać

$$\mathbf{Y} = (\mathbf{D} - \mathbf{D}_0)\mathbf{P}_{m_t}^{-1} \tag{10.16}$$

Związki (10.8) i (10.9) oraz (10.15) i (10.16) będą stanowić podstawę algorytmów rozwiązywania różniczkowych liniowych równań cząstkowych rzędu pierwszego i drugiego.

10.3. Analiza różniczkowych równań cząstkowych

Funkcjonowanie algorytmów numerycznych pozwalających na przybliżone rozwiązywanie liniowych cząstkowych równań różniczkowych przetestowano na przykładach równań rzędu pierwszego i drugiego.

Rozpatrzmy równanie rzędu pierwszego

$$y'(x,t)+\dot{y}(x,t)=ay(x,t)+bf(x,t) \tag{10.17}$$

wraz z danymi warunkami brzegowymi

$$\begin{aligned} y(0,t)&=y(x,t)\big|_{x=0} \\ y(x,0)&=y(x,t)\big|_{t=0} \end{aligned} \tag{10.18}$$

gdzie $y'(x,t)=\partial y(x,t)/\partial x$, $\dot{y}(x,t)=\partial y(x,t)/\partial t$, a wielkości parametrów a i b oraz funkcja $f(x,t)$ są dane.

Jeżeli przyjmiemy, że szukaną funkcją jest $y'(x,t)$, której dyskretną reprezentacją jest macierz $\mathbf{Y}$ jej współczynników rozwinięcia w bazach pakietowych ($y':\mathbf{Y}$), to funkcję $y(x,t)$ – a precyzyjniej macierz współczynników jej rozwinięcia – otrzymujemy z relacji (10.8)

$$y(x,t):\mathbf{P}_{m_x}^T\mathbf{Y}+\mathbf{G}_0 \tag{10.19}$$

a pochodna $\dot{y}(x,t)$ – a precyzyjniej – macierz współczynników jej rozwinięcia wynika z relacji (10.19) i (10.16)

$$\dot{y}(x,t):\left(\mathbf{P}_{m_x}^T\mathbf{Y}+\mathbf{G}_0-\mathbf{D}_0\right)\mathbf{P}_{m_t}^{-1} \tag{10.20}$$

Uwzględniając (10.19), (10.20) w relacji (10.17) i przyjmując, że macierz współczynników rozwinięcia danej funkcji $f(x,t)$ jest dana przez $\mathbf{F}$ ($f(x,t):\mathbf{F}$), otrzymujemy

$$\mathbf{Y}+\left(\mathbf{P}_{m_x}^T\mathbf{Y}+\mathbf{G}_0-\mathbf{D}_0\right)\mathbf{P}_{m_t}^{-1}=a\left(\mathbf{P}_{m_x}^T\mathbf{Y}+\mathbf{G}_0\right)+b\mathbf{F} \tag{10.21}$$

Relacja (10.21) jest algebraiczną postacią analizowanego różniczkowego równania cząstkowego (10.17). Jeżeli wprowadzimy oznaczenia

$$\begin{aligned} \mathbf{L}&=-\left(\mathbf{G}_0-\mathbf{D}_0\right)\mathbf{P}_{m_t}^{-1}+a\mathbf{G}_0+b\mathbf{F} \\ \tilde{\mathbf{y}}&=\begin{bmatrix}\mathbf{Y}_{.1}\\ \mathbf{Y}_{.2}\\ \vdots\end{bmatrix}, \qquad \tilde{\mathbf{l}}=\begin{bmatrix}\mathbf{L}_{.1}\\ \mathbf{L}_{.2}\\ \vdots\end{bmatrix} \end{aligned} \tag{10.22}$$

gdzie w wektory $\tilde{\mathbf{y}}$ i $\tilde{\mathbf{l}}$ o wymiarach ($2^{m_x}2^{m_t}\times 1$) zestawiono kolumny ($\mathbf{Y}_{.i},\mathbf{L}_{.i}$) odpowiednio macierzy $\mathbf{Y}$ i $\mathbf{L}$, to wykorzystując operację $\otimes$ iloczynu Kroneckera, możemy zapisać układ równań (10.21) w postaci

$$\left[\left(\mathbf{I}_{m_x} - a\mathbf{P}_{m_x}^T\right)\otimes\mathbf{I}_{m_t} + \mathbf{P}_{m_x}^T \otimes \left(\mathbf{P}_{m_t}^{-1}\right)^T\right]\tilde{\mathbf{y}} = \tilde{\mathbf{I}} \tag{10.23}$$

Przez $\mathbf{I}_{m_x}$ i $\mathbf{I}_{m_t}$ oznaczono macierze jednostkowe o wymiarach odpowiednio 2^{m_x} i 2^{m_t}.

Rozwiązanie $\tilde{\mathbf{y}}$ tego układu równań pozwala – zgodnie z (10.22), (10.20), (10.19) i (10.1) – na zapisanie dyskretnej postaci poszukiwanej funkcji $y(x,t)$ i jej pochodnych y' i $\dot{y}$ jako:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}(x,t) &= \mathbf{H}_{m_x}^T\left(\mathbf{P}_{m_x}^T\mathbf{Y} + \mathbf{G}_0\right)\mathbf{H}_{m_t} \\
\mathbf{y}'(x,t) &= \mathbf{H}_{m_x}^T\mathbf{Y}\mathbf{H}_{m_t} \\
\dot{\mathbf{y}}(x,t) &= \mathbf{H}_{m_x}^T\left(\mathbf{P}_{m_x}^T\mathbf{Y} + \mathbf{G}_0 - \mathbf{D}_0\right)\mathbf{P}_{m_t}^{-1}\mathbf{H}_{m_t}
\end{aligned} \tag{10.24}$$

Testy zbieżności rozwiązania (10.24) równania (10.17) przeprowadzono, przyjmując $a = b = 0$, $y(0,t) = e^{-t}$, $y(x,0) = e^{x}$. Dla takich danych rozwiązaniem ścisłym (10.17) jest funkcja $y(x,t) = e^{x-t}$.

Globalny błąd obliczeń Δ^{γ} zdefiniujmy jako wyrażoną w % moc różnicy rozwiązania dokładnego ($y^e(x,t)$) i przybliżonego ($y^a(x,t)$), odniesioną do mocy rozwiązania dokładnego

$$\Delta^{\gamma} = \left(\sum_{j=1}^{2^{m_t}}\sum_{i=1}^{2^{m_x}}\left|y^e(x_i,t_j) - y^a(x_i,t_j)\right|^2 \Big/ \sum_{j=1}^{2^{m_t}}\sum_{i=1}^{2^{m_x}}\left|y^e(x_i,t_j)\right|^2\right)100\% \tag{10.25}$$

przy parametrze γ definiującym postać operacyjnej macierzy całkowania. Przez $y^e(x_i,t_j)$ i $y^a(x_i,t_j)$ oznaczono odpowiednio wartości funkcji $y(x,t)$ w środkowych punktach przedziałów podziału zmiennej x i t odpowiednio dla rozwiązania dokładnego i przybliżonego.

W tabelach 10.1–10.3 pokazano globalne błędy rozwiązań równania (10.17) z warunkami brzegowymi (10.18) dla różnych wartości parametru γ.

Tabela 10.1. Globalny błąd obliczeń Δ^{γ} [%] rozwiązania równania (10.17) przy $\gamma = 0{,}45$ i różnych stopniach aproksymacji m_x i m_t
Table 10.1. Numerical global error Δ^{γ} [%] of (10.17) equation's solution with $\gamma = 0.45$ for different approximation levels m_x and m_t

m_x/m_t	2	3	4	5
2	0,0217	0,0048	0,0022	0,0018
3	0,0211	0,0052	0,0019	0,0012
4	0,0207	0,0040	0,0077	0,0011
5	0,0207	0,0036	0,0015	30,71

Tabela 10.2. Globalny błąd obliczeń Δ^{γ} [%] rozwiązania równania (10.17) przy $\gamma = 0{,}50$ i różnych stopniach aproksymacji m_x i m_t
Table 10.2. Numerical global error Δ^{γ} [%] of (10.17) equation's solution with $\gamma = 0{,}50$ for different approximation levels m_x and m_t

m_x/m_t	2	3	4	5
2	0,0061	0,0025	0,0021	0,0021
3	0,0035	$3{,}8\cdot10^{-4}$	$1{,}5\cdot10^{-4}$	$1{,}3\cdot10^{-4}$
4	0,0032	$2{,}2\cdot10^{-4}$	$2{,}3\cdot10^{-5}$	$9{,}9\cdot10^{-6}$
5	0,0032	$2{,}1\cdot10^{-4}$	$1{,}4\cdot10^{-5}$	$1{,}4\cdot10^{-6}$

Tabela 10.3. Globalny błąd obliczeń Δ^{γ} [%] rozwiązania równania (10.17) przy $\gamma = 0{,}55$ i różnych stopniach aproksymacji m_x i m_t
Table 10.3. Numerical global error Δ^{γ} [%] of (10.17) equation's solution with $\gamma = 0.55$ for different approximation levels m_x and m_t

m_x/m_t	2	3	4	5
2	0,0172	0,0168	0,0165	0,0165
3	0,0038	0,0035	0,0031	0,0029
4	0,0015	0,0013	$8{,}7\cdot10^{-4}$	$6{,}7\cdot10^{-4}$
5	0,0010	$9{,}2\cdot10^{-4}$	$4{,}4810^{-4}$	$2{,}2\cdot10^{-4}$

Jeśli $\gamma < 0{,}5$ i stopnie aproksymacji są dostatecznie duże, to macierz współczynników układu równań (10.23) jest słabo uwarunkowana, co skutkuje dużymi błędami numerycznymi. Przy $0{,}5 < \gamma \leq 1$ błąd rozwiązania rośnie i jest największy przy $\gamma = 1$, choć nawet przy $m_x = m_t = 2$ nie przekracza wartości 0,53%. Pokazane w tabelach błędy są identyczne dla wszystkich możliwych kombinacji baz pakietowych Walsha.

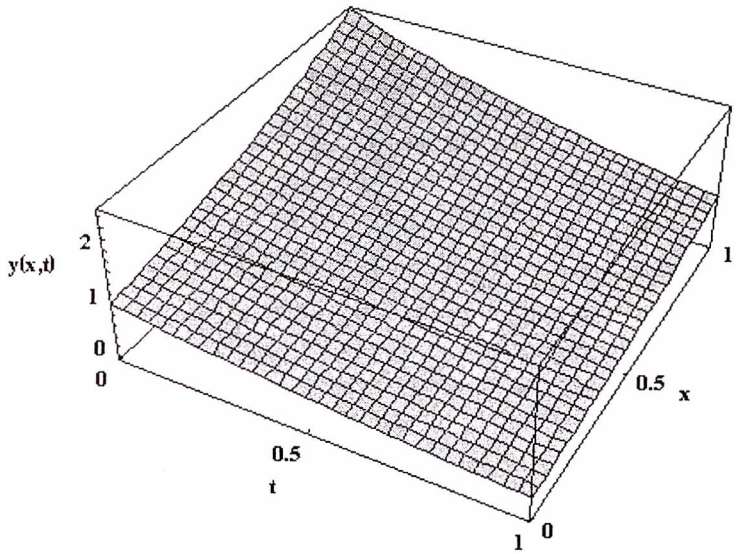
Na rysunkach 10.1 i 10.2 pokazano rozwiązania analizowanego równania przy $m_x = m_t = 5$ i odpowiednio przy $\gamma = 0{,}5$ i $\gamma = 0{,}45$. Przy tych parametrach macierz współczynników układu równań (10.23) miała wymiar 1024×1024.

Rozpatrzmy teraz równanie cząstkowe rzędu drugiego, które może opisywać zjawiska przepływu ciepła często analizowane w mechanice. Załóżmy, że – przy danych a, b i $f(x,t)$ – szukamy rozwiązania równania

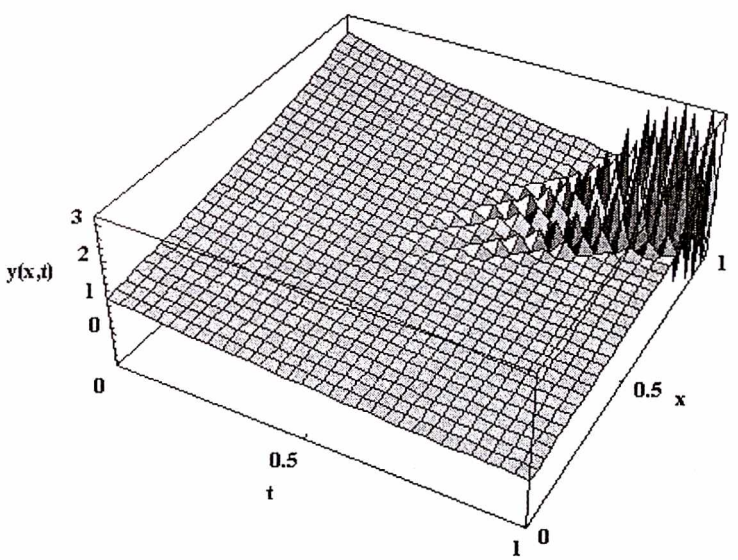
$$y''(x,t) + \dot{y}(x,t) = ay(x,t) + bf(x,t) \tag{10.26}$$

z warunkami brzegowymi w postaci

$$\begin{aligned} y(0,t) &= y(x,t)\big|_{x=0} \\ y'(0,t) &= y'(x,t)\big|_{x=0} \\ y(x,0) &= y(x,t)\big|_{t=0} \end{aligned} \tag{10.27}$$



Rys. 10.1. Rozwiązanie równania (10.17) przy $\gamma = 0{,}5$
Fig. 10.1. Solution of (10.17) equation with $\gamma = 0.5$



Rys. 10.2. Rozwiązanie równania (10.17) przy $\gamma = 0{,}45$
Fig. 10.2. Solution of (10.17) equation with $\gamma = 0.45$

Jeżeli, jak poprzednio, przyjmiemy, że szukaną funkcją jest $y'(x,t)$ ($y' : \mathbf{Y}$), to korzystając z relacji (10.8), (10.9), (10.15) i (10.16), możemy łatwo wykazać, że macierze rozwinięć w bazach $\mathbf{H}_{m_x}$ i $\mathbf{H}_{m_t}$ funkcji y'', y i $\dot{y}$ mają odpowiednio postać:

$$\begin{aligned} y'' &: \mathbf{P}_{m_x}^{-1}\left(\mathbf{G}-\mathbf{G}_0'\right) \\ y &: \mathbf{P}_{m_x}^{T}\mathbf{Y}+\mathbf{G}_0 \\ \dot{y} &: \left(\mathbf{P}_{m_x}^{T}\mathbf{Y}+\mathbf{G}_0-\mathbf{D}_0\right)\mathbf{P}_{m_t}^{-1} \end{aligned} \tag{10.28}$$

gdzie przez $\mathbf{G}_0'$ oznaczono macierz analogiczną do danej relacją (10.5), z tym jednak, że jej wierszami są współczynniki rozwinięcia warunku brzegowego $y'(0,t)$, a nie jak poprzednio warunku brzegowego $y(0,t)$.

Postępując analogicznie jak w zadaniu pierwszym, z równania (10.26) otrzymamy relację na szukaną reprezentację $\mathbf{Y}$ funkcji $y'(x,t)$, która przyjmuje następującą postać:

$$\left\{\left[\left(\mathbf{P}_{m_x}^{-1}\right)^T - a\mathbf{P}_{m_x}^{T}\right]\otimes\mathbf{I}_{m_t}+\mathbf{P}_{m_x}^{T}\otimes\left(\mathbf{P}_{m_t}^{-1}\right)^T\right\}\tilde{\mathbf{y}}=\tilde{\mathbf{l}} \tag{10.29}$$

gdzie $\tilde{\mathbf{l}}$ wynika z macierzy $\mathbf{L}$, którą w tym zadaniu można zapisać jako

$$\mathbf{L}=\left(\mathbf{P}_{m_x}^{-1}\right)^T\mathbf{G}_0'-\left(\mathbf{G}_0-\mathbf{D}_0\right)\mathbf{P}_{m_t}^{-1}+a\mathbf{G}_0+b\mathbf{F} \tag{10.30}$$

Przykładowego rozwiązania równania (10.26) będziemy szukać przy następujących danych

$$\begin{aligned} &a=0, \qquad b=1, \qquad f(x,t)=e^{x+t} \\ &y(0,t)=y'(x,t)=\cosh(t), \qquad y(x,0)=e^{x} \end{aligned} \tag{10.31}$$

które pozwalają na uzyskanie rozwiązania analitycznego w postaci

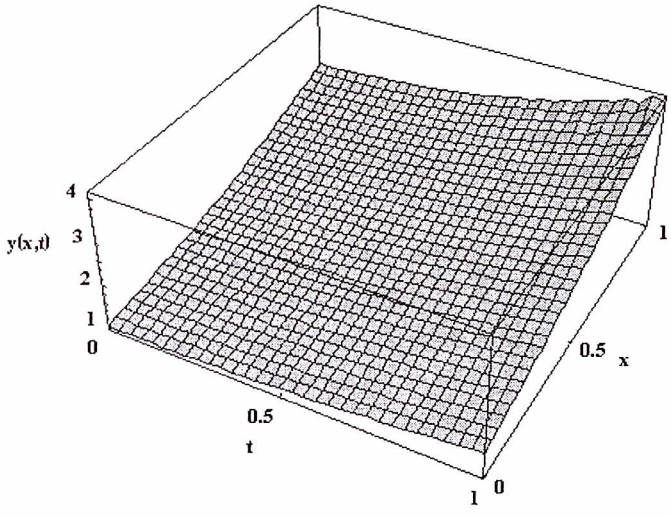
$$y(x,t)=e^{x}\cosh(t)$$

Na rysunku 10.3 pokazano rozwiązanie równania (10.23) przy $m_x=m_t=5$ i $\gamma=0{,}5$. Globalny błąd rozwiązania (10.25) wyniósł w tym przypadku $9{,}9\cdot10^{-4}\%$.

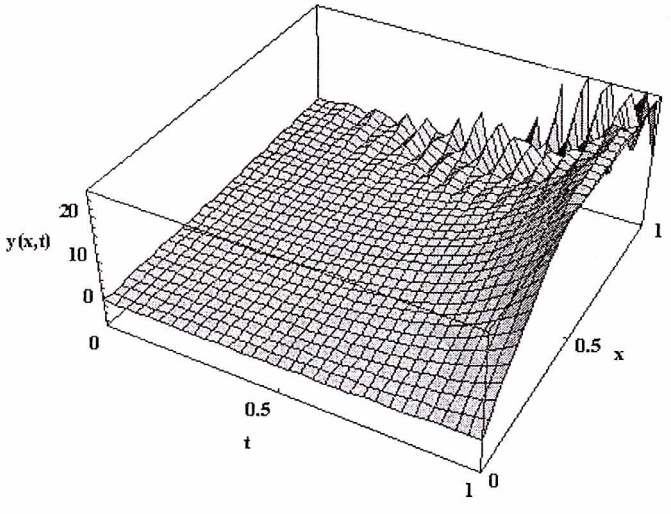
Rozwiązanie równania (10.23) – pokazane na rys. 10.4 – uzyskane po przyjęciu następujących danych

$$\begin{aligned} a=0, \qquad b=1, \qquad & f(x,t)=0{,}5\sin(5x)+0{,}5\cos(3t)+e^{x+t} \\ & y(0,t)=y'(x,t)=\cosh(5t) \\ & y(x,0)=e^{x} \end{aligned} \tag{10.32}$$

pokazuje, że pakietowe bazy falkowe są efektywnym narzędziem analizy zagadnień także z funkcjami szybkozmiennymi.



Rys. 10.3. Rozwiązanie równania (10.23) przy $m_x = m_t = 5$ i $\gamma = 0{,}5$
Fig. 10.3. Solution of (10.23) equation with $m_x = m_t = 5$ and $\gamma = 0.5$



Rys. 10.4. Rozwiązanie równania (10.23) przy warunkach (10.32) i przy $m_x = m_t = 5$ oraz $\gamma = 0{,}5$
Fig. 10.4. Solution of (10.23) equation with conditions (10.32) for $m_x = m_t = 5$ and $\gamma = 0.5$

10.4. Podsumowanie

W rozdziale przedstawiono algorytmy numeryczne rozwiązywania liniowych różniczkowych równań cząstkowych. Zastosowanie podwójnych szeregów z falkowymi,

pakietowymi funkcjami bazowymi Walsha oraz operacyjnych macierzy całkowania pozwoliło na sprowadzenie równań cząstkowych do układów liniowych równań algebraicznych.

Wprowadzenie pojęcia globalnego błędu numerycznego rozwiązania umożliwia ocenę zbieżności rozwiązań w funkcji stopni aproksymacji zmiennej przestrzennej i czasowej oraz w funkcji wielkości parametru odpowiedzialnego za postać operacyjnych macierzy całkowania.

Testy numeryczne przeprowadzone na przykładach liniowych równań różniczkowych cząstkowych pozwoliły na sformułowanie kilku ogólnych spostrzeżeń:

- algorytmy oparte na podwójnych szeregach z falkowymi, pakietowymi funkcjami bazowymi Walsha są skutecznym narzędziem w analizie liniowych równań cząstkowych niewysokich rzędów,
- wszystkie bazy pakietowe Walsha i ich kombinacje prowadzą do identycznych rozwiązań w porównywalnym czasie,
- błąd globalny rozwiązań maleje, a rozwiązania asymptotycznie dążą do rozwiązania ścisłego, wraz ze wzrostem stopni aproksymacji zmiennych przestrzennych i czasu,
- modyfikowane macierze operacyjne całkowania, przy $\gamma = 0{,}5$ i wyższych stopniach aproksymacji, prowadzą do źle uwarunkowanych macierzy współczynników algebraicznych układów równań; najlepsze rozwiązania uzyskuje się, gdy $\gamma = 0{,}5$.

W przedstawionych algorytmach łatwo można wprowadzić modyfikacje, polegające na podziale analizowanego obszaru na podobszary i tym samym – przy przyjętym poziomie błędu rozwiązania – uzyskać zadowalające rozwiązania przy niższych stopniach aproksymacji. Idea tych modyfikacji jest taka sama jak w algorytmie postępowania przyjętym w analizie długich czasów w zagadnieniach początkowych.

Literatura

Rozdział 1

[1.1] CHUI C. K., *An introduction to wavelets*, Academic Press, Boston, 1992.

[1.2] RESNIKOFF H. L., WELLS R. O., *Wavelet analysis. The scalable structure of information*, Spinger-Verlag, New York, 1998.

[1.3] MALLAT S., *A wavelet tour of signal processing*, Academic Press, San Diego, 1999.

[1.4] ABOUFADEL E., SCHLICKER S., *Discovering wavelets*, John Wiley & Sons, New York, 1999.

[1.5] WOJTASZCZYK P., *Teoria falek*, PWN, Warszawa 2000.

[1.6] BIAŁASIEWICZ J. T., *Falki i aproksymacje*, WNT, Warszawa, 2000.

[1.7] CHUI C. K., MONTEFUSCO L., PUCCIO L., *Wavelets. Theory, algorithms and applications*, Academic Press, San Diego, 1994.

[1.8] GOSWAMI J. C., CHAN A.K., *Fundamentals of wavelets. Theory, algorithms and applications*, John Wiley & Sons, New York, 1999.

[1.9] PERCIVAL D. B., WALDEN A. T., *Wavelet methods for time series analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

Rozdział 2

[2.1] DAUBECHIES I., *Ten lectures on wavelets*, SIAM, Philadelphia, PA, 1992.

[2.2] MEYER Y., *Wavelets and operators*, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

[2.3] VETTERLI M., KOVACEVIC J., *Wavelets and subband coding*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New York, 1995.

Rozdział 3

[3.1] COIFMAN R. R., MEYER Y., WICKERHAUSER M. V., *Wavelet analysis and signal processing. In: Wavelets and their Applications*, Jones and Barlett. B. Ruskai et al. editors, 153–178, 1992.

[3.2] WOLFRAM RESEARCH, *Mathematica wavelet explorer*, Wolfram Research Inc., Champaign, 1996.

[3.3] WEISSTEIN E. W., *CRC concise encyclopedia of mathematics*, CRC Press, Boca Raton, 1999.

Rozdział 4

[4.1] MAIA N. M. M., SILVA J. M. M., *Theoretical and experimental modal analysis*, Research Studies Press Taunton, Somerset, England, 1996.
[4.2] NEWLAND D. E., *An introduction to random vibrations, spectral and wavelet analysis*, Longman Group, Singapore, 1993.
[4.3] NEWLAND D. E., *Wavelet analysis of vibration, Part 1: Theory*, J. Vibration and Acoustics, 116, 409–416, 1994.
[4.4] NEWLAND D. E., *Wavelet analysis of vibration, Part 2: Wavelet map*, J. Vibration and Acoustics, 116, 417–425, 1994.
[4.5] RUZZENE M., FASANA A., GARIBALDI L., PIOMBO B., *Natural frequencies and dampings identification using wavelet transform: Application to real data*, Mechanical Systems and Signal Processing, 11, 207–218, 1997.
[4.6] STASZEWSKI W. J., *Identification of damping in MDOF systems using time-scale decomposition*, J. Sound Vibration, 203, 283–305, 1997.
[4.7] STASZEWSKI W. J., *Identification of non-linear systems using multi-scale ridges and skeletons of the wavelet transform*, J. Sound Vibration, 214, 639–658, 1998.
[4.8] SUNG C. K., TAI H. M., CHEN C. W., *Locating defects of a gear system by the technique of wavelet transform*, Mechanism and Machine Theory, 35, 1169–1182, 2000.
[4.9] RUBINI R., MENEGHETTI U., *Application of the envelope and wavelet transform analyses for the diagnosis of incipient faults in ball bearings*, Mechanical Systems and Signal Processing, 15, 287–302, 2001.
[4.10] NEILD S. A., McFADDEN P. D., WILLIAMS M. S., *A review of time-frequency methods for structural vibration analysis*, Engineering Structures, 25, 713–728, 2003.

Rozdział 5

[5.1] PARKER T. S., CHUA L. O., *Practical numerical algorithm for chaotic systems*, Springer-Verlag, New York, 1989.
[5.2] ARGYRIS J., FAUST G., HAASE M., *An exploration of chaos*, Elsevier Science, Amsterdam, 1994.
[5.3] CHEN G., DONG X., *From chaos to order. Methodologies, perspectives and applications*, World Scientific Publishing, Singapore, 1998.
[5.4] CHEN Y., LEUNG A. Y. T., *Bifurcation and chaos in engineering*, Springer-Verlag, London, 1998.
[5.5] ROBINSON C., *Dynamical systems. Stability, symbolic dynamics, and chaos*, CRC Press, Boca Raton, 1999.
[5.6] FLANDRIN P., *Time-frequency/Time-scale analysis*, Academic Press, San Diego, 1999.
[5.7] PERMANN D., HAMILTON I., *Wavelet analysis of time series for the Duffing oscillator: The detection of order within chaos*, Physical Review Letters, 69, 2607–2610, 1992.
[5.8] STASZEWSKI W. J., WORDEN K., *The analysis of chaotic behaviour using fractal and wavelet theory*, Proceedings of the International Conference on Nonlinearity, Bifurcation and Chaos, Lodz, Poland, ISBN 2-86834-110-1, 222–226, 1996.
[5.9] JIBING Z., HANGSHAN G., YINCHAO G., *Application of wavelet transform to bifurcation and chaos study*, Applied Mathematics and Mechanics, 19, 593–599, 1998.
[5.10] MASTRODDI F., BETTOLI A., *Wavelet analysis for Hopf bifurcations with aeroelastic applications*, Journal of Sound and Vibration, 225, 887–913, 1999.
[5.11] KYPRIANOU A., STASZEWSKI W. J., *On the cross wavelet analysis of Duffing oscillator*, Journal of Sound and Vibration, 228, 199–210, 1999.

[5.12] BENETTIN G., GALGANI L., GIORGILLI A., STRELCYN J. M., *Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems: A method for computing all of them. Part 2: Numerical application*, Meccanica, 15, 21–30, 1980.
[5.13] ECKMANN J. P., RUELLE D., *Ergodic theory of chaos and strange attractors*, Reviews of Modern Physics, 57, 617–656, 1985.
[5.14] GEIST K., PARLITZ U., LAUTERBORN W., *Comparison of different methods for computing Lyapunov exponents*, Progress of Theoretical Physics, 83, 875–893, 1990.
[5.15] CEDERBAUM G., MOND M., *Instability and chaos in the elastica type problem of parametrically excited columns*, Journal of Sound and Vibration, 176, 475–486, 1994.
[5.16] VAN DOOREN R., *Chaos in a pendulum with forced horizontal support motion: a tutorial*, Chaos, Solitons & Fractals, 7, 77–90, 1996.
[5.17] COIFMAN R., WICKERHAUSER M. V., *Entropy-based algorithms for best basis selection*, IEEE Transactions an Information Theory, 38, 713–718, 1992.
[5.18] GLABISZ W., *Analysis of wavelets in chaotic states for a one-degree-of-freedom system with viscoelastic restraints*, Journal of Sound and Vibration, 258, 633–648, 2002.

Rozdział 6

[6.1] LJUNG L., *System Identification: Theory for the User*, Prentice Hall PTR, New Jersey, 1987.
[6.2] PETSOUNIS K., FASSOIS S. D., *Parametric time-domain methods for the identification of vibrating structures – A critical comparisons and assessment*, J. Mechanical Systems and Signal Procesing, 15, 1031–1060, 2001.
[6.3] GHANEM R., ROMEO F., *A wavelet-based approach for the identification of linear time-varying dynamical systems*, J. Sound and Vibration, 234, 555–576, 2000.
[6.4] GHANEM R., ROMEO F., *A wavelet-based approach for model and parameter identification of non-linear system*, J. Non-Linear Mechanics, 36, 835–859, 2001.
[6.5] BELLOMO N., PREZIOSI L., *Modelling Mathematical Methods and Scientific Computation*, CRC Press, Boca Raton, 1995.
[6.6] CHEN S., BILLINGS S. A., LUO W., *Orthogonal least squares methods and their application to non-linear system identification*, Int. J. Control, 50, 1873–1896, 1989.
[6.7] WORDEN K., *Data processing and experiment design for the restoring force surface method, Part I: Integration and differentiation of measured time data*, J. Mechanical Systems and Signal Procesing, 4, 295–319, 1990.
[6.8] MASRI S. F., CAUGHEY T. K., *A nonparametric identification technique for nonlinear dynamic problems*, Journal of Applied Mechanics, 46, 433–447, 1979.
[6.9] MASRI S. F., SASSI H., CAUGHEY T. K., *Nonparametric identification of nearly arbitrary nonlinear systems*, Journal of Applied Mechanics, 49, 619–628, 1982.
[6.10] MOHAMMAD K. S., WORDEN K., TOMLINSON G. R., *Direct parameter estimation for linear and non-linear structures*, J. Sound Vibration, 152, 471–499, 1992.
[6.11] GLABISZ W., *Identification of linear and non-linear systems with Walsh wavelet packets*, Archives of Civil and Mechanical Engineering, 1, 47–62, 2001.

Rozdział 7

[7.1] FINLAYSON B. A., *The method of weighted residuals and variational principles*, Academic Press, New York, 1972.
[7.2] VILLADSEN J., MICHELSON M. L., *Solutions of differential equation models by polynomial approximation*, Prentice Hall, New Jersey, 1978.

[7.3] CORRINGTON M. S., *Solution of differential and integral equations with Walsh functions*, IEEE Transactions on Circuit Theory, CT-20, 470–476, 1973.
[7.4] CHEN C. F., HSIAO C. H., *A state-space approach to Walsh series solutions of linear sytems*, Int. J. System Sci 6, 833–858, 1975.
[7.5] CHEN C. F., TSAY V. T., WU T. T., *Walsh operational matrices for fractional calculus and their application to distributed systems*, Journal of The Franklin Instutute, 303, 267–284, 1977.
[7.6] HWANG C., SHIH Y. P., *Laguerre operational matrices for fractional calculus and applications*, Int J. Control, 34, 557–584, 1981.
[7.7] KING R. E., PARASKEVOPOULOS P. N., *Parameter identification of discrete time SISO sytems*, Int. J. Control 30, 1023–1029, 1979.
[7.8] CHANG R. Y., WANG M. L., *Legendre polynomials approximation to dynamic linear state equations with initial or boundary value conditions*, Int. J. Control, 40, 215–232, 1984.
[7.9] PARASKEVOPOULOS P. N., *Chebyshev series approach to system identification, analysis and optimal control*, Journal of The Franklin Institute, 316, 135–157, 1983.
[7.10] PARASKEVOPOULOS P. N., SPARCIS P. D., MONROURSOS S. G., *The Fourier series operational matrix of integration*, Int. J. System Sci, 16, 171–176, 1985.
[7.11] CHEN C. F., HSIAO C. H., *Haar wavelet method for solving lumped and distributed-parameter systems*, IEE Proc. Control Theory Appl., 144, 87–93, 1997.
[7.12] HSIAO C. H., *State analysis of linear time delayed systems via Haar wavelets*, Mathematics and Computers in Simulation, 44, 457–470, 1997.
[7.13] HSIAO C. H., WANG W. J., *State analysis and optimal control of linear time-varying systems via Haar wavelets*, Optim. Control Appl Meth., 19, 423–433, 1998.
[7.14] CHEN C. F., HSIAO C. H., *Wavelet approach to optimizing dynamic systems*, IEE Proc. Control Theory Appl., 146, 213–219, 1999.
[7.15] HSIAO C. H., WANG W. J., *State analysis and parameter estimation of bilinear systems via Haar wavelets*, IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, 47, 246–250, 2000.
[7.16] HSIAO C. H., WANG W. J., *Haar wavelet approach to nonlinear stiff systems*, Mathematics and Computers in Simulation, 57, 347–353, 2001.
[7.17] BJÖRCK A., DAHLQUIST G., *Metody numeryczne*, PWN, Warszawa, 1983.
[7.18] KRUPOWICZ A., *Metody numeryczne zagadnień początkowych równań różniczkowych zwyczajnych*, PWN, Warszawa, 1986.
[7.19] BREWER J. W., *Kronecker products and matrix calculus in system theory*, IEEE Transactions on Circuits and Systems, CAS-25, 772–781, 1978.
[7.20] REGALIA P. A., MITRA S. K., *Kronecker products, unitary matrices and signal processing applications*, SIAM Review, 31, 586–613, 1989.
[7.21] GLABISZ W., *State analysis of time-varying linear systems via Walsh-wavelet packets*, Archives of Civil and Mechanical Engineering, 3, 59–75, 2003.

Rozdział 8

[8.1] FANG L.-Z., THEWS R. L., *Wavelets in Physics*, World Scientific, Singapore, 1998.
[8.2] GOEDECKER S., *Wavelets and their Application for the Solution of Partial Differential Equations in Physics*, Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne, 1998.
[8.3] YOUCHE Z., JIZENG W., XIAOJING Z., *Applications of wavelet Galerkin FEM to bending of plate structures*, Acta Mechanica Solida Sinica, 12, 136–143, 1999.
[8.4] HALMSTRÖM M., *Solving hyperbolic PDEs using interpolating wavelets*, SIAM J. Sci. Comput. 21, 404–420, 1999.
[8.5] SHAOMING L., XIANGWEI Z., *The finite element method based on interpolating with wavelet basis function*, Applied Mathematics and Mechanics, 21, 13–18, 2000.

[8.6] RAZZAGHI M., YOUSEFI S., *Legendre wavelets direct method for variational problems*, Mathematics and Computers in Simulation, 53, 185–192, 2000.
[8.7] STEINBERG B. Z., McCOY J. J., MIROTZNIK M., *A multiresolution approach to homogenization and effective modal analysis of complex boundary value problems*, SIAM J. Appl. Math., 60, 939–966, 2000.
[8.8] YU G., MANSUR W. J., CARRER J. A. M., GANG L., *Stability of Galerkin and collocation time domain boundary element methods as applied to the scalar wave equation*, Computers and Structures, 74, 495–506, 2000.
[8.9] VASILYEV O. V., BOWMAN CH., *Second-generation wavelet collocation method for the solution of partial differential equations*, Journal of Computational Physics, 165, 660–693, 2000.
[8.10] AVUDAINAYAGAM A., VANI C., *Wavelet-Galerkin method for integro-differential equations*, Applied Numerical Mathematics, 32, 247–254, 2000.
[8.11] LIAND X.-Z., LIU M.-C., CHE C.-J., *Solving second kind integral equations by Galerkin methods with continuous orthogonal wavelets*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 136, 149–161, 2001.
[8.12] ABE K., KORO K., ITAMI K., *An h-hierarchical Galerkin BEM using Haar wavelets*, Engineering Analysis with Boundary Elements, 25, 581–591, 2001.
[8.13] REDDY J. N., *Applied functional analysis and variational methods in engineering*, McGraw-Hill Inc., New York, 1986.
[8.14] ODEN J. T., *Finite elements of nonlinear continua*, McGraw-Hill Inc., New York,1972.
[8.15] STAKGOLD I., *Boundary value problems of mathematical physics*, Vol. I, II, MacMillan Comp., New York, 1967.
[8.16] PILKEY W. D., WUNDERLICH W., *Mechanics of structures. Variational and computational methods*, CRC Press Inc., Boca Raton, 1994.
[8.17] LIU B., *Solvability of multi-point boundary value problem at resonance (II)*, Applied Mathematics and Computation, 136, 353–377, 2003.
[8.18] ZIENKIEWICZ O. C., TAYLOR R. L., *The finite element method*, McGraw-Hill, London, 1989.
[8.19] FLECHTER C. A. J., *Computational Galerkin methods*, Springer-Verlag, New York, 1984.
[8.20] CIARLET P. G., SCHULTZ M. H., VARGA R. S., *Numerical methods of high-order accuracy for nonlinear boundary value problem*, Numerishe Mathematic, 12, 266–279, 1968.
[8.21] KATTI C. P., BABOO S. N., SIVALOGANATHAN S., *On the convergence of finite difference methods for a class of two-point boundary value problems with periodic boundary conditions*, Applied Mathematics and Computation, 75, 287–302, 1996.
[8.22] TIMOSHENKO S. P., GERE J. M., *Theory of elastic stability*, McGraw-Hill, New York, 1961.
[8.23] GLABISZ W., *The use of Walsh-wavelet packets in linear value problems*, Computers and Structures, 82, 131–141, 2004.

Rozdział 9

[9.1] GOLDSTINE H. H., *A history of the calculus of variations from the 17th through the 19th century*, Springer Verlag, New York, 1980.
[9.2] WASHIZU K., *Variational methods in elasticity and plasticity*, 2nd. ed., Pergamon Press, Oxford, 1975.
[9.3] ODEN J. T., REDDY J. N., *Variational methods in theoretical mechanics*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1976.
[9.4] MASON J., *Methods of functional analysis for application in solid mechanics*, Studies in Applied Mechanics 9, Elsevier Science Publishers, 1985.

[9.5] ATHERTON R. W., HOMSY G. M., *On the existence and formulation of variational principles for nonlinear differential equations*, Studies in Applied Mathematics LIV, 31–60, 1975.
[9.6] GELFAND I.M., FOMIN S.V., *Calculus of variations*, Prentice-Hall, Englewood Clifs, New Jork, 1963.
[9.7] CHEN C.F., HSIAO C.H., *A Walsh series direct method for solving variational problems*, J. Franklin Institute, 300, 265–280, 1975.
[9.8] HWANG C., SHIH Y.P., *Laguerre series direct method for variational problems*, J. Optimization Theory Appl., 39, 143–149, 1983.
[9.9] CHAN R.Y., WANG M.L., *Shifted Legendre direct method for variational problems*, J. Optimization Theory Appl., 39, 299–307, 1983.
[9.10] HORNG I.R., CHOU, J.H., *Shifted Chebyshev direct method for solving variational problems*, Int. J. Systems Sci., 16, 855–861, 1985.
[9.11] RAZZAGHI M., RAZZAGHI M., *Fourier series direct method for variational problems*, Int. J. Control, 48, 887–895, 1988.
[9.12] RAZZAGHI M., YOUSEFI S., *Legendre wavelets direct method for variational problems*, Mathematics and Computers in Simulation, 53, 185–192, 2000.
[9.13] RAZZAGHI M., ORDOKHANI Y., *An application of rationalized Haar functions for variational problems*, Applied Mathematics and Computation, 122, 353–364, 2001.
[9.14] GLABISZ W., *Direct Walsh-wavelet packet method for variational problems*, Applied Mathematics and Computation, 2004 (w druku).

Rozdział 10

[10.1] SHIH Y. P., HAN J. Y., *Double Walsh series solution of first-order partial differential equations*, Int. J. Systems Sci., 9, 569–578, 1978.
[10.2] OKHITA M., KOBAYASHI Y., *An application of rationalized haar functions to solution of linear partial differential equations*, Mathematics and Computers in Simulation, 30, 419–428, 1988.
[10.3] QIAN S., WEISS J., *Wavelets and the numerical solution of partial differential equations*, Journal of Computational Physics, 106, 155–175, 1993.
[10.4] BERTOLUZZA S., MADAY Y., RAVEL J.C., *A dynamically adaptive wavelet method for solving partial differential equations*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 116, 293–299, 1994.
[10.5] JOLY P., MADAY Y., PERRIER V., *Towards a method for solving partial differential equations by using wavelet packet bases*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 116, 301–307, 1994.
[10.6] LAZAAR S., PONENTI P., LIANDRAT J., TCHAMITCHIAN P., *Wavelet algorithms for numerical resolution of partial differential equations*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 116, 309–314, 1994.
[10.7] DAHMEN W., KURDILA A., OSWALD P., *Multiscale wavelet methods for partial differential equations*, Academic Press, San Diego, 1997.
[10.8] HOLMSTRÖM M., WALDEN J., *Adaptive wavelet methods for hyperbolic PDEs*, Journal of Scientific Computing, 13, 19–49, 1998.
[10.9] LIEB M., SUDRET B., *A fast algorithm for soil dynamics calculations by wavelet decomposition*, Archive of Applied Mechanics, 68, 147–157, 1998.
[10.10] YOUHE Z., JIZENG W., XIAOJING Z., *Applications of wavelet Galerkin FEM to bending of beam and plate structures*, Applied Mathematics and mechanics, 19, 745–755, 1998.
[10.11] YOUHE Z., JIZENG W., XIAOJING Z., *Applications of wavelet Galerkin FEM to bending of plate structures*, Acta Mechanica Solida Sinica, 12, 136–143, 1999.
[10.12] HOLMSTRÖM M., *Solving hyperbolic PDEs using interpolating wavelets*, SIAM J. Sci. Comput., 21, 405–420, 1999.

[10.13] SHAOMING L., XIANGWEI Z., *The finite element method based on interpolating with wavelet basis function*, Applied Mathematics and Mechanics, 21, 13–18, 2000.
[10.14] CHRISTON M. A., ROACH D. W., *The numerical performance of wavelets for PDEs: the multi-scale finite element*, Computational Mechanics, 25, 230–244, 2000.
[10.15] VASILYEV O.V., BOWMAN CH., *Second-generation wavelet collocation method for the solution of partial differential equations*, Journal of Computational Physics, 165, 660–693, 2000.
[10.16] McWILLIAM S., KNAPPETT D. J., FOX C. H. J., *Numerical solution of the stationary FPK equation using Shannon wavelets*, J. Sound Vib., 232, 405–430, 2000.
[10.17] CRUZ P., MENDES A., MAGALHAES F. D., *Using wavelets for solving PDEs: an adaptive collocation method*, Chemical Engineering Science, 56, 3305–3309, 2001.
[10.18] COHEN A., *Numerical analysis of wavelet methods*, Elsevier, Amsterdam, 2003.

Packet wavelet analysis in mechanics problems
Summary

This monograph is devoted to the application of wavelet analysis, particularly packet wavelet analysis in selected branches of theoretical and applied mechanics. It has been shown that the wavelet analysis as well as packet wavelet analysis can be used as a universal research tools to investigate a wide range of practical and theoretical problems of modern mechanics.

The idea of wavelet analysis and the foundations of packet wavelet analysis (used in the further part of this monograph) are presented in chapters 2 and 3, respectively.

The effectiveness of the packet wavelet transform as applied to the spectral analysis of signals and to the identification of local effects contained in the signals is demonstrated in chapter 4.

The effectiveness of discrete wavelet analysis and packet wavelet analysis of system response in quick qualitative identification of chaotic states is demonstrated in chapter 5.

The effectiveness of packet wavelet analysis with the Walsh basis in searching for a representation of signal derivatives subsequently used in parametric and nonparametric identification is demonstrated in chapter 6.

In chapter 7 algorithms, based on packet Walsh wavelet bases, for the analysis of initial-value problems of linear differential equations with constant and variable coefficients are formulated, forms of modified operational integration matrices are shown and their influence on computing accuracy is analysed.

In chapter 8 a residual method algorithm, based on the least squares method and packet Walsh wavelet functions, for solving multipoint boundary value problems, in particular two-point problems to which many mechanics problems can be reduced, is described.

In chapter 9 an algorithm for solving some variational mechanics problems using a direct method based on packet Walsh wavelet bases previously not applied to such problems is presented.

In chapter 10 packet Walsh wavelet bases are applied to solve partial differential equations using the generalized operational integration matrices mentioned above and the influence of the forms of the matrices on the obtained solutions is analysed.

BIBLIOTEKA GŁÓWNA
318316 L/1

W monografii przedstawiono możliwości wykorzystania pakietowej analizy falkowej w rozwiązywaniu szeregu problemów wybranych działów mechaniki teoretycznej i stosowanej.

Pokazano w jaki sposób pakietową analizę falkową zastosować w skutecznym badaniu sygnału, w identyfikacji stanów chaotycznych układów nieliniowych i przy wyznaczaniu pochodnych sygnałów niezbędnych w procedurach identyfikacji parametrycznej i nieparametrycznej. Pakietowe bazy falkowe Walsha wykorzystano w analizie liniowych zagadnień początkowych o stałych i zmiennych współczynnikach oraz w wielopunktowych problemach brzegowych. Bazy Walsha zastosowano także przy rozwiązywaniu niektórych problemów wariacyjnych mechaniki oraz w analizie liniowych równań cząstkowych.

Monografia przeznaczona jest dla specjalistów zajmujących się zastosowaniami analizy falkowej zarówno w zagadnieniach mechaniki teoretycznej, jak i stosowanej.

Wydawnictwa Politechniki Wrocławskiej
są do nabycia w następujących księgarniach:
„Politechnika"
Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław
budynek A-1 PWr., tel. (0-71) 320 25 34;
„Tech"
plac Grunwaldzki 13, 50-377 Wrocław
budynek D-1 PWr., tel. (0-71) 320 32 52
Prowadzimy sprzedaż wysyłkową

ISBN 83-7085-773-6