

Anna Romowicz

Akademia Ekonomiczna w Katowicach

PORTFELE AKCJI Z USTALONYM PORZĄDKIEM OCZEKIWANYCH STÓP ZWROTU

1. Wstęp

Artykuł ma na celu wskazanie kierunku badań podjętych przez R. Almgrena i N. Chrissa w kwestii teorii portfeli optymalnych z ustalonym porządkiem oczekiwanych stóp zwrotu oraz podjęcie próby implikacji na tym polu metod heurystycznych ze wskazaniem na algorytm genetyczny.

2. Teoria optymalizacji portfela

Zgodnie z podejściem Markowitza w zbiorze portfeli efektywnych inwestor poszukuje portfela o najwyższej oczekiwanej stopie zwrotu dla zadanego poziomu wariancji lub portfela o najmniejszej wariancji (reprezentującej ryzyko) przy ustalonym poziomie oczekiwanej stopy zwrotu. Ogólnie ujmując, inwestor ustala swoje preferencje w stosunku do portfeli na podstawie ich oczekiwanych stóp zwrotu. Obydwa cele (minimalizacja ryzyka i maksymalizacja zwrotu z portfela) mogą być przedstawione za pomocą parametrów odzwierciedlających awersję inwestora do ryzyka i wtedy optymalizację portfela rozważać można jako problem programowania wypukłej kombinacji parametrycznej z jednym celem.

Przy opisanym powyżej podejściu optymalizacja portfela papierów wartościowych polega na rozwiązaniu problemu:

$$(1-w) \sum_{i=1}^n R_i x_i - w \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} x_i x_j \rightarrow \max,$$
$$\sum_{i=1}^n x_i = 1,$$

$$x_i \leq 1 \quad i = 1, \dots, n,$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, n,$$

gdzie: n – liczba papierów wartościowych w portfelu,

x_i – udział i -tego papieru w portfelu,

R_i – oczekiwana stopa zwrotu papieru i ,

σ_{ij} – kowariancja oczekiwanej stopy zwrotu papierów i oraz j ,

w – współczynnik awersji inwestora do ryzyka ($0 \leq w \leq 1$).

Oczekiwana stopa zwrotu portfela wyraża się wzorem

$$R_p = \sum_{i=1}^n R_i x_i,$$

natomiast ryzyko mierzone wariancją:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} x_i x_j.$$

3. Modyfikacja podejścia „tradycyjnego”

Propozycja nowego podejścia do rozważanego zagadnienia polega na założeniu, że inwestor poszukujący portfela „efektywnego” zdecyduje się zainwestować w portfele maksymalnie odpowiadające jego preferencjom (*maximally preferable*) przy założeniu, że mają one nie wyższy niż zadany poziom wariancji. Preferencje określane przez inwestora wyrażane są przez sposób sortowania (porządkowania) oczekiwanych stóp zwrotu z akcji mogących się składać na poszukiwany portfel optymalny.

4. Sortowanie (porządkowanie, ustalanie kolejności)

Inwestor posiada listę n akcji o oczekiwanych zwrotach $r = (r_1, \dots, r_n)$ i macierzy kowariancji V . Zakładamy również, że inwestor ma przekonanie o zależnościach występujących między składowymi wektora r oczekiwanych stóp zwrotu. Zależności te można przedstawić jako zbiór m nierówności liniowych o postaci np. $3r_2 + 2r_3 \geq r_5$. Każde z takich „odczuć” może być przedstawione jako wektor D współczynników nierówności przekształconej do postaci $D^T r \geq 0$.

Dla podanego przykładu będziemy mieli: $3r_2 + 2r_3 - r_5 \geq 0$, $D = (0, 3, 2, 0, -1, 0, \dots, 0)^T$. Każde z tak określonych m „przekonań” możemy zapisać jako wektor D_m , po czym możemy zbudować macierz składającą się z wektorów $D_1, \dots, D_m$.

Istnieje kilka koncepcji sortowania (porządkowania) w zależności od informacji, jakie ma inwestor o zależnościach występujących między akcjami mogącymi składać się na jego portfel.

5. Pełne sortowanie (porządkowanie)

W przypadku pełnego sortowania (*complete sort*) mamy do czynienia z przekonaniem inwestora, że:

$$r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_n.$$

Możemy więc powiedzieć, że występuje tutaj $m = n - 1$ „przekonań” o zależności o postaci:

$$r_j - r_{j+1} \geq 0 \quad \text{dla } j = 1, \dots, n - 1.$$

Odpowiadające im wektory mają postać $D_j = (0, \dots, 0, 1, -1, 0, \dots, 0)$, a macierz „przekonań” ma postać:

$$D = \begin{pmatrix} D_1^T \\ \vdots \\ D_m^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

6. Sortowanie (porządkowanie) sektorowe

W tym przypadku mamy do czynienia z informacją o przynależności poszczególnych akcji do sektorów, na które podzielony jest rynek, oraz o zależnościach między akcjami należącymi do pojedynczego sektora (przyjmuje się, że jest to informacja pełna, czyli kompletne (pełne) porządkowanie w zakresie sektora).

Założmy, że mamy k sektorów oraz w i -tym sektorze m_i akcji, które potrafimy uporządkować w sposób następujący:

$$(r_1, r_2, \dots, r_{n_1}), (r_{n_1+1}, \dots, r_{n_2}), \dots, (r_{n_{k-1}+1}, \dots, r_n),$$

gdzie $n_1 = m_1, n_2 = m_1 + m_2, \dots, n_k = m_1 + \dots + m_k = n$,

oraz że w każdym sektorze mamy porządek (*sort*)

$$r_1 \geq \dots \geq r_{n_1}, \quad r_{n_1+1} \geq \dots \geq r_{n_2}, \quad \dots, \quad r_{n_{k-1}+1} \geq \dots \geq r_n.$$

Dysponujemy informacjami o zależnościach pomiędzy akcjami w każdym z sektorów, nie mając jednakże wiedzy o ewentualnych zależnościach występujących między sektorami. W tym przypadku występuje $m = n - k$ wektorów kolumnowych mających postać $D_j = (0, \dots, 0, 1, -1, 0, \dots, 0)^T$, a dla specyficznego przypad-

ku, gdzie mamy pięć akcji podzielonych na dwa sektory (w pierwszym są dwie akcje, w drugim trzy), macierz „przekonań” ma postać:

$$D = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & & \\ \hline & & 1 & -1 \\ & & & 1 & -1 \end{array} \right).$$

Stożek – kierunek

Niech $\bar{Q} = \{\lambda r : \lambda \geq 0\}$ będzie najmniejszym stożkiem zawierającym wektor r (przy czym podzbiór przestrzeni wektorowej jest stożkiem jeśli dla każdego $q \in Q$ i $\lambda > 0$ zachodzi $\lambda q \in Q$). Stożek zawierający wektor oczekiwanych stóp zwrotu może być z tym wektorem utożsamiany, przy czym zawiera informację o kierunku wskazującym na preferencje (upodobania) inwestora w stosunku do rozważanego wektora.

Centroid

c jest centroidem stożka Q , jeśli $c = \int_{q \in Q} q d\mu$, gdzie μ jest miarą odległości

między istotnymi składnikami wektorów składających się na portfel.

7. Portfel optymalny ze względu na centroid (*centroid optimal portfolio*)

Niech c będzie centroidem związanym z sortowaniem (porządkowaniem) portfela. Portfel $w \in M$ nazywamy portfelem optymalnym ze względu na centroid (*centroid optimal portfolio*), jeśli nie istnieje taki portfel $v \in M$, że $v^T c > w^T c$.

Po wyznaczeniu centroidu wskazanie portfela optymalnego sprowadza się do rozwiązania zadania programowania liniowego, chociaż postać ograniczeń może być nieco skomplikowana (co uzasadnia próbę implikacji w tym miejscu algorytmu genetycznego).

Przykład

W celu poprawy rezultatów uzyskiwanych przy wyznaczaniu portfela optymalnego z modelu Markowitza zaproponowano potraktowanie oczekiwanej stopy zwrotu jako zmiennej w modelu i zwrócenie uwagi na porządek oczekiwanych stóp zwrotu dla poszczególnych papierów wartościowych interesujących inwestora. Modyfikacja ta ma na celu uaktualnienie danych dotyczących oczekiwanej stopy zwrotu z papieru i umożliwia branie pod uwagę pewnych dodatkowych informacji dotyczących tejże stopy zwrotu.

Proponowane zmiany mogą być uwzględnione w modelu w następujący sposób:

$$\begin{aligned} (1-w) \sum_{i=1}^n R_i x_i - w \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} x_i x_j &\rightarrow \max, \\ R_i &\geq R_{i+1} \quad i = 1, \dots, n-1, \\ a_i &\leq R_i \leq b_i \quad i = 1, \dots, n, \\ \sum_{i=1}^n x_i &= 1, \end{aligned}$$

$$x_i \leq 1 \quad i = 1, \dots, n,$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, n,$$

gdzie: $\sigma_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (R_{ik} - R_i)(R_{jk} - R_i),$

N – liczba danych historycznych dotyczących papieru wartościowego,

R_i – oczekiwana stopa zwrotu papieru i ,

R_{ik} – rzeczywista stopa zwrotu papieru i w okresie k ,

(a_i, b_i) jest przedziałem zmienności oczekiwanej stopy zwrotu papieru i .

W celu uporządkowania oczekiwanych stóp zwrotu oraz wyznaczenia przedziałów ich zmienności należy wziąć pod uwagę następujące czynniki:

- średnią arytmetyczną stóp zwrotu dla papieru,
- trend stóp zwrotu dla papieru,
- prognozę przyszłej stopy zwrotu z papieru.

Biorąc pod uwagę te trzy czynniki i nadając im wagi h_i , takie że

$$h_1 + h_2 + h_3 = 1,$$

można oczekiwaną stopę zwrotu papieru i określić jako:

$$R_i = h_1 \cdot R_{ai} + h_2 \cdot R_{bi} + h_3 \cdot R_{ci}, \quad i = 1, \dots, n,$$

gdzie: R_{ai} – średnia arytmetyczna stóp zwrotu dla papieru,

R_{bi} – trend stóp zwrotu dla papieru,

R_{ci} – prognoza przyszłej stopy zwrotu z papieru.

Tak przedstawione oczekiwane stopy zwrotu można uporządkować oraz można ustalić ich przedziały zmienności, co pokazano na przykładzie.

Bierzemy pod uwagę sześć akcji, dla których dysponujemy ośmioma obserwacjami stóp zwrotu:

Okres t	1	2	3	4	5	6	7	8	Średnia
Akcja 1	0,04	0,07	0,09	0,13	0,14	0,17	0,21	0,24	0,136
Akcja 2	0,14	0,06	0,08	0,15	0,11	0,13	0,10	0,11	0,11
Akcja 3	0,13	0,13	0,11	0,15	0,10	0,07	0,14	0,11	0,11
Akcja 4	0,12	0,04	0,18	0,13	0,19	0,16	0,14	0,11	0,135
Akcja 5	0,18	0,06	0,22	0,15	0,14	0,06	0,08	0,09	0,1225
Akcja 6	0,15	0,04	0,08	0,06	0,13	0,05	0,10	0,09	0,0875

Optymalizację rozważanego portfela można zapisać jako:

$$(1 - w) \sum_{i=1}^6 R_i x_i - w \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 \sigma_{ij} x_i x_j \rightarrow \max,$$

$$R_i \geq R_{i+1} \quad i = 1, \dots, 5,$$

$$0,1362 \leq R_1 \leq 1,$$

$$0,09 \leq R_2 \leq 0,13,$$

$$0,09 \leq R_3 \leq 0,13,$$

$$0 \leq R_4 \leq 0,135,$$

$$0,1225 \leq R_5 \leq 1,$$

$$0,05 \leq R_6 \leq 0,10,$$

$$\sum_{i=1}^6 x_i = 1,$$

$$x_i \leq 1 \quad i = 1, \dots, 6,$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, 6.$$

Przy prostej strukturze zestawu informacji o oczekiwanych stopach zwrotu (zbioru przekonań) wyznaczenie centroidu jest nieskomplikowane. W przypadku bardziej złożonego zestawu „odczuć” do wyznaczenia centroidu konieczne jest wykorzystanie metod symulacyjnych (np. metody Monte Carlo) lub heurystycznych (np. algorytmu genetycznego).

Literatura

- [1] Almgren R. Chriss N., *Optimal Portfolios from Ordering Information*, University of Toronto, Toronto 2004.
- [2] Daykin C.D., Pentikainen T., Pesonen M., *Practical Risk Theory for Actuaries*, Chapman and Hall, Londyn 1994.
- [3] Goldberg D.E., *Algorytmy genetyczne i ich zastosowania*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa.
- [4] Koza J.R., *Genetic Programming*, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts.
- [5] Markowitz H., Portfolio Selection, „J. Finance” 1952, 7, s. 77-91.
- [6] Michalewicz Z., *Algorytmy genetyczne + struktury danych = programy ewolucyjne*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 2003.

PORTFOLIOS WITH ORDERING INFORMATION

Summary

This paper presents a method for portfolio optimization based on ordering information about expected returns of stocks in portfolio. This method extends Markowitz' mean variance optimality condition. It can be useful in many cases – for instance, when assets are divided into multiple sectors or when investor has information about every asset in his portfolio (in a way of sorting them in order of their beliefs about it). In case that beliefs vector is more complicated, heuristic methods like Monte Carlo or Genetic Algorithm can be used.