

bez ograniczeń

I N S T Y T U T M A T E M A T Y K I
P O L I T E C H N I K A W R O C Ł A W S K A

Raport Serii PREPRINTY nr 121

Twierdzenia o gęstości i kategorii

Baire'a pewnych rodzin
multifunkcji ciągłych

Zbigniew Skoczylas

Rozprawa doktorska

Promotor:

doc.dr Zbigniew Romanowicz

Słowa kluczowe:

multifunkcja ciągła, selekcja ciągła,
zawieranie różniczkowe, rozwiązanie klasyczne,
kategoria Baire'a, zbiór gęsty

Raport złożono w Redakcji 15.09.1984 r.

Wrocław 1984

Serdecznie dziękuję doc.dr.Zbigniewowi
Romanowiczowi za opiekę naukową w
trakcie pisania tej pracy.

S P I S T R E Ś C I

0. Wstęp.....	3
1. Podstawowe oznaczenia i definicje	9
2. Własności rodzin zbiorów i multifunkcji	13
3. Twierdzenia o gęstości i kategorii Baire'a dla rodziny multifunkcji ciągłych z selekcjami ciągłymi	20
4. Twierdzenia o gęstości i kategorii Baire'a dla zawierai różniczkowych z rozwiązaniami klasycznymi	37
5. Bibliografia	49

W s t ę p

Jednym ze sposobów oceny wielkości zbioru w przestrzeni metrycznej zupełnej jest zbadanie jego kategorii Baire'a. W przestrzeniach metrycznych zupełnych przyjęto uważać za "małe" zbiory pierwszej kategorii Baire'a. Zbiory te (zwane czasem chudymi) odgrywają w topologii podobną rolę jak zbiory miary zero w teorii miary. Podobnie dopełnienia zbiorów pierwszej kategorii Baire'a (zwane zbiorami rezydualnymi) mają wiele analogicznych własności jak zbiory pełnej miary w przestrzeni probabilistycznej. Wiele interesujących przykładów takich analogii można znaleźć w książce J.C.Oxtoby'ego [52]. W przypadku zbioru pierwszej kategorii Baire'a dodatkowe informacje o jego położeniu w przestrzeni daje zbadanie gęstości

Badanie rezydualności podzbiorów odpowiednio określonych przestrzeni metrycznych jest też jedną z metod dowodzenia twierdzeń o istnieniu elementów z żądanymi własnościami. Ten sposób dowodzenia został zainicjowany przez S.Saksa i nosi nazwę metody kategorii Baire'a. Przy jego pomocy wykazano między innymi istnienie wszędzie nieróżniczkowalnej funkcji ciągłej, istnienie homeomorficznych zanurzeń n -wymiarowych ośrodkowych przestrzeni metrycznych w $2n+1$ -wymiarową przestrzeń euklidesową, istnienie wszędzie nieanalitycznej funkcji klasy C^∞ , itp.

Badania kategorii Baire'a podzbiorów różnych przestrzeni metrycznych zostały rozpoczęte w latach trzydziestych przez S.Banacha, W.Hurewicza, K.Kuratowskiego, S.Mazurkiewicza,

W.Orlicza oraz H.Steinhausa. W 1932 r. interesujący wynik przedstawił w pracy [51] W.Orlicz. Wykazał on, że rodzina funkcji ciągłych i ograniczonych f , dla których zagadnienie Cauchy'ego $x = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$, gdzie $x, x_0 \in \mathbb{R}^n$, ma dokładnie jedno rozwiązanie, jest rezydualna w rodzinie wszystkich funkcji ciągłych. W tym samym czasie S.Banach i H.Steinhaus przy pomocy twierdzenia Baire'a o kategorii wykazali znane twierdzenia o własnościach liniowych operatorów ograniczonych. Natomiast W.Hurewicz, K.Kuratowski oraz S.Mazurkiewicz zainicjowali tego typu badania w topologii ogólnej. W tej dziedzinie najbardziej znana jest praca [41] S.Mazurkiewicza. Wykazano w niej, że rodzina continuów dziedzicznie nierozkładalnych zawartych w kwadracie jednostkowym jest podzbiorem gęstym typu G_δ w rodzinie wszystkich niepustych continuów zwartych.

W ostatnich latach ukazało się wiele prac, w których badano rezydualność lub gęstość różnych podzbiorów przestrzeni funkcyjnych. Niżej przedstawiamy niektóre ciekawsze problemy badane w tych pracach. W cyklu prac [1, 8, 32-34, 39, 54] różnych autorów, inspirowanych wynikiem W.Orlicza, rozważano równania różniczkowe zwyczajne i cząstkowe, równania funkcyjne, równania różniczkowo-funkcjonalne, równania całkowe. Równania te określone były na przestrzeniach euklidesowych, przestrzeniach Banacha lub Hilberta. Badano rezydualność rodzin funkcji, dla których odpowiednie równania mają rozwiązania, rozwiązania są jednoznaczne, spełnione jest twierdzenie o ciągłej zależności rozwiązań od warunków początkowych lub twierdzenie o zbieżności ciągu kolejnych przybliżeń. Wiele interesujących informacji dotyczących tych zagadnień można także znaleźć w pracach

przekrojowych [48,50].

Badaniom rezydualności rodziny odwzorowań nierozszerzających w przestrzeni Banacha, które mają punkt stały poświęcone są między innymi prace [48,59].

Ostatnio ukazały się dwie prace, w których badano rezydualność rodzin funkcyjnych w zawieraniach różniczkowych. W pierwszej [12] wykazano rezydualność rodziny multifunkcji ciągłych i ograniczonych F o wartościach będących zwartymi i wypukłymi podzbiorami przestrzeni Hilberta, dla których zawieranie różniczkowe $\dot{x} \in F(t, x)$ z warunkiem $x(t_0) = x_0$ ma rozwiązanie klasyczne. Natomiast w drugiej [13] wykazano, że dla dowolnej multifunkcji F ciągłej i ograniczonej o wartościach będących domkniętymi, ograniczonymi, wypukłymi z niepustym wnętrzem podzbiorami refleksywnej przestrzeni Banacha, rodzina rozwiązań zawierania różniczkowego $\dot{x} \in \partial F(t, x)$ jest gęstym G_δ podzbiorem rodziny rozwiązań zawierania różniczkowego $\dot{x} \in F(t, x)$.

Badaniom własności topologicznych prawych stron równań różniczkowych o rozwiązaniach wieloznacznych poświęcone są prace [30,31,61].

Badania kategorii rodzin zbiorów w pewnych zagadnieniach optymalizacji zostały przeprowadzone między innymi w pracach [9,10]. Dla zilustrowania tych badań omówimy krótko jeden z rezultatów pracy [10]. Autorzy tej pracy F. De Blasi i J. Myjak wykazali, że rodzina ograniczonych, domkniętych i wypukłych podzbiorów przestrzeni Banacha, mających własność najlep-

szej aproksymacji względem ustalonego punktu, jest zbiorem gęstym typu G_δ w rodzinie wszystkich zbiorów domkniętych, ograniczonych i wypukłych.

Niniejsza praca jest kontynuacją badań w omówionych wyżej kierunkach, przy czym interesowało nas jedynie ilościowe ujęcie zagadnienia, a nie dowody twierdzeń o istnieniu elementów z ustalonymi własnościami. W pracy zbadano gęstość i kategorię Baire'a pewnych rodzin multifunkcji ciągłych w przestrzeni wszystkich multifunkcji ciągłych. Zagadnienie przedstawione w tej pracy pojawiły się przy okazji badania warunków, jakie muszą spełniać wartości multifunkcji ciągłej $F : R^n \rightarrow \text{comp}(R^m)$, aby miała ona selekcję ciągłą. W naturalny sposób powstało wtedy pytanie jak duża (w sensie kategorii Baire'a) jest rodzina multifunkcji ciągłych z selekcją ciągłą. Podobne pytania postawiono dla zawierania różniczkowych z rozwiązaniami klasycznymi oraz dla zagadnienia aproksymacji multifunkcji. Wszędzie tam, gdzie nie udało się odpowiedzieć na pytanie o kategorię Baire'a danej rodziny, badano jej gęstość. Dalsza część pracy podzielona jest na cztery rozdziały.

W rozdziale pierwszym wprowadzono oznaczenia i podano podstawowe definicje związane z rodzinami zbiorów, topologią Vietorisa, metryką Hausdorffa, multifunkcjami oraz ich ciągłością itp.

W rozdziale drugim sformułowano i udowodniono lematy i twierdzenia, które będą wielokrotnie wykorzystywane w dalszych częściach pracy. Najpierw wykazano kilka własności metryki

Hausdorffa związanych z operacjami algebraicznymi w rodzinie $\text{comp}(Y)$. Następnie przytoczono twierdzenie o rozszerzaniu multifunkcji ciągłych. Będzie ono wykorzystane do konstrukcji przeprowadzonych w dowodach niektórych twierdzeń z rozdziału trzeciego. W kolejnych lematach pokazano ciągłość "liniowych" kombinacji multifunkcji ciągłych oraz aproksymację multifunkcji ciągłej przez multifunkcję ciągłą skończenie elementową. Pod koniec rozdziału podano jedno z równoważnych sformułowań twierdzenia Baire'a o kategorii. W rozdziale drugim przytoczono także mniej znane twierdzenia dotyczące rodzin zbiorów oraz multifunkcji.

Na początku rozdziału trzeciego dokonano przeglądu twierdzeń o istnieniu selekcji ciągłych dla multifunkcji. Następnie podano przykłady multifunkcji ciągłych nie mających selekcji ciągłych. Przykłady te mają zastosowanie w niektórych konstrukcjach wykonywanych w dowodach twierdzeń rozdziału trzeciego i czwartego. W rozdziale trzecim zawarty jest główny wynik pracy dotyczący gęstości i kategorii Baire'a rodziny $\mathcal{S}(K, Y)$ multifunkcji ciągłych z selekcjami ciągłymi w rodzinie $\mathcal{C}(K, Y)$ wszystkich multifunkcji ciągłych. Udowodniono w nim także twierdzenie o kategorii rodziny $\mathcal{A}(K, Y)$ multifunkcji ciągłych mających własność aproksymacji. Wspomniane twierdzenia wykazano dla różnych wariantów wymiarów przestrzeni X i Y .

W ostatnim rozdziale dokonano przeglądu twierdzeń o istnieniu rozwiązań klasycznych zawierających różniczkowych z prawą stroną ciągłą. W dalszej części tego rozdziału udowodniono

twierdzenie o gęstości rodziny $\mathcal{M}(K, R^n)$ złożonej z multifunkcji ciągłych F , dla których zawieranie różniczkowe $\dot{x} \in F(t, x)$ z warunkiem $x(t_0) = x_0$, gdzie $x, x_0 \in R^n$, nie ma rozwiązań klasycznych. Wykazano w nim również gęstość uzupełnienia tej rodziny, tj. rodziny $\mathcal{K}(K, R^n)$ tych multifunkcji ciągłych, dla których powyższe zawieranie różniczkowe ma rozwiązania klasyczne. Ponadto podano przykład multifunkcji ciągłej F nie mającej selekcji ciągłej, takiej jednak, że rozwiązane zawieranie różniczkowe ma rozwiązanie klasyczne. Zbadano także kategorię Baire'a rodziny Π złożonej z par (x, F) takich, że funkcja x jest rozwiązaniem klasycznym zawierania różniczkowego $\dot{x} \in F(t, x)$, $x(t_0) = x_0$. Na końcu rozdziału trzeciego i czwartego postawiono problemy do dalszych badań.

Pracę kończy bibliografia cytowanych prac.

Zagadnienia przedstawione w tej pracy nie były do tej pory przedmiotem publikacji. Jedynie omawiane wcześniej prace [12, 13], są najbliższej związane z zagadnieniami przedstawionymi w rozdziale czwartym. Wyniki uzyskane w rozdziale trzecim przedstawiono w dwóch pracach [55, 56], pierwsza z nich ukazała się w Bull. Pol. Ac. ; Math., a drugą przyjęto do druku w Disc. Math.

P O D S T A W O W E O Z N A C Z E N I A I D E F I N I C J E

Niech X i Y będą dowolnymi przestrzeniami topologicznymi. Rodzinę wszystkich niepustych podzbiorów przestrzeni Y będziemy oznaczali przez 2^Y . Podrodzinę rodziny 2^Y złożoną ze zbiorów domkniętych oznaczamy przez $cl(Y)$. Natomiast przez $comp(Y)$ będziemy oznaczali rodzinę wszystkich niepustych podzbiorów zwartych przestrzeni Y . W rodzinie $cl(Y)$ wprowadzamy topologie Vietorisa. Podbazę tej topologii tworzą rodziny zbiorów następujących postaci

$$\{A \in cl(Y) : A \subset U\} \quad , \quad \{A \in cl(Y) : A \cap U \neq \emptyset\} \quad ,$$

gdzie U przebiega rodzinę podzbiorów otwartych przestrzeni Y . Szczegółowe informacje o tej topologii można znaleźć w pracy E. Michael'a [46] lub w monografii K. Kuratowskiego [35,36]. Tradycyjnie, symbolami $int(A)$ i $\bar{A}$ będziemy oznaczać odpowiednio wnętrze i domknięcie zbioru A .

Multifunkcją nazywamy dowolne odwzorowanie przestrzeni X w rodzinę 2^Y . Mówimy, że multifunkcja $F : X \rightarrow cl(Y)$ jest półciągła dolnie (górnie), jeżeli zbiór $\{x \in X : F(x) \cap U \neq \emptyset\}$ ($\{x \in X : F(x) \subset U\}$) jest otwarty dla każdego otwartego podzbioru $U \subset Y$. Będziemy mówili, że multifunkcja jest ciągła, jeśli jest jednocześnie półciągła dolnie i górnie. Selekcją multifunkcji $F : X \rightarrow 2^Y$ nazywamy dowolną funkcję $f : X \rightarrow Y$ spełniającą warunek $f(x) \in F(x)$ dla każdego $x \in X$. Wykresem multifunkcji nazywamy podzbiór produktu $X \times Y$ określony następująco

$$Gr(F) = \{(x, y) \in X \times Y : y \in F(x)\} \quad .$$

Niech Y będzie teraz przestrzenią metryczną z metryką g . Odległość punktu $y \in Y$ od niepustego zbioru, $A \subset Y$ oznaczamy symbolem $d(y, A)$ i określamy wzorem

$$d(y, A) = \inf \{ g(y, z) : z \in A \}.$$

Niech A będzie niepustym podzbiorem przestrzeni Y i niech $\varepsilon > 0$.

Zbiór

$$V(A, \varepsilon) = \{ y \in Y : d(y, A) < \varepsilon \} \quad \left(\bar{V}(A, \varepsilon) = \{ y \in Y : d(y, A) \leq \varepsilon \} \right)$$

będziemy nazywali odpowiednio ε -otoczeniem otwartym (domkniętym) zbioru A . Rodzinę wszystkich niepustych, domkniętych i ograniczonych podzbiorów przestrzeni metrycznej Y będziemy oznaczali przez $cb(Y)$. Dla dowolnych zbiorów A, B tej rodziny oddalenie zbioru A od zbioru B określamy następującym wzorem

$$\bar{g}(A, B) = \inf \{ \varepsilon > 0 : A \subset \bar{V}(B, \varepsilon) \}.$$

Ponadto w rodzinie $cb(Y)$ wprowadzamy metrykę Hausdorffa h kładąc

$$h(A, B) = \max \{ \bar{g}(A, B), \bar{g}(B, A) \}.$$

Dla przestrzeni metrycznych (X, g_1) i (Y, g_2) półciągłość dolną i górną multifunkcji $F : X \rightarrow cb(Y)$ można określić następująco:

a) F jest półciągła dolnie na X , gdy

$$\forall x_0 \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in X \quad \left[(g_1(x, x_0) < \delta) \Rightarrow (F(x_0) \subset V(F(x), \varepsilon)) \right],$$

b) F jest półciągła górnio na X , gdy

$$\forall x_0 \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in X \quad \left[(g_1(x, x_0) < \delta) \Rightarrow (F(x) \subset V(F(x_0), \varepsilon)) \right].$$

Podobnie jak poprzednio, mówimy, że multifunkcja jest ciągła, gdy jest jednocześnie półciągła dolnie i górnio. Dla multifunkcji o wartościach z rodziny $\text{comp}(Y)$ powyższe definicje półciągłości są równoważne z definicjami podanymi wcześniej dla przestrzeni topologicznych. Będziemy mówili, że multifunkcja $F : X \rightarrow \text{cb}(Y)$ jest ograniczona, jeśli jej wartości są zawarte w pewnej ustalonej kuli w przestrzeni Y . Kulę otwartą (domkniętą) o środku w punkcie p i promieniu r w odpowiedniej przestrzeni metrycznej oznaczamy przez $B(p,r)$ ($\bar{B}(p,r)$).

Niech K będzie dowolnym niepustym podzbiorem przestrzeni X . W całej pracy przez $\mathcal{C}(K,Y)$ oznaczamy rodzinę wszystkich ciągłych i ograniczonych multifunkcji określonych na zbiorze K o wartościach w rodzinie $\text{comp}(Y)$. W rodzinie $\mathcal{C}(K,Y)$ wprowadzamy metrykę h^* zbieżności jednostajnej określoną wzorem

$$h^*(F,G) = \sup \{ h(F(x),G(x)) : x \in K \}.$$

Ustalmy punkt $x_0 \in K$. Przez $\mathcal{C}(K,Y,x_0)$ będziemy oznaczali rodzinę wszystkich multifunkcji $F \in \mathcal{C}(K,Y)$ takich, że zbiór $F(x_0)$ jest skończony.

Niech Y będzie teraz przestrzenią unormowaną. W rodzinie $\text{cl}(Y)$ wyróżniamy dodatkową podrodzinę $\text{conv}(Y)$ złożoną ze zbiorów wypukłych. Ponadto dla dowolnych zbiorów A i B z rodziny 2^Y oraz dowolnej liczby rzeczywistej u definiujemy dwie operacje algebraiczne: dodawanie zbiorów określone wzorem

$$A + B = \{ a + b : a \in A, b \in B \}$$

oraz mnożenie zbioru przez liczbę określone wzorem

$$uA = \{ ua : a \in A \}.$$

Zauważmy tutaj, że powyższe operacje algebraiczne są działaniami wewnętrznymi w rodzinie $\text{comp}(Y)$. Uwypuklenie podzbioru A przestrzeni Y będziemy oznaczać przez $\text{co}(A)$. Zero w przestrzeni liniowej oznaczamy symbolem θ . Wymiar algebraiczny przestrzeni liniowej Y oznaczamy przez $\dim(Y)$.

Niech Z będzie przestrzenią topologiczną. Mówimy, że zbiór $A \subset Z$ jest gęsty (nigdzie gęsty) w przestrzeni Z , gdy $\bar{A} = Z$ ($\text{int}(\bar{A}) = \emptyset$). Sumy przeliczalne zbiorów nigdzie gęstych nazywamy zbiorami pierwszej kategorii Baire'a. Natomiast dopełnienie zbioru pierwszej kategorii do całej przestrzeni nazywamy zbiorem rezydualnym.

W całej pracy przez N oznaczamy zbiór liczb naturalnych. Moc zbioru A oznaczamy przez $\text{card}(A)$. Przestrzeń euklidesową n -wymiarową oznaczamy przez R^n .

R o z d z i a ł 2

W Ł A S N O Ś C I R O D Z I N Z B I O R Ó W I M U L T I F U N K C J I

W tej części pracy sformułujemy i udowodnimy lematy, które będą wielokrotnie wykorzystywane w następnych rozdziałach. Ponadto przytoczymy mniej znane twierdzenia dotyczące rodzin zbiorów oraz multifunkcji. Na końcu rozdziału podamy jedno z równoważnych sformułowań twierdzenia Baire'a o kategorii. Rozdział rozpoczniemy od podania własności metryki Hausdorffa związanych z operacjami algebraicznymi na zbiorach rodziny $\text{comp}(Y)$.

LE M A T 2.1. Niech Y będzie przestrzenią unormowaną.

Wtedy dla dowolnych zbiorów A, B, C, D z rodziny $\text{comp}(Y)$ oraz dowolnych liczb rzeczywistych u, v prawdziwe są relacje

$$(1) \quad \bar{\varrho}(uA, uB) = |u| \bar{\varrho}(A, B) ,$$

$$(2) \quad h(uA, uB) = |u| h(A, B) ,$$

$$(3) \quad \bar{\varrho}(A + B, C + D) \leq \bar{\varrho}(A, C) + \bar{\varrho}(B, D) ,$$

$$(4) \quad h(A + B, C + D) \leq h(A, C) + h(B, D) ,$$

$$(5) \quad \bar{\varrho}(uA, vA) \leq |u - v| \bar{\varrho}(A, \{e\}) ,$$

$$(6) \quad h(uA, vA) \leq |u - v| h(A, \{e\}) ,$$

$$(7) \quad h(uA, vB) \leq |u| h(A, B) + |u - v| h(B, \{e\}) .$$

Dowody równości (1) i (2) oraz nierówności (3) i (4)

można znaleźć w pracach [6,7] . Natomiast nierówności (5), (6) i (7) udowodniono w pracach [5,17] , jedynie dla zbiorów wypukłych.

Okazuje się jednak, że nierówności te są również prawdziwe dla zbiorów z rodziny $\text{comp}(Y)$. Udowodnimy teraz te nierówności.

Zauważmy najpierw, że dla dowolnego zbioru A z rodziny $\text{comp}(Y)$ oraz dowolnych liczb rzeczywistych u, v prawdziwa jest inkluzja $(u + v)A \subset uA + vA$. Ponadto, jeśli $B \subset C$, to $\bar{g}(B, A) \leq \bar{g}(C, A)$. Stąd wobec nierówności (3) i równości (1) otrzymamy

$$\begin{aligned} \bar{g}(uA, vA) &= \bar{g}(((u - v) + v)A, vA) \leq \bar{g}((u - v)A + vA, \{\emptyset\} + vA) \leq \\ &\leq \bar{g}((u - v)A, \{\emptyset\}) + \bar{g}(vA, vA) = |u - v| \bar{g}(A, \{\emptyset\}) , \end{aligned}$$

co daje nierówność (5).

Nierówność (6) wynika bezpośrednio z określenia metryki h , nierówności (5) oraz równości $\bar{g}(A, \{\emptyset\}) = h(A, \{\emptyset\})$.

Nierówność (7) otrzymamy korzystając kolejno z nierówności (4) i (6) oraz z równości (2). Mamy bowiem

$$h(uA, vB) \leq h(uA, uB) + h(uB, vB) \leq |u| h(A, B) + |u - v| h(A, \{\emptyset\}) .$$

Podany niżej lemat, o zupełności rodziny $\text{comp}(Y)$, w większości podręczników i monografii z topologii występuje jako zadanie.

Szkic dowodu tego lematu można znaleźć np. w pracy G. Debreu [20].

LEMAT 2.2. Niech Y będzie przestrzenią metryczną zupełną. Wtedy rodzina $\text{comp}(Y)$ zwartych podzbiorów przestrzeni Y rozważana z metryką Hausdorffa jest również przestrzenią zupełną.

WNIOSEK 2.3. Bezpośrednio z lematu 2.2 otrzymujemy, że rodzina $\mathcal{C}(K, Y)$ multifunkcji ciągłych i ograniczonych, określonych na podzbiórze K przestrzeni X o wartościach w rodzinie $\text{comp}(Y)$, gdzie Y jest przestrzenią metryczną zupełną, rozważana z metryką h zbliżności jednostajnej, jest przestrzenią zupełną.

Poniższe twierdzenie o rozszerzaniu multifunkcji ciągłych, udowodnione w 1975 r. przez H.A.Antosiewicza i A.Cellinę, będzie kilkakrotnie wykorzystane w pracy.

TWIERDZENIE 2.4. [2] Niech A będzie niepustym i domkniętym podzbiorem przestrzeni metrycznej X i niech Y będzie przestrzenią unormowaną. Wtedy dla dowolnej multifunkcji ciągłej F ,
 $F : A \rightarrow \text{cb}(Y)$ istnieje multifunkcja ciągła $\tilde{F}$,
 $\tilde{F} : X \rightarrow \text{cb}(Y)$ taka, że $\tilde{F}(x) = F(x)$ dla $x \in A$ oraz
 $\tilde{F}(x) \subset \text{co}(\bigcup_{a \in A} F(a))$ dla $x \in X$.

Podany niżej lemat o ciągłości "liniowych" kombinacji multifunkcji ciągłych jest kilkakrotnie wykorzystany w konstrukcjach przeprowadzonych w rozdziale trzecim i czwartym.

LEMAT 2.5. Niech X i Y będą przestrzeniami unormowanymi i niech $u, v : K \rightarrow R$, $K \subset X$, będą nieujemnymi, ograniczonymi funkcjami ciągłymi. Niech ponadto F i G będą multifunkcjami z rodziny $\mathcal{C}(K, Y)$. Wtedy multifunkcja H określona

wzorem $H(x) = u(x)F(x) + v(x)G(x)$ dla $x \in K$, również należy do rodziny $\mathcal{C}(K, Y)$. Jeżeli funkcje u, v spełniają dodatkowo warunek $u(x) + v(x) = 1$ dla $x \in K$, to $H(x) \in \text{co}(F(x) \cup G(x))$ dla $x \in K$.

Dowód. Zauważmy najpierw, że dla $x \in K$ zbiór $H(x)$ jest zwarty. Niech x_0 będzie dowolnym punktem zbioru K i niech ε będzie dowolną liczbą dodatnią. Z ciągłości funkcji u, v oraz multifunkcji F, G w punkcie x_0 otrzymamy, że dla $x \in \bar{B}(x_0, \delta) \cap K$, gdzie $\delta > 0$ prawdziwe są nierówności

$$|u(x) - u(x_0)| \leq \varepsilon, \quad |v(x) - v(x_0)| \leq \varepsilon$$

oraz

$$h(F(x), F(x_0)) \leq \varepsilon, \quad h(G(x), G(x_0)) \leq \varepsilon.$$

Ponadto z założeń wynika, że dla $x \in K$ mamy

$$0 \leq u(x) \leq M, \quad 0 \leq v(x) \leq M$$

oraz

$$h(F(x), \{\emptyset\}) \leq M, \quad h(G(x), \{\emptyset\}) \leq M,$$

gdzie $M > 0$. Korzystając teraz z lematu 2.1 otrzymamy ciąg nierówności

$$\begin{aligned} h(H(x), H(x_0)) &= h(u(x)F(x) + v(x)G(x), u(x_0)F(x_0) + v(x_0)G(x_0)) \leq \\ &\leq h(u(x)F(x), u(x_0)F(x_0)) + h(v(x)G(x), v(x_0)G(x_0)) \leq \\ &u(x)h(F(x), F(x_0)) + |u(x) - u(x_0)|h(F(x), \{\emptyset\}) + \\ &+ v(x)h(G(x), G(x_0)) + |v(x) - v(x_0)|h(G(x), \{\emptyset\}) \leq 4M\varepsilon. \end{aligned}$$

Wykazaliśmy zatem, że dla $x \in \bar{B}(x_0, \delta) \cap K$ mamy $h(H(x), H(x_0)) \leq 4M\varepsilon$, co oznacza ciągłość multifunkcji H w punkcie x_0 . Ograniczoność tej multifunkcji wynika bezpośrednio z definicji. Natomiast ostatnia część tezy wynika z określenia wypuklenia zbioru.

Następny lemat, mówiący o lokalnej aproksymacji multifunkcji ciągłej przez multifunkcję ciągłą skończenie elementową, również będzie kilkakrotnie wykorzystany w dalszej części pracy.

LEMAT 2.6. Niech X i Y będą przestrzeniami unormowanymi z normami odpowiednio $|\cdot|$ i $\|\cdot\|$. Niech ponadto K będzie podzbiorem przestrzeni X z niepustym wnętrzem. Ustalmy punkt $x_0 \in \text{int}(K)$. Wtedy rodzina $\mathcal{C}(K, Y, x_0)$ jest podzbiorem gęstym rodziny $\mathcal{C}(K, Y)$.

Dowód. Nie zmniejszając ogólności rozważań możemy przyjąć, że $x_0 = \theta$. Niech $r > 0$ będzie takie, że $\bar{B}(\theta, r) \subset \text{int}(K)$. Pokażemy, że dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ i dla dowolnej multifunkcji ciągłej $F \in \mathcal{C}(K, Y, x_0)$ istnieje multifunkcja $G \in \mathcal{C}(K, Y, x_0)$ spełniająca nierówność $h^*(F, G) \leq 4\varepsilon$. Z ciągłości multifunkcji F w punkcie θ wynika, że można tak wybrać δ , $0 < \delta \leq r$, żeby dla każdego x spełniającego nierówność $|x| \leq \delta$ było

$$h(F(\theta), F(x)) \leq \varepsilon.$$

Niech $\{y_1, y_2, \dots, y_n\} \subset F(\theta)$, $n \in \mathbb{N}$, będzie ε -siecią skończoną zbioru $F(\theta)$. Zauważmy tutaj, że dla $|x| \leq \delta$ zachodzi inkluzja

$$F(x) \subset \bigcup_{i=1}^n \bar{B}(y_i, 2\varepsilon).$$

Żadaną multifunkcję G określamy w następujący sposób

$$G(x) = \begin{cases} \{y_1, y_2, \dots, y_n\} & \text{dla } x = \theta, \\ \bigcup_{i=1}^n \left[\left(1 - \frac{|x|}{\delta}\right) \{y_i\} + \frac{|x|}{\delta} (\bar{B}(y_i, 2\varepsilon) \cap F(\delta \frac{x}{|x|})) \right] & \text{dla } 0 < |x| \leq \delta, \\ F(x) & \text{dla } |x| > \delta. \end{cases}$$

Zauważmy, że dla $|x| = \delta$ mamy $G(x) = F(x) \cap \bigcup_{i=1}^n \bar{B}(y_i, 2\varepsilon) = F(x)$

Z powyższej uwagi oraz z lematu 2.5 wynika, że multifunkcja G jest ciągła na K . Korzystając teraz z nierówności podanych w lemacie 2.1 łatwo sprawdzić, że dla $x \in K$ spełniona jest nierówność $h(F(x), G(x)) \leq 4\varepsilon$, co kończy dowód lematu.

UWAGA 2.7. Lemat 2.6 jest również prawdziwy w przypadku, gdy zbiór K jest domknięty w X . Istotnie, korzystając bowiem z twierdzenia 2.4 możemy rozszerzyć multifunkcję F na całą przestrzeń X do pewnej multifunkcji ciągłej $\tilde{F}$. Następnie stosując lemat 2.6 znajdujemy multifunkcję $\tilde{G} \in \mathcal{C}(X, Y, x_0)$. Obcięcie multifunkcji $\tilde{G}$ do zbioru K daje nam żadaną multifunkcję G .

W następnym lemacie podajemy prostą do wykazania własność metryki Hausdorffa.

LEMAT 2.8. Niech Y będzie przestrzenią metryczną i niech A, B, C, D będą dowolnymi zbiorami z rodziny $cb(Y)$. Załóżmy ponadto, że spełnione są nierówności $h(A, B) \leq a$ oraz $h(C, D) \leq b$, gdzie $a, b \geq 0$. Wtedy $h(A \cup C, B \cup D) \leq \max(a, b)$.

Teza kolejnego lematu wynika bezpośrednio z definicji ciągłości multifunkcji oraz z własności metryki Hausdorffa podanej w poprzednim lemacie.

L E M A T 2.9. Niech X i Y będą dowolnymi przestrzeniami metrycznymi i niech $K \subset X$. Niech ponadto F, G będą dowolnymi multifunkcjami z rodziny $\mathcal{C}(K, Y)$. Wtedy multifunkcja H określona wzorem $H(x) = F(x) \cup G(x)$, gdzie $x \in K$, również należy do rodziny $\mathcal{C}(K, Y)$.

Niżej podamy jedno z równoważnych sformułowań twierdzenia Baire'a o kategorii przestrzeni zupełnej.

TWIERDZENIE 2.10. [26,52] Niech Z będzie przestrzenią metryczną zupełną. Wtedy dopełnienie zbioru pierwszej kategorii Baire'a jest zbiorem gęstym w Z .

Na zakończenie tego rozdziału podamy sformułowania dwóch łatwych do wykazania lematów. Lematy te będą wykorzystane w rozdziale czwartym.

L E M A T 2.11. Niech X i Y będą przestrzeniami metrycznymi oraz niech $F_n, n \in \mathbb{N}$, będzie ciągiem multifunkcji z rodziny $\mathcal{C}(X, Y)$ zbieżnym jednostajnie do multifunkcji $F \in \mathcal{C}(X, Y)$. Jeżeli ciąg $x_n, n \in \mathbb{N}$, elementów przestrzeni X jest zbieżny do punktu $x \in X$, to wtedy $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x_n) = F(x)$.

L E M A T 2.12. Niech Y będzie przestrzenią metryczną oraz niech $A_n, n \in \mathbb{N}$, będzie ciągiem zbiorów z rodziny $cb(Y)$ zbieżnym do $A \in cb(Y)$. Jeżeli ciąg $x_n, n \in \mathbb{N}$, elementów przestrzeni Y spełnia warunki $x_n \in A_n, n \in \mathbb{N}$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, gdzie $x \in Y$, to wtedy $x \in A$.

TWIERDZENIA O GĘSTOŚCI I KATEGORII BAIRE'A DLA RODZINY MULTIFUNKCJI CIĄGŁYCH Z SELEKCJAMI CIĄGŁYMI

Problemem istnienia selekcji ciągłych multifunkcji zajmowało się wielu autorów. Badania warunków ich istnienia rozpoczął w 1956 r. E. Michael. W pracy [42] wykazał on, że multifunkcja dolnie półciągła określona na przestrzeni topologicznej parazwartej i o wartościach w rodzinie $\text{conv}(Y)$, gdzie Y jest przestrzenią Banacha, ma selekcję ciągłą. Pewne uogólnienia tego twierdzenia można znaleźć w dalszych pracach E. Michael'a [43-45] oraz w pracach [11, 47] innych autorów. Istnienie selekcji ciągłych dla multifunkcji określonej na odcinku $[0, 1]$ o wartościach w rodzinie $\text{comp}(\mathbb{R}^n)$ wykazali: A. F. Filippov [22] w przypadku multifunkcji spełniającej warunek Lipschitza, H. Hermes [27], gdy multifunkcja jest ciągła i ma ograniczoną wariację, N. Kikuchi i Y. Tomita [29] w przypadku multifunkcji absolutnie ciągłej, L. Carbone w pracy [19] pokazał, że multifunkcja ciągła, której wartości są zbiorami skończonymi z ustaloną liczbą elementów, określona na zbiorze wypukłym w przestrzeni unormowanej, ma selekcję ciągłą. Uogólnienia tego twierdzenia podane zostały w pracach [57, 58]. Ponadto A. Mascoll [40] wykazał, że multifunkcja określona na kompleksie sympleksyjnym w $\mathbb{R}^m$ o wartościach homeomorficznie wypukłych w $\mathbb{R}^n$, której wykres jest otwarty, ma selekcję ciągłą. Konstrukcje selekcji ciągłych dla multifunkcji określonych w przestrzeni euklidesowej i o wartościach w tej przestrzeni

podane zostały w pracy F.S.Garnir-Monjoie [25]. W cyklu prac [3,15,16,24] różnych autorów podane zostały twierdzenia o istnieniu selekcji ciągłych multifunkcji o wartościach będących podzbiorami pewnych przestrzeni funkcyjnych. Interesujące twierdzenie o selekcjach udowodnili K.Kuratowski i Cz.Ryll-Nardzewski [37]. Wykazali oni, że jeżeli X jest przestrzenią topologiczną a Y przestrzenią polską i ponadto multifunkcja $F : X \rightarrow cl(Y)$ jest ciągła modulo zbiory pierwszej kategorii Baire'a, to istnieje selekcja tej multifunkcji ciągła modulo zbiory pierwszej kategorii Baire'a. Dalsze twierdzenia związane z istnieniem selekcji ciągłych można znaleźć w pracy przeglądowej Parthasarathy'ego [53]. Przykłady multifunkcji ciągłych nie mających selekcji ciągłych podali L.Carbone [18], A.F.Filippov [22], H.Hermes [28] oraz E.Michael [42].

Podane niżej przykłady multifunkcji ciągłych bez selekcji ciągłych będą wykorzystane w dalszej części tego rozdziału oraz w rozdziale czwartym. Są one nieznaczными modyfikacjami multifunkcji podanych w pracach [22] i [18].

PRZYKŁAD 3.1. Multifunkcję $H : [0,1] \rightarrow comp(R^2)$ określamy następującym wzorem

$$H(t) = \begin{cases} \{(\cos \varphi, \sin \varphi) : 0 \leq \varphi \leq 2\pi\} & \text{dla } t=0, \\ \{(\cos \varphi, \sin \varphi) : \ln t \leq \varphi \leq \ln t + 2\pi - t\} & \text{dla } 0 < t \leq 1. \end{cases}$$

Łatwo zauważyć, że tak określona multifunkcja H nie ma selekcji ciągłej w żadnym otoczeniu punktu $t=0$.

PRZYKŁAD 3.2. Niech B^2 oznacza domkniętą kulę jednostkową w R^2 i niech (ϱ, φ) oznaczają współrzędne biegunowe w R^2 .

Multifunkcję $F : B^2 \rightarrow \text{comp}(R^2)$ określamy wzorem

$$F(\varrho, \varphi) = \begin{cases} \left\{ \left(\varrho, \frac{\varphi}{2} \right), \left(\varrho, \frac{\varphi}{2} + \pi \right) \right\} & \text{dla } \varrho > 0, \\ \left\{ (0, 0) \right\} & \text{dla } \varrho = 0. \end{cases}$$

Łatwo sprawdzić, że multifunkcja F nie ma selekcji ciągłych na kuli B^2 . Zauważmy ponadto, że dowolna multifunkcja $G \in B(F, \eta)$, gdzie $0 < \eta < 1$, również nie ma selekcji ciągłej na kuli B^2 .

Niech X i Y będą przestrzeniami Banacha z normami odpowiednio $\|\cdot\|_1$ oraz $\|\cdot\|_2$ oraz niech K będzie podzbiorem przestrzeni X z niepustym wnętrzem. Jak poprzednio, przez $\mathcal{C}(K, Y)$ będziemy oznaczać rodzinę multifunkcji $F : K \rightarrow \text{comp}(Y)$ ciągłych i ograniczonych. W rodzinie $\mathcal{C}(K, Y)$ wprowadzamy metrykę h^* zbliżności jednostajnej. W dalszej części pracy przez $\mathcal{S}(K, Y)$ będziemy oznaczali rodzinę tych multifunkcji z $\mathcal{C}(K, Y)$, które mają selekcję ciągłą na zbiorze K . Dopełnienie rodziny $\mathcal{S}(K, Y)$ do całej przestrzeni oznaczamy przez $\mathcal{N}(K, Y)$. W dalszym ciągu $\mathcal{C}(K, Y, x_0)$ oznacza rodzinę multifunkcji z $\mathcal{C}(K, Y)$, których wartość w punkcie $x_0 \in K$ jest zbiorem skończonym. Niech ponadto $\mathcal{N}(K, Y, x_0) = \mathcal{N}(K, Y) \cap \mathcal{C}(K, Y, x_0)$.

W dalszej części tego rozdziału zbadamy gęstość oraz kategorię Baire'a rodzin $\mathcal{S}(K, Y)$ i $\mathcal{N}(K, Y)$ w rodzinie $\mathcal{C}(K, Y)$ wszystkich multifunkcji ciągłych. Badania te będą

przeprowadzone dla różnych wariantów wymiarów przestrzeni X i Y . Zbadana zostanie także kategoria Baire'a rodziny $\mathcal{A}(K, Y)$ multifunkcji ciągłych mających własność aproksymacji. Podamy również przykład wyjaśniający dokładniej własności topologiczne rodziny $\mathcal{S}(K, Y)$ dla przypadku $\dim(X) \geq 2$ i $\dim(Y) \geq 2$. Zanim przejdziemy do zapowiadanych badań zauważmy najpierw, że jeżeli $\dim(Y) \leq 1$, to rodziny $\mathcal{S}(K, Y)$ oraz $\mathcal{C}(K, Y)$ pokrywają się. Wtedy oczywiście mamy $\mathcal{N}(K, Y) = \emptyset$. Jeżeli natomiast $\dim(Y) \geq 2$, to prawdziwe jest następujące twierdzenie.

TWIERDZENIE 3.3. Niech X i Y będą przestrzeniami Banacha, przy czym spełniony jest warunek $\dim(Y) \geq 2$. Niech ponadto K będzie podzbiorem przestrzeni X z niepustym wnętrzem. Wtedy rodzina $\mathcal{N}(K, Y)$ jest podzbiorem gęstym rodziny $\mathcal{C}(K, Y)$.

Dowód. Niech x_0 będzie punktem zbioru $\text{int}(K)$. Nie zmniejszając ogólności rozważań możemy przyjąć, że $x_0 = \theta$. Wybieramy teraz liczbę $r > 0$ tak, żeby spełniony był warunek $\bar{B}(\theta, 3r) \subset \text{int}(K)$. Niech H oznacza dowolną multifunkcję z rodziny $\mathcal{C}(K, Y)$ i niech $\varepsilon > 0$. Korzystając z lematu 2.6 otrzymujemy, że istnieje multifunkcja $F \in \mathcal{C}(K, Y, x_0)$ spełniająca nierówność $h^*(F, H) \leq \varepsilon$. Pokażemy dalej, że istnieje multifunkcja $G \in \mathcal{N}(K, Y)$, przy czym spełniona jest nierówność $h^*(F, G) \leq \varepsilon$. Szczegółowy opis konstrukcji multifunkcji G podamy tylko dla przypadku, gdy $F(\theta)$ jest zbiorem jednopunktowym $\{y_1\}$. Natomiast w przypadku zbioru wielopunktowego $F(\theta)$ podamy ogólny opis konstrukcji.

Przypadek 1. $F(\theta) = \{y_1\}$. Z ciągłości multifunkcji F w punkcie θ wnosimy o istnieniu liczby δ , $0 < \delta \leq r$ takiej, że dla $|x| \leq 3\delta$ mamy

$$F(x) \subset \bar{V}(\{y_1\}, \varepsilon) \quad \text{oraz} \quad \{y_1\} \subset \bar{V}(F(x), \varepsilon).$$

Multifunkcję G skonstruujemy odpowiednio adaptując multifunkcję z przykładu 3.1. Dla uproszczenia zapisu położmy

$$f(\varphi) = y_1 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \cos \varphi e_1 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \sin \varphi e_2,$$

gdzie $e_1, e_2 \in Y$ są dwoma liniowo niezależnymi wektorami jednostkowymi.

Multifunkcję G określamy następująco

$$G(\theta) = \{y_1\},$$

$$G(x) = \{f(\varphi) : 0 \leq \varphi \leq 2\pi\} \quad \text{dla } |x| = \delta,$$

$$G(x) = \{f(\varphi) : 0 \leq \varphi \leq 2\pi - 1\} \quad \text{dla } |x| = 2\delta,$$

$$G(x) = F(x) \quad \text{dla } |x| = 3\delta.$$

Ponadto dla x spełniających nierówności $0 < |x| < \delta$, $2\delta < |x| < 3\delta$ określamy multifunkcję G stosując "liniową interpolację". Kładziemy zatem

$$G(x) = \frac{|x|}{\delta} G\left(\delta \frac{x}{|x|}\right) + \left(1 - \frac{|x|}{\delta}\right) G(\theta) \quad \text{dla } 0 < |x| < \delta,$$

$$G(x) = \left(\frac{|x|}{\delta} - 2\right) G\left(3\delta \frac{x}{|x|}\right) + \left(3 - \frac{|x|}{\delta}\right) G\left(2\delta \frac{x}{|x|}\right)$$

$$\text{dla } 2\delta < |x| < 3\delta.$$

W końcu dla x z warstwy kulistej $\delta < |x| < 2\delta$ kładziemy

$$G(x) = \left\{ f(\varphi) : \ln t \leq \varphi \leq \ln t + 2\pi - t \right\}, \text{ gdzie } t = \frac{|x| - \delta}{\delta}.$$

Ciągłość multifunkcji G w obszarach $0 < |x| \leq \delta$,

$2\delta \leq |x| \leq 3\delta$ wynika z lematu 2.5, natomiast jej ciągłość w punkcie θ oraz obszarze $\delta \leq |x| \leq 2\delta$ jest oczywista.

Korzystając teraz z własności metryki Hausdorffa, podanych w rozdziale 2, łatwo sprawdzić, że multifunkcja G spełnia nierówność $h^*(F, G) \leq \varepsilon$. Ponadto ze sposobu konstrukcji wynika, że multifunkcja G nie ma selekcji ciągłej w obszarze $\delta \leq |x| \leq 2\delta$.

Przypadek 2. $F(\theta) = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$, $n \geq 2$. Niech $2\varepsilon < \min \{ \|y_i - y_j\| : i \neq j; i, j = 1, 2, \dots, n \}$. Wtedy z ciągłości multifunkcji F w punkcie θ wnosimy o istnieniu liczby δ , $0 < \delta \leq r$ takiej, że dla $|x| \leq 3\delta$ spełnione są zawierania

$$F(x) \subset \bigcup_{i=1}^n \bar{B}(y_i, \varepsilon) \quad \text{oraz} \quad \{y_1, y_2, \dots, y_n\} \subset \bar{V}(F(x), \varepsilon).$$

Zauważmy jednocześnie, że kule $\bar{B}(y_i, \varepsilon)$, $i = 1, 2, \dots, n$ są parami rozłączne. Stąd wynika, że konstrukcję multifunkcji G możemy podać niezależnie dla każdej części $F(x) \cap \bar{B}(y_i, \varepsilon)$, $i = 1, 2, \dots, n$ multifunkcji F . Konstrukcja będzie taka sama jak w przypadku 1.

Dla zakończenia dowodu wystarczy zauważyć, że multifunkcja G otrzymana w obu przypadkach spełnia nierówność $h^*(H, G) \leq 2\varepsilon$.

UWAGA 3.4. Powyższe twierdzenie jest również prawdziwe dla zbioru K domkniętego w X , zawierającego np. odcinek $[x_0, x_1]$. Wystarczy bowiem multifunkcję F rozszerzyć do multifunkcji $\tilde{F}$ określonej na całej przestrzeni X (twierdzenie 2.4) i zastosować twierdzenie 3.3. Otrzymaną w ten sposób multifunkcję $\tilde{G}$ obcinamy do zbioru K , co daje nam poszukiwaną multifunkcję G . Oczywiście jest, że multifunkcja G nie ma selekcji ciągłej na odcinku $[x_0, x_1]$.

Pokażemy niżej, że jeżeli do założeń twierdzenia 3.3 dodamy warunek $\dim(X) \geq 2$, to można uzyskać więcej, a mianowicie, że rodzina $\mathcal{S}(K, Y)$ jest nigdzie gęstym podzbiorem rodziny $\mathcal{C}(K, Y)$. Sformułowanie i dowód zapowiadzianego wyżej twierdzenia poprzedzimy lematem oraz pewnym wnioskiem z niego wynikającym.

LEMAT 3.5. Niech $\dim(X) \geq 2$, $\dim(Y) \geq 2$ oraz niech $x_0 \in \text{int}(K)$. Wtedy rodzina $\mathcal{N}(K, Y, x_0)$ jest podzbiorem gęstym rodziny $\mathcal{C}(K, Y, x_0)$.

Dowód. Podobnie jak w dowodzie poprzedniego twierdzenia możemy założyć, że $x_0 = \theta$. Wybieramy $r > 0$ w ten sposób, aby $\bar{B}(\theta, 2r) \subset \text{int}(K)$. Niech F będzie dowolną multifunkcją z rodziny $\mathcal{C}(K, Y, x_0)$ oraz niech ε będzie dowolną liczbą dodatnią. Pokażemy, że w rodzinie $\mathcal{N}(K, Y, x_0)$ istnieje multifunkcja G spełniająca nierówność $h^*(F, G) \leq \varepsilon$. Również i w tym dowodzie dokładny opis konstrukcji multifunkcji G podamy jedynie dla przypadku jednoelementowego zbioru $F(\theta)$. Natomiast w przypadku zbioru wielopunktowego $F(\theta)$ podamy tylko szkic konstrukcji;

Przypadek 1. $F(\theta) = \{y_1\}$. Z ciągłości multifunkcji F w punkcie θ wnosimy o istnieniu liczby δ , $0 < \delta \leq r$ takiej, że dla $|x| \leq 2\delta$ mamy

$$h(F(x), \{y_1\}) \leq \varepsilon.$$

Niech Z oznacza dwuwymiarową podprzestrzeń liniową przestrzeni X . Zauważmy tutaj, że zbiór $\bar{B}(\theta, \delta) \cap Z$ jest homeomorficzny z kulą jednostkową w przestrzeni R^2 . Wynika stąd, że dla $x \in \bar{B}(\theta, \delta) \cap Z$ możemy używać oznaczenia $x = (\varrho, \varphi)$, gdzie $0 \leq \varrho \leq 1$ oraz $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Dla uproszczenia zapisu wprowadzamy pomocniczą funkcję

$$f(\varrho, \varphi) = \frac{\varepsilon \varrho}{2} \cos \frac{\varphi}{2} e_1 + \frac{\varepsilon \varrho}{2} \sin \frac{\varphi}{2} e_2,$$

gdzie e_1, e_2 oznaczają dwa liniowo niezależne wektory jednostkowe w przestrzeni Y . Na zbiorze $\bar{B}(\theta, \delta) \cap Z$ multifunkcję G określamy następująco

$$G(x) = \begin{cases} \{y_1 + f(\varrho, \varphi), y_1 - f(\varrho, \varphi)\} & \text{dla } x \neq \theta, \\ \{y_1\} & \text{dla } x = \theta, \end{cases}$$

gdzie $x = (\varrho, \varphi)$. Teraz korzystając z twierdzenia 2.4 możemy rozszerzyć multifunkcję G na całą kulę $\bar{B}(\theta, \delta)$.

Zauważmy, że rozszerzona w ten sposób multifunkcja (oznaczona tą samą literą G) spełnia dla $x \in \bar{B}(\theta, \delta)$ warunek $G(x) \subset \bar{B}(y_1, \varepsilon)$. Przechodzimy teraz do określenia multifunkcji G na całym zbiorze K . W tym celu położymy

$$G(x) = \begin{cases} \left(2 - \frac{|x|}{\delta}\right) G\left(\delta \frac{x}{|x|}\right) + \left(\frac{x}{\delta} - 1\right) F\left(2\delta \frac{x}{|x|}\right) & \text{dla } \delta < |x| \leq 2\delta, \\ F(x) & \text{dla } |x| > 2\delta. \end{cases}$$

Zauważmy, że tak określona multifunkcja G spełnia warunki

$$G \in \mathcal{N}(K, Y, x_0) \quad \text{oraz} \quad h^*(F, G) \leq \varepsilon.$$

Ponadto, dla dostatecznie małej liczby $\eta > 0$, mamy

$$B(G, \eta) \subset \mathcal{N}(K, Y).$$

Przypadek 2. $F(\theta) = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$, $n \geq 2$.

Nie zmniejszając ogólności rozważań możemy założyć, że

$$2\varepsilon < \min \{ \|y_i - y_j\| : i \neq j ; i, j = 1, 2, \dots, n \}.$$

Wtedy z ciągłości multifunkcji F w punkcie θ istnieje

δ , $0 < \delta \leq r$ taka, że dla $|x| \leq 2\delta$ mamy

$$h(F(x), \{y_1, y_2, \dots, y_n\}) \leq \varepsilon.$$

Zauważmy jednocześnie, że kule $\bar{B}(y_i, \varepsilon)$, $i = 1, 2, \dots, n$

są parami rozłączne. A zatem na kuli $\bar{B}(\theta, 2\delta)$ multifunkcja

F jest sumą parami rozłącznych multifunkcji ciągłych F_i ,

$i = 1, 2, \dots, n$. Wynika stąd, że dla każdej multifunkcji

F_i , $i = 1, 2, \dots, n$ możemy przeprowadzić konstrukcję multi-

funkcji G_i , $i = 1, 2, \dots, n$ analogiczną jak w przypadku 1.

Żądana multifunkcja G jest sumą multifunkcji ciągłych G_i ,

sama jest więc także ciągła (lemat 2.9). Multifunkcja G

skonstruowana w tym przypadku także spełnia warunki podane

na końcu rozważań poprzedniego przypadku.

UWAGA 3.6. Lemat 3.5 jest prawdziwy również w przypadku, gdy zbiór K jest domknięty w X oraz spełnia następujący warunek: istnieje otoczenie punktu $x_0 \in K$ homeomorficzne z kulą jednostkową w przestrzeni R^n , $n \geq 2$. Uzasadnienie jest podobne jak w uwadze 3.4

WNIOSEK 3.7. Z lematu 2.6 oraz lematu 3.5 otrzymujemy natychmiast równość $\overline{\mathcal{N}(K,Y)} = \mathcal{C}(K,Y)$. Ponadto ze sposobu dowodu lematu 3.5 wynika, że

$$\forall F \in \mathcal{C}(K,Y) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists G \in \mathcal{N}(K,Y) \quad \exists \eta > 0 \quad h^*(G,F) \leq \varepsilon \quad \text{oraz} \quad B(G,\eta) \subset \mathcal{N}(K,Y).$$

Teraz możemy sformułować i udowodnić zapowiedziane wcześniej twierdzenie o kategorii rodziny $\mathcal{S}(K,Y)$.

TWIERDZENIE 3.8. Niech X i Y będą przestrzeniami Banacha o wymiarze nie mniejszym niż 2. Niech ponadto K będzie podzbiorem przestrzeni X z niepustym wnętrzem. Wtedy rodzina $\mathcal{S}(K,Y)$ jest nigdzie gęstym podzbiorem rodziny $\mathcal{C}(K,Y)$.
(Jest więc zbiorem pierwszej kategorii Baire'a).

Dowód. Wystarczy wykazać, że $\text{int}(\overline{\mathcal{S}(K,Y)}) = \emptyset$. W przeciwnym razie istniałaby multifunkcja $F \in \overline{\mathcal{S}(K,Y)}$ taka, że $\overline{B(F,\varepsilon)} \subset \overline{\mathcal{S}(K,Y)}$, przy pewnym dodatnim ε . Ponadto, na podstawie wniosku 3.7, mielibyśmy

$$G \in \overline{B(F,\varepsilon)} \quad \text{oraz} \quad B(G,\eta) \subset \mathcal{N}(K,Y),$$

gdzie G jest pewną multifunkcją z rodziny $\mathcal{N}(K,Y)$ a η pewną liczbą dodatnią. W ten sposób otrzymalibyśmy $G = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n$, gdzie $F_n \in \mathcal{S}(K,Y)$, $n \in \mathbb{N}$. Otrzymana na tej drodze sprzeczność z warunkiem $B(G,\eta) \subset \mathcal{N}(K,Y)$ kończy dowód twierdzenia.

UWAGA 3.9. Z twierdzenia 3.8 oraz z zupełności rodziny $\mathcal{C}(K,Y)$ wynika (twierdzenie 2.10) gęstość rodziny $\mathcal{N}(K,Y)$ udowodniona wcześniej w twierdzeniu 3.3. Oznacza to, że gęstość rodziny $\mathcal{N}(K,Y)$ wystarczyło pokazać tylko dla przypadku $\dim(X) = 1$. Jednak ze względu na kolejność uzyskiwania wyników pozostawiono sformułowanie twierdzenia 3.3 bez zmian.

Twierdzenie 3.8 jest prawdziwe również w przypadku, gdy zbiór K spełnia warunek podany w uwadze 3.6.

Z dotychczasowych rozważań wynika, że pozostały nam jeszcze do zbadania własności rodziny $\mathcal{S}(K, Y)$ dla przypadku $\dim(X) = 1$ oraz $\dim(Y) \geq 2$. W tym przypadku rodzina $\mathcal{S}(K, Y)$ ma nieco inne własności topologiczne niż poprzednio. Pokażemy mianowicie, że rodzina $\mathcal{S}(K, Y)$ jest podzbiorem gęstym rodziny $\mathcal{C}(K, Y)$. Oczywiście, także i w tym przypadku, rodzina $\mathcal{N}(K, Y)$ jest gęsta w $\mathcal{C}(K, Y)$.

Twierdzenie 3.10. Niech $X = \mathbb{R}^1$, $K = [0, 1]$ oraz $\dim(Y) \geq 2$. Wtedy rodzina $\mathcal{S}(K, Y)$ jest podzbiorem gęstym rodziny $\mathcal{C}(K, Y)$.

Dowód. Niech F będzie dowolną multifunkcją z rodziny $\mathcal{C}(K, Y)$ i niech ε będzie dowolną liczbą dodatnią. Pokażemy, że istnieje multifunkcja $G \in \mathcal{S}(K, Y)$ spełniająca nierówność $h^*(F, G) \leq 4\varepsilon$. Z jednostajnej ciągłości multifunkcji F na odcinku $[0, 1]$ wnosimy o istnieniu liczby $\delta > 0$ takiej, że dla $x', x'' \in [0, 1]$ spełniających nierówność $|x' - x''| \leq \delta$ mamy $h(F(x'), F(x'')) \leq \varepsilon$. Niech $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = 1$ będzie podziałem odcinka $[0, 1]$ na przedziały o długości nie większej niż δ . Przez $N_1 \subset F(x_1)$ będziemy oznaczać ε -sieć skończoną zbioru $F(x_1)$, $0 \leq i \leq n$. Zauważmy, że $h(N_k, N_{k+1}) \leq 2\varepsilon$ dla $0 \leq k \leq n-1$, skąd $\bar{B}(y, 2\varepsilon) \cap N_{k+1} \neq \emptyset$ dla każdego $y \in N_k$. Teraz możemy określić multifunkcję G , kładąc

$$G(x) = \begin{cases} N_k & \text{dla } x = x_k, \quad k = 0, 1, \dots, n, \\ \bigcup_{y \in N_k} \left[(1-t_k)\{y\} + t_k(\bar{B}(y, 2\varepsilon) \cap N_{k+1}) \right] & \text{dla } x_k < x < x_{k+1}, \\ & k = 0, 1, \dots, n-1, \\ \text{gdzie } t_k = \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}. \end{cases}$$

Geometrycznie oznacza to, że każdy punkt (x_k, y) ze zbioru $\{x_k\} \times N_k$ łączymy odcinkami w $R \times Y$ z punktami zbioru $\{x_{k+1}\} \times (N_{k+1} \cap \bar{B}(y, 2\varepsilon))$. Łatwo wykazać, że każdy punkt zbioru $\{x_k\} \times N_k$ będzie połączony odcinkiem z pewnym punktem zbioru $\{x_{k+1}\} \times N_{k+1}$. Jednocześnie każdy punkt zbioru $\{x_{k+1}\} \times N_{k+1}$ zostanie wykorzystany w tej konstrukcji. Ze sposobu określenia oraz z lematów 2.5 i 2.9 wynika, że multifunkcja G jest ciągła na każdym odcinku $[x_k, x_{k+1}]$, $0 \leq k \leq n-1$, co oczywiście pociąga za sobą ciągłość multifunkcji G na odcinku $[0, 1]$. Ponadto zauważmy, że multifunkcja G ma selekcję ciągłą na odcinku $[0, 1]$. Pozostała do wykazania nierówność $h(F(x), G(x)) \leq 4\varepsilon$ dla $x \in [0, 1]$. Niech x będzie punktem przedziału $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. Wtedy dla pewnego t_k , $0 \leq t_k \leq 1$ mamy $x = (1-t_k)x_k + t_k x_{k+1}$. Niech y będzie dowolnym elementem zbioru N_k . Wtedy z nierówności podanych w lemacie 2.1 otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned} & h(\{y\}, (1-t_k)\{y\} + t_k(\bar{B}(y, 2\varepsilon) \cap N_{k+1})) \leq \\ & \leq h((1-t_k)\{y\}, (1-t_k)\{y\}) + h(t_k\{y\}, t_k(\bar{B}(y, 2\varepsilon) \cap N_{k+1})) \leq \\ & \leq t_k h(\{y\}, \bar{B}(y, 2\varepsilon) \cap N_{k+1}) \leq 2t_k \varepsilon \leq 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Teraz korzystając z nierówności podanej w lemacie 2.8 mamy

$$\begin{aligned} & h\left(\bigcup_{y \in N_k} \{y\}, \bigcup_{y \in N_k} [(1-t_k)\{y\} + t_k(\bar{B}(y, 2\varepsilon) \cap N_{k+1})]\right) \leq 2\varepsilon, \\ & h(N_k, \bigcup_{y \in N_k} [(1-t_k)\{y\} + t_k(\bar{B}(y, 2\varepsilon) \cap N_{k+1})]) \leq 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Następnie uwzględniając nierówność $h(F(x), N_k) \leq 2\varepsilon$ otrzymamy

$$h(F(x), \bigcup_{y \in N_k} [(1 - t_k)\{y\} + t_k(\bar{B}(y, 2\varepsilon) \cap N_{k+1})]) \leq 4\varepsilon,$$

$$\text{czyli} \quad h(F(x), G(x)) \leq 4\varepsilon.$$

Otrzymana nierówność kończy dowód twierdzenia.

UWAGA 3.11. Twierdzenie 3.10 sformułowaliśmy tylko dla przypadku $X = R$ oraz $K = [0, 1]$. Ograniczenie to nie jest istotne, natomiast ułatwia zapisanie dowodu. Twierdzenie to jest również prawdziwe w przypadku, gdy K jest podzbiorem domkniętym R . Wystarczy bowiem multifunkcję F rozszerzyć do multifunkcji $\tilde{F}$ określonej na całej prostej (twierdzenie 2.4). Następnie zastosować twierdzenie 3.10 do multifunkcji $\tilde{F}$ kolejno na odcinkach $[n, n+1]$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Otrzymaną na tej drodze multifunkcję $\tilde{G}$ obcinamy do zbioru K , co daje nam żadaną multifunkcję G .

Na zakończenie rozważań dotyczących własności topologicznych rodziny $\mathcal{S}(K, Y)$ zauważmy, że w przypadku $\dim(X) = 1$, $\dim(Y) \geq 2$ z twierdzeń 3.3 i 3.9 wynika, że rodzina $\mathcal{S}(K, Y)$ nie jest zbiorem otwartym ani domkniętym w $\mathcal{C}(K, Y)$. Oczywiście te same własności ma rodzina $\mathcal{N}(K, Y)$. Ponieważ dla przypadku $\dim(X) \geq 2$, $\dim(Y) \geq 2$ rodzina $\mathcal{S}(K, Y)$ jest zbiorem nigdzie gęstym, więc nie może być zbiorem otwartym w $\mathcal{C}(K, Y)$. Poniższy przykład pokazuje, że rodzina $\mathcal{S}(K, Y)$ nie jest również zbiorem domkniętym w $\mathcal{C}(K, Y)$. Łatwo wykazać, że wystarczy przy tym ograniczyć się do rozważenia przypadku $X = Y = R^2$.

PRZYKŁAD 3.12. Niech $K = [0, 1] \times [0, 1]$. Multifunkcje $F, F_n : K \rightarrow \text{comp}(R^2)$, $n \in N$ określamy następująco

$$F(x_1, x_2) = \begin{cases} \{(\cos \varphi, \sin \varphi) : 0 \leq \varphi \leq 2\pi\} & \text{dla } x_1 = 0, \\ \{(\cos \varphi, \sin \varphi) : \ln x_1 \leq \varphi \leq \ln x_1 + 2\pi - x_1\} & \text{dla } 0 < x_1 \leq 1 \end{cases}$$

oraz

$$F_n(x_1, x_2) = \begin{cases} \{(\cos \varphi, \sin \varphi) : -\ln n \leq \varphi \leq -\ln n + 2\pi - \frac{1}{n}\} & \text{dla } 0 \leq x_1 \leq \frac{1}{n}, \\ \{(\cos \varphi, \sin \varphi) : \ln x_1 \leq \varphi \leq \ln x_1 + 2\pi - x_1\} & \text{dla } \frac{1}{n} < x_1 \leq 1. \end{cases}$$

Zauważmy, że $F_n \in \mathcal{S}(K, R^2)$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n = F$, natomiast

$F \notin \mathcal{S}(K, R^2)$. Oznacza to, że rodzina $\mathcal{S}(K, Y)$ nie jest zbiorem domkniętym w $\mathcal{C}(K, Y)$.

Na zakończenie tego rozdziału zajmiemy się zagadnieniem aproksymacji multifunkcji ciągłych przez funkcje ciągłe. Będziemy mówili, że multifunkcja $F \in \mathcal{C}(K, Y)$ ma własność aproksymacji, jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje funkcja ciągła $f : K \rightarrow Y$ taka, że $d(f(x), F(x)) \leq \varepsilon$ dla każdego $x \in K$. Informacje o innych określeniach aproksymacji multifunkcji przez funkcje lub multifunkcje oraz związane z nimi twierdzenia można znaleźć w pracach [4, 5, 42, 53, 64]. Przez $\mathcal{A}(K, Y)$ będziemy oznaczali rodzinę wszystkich multifunkcji z $\mathcal{C}(K, Y)$, które mają własność aproksymacji. Oczywiście dowolna multifunkcja z rodziny $\mathcal{S}(K, Y)$ ma własność aproksymacji. Prawdziwa jest zatem inkluzja $\mathcal{S}(K, Y) \subset \mathcal{A}(K, Y)$. Zauważmy jednocześnie, że multifunkcja H z przykładu 3.1 ma własność aproksymacji, jednak nie ma selekcji ciągłej. Z powyższej uwagi wynika, że zawieranie $\mathcal{S}(K, Y) \subset \mathcal{A}(K, Y)$ jest istotne.

Podane niżej twierdzenie pozwala ocenić wielkość (w sensie kategorii Baire'a) rodziny $\mathcal{A}(K, Y)$.

TWIERDZENIE 3.13. Niech $\dim(X) \geq 2$ i $\dim(Y) \geq 2$.

Wtedy rodzina $\mathcal{A}(K, Y)$ jest nigdzie gęstym podzbiorem rodziny $\mathcal{C}(K, Y)$.

Dowód. Zauważmy, że wystarczy wykazać równość

$\mathcal{A}(K, Y) = \overline{\mathcal{S}(K, Y)}$. Rzeczywiście, wtedy z twierdzenia 3.8 wynika bezpośrednio, że rodzina $\mathcal{A}(K, Y)$ jest nigdzie gęstym podzbiorem rodziny $\mathcal{C}(K, Y)$. Najpierw pokażemy inkluzję

$\mathcal{A}(K, Y) \subset \overline{\mathcal{S}(K, Y)}$. Niech $F \in \mathcal{A}(K, Y)$ i niech $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Wtedy istnieje ciąg f_n funkcji ciągłych, $f_n : K \rightarrow Y$ takich, że

$$d(f_n(x), F(x)) \leq \frac{1}{n} \quad \text{dla } x \in K \quad \text{oraz } n \in \mathbb{N}.$$

Niech $F_n(x) = \{f_n(x)\} \cup F(x)$, $x \in K$. Wtedy oczywiste jest, że $F_n \in \mathcal{S}(K, Y)$ oraz $F = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n$. A stąd otrzymujemy, że

$F \in \overline{\mathcal{S}(K, Y)}$.

Niech teraz $F \in \overline{\mathcal{S}(K, Y)}$. Istnieje zatem ciąg F_n multifunkcji z rodziny $\mathcal{S}(K, Y)$ taki, że $F = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n$. Ustalmy $\varepsilon > 0$.

Istnieje wtedy liczba $m \in \mathbb{N}$ taka, że $h^*(F_m, F) \leq \varepsilon$. Ponieważ $F_m \in \mathcal{S}(K, Y)$, więc istnieje selekcja ciągła f_m multifunkcji F_m . Zauważmy teraz, że dla $x \in K$ prawdziwe są nierówności

$$d(f_m(x), F(x)) \leq h(F_m(x), F(x)) \leq \varepsilon.$$

A zatem $F \in \mathcal{A}(K, Y)$, co kończy dowód.

UWAGA 3.14. Dla przypadku $\dim(X) = 1$, $\dim(Y) \geq 2$

z twierdzenia 3.9 otrzymujemy, że $\mathcal{A}(K, Y) = \overline{\mathcal{S}(K, Y)} = \mathcal{C}(K, Y)$.

Rozważania przeprowadzone w rozdziale 2 (lemat 2.6 o aproksymacji multifunkcji ciągłej przez multifunkcję ciągłą skończenie elementową) oraz w rozdziale 3 (twierdzenie 3.10 o gęstości rodziny multifunkcji ciągłych z selekcjami ciągłymi) nasuwają pewne przypuszczenie dotyczące globalnej aproksymacji multifunkcji ciągłej multifunkcją skończenie elementową. Niżej podamy dokładne sformułowanie tego zagadnienia.

Niech K będzie podzbiorem zwartym przestrzeni unormowanej X , ponadto niech Y będzie przestrzenią Banacha. Wtedy rodzina $\mathcal{F}(K, Y)$ multifunkcji ciągłych $F : K \rightarrow \text{comp}(Y)$, takich, że $\text{card } F(x) < \infty$ dla $x \in K$ jest podzbiorem gęstym rodziny $\mathcal{C}(K, Y)$ wszystkich multifunkcji ciągłych. Wydaje się, że można zażądać, żeby ilość elementów zbiorów $F(x)$, $x \in K$ była wspólnie ograniczona (osobno dla każdej multifunkcji z rodziny $\mathcal{F}(K, Y)$). Zauważmy tutaj, że multifunkcje ciągłe, których wartości są zbiorami skończonymi, nie muszą mieć selekcji ciągłych (nawet w przypadku, gdy ilość elementów wartości multifunkcji jest wspólnie ograniczona, zobacz przykład 3.2).

Na zakończenie rozdziału wrócimy jeszcze do rozważań związanych z kategorią Baire'a rodziny $\mathcal{S}([0, 1], Y)$, gdzie Y jest przestrzenią Banacha o wymiarze nie mniejszym niż 2. Pewne analogie między własnościami rodziny $\mathcal{S}([0, 1], Y)$ a własnościami podzbiorów rezydualnych grupy topologicznej [21, Lemat 9] skłaniają do wypowiedzenia następującej hipotezy.

Rodzina $\mathcal{S}([0,1], Y)$ multifunkcji ciągłych $F : [0,1] \rightarrow \text{comp}(Y)$ mających selekcje ciągłe na odcinku $[0,1]$ jest zbiorem pierwszej kategorii Baire'a w rodzinie $\mathcal{C}([0,1], Y)$ wszystkich multifunkcji ciągłych.

R o z d z i a ł 4

TWIERDZENIA O GĘSTOŚCI I KATEGORII BAIRE'A DLA ZAWIERAŃ RÓŻNICZKOWYCH Z ROZWIĄZANAMI KLASYCZNYMI

Niech K oznacza produkt $(t_0 - a, t_0 + a) \times \bar{B}(x_0, b)$,
gdzie $a, b, t_0 \in \mathbb{R}$, przy czym $0 < a, b \leq \infty$ oraz $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Ponadto
niech F będzie dowolną multifunkcją z rodziny $\mathcal{C}(K, \mathbb{R}^n)$.
Zawieraniem różniczkowym nazywamy relację następującej po-
staci

$$(1) \quad \dot{x}(t) \in F(t, x(t)).$$

Będziemy mówili, że zawieranie różniczkowe (1) z warunkiem
początkowym

$$(2) \quad x(t_0) = x_0$$

ma rozwiązanie klasyczne, jeżeli istnieje różniczkowalna
w sposób ciągły funkcja $x : (t_0 - c, t_0 + c) \rightarrow \bar{B}(x_0, b)$,
 $0 < c \leq a$, taka, że dla $t \in (t_0 - c, t_0 + c)$ spełniona jest
relacja (1) oraz warunek (2).

Zawieranie różniczkowe (zwane także równaniem orientoro-
rowym) jest naturalnym uogólnieniem równania różniczkowego.
Wiele zagadnień z równań różniczkowych, teorii sterowania
optymalnego oraz teorii gier różniczkowych związanych jest
z zawieraniem różniczkowymi.

Rodzinę multifunkcji $F \in \mathcal{C}(K, \mathbb{R}^n)$, dla których zawieranie
różniczkowe (1) z warunkiem (2) ma rozwiązanie klasyczne,
będziemy oznaczali przez $\mathcal{K}(K, \mathbb{R}^n)$. Uzupełnienie tej rodziny

do przestrzeni $\mathcal{C}(K, \mathbb{R}^n)$ będziemy oznaczali przez $\mathcal{M}(K, \mathbb{R}^n)$. Nie zmniejszając ogólności dalszych rozważań możemy założyć, że $t_0 = 0$ oraz $x_0 = \theta$. Ponadto dla uproszczenia zapisu przyjmijmy $\tilde{x} = (t, x)$ oraz $\tilde{\theta} = (0, \theta)$. W tej części pracy symbolem $|\cdot|$ oznaczamy normę w przestrzeni euklidesowej.

Na początku rozdziału czwartego podamy przykład multifunkcji ciągłej F nie mającej selekcji ciągłej, takiej jednak, że zawieranie różniczkowe (1) z warunkiem (2) ma rozwiązanie klasyczne. Przykład ten pokazuje różnicę między rodzinami $\mathcal{S}(K, \mathbb{R}^n)$ i $\mathcal{K}(K, \mathbb{R}^n)$. Następnie wykażemy, że rodziny $\mathcal{M}(K, \mathbb{R}^n)$ oraz $\mathcal{K}(K, \mathbb{R}^n)$ są podzbiorami gęstymi rodziny $\mathcal{C}(K, \mathbb{R}^n)$. Podamy tutaj także kilka uwag o własnościach rodziny $\mathcal{K}(K, \mathbb{R}^n)$. W dalszej części pracy pokażemy, że zbiór Π złożony z par (x, F) takich, że F jest multifunkcją z rodziny $\mathcal{C}(K, \mathbb{R}^n)$, a x rozwiązaniem klasycznym zawierania różniczkowego (1) z warunkiem (2), jest zbiorem pierwszej kategorii Baire'a typu F_δ w produkcie $C^1(-a, a) \times \mathcal{C}(K, \mathbb{R}^n)$. Na końcu rozdziału przedstawimy problem związany z kategorią Baire'a rodziny $\mathcal{K}(K, \mathbb{R}^n)$.

Badaniem warunków istnienia rozwiązań klasycznych zawierania różniczkowych zajmowało się wielu autorów. Problematykę tę zapoczątkował A.F.Filippov, który w pracy [22] wykazał, że zagadnienie (1), (2) z prawą stroną spełniającą na K warunek Lipschitza ma rozwiązanie klasyczne. Następnie N.Kikuchi i Y.Tomita w pracy [29] z 1971 r. wykazali, że zawieranie różniczkowe z prawą stroną absolutnie ciągłą ma rozwiązanie klasyczne. W tym samym roku H.Hermes w pracy [27]

wprowadził pojęcie ograniczonej wariacji dla multifunkcji i wykazał, że zawieranie różniczkowe autonomiczne z prawą stroną ciągłą o ograniczonej wariacji ma rozwiązanie klasyczne. W 1977 r. A.F.Filippov ponownie badał warunki istnienia rozwiązań klasycznych zawierania różniczkowych. W pracy [23] wykazał, że zagadnienie (1), (2) z prawą stroną ciągłą o wartościach lokalnie jednostajnie spójnych, ma rozwiązanie klasyczne. Ponadto pokazał, że zawieranie różniczkowe z prawą stroną F ciągłą i spełniającą warunki:

1. $h(F(t, x_1), F(t, x_2)) \leq k(t) |x_1 - x_2|$, dla dowolnych $t \in (-a, a)$ oraz dowolnych $x_1, x_2 \in \bar{B}(\theta, b)$, gdzie k jest funkcją lokalnie całkowaną,
2. $h(F(t_1, x), F(t_2, x)) \leq l(t_2) - l(t_1)$, dla dowolnych $x \in \bar{B}(\theta, b)$ oraz dowolnych $t_1, t_2 \in (-a, a)$, $t_1 \leq t_2$, gdzie l jest niemalejącą funkcją ciągłą,

ma rozwiązanie klasyczne. W tej samej pracy pokazano, że dla $n \geq 2$ następujące trzy klasy multifunkcji: multifunkcje absolutnie ciągłe, multifunkcje ciągłe o ograniczonej wariacji oraz multifunkcje lipschitzowskie, pokrywają się. Tym samym twierdzenia podane przez H.Hermesa, N.Kikuchi wraz Y.Tomitą są istotnie nowe tylko w przypadku jednej zmiennej niezależnej. Inne wyniki związane z istnieniem rozwiązań zawierania różniczkowych można znaleźć w pracy przeglądowej [14], gdzie podano także obszerną literaturę dotyczącą tych zagadnień. Przykłady zawierania różniczkowych z prawą stroną ciągłą nie mających rozwiązań klasycznych podali A.F.Filippov [22] oraz H.Hermes [28]. Podany niżej przykład zawierania

różniczkowego bez rozwiązań klasycznych wykorzystamy w dalszej części rozdziału.

PRZYKŁAD 4.1. [22] Niech $F : (-1, 1) \rightarrow \text{comp}(\mathbb{R}^2)$ będzie multifunkcją określoną w następujący sposób

$$F(t) = \begin{cases} \{(\cos \varphi, \sin \varphi) : 0 \leq \varphi \leq 2\pi\} & \text{dla } t = 0, \\ \{(\cos \varphi, \sin \varphi) : |t| - \ln|t| \leq \varphi \leq 2\pi - \ln|t|\} & \text{dla } t \neq 0. \end{cases}$$

Rozważmy zawieranie różniczkowe $\dot{x}(t) \in F(t)$, $x \in \mathbb{R}^2$ z warunkiem $x(0) = 0$. Łatwo zauważyć, że powyższe zawieranie różniczkowe nie ma rozwiązań klasycznych, gdyż multifunkcja F nie ma selekcji ciągłej w żadnym otoczeniu punktu 0.

W dalszych rozważaniach ograniczymy się tylko do przypadku $n \geq 2$, gdyż dla $n=1$ zachodzą równości

$$\mathcal{C}(K, \mathbb{R}^n) = \mathcal{S}(K, \mathbb{R}^n) = \mathcal{K}(K, \mathbb{R}^n).$$

Ponadto zauważmy, że istnienie selekcji ciągłej prawej strony zawierania różniczkowego jest warunkiem wystarczającym dla istnienia rozwiązań klasycznych tego zawierania. Prawdziwa jest zatem inkluzja $\mathcal{S}(K, \mathbb{R}^n) \subset \mathcal{K}(K, \mathbb{R}^n)$. Natomiast istnienie rozwiązania klasycznego zawierania różniczkowego z prawą stroną ciągłą nie gwarantuje istnienia (nawet lokalnie) selekcji ciągłej prawej strony tego zawierania. Pokazuje to następujący przykład.

PRZYKŁAD 4.2. Niech $F : \bar{B}(0,0), 2) \rightarrow \text{comp}(\mathbb{R}^2)$ będzie multifunkcją określoną następującym wzorem

$$F(x_1, x_2) = \begin{cases} \{(2 \cos \varphi, 2 \sin \varphi) : 0 \leq \varphi \leq 2\pi\} & \text{dla } |x_1| \leq |x_2|, \\ \{(2 \cos \varphi, 2 \sin \varphi) : |x_1| - |x_2| - \ln|x_1| \leq \varphi \leq 2\pi - \ln|x_1| & \text{dla } |x_1| > |x_2|, \end{cases}$$

gdzie $(x_1, x_2) \in \bar{B}((0,0), 2)$. Określona w ten sposób multifunkcja F jest ciągła na kuli $\bar{B}((0,0), 2)$. Zawieranie różniczkowe $(\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t)) \in F(x_1(t), x_2(t))$ z warunkiem $x_1(0) = x_2(0) = 0$ ma rozwiązanie klasyczne, $x_1(t) = x_2(t) = \sqrt{2} t$, gdzie $t \in (-1, 1)$. Warto jednak zauważyć, że multifunkcja F nie ma selekcji ciągłej w żadnym otoczeniu punktu $(0,0)$.

Obecnie przechodzimy do zapowiadanych badań własności rodziny $\mathcal{K}(K, \mathbb{R}^n)$ oraz $\mathcal{M}(K, \mathbb{R}^n)$. Rozpocznijemy od zbadania gęstości rodziny $\mathcal{M}(K, \mathbb{R}^n)$ w $\mathcal{C}(K, \mathbb{R}^n)$. Prawdziwe jest następujące twierdzenie.

TWIERDZENIE 4.3. Dla $n \geq 2$, rodzina $\mathcal{M}(K, \mathbb{R}^n)$ multifunkcji ciągłych F , dla których zawieranie różniczkowe (1) z warunkiem (2) nie ma rozwiązań klasycznych w żadnym otoczeniu punktu 0 , jest podzbiorem gęstym rodziny $\mathcal{C}(K, \mathbb{R}^n)$ wszystkich ograniczonych multifunkcji ciągłych.

Dowód. Niech F będzie dowolną multifunkcją z rodziny $\mathcal{C}(K, \mathbb{R}^n)$ i niech ε będzie dowolną liczbą dodatnią. Z lematu 2.6 wynika, że istnieje multifunkcja ciągła G przyjmująca w punkcie θ wartość $\{y_1, y_2, \dots, y_m\}$, $m \in \mathbb{N}$, oraz spełniająca nierówność $h^*(F, G) \leq \varepsilon$. Skonstruujemy niżej multifunkcję ciągłą H taką, że zawieranie różniczkowe $\dot{x}(t) \in H(\tilde{x}(t))$ z warunkiem $x(0) = \theta$ nie ma rozwiązań klasycznych w żadnym otoczeniu punktu 0 , przy czym $h^*(H, G) \leq 4\varepsilon$. Niech $r > 0$ będzie takie, że $\bar{B}(\theta, r) \subset K$. Z ciągłości multi-

funkcji G w punkcie $\tilde{\theta}$ istnieje liczba δ , $0 < \delta \leq r$ taka, że dla $|\tilde{x}| \leq \delta$ mamy

$$G(x) \subset \bigcup_{i=1}^m \bar{B}(y_i, \varepsilon).$$

Dla wygody przyjmujemy $2\varepsilon < \min\{|y_i - y_j| : i \neq j; i, j = 1, 2, \dots, m\}$.

Ponieważ kule $\bar{B}(y_i, \varepsilon)$, $i = 1, 2, \dots, m$ są parami rozłączne, więc konstrukcję multifunkcji H na kuli $\bar{B}(\tilde{\theta}, \delta)$ możemy podać osobno dla każdej części $G(\tilde{x}) \cap \bar{B}(y_i, \varepsilon)$ multifunkcji G .

Zauważmy tutaj, że każda z tych części jest multifunkcją ciągłą. Dla uproszczenia zapisu wprowadzamy pomocnicze funkcje

$f_{ik} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ określone wzorami

$$f_{ik}(\varphi) = y_i + \frac{\varepsilon}{2^k} \cos \varphi e_1 + \frac{\varepsilon}{2^k} \sin \varphi e_2, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad k \in \mathbb{N},$$

gdzie e_1, e_2 oznaczają jednostkowe wektory ortogonalne w $\mathbb{R}^n$.

Multifunkcję H określamy w następujący sposób

$$H(\theta) = \{y_1, y_2, \dots, y_m\},$$

$$H(\tilde{x}) = \bigcup_{i=1}^m \{f_{ik}(\varphi) : 0 \leq \varphi \leq 2\pi\} \quad \text{dla } |\tilde{x}| = \frac{\delta}{3^k}, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$H(\tilde{x}) = \bigcup_{i=1}^m \{f_{ik}(\varphi) : 1 \leq \varphi \leq 2\pi\} \quad \text{dla } |\tilde{x}| = \frac{2\delta}{3^k}, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$H(\tilde{x}) = G(\tilde{x}) \quad \text{dla } |x| \geq \delta.$$

Następnie dla punktów $\tilde{x}$ należących do warstw kulistych

$$\frac{\delta}{3^k} < |\tilde{x}| < \frac{2\delta}{3^k}, \quad k \in \mathbb{N},$$

multifunkcję H określamy wzorem

$$H(\tilde{x}) = \bigcup_{i=1}^m \{f_{ik}(\varphi) : t - \ln t \leq \varphi \leq 2\pi - \ln t\},$$

gdzie $t = \frac{3^k |\tilde{x}|}{\delta} - 1$. Wreszcie dla punktów $\tilde{x}$ spełniających nierówność

$$\frac{2\delta}{3^k} < |\tilde{x}| < \frac{\delta}{3^{k-1}}, \quad k \in \mathbb{N}$$

kładziemy

$$H(\tilde{x}) = \bigcup_{i=1}^m \left\{ (1-t) \left[G\left(\frac{2\delta}{3^k} \frac{\tilde{x}}{|\tilde{x}|}\right) \cap \bar{B}(y_i, \varepsilon) \right] + t \left[G\left(\frac{\delta}{3^{k-1}} \frac{\tilde{x}}{|\tilde{x}|}\right) \cap \bar{B}(y_i, \varepsilon) \right] \right\},$$

gdzie $t = \frac{3^k |\tilde{x}|}{\delta} - 2$. Z lematów 2.5 oraz 2.9 wynika, że w ten sposób skonstruowana multifunkcja H jest ciągła na zbiorze K . Następnie korzystając z własności metryki Hausdorffa podanych w lematach 2.1 i 2.8 łatwo wynika, że multifunkcja H spełnia dla $x \in K$ nierówność $h(F(x), G(x)) \leq 4\varepsilon$.

Ponadto, ze sposobu konstrukcji multifunkcji H wynika, że nie ma ona selekcji ciągłych w obszarach

$$\frac{\delta}{3^k} \leq |\tilde{x}| \leq \frac{2\delta}{3^k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Pokażemy niżej, że multifunkcja H nie ma także selekcji ciągłych nad żadną krzywą gładką $\tilde{x}(t)$, $t \in [0, c]$, gdzie $c > 0$, wychodzącą z punktu θ . Przypuśćmy bowiem, że nad pewną krzywą $\tilde{x}(t)$, $t \in [0, c]$, multifunkcja H ma selekcję ciągłą. Oznacza to, że istnieje funkcja ciągła $v : [0, c] \rightarrow \mathbb{R}^n$ spełniająca dla $t \in [0, c]$, relację $v(t) \in H(\tilde{x}(t))$. Odwzorowując teraz z zachowaniem normy krzywą $\tilde{x}(t)$, $t \in [0, c]$, na ustalony promień kuli $\bar{B}(\theta, \delta)$ otrzymamy krzywą ciągłą $\tilde{y}(t) = e|\tilde{x}(t)|$,

gdzie e oznacza wektor jednostkowy w R^{n+1} . Zauważmy jednocześnie, że dla $t \in [0, c]$ spełniona jest równość $H(\tilde{x}(t)) = H(\tilde{y}(t))$. Skąd wynika, że multifunkcja H ma selekcję ciągłą również nad krzywą $\tilde{y}(t)$, $t \in [0, c]$. Prowadzi to do sprzeczności, gdyż ze sposobu konstrukcji multifunkcji H wynika, że nie ma ona selekcji ciągłych nad żadnym promieniem kuli $\bar{B}(\tilde{\theta}, \delta)$.

Z ostatnich rozważań wynika bezpośrednio, że zawieranie różniczkowe $\dot{x}(t) \in H(\tilde{x}(t))$ nie ma rozwiązań klasycznych w żadnym otoczeniu punktu 0 . Dla zakończenia dowodu wystarczy zauważyć, że $h^*(F, H) \leq 5\varepsilon$.

W następnym twierdzeniu pokażemy, że rodzina $\mathcal{K}(K, R^n)$ jest również podzbiorem gęstym rodziny $\mathcal{C}(K, R^n)$:

TWIERDZENIE 4.4. Dla $n \geq 2$, rodzina $\mathcal{K}(K, R^n)$ multifunkcji ciągłych, dla których zawieranie różniczkowe (1) z warunkiem (2) ma rozwiązanie klasyczne, jest gęsta w rodzinie $\mathcal{C}(K, R^n)$ wszystkich ograniczonych multifunkcji ciągłych.

Dowód. Niech F będzie dowolną multifunkcją z rodziny $\mathcal{C}(K, R^n)$ oraz niech ε będzie liczbą dodatnią. Liczbę $r > 0$ wybieramy tak, żeby $\bar{B}(\tilde{\theta}, 2r) \subset K$. Dla dowodu wystarczy pokazać, że istnieje multifunkcja ciągła G , $h^*(F, G) \leq 4\varepsilon$, mająca selekcję ciągłą w pewnym otoczeniu punktu $\tilde{\theta}$.

Niech $\{y_1, y_2, \dots, y_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, będzie ε -siecią skończoną zbioru $F(\tilde{\theta})$. Podobnie jak w dowodach poprzednich twierdzeń znajdujemy taką liczbę δ , $0 < \delta \leq r$, aby dla $|\tilde{x}| \leq 2\delta$ spełniony był warunek $h(F(\tilde{\theta}), F(x)) \leq \varepsilon$. Żadana multifunkcję G

otrzymamy kładąc

$$G(x) = \begin{cases} \{y_1, y_2, \dots, y_k\} & \text{dla } |\tilde{x}| < \delta, \\ \bigcup_{i=1}^k \left\{ \left(2 - \frac{|\tilde{x}|}{\delta}\right) \{y_i\} + \left(\frac{|\tilde{x}|}{\delta} - 1\right) \left[F(2\delta \frac{\tilde{x}}{|\tilde{x}|}) \cap \bar{B}(y_i, 2\varepsilon) \right] \right\} & \text{dla } \delta \leq |\tilde{x}| \leq 2\delta, \\ F(x) & \text{dla } |\tilde{x}| > 2\delta. \end{cases}$$

Z lematów 2.5 i 2.9 wynika, że multifunkcja G jest ciągła na zbiorze K . Podobnie jak w twierdzeniu 3.10 można wykazać, że multifunkcja G aproksymuje multifunkcję F z dokładnością 4ε . Ponadto oczywisty jest fakt, że multifunkcja G ma na kuli $\bar{B}(\tilde{\theta}, \delta)$ selekcję ciągłą. Skąd wynika, że zawieranie różniczkowe $\dot{x}(t) \in G(\tilde{x}(t))$ z warunkiem $x(0) = \theta$ ma rozwiązanie klasyczne.

UWAGA 4.5. Rodzina $\mathcal{K}_c(K, \mathbb{R}^n)$, $0 < c \leq a$, prawych stron zawierania różniczkowego (1) mającego rozwiązanie klasyczne na odcinku $(-c, c)$, nie jest podzbiorem domkniętym rodziny $\mathcal{K}(K, \mathbb{R}^n)$. Uzasadnienie tego faktu jest podobne jak w przykładzie 3.12. Zauważmy jednocześnie, że zbiory $\mathcal{K}_c(K, \mathbb{R}^n)$ tworzą rodzinę wstępującą przy zmniejszaniu parametru c . Oznacza to, że dla $0 < d \leq c \leq a$ spełniony jest warunek $\mathcal{K}_c(K, \mathbb{R}^n) \subset \mathcal{K}_d(K, \mathbb{R}^n)$. Zauważmy ponadto, że spełniona jest równość

$$\mathcal{K}(K, \mathbb{R}^n) = \bigcup_{0 < c \leq a} \mathcal{K}_c(K, \mathbb{R}^n).$$

Przechodzimy teraz do zapowiadzianych wcześniej badań zbioru $\bigcap_c$, $0 < c \leq a$, złożonego z par (x, F) , gdzie x jest funkcją klasy C^1 a F multifunkcją ciągłą, takich, że spełnione jest zawieranie różniczkowe $\dot{x}(t) \in F(t, x(t))$, $t \in (-c, c)$

oraz warunek $x(0) = \theta$. Niech $C^1(-a, a)$ oznacza rodzinę funkcji $x : (-a, a) \rightarrow \bar{B}(\theta, b)$ różniczkowalnych w sposób ciągły na odcinku $(-a, a)$ i spełniających warunek $x(0) = \theta$. Rodzinę $C^1(-a, a)$ będziemy rozważali łącznie ze standardową normą $\|\cdot\|$ określoną wzorem

$$\|x\| = \sup\{|x(t)| : -a < t < a\} + \sup\{|\dot{x}(t)| : -a < t < a\}.$$

Zauważmy tutaj, że rodzina $C^1(-a, a)$ z metryką generowaną przez powyższą normę jest przestrzenią zupełną. Rozważmy teraz produkt kartezjański przestrzeni $C^1(-a, a)$ oraz rodziny $\mathcal{C}(K, \mathbb{R}^n)$.

W produkcie tym wprowadzamy metrykę ϱ określoną wzorem

$$\varrho((x, F), (y, G)) = \max\{\|x - y\|, h^*(F, G)\}.$$

Oczywiście produkt $C^1(-a, a) \times \mathcal{C}(K, \mathbb{R}^n)$ rozważany z tą metryką jest przestrzenią zupełną.

Twierdzenie podane niżej pozwala ocenić wielkość (w sensie kategorii Baire'a) zbioru Π_c w produkcie $C^1(-a, a) \times \mathcal{C}(K, \mathbb{R}^n)$.

TWIERDZENIE 4.6. Zbiór Π_c , $0 < c \leq a$ jest domkniętym i nigdzie gęstym podzbiorem produktu $C^1(-a, a) \times \mathcal{C}(K, \mathbb{R}^n)$.

Dowód. Pokażemy najpierw domkniętość zbioru Π_c .

Niech (x_n, F_n) , $n \in \mathbb{N}$, będzie ciągiem elementów zbioru Π_c zbieżnym w metryce ϱ do pary $(x, F) \in C^1(-a, a) \times \mathcal{C}(K, \mathbb{R}^n)$.

Oznacza to, że $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ w przestrzeni $C^1(-a, a)$ oraz

$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n = F$ w rodzinie $\mathcal{C}(K, \mathbb{R}^n)$. Z określenia zbioru Π_c

otrzymujemy, że

$$\dot{x}_n(t) \in F_n(t, x_n(t)) \quad \text{dla } t \in (-c, c) :$$

Niech t będzie dowolnym punktem odcinka $(-c, c)$. Wtedy dla $n \rightarrow \infty$ mamy $x_n(t) \rightarrow x(t)$ oraz $\dot{x}_n(t) \rightarrow \dot{x}(t)$. Teraz korzystając z lematu 2.11 otrzymujemy równość

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(t, x_n(t)) = F(t, x(t)).$$

Z powyższych warunków oraz z domkniętości zbioru $F(t, x(t))$ mamy (lema 2.12) relację $\dot{x}(t) \in F(t, x(t))$, co wobec dowolności punktu $t \in (-c, c)$ oznacza, że $(x, F) \in \Pi_c$. Zbiór Π_c jest zatem domknięty.

Dla zakończenia dowodu należy jeszcze pokazać równość $\text{int}(\Pi_c) = \emptyset$. Przypuśćmy, że tak nie jest. Istnieją wtedy, para $(x, G) \in \Pi_c$ oraz liczba $r > 0$ takie, że

$$B((x, G), r) \subset \Pi_c.$$

Warunek ten pociąga za sobą inkluzję

$$B(G, r_1) \subset \mathcal{K}(K, R^n), \quad \text{gdzie } 0 < r_1 \leq r.$$

Otrzymujemy w ten sposób sprzeczność z twierdzeniem 4.3 mówiącym, że rodzina $\mathcal{M}(K, R^n)$ multifunkcji ciągłych, dla których zawieranie różniczkowe (1) z warunkiem (2) nie ma rozwiązań klasycznych, jest podzbiorem gęstym rodziny $\mathcal{C}(K, R^n)$. Wykazaliśmy zatem równość $\text{int}(\Pi_c) = \emptyset$, co łącznie z domkniętością zbioru Π_c oznacza, że jest on nigdzie gęsty w produkcie $C^1(-a, a) \times \mathcal{C}(K, R^n)$.

WNIOSEK 4.7. Korzystając z twierdzenia 4.6 otrzymujemy bezpośrednio, że zbiór $\cap$ złożony z par (x, F) produktu $C^1(-a, a) \times \mathcal{C}(K, \mathbb{R}^n)$, gdzie x jest rozwiązaniem zawierania różniczkowego w pewnym otoczeniu punktu 0 , jest zbiorem pierwszej kategorii Baire'a typu F_σ w produkcie $C^1(-a, a) \times \mathcal{C}(K, \mathbb{R}^n)$. Dla dowodu wystarczy zauważyć, że

$$\cap = \bigcup_{0 < c \leq a} \cap_c,$$

gdzie c przyjmuje wszystkie wartości wymierne z odcinka $(0, a)$.

Na zakończenie tego rozdziału przedstawimy problem dotyczący kategorii Baire'a rodziny $\mathcal{K}(K, \mathbb{R}^n)$. Wydaje się, że prawdziwe jest następujące twierdzenie:

Rodzina $\mathcal{K}_c(K, \mathbb{R}^n)$, $0 < c \leq a$, prawych stron zawierania różniczkowego, mającego rozwiązanie klasyczne w przedziale $(-c, c)$, jest zbiorem pierwszej kategorii Baire'a w rodzinie $\mathcal{C}(K, \mathbb{R}^n)$ wszystkich ograniczonych multifunkcji ciągłych.

B I B L I O G R A F I A

- [1] A.Alexiewicz, W.Orlicz, Some remarks on the existence and uniqueness of solutions of hyperbolic equation $z_{xy} = f(x,y,z,z_x,z_y)$, *Studia Math.* 25 (1956), str.201-215.
- [2] H.A.Antosiewicz, A.Cellina, Continuous extensions of multifunctions, *Ann. Polon. Math.* 34 (1977), str.107-111.
- [3] H.A.Antosiewicz, A.Cellina, Continuous selections and differential relations, *J.Differential equations* 19 (1975), str.386-398.
- [4] G.Beer, Approximate selections for upper semicontinuous convex valued multifunctions, *J.Approx. Theory* (przyjęto do publikacji).
- [5] F.S.De Blasi, Characterizations of certain classes of semicontinuous multifunctions by continuous approximations, *J.Math. Anal. Appl.* (przyjęto do publikacji).
- [6] F.S.De Blasi, On the differentiability of multifunctions, *Pacific J.Math.* 66 (1976), str.67-81.
- [7] F.S.De Blasi, F.Iervolino, Equazioni differenziali con soluzioni a valore compatto convesso, *Boll. Unione Mat. Ital.* 2 (1969), str.491-501.
- [8] F.S.De Blasi, J.Myjak, Generic properties of differential equations in a Banach space, *Bull. Pol. Ac.; Math.* 26 (1978), str.395-400.

- [9] F.S.De Blasi, J.Myjak, On almost well posed problems in the theory of best approximation, Bull. Mat. Rep. Soc. Romania 28 (1984), str.109-117.
- [10] F.S.De Blasi, J.Myjak, On the minimum distance theorem to a closed convex set in Banach space, Bull. Pol. Ac.; Math. 29 (1981), str.373-376.
- [11] F.S.De Blasi, J.Myjak, Sur l'existence sélections continues, C.R.Acad. Sc. Paris 296 (1983), str.737-739.
- [12] F.S.De Blasi, J.Myjak, The generic property of existence of solutions for a class of multivalued differential equations in Hilbert space, Funkcialaj Ekvacioj 21 (1978), str.271-278.
- [13] F.S.De Blasi, G.Pianigiani, A Baire category approach to the existence of solutions of multivalued differential equations in Banach spaces, Funkcialaj Ekvacioj 25 (1982), str.153-162.
- [14] V.I.Błagodatskich, Nekotorye rezul'taty po teorii differencial'nych vključenij, Summer school on ordinary differential equations, Difford 74, part 2, Brno 1975, str.29-67.
- [15] A.V.Bogatyrev, Nepreryvnye vetvi mnogoznačnych otobraženij s nevypukloj pravoj čast'ju, Mat. Sb. 120 (1983), str.344-353.

- [16] A.Bressan, On differential relations with lower continuous right - hand side. An existence theorem, J.Differential Equations 37 (1980), str.89-97.
- [17] T.F.Bridgland, Jr., Trajectory integrals of set valued functions, Pacific J.Math. 33 (1970), str.43-68.
- [18] L.Carbone, Selezioni continue in spazi non lineari e punti fissi, Rend. Circ. Mat. Palermo 25 (1976), str.101-115.
- [19] L.Carbone, Un criterio di selezione continua, Boll. Unione Mat. Ital. 12 (1975), str.127-137.
- [20] G.Debreu, Integration of correspondences, Proc. Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Vol.2, part 1, University of California Press, Los Angeles, 1967, str.351-372.
- [21] L.Dubikajtis, C.Forens, R.Ger, M.Kuczma, On Mikusiński's functional equation, Ann. Polon. Math. 28 (1973), str.39-47.
- [22] A.F.Filippov, Klassičeskie rešenija differencial'nych uravnenij s mnogoznačnoj pravoj čast'ju, Vestnik MGU No 3 (1967), str.16-26.
- [23] A.F.Filippov, Ob uslovijach suščestvovanija rešenij mnogoznačnych differencial'nych uravnenij, Diff. Uravn. 13 (1977), str.1070-1078.

- [24] A.Fryszkowski, Continuous selections for a class of non-convex multivalued maps, *Studia Math.* **76** (1983), str.163-174.
- [25] F.S.Garnir-Monjoie, Selection continues de multifonctions, *Bull. Soc. Royale Sci. Liege* **46** (1977), str.51-56.
- [26] R.E.Haworth, R.A.McCoy, Baire spaces, *Dissertationes Mathematicae* **141** (1977).
- [27] H.Hermes, On continuous and measurable selections and the existence of solutions of generalized differential equations, *Proc. Amer. Math. Soc.* **29** (1971), str.535-542.
- [28] H.Hermes, The generalized differential equation $\dot{x} \in R(t, x)$, *Advances in Mathematics* **4** (1970), str.149-169.
- [29] N.Kikuchi, Y.Tomita, On the absolute continuity of multifunctions and orientor fields, *Funkcialaj Ekvacioj* **14** (1971), str.161-170.
- [30] M.Kisielewicz, Description of a class of differential equations with set-valued solutions I, II, *Atti. Acad. Naz. Lincei* **58** (1975), str.158-162 oraz str.338-341.
- [31] M.Kisielewicz, Non-uniqueness in the theory of differential equations with convex compact solutions, *Discussiones Mathematicae* **3** (1980), str.31-36.

- [32] M.Kisielewicz, On the non-convergence of successive approximations in the theory ordinary differential equations, *Discussiones Mathematicae* 3 (1980), str.25-29.
- [33] M.Kisielewicz, The generic property of existence of solutions of differential equations in Banach space, *Bull. Pol. Ac. Math* 29 (1981), str.231-233.
- [34] M.Kisielewicz, The Orlicz type theorem for differential - integral equations with a lagging argument, *Ann. Polon. Math.* 31 (1975), str.65-71.
- [35] K.Kuratowski. *Topology, Vol.1*, Pergamon-Press, PWN, Warszawa 1966.
- [36] K.Kuratowski, *Topology, Vol.2*, Pergamon-Press, PWN, Warszawa 1968.
- [37] K.Kuratowski, Cz.Ryll-Nardzewski, A general theorem on selectors, *Bull. Pol. Ac. Math.* 13 (1965), str.397-403.
- [38] A.Lasota, Z.Opial, An approximation theorem for multi-valued mappings, *Podstawy Sterowania* 1 (1971), str.71-75.
- [39] A.Lasota, J.A.Yorke, The generic property of existence of solutions of differential equations in Banach spaces, *J.Differential Equations* 13 (1973), str.1-12.

- [40] A.Mas-Colell, A selection theorem for open graph correspondences with star-shaped values. J.Math. Anal. Appl. 68 (1979), str.273-275.
- [41] S.Mazurkiewicz, Sur les continus absolument indécomposables, Fund. Math. 16 (1930), str.151-159.
- [42] E.Michael, Continuous selections I, Annals of Math. 63 (1956), str.361-382.
- [43] E.Michael, Continuous selections II, Annals of Math. 64 (1956), str.562-580.
- [44] E.Michael, Continuous selections III, Annals of Math. 65 (1957), str.375-390.
- [45] E.Michael, Convex structures and continuous selections. Canad. J.Math. 11 (1959), str.556-575.
- [46] E.Michael, Topologies on spaces of subsets, Trans. Amer. Math. Soc. 71 (1951), str.152-182.
- [47] E.Michael, C.Pixley, A unified theorem on continuous selections, Pacific J.Math. 87 (1980), str.187-188.
- [48] J.Myjak, Orlicz type category theorems for functional and differential equations, Dissertationes Math. 206 (1983).
- [49] Cz.Olech, Approximation of set-valued functions by continuous functions, Colloq. Math. 19 (1968), str.285-293.

- [50] W.Orlicz, Metoda kategorii Baire'a w zastosowaniu do pewnych zagadnień analizy matematycznej, Wiadom. Mat. 24 (1982), str.1-15.
- [51] W.Orlicz, Zur Theorie der Differentialgleichung $y' = f(x,y)$, Bull. Int. Acad. Polon. Sci. Ser.A (1932), str.207-220.
- [52] J.C.Oxtoby, Measure and category, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York 1971.
- [53] T.Parthasarathy, Selection theorems and their applications, Lecture Notes in Math. 263, Springer-Verlag, New York 1972.
- [54] G.Pianigiani, A density result for differential equations in Banach spaces, Bull. Pol. Ac.; Math. 26 (1978), str.791-793.
- [55] Z.Skoczylas, Category theorems for the family of all continuous multifunctions, Bull. Pol. Ac. Math. 32 (1984), str.89-94.
- [56] Z.Skoczylas, A density result for a family of continuous multifunctions, Discussiones Math. 7 (1984) (w druku).
- [57] M.Tucci, Su un problema di selezione continua di un'applicazione plurivoca ad n valori non tutti distinti, Rend. Accad. Sci. Fis. Mat. Napoli 45 (1978), str.291-301.
- [58] M.Tucci, Teoremi di selezione continua per applicazioni plurivoche i cui valori sono unione di uno stesso numero n di insiemi chiusi e convessi, Rend. Accad. Sci. Fis. Mat. Napoli 46 (1979), str.547-561.

- [59] G.Vidossich, Existence, uniqueness and approximation of fixed point as a generic property, Bol. Soc. Brasil. Math. 5 (1974), str.17-29.
- [60] R.A.Vitale, Approximation of convex set-valued functions, J.Approximation Theory 26 (1979), str.301-316.
- [61] W.Zygmunt, The generic property of differential equations with compact convex valued solutions, Annales Univ. Maria Curie-Skłodowska 29 (1975), str.177-181.