

INSTYTUT ARCHITEKTURY I URBANISTYKI
POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ

Praca doktorska

Temat: KSZTAŁTOWANIE FORM POWŁOKOWYCH
ZA POMOCĄ ELEMENTÓW MODULARNYCH

autor: mgr inż.arch. Janusz Rębielak

promotor: prof. dr hab.inż. TADEUSZ KOLENDOWICZ

Zawarte w publikacji nowe rozwiązanie
zrobienia technicznego zostało zgłoszone
do opatentowania w Urzędzie Patentowym PRL
w celu _____ za Nr P — 57/2/82



RZECZNIK PATENTOWY

mgr Dorota Guzikowska

14 MAJA 1982

W r o c ł a w 1981

S P I S T R E Ś C I

str.

WPROWADZENIE

CEL I TEZA PRACY

Rozdział I

STUDIUM HISTORYCZNEGO ROZWOJU PRZEKRYĆ

POWŁOKOWYCH 8

1.1. Rozwój historyczny przekryć kopułowych 9

1.2. Rozwiązania współczesne 15

1.3. Przestrzenne struktury prętowe 21

1.4. Kierunki rozwoju przekryć strukturalnych 26

1.5. Typologia form powłokowych 29

Rozdział II

KSZTAŁTOWANIE FORM POWŁOKOWYCH METODĄ

KÓŁ WPISANYCH W SIATKĘ TRÓJKĄTNĄ 32

2.1. Wstęp 33

2.2. Konstrukcja kopuły kulistej metodą kół wpisa-
nych w siatkę trójkątną 33

2.3. Siatka sferyczna w teorii kół wpisanych 40

Rozdział III

SPOSÓB OTRZYMYWANIA RÓWNOMIERNYCH

SIATEK SFERYCZNYCH METODĄ DEFORMACJI

SIATKI WTÓRNEJ 43

3.1. Wstęp 44

3.2. Opis problemu 44

3.3. Podstawy metody deformacji siatki wtórnej 48

3.4. Siatka sferyczna 2000-ścianu 55

3.5. Siatki sferyczne wielościanów uzyskiwane metodą deformacji siatki wtórnej na bazie 8-ścianu foremnego	64
3.6. Regularne siatki sferyczne rozpięte nad rzutem sześciokątnym i czworokątnym	69
3.7. Wyznaczanie siatek sferycznych metodą deformacji siatki wtórnej rzutem prostopadłym na płaszczyznę	83
3.8. Siatka sferyczna rozpięta nad trójkątem równobocznym	85
3.9. Siatki sferyczne generowane rzutem prostopadłym rozpięte nad sześcio- i czworokątem	94
3.10. Podsumowanie	98

Rozdział IV

PROBLEMY STATYCZNE I TECHNOLOGICZNE	100
PROBLEMY STATYCZNE	101
4.1.1. Definicja stanu błonowego powłoki	101
4.1.2. Przykłady naprężeń błonowych w powłokach kulistych	102
4.1.3. Projektowanie powłok wg teorii zgięciowej.....	106
4.1.4. Ogólne uwagi dotyczące obliczenia i projektowania struktur prętowych	107
PROBLEMY TECHNOLOGICZNE	110
4.2.1. Technologia, proces produkcyjny, proces technologiczny	110
4.2.2. Podstawowe cechy systemów prefabrykowanych ...	111
4.2.3. Ogólne zasady projektowania i wykonywania prefabrykowanych elementów przekryć	113
4.2.4. Metody montażu przekryć kopułowych	115

Rozdział V

ELEMENT MODULARNY W METODZIE KÓŁ	
WPISANYCH	120
5.1. Ewolucja formy stożka	121
5.2. Uwarunkowania geometryczne prętowo-ciężnowego systemu modularnego	131
5.3. Zasady pracy statycznej przestrzennych struktur prętowo-ciężnowych	133
5.4. Główne kryteria ekonomiczne struktur prętowo- ciężnowych	140
5.5. Wymagania stawiane połączeniom elementów składo- wych w przestrzennych strukturach prętowo-ciężno- wych	148
5.6. Zasady kształtowania powłokowych struktur prętowo- ciężnowych	155
5.7. Podstawowe założenia statyczne i geometryczne sposobu optymalnego wykorzystania nośności struk- tur prętowo-ciężnowych	159
ZAKOŃCZENIE	166
BIBLIOGRAFIA	168

WPROWADZENIE

Na ostateczny kształt architektoniczny powstających budowli wpływa wiele czynników związanych z warunkami fizjograficznymi, społeczno-ekonomicznymi, tradycjami kulturowymi czy ogólnym poziomem nauki. Powstająca w danym czasie oraz miejscu architektura jest wypadkową wszystkich tych czynników. Jedną z najważniejszych dziedzin wiedzy nadającej architekturze jej materialne urzeczywistnienie jest technika budowlana. Techniczne uwarunkowania architektury podobnie jak warunki społeczno-ekonomiczne mające wpływ na formę architektoniczną zmieniły się w toku rozwoju cywilizacyjnego. Zmiany te, uwarunkowane splotem wspomnianych wyżej czynników można prześledzić na wybranym problemie rozwiązywania przekryć dużych rozpiętości, a szczególnie przekryć kopułowych.

Na rozwój materialnych podstaw współczesnych dziedzin życia olbrzymi wpływ miała rewolucja przemysłowa. Istota produkcji przemysłowej polegająca na dążeniu do minimalizacji kosztów wytwarzania produktów musiała wpłynąć dzięki inspirowanym głównie jej potrzebami nowym rozwiązaniom naukowo-technicznym, na rozwój nowoczesnych metod budowania. Elementy budowlane produkowane metodami przemysłowymi podlegają ogólnym prawom tej produkcji, której zadaniem jest wytwarzanie produktów o określonych walorach użytkowych przy jak najniższym koszcie. Konkurencja między poszczególnymi producentami zmuszała do poszukiwania coraz to nowych rozwiązań technicznych i technologicznych. Katalizatorem wszystkich tych poczynąń były organizowane już pod koniec XVIII wieku wystawy przemysłowe, których rozkwit datuje się od połowy XIX wieku. Wystawy światowe niosąc w sobie elementy rywalizacji i sprostania coraz to nowszym i trudniejszym za-

daniem stanowiły pole doświadczalne dla nowatorskiej myśli technicznej. Istotną cechą większości wznoszonych pawilonów wystawowych był ich tymczasowy charakter, zmuszający inżynierów do stosowania konstrukcji składających się z powtarzalnych elementów budowlanych, nie wymagających skomplikowanych procesów produkcyjnych oraz obróbki na placu budowy, co umożliwiałało tani i szybki montaż budowli. Doświadczenia zebrane przy projektowaniu i budowie pawilonów wystawowych posłużyły następnie do opracowania wielu opartych o zasadę prefabrykacji systemów budowlanych.

W interesującym problemie konstruowania przekryć dużych rozpiętości powstało ostatnio szereg systemów prefabrykowanych struktur przestrzennych o zunifikowanych prętach i węzłach. Odznaczają się one dużą lekkością, sztywnością, elastycznością kształtowania, łatwością montażu oraz interesującą formą architektoniczną dzięki czemu są bardzo często wykorzystywane dla wielu funkcji użytkowych niekoniecznie związanych z przekryciem dachowym. Dokonuje się także udanych prób wykorzystania tej formuły konstrukcyjnej dla potrzeb przekryć powłokowych, które dzięki swym krzywiznom charakteryzują się bardzo dużą wydajnością pracy statycznej materiału.

Zasadnicze trudności stwarzają jednak ograniczenia natury geometrycznej, gdyż pręty dwukrzywiznowych konstrukcji muszą posiadać różne długości, co z kolei powoduje duże zróżnicowanie asortymentu węzłów przestrzennej struktury prętowej. Ograniczenie zakresu różnych długości prętów jak i asortymentu węzłów uzyskuje się poprzez stosowanie regularnych siatek przestrzennych opisujących krzywizny danej powłoki. Własności geometryczne dwukrzywiznowych przekryć powłokowych sprawiają, że opracowanie jednolitego systemu konstrukcyjnego za pomocą którego można by kształtować różnorodne formy przekryć jest zadaniem bardzo skomplikowanym i zmuszają do indywidualnego projektowania konstrukcji dla każdej formy przekrycia. Próbę opracowania tak zdefiniowanego uniwersalnego systemu konstrukcyjnego przedstawimy na przykładzie przekrycia w formie kopuły kulistej. Ta od bardzo dawna stosowana forma przekrycia ze względu na swe własności statyczne jak i geometryczne może z powodzeniem reprezentować wszelkie grupy form przekryć powłokowych.

CEL PRACY

Celem pracy jest podanie teorii umożliwiającej konstruowanie różnych form przekryć za pomocą jednego elementu modułarnego. W ramach tej teorii mieści się również opracowanie geometryczne odpowiednich siatek opisujących daną powierzchnię oraz geometryczno-konstrukcyjne opracowanie elementu powtarzalnego wraz z węzłem.

TEZA PRACY

Zespół składający się z siatek geometrycznych opisujących różne powierzchnie i jednego modułu konstrukcyjnego pozwoli projektować i budować powłoki wyznaczone prostymi regułami matematycznymi.

Budowanie powłok o różnorodnych formach geometrycznych daje oszczędności materiałowe, skraca czas budowy i upraszcza montaż oraz ewentualny demontaż całości z możliwością powtórnego wykorzystania uprzednio zdemontowanych elementów w nowym, być może innym już rodzaju przekrycia.

Rozdział I

STUDIUM HISTORYCZNEGO ROZWOJU PRZEKRYĆ POWŁOKOWYCH

1.1. Rozwój historyczny przekryć kopułowych

Architektura jest tą dziedziną sztuki, której dzieła nie są owocem pracy tylko jednego, bądź niewielkiej grupy twórców. Każda forma architektoniczna musi mieć swą postać materialną, która tworzona jest w społecznym procesie budowania obiektu. Jednym z najistotniejszych etapów tego procesu są: faza projektowania budowli, następnie wykonywania materiałów budowlanych oraz metody montażu całości lub części budynków. Powstała w wyniku tego procesu konstrukcja jest wykładnią możliwości technicznych osiągniętych w pewnym okresie historycznym, lecz także szeroko pojmowanego rozwoju cywilizacyjnego. Technologia wykonywania konstrukcji określa również sposób przenoszenia sił od obciążeń własnych i zewnętrznych do miejsc podparcia na określone przez jej zastosowanie odległości, oraz w istotny sposób wpływa na walory estetyczne powstałych obiektów. Budowle wyznaczające nowe okresy, lub będące ukoronowaniem pewnej epoki powstawały zawsze w ściśle określonym kontekście historycznym.

Materialne uwarunkowanie formy architektonicznej zmieniało się wielokrotnie w toku dziejów. Właściwości materiałów wykorzystywanych w przeszłości wyznaczały kształt i rozmiary budowli. Dość szybko zaczęły zarysowywać się granice rozpiętości płyty kamiennej, czy możliwości konstrukcyjne elementów drewnianych. Uwarunkowania formy architektonicznej przedstawimy krótko na przykładzie rozwiązywania problemu sklepień, a szczególnie przekryć kopułowych, jako najbardziej reprezentatywnej grupy form powłokowych.

W najbardziej odległych okresach historycznych forma dosyć często stosowanego przekrycia kulistego miała znaczenie symboliczne, zaś dla ich budowniczych stanowiła i jest do dzisiaj jednym z najciekawszych i zarazem najtrudniejszych problemów. W kulturze sumeryjskiej zaczęto zapewne wznoszenie niewielkich

kopuł, budowanych najprawdopodobniej z gliny, lecz z racji nietrwałości tego materiału nie dochowały się one do naszych czasów. Ważnym osiągnięciem tego okresu było kolebowe sklepienie pozorne, konstruowane z cegły suszonej rzadziej wypalanej. Doprowadziło ono później do wykształcenia doskonalszego krzyżowca kolebowego, budowanego ze ściśle dopasowanych trapezowo przeciętnych kamiennych kłębów.

Najstarszą zachowaną konstrukcją kopułową, będącą w pełni uformowanym sklepieniem pozornym o profilu ostrołukowym był tzw. Skarbiec Atrydów /Grób Agamemnona/. Jest to budowla podziemna na planie koła o średnicy ok. 14 m, skonstruowana przez wysuwanie kolejnych warstw pierścieniowo układanych i wstępnie dopasowanych bloków kamiennych.

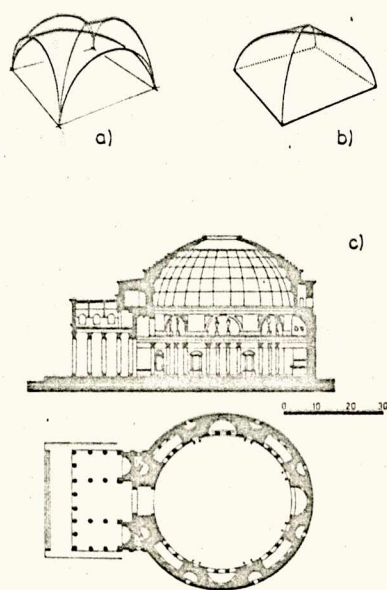
Ważki wkład w rozwój konstrukcji sklepień wnieśli architekci rzymscy. Przejęli oni i udoskonalili wcześniej znane już sklepienie kolebowe a na jego podstawie stworzyli nowe typy sklepień, takie jak: sklepienie krzyżowe /rys. 1a/ oraz sklepienie tzw. klasztorne /rys. 1b/, stosowane nad rzutami kwadratowymi.

Istotny postęp dokonał się również w dziedzinie przekryć kopułowych, a najlepszym tego przykładem jest Panteon, wzniesiony w Rzymie przez Agryppę w 27 r.p.n.e. Kopuła na planie centralnym o średnicy wewnętrznej 43,5 m oparta była na murach 6-cio metrowej grubości /rys. 1c/. Na jej konstrukcję składały się rzędy układanych kłębów kamiennych w kolejnych warstwach wysuwane stopniowo ku wnętrzu. W wierzchołku pozostawiono otwór o średnicy ok. 9m. Kasetony nadające specyficzny wyraz wnętrzu miały za zadanie zmniejszenie ciężaru kopuły. Rzymski Panteon był największą budowlą kopułową starożytności. [5]

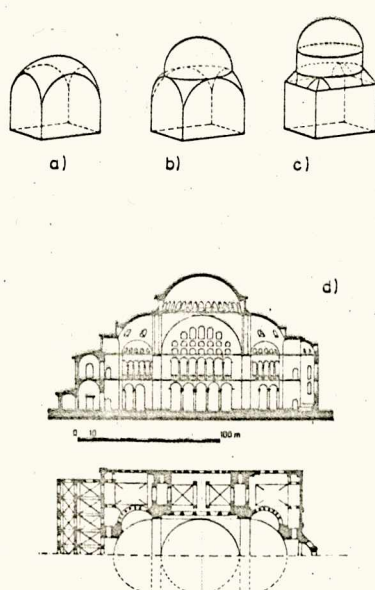
Podzielone Imperium Rzymskie przetrwało najdłużej w swej wschodniej części. Pielęgnowane i rozwijane umiejętności tamtejszych rzemieślników i budowniczych pozwoliły uchronić na dość długi okres czasu ich zdobycze inżynierskie, nabyte w toku wielowiekowych doświadczeń i eksperymentów. Budowniczowie bizantyjscy wzbogacili i udoskonalili zakres form stosowanych w budownictwie, głównie poprzez wprowadzenie sklepienia żeglaskiego /rys. 2a/, kopuły na żaglach /rys. 2b/, oraz kopuły na trompach podniesionej jeszcze ku górze przez tambur /rys. 2c/.

Szczytowym osiągnięciem tego okresu jest Kościół Hagia Sophia w Konstantynopolu zbudowany w latach 532-537 z polecenia cesarza

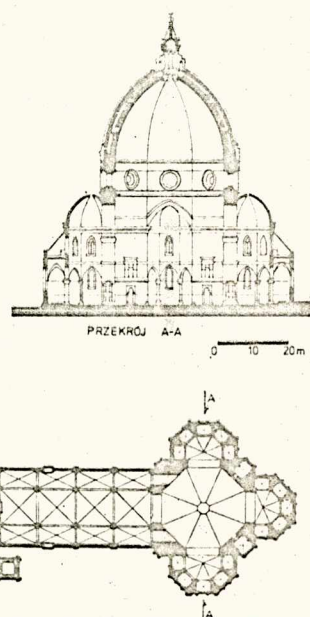
Justyniana przez Anthemiosa z Trallesu i Izytora z Miletu /rys. 2d/. Długość kościoła wynosi 80,9 m a szerokość 69,7 m. Kopuła o średnicy 33 m rozpięta jest nad kwadratem nawy głównej i podparta jednocześnie przez dwie półkopuły o tej samej średnicy, te zaś opierając się na szerokich sklepieniach kolebowych, przenoszą obciążenia na ściany zewnętrzne. [22]



Rys. 1.



Rys. 2.

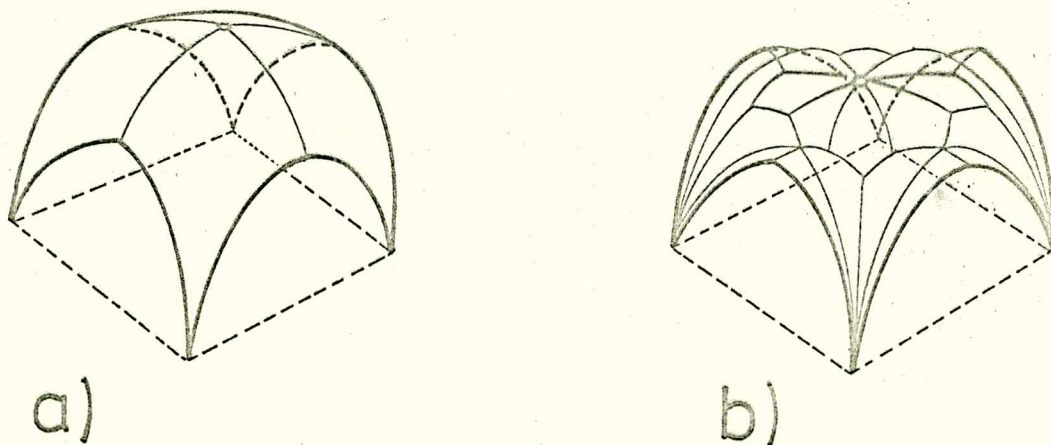


Rys. 3.

Ważniejsze budowle czasów historycznych.

Następująca po burzliwym okresie wędrówek ludów epoka średniowieczna w swej długiej początkowej fazie nie zaznaczyła się niczym szczególnym w rozwoju metod budowania, pomijając kuriozalny fakt, iż powstały około roku 520 tzw. Grobowiec Teodoryka w Rawennie został przekryty kopułą o średnicy 11,5 m wykuta z jednego bloku kamienia i ważącą około 470 ton. W późniejszym okresie stosowanie sklepienia krzyżowego wraz z właściwą gotykowi jego odmianą tzn. sklepienia krzyżowego o kluczu podniesionym /rys. 4a/, doprowadziło do powstania różnorodnych form sklepień, których reprezentantem może być przedstawione na rys. 4b sklepienie gwiazdziste. Gotyk jest przykładem tego, iż stosując pojęcie zaczerpnięte z ekonomii tak zwana metoda powtarzania drogi może doprowadzić do wielu ciekawych, nieznanych dotąd rozwiązań. Płacono jednak za to wysoką cenę, której miarą były powtarzające się często katastrofy. Dzięki zwielokrotnionemu stosowaniu w jednej budowli wspomnianych sklepień możliwe było

przekrywanie niekiedy dosyć znacznych powierzchni przy czym konieczna była tu stosunkowo gęsta siatka słupów co rozbijało wnętrze. Nie umiano poradzić sobie z obiektami jednoprzestrzennymi, które należało przekryć bez użycia podpór pośrednich.



Rys. 4. Przykłady sklepień gotyckich, a/ krzyżowe z kluczem podniesionym, b/ gwiaździste. [26]

Daty wyznaczające koniec ery średniowiecza i początek renesansu zbiegają się w czasie z okresem budowy i ukończenia kopuły kościoła Santa Maria del Fiore we Florencji /rys. 3./.

Filippo Brunelleschi swój projekt budowy kopuły oparł na projekcie Arnolfa di Cambio z 1367 r, przedstawił w 1420 r a po 16 latach dzieło było gotowe. Przekrycie to nie jest w swej istocie kopułą, lecz jedynie ośmiobocznym sklepieniem klasztornym o profilu eliptycznym, z uwagi jednak na odmienną od gotyckiej konstrukcję zwykło się je tak nazywać.

Kopuła florencka ma podwójną czaszę, o ścianach nakładających się wzajemnie na siebie i związanych za pomocą potężnych kamiennoceglanych żeber oraz stężających poziomych pierścieni. Dzięki temu przy jej budowie można było nie stosować widocznego na zewnątrz rusztowania ani szalunków, co wywoływało nie tylko podziw lecz również wiele kontrowersji. [10]

Doskonalona w toku późniejszych doświadczeń konstrukcja była z powodzeniem wielokrotnie stosowana przez kilka następnych stuleci.

Przeobrażenia kulturowe zapoczątkowane w dobie renesansu spotęgowane era odkryć geograficznych przyspieszyły znacznie

rozwój, a także powstawanie nowych dyscyplin nauki.

W wielu dziedzinach życia przełomową stała się era rewolucji przemysłowej, następstwami której były przeobrażenia społeczno-ekonomiczne zapoczątkowane w końcu 18-go stulecia.

Konsekwencją tych przemian były również zmiany dokonujące się nieco później w architekturze i budownictwie, a związane były one z wprowadzeniem nowych materiałów konstrukcyjnych.

We wszystkich omawianych poprzednio okresach dominującymi materiałami był kamień, cegła oraz drewno. Z racji właściwości konstrukcyjnych tych materiałów proces budowania wymagał w długim czasie dużego nakładu pracy ręcznej, powstałe obiekty miały znaczną masę, a efekt końcowy w rozumieniu wielkości przekrywanych powierzchni nie mógł być zbyt duży.

Era budownictwa masywnego zaczęła ustępować dość szybko z chwilą opanowania produkcji na dużą skalę żelaza, a później stali. Elementy budowlane wraz z technologią ich wytwarzania wpływały na kształt oraz formę powstających budowli.

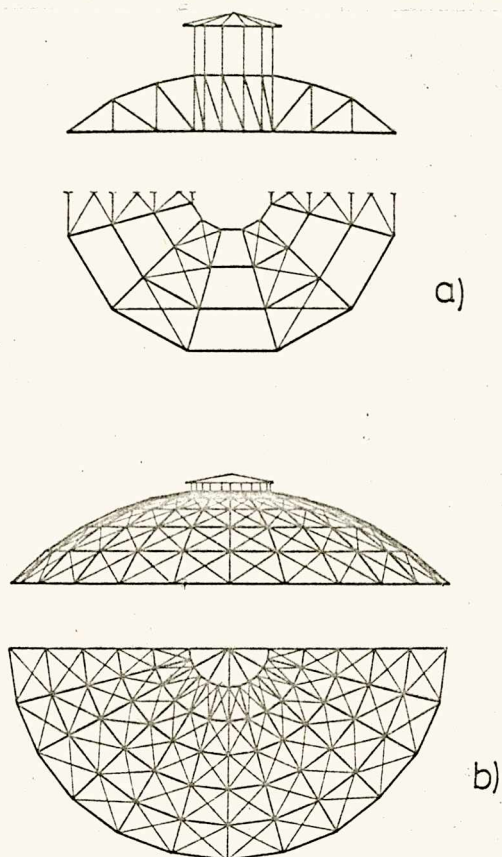
Rozwiązania wyznaczające kolejne etapy doskonalenia konstrukcji inżynierskich inspirowane były racjonalną potrzebą wynikającą z przesłanek ekonomicznych oraz społecznych, a nie kaprysem władców bądź manifestacją obrządków religijnych.

Pierwszą kopułę o konstrukcji metalowej z kutego żelaza zastosowali Berlander i Brunet nad centralną częścią Giełdy Zbożowej w Paryżu /rys. 5a/. Wybudowane w 1811 roku przekrycie o rozpiętości ok. 39 m nie było właściwie kopułą, gdyż składało się z płaskich dźwigarów kratowych o prostym pasie dolnym i zakrzywionym pasie prętów górnych. Dźwigary te podparte były na okrągłych ścianach i połączone na obwodzie pierścieniem przejmującym siły rozporu, a w centrum łączyły się w otwartym pierścieniu ściskającym stanowiącym podstawę latarni. [32]

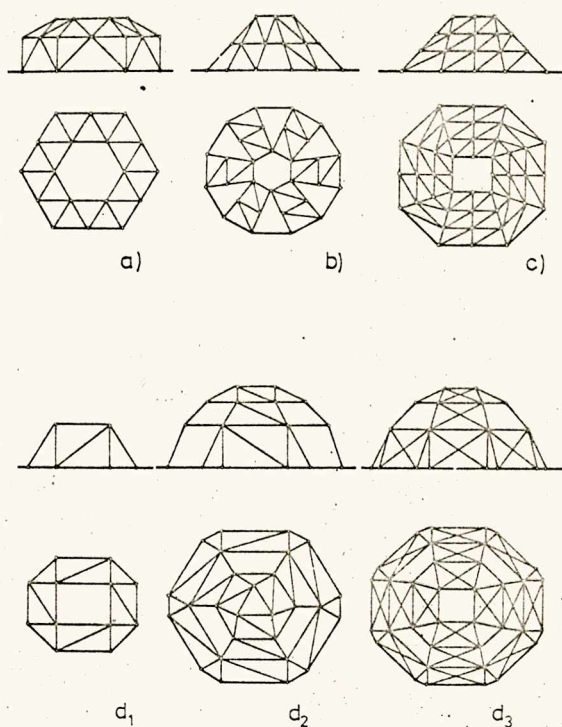
Konstrukcja ta była adaptacją metod stosowanych w budownictwie drewnianym.

Dynamiczny rozwój omawianych konstrukcji podbudowany był równie dynamicznym rozwojem przemysłu, przyspieszonym jeszcze organizacją wystaw międzynarodowych. Historia rozwoju wystaw łączy się ściśle z ewolucją pawilonów wystawowych, gdyż obok konkurencji wystawców pojawił się element rywalizacji organizatorów, którzy dążyli do tego, aby każdą następną wystawę uczynić wspanialszą od poprzednio zorganizowanej. Najlepszym tego przy-

kładem był Crystal Palace zbudowany w 1851 r przez Josepha Paxton'a na Wystawę Światową w Londynie. Długi, prostokątny budynek przekrywający przestrzeń o powierzchni 70 tys. m² powstał w rekordowo krótkim czasie sześciu miesięcy. Jego konstrukcję stanowi prosty system prefabrykowanych elementów, składający się z żelaznych filarów oraz drewnianych ram okiennych. Moduł konstrukcyjny, co warto podkreślić, oparty został na wymiarze największej, produkowanej wówczas tafli szkła i wynosił 1,22 m. Wpływ tego budynku na rozwój nowych technik budowania był bardzo istotny. W drugiej połowie XIX wieku powstało szereg opracowań teoretycznych, stanowiących podstawę projektowania przekryć kopułowych. Doskonalone w tym czasie kopuły żebrowe osiągnęły już znaczne rozpiętości, przekraczając granicę stu metrów.[19]



Rys. 5.



Rys. 6.

Rozwiązanie zastosowane przez Schwedlera dla przekrycia zbiornika gazu w Berlinie w 1863 roku było pierwszą metalową kopułą prętową. Na jej konstrukcję składały się południkowo biegnące żebra ogniskujące się w szczycie i połączone równoleżnikowymi pierścieniami, co w rezultacie dawało siatkę trapezową

zweżającą się u góry /rys. 5b/. Układ krzyżujących się w każdym polu wiotkich prętów, nadawał całości dużą sztywność. Założenie przegubowego połączenia prętów w węzłach ułatwiało obliczenia statyczne, które w połączeniu z prostotą wykonania spowodowało częste stosowanie kopuż tego typu. [2]

W rysunku kopuż Schwedlera możliwe są liczne zmiany, a ich wprowadzenie zapoczątkowało rozwój tzw. kopuż tarczownicowych, nazywanych również płytowo-kratowymi. Powstawały one głównie w Niemczech oraz Francji na przełomie XIX-go i XX-go wieku. Najbardziej znanymi są kopuły Föppla /rys. 6a/, Schlink'a /rys. 6b/ i Zschetsche'go /rys. 6c/ a największą popularność zaskąły kopuły Zimmermann'a, przykłady których pokazano na rys. 6d. Kopuły tarczownicowe nie są zbyt sztywne, gdyż podatne są na odkształcenia spowodowane działaniem sił skupionych, a pewne rodzaje tych kopuż wymagają stosowania rzutu w planie wielokąta o nieparzystej liczbie boków, ponieważ w sprzyjających warunkach całość konstrukcji może zmienić się w mechanizm. [25]

1.2. Rozwiązania współczesne

Wiek XX ze swą rewolucją, określaną tym razem mianem nauko-wo-technicznej przyniósł największą ilość odkryć i wynalazków. Niektóre z nich miały pośredni, a czasem bezpośredni wpływ na kształt nowej architektury. Zastosowanie betonu wraz z właściwą mu technologią zmieniło w świadomości społecznej kryteria oceny wartości estetycznych powstających budowli.

Konstrukcje żelbetowe, których zasady poznano w końcu XIX wieku, przez swą różnorodność formalną były i są chętnie wykorzystywane przez architektów dla niemal wszystkich kategorii użytkowych. Tworzywo to dzięki swym właściwościom było szczególnie często stosowane w konstrukcjach powłokowych. Wspomniana wcześniej inspirująca i przyśpieszająca rola wystaw sprawdziła się również w naszych czasach. Nowoczesne budownictwo targowe preferuje pawilon o dużej przestrzeni zagospodarowanej następnie układem stoisk i eksponatów. Niekiedy sam pawilon spełnia rolę eksponatu, czego najlepszym przykładem jest Pawilon Cementu na szwajcarskiej wystawie krajowej w Zurichu z 1937 roku, zaprojektowany przez H. Lentzinger'a i R. Maillart'a. Kulebowe sklepienie o profilu parabolicznym miało długość 16-tu

metrów, wysokość 12 oraz grubość 6 cm. [19],[29]
Ogromną różnorodność form przekryć realizowanych w tej technologii obserwujemy na przykładzie paraboloidy hiperbolicznej [3],[30],[45]. Wprawdzie cienkościenne przekrycia żelbetowe posiadają wiele zalet takich jak: lekkość, duża sztywność, małe niebezpieczeństwo wyboczenia nawet przy dużych rozpiętościach co pozwala stosować małe grubości powłok, to jednak trudności związane z pracochłonnym, bo z konieczności bardzo dokładnym przygotowaniem deskowania zmuszają do konstruowania przekryć powłokowych z elementów prefabrykowanych. Dążenia te obserwujemy na przykładach realizowanych przez P.L.Nerri'ego obiektów takich jak: hale wystawowe, sportowe oraz hangary lotnicze [30]. W prefabrykowanych konstrukcjach przekryć kopułowych, podstawową rolę odgrywa rysunek siatki sferycznej, wyznaczający układ oraz długości poszczególnych prętów. Osiągnięta w końcu XIX wieku pewna umiejętność w zakresie rozwiązywania zagadnień statycznych doprowadziła do powstania tzw. kopuł siatkowych. Charakteryzują się one układem prętów biegnących do zwornika po liniach śrubowych. Zróżnicowanie długości poszczególnych prętów jest tu dość duże. Niekorzystnym jest również zbyt gęste zagęszczenie rysunku siatki w pobliżu zwornika. Kopuły realizowane na bazie tej geometrii o przegubowych połączeniach prętów muszą być oparte na wielokątnych rzutach mających nieparzystą liczbę boków. [25]

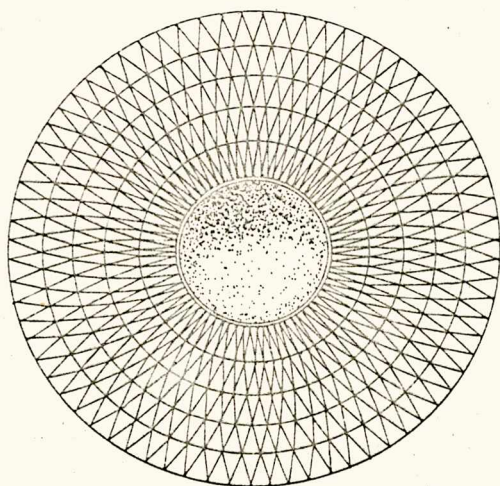
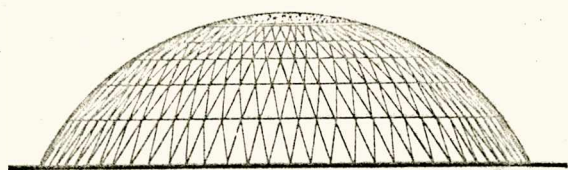
Jedną z najbardziej znanych kopuł siatkowych zaprojektował Lederer jako przekrycie głównego pawilonu wystawowego targów międzynarodowych w Brnie. Wybudowana w 1959 konstrukcja ma 93,5m średnicy i 19,72m wysokości; składa się z zespołu biegnących łukami odpowiednio wygiętych rur i połączonych z rurowymi prętami równoleżnikowymi za pomocą złączy chomętowych. Każdy z trzech układów prętów leży na innej powierzchni sferycznej, odległych od siebie o średnicę rurowego pręta /rys. 7/. [3]

Największą kopułą siatkową i jednocześnie jedną z największych obecnie na świecie jest tzw. Chicago Sports Complex w Chicago. Ma ona średnicę 274 m. Konstrukcję jej stanowi system prefabrykowanych łukowych dźwigarów kratowych, stężających się nawzajem, ze względu na stosunkowo dużą rozpiętość tych dźwigarów. [25][32]

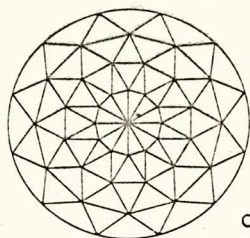
Wspomnianych wcześniej wad kopuł siatkowych nie posiadają tzw. kopuły typu "lamella" /rys. 8/. Są one również odmianą kopuł żebrowych, w których większość prętów biegnie od podstawy kopuły ku wierzchołkowi w przybliże-

niu po liniach równoległych. Powstaje w ten sposób siatka rombowa, w której każdy węzeł leży w jednakowej odległości od dwóch wyżej położonych. Romby te można podzielić liniami "równoleżnikowymi" nadając w ten sposób większą sztywność całemu ustrojowi.

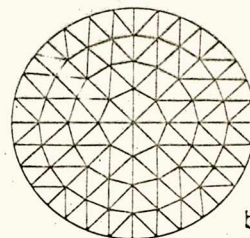
Pręty konstrukcji mogą być proste bądź zakrzywione, z rur stalowych, aluminiowych albo z laminowanego drewna. Kopuły metalowe projektuje się i wykonuje jako konstrukcje o węzłach sztywnych, zaś drewniane traktuje się zwykle jako kopuły o węzłach przegubowych. Najczęściej stosowanymi kopułami typu "lamella" są konstrukcje o układach prętów przedstawionych na rysunkach 8a i 8b, nazywane od nazwiska pomysłodawcy kopułami Kievitt'a.



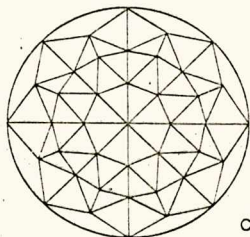
Rys. 7.



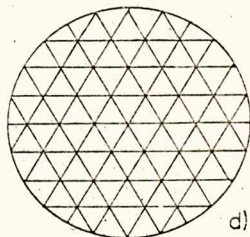
a)



b)



c)



d)

Rys. 8.

Projektowanie kopuł typu "lamella" jest dość trudne i złożone, z tego też względu przeprowadza się je za pomocą maszyn cyfrowych oraz wykonuje się dodatkowo badania modelowe. [1]

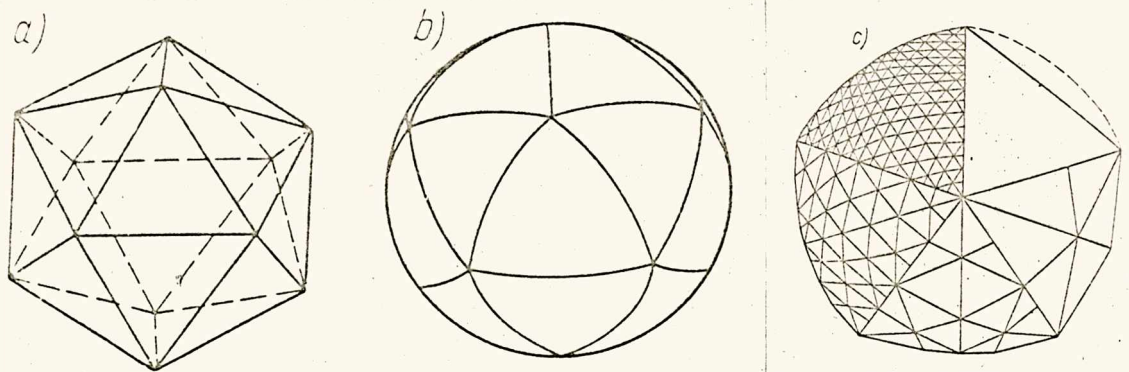
Jedną z największych kopuł zrealizowanych w tej geometrii prętów jest przekrycie stadionu Harris Country Sport w Houston o rozpiętości ponad 200 m wybudowane w 1965 r.

Przy projektowaniu tego przekrycia posłużono się badaniami modelowymi dla sprawdzenia prawidłowości obliczeń. [32]

Montaż tej kopuły wymagał wzniesienia 37 tymczasowych wież oraz specjalnych dźwigów o dużym zasięgu dla podniesienia na wysokość ok. 70 m. elementów ze zwieńczenia kopuły.

Przy tak dużych rozpiętościach przekrycia wpływ zmian temperatury wywołanej nasłonecznieniem jest dość znaczny, co jeszcze bardziej utrudnia fazę projektowania oraz montażu konstrukcji. Poszycie nie współpracujące z konstrukcją nośną spełniać więc musi rolę osłony termicznej.

Niemal równocześnie z kopułami typu "lamella" pojawił się nowy rodzaj kopuł prętowych nazywanych kopułami geodezyjnymi, gdyż linie wyznaczające położenie prętów na sferze są kołami wielkimi kuli. Rozwój kopuł geodezyjnych wiąże się z nazwiskiem B. Fullera, który podał metody podziału równobocznych oraz równoramiennych trójkątów sferycznych, a także opracował wiele typów rozwiązań konstrukcyjnych. Rysunek sferycznej siatki prętów wyznaczany jest zazwyczaj na bazie trójkątów sferycznych powstałych z rzutowania ścian 20-ścianu foremnego na współśrodkową kulę /rys. 9/.



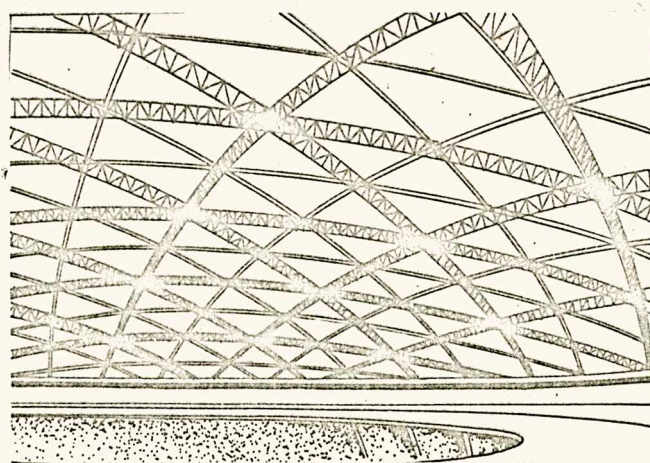
Rys. 9. Schemat wyznaczania układów prętów dla kopuł geodezyjnych. [2]

Siatka wewnętrzna równobocznego trójkąta sferycznego może być dowolnie zagęszczona, zależnie od stopnia podziału boków tego trójkąta /rys. 9c/. Gęste siatki sferyczne pożądane są szczególnie w przypadku projektowania kopuł o znacznych rozpiętościach, gdyż z wielu względów należy stosować pręty krótkie, których długości mieszczą się w granicach ok. 1,5 ÷ 2,0 metrów. Przy bardzo gęstym podziale siatki sferycznej pojawia się szereg problemów, wynikłych głównie z tego, iż sąsiadujące ze sobą węż-

ły leżą niemal na jednej płaszczyźnie. Z rozważań teoretycznych wynika, że w takich przypadkach naprężenia w prętach wywołane działaniem nawet minimalnych sił skupionych na węzły mogą doprowadzić do dużych odkształceń, co z kolei jest najczęściej powodem utraty stateczności konstrukcji. Rozpiętość jednowarstwowych kopuł prętowych jest w ten sposób znacznie ograniczona. Koniecznym staje się więc przy większych rozpiętościach przekryć stosowanie konstrukcji dwuwarstwowych. [7],[25]

Wyrazem dążeń do nadawania konstrukcjom nośnym przekryć większej sztywności jest konstrukcja Kopuły Odkryć w Londynie wybudowana w 1951 roku na wystawę "Festiwal of Britain" /rys. 10/.

Konstrukcja ta składa się z szeregu przestrzennych dźwigarów kratowych o przekroju trójkątnym i przecinających się nawzajem. W każdym punkcie schodzą się trzy wiązary. Na wiązarach w środku ich długości opierają się lekkie aluminiowe płatwie o przekroju dwuteowym. Wiaźary i płatwie wykonane w całości z aluminium tworzą rysunek regularnej siatki trójkątnej. Stalowy pierścień oporowy podpierają ukośnie biegnące słupy kratowe o zmiennym przekroju. Londyńska Kopuła Odkryć o średnicy 111,5m i wysokości w kluczu 27,5 m jest równocześnie największą obecnie na świecie kopułą zbudowaną z aluminium. [32],[36]

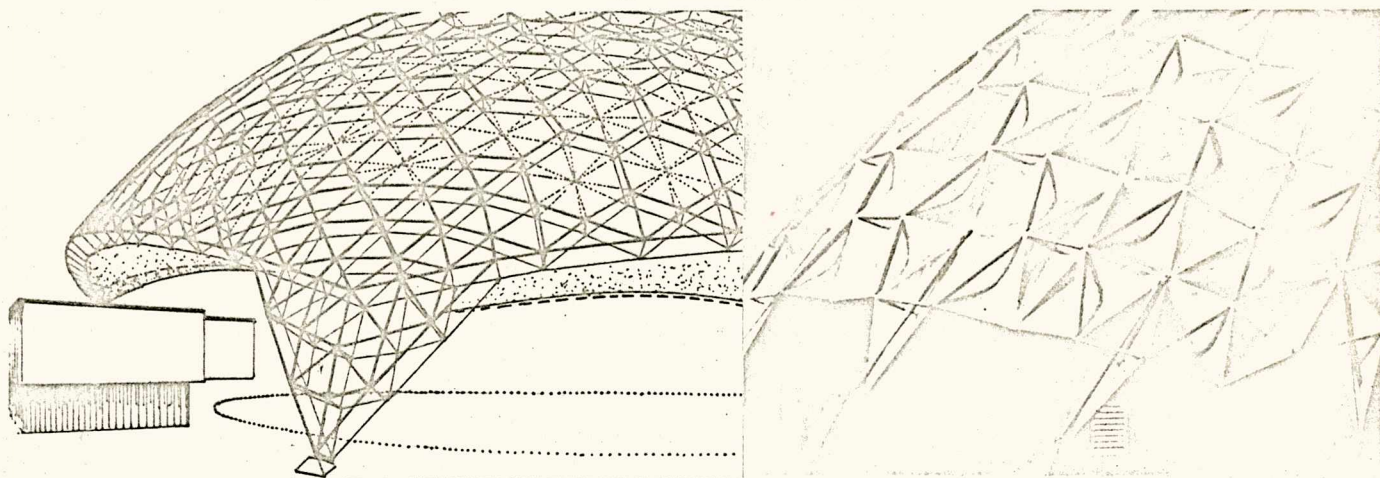


Rys. 10. Widok wnętrza Kopuły Odkryć. Londyn 1951 r.

Pierwszą, będącą strukturalną kratownicą powierzchniową była kopuła geodezyjna wybudowana w 1959 r w Cleveland, nad Siedzibą Amerykańskiego Towarzystwa Metali /rys. 11a/. Ażurowa konstrukcja o średnicy 76 m i wysokości 31,5 m składa się z dwóch powłok kulistych o oczkach sześciokątnych i odległych od siebie o ok. 75 cm. Sześcioboczne siatki składają się z rur aluminiowych

o długościach ok. 1,70m i średnicach 100 i 150 mm. W celu uzyskania większej sztywności konstrukcji przestrzennej sześcioboki te połączone krótkimi rurami oraz sześcioma prętami o średnicy 18 mm krzyżującymi się w środku sześcioboku, tworząc w ten sposób sztywną siatkę trójkątną. Odmiennym sposobem podejścia do problemu kształtowania sztywnych ustrojów powłokowych charakteryzuje się inny typ rozwiązań zastosowanych przez B.Fuller'a w budowanych przez niego kopułach geodezyjnych /rys. 11b/. [2]

System konstrukcyjny składa się z cienkościennych tarczownic w kształcie rombu załamane wzdłuż dłuższej przekątnej i usztywniony poprzez biegnące poprzecznie rozpórki. Aluminiowe bądź stalowe blachy będące szczelnym pokryciem kopuły stanowią jednocześnie integralną część konstrukcji nośnej. Blacha tarczownia przenosi siły rozciągające, rozpórki zaś pracują na ściskanie. W systemie tym dla ograniczenia nagrzewania się blach wywołanego nasłonecznieniem maluje się je na kolor biały, zaś rozpórki na kolor czarny. Kopuły te są właściwie adaptacją kopuł systemu Keiser'a dla potrzeb siatek geodezyjnych.



Rys. 11. a/ Kopuła prętowo-ciężnowa w Cleveland
b/ Przykład kopuły geodezyjnej o konstrukcji tarczownicowo-prętowej[46]

W Stanach Zjednoczonych projektuje i wykonuje się seryjnie tego typu kopuły o rozpiętościach w granicach 30-61 m.

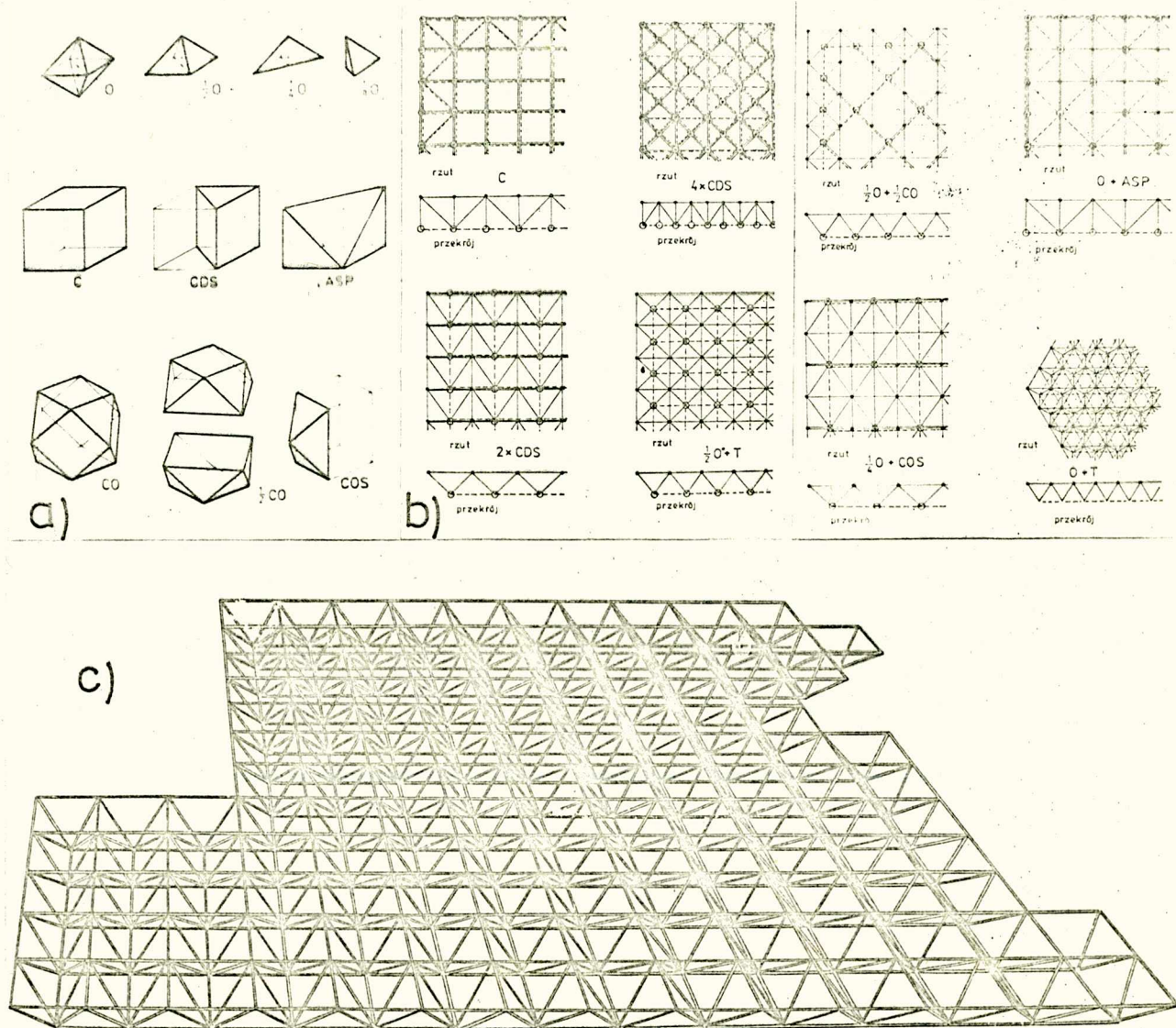
Na rys. 11b przedstawiono jedną z prefabrykowanych kopuł geodezyjnych zbudowaną w omawianym systemie. Widoczna jest tu charakterystyczna heksagonalna siatka prętów rurowych, przejmujących występujące w konstrukcji siły ściskające. Na uwagę zasługuje system podpór - dodatkowy pręt zamocowany w ogniskujących się w jednym punkcie tarczownicach zbiera obciążenia z brzegów ko-

puły i współpracując z elementem tarczownicowym w sposób bezmomentowy przenosi siły do odpowiednio rozmieszczonych i ukształtowanych podpór.

1.3. Przestrzenne struktury prętowe

Na rozwój konstrukcji inżynierskich zawsze w dużym stopniu wpływały ich uwarunkowania ekonomiczne. Stosunkowo najwcześniej zaczęto wykorzystywać elementy prefabrykowane w przekryciach hal przemysłowych, handlowych czy pawilonów wystawowych. Konstrukcja składająca się z dużej liczby jednakowych elementów była prostsza i szybsza w montażu, a także z czasem stawała się tańszą od podobnej, której całość wymagała indywidualnego projektowania i wykonawstwa. Cienkościenne przekrycia żelbetowe charakteryzują się wprawdzie minimalnym zużyciem materiału, jednak technologia ta wymaga w stosunkowo długim czasie dużego wkładu pracy ręcznej. Relacje cen robocizny do cen montażu i konstrukcji spowodowały, że w "USA zaprzestano stosowania konstrukcji żelbetowych w budownictwie hal przemysłowych, gdy cena jednej godziny pracy wykwalifikowanego robotnika stała się jedną setną ceny jednej tony konstrukcji stalowej wraz z montażem. Z przejściem zaś do budowania w stali wyeliminowano połączenia spawane jako najbardziej pracochłonne, następnie nitowane /choć otwory na nitę wykonywane są w elementach konstrukcyjnych już w hucie/, aby - gdzie tylko to jest możliwe - stosować łączenia na zamki, oczywiście także wykonane w hucie dostarczającej elementy konstrukcyjne na budowę." [29]

Tendencję do prefabrykacji elementów budowlanych przejęli również architekci, dążąc do poszerzenia zakresu form architektonicznych na bazie istniejących, bądź proponowanych nowych rozwiązań funkcjonalnych. Rezultatem tych dążeń i poszukiwań było powstanie przestrzennych struktur prętowych. Składają się one z prętów rozłożonych równomiernie w przestrzeni i połączonych ze sobą w węzłach tworząc w ten sposób charakterystyczny dla każdego typu układ współzależnych ze sobą brył. Podstawowe bryły pokazano na rys. 12a, zaś na rys. 12b przedstawiono najpopularniejsze układy tych brył wykorzystywane w przestrzennych strukturach prętowych. Zaletą tego typu struktur oprócz lekkości i dużej sztywności jest możliwość przekrywania powierzchni o dowolnym



Rys. 12. a/ bryły podstawowe, b/ najczęściej wykorzystywane układy brył podstawowych w przestrzennych ustrojach prętowych, c/ widok perspektywiczny struktury prętowej o układzie $O + T$.

kształcie rzutu /rys. 12c/. Jednym z pierwszych systemów przestrzennych struktur prętowych był system Mero, opracowany w latach 40-tych przez Maxa Mengerlinghausen'a. Jest on wynikiem rozwiązania problemu postawionego przez autora, aby przy użyciu możliwie najmniejszej liczby elementów składowych zbudować możliwie największą liczbę różnych konstrukcji. W skład systemu Mero wchodzi dwa elementy: element węzłowy, który jest wycinkiem sieci przestrzennej, oraz element prętowy z umieszczonymi na jego końcach gwintowanymi czopami /rys. 13a/. Węzeł posiada osiemnaście po-

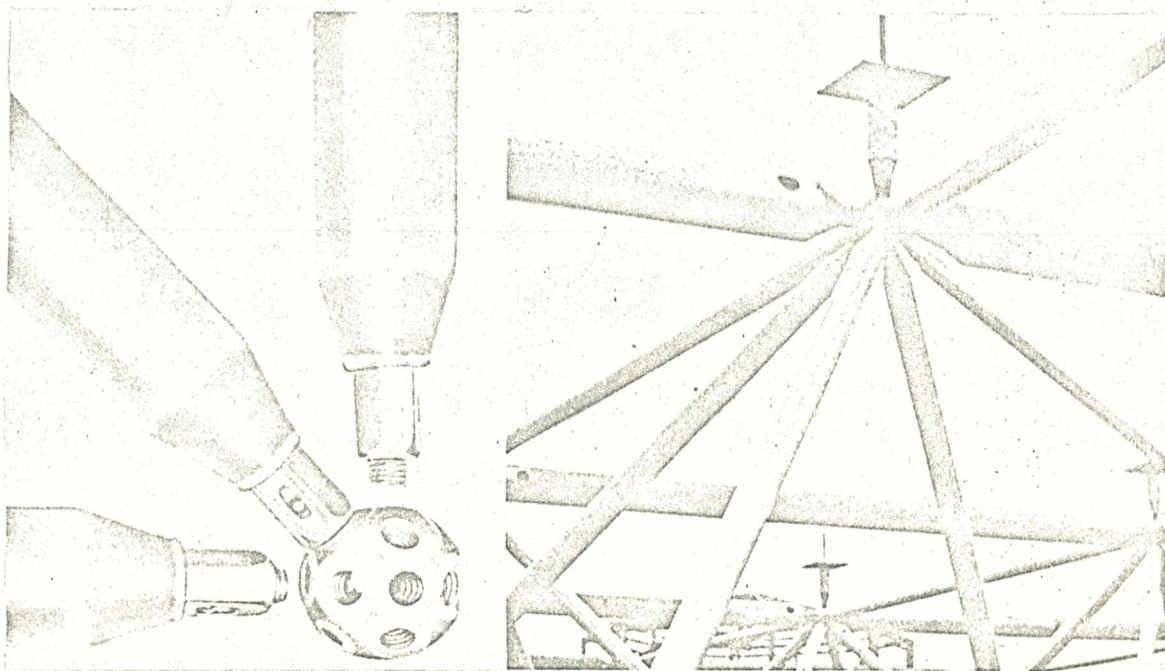
wierzchni z przygotowanymi już otworami, do których można dołączyć element prętowy. Łączenie tych elementów przebiega poprzez obracanie nakrętki, w której znajduje się podłużny otwór na kołek, ten zaś połączony jest ze sworzeniem. Obracając nakrętkę wprowadza się w ruch obrotowy sworzeń, który dzięki temu wchodzi w odpowiadający mu otwór w węźle. System ten należy obecnie do najbardziej rozpowszechnionych na świecie. [9] [34] [35]

Innym również bardzo znanym systemem konstrukcyjnym jest system Unistrut /rys. 13b/. Powstał on podczas II-giej wojny światowej na zapotrzebowanie armii USA. Służył on do konstrukcji szybko montowanych a następnie równie szybko rozbieralnych przekryć hangarów lotniczych i magazynów wojskowych. System ten zrealizowany w układzie bryłowym $\frac{1}{2} O + T$ składa się z pięciu podstawowych elementów: dwóch węzłów /dolnego i górnego wykonanych z odpowiednio ukształtowanych blach z otworami/, pręta, sworzenia i nakrętki. Jednakowej długości pręty wykonane są z kształtowników ceowych o zagiętych końcach półek, łączone są z blachami za pomocą śrub. [3] [9]

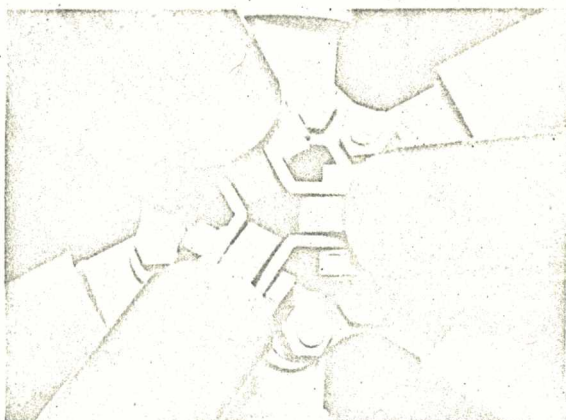
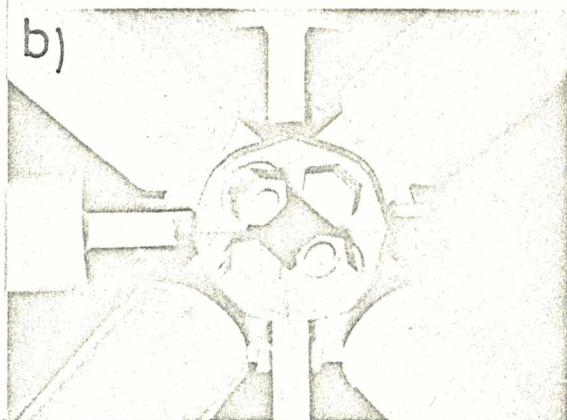
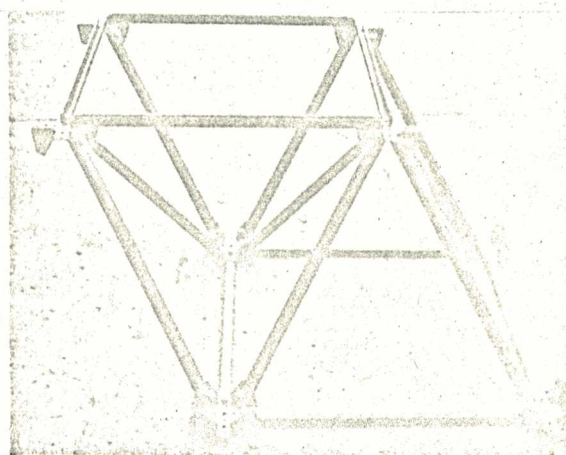
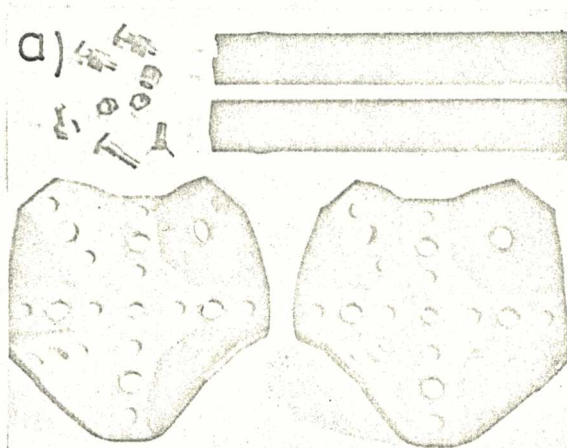
Odmienny sposób myślenia przy podobnej do wyżej opisanej zasadzie łączenia prętów w węźle zaprezentowali twórcy systemu "Varitec". Płasko zakończone pręty rurowe łączą się za pośrednictwem odpowiednio ukształtowanych, niewielkich blach węzłowych /rys. 13c/. W ciągu ostatnich kilkudziesięciu lat powstało wiele systemów konstrukcyjnych różniących się między sobą sposobem łączenia prętów i rozwiązaniem konstrukcyjnym węzła. Niektóre z nich pokazano na rys. 14. [11]

W przestrzennych strukturach prętowych węzeł pełni niezwykle ważną rolę. Musi on zapewnić prawidłowe pod względem geometrycznym ułożenie prętów w przestrzeni, co w konsekwencji daje pożądaną przekazywanie za jego pośrednictwem sił na sąsiednie pręty, a następnie na odpowiednio rozmieszczony i ukształtowany system podpór. Ponadto pracując w całym obszarze przekrycia musi być on tak zaprojektowany i wykonany, aby przejmować nawet największe występujące tam naprężenia. Splot tych czynników powoduje znaczny, bo sięgający 50-ciu procent udziału kosztów produkcji węzłów w koszcie wykonania przekrycia.

Wykonanie konstrukcji przekrycia z metalowych elementów modułarnych powoduje zmniejszenie jego ciężaru o około 40-50 %, przy jednoczesnym znacznym skróceniu czasu montażu, co wpływa następnie na obniżkę ogólnych kosztów budowy rzędu 60-70 %

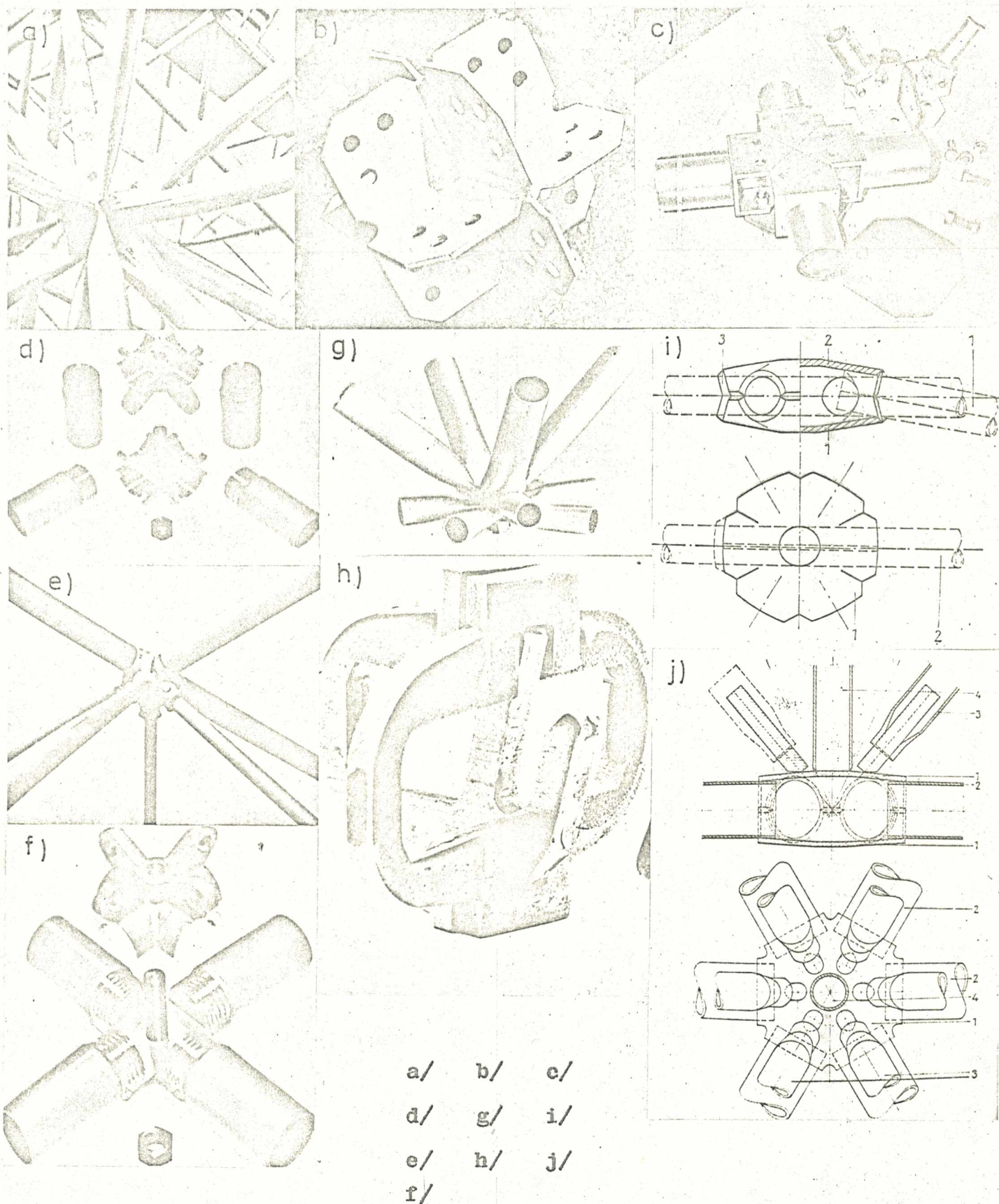


Rys. 13a. System "Mero"



Rys. 13 b/ System "Unistrut",

c/ System "Varitec"



Rys. 14. Przykłady różnych systemów konstrukcyjnych
a-b/ konstrukcja pawilonu Gyrotron na Expo 67
c/ węzeł systemu Tridimatec, d-f/ system Nodus
g/ system Sarton, h/ węzeł uniw. Wachsmann, a,
i-j/ węzeł SDC

w porównaniu z odpowiadającym mu przekryciem zrealizowanym w technologii żelbetowej. Niski koszt elementów składowych jest wynikiem wieloseryjnej ich produkcji. Elementy te mogą być następnie składowane w pakietach i w ten sposób transportowane na plac budowy. [9]

Prętowe struktury przestrzenne posiadają także wady, jak choćby konieczność bardzo dokładnego wykonywania elementów modularnych, czy też niepełne wykorzystywanie nośności materiałów konstrukcyjnych, jednak w ogólnej ocenie zalety dominują nad wadami.

Walory estetyczne tych struktur w połączeniu z efektami ekonomicznymi uzyskanymi dzięki ich stosowaniu decydują o bardzo szerokim zakresie stosowania tego typu konstrukcji. Używa się ich jako przekryć hal przemysłowych, handlowych, wystawowych, budynków szkolnych, teatrów, hal widowiskowych, stadionów sportowych, a także proponuje się wykorzystywanie w przyszłości prętowych struktur przestrzennych jako konstrukcji i integralnej części formalnej makrostruktur mieszkalnych, umożliwiając tym samym projektowanie urbanistyczne także w trzecim wymiarze.

1.4. Kierunki rozwoju przekryć strukturalnych

Unifikacja elementów składowych będąca podstawą każdego systemu struktur prętowych decyduje o znacznym ograniczeniu zakresu form możliwych do uzyskania w tej technologii. W ciągu ostatnich kilkunastu lat na przykładzie prac B.Fuller'a, S.du Chateau czy D.Emmerich'a oraz wielu innych autorów obserwujemy tendencję do tworzenia uniwersalnych systemów konstrukcyjnych, zdolnych do spełnienia wszystkich wymagań stawianych przez każdy rodzaj przekrycia. Różnorodność rozwiązań formalnych pozwala sądzić, że niekorzystne skutki wynikłe z produkcji na wielką skalę elementów typowych w tej dziedzinie architektury nie będą tak duże jak np. w budownictwie mieszkaniowym. Równocześnie coraz wyraźniej zarysowują się dążenia do stosowania takich rozwiązań technicznych, które w maksymalnym stopniu wykorzystują właściwości nośne materiałów konstrukcyjnych. Ponieważ coraz częściej stosowana w budownictwie stal zdecydowanie lepiej pracuje na rozciąganie niż ściskanie czy zginanie, dlatego poszukuje się takich systemów konstrukcyjnych wykorzystujących takie formy,

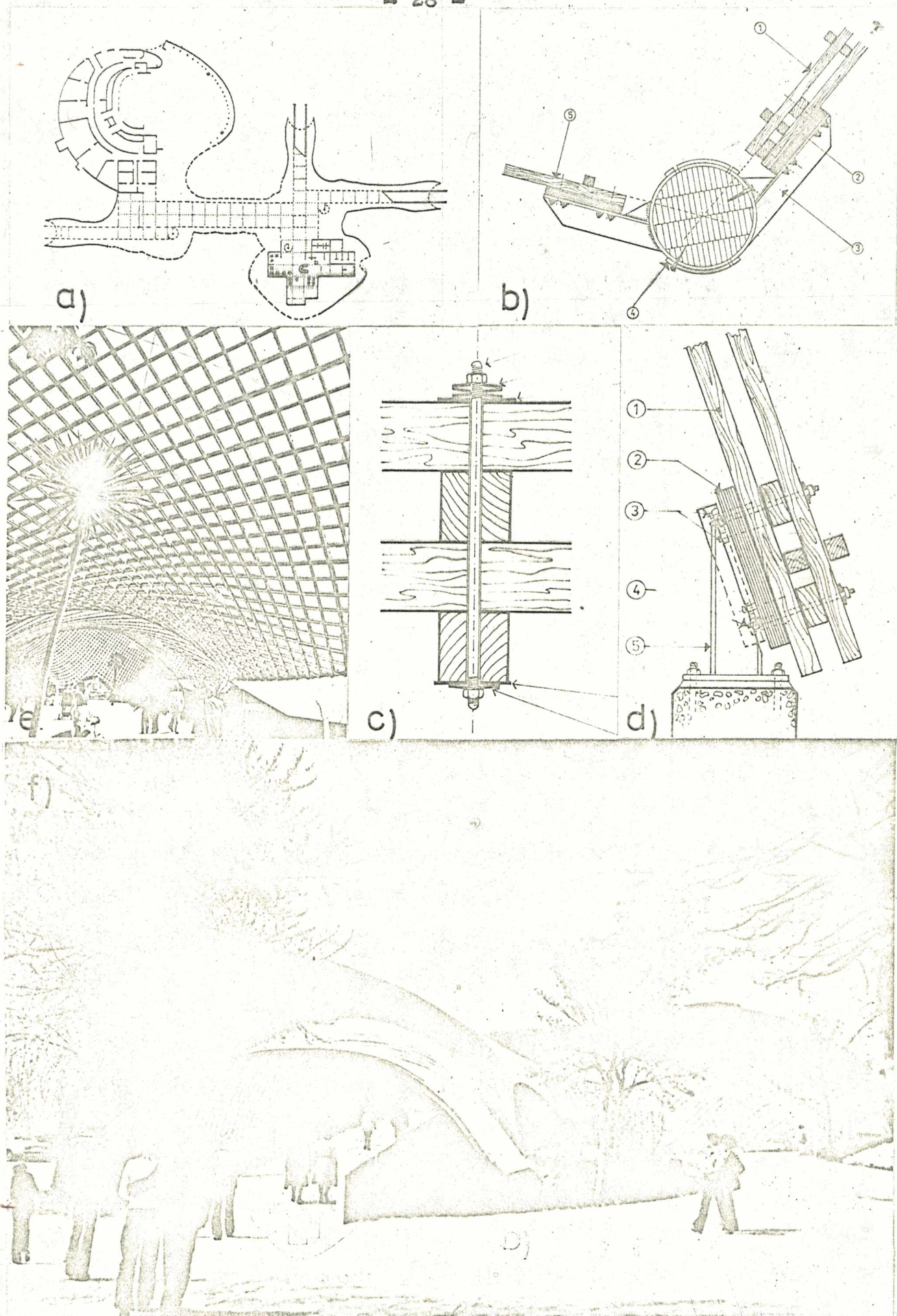
w których dominującymi bądź jedynymi są siły rozciągające. Tym tłumaczy się między innymi rozwój przekryć pneumatycznych. Charakteryzują się one minimalnym ciężarem przypadającym na jednostkę przekrywanej powierzchni. Służą najczęściej jako czasowe przekrycia hal produkcyjnych, składów, magazynów, obiektów sportowych itp. [3]

Do największych obiektów zrealizowanych w tej technologii należy przekrycie zagłębionego w ziemi pawilonu USA na wystawie w Osace. Wadą tych systemów jest konieczność stałego dopływu powietrza w celu utrzymania ich formy eksploatacyjnej.

Zupełnie odmiennym sposobem maksymalnego wykorzystania nośności materiałów konstrukcyjnych charakteryzują się systemy przekryć wiszących. Rozwój tych systemów zapoczątkował M. Nowicki projektem areny w Raleigh. Wykorzystuje się tu proste własności cięgien, których nośność zależy od wielkości przekroju oraz ich kształtu. Dlatego w różnych systemach przekryć wiszących stosuje się takie powierzchnie, których przekroje głównie odpowiadają linii zwisu cięgna będącej parabolą. Najczęściej realizowane w tej technologii przekrycia mają formę paraboloidy hiperbolicznej. Dachy wiszące teoretycznie mogą i praktycznie służą do przekrywania największych powierzchni a przykładem tego jest przekrycie trybun Stadionu Olimpijskiego w Monachium. [38]

Ciekawym z punktu widzenia poszukiwania przyszłościowych form architektonicznych jest przykład pawilonu wystawowego zbudowanego w 1973 r. na Wystawę Ogrodniczą w Mannheim /RFN/. Formę tego obiektu można by nazwać formą dowolną, gdyby nie zastosowano w fazie projektowania pewnych z góry przyjętych i konsekwentnie prowadzonych zasad. Przyjęta tu formuła konstrukcyjna polega na zasadzie pracy odwróconych "do góry nogami" cięgien. W takim przypadku w całym obszarze przekrycia występować będą jedynie siły ściskające. Odpowiednia konstrukcja wraz z odpowiednio dobranym materiałem oraz sposobem montażu może być równie ekonomiczna jak omówione wcześniej przekrycia wiszące. Projektowanie oraz obliczanie naprężeń występujących w tym organizmie powłokowym wymagało współpracy specjalistów z wielu dziedzin m.in. matematyki, geodezji, statyki, dynamiki, aerodynamiki, a także przeprowadzenia szeregu badań modelowych. [39]

Na ich podstawie uściślono wstępnie zadany kształt rzutu podstawy /rys.15a/ i ustalono parametry geometryczne przekrojów poprzecz-



Rys. 15. Hala Wystawy Ogrodniczej w Mannheim.

nych przekrycia. Cały ustrój nośny składa się z wielkiej liczby impregnowanych długich listów drewnianych o przekroju 5x5 cm. Tworzą one czworokątną kratę o oczkach ok. 50x50 cm i łączone są w punktach skupienia za pomocą stalowych śrub /rys. 15c/. Dodatkowo w strefie środkowej kraty, wzdłuż jej przekątnych biegną stalowe cięgna sprężające, tworząc również siatkę czworokątną jednak o dużo większych oczkach. Cięgna te zakotwiczone są na krawędziach podstawy rzutu. Sposób połączenia powłoki z fundamentem podstawy pokazano na rys. 15d. Ponieważ w pewnych partiach przekrycie to składa się z kilku przenikających się czystych form zatem w miejscach tych należało zastosować szerokie łuki pracujące na zginanie /rys. 15b/. Zbudowane są one z klejonego drewna i wzmocnione co jakiś czas metalowymi obręczami z odpowiednio uformowanymi kształtownikami, do których zamocowane są krawędzie przekrycia. Przytoczone tu rozwiązanie daje możliwość stosunkowo taniego przekrywania dużych powierzchni dochodzących do 60-ciu metrów szerokości i 80-ciu metrów długości. [39]

1.5. Typologia form powłokowych

Najbardziej niekorzystnymi pod względem ekonomicznym są elementy zginane. W elemencie budowlanym jakim jest płyta nie wykorzystuje się w pełni nośności zużytych na jej konstrukcję materiałów. Czynniki ekonomiczne determinują rozwój konstrukcji w których występuje osiowe przekazywanie sił od obciążeń zewnętrznych do miejsc podparcia. Po nadaniu tej samej płycie odpowiedniego kształtu podnosi się znacznie jej wytrzymałość oraz zdolność do przekrywania dużo większych przestrzeni. Należy więc tak projektować elementy budowlane aby pracowały one wg. linii ciśnień bądź linii cięgien.

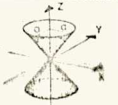
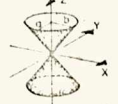
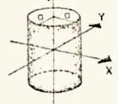
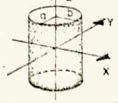
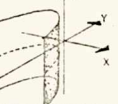
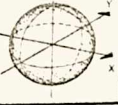
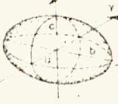
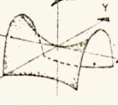
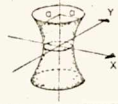
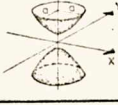
W świetle tych kryteriów definicja powłoki brzmi następująco:

Właściwą, poprawną konstrukcją łupinową jest powłoka tak wykształcona i podparta, że nie występują w niej odkształcenia pochodzące od zginania. [27]

W sensie technicznym powłokę definiuje się jako pełnościenny ustrój przestrzenny, którego grubość mierzona prostopadle do powierzchni jest mała w porównaniu z pozostałymi wymiarami. W sensie matematycznym określa się ją jako powierzchnię pewnego stopnia stanowiącą w przestrzeni euklidesowej wykres funkcji

ciągłej $z = f(x, y)$, dla dwóch niezależnych zmiennych. Definicje matematyczne najczęściej wykorzystywanych w budownictwie form powłokowych podano w tabelicy I. [27]

TABLICA I

1.	stożek kołowy	$x^2 + y^2 = \frac{z^2}{c^2}$	
2.	stożek eliptyczny	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$	
3.	walec kołowy	$x^2 + y^2 = a^2$	
4.	walec eliptyczny	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	
5.	walec hiperboliczny	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	
6.	walec paraboliczny	$y^2 = 2px$	
7.	sfera	$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$	
8.	elipsoida obrotowa	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	
9.	elipsoidal trójosiowa	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	
10.	paraboloida obrotowa	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 2z$	
11.	paraboloida nieobrotowa	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$	
12.	paraboloida hiperboliczna	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$	
13.	hiperboloida 1-nopowłokowa obrotowa	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	
14.	hiperboloida 2-wupowłokowa obrotowa	$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	

Ogólnie wszystkie powierzchnie powłokowe dzielimy na:

- powierzchnie rozwijalne
- powierzchnie nierozwijalne

Instrumentem służącym do ich rozróżnienia jest tzw. krzywizna Gaussa. Przez R_1 i R_2 oznaczamy długości promieni krzywizny przekrojów głównych w danym punkcie przekrycia. Przekrojem głównym jest taki przekrój normalny powierzchni, w którym krzywizna osiąga wartość największą lub najmniejszą. Odwrotności tych krzywizn są miarą tzw. krzywizn głównych powierzchni:

$$k_1 = \frac{1}{R_1} \quad ; \quad k_2 = \frac{1}{R_2}$$

... zaś iloczyn

$$K = k_1 \times k_2 = \frac{1}{R_1} \times \frac{1}{R_2}$$

nazywa się krzywizną Gaussa. [23],[27]

Powierzchnie dla których krzywizna Gaussa $K = 0$ są powierzchniami o pojedynczej krzywiznie. Należą do nich powłoki w formie walca oraz stożka. Punkty ich powierzchni nazywa się parabolicznymi. Wszystkie inne powierzchnie dla których $K \neq 0$ są powierzchniami o podwójnej krzywiznie. Punkty powierzchni dla których $K > 0$ nazywają się punktami eliptycznymi lub punktami o krzywiznie wypukłej. Płaszczyzna styczna do każdego z nich przebiega całkowicie po jednej stronie powierzchni, posiadając z nią jeden punkt wspólny. Do tej grupy należą kula i elipsoida. Punkty powierzchni dla których krzywizna Gaussa $K < 0$ nazywają się punktami hiperbolicznymi. Płaszczyzna styczna przecina się z powierzchnią powłoki i ma kształt siodła. Do tej grupy należą paraboloida hiperboliczna i hiperboloida jednopowłokowa. Poznanie wartości krzywizny Gaussa spełnia dużą rolę przy badaniu stanu naprężeń powłoki. Inaczej pracują powłoki o dodatniej względnie zerowej krzywiznie, a inaczej o ujemnej wartości krzywizny Gaussa.

Wprowadza się także podział na powierzchnie obrotowe oraz translacyjne. Niektóre powłoki należące do dwóch pierwszych grup przedstawiono wraz z ich formułą matematyczną w tablicy I. Powierzchnie translacyjne otrzymuje się przez równoległe przesuwanie jednej krzywej po drugiej. Do tej grupy należy również paraboloida hiperboliczna, której powierzchnię wyznaczyć można przez translację dwóch przeciwnie skierowanych parabol. Obok tej formy przekryć prostokreślnych drugą bardzo popularną jest forma przekrycia konoidalnego. Przykładem często stosowanej formy przekrycia jest konoida prosta paraboli. Uzyskuje się ją poprzez równoległe przesuwanie prostej tworzącej po dwóch kierownikach, z których jedna jest linią prostą a druga parabola. W skład powierzchni prostokreślnych wchodzi również różnego rodzaju powierzchnie heliokoidalne. Przykład tej ostatniej grupy uwiadamia nam możliwości wykorzystywania bardzo szerokiego zestawu form powłokowych. Dalsze rozważania przeprowadzone będą głównie na bazie powierzchni sferycznej. Mimo że przekrycie w kształcie kopuły kulistej stosowane jest od bardzo dawna, to jednak forma ta stawia nadal przed projektantem wiele nowych i ciekawych problemów.

Rozdział II

KSZTAŁTOWANIE FORM POWŁOKOWYCH METODA KÓŁ WPISANYCH W SIATKE TRÓJKATNA

2.1. Wstęp

Większość istniejących systemów konstrukcyjnych prefabrykowanych struktur prętowych pozwala na przekrywanie nimi powierzchni w formie płaskich rusztów lub sklepień walcowych.

Przeszkodą w kierunku rozszerzenia tej formy konstrukcyjnej na dwukrzywiznowe formy przekryć są ograniczenia natury geometrycznej. W tego typu przekryciach koniecznym staje się stosowanie prętów o różnych długościach, to z kolei zmusza do opracowania dużej liczby różnych typów węzłów i jest wyraźnie sprzeczne z podstawową zasadą unifikacji elementów składowych.

Uniwersalny system konstrukcyjny winien się składać z jak najmniejszej liczby części składowych. Nasuwa się więc pytanie czy za pomocą jednego elementu modułarnego możliwym byłoby konstruowanie dwukrzywiznowych przekryć powłokowych.

Przedstawione niżej rozwiązanie geometryczne jest rezultatem pracy nad tak sformułowanym problemem. Rozwiązanie tego zadania na przykładzie powierzchni sferycznej pozwoli na rozszerzenie proponowanej metody na pozostałe formy przekryć, otwierając tym samym możliwości prefabrykacji przekryć o dowolnym kształcie.

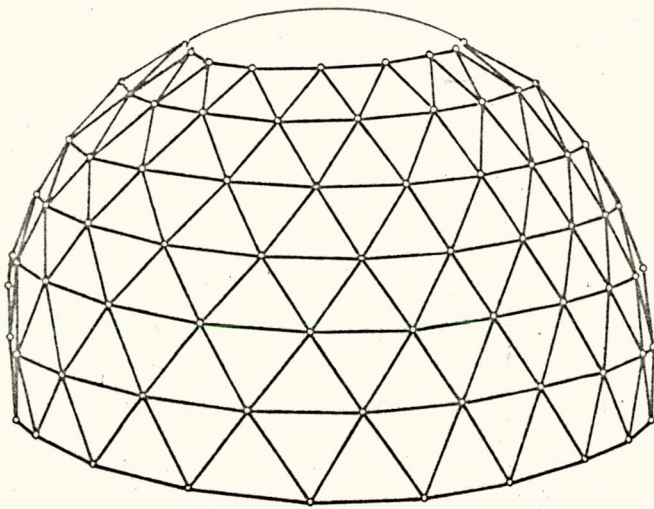
2.2. Konstrukcja kopuły kulistej metodą kół wpisanych w siatkę trójkątną

Do najczęściej stosowanych prętowych struktur powłokowych należy przekrycie w formie kopuły kulistej. We wstępnej fazie ich projektowania opisuje się na powierzchni sferycznej regularną siatkę trójkątną. Stanowi ona podstawę do wszystkich innych działań związanych z projektowaniem i wykonywaniem przekrycia.

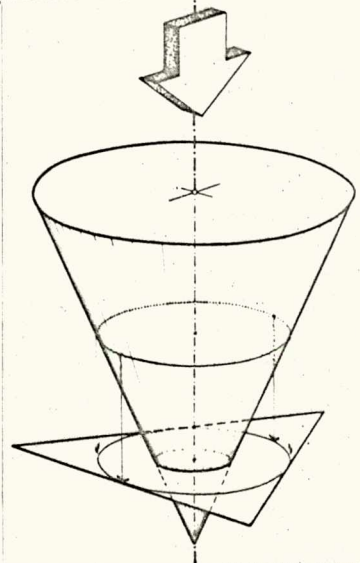
W celu uzyskania regularnych siatek sferycznych wykorzystuje się szereg przekształceń prostych wielościanów foremnych

prowadzących do powstania wielościanów o dużej liczbie ścian. Wierzchołki tych wielościanów leżą na powierzchni sferycznej, zaś ich ściany w zadowalający sposób przybliżają powierzchnię kuli. Wielościany posiadające stosunkowo niewielką liczbę ścian charakteryzują się także niewielką liczbą różnych ścian. W wielościanach o dużej liczbie ścian liczba różnych trójkątnych pól znacznie wzrasta. Powoduje to znaczne zróżnicowanie długości ich krawędzi. Określenie na powierzchni sfery siatki składającej się z jednakowych przystających do siebie trójkątnych pól jest niemożliwe.

Przyjmijmy, że powierzchnię kuli da się opisać skończoną liczbą przylegających do siebie trójkątów nie różniących się zbyt od siebie /rys. 16/. Właściwością każdego trójkąta jest to, że można zawsze wpisać wewnątrz niego okrąg. Niewielkie zróżnicowanie wielkości trójkątnych pól siatki sferycznej wyznacza stosunkowo mały zakres zmian długości promieni okręgów wpisanych w te trójkąty /rys. 17/.



Rys. 16.



Rys. 17.

Promień każdego z tych okręgów wyznaczymy ze wzoru:

$$r = \sqrt{\frac{p-a}{p} \cdot \frac{p-b}{p} \cdot \frac{p-c}{p}}$$

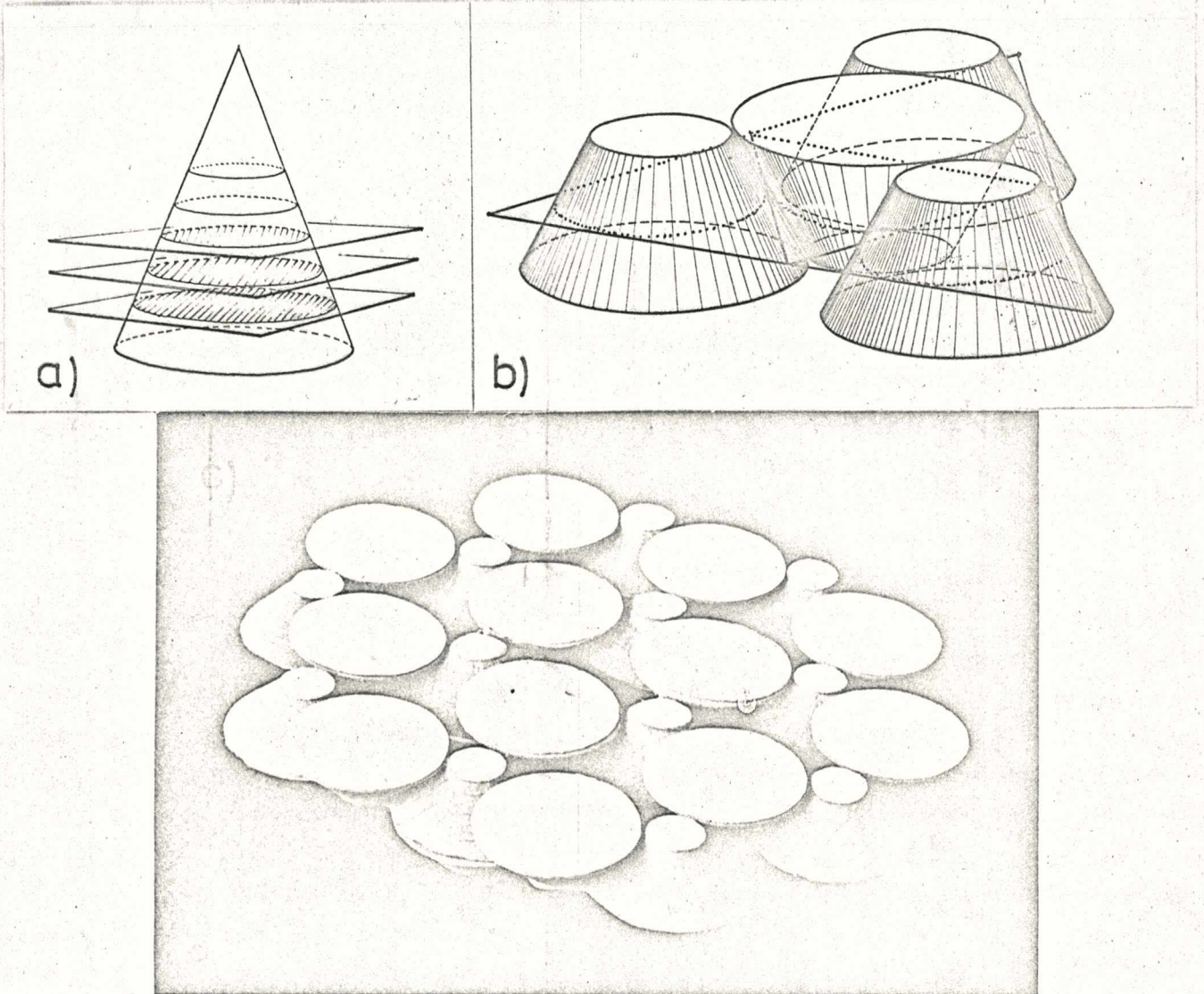
gdzie:

a, b, c - są długościami boków trójkąta

p - połową długości obwodu trójkąta

Wszystkie okręgi o znanych promieniach można otrzymać z jednego elementu przestrzennego jakim jest stożek o znanym promieniu podstawy i znanej wysokości /rys. 18a/.

Umieścimy stożki w siatce trójkątnej opisanej na kuli w ten sposób, aby proste przechodzące przez środki podstaw stożków oraz ich wierzchołki były zogniskowane w środku kuli i aby połowa stożków zwrócona była ku wnętrzu, a połowa na zewnątrz kuli. Zasadę umieszczania stożków na powierzchni kuli przedstawiono na rys. 18b, zaś jej rozwinięcie na przykładzie powierzchni płaskiej pokazano na rys. 18c.

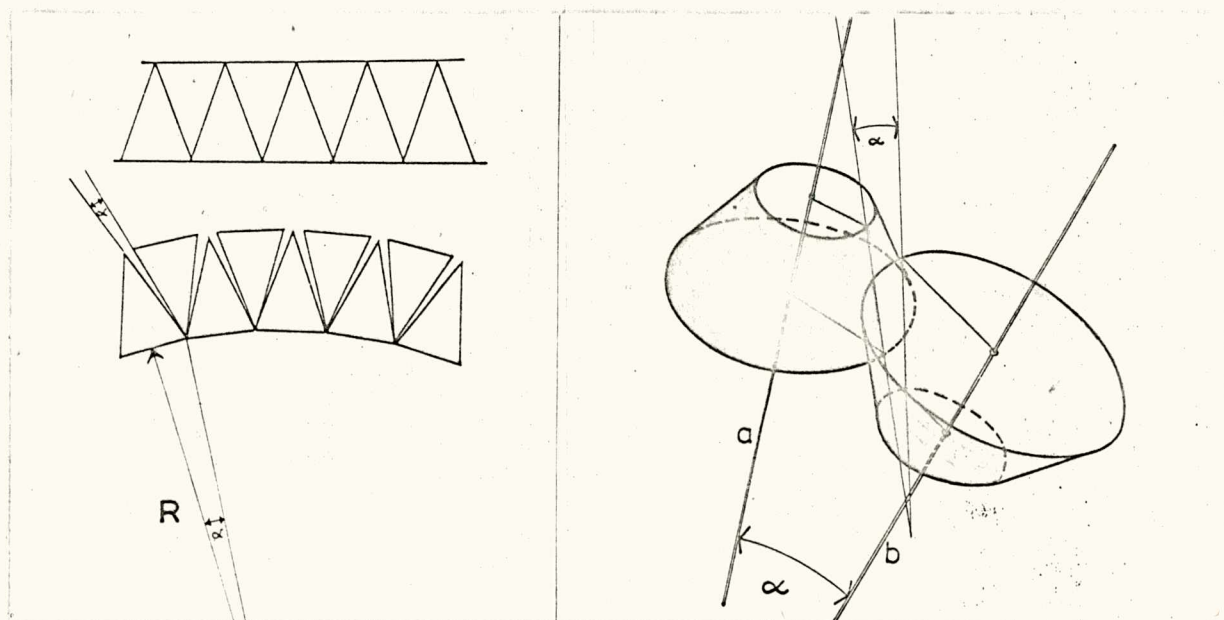


Rys. 18. Sposób ułożenia stożków w metodzie kół wpisanych w siatkę trójkątną.

Konsekwencją takiego ułożenia stożków na powierzchni kuli jest powstanie między dwiema najbliższymi tworzącymi sąsiadujących ze sobą stożków kąta, równego co do wartości kątowi jaki tworzą ze sobą ich osie symetrii, ogniskujące się w środku kuli /rys. 19/.

Kąt α możemy obliczyć znając odległości między środkami kół.

wpisanych w trójkątne pola siatki sferycznej. Odległości te warunkują liczbę różnych wartości kąta α oraz wynikający stąd zakres zmiany tego kąta. Należy więc tak dobrać siatkę trójkątną aby ograniczyć liczbę różnych odległości występujących pomiędzy środkami kół wpisanych w te trójkąty, a co za tym idzie także liczbę różnych wartości kąta α .



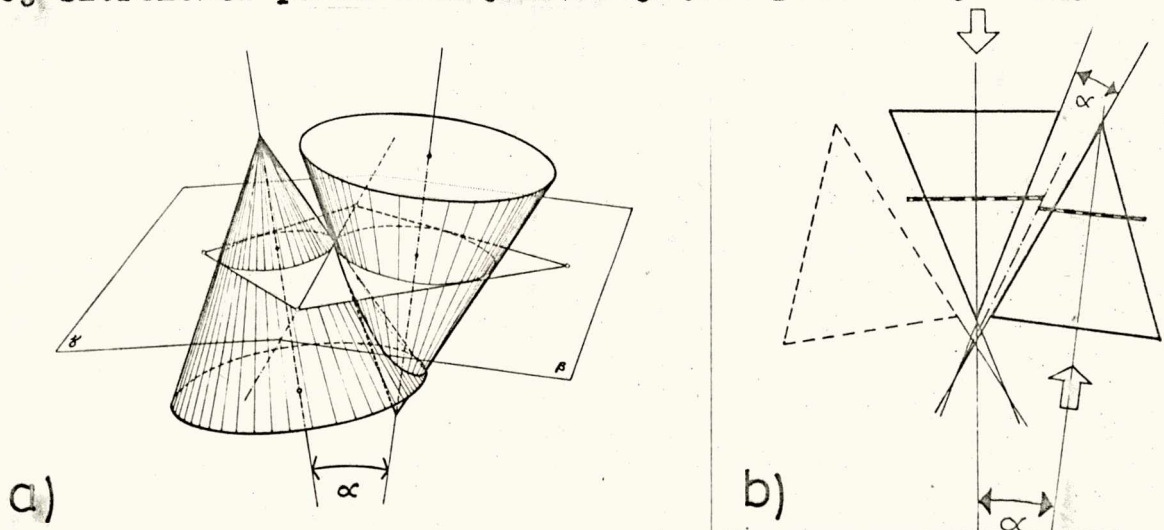
Rys. 19.

Jeśli wielkości trójkątów i odległości środków kół wpisanych różnią się mało, to zakres zmian wartości kąta α jest również mały. Równocześnie pożądanym jest, aby wartości kąta α różniły się wyraźnie między sobą, gdyż mając na uwadze konstrukcję kopuły jako cel naszych rozważań, wyraźne różnice w zakresie kąta α ułatwiają montaż poszczególnych elementów, zmniejszając prawdopodobieństwo niewłaściwego ich ułożenia na powierzchni sferycznej.

Wróćmy do odpowiednio usytuowanych już stożków. Przemieścimy je teraz wzdłuż ogniskujących się w środku kuli prostych do momentu, aż średnica okręgu wpisanego w trójkąt na siatce sferycznej pokryje się ze średnicą okręgu na stożku, uzyskanego przez przecięcie tego stożka płaszczyzną trójkątnej ściany wielościanu. Po przeprowadzeniu tej operacji zauważymy, że niektóre stożki "zachodzić" będą jeden na drugi /rys. 20a/.

Umieszczenie na tej zasadzie wszystkich stożków w sferycznej siatce trójkątnej nie jest więc możliwe. Należy zatem rozsunać stożki tak, aby mogły być one bez przeszkód montowane /rys. 20b/.

Rozsuniecie to uzyska się w ramach siatki pierwotnej przez odpowiednie zmniejszenie wielkości trójkątnych pól, w które wpisujemy okręgi. Kąt pomiędzy dwiema najbliższymi tworzącymi stożków umieszczonych w trójkątach o zmniejszonej wielkości, będzie także równy kątowi α /rys. 20b/. Odpowiednie zmniejszenie wielkości trójkątów zapewnia bezkolizyjne układanie stożków na powierzchni kuli, a jego efektem będzie powstanie odpowiedniej szerokości pasów wewnątrz trójkątów podstawowych /rys. 21/.



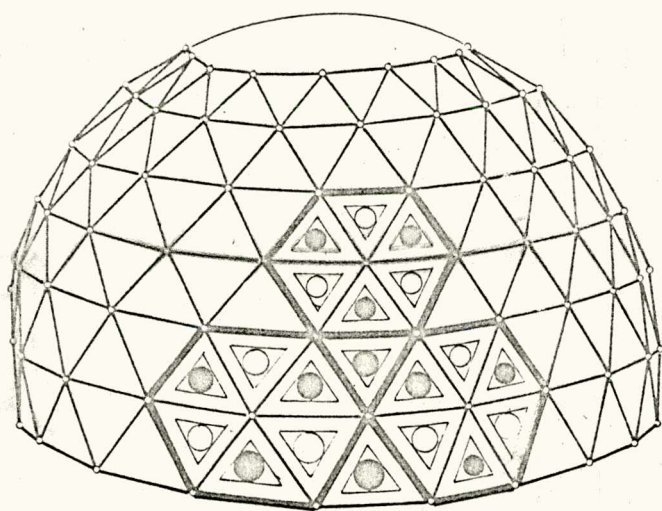
Rys. 20. Wzajemne usytuowanie stożków na powierzchni kuli.

Szerokość tych pasów winna być indywidualnie ustalona dla każdej pary elementów stożkowych.

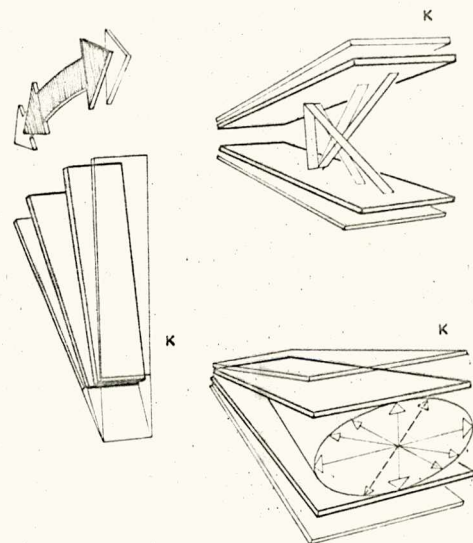
Własności powierzchni sferycznej decydują o zróżnicowaniu wielkości trójkątnych pól przybliżających jej powierzchnię co powoduje, że najbliższe tworzące sąsiadujących ze sobą stożków nie będą miały stałego położenia na ich powierzchniach bocznych. Będą się one przemieszczać w pewnym zakresie powierzchni bocznej stożków a zakres ich położen będzie od regularności trójkątnej siatki sferycznej.

Żądane odległości pomiędzy określonymi na stożkach okręgami uzyska się poprzez zastosowanie i odpowiednie przesuwanie klina K /rys. 22/ wzdłuż obu tworzących.

Konstrukcja klina K powinna umożliwiać płynną jego regulację w celu dostosowania się do precyzyjnie określonych uprzednio wartości kąta α . Jeśli wspomniane wyżej odległości byłyby zbyt duże, a wartości przesunięć stosunkowo znaczne to należy również umożliwić równoległe przemieszczenie obu płaszczyzn klina K tak, aby jeden jego typ móc stosować w całym obszarze przekrycia.



Rys. 21.



Rys. 22.

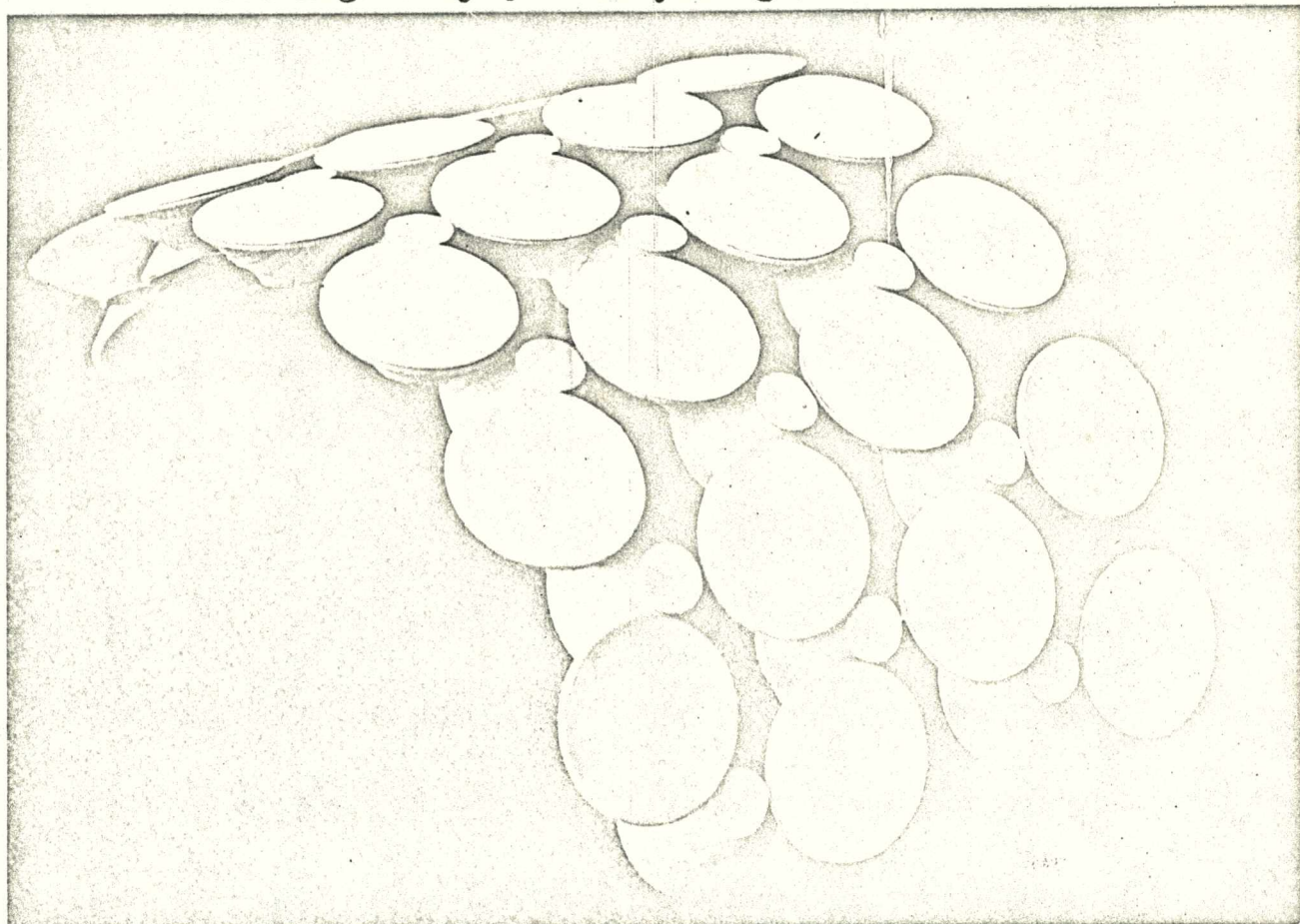
W optymalnych warunkach dysponując elementem stożkowym oraz tak określonym elementem węzłowym można konstruować kopułę kulistą opierając się w zasadzie na jednej wartości promienia okręgu wpisanego w siatkę trójkątną. Będzie to możliwe w przypadku, gdy zastosowana siatka sferyczna będzie bardzo regularną siatką o niewielkim zróżnicowaniu długości boków i wielkości zawartych między nimi trójkątnych pól. Rysunek 23 przedstawia ułożenie stożkowych elementów modułarnych w obszarze trójkąta sferycznego, na którym wcześniej określono taką właśnie siatkę trójkątną. W praktyce ze wszystkich form powłokowych konstruowanych wg zasad teorii kół wpisanych w siatkę trójkątną jedynie przekrycie w formie walca kołowego budować się będzie w oparciu o jedną wartość promienia okręgu oraz maksymalnie dwie różne wartości kąta α dla elementu klina K /rys. 24/.

Dysponując opisanymi wyżej dwoma elementami tzn. elementem stożkowym i klinem można konstruować różnorodne rodzaje przekryć np. w formie paraboloid, hiperboloid czy innych powierzchni zdefiniowanych prostymi regułami matematycznymi a także powierzchnie nieregularne rozpięte nad dowolnym kształtem rzutu. Aby umożliwić konstrukcję tych powierzchni trzeba na nich opisać regularną siatkę trójkątną i na jej podstawie znaleźć wszystkie potrzebne dane w sposób opisany wyżej.

Przedstawiony w zarysie opis budowy konstrukcji powierzchniowych za pomocą dwóch elementów, stożka i klina jest modelem teoretycznym i nie może być traktowany jak samodzielny system kon-



Rys. 23. Ułożenie elementów stożkowych w obszarze równobocznego trójkąta sferycznego.



Rys. 24. Model przekrycia walcowego wykonanego wg zasad metody kół wpisanych w siatkę trójkątną.

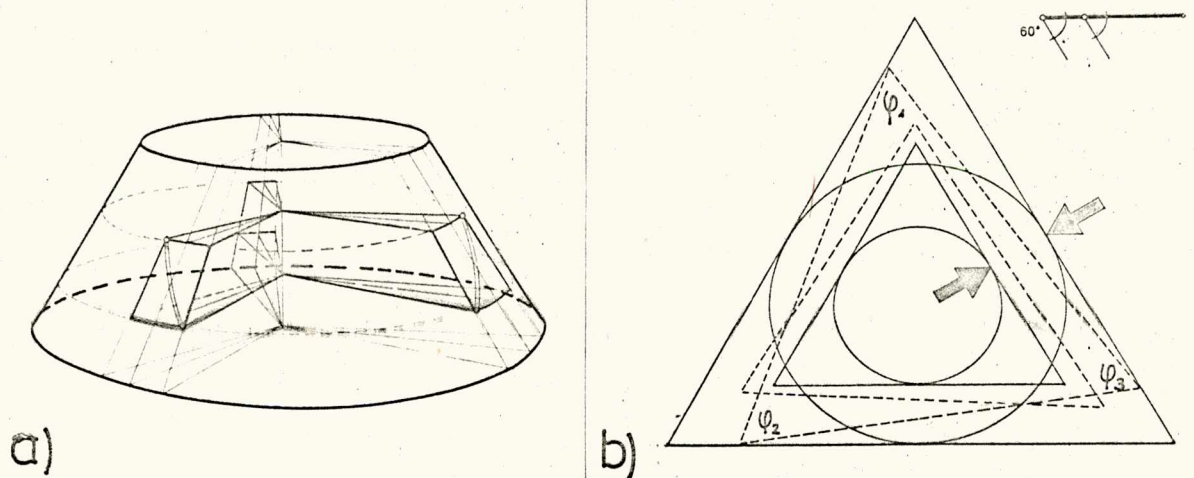
strukcyjny, stanowi jednak podstawę dla rozważań przeprowadzanych w rozdziale V. Stożek i klin mogą być połączone w jednym elemencie, stwarzając formę nie przypominającą elementów wyjściowych, jednak zapewniającą konstruowanie zamierzonych powłok. Konstruowanie powłok przy użyciu jednego typu elementu modularnego może być bardziej ekonomiczne, gdyż umożliwi szybki i prosty montaż oraz ewentualny również szybki i prosty demontaż konstrukcji. Utworzone w ten sposób przekrycia mogą mieć równocześnie ciekawą formę architektoniczną.[43]

2.3. Siatka sferyczna w teorii kół wpisanych

Istotą omówionej wyżej metody jest równoczesne połączenie dwóch powszechnie znanych prawidłowości. Pierwszą z nich jest ta która mówi, że przecinając stożek prosty płaszczyznami równoległymi do jego podstawy otrzymamy rodzinę okręgów, będących częścią wspólną powierzchni bocznej stożka i kolejnych płaszczyzn. Jednocześnie zgodnie z nazwą przedstawionej metody taką samą rodzinę okręgów można uzyskać wpisując okrąg w każdy trójkąt dowolnie przyjętej siatki trójkątnej opisującej powierzchnię kulistą. Siatka ta nie może być w dosłownym tego słowa znaczeniu dowolną siatką, złożoną z dość przypadkowego połączenia dowolnych trójkątów. Z wielu geometrycznych siatek opisujących powierzchnię kuli należy wybrać tę, która jest najbardziej regularną siatką. Mianem tym określamy siatkę przybliżającą możliwie dokładnie, wiernie powierzchnię kuli oraz złożoną z niewiele różniących się od siebie trójkątów, tak pod względem wielkości ich pól jak i zróżnicowania długości ich boków.

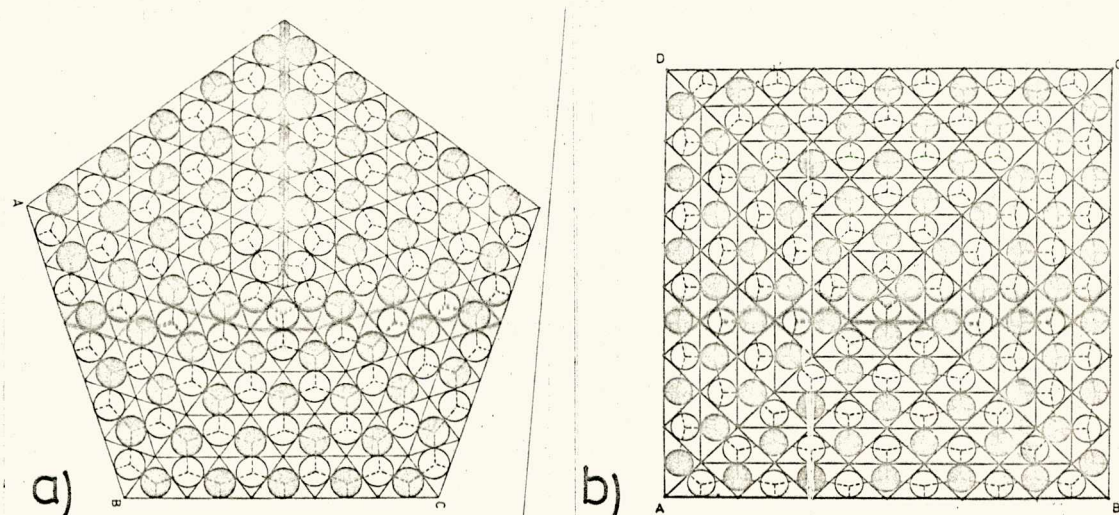
Regularna, trójkątna siatka sferyczna zapewni minimalny zakres promieni kół wpisanych uzyskiwanych z elementu stożkowego równocześnie ograniczając podobny zakres zmian położenia najbliższych tworzących na powierzchniach każdej pary sąsiadujących ze sobą stożków /rys. 25a/.

W trójkątnej siatce sferycznej długości poszczególnych jej odcinków powinny niewiele różnić się od siebie, a kąty zawarte pomiędzy poszczególnymi odcinkami mieścić się muszą w granicach $60^{\circ} \pm \varphi$, gdzie φ ma niewielką skalę zmian swych wartości /rys. 25b/.



Rys. 25. Czynniki określające cechy optymalnej siatki przestrzennej.

Trójkątne siatki sferyczne uzyskuje się różnymi metodami wykorzystując analizę związków miarowych prostych wielościanów foremnych, na bazie których tworzy się wielościany o dużej liczbie ścian. Najczęściej wykorzystywanym do tego celu wielościanem jest 20-ścian foremny. Ścianami tego wielościanu są płaskie trójkąty równoboczne, które po zrzutowaniu ich ze środka kuli opisanej na 20-ścianie foremnym, utworzą na jej powierzchni największą liczbę najmniejszych powtarzalnych równobocznych trójkątów sferycznych. W każdym wierzchołku tego wielościanu schodzi się pięć równobocznych trójkątnych ścian. Własność ta eliminuje trójkątne siatki sferyczne powstałe na bazie 20-ścianu foremnego, dla potrzeb metody kół wpisanych, w której zasadą jest przeciwstawne układanie elementów stożkowych. Na rysunku 26a przedstawiono schematycznie widok zbiegających się w wierzchołku 20-ścianu pięciu równobocznych jego ścian. Obszar każdej trójkątnej ściany podzielony został liniami równoległymi do ich podstaw na 25 mniejszych trójkątów. Wpisane w te trójkąty okręgi ciemniejsze pochodzą od stożków ułożonych w kierunku środka kuli opisanej na 20-ścianie foremnym, zaś okręgi jaśniejsze pochodzą od stożków skierowanych na zewnątrz tej kuli. Ułożenie wszystkich elementów stożkowych wg zasad metody kół wpisanych w całym obszarze sieci przestrzennej 20-ścianu jest niemożliwe, gdyż na krawędzi WE sąsiadujące ze sobą stożki musiałyby być zwrócone w tym samym kierunku. Zaobserwowana tu kolizja występuje dla każdego rysunku trójkątnych siatek sferycznych powstałych na bazie 20-ścianu foremnego



Rys. 26. Schemat ułożenia elementów stożkowych w siatkach sferycznych, a/ 20-ścianu foremnego, b/ 8-ścianu foremnego.

a także ma miejsce w siatkach sferycznych opracowanych na bazie wielościanów, w wierzchołkach których schodzi się nieparzysta liczba trójkątnych ścian. Jednym spośród wielościanów foremnych w wierzchołkach którego schodzi się parzysta liczba ścian jest 8-ścian foremny. Na rysunku 26b pokazano widok schodzących się w jednym z jego wierzchołków czterech trójkątnych ścian, podzielonych podobnie jak ściany 20-ścianu foremnego. Siatki sferyczne powstałe na bazie 8-ścianu foremnego zapewniają więc bezkonfliktowe umieszczenie elementów stożkowych na powierzchni kuli.

Wymagania stawiane przez metodę kół wpisanych, a dotyczące charakteru siatki sferycznej zmuszały do przeanalizowania związków miarowych uzyskiwanych różnymi sposobami trójkątnych siatek sferycznych. Studia nad tym zagadnieniem doprowadziły do powstania metody deformacji siatki wtórnej, którą przedstawiono w następnym rozdziale.

Rozdział III

SPOSÓB OTRZYMYWANIA RÓWNOMIERNYCH SIATEK SFERYCZNYCH METODĄ
DEFORMACJI SIATKI WTÓRNEJ

3.1. Wstęp

W interesującym i złożonym zagadnieniu prefabrykacji przekryć powłokowych dużą rolę odgrywa siatka geometryczna opisująca daną powierzchnię. Siatka ta, składająca się z odcinków prostych powinna przede wszystkim zapewnić geometryczną niezmienną całemu ustrojowi; powinna jak najwierniej oddawać krzywizny danej powłoki, długości poszczególnych jej odcinków winny niewiele różnić się od siebie, a kąty pomiędzy poszczególnymi odcinkami powinny przyjmować wartości z jak najmniejszego zakresu możliwych i koniecznych ich zmian. Aby można ją nazwać siatką równomierną-optymalną, powinna równocześnie składać się z jak najmniejszej liczby odcinków o różnych długościach oraz z jak największej liczby jednakowych pól zawartych pomiędzy tymi odcinkami. Siatka taka ułatwia stosowanie powtarzalnych elementów w konstruowaniu przekryć powłokowych. Rysunek siatki geometrycznej wpływa również na sposób pracy i nośność projektowanego przekrycia.

3.2. Opis problemu

Najprostszą, a zarazem geometrycznie niezmienną figurą płaską jest trójkąt i dlatego siatka trójkątna będzie najwłaściwszą dla naszych rozważań. Siatka składająca się wyłącznie z trójkątów równobocznych, gdzie wszystkie odcinki mają tę samą długość, byłaby tu najlepszą, lecz można ją opisać jedynie płaszczyznę oraz powierzchnię walcową. Wyjątek stanowią tu siatki sferyczne wielościanów foremnych, np. równoboczna trójkątna siatka sferyczna 20-ścianu foremnego. Wszystkie powierzchnie dwukrzywiznowe, ze względu na swoje własności geometryczne muszą być opisywane z konieczności siatkami trójkątnymi o zróżnicowanych długościach odcinków i wielkościami zawartych między nimi trójkątnych pól.

W dalszych rozważaniach będziemy zajmowali się powłoką kulistą jako jedną z najstarszych i stosunkowo często stosowaną formą przekrycia. Powierzchnia ta należy zarazem do najtrudniejszych form geometrycznych pod względem znalezienia na niej siatki trójkątnej; związki miarowe w poszczególnych oczkach siatki są bardzo skomplikowane.

Bazę do opracowania trójkątnych siatek sferycznych stanowią wielościany prawidłowe, których krawędzie mają jednakową długość, przy czym najczęściej wykorzystuje się te, których ścianami są trójkąty równoboczne tzn. 4-ścian foremny, 8-ścian foremny i 20-ścian foremny. Daje to gwarancję, że opracowane na ich podstawie siatki sferyczne będą w dużym stopniu spełniały warunek niewielkiego zróżnicowania długości odcinków, ponieważ płaski trójkąt równoboczny przekształca się w odpowiadający mu równoboczny trójkąt sferyczny kuli, opisaney na danym wielościanie. [14][15][16][17][18].

Wielościany podstawowe jak i powstałe na ich bazie wielościany o dużej liczbie ścian oznacza się kodem, będącym matematycznym opisem danej bryły, gdzie:

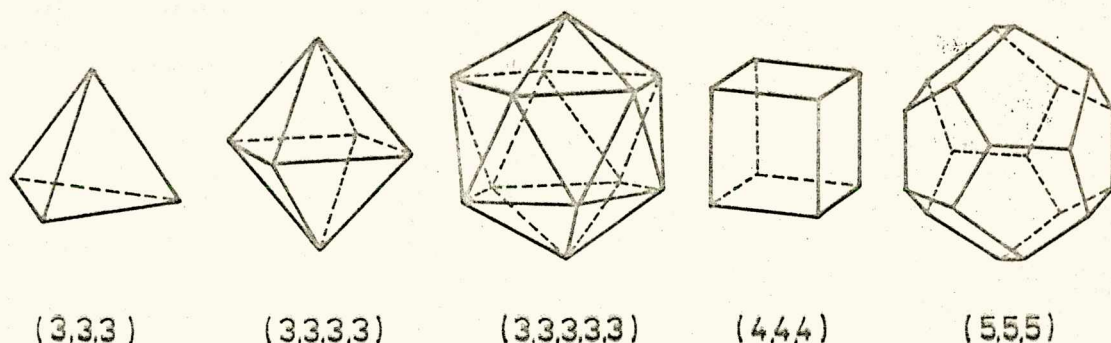
$i, j, \dots, m$ - oznacza, że dana ściana bryły jest
i-kątem, j-kątem, ..., m-kątem,

$/i, j, \dots, m/$ - oznacza, że każdy wierzchołek wielościanu tworzą krawędzie, będące bokami i-kąta, j-kąta, m-kąta, które to wielokąty są ścianami wielościanu [12][25]

Pojęcia wielościanu i siatki sferycznej będziemy stosować zamiennie, ze względu na swą tożsamość w określaniu położenia wierzchołków wielościanu jak i węzłów siatki trójkątnej na powierzchni kuli.

Istnieje wiele metod otrzymywania wielościanów o dużej liczbie ścian. Opierają się one na podziale równobocznych bądź równoramiennych trójkątów sferycznych w zależności od rodzaju podstawowego wielościanu przyjętego w danej metodzie. Na rysunku 27 przedstawiono 5 podstawowych wielościanów foremnych, od czworościanu foremnego $/3, 3, 3/$, poprzez 6-ścian $/4, 4, 4/$, 8-ścian foremny $/3, 3, 3, 3/$, 12-ścian foremny $/5, 5, 5/$ do 20-ścianu foremnego $/3, 3, 3, 3, 3/$.

Każdą metodę można ocenić i porównać z inną na podstawie charakterystyk wielościanów otrzymywanych w wyniku jej zastosowania. Charakterystyka danej metody składa się z kryteriów oznaczonych kolejno:



Rys. 27. Podstawowe wielościany foremne.

- c - liczba wszystkich wierzchołków wielościanu
 c_k - liczba różnych kątów brykowych wielościanu
 e - liczba wszystkich krawędzi wielościanu
 e_k - liczba różnych krawędzi wielościanu
 l - liczba wszystkich ścian wielościanu
 l_k - liczba różnych ścian wielościanu
 s_k - liczba różnych kątów płaskich zawartych pomiędzy krawędziami ścian wielościanu
 η - stosunek długości krawędzi najdłuższej, do długości krawędzi najkrótszej wielościanu. [25] [31]

Wielkości tych współczynników zależą od rodzaju wielościanu podstawowego oraz od stopnia podziału łuków, odpowiadających krawędziom wielościanu, na n równych części.

Współczynnik η jest miarą zróżnicowania długości odcinków całej siatki i wraz ze współczynnikami e_k i l_k świadczy najlepiej o jej regularności.

Jak już uprzednio wspomniano większość metod budowania wielościanów o dużej liczbie ścian opiera się o sposoby podziału równobocznych i równoramiennej trójkątów sferycznych. Ze względu na podane wyżej kryteria najlepsze wyniki dają metody oparte na podziałach równobocznych trójkątów sferycznych. Dlatego też, w celu uzyskania regularnych wielościanów o dużej liczbie ścian, jako bazę do ich opracowania wykorzystuje się najczęściej 20-ścian foremny. Wielościan ten posiada największą ze wszystkich wielościanów foremnych liczbę ścian, będących trójkątami równobocznymi. Oznacza to jednocześnie, iż odpowiadający każdej trójkątnej ścianie, równoboczny trójkąt sferyczny

jest najmniejszy. Kolejne jego wewnętrzne podziały dadzą w rezultacie siatkę sferyczną bardziej regularną, od takich samych podziałów trójkątów sferycznych przeprowadzonych na bazie innych wielościanów.

Metody podziału trójkątów sferycznych zapoczątkował B. Fuller, twórca kopuł geodezyjnych. Opracowanie siatek sferycznych jest punktem wyjścia do projektowania jedno i dwuwarstwowych powłok kulistych. Metodę umożliwiającą jednocześnie tworzenie jedno- i dwuwarstwowych kratownic na powierzchni sferycznej podał J. Fuliński, opierając się również na analizie wielościanów foremnych.

Dwuwarstwowe siatki przestrzenne składają się z warstwy wewnętrznej, która jest wielościanem wypukłym, warstwy pośredniej, którą stanowią odcinki łączące warstwę wewnętrzną i zewnętrzną, zaś warstwa zewnętrzna jest wielościanem, który powstaje przez przekształcenie wielościanu wewnętrznego.

Trzema zasadniczymi rodzajami dwuwarstwowych siatek przestrzennych są następujące przekształcenia:

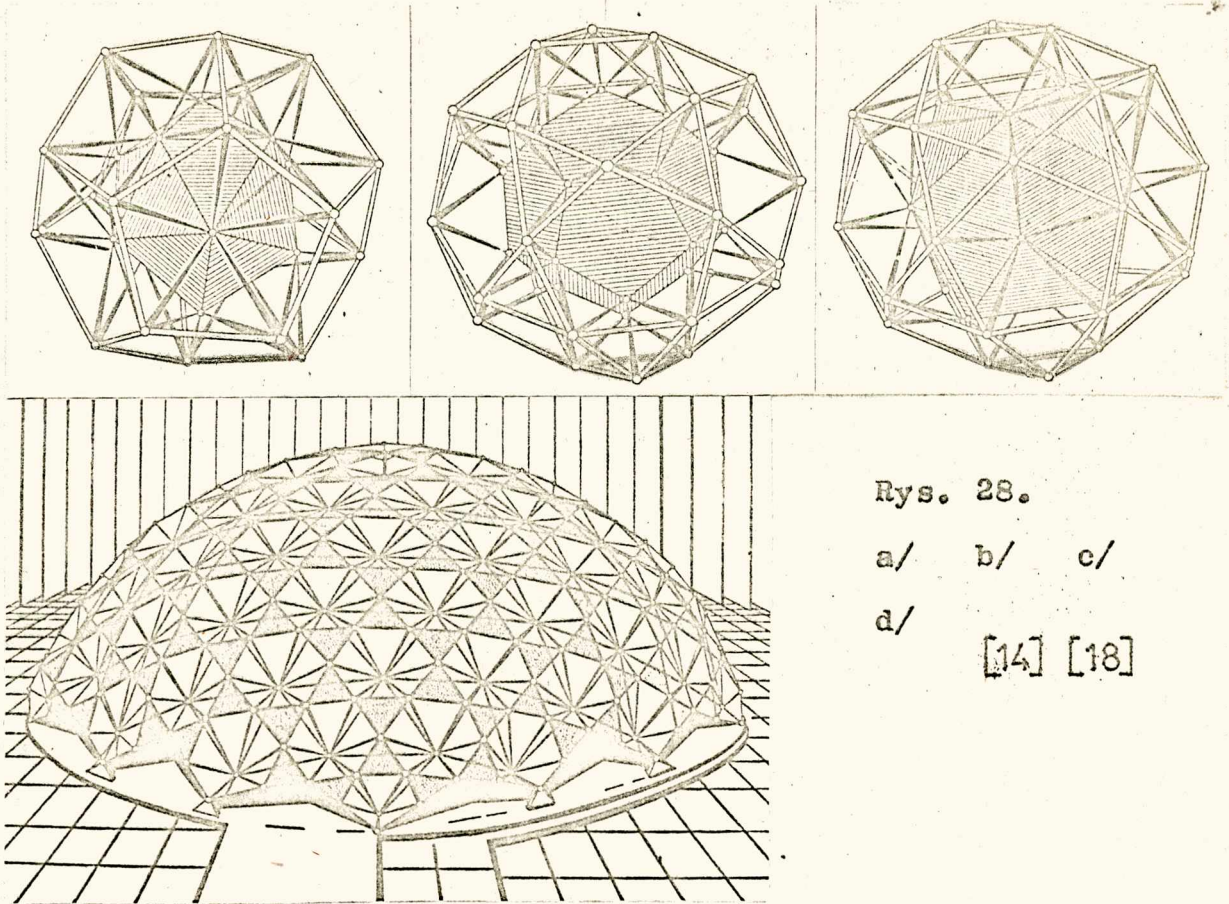
I -go rodzaju - przekształcenie 20-ścianu foremnego
w 12-ścian foremny /rys. 28a/

II -go rodzaju - przekształcenie 12-ścianu foremnego
w 32-ścian /tzn. schemat 60-ścianu
w schemat 80-ścianu. Rys. 28b/

III-go rodzaju - przekształcenie 20-ścianu w schemat
80-ścianu /rys. 28c/ [14] [18]

Przykładem kratownicy przestrzennej, której genezą powstania było przekształcenie III-go rodzaju, jest kopuła dwuwarstwowa pokazana na rys. 28d. Powstała ona przez odwzorowanie 540-ścianu w 2160-ścian.

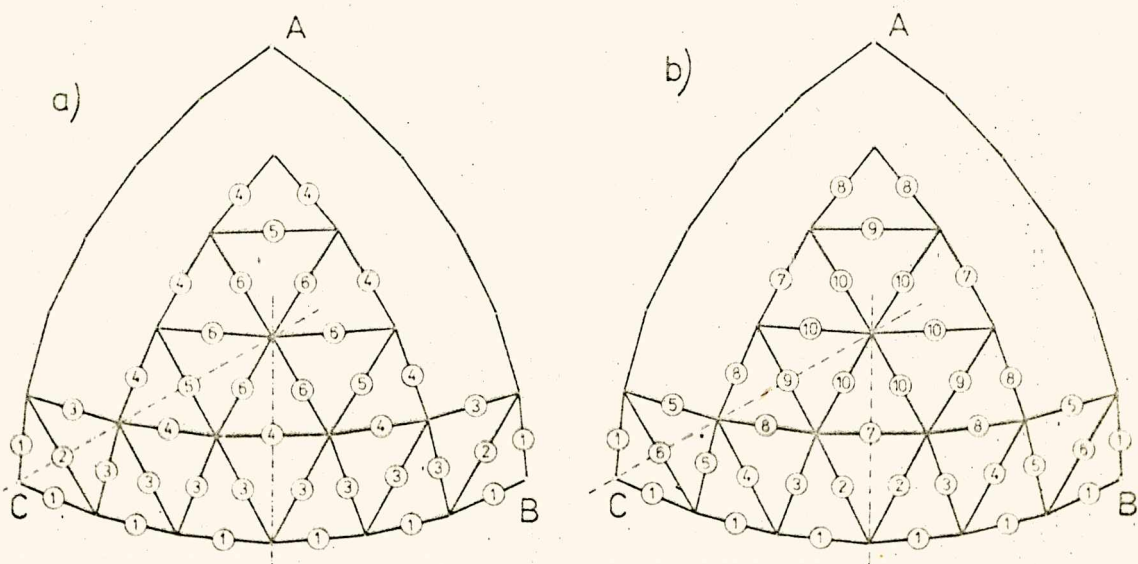
Do najbardziej znanych metod podziału trójkątów sferycznych należą: metoda połówkowego podziału boków, metoda koła opisanego na trójkącie oraz powstałe niedawno metody podziału równobocznych trójkątów sferycznych przedstawione przez T. Tarnai'a i E. Makai'a Jr'a. Szczegółowe omówienie ważniejszych metod wraz z bogatą analizą porównawczą zawierają prace [25] i [31]. Z analizy tej wynika, iż najlepszą metodą w świetle podanych wcześniej kryteriów jest metoda Tarnai'a. Charakteryzuje się ona stosunkowo małą wartością współczynnika η , przy niewielkiej



liczbie różnych długości odcinków, oraz małej liczbie różnych ścian. W metodzie zaproponowanej przez E. Makai'a wartość współczynnika η dla 20-ścianu foremnego jest bliska wartości granicznej dla tego wielościanu /1,1756/ i wynosi 1,1780. Zalety związanej z tak małą wartością nie posiada jednak współczynnik określający liczbę różnych długości oraz informujący o liczbie różnych pól trójkątnych w całej siatce. Na rysunku 29 przedstawiono rozmieszczenie odcinków o różnych długościach w obrębie równobocznego trójkąta sferycznego dla stopnia podziału jego boków $n=6$ przeprowadzonego metodą Tarnai'a /rys. 29a/ oraz metodą Makai'a /rys. 29b/. Odcinki o takich samych numerach porządkowych posiadają tę samą długość.

3.3. Podstawy metody deformacji siatki wtórnej

W rozdziale II omówiono teorię kół wpisanych, która wymagała aby siatka opisująca daną powierzchnię była siatką równomierną. Za taką przyjęliśmy uważać siatkę, której długości poszczególnych odcinków niewiele różnią się od siebie, a zatem wszyst-



Rys. 29. Rozkład różnych długości odcinków w obszarze równobocznego trójkąta sferycznego dla $n=6$,
a/ metoda Tarnai'a, b/ metoda Makai'a.

kie występujące w niej trójkąty są zbliżone do trójkątów równobocznych. Wynikiem dążeń do opracowania takiej siatki sferycznej na bazie teorii kół wpisanych w siatkę trójkątną jest metoda deformacji siatki wtórnej.

W metodzie tej wykorzystano własność rzutu środkowego ściany wielościanu na współśrodkową kulę. Zajmijmy się ścianą 20-ścianu foremnego /rys. 30/. Ponieważ ściana ABC jest trójkątem równobocznym, to należy poznać związki miarowe jedynie w $1/6$ części odpowiadającym mu równobocznym trójkącie sferycznym ABC.

Stanowią to będzie $1/120$ części opracowanych wielościanów.

Za podstawę wszelkich związków miarowych przyjmuje się długość krawędzi wielościanu i oznacza się ją przez "a".

Na rysunku 30 odcinki $SA=SB=SC=SK=SO$ mają długość równą promieniowi kuli na 20-ścianie foremnym i równą

$$R = \frac{1}{4} \sqrt{2(5+\sqrt{5})} a = 0,9510564a$$

Odcinek SO równy jest promieniowi kuli wpisanej w 20-ścian foremny i ma długość:

$$R_w = \frac{1}{12} \sqrt{3} \cdot (3 + \sqrt{5}) \cdot a = 0,7557615a$$

Kąt bryłowy ω dla 20-ścianu foremnego wynosi $63^\circ 26' 6''$.

Krawędzie ściany $\triangle ABC$ odwzorowują się w rzucie środkowym z punktu S w łuki kół wielkich sfery opisanej na 20-ścianie.

Podzielmy teraz krawędź wielościanu na $n=5$ równych odcinków liniami równoległymi do każdego z boków trójkąta, będącego ścianą 20-ścianu /rys. 31/. W ten sposób podzieliliśmy ścianę 20-ścianu na $n_g=25$ przystających trójkątów równobocznych.

Jeżeli teraz za pomocą rzutu środkowego rzucimy tę zagęszczoną siatkę na współśrodkową kulę, to otrzymamy siatkę sferyczną składającą się z różnej wielkości trójkątów sferycznych. Po połączeniu odcinkami prostymi wierzchołków nowych trójkątów sferycznych wyznaczmy siatkę trójkątną wielościanu, będącego wielokrotnością wewnętrznego podziału 20-ścianu foremnego. Liczbę ścian nowopowstałego wielościanu obliczymy ze wzoru:

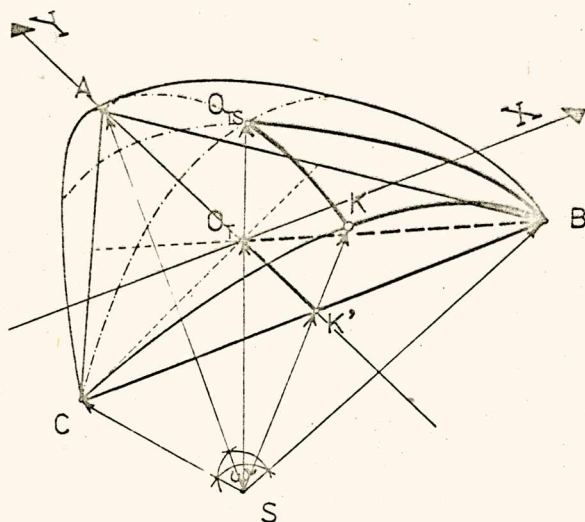
$$W = M \times n^2 \quad [16]$$

gdzie:

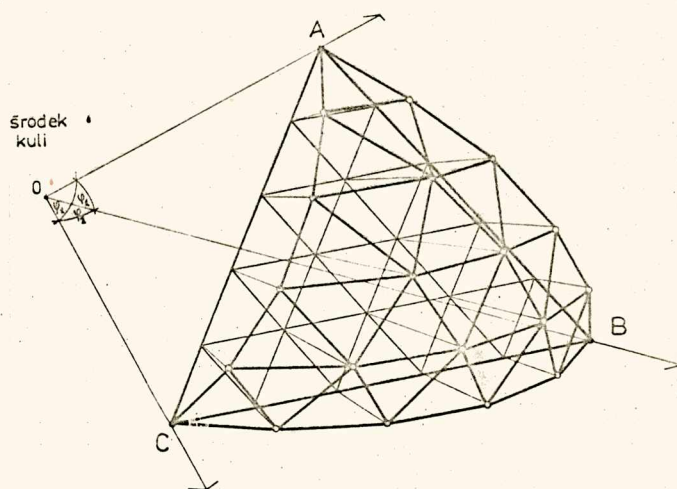
M - liczba ścian wielościanu podstawowego

n - stopień podziału krawędzi wielościanu .

W naszym przykładzie otrzymaliśmy siatkę /20x25/ 500-ścianu.



Rys. 30.

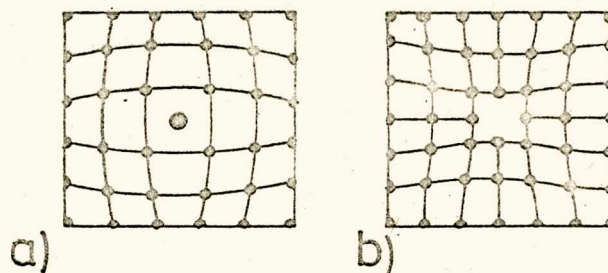


Rys. 31..

Omawiając rzut środkowy zagęszczonej siatki trójkątnej ściany 20-ścianu na odpowiadający jej trójkąt sferyczny zauważyliśmy, że nowootrzymana siatka składa się z odcinków prostych o różnych długościach. Najkrótszymi odcinkami tej siatki są odcinki leżące najbliżej wierzchołka wielościanu, najdłuższymi zaś te, które powstały z rzutowania odcinków o jednakowych długościach leżących w strefie środkowej trójkąta, będącego ścianą wielościanu. Takie rozmieszczenie różnych długości odcinków otrzymanej siatki sferycznej wraz z mechanizmem jej powstawania narzuca pytanie: czy można, zachowując własności rzutu środkowego, uzyskać na powierzchni sferycznej siatkę trójkątną o długościach poszczególnych odcinków nieznacznie różniących się od siebie, odpowiednio deformując siatkę trójkątną na płaskiej ścianie wielościanu.

Oczywistym faktem jest już na wstępie, iż stopień tego zdeformowania zależy od odległości ściany wielościanu od środka kuli i dlatego będzie największy dla ściany 4-ścianu foremnego, a najmniejszy dla ścian 20-ścianu foremnego.

Inspiracją do powstania metody otrzymywania równomiernych siatek sferycznych były obrazy deformacji sieci krystalicznej, wywołane atomem międzywęzłowym /rys. 32a/, oraz luką węzłową w metalu /rys. 32b/. [41]



Rys. 32. Obrazy deformacji sieci krystalicznej.

Przystępując do proponowanej metody należy w pierwszym kroku podzielić łuk koła wielkiego kuli, ograniczonego wierzchołkami $\triangle ABC$ na n równych części. Całość rozumowania przeprowadzimy dla $n=6$, wynikiem którego będzie siatka 720-ścianu $/20 \times 6^2 = 20 \times 36 = 720/$.

Podzielimy więc łuk koła wielkiego kuli, zawartego pomiędzy punktami A i B odcinka stanowiącego krawędź wielościanu na którym opisaliśmy kulę, na $n=6$ równych odcinków.

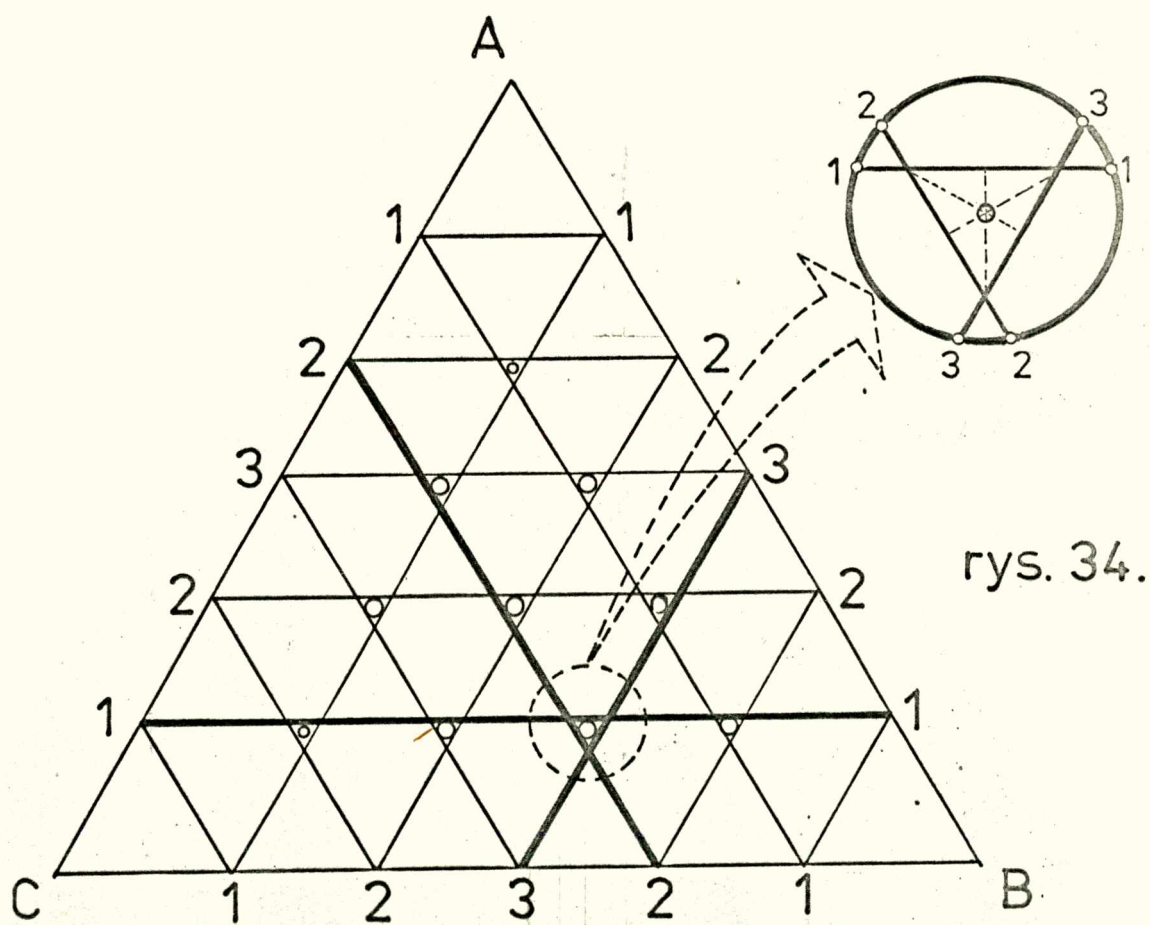
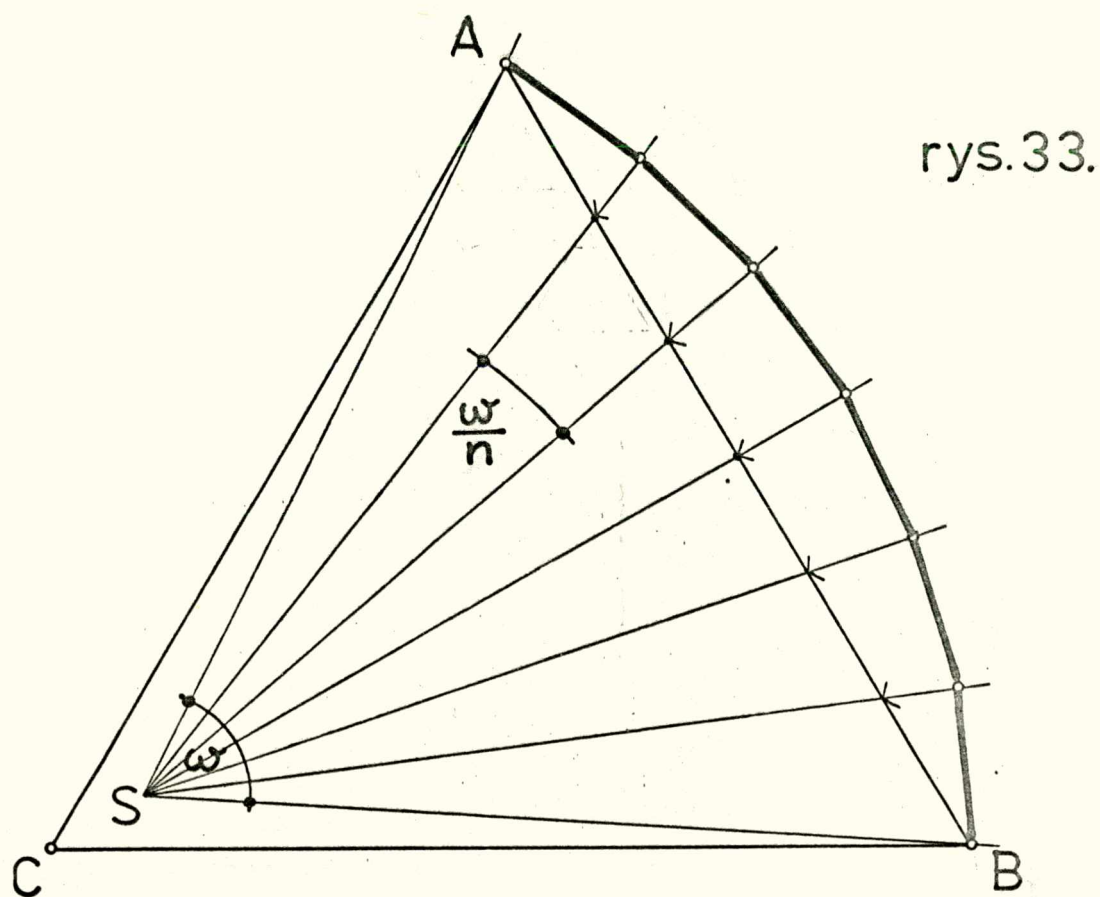
Rysunek 33 jest złożeniem widoku ściany 20-ścianu foremnego z przekrojem kuli płaszczyzną przechodzącą przez wierzchołki wielościanu A i B oraz środek kuli opisanej S.

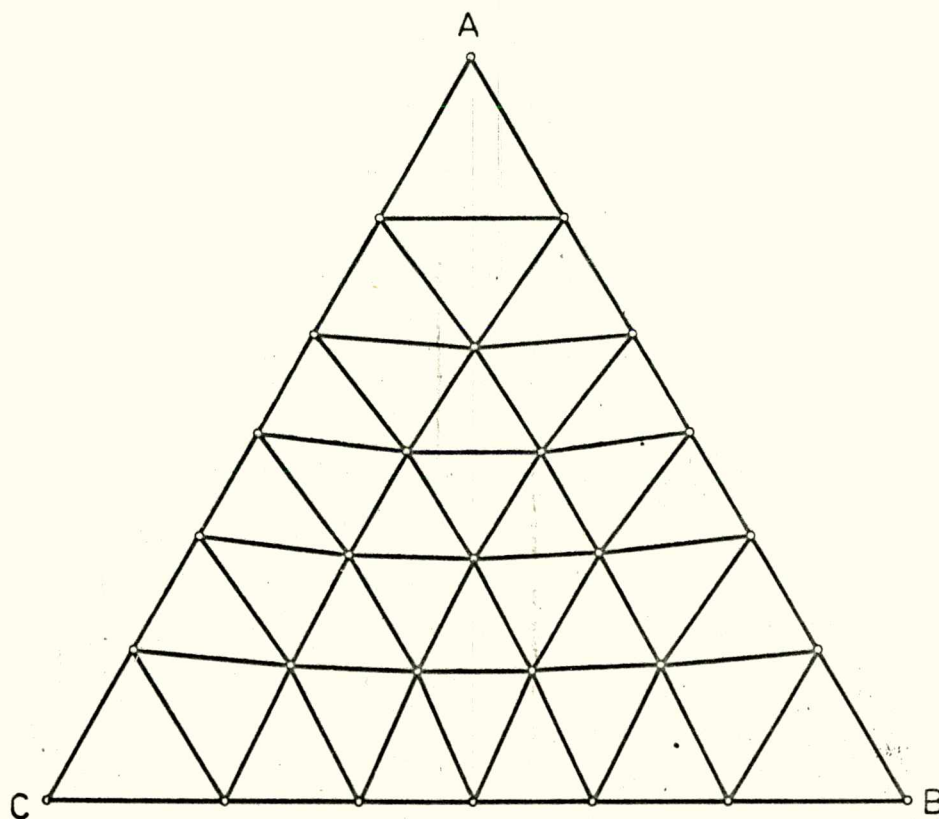
Łuk AB podzielony jest na 6 równych części dzieląc kąt ASB również na 6 równych części. Z punktów równego podziału łuku AB prowadzimy proste ogniskujące się w punkcie S będącym środkiem kuli. Punkty przecięcia się tych prostych z krawędzią AB wielościanu tworzą jej nowe uporządkowanie, właściwe dla zasad rzutu środkowego. Odcinki leżące w pobliżu środka krawędzi AB są najkrótsze, zaś odcinki przylegające do punktów A i B są najdłuższe. Jeżeli teraz ponownie rzutem środkowym z punktu S zrzutujemy tak uporządkowaną krawędź AB, to na odpowiadającym jej łuku koła wielkiego kuli otrzymamy odcinki o równych odległościach.

Trójkąt ABC jest trójkątem równobocznym, zatem takie samo uporządkowanie powstanie na pozostałych krawędziach BC i CA /rys. 34/. Odkładamy to uporządkowanie na wspomnianych krawędziach, następnie łączymy liniami równoległymi do każdej z podstaw $\triangle ABC$ punkty o tych samych numerach porządkowych. Numeracja taka została wprowadzona w celu łatwiejszego określania zdeformowanej siatki trójkątnej na płaskiej ścianie wielościanu. Po połączeniu wszystkich punktów otrzymamy siatkę wewnętrzną, w której występują trójkąty o różnej wielkości. W jednym punkcie przecinają się tylko dwie proste wyznaczone nowym uporządkowaniem krawędzi. Wewnątrz $\triangle ABC$ nie ma ani jednego takiego punktu, w którym schodziłyby się trzy proste. Istnienie takich punktów jest nieodzowne w celu określenia w całym obszarze $\triangle ABC$ nowej siatki trójkątnej. Aby znaleźć te punkty należy wyznaczyć położenie środków ciężkości trójkątnych pól zawartych pomiędzy odcinkami biegnącymi do punktów o tym samym numerze porządkowym /rys. 34/. Wszystkie tak określone pola są małymi trójkątami równobocznymi, stąd środki ciężkości pokrywają się ze środkami kół wpisanych w te trójkąty.

Po połączeniu środków ciężkości odpowiednich wewnętrznych pól, otrzymamy siatkę taką jak na rys. 35.

Wyznaczona tą metodą siatka geometryczna, składająca się z trójkątów o różnej wielkości, zależnej od ich położenia w obrębie płaskiej ściany wielościanu, ma w swej konstrukcji zakodowane własności rzutu środkowego. Teraz, rzutując ze środka kuli na powierzchnię sferyczną o określonym przez typ wielościanu pro-





Rys. 35. Obraz zdeformowanej siatki trójkątnej na płaskiej ścianie 20-ścianu foremnego.

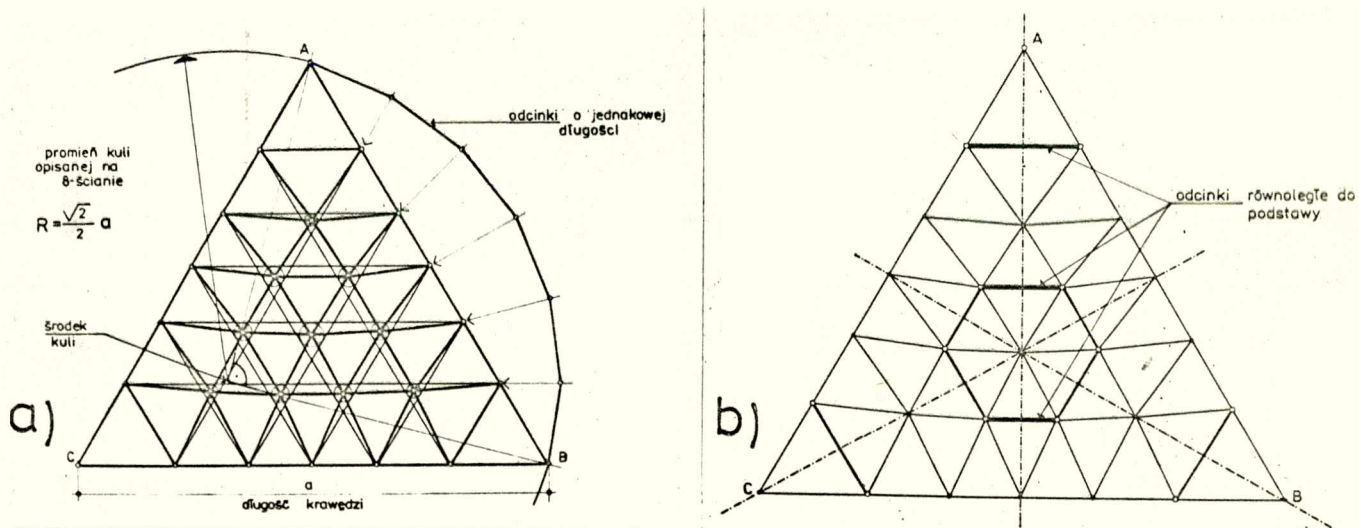
mieniu, otrzymamy jak już wiemy na wszystkich łukach odpowiadających krawędziom wielościanu o równych długościach.

Odpowiednie zdeformowanie siatki trójkątnej na ścianie wielościanu daje nam gwarancję, że po zrzutowaniu wnętrza $\triangle ABC$ na powierzchnię kuli, otrzymamy siatkę sferyczną, której oczkami będą trójkąty zbliżone do trójkątów równobocznych, dlatego też długości ich boków tylko nieznacznie będą różnić się od siebie. Wyznaczanie długości poszczególnych odcinków siatki sferycznej nie jest już trudne i można całość obliczeń sprowadzić do prostego rozwiązywania szeregu płaskich trójkątów, co pokażemy na przykładzie 10-krotnego podziału krawędzi ścian 20-ścianu foremnego.

Otrzymamy więc siatkę sferyczną 2000-ścianu. Znalezienie długości poszczególnych krawędzi tego wielościanu da nam obraz zróżnicowania oczek sferycznych siatek trójkątnych uzyskiwanych tą metodą i sprawdzenie słuszności jej założeń.

Potwierdzeniem prawidłowości założeń i całego toku rozumowania jest już sam rysunek zdeformowanej siatki trójkątnej. Wiemy, iż

zdeformowanie tej siatki będzie większe dla wielościanów o mniejszej ilości ścian i dlatego jest ono bardziej czytelne przy tym samym stopniu podziału krawędzi dla 8-ścianu foremego. Na rys. 36a pokazano w złożeniu całość toku postępowania przy wyznaczaniu wtórnej siatki trójkątnej na ścianie tego wielościanu, zaś rys. 36b przedstawia prawidłowości występujące w rysunku tej siatki.



Rys. 36. a/ Schemat otrzymywania wtórnej siatki trójkątnej dla 8-ścianu foremego.

b/ Prawidłowości występujące we wtórnej siatce trójkątnej.

Pierwszą z tych prawidłowości jest to, że trójkątne pola leżące w centrum ściany wielościanu są najmniejsze. Muszą one być takimi, ponieważ są najbardziej oddalone od powierzchni sferycznej, na którą zostaną odwzorowane rzutem środkowym ze środka danego wielościanu.

Drugą jest to, że przy parzystym stopniu podziału krawędzi wielościanu, odcinki zdeformowanej wewnętrznej siatki trójkątnej przecinające osie symetrii $\triangle ABC$ są do nich prostopadłe, a zatem są równoległe do odpowiednich podstaw tego trójkąta.

Istotną cechą jest również to, że odpowiednie odcinki wewnątrz $\triangle ABC$ układają się w krzywe łamane zwrócone swymi wypukłościami w kierunku każdej z jego podstaw /rys. 36b/.

3.4. Siatka sferyczna 2000-ścianu

Przystępując do wyznaczania siatki sferycznej 2000-ścianu wg omawianej metody na bazie 20-ścianu foremego musimy podzie-

lić łuk koła wielkiego sfery opisanej na tym wielkościanie i ograniczony dwoma sąsiednimi wierzchołkami na $n=10$ równych części /por. rys. 33/. Proste wychodzące z punktów równego podziału łuków i ogniskujące się w środku kuli przecinając krawędzie wielościanu wyznaczają nowe ich uporządkowanie dla zasad rzutu środkowego.

Rysunek 37 przedstawia 1/6 część ściany 20-ścianu foremnego. Jednostką wszelkich związków miarowych jest tu długość krawędzi wielościanu i jak poprzednio oznaczamy ją przez "a". Punkty 1 + 6 na krawędzi BC wyznaczone podziałem kąta $\omega = 63^{\circ}26'6''$ na 10 równych części mają w płaszczyźnie XOY następujące współrzędne:

punkt 1' = B'	[0,5a	; 0,0a]
punkt 2'	[0,3836994a	; 0,0a]
punkt 3'	[0,2790487a	; 0,0a]
punkt 4'	[0,1821271a	; 0,0a]
punkt 5'	[0,0899379a	; 0,0a]
punkt 6'	[0,0a	; 0,0a]

Mając współrzędne podanych wyżej punktów łatwo można obliczyć współrzędne punktu 21 i punktu 31 na krawędzi AB.

Współrzędne y-kowe tych punktów będą równaniami prostych d_1 i d_2 /rys. 37/. Współrzędne środków ciężkości odpowiednich wewnętrznych trójkątów, tak jak dla przykładowo wybranego punktu 16' wyznaczamy rozwiązując układy równań prostych podanych niżej:

$$\begin{cases} b_1 & \left\{ \begin{array}{l} y = -\sqrt{3}x + 0,3154533a \text{ /przechodzi przez punkt 4'} \\ b_2 & \left\{ \begin{array}{l} y = -\sqrt{3}x \end{array} \right. \end{array} \right. \end{cases} \quad \text{/przechodzi przez punkt 6'=K'/,}$$

z rozwiązania układu tych równań otrzymujemy równanie prostej:

$$x=e_1 \quad x = 0,1360324a$$

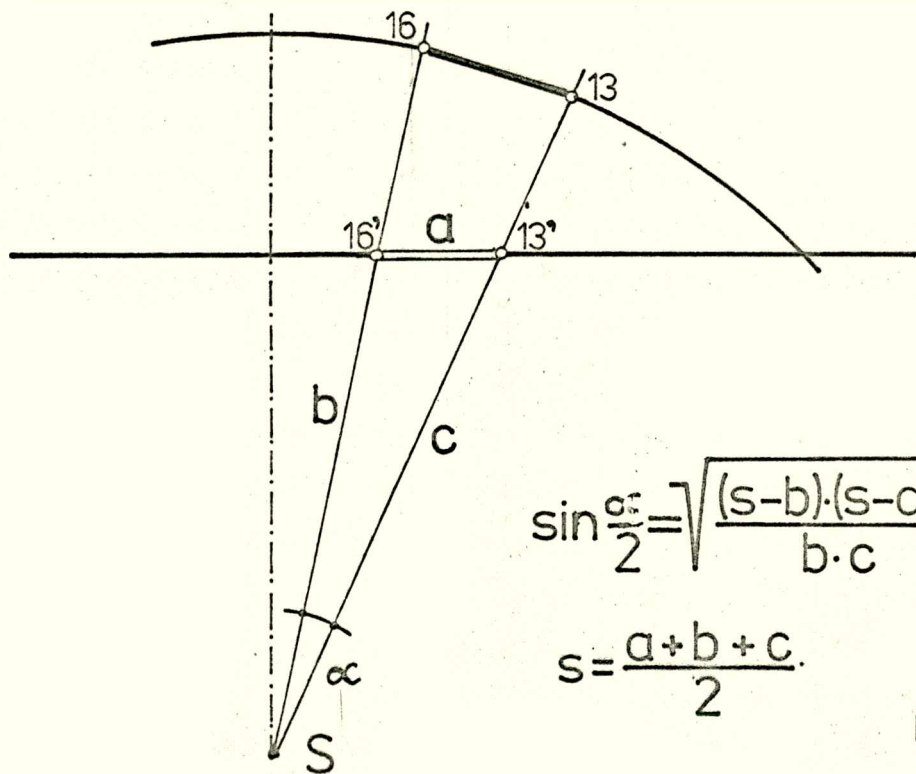
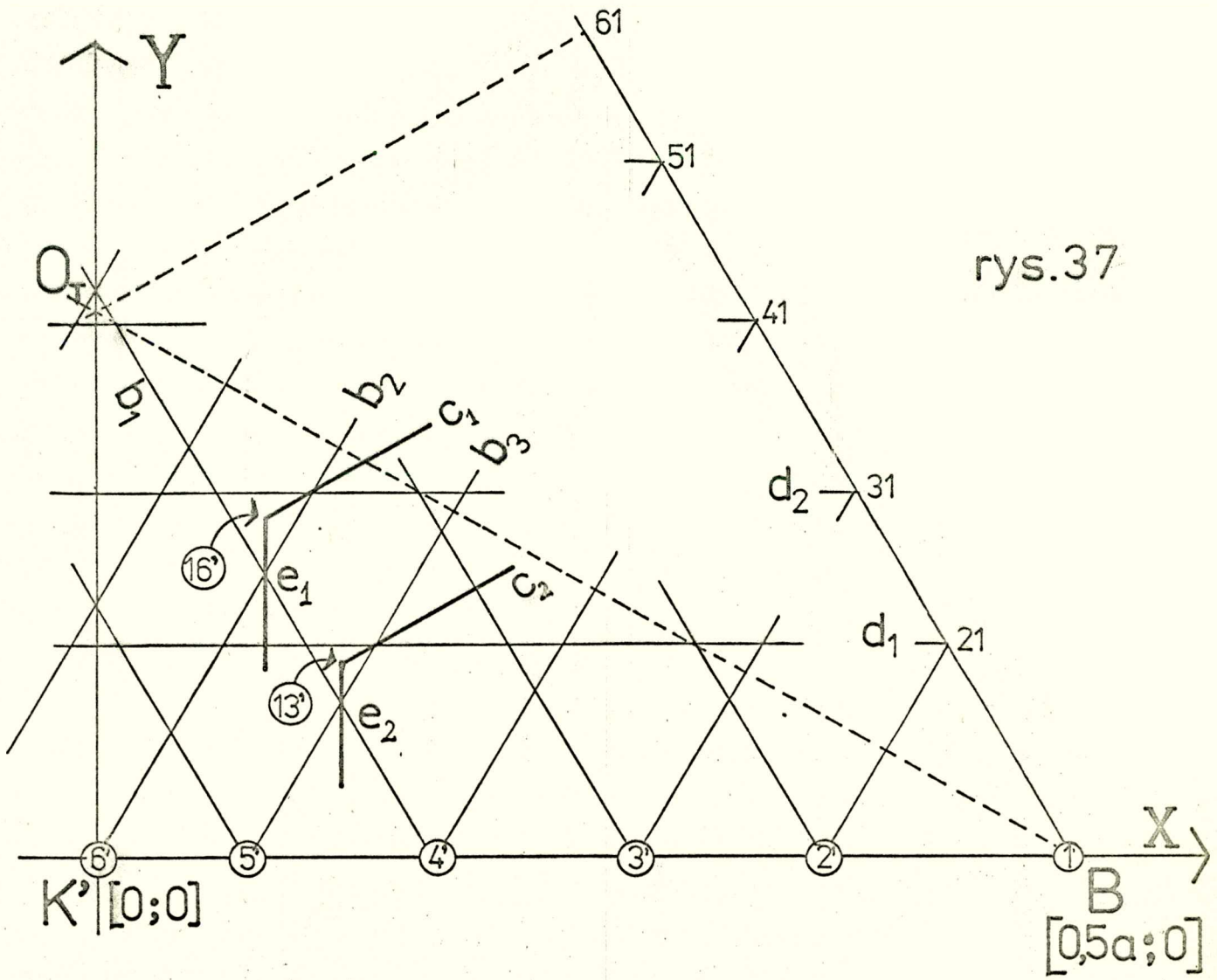
... zaś z układu równań prostych:

$$b^2 \quad y = \sqrt{3}x \quad \text{/przechodzi przez punkt 6'=K'/}$$

$$d^2 \quad y = 0,1913496a \quad \text{/współrzędna y - kowa punktu 31/}$$

otrzymujemy równanie prostej C^1 :

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + h_2 \quad \text{/przechodzi przez punkt przecięcia się prostych } b_2 \text{ i } d_2/.$$



$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b) \cdot (s-c)}{b \cdot c}}$$

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

rys.38

Tak samo postępujemy przy wyznaczaniu współrzędnych punktu 13', sąsiadującego z punktem 16', korzystając z układów równań prostych b_1 i b_2 oraz e_2 i c_2 :

Po wyliczeniu równań i rozwiązaniu podanych układów znajdujemy współrzędne punktów:

$$13' [0,1360324a \quad ; \quad 0,0973858a]$$

$$16' [0,0910635a \quad ; \quad 0,1801419a]$$

Odległość między tymi punktami na płaskim $\triangle ABC$ jest równa:

$$i = \sqrt{x_2 - x_1 / 2 + y_2 - y_1 / 2} = 0,0973858a$$

Stosując ogólny wzór podany na rys. 38 i po odpowiednim przekształceniu wyniku, łatwo obliczymy połowę odległości między punktami 13-16 na powierzchni sfery.

Podwojona a więc właściwa odległość tych punktów wynosi:

$$j = 0,1152058a$$

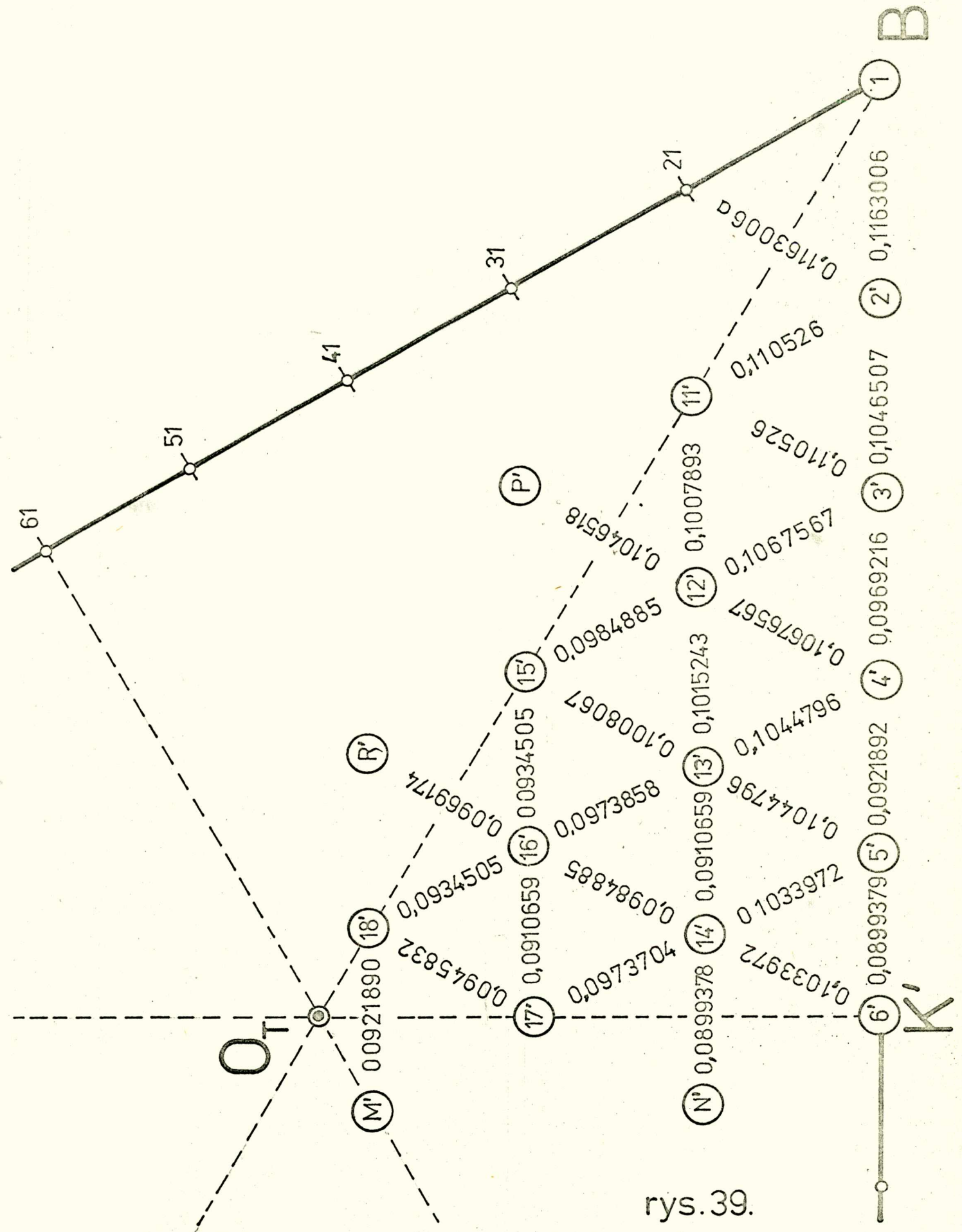
Na rys. 39 przedstawiono wszystkie odległości pomiędzy sąsiadującymi ze sobą punktami występujące w 1/6 części płaskiego trójkąta ABC, zaś na rys. 40 pokazano związki miarowe 1/120 części 2000-ścianu. Poprawność tych obliczeń sprawdzona i potwierdzona została przy pomocy opracowanego programu w języku FORTRAN 1900 na EMC, którego schemat i omówienie podane zostały w aneksie.

Procedura postępowania dla tego programu jest nieco inna od zaprezentowanego powyżej i opiera się w swej drugiej części na bezpośrednim rzutowaniu węzłów zdeformowanej siatki trójkątnej ściany wielościanu na powierzchnię kuli.

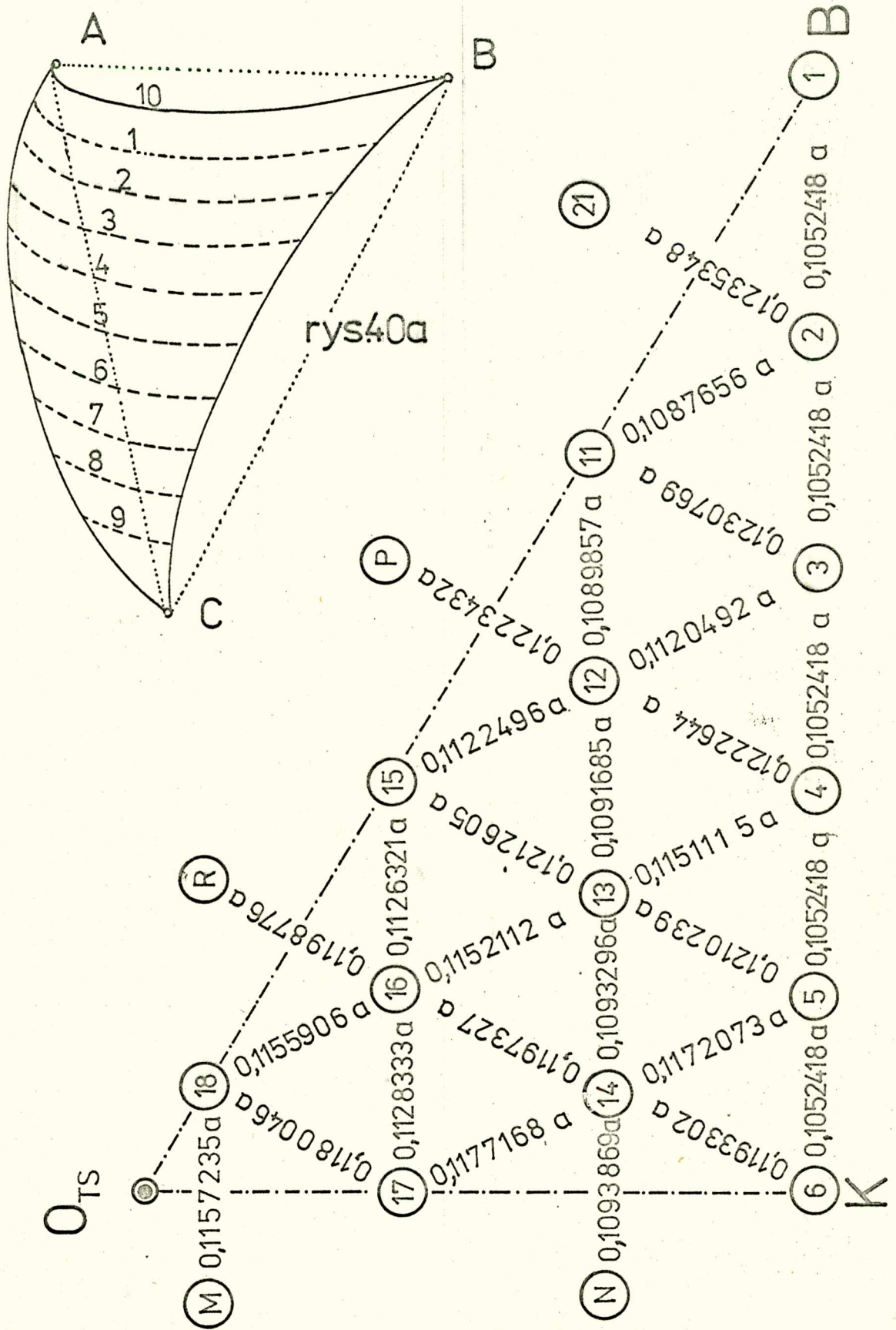
Określa się w ten sposób współrzędne sferyczne wierzchołków nowopowstających wielościanów, co stanowi podstawę do obliczenia wszystkich odległości pomiędzy sąsiadującymi wierzchołkami.

Z analizy rys. 40 wynika, że długości odcinków leżących w pasach, nazwijmy je równoległych do podstaw trójkąta ABC, różnią się tak nieznacznie od siebie, że można je uznać za odcinki o równych długościach. Różnice te mogą być rezultatem błędów pochodzących z niedokładności obliczeń.* Tak więc dla 10-krotnego podziału boków $\triangle ABC$ uzyskamy w całej siatce sfe-

* Obliczenia długości krawędzi 2000-ścianu przeprowadzone były na kalkulatorze Santronic 81 SR.



rys. 39.



rycznej zaledwie 10 różnych rodzajów prętów o różnych długościach mając na uwadze wykorzystywanie tej metody w projektowaniu konstrukcji prętowych /rys. 40a/.

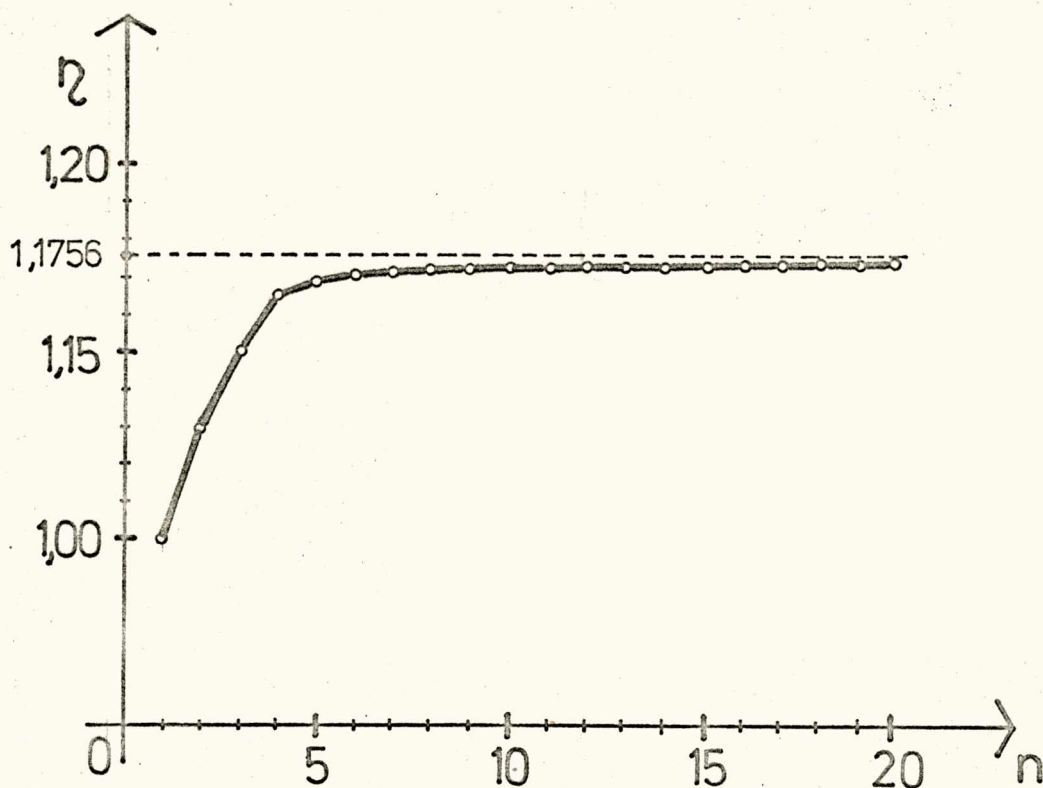
Miara zróżnicowania długości odcinków całej siatki sferycznej jest współczynnik η określony jako stosunek długości odcinka najdłuższego do długości odcinka najkrótszego siatki. Z rys. 40 wynika, iż najdłuższymi odcinkami są odcinki leżące tuż przy wierzchołkach trójkąta sferycznego, tak jak odcinek 2-21 dla schematu krawędzi 2000-ścianu; odcinkami najkrótszymi są odcinki leżące na łukach kół wielkich sfery i odpowiadające krawędziom 20-ścianu foremnego /rys. 1-2/.

Współczynnik η dla 10-krótnego podziału boków trójkąta sferycznego równy jest:

$$\eta = \frac{0,1235300a}{0,1052418a} = 1,173731$$

Korzystając z programu na maszynę cyfrową zbadano charakterystykę zmian wartości współczynnika η .

Zależność η od stopnia podziału krawędzi 20-ścianu foremnego na n równych odcinków i pokazano na rys. 41.



Rys. 41. Zależność między stopniem podziału boków trójkąta sferycznego $/n/$ a współczynnikiem $/\eta/$ dla siatek sferycznych opracowanych na bazie 20-ścianu foremnego metodą deformacji siatki wtórnej.

Na podstawie usytuowania odcinków najdłuższych i najkrótszych w całej siatce oraz z przebiegu wzrostu współczynnika η w zależności od n , możemy stwierdzić że w prezentowanej metodzie przy $n \rightarrow \infty$ współczynnik η osiąga wartość graniczną dla 20-ścianu foremnego tzn. $\eta = 1,1756$. [31]

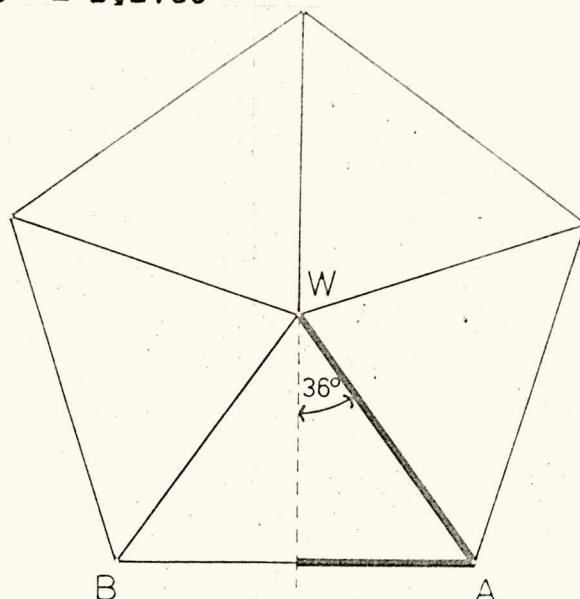
Graniczną wartość współczynnika η przy $n \rightarrow \infty$ wyznaczyć można na podstawie prostych zależności trygonometrycznych, z uwagi na usytuowanie odcinków najdłuższych i najkrótszych trójkątnej siatki sferycznej w wierzchołkach wielościanu.

W każdym wierzchołku 20-ścianu foremnego schodzi się pięć trójkątów równobocznych i przy podziale odpowiadającym krawędziom wielościanu łuków kół wielkich na $n \rightarrow \infty$ równych odcinków prostych, odcinki znajdujące się tuż przy wierzchołku będą leżeć niemal na jednej płaszczyźnie, zatem miary tych odcinków dążyć będą do miar boków i wewnętrznych przekątnych występujących w pięciokącie prawidłowym /rys. 42/.

Odcinkiem najdłuższym jest odcinek BA, najkrótszym np. odcinek WA.

Ponieważ kąt BWA ma wartość równą 72° , zatem stosunek długości odcinka BA do długości odcinka WA wyliczymy ze wzoru:

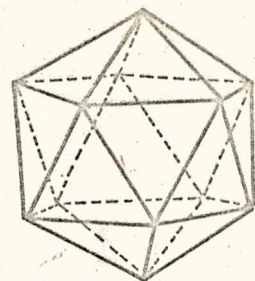
$$\eta = 2\sin 36^\circ = 1,1756$$



Rys. 42. Długości odcinków w wierzchołku 20-ścianu przy $n \rightarrow \infty$.

Pełną charakterystykę siatek sferycznych /wielościanów/ według podanych w punkcie 3.2. kryteriów zawiera tablica 2.

- c - liczba wszystkich wierzchołków
 c_k - liczba różnych kątów bryłowych
 e - liczba wszystkich krawędzi wielościanu
 e_k - liczba różnych krawędzi
 l - liczba wszystkich ścian wielościanu
 l_k - liczba różnych ścian
 s_k - liczba różnych kątów płaskich zawartych
 pomiędzy krawędziami ścian wielościanu
 η - stosunek długości odcinka najdłuższego
 do dk. odcinka najkrótszego



(3,3,3,3)

TABLICA 2

n	c	c_k	e	e_k	l	l_k	s_k	η
1	12	1	30	1	20	1	1	1,00
2	42	2	120	2	80	2	3	1,1308298
3	92	3	270	3	180	3	6	1,1556196
4	162	5	480	4	320	5	10	1,1643409
5	252	7	750	5	500	7	15	1,1683931
6	362	9	1080	6	720	9	21	1,1705856
7	492	12	1470	7	980	12	28	1,17193413
8	642	15	1920	8	1280	15	36	1,17277718
9	812	18	2430	9	1620	18	45	1,17337132
10	1002	22	3000	10	2000	22	55	1,1738777
11	1212	26	3630	11	2420	26	66	1,17416668
12	1442	30	4320	12	2880	30	78	1,17435169
13	1692	35	5070	13	3380	35	91	1,17454815
14	1962	40	5880	14	3920	40	105	1,17477512
15	2252	45	6750	15	4500	45	130	1,1748304
16	2562	51	7680	16	5120	51	146	1,1749086
17	2892	57	8670	17	5780	57	163	1,17511845
18	3242	63	9720	18	6480	63	181	1,1750583
19	3612	70	10830	19	7220	70	200	1,1752014
20	4002	77	12000	20	8000	77	220	1,1753339

Wielkości niektórych współczynników w zależności od n wyrażają się następującymi wzorami:

$$c = 10n^2 + 2$$

$$e = 30n^2$$

$$e_k = n$$

$$l = 20n^2$$

Wartości pozostałych współczynników zostały wyliczone indywidualnie dla każdego z n od $n=1$ do $n=20$, zaś wartości współczynnika η dla tych przypadków wyliczono przy pomocy programu na maszynie cyfrowej.

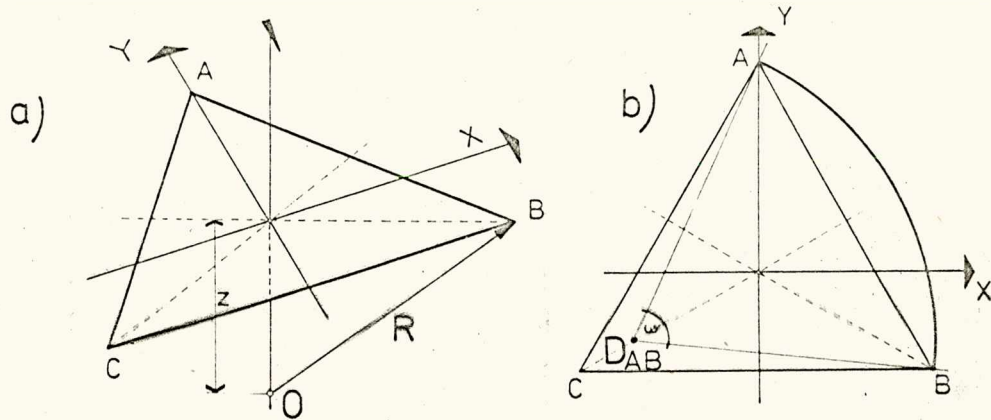
3.5. Siatki sferyczne wielościanów uzyskiwane metodą deformacji siatki wtórnej na bazie 8-ścianu foremnego

Podstawą do określenia siatek sferycznych wielościanu powstałych na bazie 8-ścianu jak i 20-ścianu foremnego jest program na maszynę cyfrową opracowany dla metody deformacji siatki wtórnej, którego szczegółowy opis wraz z całym programem i niezbędnymi wydrukami podano w aneksie.

Danymi wyjściowymi dla tego programu są:

- współrzędne wierzchołków trójkątnej ściany ABC podane w płaszczyźnie XOY
- współrzędne punktów D_{AB} , D_{BC} i D_{CA} odpowiadających położeniom środka kuli opisanej na danym wielościanie i odpowiadającym kolejnym krawędziom ABC /rys. 43/;
- odległość między punktem D_{AB} a punktem A jest równa odległości między punktem D_{AB} a punktem B i równa promieniowi kuli opisanej na wielościanie,
- współrzędne położenia środka kuli na osi OZ /Z/,
- długość promienia kuli opisanej /R/,
- stopień podziału boków trójkąta sferycznego /n/.

Tak więc danymi wejściowymi omawianego programu dla obliczeń siatek sferycznych wielościanów powstających na bazie



Rys. 43. Położenie punktów, których współrzędne stanowią dane wejściowe programu na EMC.

8-ścianu foremnego są:

- współrzędne trójkątnej ściany na płaszczyźnie XOY

A	[	0,0a	;	0,5773502a	]
B	[	0,5a	;	- 0,2886751a	]
C	[	- 0,5a	;	- 0,2886751a	]

- współrzędne punktów "D"

D_{AB}	[	- 0,1830125 a	;	- 0,1026623 a	]
D_{BC}	[	0,0 a	;	0,2113249 a	]
D_{CA}	[	0,1830125 a	;	- 0,1056623 a	]

- współrzędne środka kuli opisanej na 8-ścianie foremnym

$$Z \quad [0 ; 0 ; - 0,4082482 a]$$

- długość promienia kuli opisanej

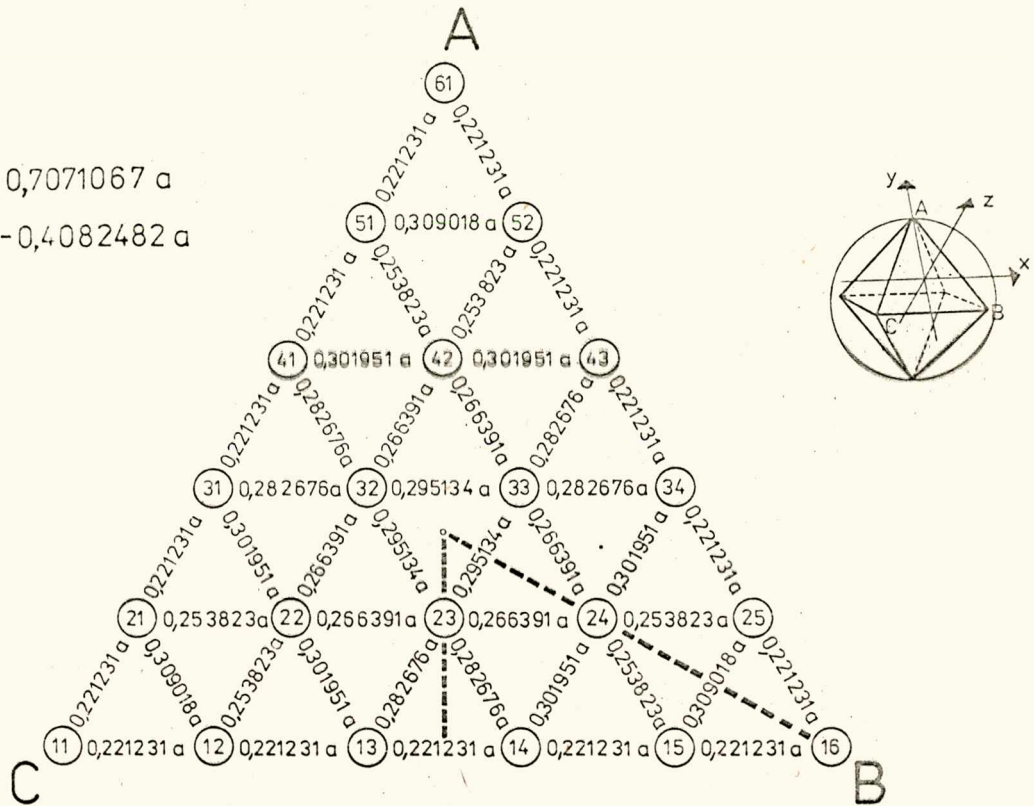
$$R = 0,7071066 a$$

Na rysunku 44 przedstawiono dla przykładu związki miarowe $8 \times 5^2 = 8 \times 25 = 200$ ścianu opracowane na bazie 8-ścianu foremnego stanowiącego 1/8 części całego wielościanu.

Wyniki otrzymane na podstawie tego programu pozwoliły na podanie charakterystyk rodziny wielościanów powstałych przy pomocy metody deformacji siatki wtórnej na bazie 8-ścianu foremnego i przedstawiono je w tabelicy 3.

$$R = 0,7071067 a$$

$$Z = -0,4082482 a$$



Rys. 44. Związki miarowe w 1/8 części 200-ścianu.

Wielkości niektórych współczynników w zależności od n wyrażają się następującymi wzorami:

$$c = 4n^2 + 2$$

$$e = 12n^2$$

$$e_k = n$$

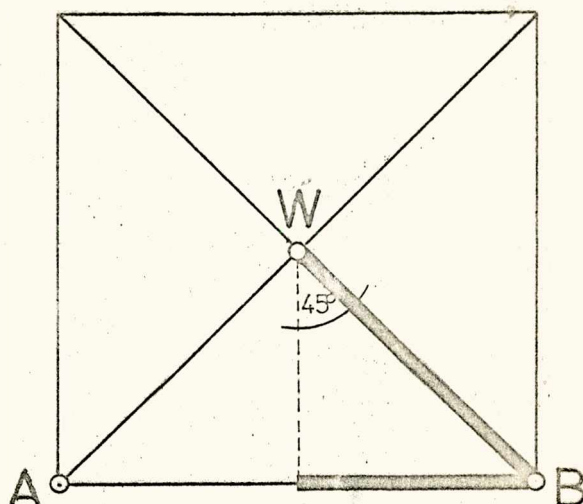
$$l = 8n^2$$

Wartości pozostałych współczynników tak jak poprzednio wyliczone zostały indywidualnie dla każdego n od $n=1$ do $n=20$.

Podobnie jak dla siatek sferycznych powstałych w metodzie deformacji siatki wtórnej na bazie 20-ścianu foremnego możemy również i tu wyznaczyć górną, graniczną wartość współczynnika η . Ponieważ odcinki najdłuższe i najkrótsze usytuowane są w wierzchołkach wielościanu jakim jest 8-ścian foremny, zatem w każdym jego wierzchołku schodzą się cztery równoboczne trójkąty sferyczne. Przy podziale łuków odpowiadających krawędziom wielościanu na $n \rightarrow \infty$ równych części, odcinki leżące w sąsiedztwie każdego wierzchołka leżeć będą niemal na jednej płaszczyźnie /rys. 45/. Odcinkiem najdłuższym będzie odcinek WB, najkrótszym zaś odcinek AB, a ponieważ miara kąta AWB dążyć będzie do war-

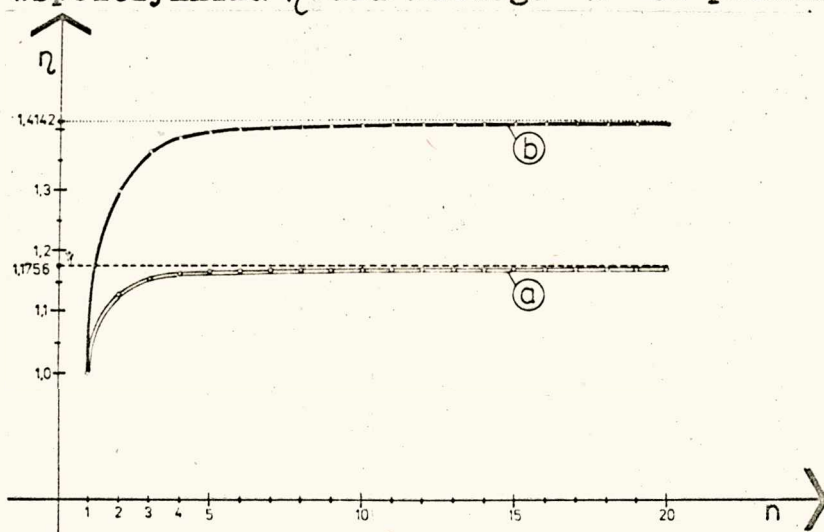
tości 45° , stąd współczynnik η
dla $n \rightarrow \infty$ osiągnie wartość:

$$\eta = 2 \sin 45^\circ = 1,4142135 \sqrt{2}/$$



Rys. 45.

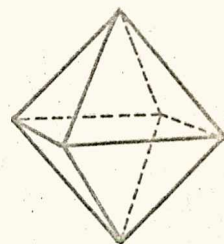
Z analizy porównawczej tablicy 2 z tablicą 3, charakteryzujących rodziny wielościanów określonych metodą deformacji siatki wtórnej na bazie 20-ścianu, i 8-ścianu wynika, że także w prezentowanej metodzie najlepszymi pod każdym względem są siatki powstałe na bazie 20-ścianu foremego. Jednym z najważniejszych kryteriów dla takiej oceny jest przebieg wzrostu wielkości współczynnika η dla każdego n co pokazano na rys. 46.



Rys. 46. Wielkości graniczne oraz przebieg współczynnika η w zależności od n dla siatek sferycznych powstałych na bazie a/20-ścianu foremnego b/8-ścianu foremnego.

W metodzie deformacji siatki wtórnej dla siatek sferycznych rozpiętych nad trójkątnymi ścianami wielościanów, wartość współczynnika η określona jest przez stosunek długości odcinka leżącego najbliżej wierzchołka, jako najdłuższego w całej siat-

- c - liczba wszystkich wierzchołków
 c_k - liczba różnych kątów bryłowych
 e - liczba wszystkich krawędzi wielościanu
 e_k - liczba różnych krawędzi
 l - liczba wszystkich ścian wielościanu
 l_k - liczba różnych ścian
 s_k - liczba różnych kątów płaskich zawartych
 pomiędzy krawędziami ścian wielościanu
 η - stosunek długości odcinka najdłuższego
 do dł. odcinka najkrótszego



(3,3,3,3)

TABLICA 3

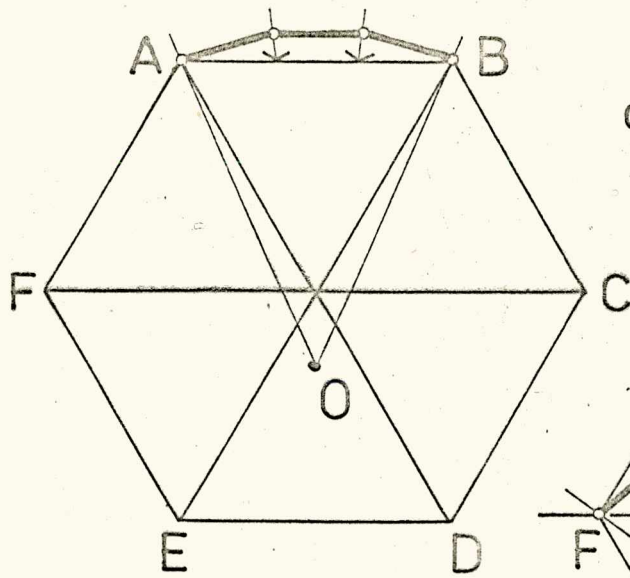
n	c	c_k	e	e_k	l	l_k	s_k	η
1	6	1	12	1	8	1	1	1,00
2	18	2	48	2	32	2	3	1,3065662
3	38	3	108	3	72	3	6	1,3660297
4	58	5	192	4	128	5	10	1,3870525
5	102	7	300	5	200	7	15	1,39681911
6	146	9	432	6	288	9	21	1,4021329
7	198	12	588	7	412	12	28	1,4053497
8	258	15	768	8	512	15	36	1,4074287
9	326	18	972	9	648	18	45	1,4088468
10	402	22	1200	10	800	22	55	1,4099283
11	486	26	1452	11	968	26	66	1,4106407
12	578	30	1728	12	1152	30	78	1,4112253
13	678	35	2028	13	1352	35	91	1,4117202
14	786	40	2332	14	1568	40	105	1,41214085
15	902	45	2700	15	1800	45	130	1,4123563
16	1026	51	3072	16	2048	51	146	1,4126567
17	1158	57	3468	17	2312	57	163	1,4127540
18	1298	63	3888	18	2592	63	181	1,4130020
19	1526	70	4332	19	3048	70	200	1,41310310
20	1602	77	4800	20	3200	77	220	1,4134264

ce, do długości jednego z odcinków leżących na łukach odpowiadających krawędziom wielościanu, jako najkrótszym odcinkom siatki sferycznej i osiąga tym samym najmniejsze, graniczne wartości η dla prezentowanej grupy wielościanów. Ważnym jest również to, że liczba różnych długości odcinków oznaczona przez e_k równa jest liczbie określającej stopień podziału boków równobocznego trójkąta sferycznego na n równych części. Ma to istotne znaczenie w projektowaniu i wykonywaniu prętowych powłok kulistych.

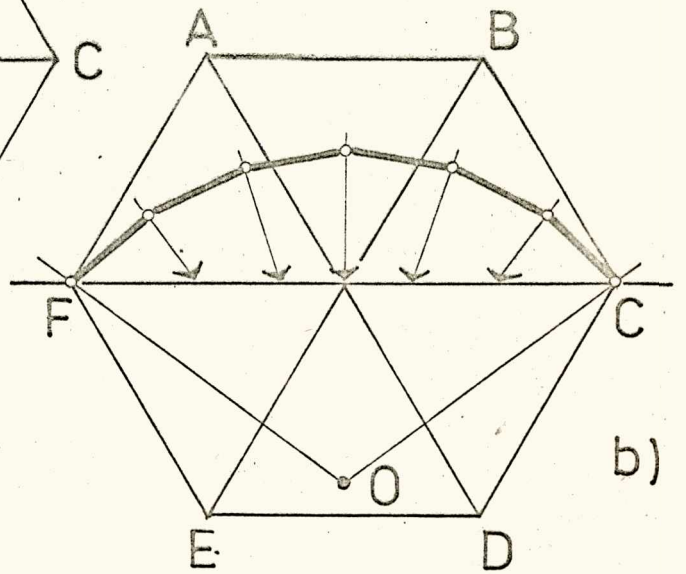
3.6. Regularne siatki sferyczne rozpięte nad rzutem sześciokątnym i czworokątnym

Metodę deformacji siatki wtórnej można łatwo przystosować do określania regularnych siatek sferycznych rozpiętych nad różnymi typami wielokątów poszerzając tym samym bazę wielościanów podstawowych. Znany już schemat postępowania przy wyznaczaniu równomiernej siatki sferycznej przeprowadzimy dla rzutu sześciokątnego, zbudowanego z sześciu przystających trójkątów równobocznych. Rysunki 47 a i b są złożeniami rzutu podstawy z przekrojami przez sferę, wyznaczonymi odcinkami AB i FC oraz punktem O. Łuk AB dzielimy na n równych części, zaś łuk FC, odpowiadający przekątnej FC, dzielimy na $2n$ równych części. Nowe uporządkowanie krawędzi AB odkładamy na pozostałych bokach sześciokąta ABCDEF, a uporządkowanie przekątnej FC wprowadzamy na przekątnych AD i BE. Dwie fazy tej operacji są tu konieczne ponieważ kąt FOC jest więcej niż dwa razy większy od kąta AOB, mimo iż odległości $AO=BO=FO=CO=R$, gdzie R jest dowolnie przyjętym promieniem kuli.

Mając tak uporządkowane boki oraz przekątne sześciokąta ABCDEF przystępujemy do wykreślenia zdeformowanej siatki trójkątnej. Przeprowadzimy tę czynność podobnie jak dla trójkątnej ściany wielościanu, z tym, że poszukiwane trójkąty są nieco mniejsze /rys. 48/. Następnie rzutujemy zdeformowaną siatkę na sferę o złożonym promieniu oraz strzałce /por. rys. 30/. Otrzymamy w ten sposób siatkę sferyczną równomierną. Różnice w długościach poszczególnych odcinków siatki mogą być nieco większe, gdyż przy wprowadzaniu nowego uporządkowania potrzeb-

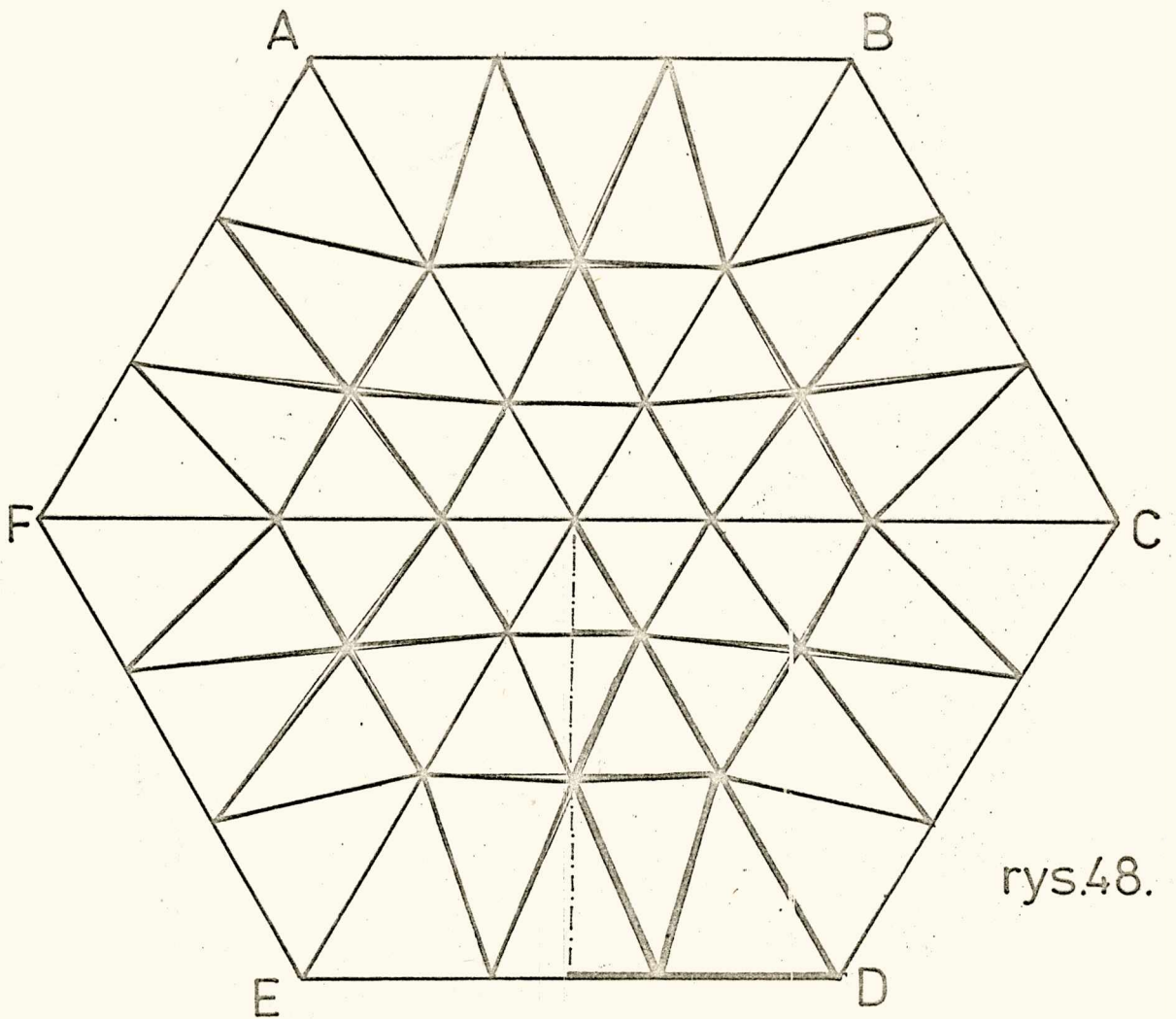


a)



b)

rys.47



rys.48.

nych krawędzi pojawiają się dwa rodzaje różnych długości odcinków wyjściowych, tzn. długości boków sześciokąta oraz jego przekątnej. Zróżnicowanie długości odcinków określonych na przekątnych sześciokąta ABCDEF jest większe od zróżnicowania długości podobnych odcinków na jego bokach. Aby móc zbudować siatkę sferyczną dla tego typu rzutu musimy poznać związki miarowe jedynie w 1/12 jego obszaru /rys. 48/.

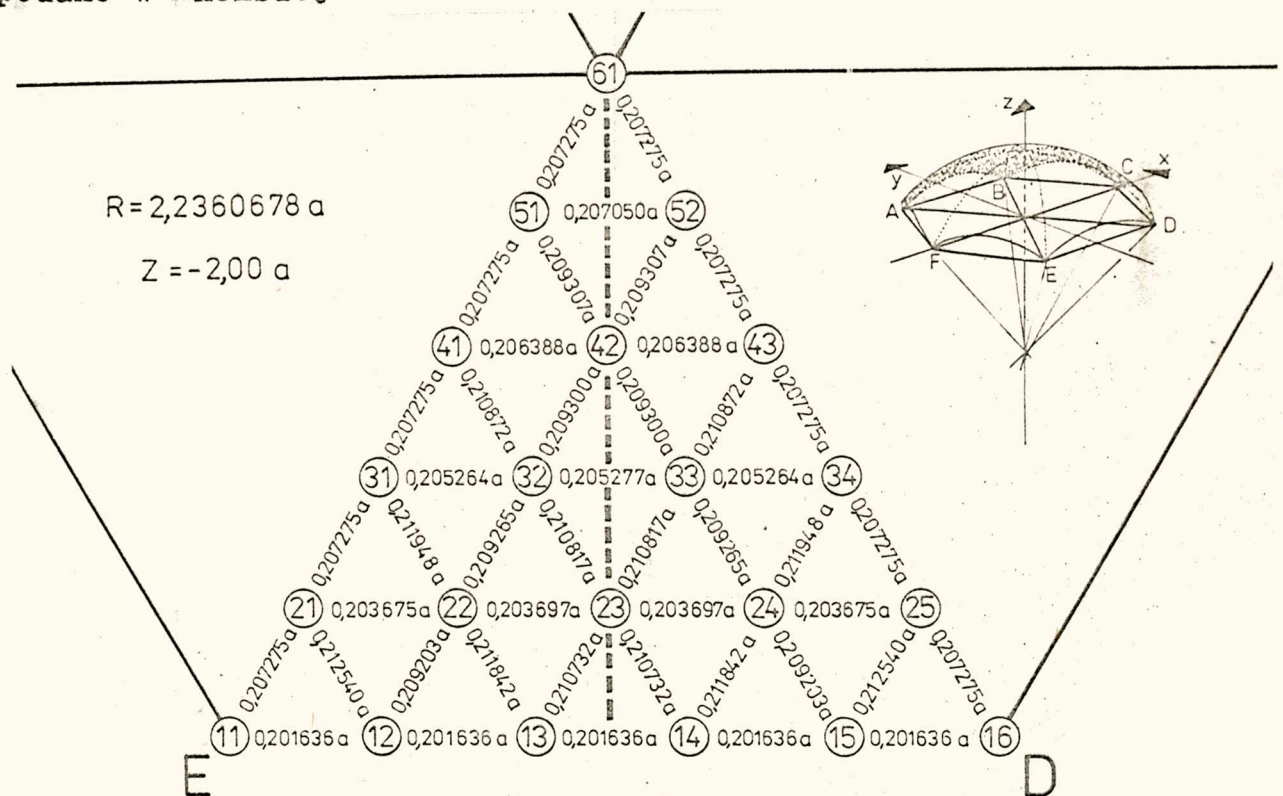
Celem sprawdzenia poprawności przyjętych założeń i całego toku postępowania określono trójkątną siatkę sferyczną rozpiętą na stosunkowo blisko odległej od płaszczyzny sześciokąta ABCDEF powierzchni kuli. Całość obliczeń przeprowadzono na EMC dla:

$$R = 2,2360678 \text{ a}$$

oraz

$$Z = -2,00 \text{ a}$$

Pozostałe dane wejściowe wraz z odpowiadającymi im wydrukami podano w Aneksie:



Rys. 49. Związki miarowe trójkątnej siatki sferycznej rozpiętej nad sześciokątem ABCDEF, określonej za pomocą metody deformacji siatki wtórnej.

Określenie siatek sferycznych rozpiętych nad tego typu rzutem jest przykładem zastosowania proponowanej metody dla

wprowadzenia regularnych podziałów wewnątrz równoramiennych trójkątów sferycznych. Za podstawę wszelkich związków miarowych przyjęto długość boków sześciokąta ABCDEF i oznaczono również przez "a". Ponieważ jest on sześciokątem prawidłowym jego przekątne będą miały długość równą 2 a.

Z przedstawionych na rys. 49 związków miarowych wynika, że odcinki o długościach dających się określić mianem jednakowych układają się wewnątrz równoramiennego trójkąta sferycznego E61D w dwie główne grupy linii. Jedna z nich równoległa do podstawy tego trójkąta wyznaczonej punktami E i D, druga równoległa jest równocześnie do obu pozostałych jego boków tzn. do boków E61 i D61. Dla podziału łuków bocznych równoramiennego trójkąta sferycznego E61D na $n = 5$ równych części, liczba odcinków siatki o różnych długościach wynosi:

$$e_k = 2n$$

Odcinki najdłuższe w całej siatce usytuowane są tuż obok każdego z punktów podparcia czaszy, np. odcinek 15-25; odcinki najkrótsze leżą na łukach kół wielkich odpowiadających w rzucie środkowym krawędziom bocznym sześciokąta ABCDEF i ich reprezentantem jest odcinek, zawarty między punktami 15-16, leżący na łuku ED. Wartość współczynnika η dla tego przypadku równa jest:

$$\eta_s = \frac{0,212540 \text{ a}}{0,201636 \text{ a}} = 1,0540776$$

i dla $n = 25$ osiąga wartość $\eta_{25} = 1,09533119$

Stosunkowo mała wartość η wiąże się z niewielką wyniosłością projektowanego przekrycia. Oszacowanie wartości granicznej współczynnika napotyka na duże trudności, mimo tak korzystnego usytuowania odcinków o ekstremalnych długościach. Z przeprowadzonych analiz różnych siatek sferycznych rozpiętych nad tym rzutem wynika, iż graniczna wartość η jest funkcją stosunku długości promienia sfery, do odległości środka sfery od płaszczyzny ABCDEF. Siatki sferyczne opisane na kuli, której środek leży bliżej tej płaszczyzny odznaczają się, dla tych samych n większą wartością η , od siatek wyznaczonych na sferach, których środki są bardziej oddalone od płaszczyzny rzutu.

Zupełnie podobnie przedstawiać się będzie określenie siatek sferycznych rozpiętych nad 5-kątem prawidłowym. Dla tego typu

rzutu przyjmujemy wartość R równą długości promienia kuli opisanej na 12-ścianie foremnym, zaś wartość Z równa będzie długości promienia kuli wpisanej w ten wielościan. Całość obliczeń na EMC wykonano dla następujących danych:

punkt D [- 0,5 a ; - 0,6881909 a]

punkt C [0,5 a ; - 0,6881909 a]

punkt 61 [0 ; 0]

D_{DC} [0 ; 0,6208252 a]

D_{C61} [- 0,9008536 a ; - 0,6545084 a]

D_{D61} [0,9008536 a ; - 0,6545084 a]

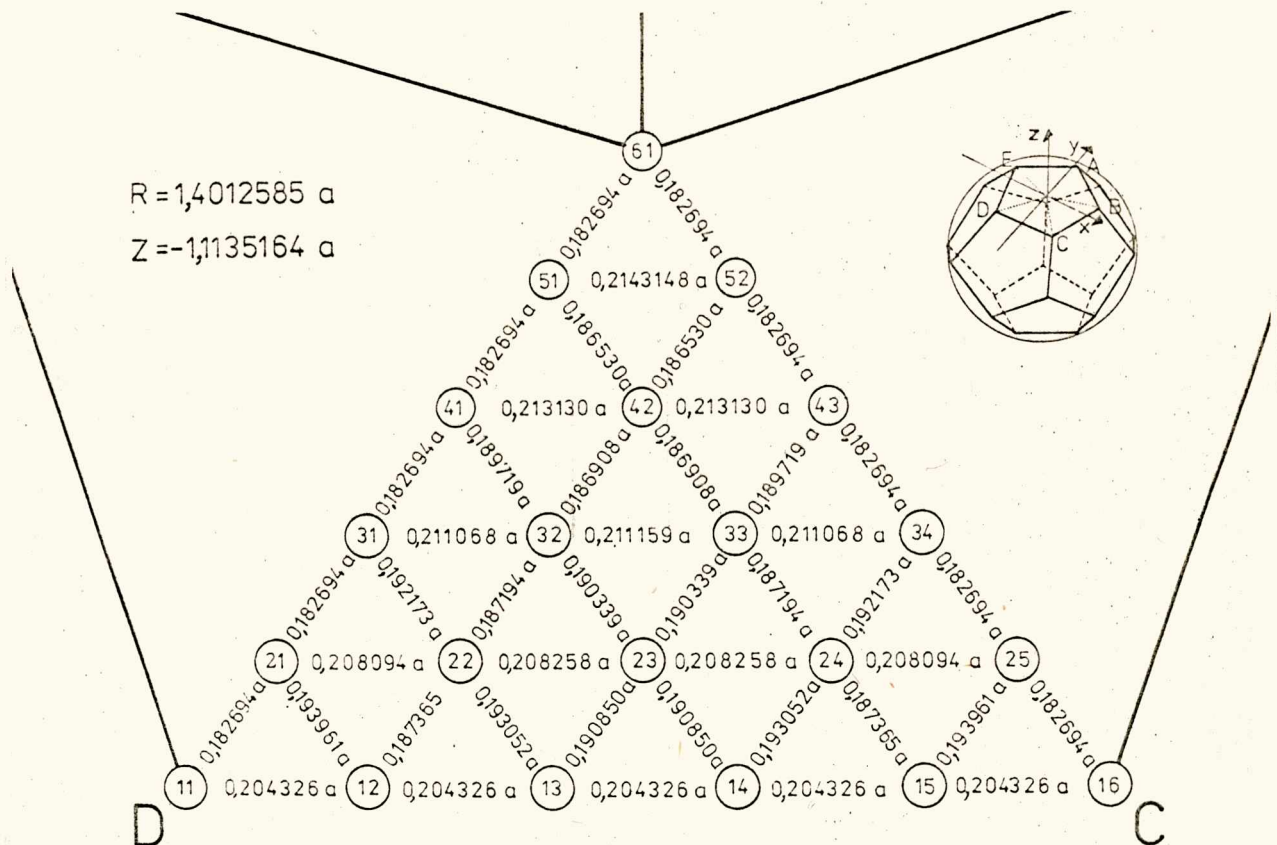
$Z = - 1,1135164 a$

$R = 1,4012385 a$

Przez "a" oznaczono długość krawędzi 12-ścianu foremnego.

Rysunek 50 przedstawia wynik tych obliczeń dla $n = 5$.

Otrzymamy w ten sposób siatkę sferyczną $12 \times 5 \times 5^2 = 1500$ -ścianu.



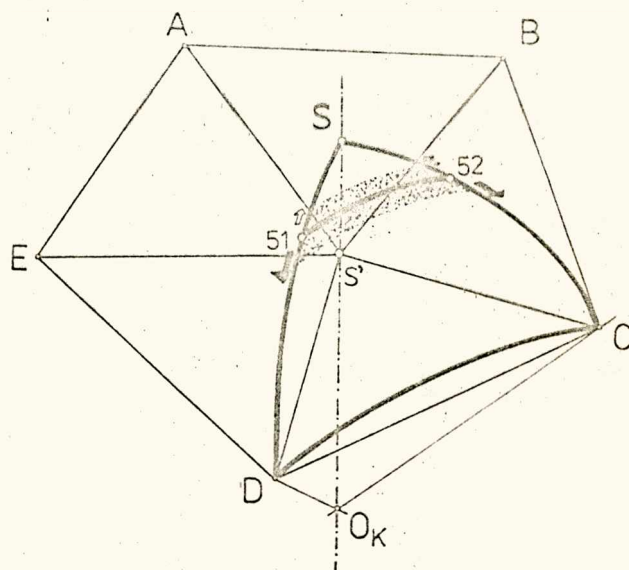
Pewne prawidłowości dotyczące ułożenia odcinków, które uważać możemy za równe co do swych długości zachodzą również i w tym przypadku, lecz położenia odcinków najkrótszego i najdłuższego w całej siatce są odmienne niż dla podanych siatek rozpiętych nad rzutem sześciokątnym. W siatce 1500-ścianu najdłuższym odcinkiem jest odcinek zawarty między punktami 51-52, najkrótszymi zaś odcinki leżące na łukach kół wielkich kuli i odpowiadającym bokom wewnętrznych trójkątów składających się na 5-kąt prawidłowy. Współczynnik η określony jest zatem przez długości sąsiadujących ze sobą odcinków siatki sferycznej, leżących w zworniku przekrycia i dla 1500-ścianu powstałego na bazie 12-ścianu foremego przez zastosowanie metody deformacji siatki wtórnej będzie więc równy:

$$\eta = \frac{0,2143148 \text{ a}}{0,182694 \text{ a}} = 1,173080$$

Bardzo ciekawym i zaskakującym jest przebieg zmian wartości współczynnika η w zależności od stopnia podziału odpowiednich łuków na n równych części. Z usytuowania odcinków najdłuższych i najkrótszych w sąsiedztwie zwornika trójkątnej siatki sferycznej rozpiętej nad pięciokątną ścianą 12-ścianu foremego możemy przypuszczać, że przy $n \rightarrow \infty$ wartość współczynnika η osiągnie swą górną granicę równą 1,1756. Tak jednak się nie dzieje, czego dowodem są wartości współczynnika η wyliczone od $n = 1$ do $n = 20$ na EMC i podane w tablicy 4. Przypuszczenia nasze sprawdzają się jedynie dla wartości η wyliczonych od $n = 1$ do $n = 13$; potem następuje dość gwałtowny i skokowy wzrost wartości η . Aby rozwiać wątpliwości dotyczące w pierwszym rzędzie sposobu obliczeń, sprawdzono prawidłowość danych wejściowych, które okazały się być poprawnymi w przyjętej do siedmiu cyfr znaczących skali dokładności. Następnie, aby wykluczyć podejrzenie o zakłóceniu cyklu pracy maszyny cyfrowej przeprowadzono jeszcze dwukrotnie proces obliczeń, wyniki których zgadzały się z wynikami otrzymanymi za pierwszym razem. Dokładna ich analiza wykazała, że nagły wzrost wartości współczynnika η dla $n \geq 14$ spowodowany jest zmianą usytuowania odcinków o ekstremalnych długościach. Odcinkami najkrótszymi pozostają nadal odcinki leżące na łukach, odpowiadających w rzucie środkowym wewnętrznym krawędziom DS i CS pięciokątnej ściany 12-ścianu foremego /patrz rys. 51/.

Odcinki najdłuższe, dla $n \geq 14$ usytuowane są również w pasach równoległych do podstawy pięciokątnego rzutu, jednak bardziej oddalonych od zwornika przekrycia S. Dla kolejnych coraz większych n pasma zawierające najdłuższe odcinki przesuwają się stopniowo coraz niżej w kierunku łuku CD. Pasma zawierające odcinki najdłuższe dla n zlokalizowane będzie jednak zapewne w górnej części równoramiennego trójkąta sferycznego DSB.

Na podstawie wydruków z drugiej i trzeciej tury obliczeń na EMC uzupełniono do $n = 25$ wartości współczynnika η i podano je niżej:



Rys. 51.

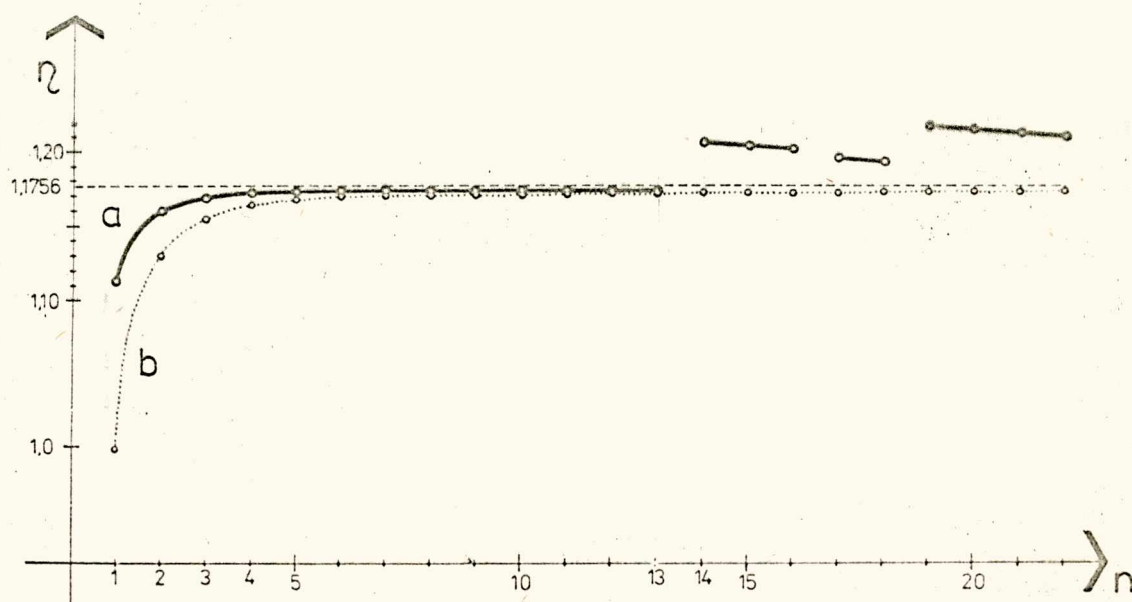
$n = 21$	$\eta = 1,212522$
$n = 22$	$\eta = 1,213213$
$n = 23$	$\eta = 1,223253$
$n = 24$	$\eta = 1,222670$
$n = 25$	$\eta = 1,221363$

Zestawiając te wartości z podanymi w tablicy 4. zauważymy, że dla kilku kolejnych $n \geq 14$ wielkości współczynnika η są bardzo zbliżone do siebie. Wyróżnić możemy kilka grup zaliczając do nich:

I grupa	- wartości η dla	$n \in [14 \div 16]$
II grupa	- wartości η dla	$n \in [17 \div 18]$
III grupa	- wartości η dla	$n \in [19 \div 22]$
IV grupa	- wartości η dla	$n \in [23 \div 25]$

W ramach każdej z grup obserwujemy zmniejszające się wraz ze wzrostem n wartości η , co decyduje o "pilastym" charakterze wykresu zależności η od n dla $n \geq 14$ /rys. 52/. Taki charakter wykresu świadczy o oddalaniu się linii zawierających odcinki najdłuższe od zwornika siatki sferycznej rozpiętej nad pięciokątną ścianą 12-ścianu foremnego.

Porównanie wielkości współczynników η dla siatek sferycznych powstałych na bazie 12-ścianu i 20-ścianu foremnego w metodzie deformacji siatki wtórnej przedstawiono na rys. 52.



Rys. 52. Wielkości współczynników η w zależności od n dla siatek sferycznych powstałych na bazie:
a/ 12-ścianu foremnego, b/ 20-ścianu foremnego.

Współczynnik η charakteryzujący zróżnicowanie długości wszystkich odcinków w siatkach sferycznych powstałych w metodzie deformacji siatki wtórnej na bazie 12-ścianu foremnego wzrasta dla n od 1 do 13 nieco szybciej, niż dla podobnych siatek rozpiętych nad ścianami 20-ścianu foremnego i zbliża się stopniowo, wydawałoby się ku wspólnej granicznej wielkości równej 1,1756. Jednak od $n=14$ wartości η dla siatek sferycznych rozpiętych nad pięciokątną ścianą 12-ścianu wzrastają skokowo i dla kilku kolejnych n posiadają zbliżone do siebie wartości. Na rys. 52 wzrost wartości współczynnika η dla $n \geq 14$ przedstawiony został w sposób bardziej uwidaczniający zmiany wielkości niż wynikałoby to z wartości podanych dla n od $n = 14$ do $n = 25$. Ustalenie granicznej wartości współczynnika η dla siatek sferycznych powstałych w metodzie deformacji siatki wtórnej na bazie 12-ścianu foremnego jest więc problemem bardzo złożonym i wymagać będzie szczegółowej analizy związków miarowych siatek, wyznaczonych przez wprowadzanie bardzo gęstych podziałów trójkąta sferycznego DSB /rys. 51/.

Charakterystykę wielościanów powstałych w tej metodzie na bazie 12-ścianu foremego podano w tabelicy 4. Wartości niektórych współczynników zależnych od n wyliczyć można z następujących wzorów:

$$c = 30 n^2 - 10$$

$$e = 90 n^2$$

$$e_k = 2 n$$

$$l = 60 n^2$$

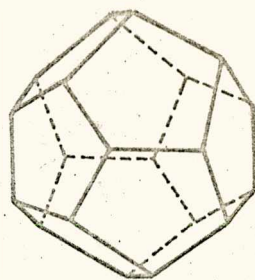
$$l_k = c_k = \frac{n/n + 1/}{2}$$

Porównanie tabelicy 4 z tabelicą 2 wykazuje, że wielościany powstałe dzięki metodzie deformacji siatki wtórnej na bazie 12-ścianu foremego posiadają lepsze charakterystyki w granicach od $n=1$ do $n=13$ niż trójkątne siatki sferyczne powstałe na bazie 20-ścianu foremego. Dla tych samych n występuje tu trzy razy więcej wszystkich krawędzi $/e/$ przy tylko dwukrotnie większej liczbie różnych krawędzi $/e_k/$. Liczba wszystkich ścian wielościanu $/l/$ jest również trzykrotnie większa niż dla wielościanów powstałych na bazie 20-ścianu, przy czym procent różnych ścian w całej siatce $/l_k/$ jest dużo większy.

Z tych też względów siatki sferyczne powstałe na bazie 12-ścianu foremego, mimo znacznego wzrostu wartości współczynnika η dla $n \leq 13$, mogą konkurować z siatkami sferycznymi określonymi na bazie 20-ścianu foremego.

Przejdziemy teraz do wyznaczania zdeformowanej siatki trójkątnej dla fragmentu sfery rozpiętej nad kwadratowym rzutem ABCD. W opracowaniu jej ograniczymy się jedynie do 1/8 części całego obszaru tzn. do trójkąta $S_k FC$ /rys. 53/, z uwagi na występującą tu również symetrię. Wyznaczamy rzutem środkowym z punktu O /środek kuli/ uporządkowanie krawędzi bocznych /rys. 53/ następnie odcinków EF i GH /rys. 55/, oraz przekątnych BD i AC /rys. 54/. Omówionym poprzednio sposobem określamy położenia wierzchołków zdeformowanej siatki trójkątnej w obszarze równoramiennego trójkąta $S_k FC$ /rys. 56/. Łącząc środki ciężkości odpowiednich wewnętrznych pól liniami "równoległymi" do boków kwadratu ABCD wyznaczmy rysunek zdeformowanej rzutem środkowym siatki o oczkach czworokątnych. Pozwala więc ona wyznaczać na powierzchni sferycznej regularną siatkę czworokątną

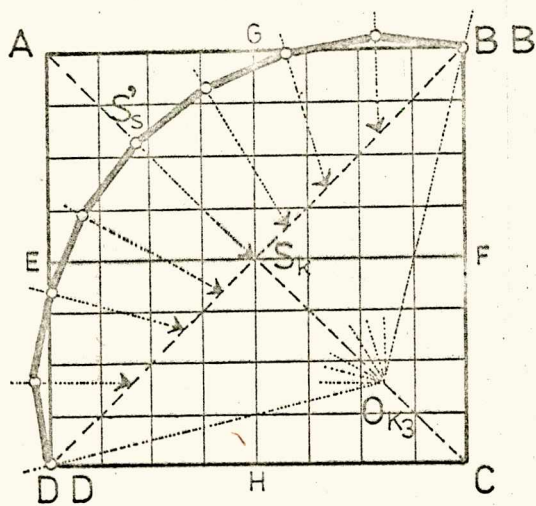
- c - liczba wszystkich wierzchołków
 c_k - liczba różnych kątów bryłowych
 e - liczba wszystkich krawędzi wielościanu
 e_k - liczba różnych krawędzi
 l - liczba wszystkich ścian wielościanu
 l_k - liczba różnych ścian
 s_k - liczba różnych kątów płaskich zawartych
 pomiędzy krawędziami ścian wielościanu
 η - stosunek długości odcinka najdłuższego
 do dł. odcinka najkrótszego



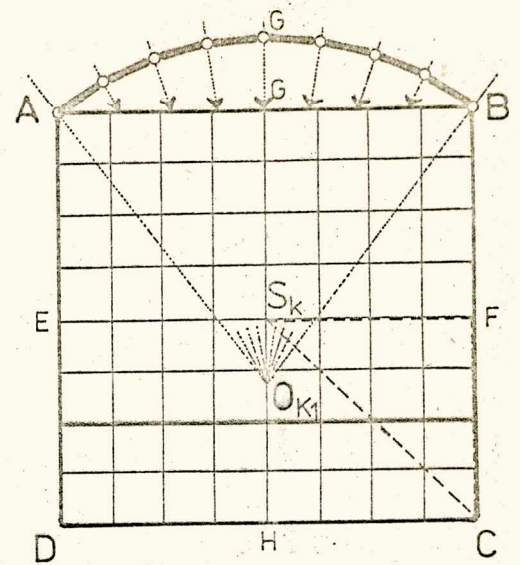
(5,5,5)

TABLICA 4

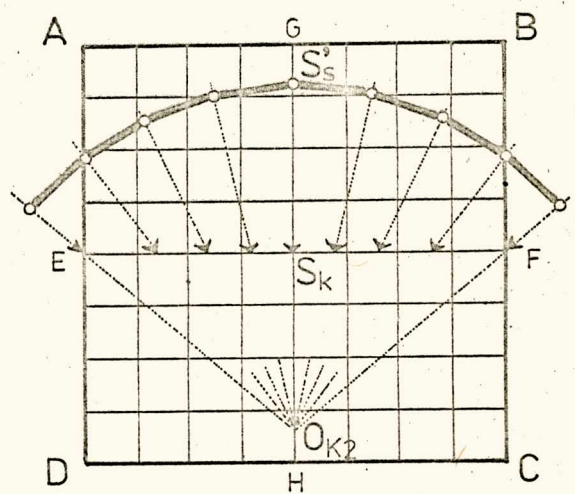
n	c	c_k	e	e_k	l	l_k	s_k	η
1	20	1	90	1	60	1	1	1,113587
2	110	3	360	4	240	3	7	1,159976
3	260	6	810	6	540	6	15	1,168641
4	470	10	1440	8	960	10	26	1,171684
5	740	15	2250	10	1500	15	40	1,173091
6	1070	21	3240	12	2160	21	56	1,173873
7	1460	28	4410	14	2940	28	76	1,174314
8	1910	36	5760	16	3840	36	99	1,174664
9	2420	45	7290	18	4860	45	125	1,174839
10	2990	55	9000	20	6000	55	154	1,175031
11	3620	66	10890	22	7260	66	186	1,175091
12	4310	78	12960	24	8640	78	221	1,175275
13	5060	91	15210	26	10140	91	259	1,175235
14	5870	105	17640	28	11760	105	300	1,202566
15	6740	120	20250	30	13500	120	344	1,201115
16	7670	136	23040	32	15360	136	391	1,200331
17	8660	153	26010	34	17340	153	442	1,198781
18	9710	171	29160	36	19440	171	496	1,198126
19	10820	190	32490	38	21660	190	553	1,215043
20	11990	210	36000	40	24000	210	613	1,213571



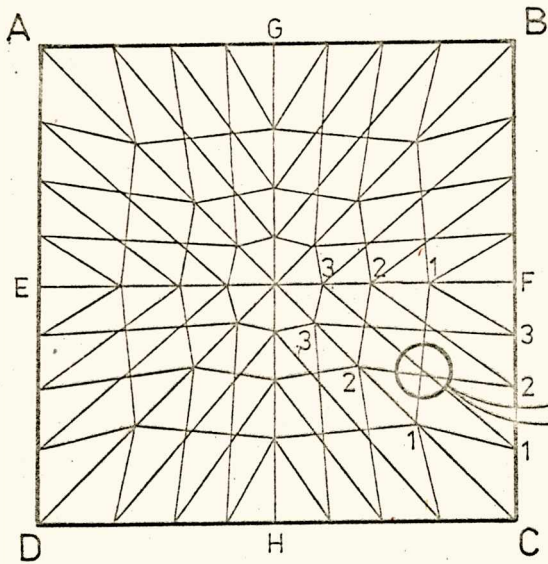
Rys. 54



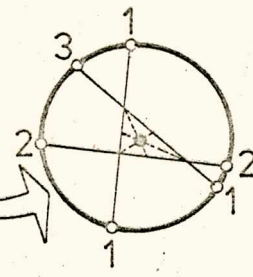
Rys. 53



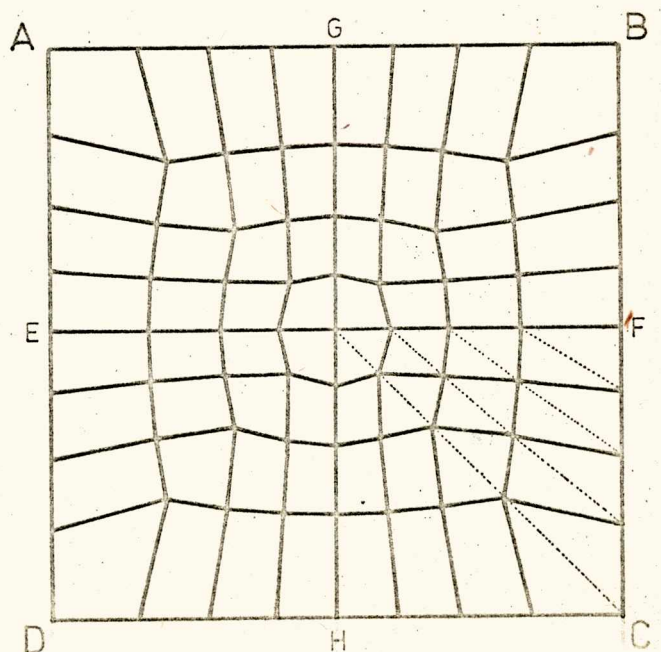
Rys. 55



Rys. 56



Rys. 57



jako najbardziej odpowiadającą tej formie rzutu. Oczywiście tą drogą otrzymywać się będzie głównie siatki sferyczne o oczkach trójkątnych. Długości przekątnych odpowiednich oczek czworokątnych posłużą do kontrolowania prawidłowego montażu prętów konstrukcji na powierzchni sferycznej /rys. 57/.

Postępując według opisanego wyżej schematu określimy trójkątną siatkę sferyczną nad kwadratową ścianą 6-ścianu, jako szczególnego rodzaju przypadek całej rodziny siatek sferycznych rozpiętych nad rzutami czworokątnymi. Całość obliczeń przeprowadzona została dla następujących danych:

$$H \begin{bmatrix} 0 & ; & - 0,5 a \end{bmatrix}$$

$$C \begin{bmatrix} 0,5 a & ; & - 0,5 a \end{bmatrix}$$

$$S_K \begin{bmatrix} 0 & ; & 0 \end{bmatrix}$$

$$D_{HC} \begin{bmatrix} 0 & ; & 0,2071066 a \end{bmatrix}$$

$$D_{CS} \begin{bmatrix} - 0,3535533 a & ; & - 0,3535533 a \end{bmatrix}$$

$$D_{SKH} \begin{bmatrix} 0,5 a & ; & 0 \end{bmatrix}$$

- położenia środka kuli

$$Z = \begin{bmatrix} 0; 0 & ; & - 0,5 a \end{bmatrix}$$

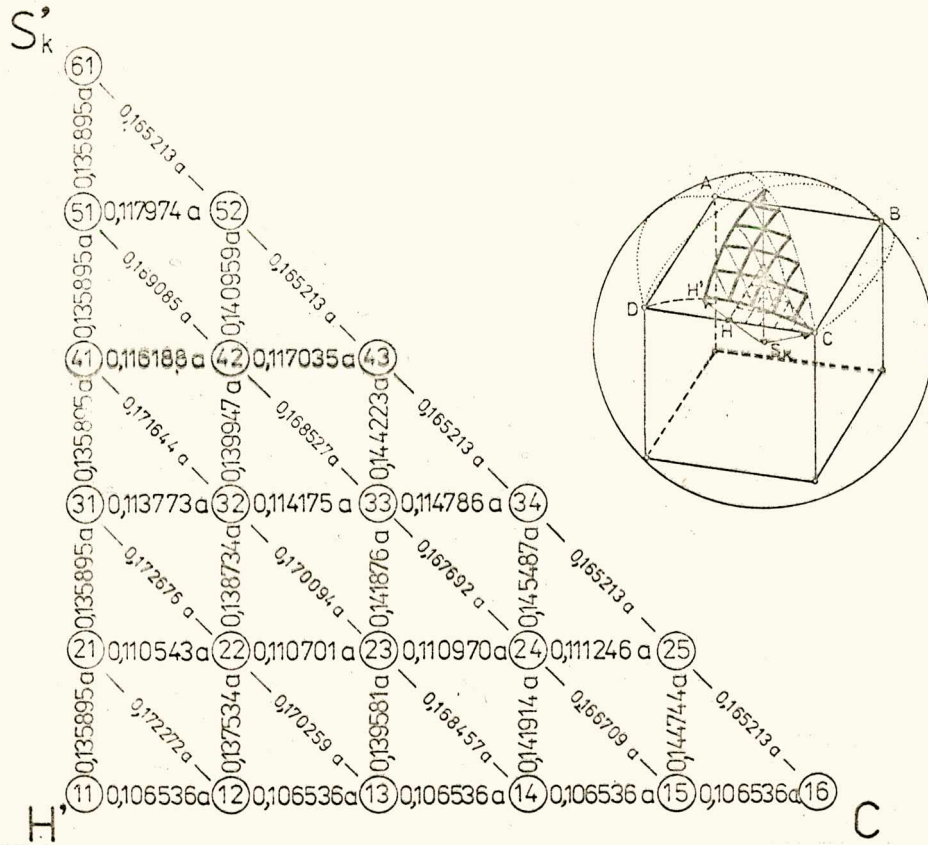
- długość promienia kuli opisanej na 6-ścianie

$$R = 0,8660254 a$$

- stopień podziału krawędzi wielościanu

$$n = 10$$

Program na EMC opisany szczegółowo w Aneksie wymagał, aby proces obliczeń dokonywany był w obrębie równoramiennego HCS_K dla $n = 5$ co równocześnie oznacza, że odpowiadający krawędzi wielościanu łuk koła wielkiego kuli opisanej na 6-ścianie podzielony został na 10 równych części. Tak więc dla każdego kolejnego podziału boków trójkąta HCS_K poznamy związki miarowe wielościanów powstałych w tej metodzie dla parzystych liczb określających stopień podziału krawędzi 6-ścianu na n równych odcinków. Dzieląc krawędź 6-ścianu na 10 równych części wyznaczymy metodą deformacji siatki wtórnej trójkątną siatkę sferyczną $25 \times 8 \times 6 = 1200$ -ścianu /rys. 58/.



Rys. 58. 1/48 część trójkątnej siatki sferycznej 1200-ścianu.

W przedstawionym wyżej rysunku 1/48 część siatki sferycznej 1200-ścianu odcinki o zbliżonych do siebie długościach układają się w trzy podstawowe grupy linii "równoległych" do odpowiedniej krawędzi trójkąta $H^*CS_K^*$. Najdłuższym w tej siatce jest odcinek zawarty między punktami 21 - 12, najkrótszymi są odcinki leżące na krawędzi H^*C .

Współczynnik η dla 1200-ścianu powstałego na bazie 6-ścianu dla $n = 6$ równy jest:

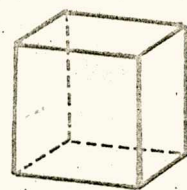
$$\eta = \frac{0,172272 a}{0,106536 a} = 1,6170309$$

Pełną charakterystykę tego typu wielościanów podano w tabelicy 5.

Odcinki wyznaczające czworokątną siatkę sferyczną dla wielościanów powstałych na bazie 6-ścianu wykazują mniejsze zróżnicowanie długości. Najdłuższym odcinkiem jest odcinek zawarty między punktami 24 - 34, najkrótszymi odcinkami są, tak jak poprzednio odcinki leżące na łuku koła wielkiego odpowiadające krawędzi H^*C trójkąta HCS_K . Współczynnik η dla takiej siatki wynosi:

$$\eta = \frac{0,145487 a}{0,106536 a} = 1,3656135$$

- c - liczba wszystkich wierzchołków
 c_k - liczba różnych kątów bryłowych
 e - liczba wszystkich krawędzi wielościanu
 e_k - liczba różnych krawędzi
 l - liczba wszystkich ścian wielościanu
 l_k - liczba różnych ścian
 s_k - liczba różnych kątów płaskich zawartych
 pomiędzy krawędziami ścian wielościanu
 η - stosunek długości odcinka najdłuższego
 do dł. odcinka najkrótszego



(4,4,4)

TABLICA 5

n	c	c_k	e	e_k	l	l_k	s_k	η
1	8	1	12	1	6	1	1	1,0
2	26	1	72	3	48	1	1	1,517638
4	98	4	288	6	192	4	12	1,595050
6	218	9	648	9	432	9	27	1,609572
8	386	16	1152	12	768	16	48	1,614666
10	602	25	1800	15	1200	25	75	1,620825
12	866	36	2592	18	1728	36	108	1,623699
14	1178	49	3528	21	2352	49	147	1,625066
16	1538	64	4608	24	3072	64	192	1,626853
18	1946	81	5832	27	3888	81	243	1,628203
20	2402	100	7200	30	4800	100	300	1,628922
22	2906	121	8712	33	5808	121	363	1,629576
24	3458	144	10368	36	6212	144	432	1,630409
26	4058	169	12168	39	8112	169	507	1,630880
28	4706	196	14112	42	9408	196	588	1,631132
30	5402	225	16200	45	10800	225	675	1,632310
32	6146	256	18432	48	12288	256	768	1,632775
34	6938	289	20808	51	13872	289	867	1,633077
36	7778	324	23328	54	15552	324	972	1,633360
38	8666	361	25992	57	17328	361	1083	1,633691

Ponieważ odcinki najdłuższe i najkrótsze w czworokątnej siatce sferycznej usytuowane są w pobliżu wierzchołków 6-ścianu, to wartość η_0 dla tego typu siatek przy $n \rightarrow \infty$ przyjmować będzie wartość w okolicy liczby $\sqrt{2} = 1,414213$.

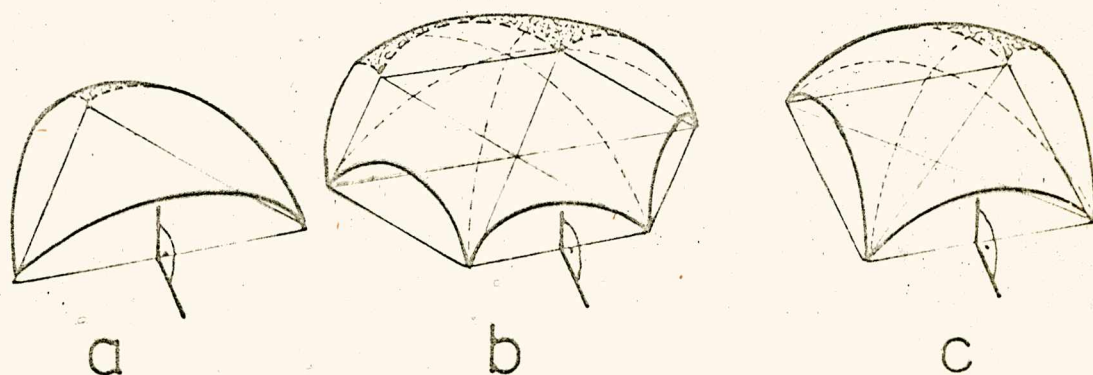
Zróżnicowanie długości poszczególnych odcinków w ramach jednej linii np. 12 - 52 jest większe i wynika z własności rzutu środkowego dość znacznie oddalonej ściany 6-ścianu na współśrodkową kulę. Wpływ na to zróżnicowanie długości odcinków ma typ trójkąta HCS_K , który jest trójkątem równoramiennym, a także położenie tego trójkąta na płaskiej ścianie wielościanu /por. rys. 58/.

W niewielkim stopniu wpływają również niedokładności procesu obliczeń, a ściślej mówiąc, niedokładności wynikłe z przybliżonych danych wejściowych. Dane wejściowe dla programu na EMC wyliczone zostały na kalkulatorze Santronic 81SR i podane zostały z ograniczoną do ośmiu liczb znaczących dokładnością. Fakt ten może mieć pewne znaczenie z uwagi na to, że dla wyznaczenia danych wejściowych potrzebne były wartości takich liczb niewymiernych jak $\sqrt{2}$ i $\sqrt{3}$, które to wartości były następnie wielokrotnie przetwarzane w procesie obliczeń. Z tych też względów wszystkie długości krawędzi bocznych trójkąta sferycznego $H'CS'_K$ podane zostały na rys. 58 jako średnia arytmetyczna odpowiednich wartości wydruków z EMC zamieszczonych w Aneksie. Dotyczy to również miar długości odcinków leżących na łukach, odpowiadających w rzucie środkowym krawędziom wielościanów podstawowych dla wszystkich omawianych grup trójkątnych siatek sferycznych określonych metodą deformacji siatki wtórnej na bazie 8-ścianu, 12-ścianu i 20-ścianu foremnego.

3.7. Wyznaczanie siatek sferycznych metodą deformacji siatki wtórnej rzutem prostopadłym na płaszczyznę

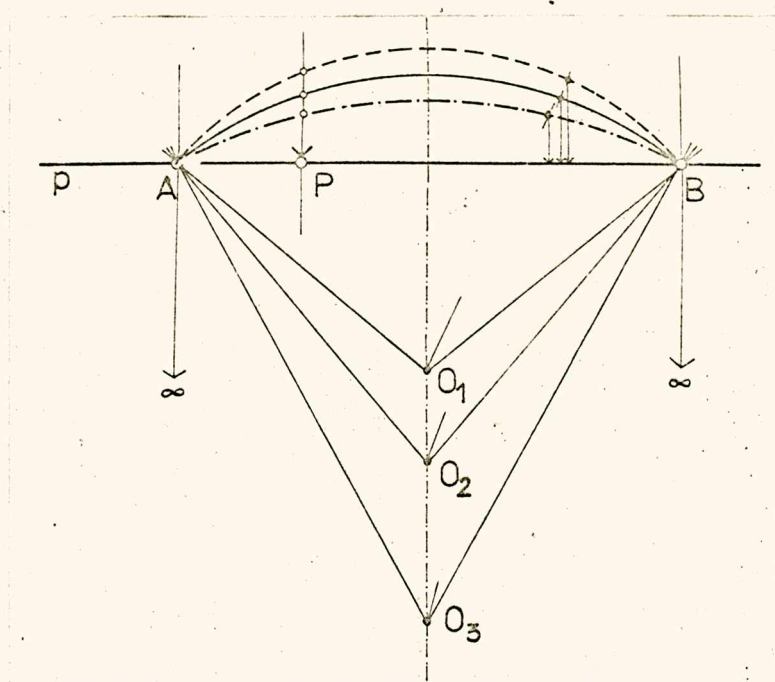
Podane w punktach 3.5 i 3.6 schematy postępowania służą do określania siatek sferycznych w oparciu o analizę wielościanów, których ścianami mogą być różne wielokąty. Podział tych wielokątów na odpowiednie trójkąty stanowił punkt wyjścia do określania siatek sferycznych przy pomocy rzutu środkowego ścian wielościanu na opisaną na nim kulę. W praktyce wykorzystuje się również przekrycia kopułowe nad różnymi kształtami pod-

staw, których brzegi w rzucie poziomym pokrywają się z krawędzią podstawy.



Rys. 59.

W celu określenia na nich siatek sferycznych posłużymy się znaną już metodą, wykorzystując własności rzutu prostopadłego na płaszczyznę p , jako granicznego przypadku rzutu środkowego, gdzie punkt rzutowania przesunięty został do nieskończoności /rys. 60/.



Rys. 60. Własności rzutu prostopadłego na płaszczyznę.

Już na wstępie możemy stwierdzić, iż mimo niezmiennego położenia punktu rzutowania /w nieskończoności/ możliwości wariantowania przypadków pozostają takie same jak przy wykorzystywaniu rzutu środkowego ścian ze środka kuli opisanej na danym wielościanie. Możemy więc regulować wyniosłość przekrycia jak i gęstością opisywanej na nim siatki sferycznej.

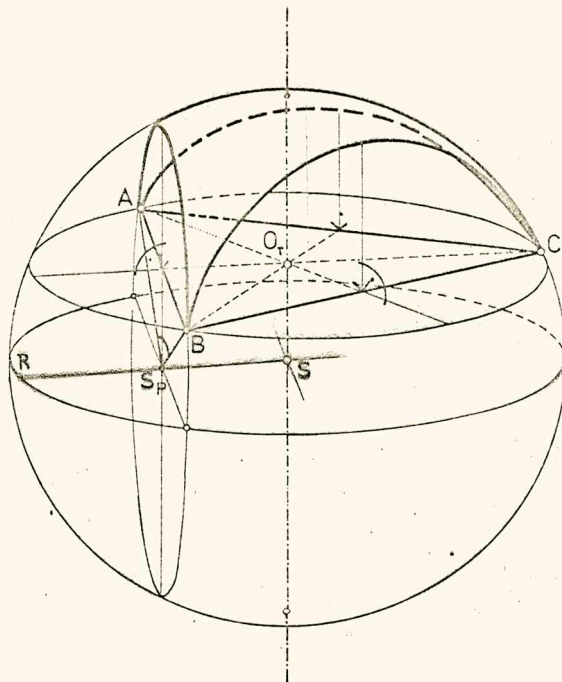
Mimo, że w rzucie prostopadłym na płaszczyznę p obrazem wszystkich punktów ze sfer o środkach O_1 , O_2 i O_3 , leżących na prostej K jest jeden punkt P , to po wprowadzeniu jednakowego stopnia podziału dla wszystkich łuków AB , punkty równego podziału ze sfer o środkach O_1 , O_2 i O_3 mają w rzucie prostopadłym różne położenie na płaszczyźnie p /rys. 60/. Tak jak poprzednio, zdeformowanie siatki wtórnej na płaszczyźnie p będzie zależało od stopnia podziału łuku AB na n równych odcinków, oraz od odległości środka sfery od płaszczyzny p . Zdeformowanie to przy jednakowym stopniu podziału odpowiednich łuków będzie większe dla sfer o środkach położonych bliżej płaszczyzny rzutu. Tok postępowania jest podobny do opisanego wcześniej i przedstawimy go również dla trzech podstawowych przypadków, tzn. dla fragmentów sfer rozpiętych nad regularnymi rzutami trójk-, cztero-, i sześciokątnymi /rys. 59/. Zasady wyznaczania rzutem prostopadłym siatki wtórnej dla wycinka sfery rozpiętej nad trójkątem równobocznym będą obowiązywały również przy wyznaczaniu podobnych siatek dla czasz rozpiętych nad sześci- i czworokątem.

3.8. Siatka sferyczna rozpięta nad trójkątem równobocznym

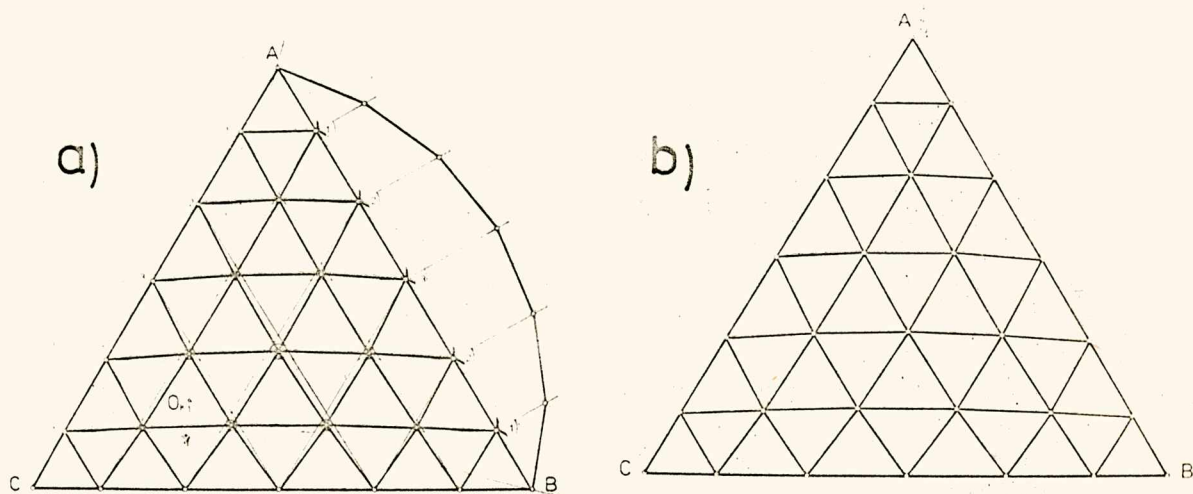
Procedura postępowania przy określaniu rzutem prostopadłym na płaszczyznę siatki sferycznej rozpiętej nad rzutem będącym trójkątem równobocznym jest podobna do procedury wyznaczania siatek sferycznych metodą deformacji siatki wtórnej z wykorzystaniem zasad rzutu środkowego, z tym, że w pierwszym etapie należy wyznaczyć promień jednej z trzech równych krawędzi wycinka sfery /rys. 61/.

Przecinając płaszczyznę rzutu ABC płaszczyzną do niej prostopadłą i zawierającą odcinek AB określamy położenie środka okręgu S_p na odcinku SR . Okrąg ten zawiera łuk AB ograniczony kątem AS_pB . Długości odcinków AS_p i BS_p są jednakowe i równe promieniowi poszukiwanego okręgu. Etap drugi przebiega podobnie jak poprzednio z tą tylko różnicą, że rzutem prostopadłym z podzielonego na n równych części łuku AB wprowadzamy nowe uporządkowanie krawędzi AB /rys. 61/.

Odkładamy nowe uporządkowanie krawędzi AB na pozostałych bokach $\triangle ABC$ i prostymi równoległymi do jego podstaw łączymy odpowied-



Rys. 61. Wyznaczanie promienia wycinka sfery rozpiętej nad równobocznym trójkątem ABC.



Rys. 62. Schemat wyznaczania zdeformowanej siatki wtórnej dla zasad rzutu prostokątnego na płaszczyznę.

nie pary punktów /rys. 62a/. Następnie znajdujemy środki ciężkości tak jak uprzednio określonych wewnętrznych trójkątów, które to środki ciężkości wyznaczają wierzchołki zdeformowanej siatki trójkątnej w obszarze $\triangle ABC$. Po połączeniu odcinkami prostymi wszystkich sąsiadujących ze sobą wierzchołków otrzymamy rysunek zdeformowanej rzutem prostokątnym na płaszczyznę siatki trójkątnej, która po ponownym zrzutowaniu na kulę o zadanym na wstępie promieniu, określi na niej równomierną siatkę trójkątną /rys. 62b/. Zwraca uwagę odmienny niż przy wykorzysty-

waniu zasad rzutu środkowego rysunek zdeformowanej na płaszczyźnie siatki trójkątnej. Krzywe łamane wewnątrz trójkąta ABC układają się swymi wypukłymi w kierunku przeciwnym do odpowiadającej im podstawy $\triangle ABC$.

Postępując ściśle według podanego wyżej schematu określimy siatkę sferyczną dla fragmentu kuli ograniczonej w rzucie prostopadłym krawędziami podstawy będącej płaskim trójkątem równobocznym. Dla ułatwienia procesu obliczeń przyjęto za jednostkę wszelkich związków miarowych długość promienia sfery i oznaczono ją również przez "a".

Aby bardziej uwidocznić prawidłowości występujące dla prezentowanej odmiany metody deformacji siatki wtórnej i umożliwić równocześnie ich porównanie z prawidłowościami zachodzącymi w siatkach sferycznych generowanych za pomocą rzutu środkowego przyjęto, że oddalenie płaszczyzny trójkąta ABC od środka kuli równe jest $0,75 a$. Przy podanych założeniach długość krawędzi równobocznego $\triangle ABC$ będzie równa $1,1456438 a$, zatem współrzędne wierzchołków tego trójkąta na płaszczyźnie XOY będą miały następujące wartości:

$$A \begin{bmatrix} 0 & ; & 0,6614376 a \end{bmatrix}$$

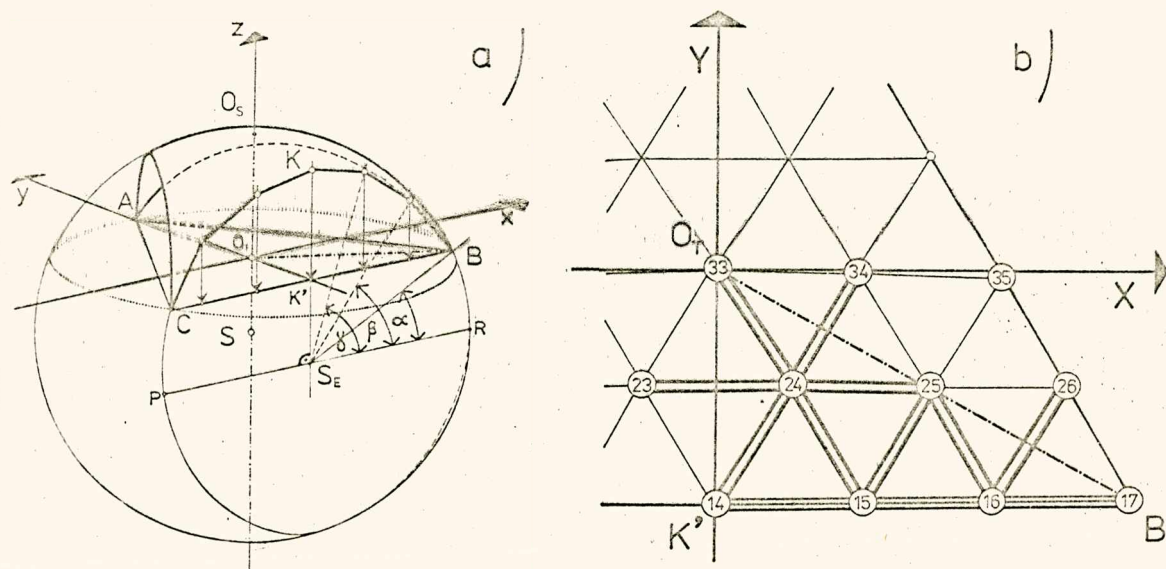
$$B \begin{bmatrix} 0,5728219 a & ; & -0,3307188 a \end{bmatrix}$$

$$C \begin{bmatrix} -0,5728219 a & ; & -0,3307188 a \end{bmatrix}$$

Promień okręgu o środku w pkt. S_E /rys. 63a/, którego częścią jest jeden z trzech równych łuków odpowiadających w rzucie prostopadłym krawędziom $\triangle ABC$ wyliczymy na podstawie znanych długości odcinków $K'B = 1/2 CB = 0,5728219 a$ oraz długości odcinka $K'S = 0,75 a$. Ponieważ odcinki te są przyprostokątnymi w prostokątnym trójkącie $K'BS_E$ to długość przeciwprostokątnej $S_E B$, równa długości promienia łuku CB wyniesie:

$$S_E B = \sqrt{0,75 a^2 + 0,5728219 a^2} = 0,9437293 a$$

Całość obliczeń przeprowadzono przy użyciu kalkulatora dla $n = 6$, czyli podziale łuków brzegowych na sześć równych części. Dysponując już podstawowymi danymi przystępujemy do wyznaczenia nowego uporządkowania rzutem prostopadłym na płaszczyznę boków trójkąta ABC. W pierwszym etapie należy podzielić łuk okręgu w punkcie S i ograniczony krawędzią BC na sześć równych części.



Rys. 63. Określenie wierzchołków zdeformowanej siatki trójkątnej dla $n=6$.

Na podstawie prostych zależności trygonometrycznych występujących w prostokątnym trójkącie $BK'S_E$ wyliczymy wartość kąta:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{0,75 a}{0,5728219 a} = 1,309307 \quad \text{stad} \quad \alpha = 52,628772^\circ$$

Kąt $K'S_E B$ ma wartość $90^\circ - \alpha = 37,371235^\circ$ zaś trzecia jego część równa $12,457078$ posłużyły do wyznaczenia miar kątów β i γ ,

$$\beta = 65,085943^\circ \quad \text{stad} \quad \operatorname{tg} \beta = 2,1529225$$

$$\gamma = 77,542921^\circ \quad \text{stad} \quad \operatorname{tg} \gamma = 4,5267537$$

Wartości tangensów kąta β i γ są wyznacznikami kierunkowymi prostych wychodzących z punktu S_E i dzielących połowę łuku BC na trzy równe części. Punkty przecięcia się tych prostych z łukiem okręgu o środku w punkcie S_E są punktami równego podziału łuku $K'B$, które następnie po zrzutowaniu ich rzutem prostym na płaszczyznę wyznaczają współrzędne punktów 15 i 16 na odcinku $K'B$. Znajomość tych współrzędnych stanowi z kolei punkt wyjścia dla procedury określania położenia wierzchołków zdeformowanej siatki trójkątnej w $1/6$ części trójkąta ABC , które przebiega podobnie jak dla $1/6$ części trójkątnej ściany 20-ścianu foremne-go przy wyznaczaniu siatki sferycznej 2000-ścianu generowanej rzutem środkowym i opisana jest w punkcie 3.4.

Własności rzutu prostopadłego na płaszczyznę pozwalają na stosunkowo proste i szybkie uzyskanie potrzebnych wyników, ponieważ dla każdego z pokazanych na rys. 63b punktów należy napisać równanie prostej prostopadłej do płaszczyzny XOY. Punkty przecięcia się tych prostych z powierzchnią kuli wyznaczają położenia węzłów trójkątnej siatki sferycznej rozpiętej nad równobocznym trójkątem ABC. Niżej podano współrzędne sferyczne węzłów tej siatki odpowiadających numerom węzłów zdeformowanej siatki trójkątnej na płaszczyźnie XOY:

pkt	B = 17	[	0,5728219 a	;	- 0,3307188 a	;	0,75 a	]
-,-	16	[	0,3975589 a	;	- 0,3307188 a	;	0,8559036 a	]
- -	15	[	0,2035701 a	;	- 0,3307188 a	;	0,9215188 a	]
pkt	K = 14	[	0	;	- 0,3307188 a	;	0,9437293 a	]
pkt	26	[	0,4851904 a	;	- 0,1789366 a	;	0,8559042 a	]
- -	25	[	0,3005644 a	;	- 0,1735309 a	;	0,9378422 a	]
- -	24	[	0,1017850 a	;	- 0,1707651 a	;	0,9800403 a	]
- -	23	[	-0,1017850 a	;	- 0,1707651 a	;	0,9800403 a	]
- -	34	[	0,1987794 a	;	- 0,0027657 a	;	0,9800403 a	]
pkt	O _T = 33	[	0	;	0	;	1,0 a	]

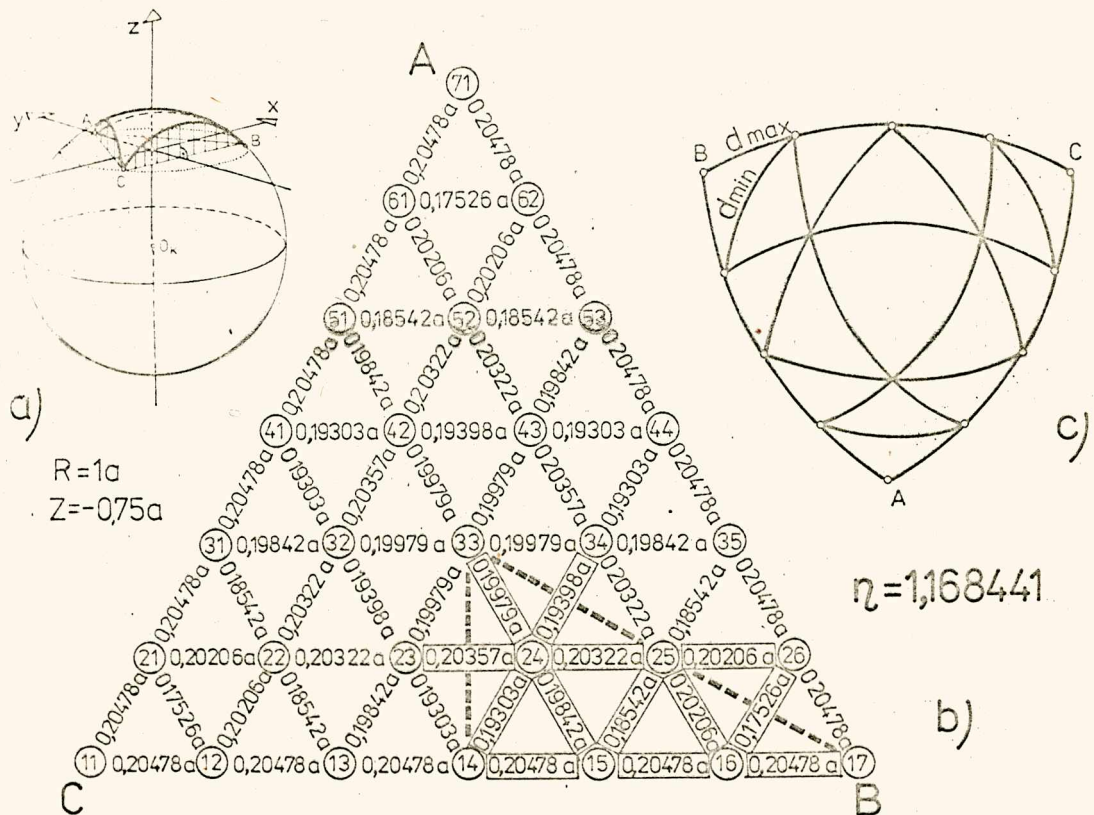
Współrzędne XY określają położenia omawianych punktów w obszarze płaskiego trójkąta ABC.

Odległości między sąsiadującymi ze sobą węzłami trójkątnej siatki sferycznej wyliczono ze wzoru:

$$d = \sqrt{x_2 - x_1 / 2 + y_2 - y_1 / 2 + z_2 - z_1 / 2}$$

i przedstawiono je wraz z ich położeniem w równobocznym trójkącie sferycznym na rys. 64b.

Z analizy związków trójkątnej siatki sferycznej przedstawionej na rys. 64b wynika, że odcinki o zbliżonych do siebie długościach układają się w linie równoległe do każdej z podstaw równobocznego trójkąta ABC. Różnice w wartościach długości odcinków leżących na jednym pasmie są największe dla pasm leżących najbliżej podstaw trójkąta ABC, np. w pasmie ograniczonym punktami nr 21 i 26. W obrębie tego pasma odcinkiem najdłuższym jest odcinek zawarty między punktem 23 a punktem 24, zaś odcinkami najkrótszymi są odcinki zawarte pomiędzy punktami 25 i 26 oraz z uwagi na symetrię między punktem 21 a punktem 22. Współczynnik η dla tego pasma jest bardzo mały i równy:



Rys. 64. Związki miarowe siatki sferycznej wyznaczonej nad równobocznym trójkątem ABC dla $n=6$ metodą deformacji siatki wtórnej z wykorzystaniem rzutu prostopadłego na płaszczyznę.

$$\eta = \frac{0,20357 \text{ a}}{0,20206 \text{ a}} = 1,007473$$

Dla omawianego pasma średnia wartość leżących na nim odcinków wynosiłaby $0,202815 \text{ a}$ i zmieniała się w granicach $\pm 0,000755 \text{ a}$, co stanowiłoby $0,37 \%$ jej długości podstawowej. Pozwala to określić odcinki leżące w ramach jednego pasma mianem odcinków o równych długościach. Tak więc dla prezentowanej metody w siatkach sferycznych generowanych rzutem prostopadłym na płaszczyznę i rozpiętych nad równobocznym $\triangle ABC$, przy podziale łuków bocznych na n równych części, występować będzie na ogólną liczbę $\frac{n/n+1}{2}$ odcinków, jedynie n odcinków o różnych długościach. Własność ta pokrywa się z własnościami siatek trójkątnych sferycznych powstałych dzięki metodzie deformacji siatki wtórnej na bazie wielościanów foremnych. Natomiast nieco odmiennie przedstawia się usytuowanie odcinków najdłuższych i najkrótszych w całej siatce sferycznej. Odcinkami najdłuższymi siatki są odcinki leżące na krawędziach równobocznego trójkąta sferycznego ABC np. odcinek zawarty między pkt. 16 a pkt. 17 o długości równej $0,20478 \text{ a}$. Odcinkami najkrótszymi są odcinki leżące tuż

przy wierzchołkach $\triangle ABC$ jak np. odcinek 16-26, którego długość równa jest 0,17526 a. Współczynnik η dla tej siatki przy $n=6$ wynosi:

$$\eta = \frac{0,20478 \text{ a}}{0,17526 \text{ a}} = 1,168441$$

Mimo, iż ta siatka sferyczna określona została rzutem prostokątnym na płaszczyznę, to jednak z powodu wykorzystywania zasad metody deformacji siatki wtórnej możemy przypuszczać, że charakter wzrostu współczynnika η w zależności od n będzie podobny do przebiegu współczynnika η dla siatek sferycznych powstałych przy pomocy rzutu środkowego na bazie prezentowanych wielościennów foremnych. Potwierdzeniem tych oczekiwań są wartości współczynnika η obliczone dla następujących n :

$$n = 2 \quad \eta = 1,055642$$

$$n = 4 \quad \eta = 1,129932$$

$$n = 8 \quad \eta = 1,188335$$

$$n = 10 \quad \eta = 1,201068$$

oraz

$$n = 200 \quad \eta = 1,254506$$

$$n = 1000 \quad \eta = 1,255000$$

W celu pełnego porównania dwóch zasadniczych odmian metody deformacji siatki wtórnej określono nad tym samym rzutem tzn. nad równobocznym trójkątem ABC i dla takich samych warunków wstępnych, siatki sferyczne generowane rzutem środkowym ze środka kuli o promieniu 1a. Obliczeń dokonano na EMC dla następujących danych:

$$A \quad \left[\begin{array}{cc} 0 & ; \quad 0,6614376 \text{ a} \end{array} \right]$$

$$B \quad \left[\begin{array}{cc} 0,5728219 \text{ a} & ; \quad - 0,3307188 \text{ a} \end{array} \right]$$

$$C \quad \left[\begin{array}{cc} -0,5728219 \text{ a} & ; \quad - 0,3307188 \text{ a} \end{array} \right]$$

$$D_{AB} \quad \left[\begin{array}{cc} - 0,4234526 \text{ a} & ; \quad - 0,2444804 \text{ a} \end{array} \right]$$

$$D_{BC} \quad \left[\begin{array}{cc} 0 & ; \quad 0,4889610 \text{ a} \end{array} \right]$$

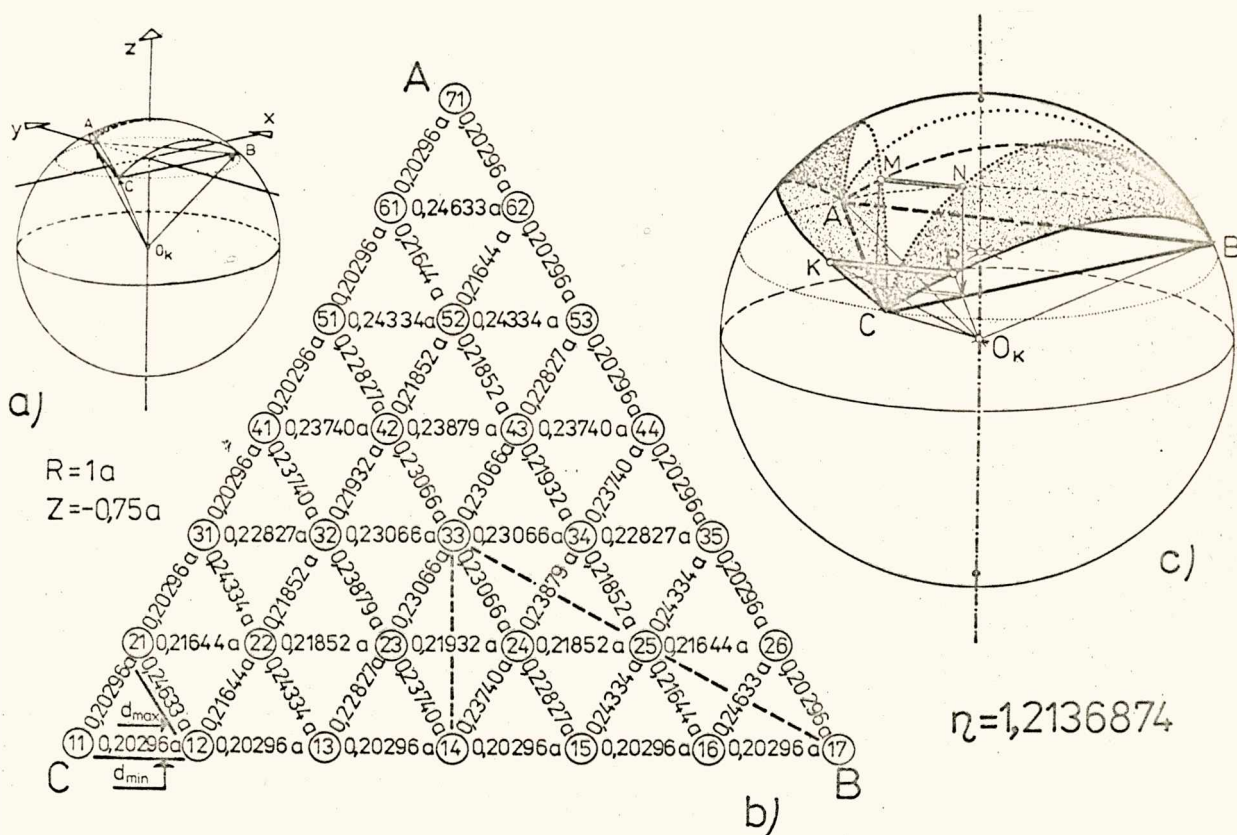
$$D_{CA} \quad \left[\begin{array}{cc} 0,4234526 \text{ a} & ; \quad - 0,2444804 \text{ a} \end{array} \right]$$

$$Z = \left[\begin{array}{cc} 0, 0, & - 0,75 \text{ a} \end{array} \right]$$

$$R = 1,0 \text{ a}$$

Otrzymane wyniki dla $n=6$ przedstawiono na rys. 65b.

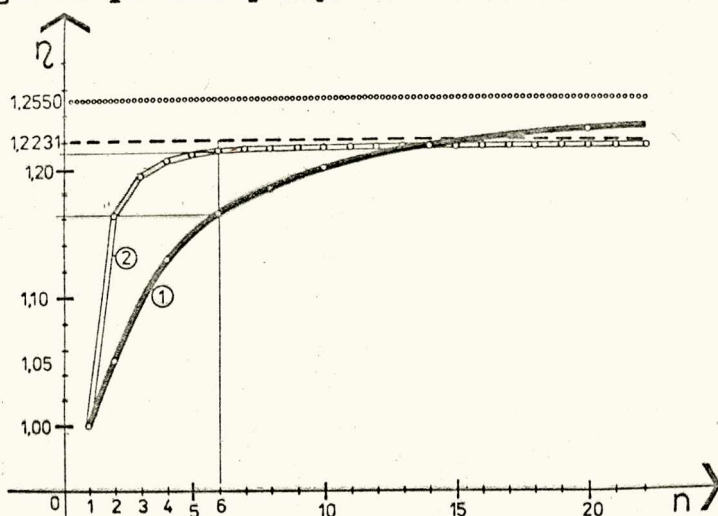
W prezentowanej siatce dla $n=6$ współczynnik $\eta = 1,2136874$, jest więc stosunkowo dużo wyższy od η charakteryzującego rozrzut długości odcinków w siatce sferycznej generowanej rzutem prostokątnym na płaszczyznę. Fakt ten wiąże się z odmiennym rozmieszczeniem odcinków o ekstremalnych długościach w wierzchołkach równobocznego trójkąta sferycznego dla porównywanych odmian metody deformacji siatki wtórnej. Odcinek MN na rys. 65c jest najkrótszym w siatkach sferycznych generowanych rzutem prostokątnym na płaszczyznę. Równoległy do niego odcinek KP jest z kolei najdłuższym w siatkach sferycznych powstałych nad tym samym rzutem przy wykorzystaniu zasad rzutu środkowego. Na tej podstawie można by przypuszczać, że relacje wartości współczynników η dla $n \rightarrow \infty$ będą w dużym stopniu odpowiadały wzajemnym relacjom wartości wyliczonych przy $n=6$ dla obu odmian metody deformacji siatki wtórnej.



Rys. 65. Związki miarowe siatki sferycznej dla $n=6$ otrzymanej metodą deformacji siatki wtórnej wykorzystującej zasady rzutu środkowego.

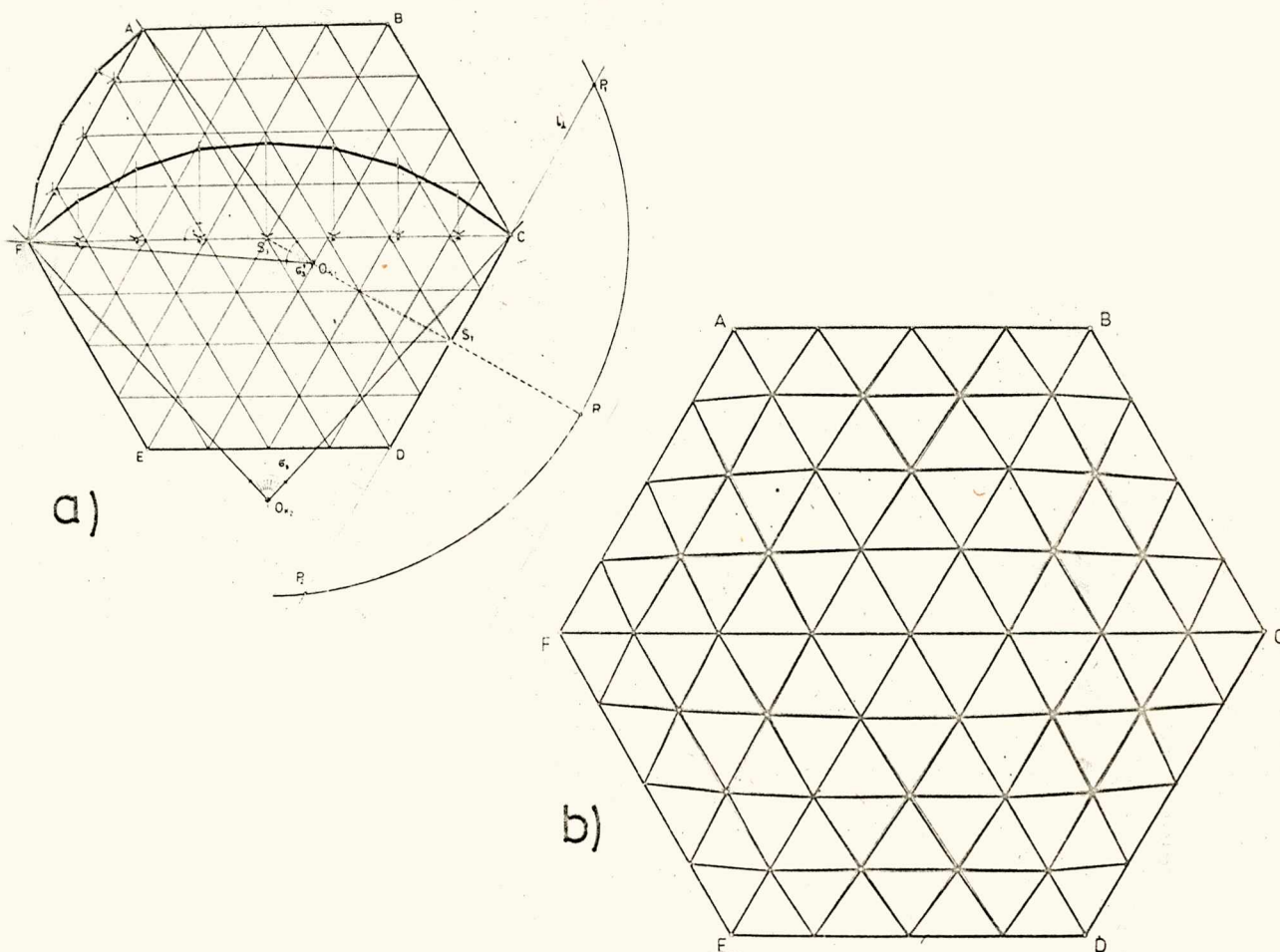
Celem potwierdzenia tych oczekiwań wyliczono na EMC wartości η dla siatek generowanych rzutem środkowym nad omawianym $\triangle ABC$,

i przedstawiono je na rys. 66 w zestawieniu z wartościami dla podobnych siatek powstałych dzięki wykorzystaniu zasad rzutu prostopadłego na płaszczyznę.



Rys. 66. Przebieg zmian wartości współczynników η w zależności od n dla dwóch podstawowych odmian metody deformacji siatki wtórnej.

Krzywa nr 1 charakteryzuje przebieg wartości η w zależności od n dla siatek generowanych rzutem prostopadłym na płaszczyznę, zaś krzywa 2 obrazuje wzrost wartości współczynnika η/n dla siatek generowanych rzutem środkowym. Wartości graniczne w obu przypadkach wyliczono dla $n=1000$. Tak więc wzrost wartości współczynnika η dla siatek sferycznych określanych rzutem prostopadłym na płaszczyznę jest łagodny, lecz dla dużych n osiąga wartości większe od początkowo gwałtownie rosnącego η , charakteryzującego rozrzut długości odcinków w siatkach sferycznych generowanych rzutem środkowym. Poznanie przebiegu wzrostu współczynników η dla siatek sferycznych uzyskiwanych w obu prezentowanych odmianach metody deformacji siatki wtórnej pozwala na pełną ich ocenę, ponieważ wszelkie inne kryteria oceny przybierają w obu przypadkach jednakowe wartości, co jest konsekwencją podobnego mimo wszystko usytuowania odcinków o jednakowych długościach w obszarze równobocznego trójkąta sferycznego. Metodę deformacji siatki wtórnej wykorzystującej własności rzutu prostopadłego na płaszczyznę możemy z powodzeniem stosować dla wyznaczania związków miarowych siatek sferycznych rozpiętych nad różnymi typami rzutów.



Rys. 68. Schemat postępowania przy wyznaczaniu rzutem prostopadłym zdeformowanej siatki trójkątnej w obszarze sześciokątnej podstawy rzutu.

części /rys. 68a/. Łuk FC jest cięciwą koła wielkiego kuli o środku O_s ograniczoną przez kąt FO_sC , gdzie długości odcinków FO_s i CO_s są równe długości promienia kuli. Rzutem prostopadłym znajdujemy odwzorowanie punktów równego podziału łuku FC na odpowiadającej mu przekątnej sześciokąta ABCDEF. Przez obrót dookoła punktu S wprowadzamy to nowe uporządkowanie na pozostałych przekątnych AD i BE.

Dalej postępujemy tak samo tzn. wyznaczamy odpowiednie linie i znajdujemy środki ciężkości ograniczonych przez nie wewnętrznych trójkątnych pól, a po ich wzajemnym połączeniu otrzymamy rysunek nowej, zdeformowanej siatki trójkątnej /rys. 68b/.

Siatka ta stanowi punkt wyjścia do opracowania siatki sferycznej na czaszy o zadany promieniu i rozpiętej nad sześciokątnym rzutem ABCDEF. Ponownie rzutując wierzchołki zdeformowanej siatki rzutem prostopadłym do płaszczyzny sześciokąta, otrzymamy równo-

mierną siatkę sferyczną.

Zgodnie z obowiązującymi zasadami deformowania wewnętrznych siatek dla rzutu trójkątnego i sześciokątnego przystępujemy do wyznaczania rzutem prostopadłym zdeformowanej siatki czworokątnej wewnątrz kwadratu ABCD, będącego podstawą fragmentu czaszy, o zadonym wstępnie promieniu. Aby ją uzyskać należy, postępując zgodnie z podanymi wcześniej zasadami, uporządkować rzutem prostopadłym krawędzie boczne tak jak na przykładzie krawędzi AB.

Na rysunku 69 odcinki AO_{K_1} i BO_{K_1} równe są długościom odcinków HP_1 i HP_2 i jednocześnie równe promieniowi łuków wszystkich krawędzi bocznych czaszy rozpiętej nad rozpatrywanym kwadratem podstawy. Procedura wyznaczania długości promienia tych łuków przebiega podobnie jak dla rzutów podstawy w formie trójkąta lub sześciokąta. Następnie rzutem prostopadłym wprowadzamy nowe uporządkowanie punktów na liniach ograniczonych punktami EF i GH /rys. 71/, oraz na przekątnych BD i AC /rys. 70/. Łuki odpowiadające krawędziom bocznym i odcinkom EF i GH dzielimy na n równych części, zaś łuki odpowiadające przekątnym BD i AC na $2n$ równych części. Położenie wierzchołków zdeformowanej siatki trójkątnej wyznaczyć możemy tylko w obszarze jednego z przystających równoramiennych trójkątów prostokątnych np. w trójkącie SFC, określając położenia środków ciężkości odpowiednich wewnętrznych trójkątów /rys. 72/. Pozwoli to na znalezienie w całym obszarze kwadratu ABCD wierzchołków i rysunku zdeformowanej siatki czworokątnej /rys. 73/.

Tak zdeformowana siatka pozwoli na uzyskanie regularnej, sferycznej siatki czworokątnej rozpiętej nad danym rzutem, gdy ponownie rzutem prostopadłym odwzorujemy węzły tej siatki na powierzchnię sfery, o zadanim na wstępie promieniu i odległości jej środka od płaszczyzny rzutu. Zdeformowanie to będzie odwrotnie proporcjonalne do odległości środka kuli od płaszczyzny rzutu i będzie większe dla sfer, których środki leżą bliżej tej płaszczyzny. Warto zwrócić uwagę na charakterystyczny rysunek zdeformowanej w ten sposób siatki czworokątnej i porównać z rysunkiem również czworokątnej siatki zdeformowanej rzutem środkowym na płaszczyznę. Różnice w rysunku tych dwóch siatek są na przykładzie rzutu w formie czworokąta bardziej widoczne niż dla podobnych siatek powstałych w obszarach podstawy trójkątnej bądź sześciokątnej.

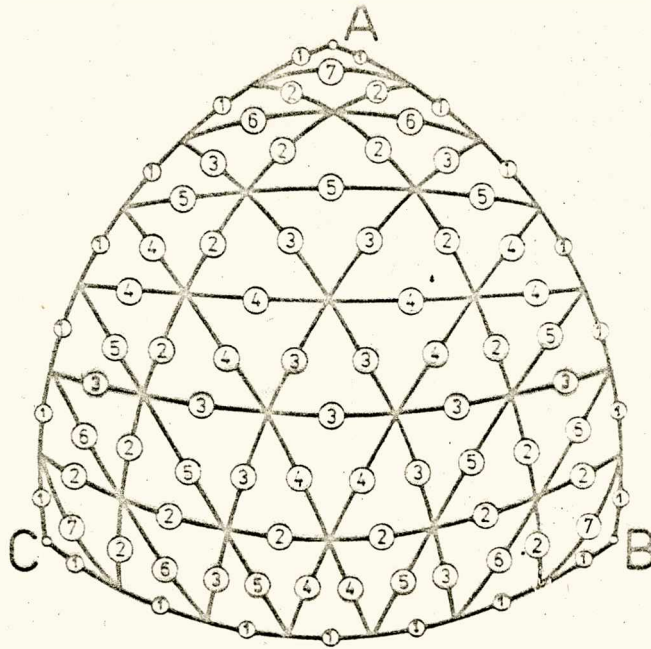
Dla każdej formy rzutu proces określania położenia węzłów zdeformowanej siatki przeprowadzany był kolejno dla tych samych danych początkowych. Oznacza to, że np. dla podstawy w formie trójkąta równobocznego w obu prezentowanych odmianach metody deformacji siatki wtórnej przyjęto takie same długości promienia kuli, jak i oddalenia jej środka od płaszczyzny rzutu.

3.10. Podsumowanie

Przedstawiona wyżej metoda deformacji siatki wtórnej służy do otrzymywania regularnych siatek sferycznych. Stosowanie jej znacznie upraszcza i przyspiesza proces obliczeń. Można ją z powodzeniem stosować do określania siatek sferycznych na bazie różnorodnych wielościanów wykorzystując do tego celu rzut środkowy ściany wielościanu na współśrodkową kulę, a także przy pomocy rzutu prostopadłego na płaszczyznę kształtować siatki sferyczne rozpięte nad różnymi typami rzutów.

Jednym z kryterium regularności danej siatki sferycznej jest liczba określająca ilość odcinków o różnych długościach w całym jej obszarze $/e_k/$. Metoda deformacji siatki wtórnej pozwala na uzyskanie w obszarze równobocznego trójkąta sferycznego liczby różnych odcinków odpowiadającej liczbie podziału jego boków na n równych odcinków /rys. 74/. Najważniejszym z kryteriów przydatności tego typu siatek w konstrukcjach prętowych jest stosunek długości odcinków najdłuższych do długości odcinków najkrótszych uzyskiwanych w wyniku stosowania danej metody.

Stosując omawianą metodę na bazie 20-ścianu foremego stosunek ten, określony przez η , osiąga najmniejszą, graniczną wartość dla tego typu wielościanu $/1,1756/$. Zróżnicowanie długości wszystkich odcinków jest więc minimalne, jednak długość odcinków leżących w poszczególnych pasach różnią się na tyle, aby wyeliminować ewentualne pomyłki dotyczące montażu prętów w rzeczywistej konstrukcji. Z tych też względów siatki sferyczne otrzymywane w metodzie deformacji siatki wtórnej można określić jako optymalne.



Rys. 74. Ułożenie odcinków o różnych długościach w obszarze równobocznego trójkąta sferycznego uzyskiwane w metodzie deformacji siatki wtórnej. Odcinki o takich samych numerach porządkowych posiadają tę samą długość.

Idea otrzymywania regularnych siatek sferycznych może być także wykorzystana dla potrzeb innych form powłok obrotowych np. dla paraboloidy obrotowej. W tym przypadku należy w okręgu podstawy określić taki wielokąt, aby jego wierzchołki łącznie z punktem zwornikowym kopuły tworzyły jednakowe trójkąty równoramienne. Siatka trójkątna w obszarze każdego z trójkątów deformowana będzie rzutem środkowym do ogniska właściwej dla formy przekrycia paraboli. Ponownie rzutując rzutem środkowym z ogniska paraboloidy tę zdeformowaną siatkę na powierzchni powłoki uzyskamy bardzo regularną trójkątną siatkę przestrzenną. Najbardziej regularne siatki uzyska się na przekryciach o niewielkich wyniosłościach.

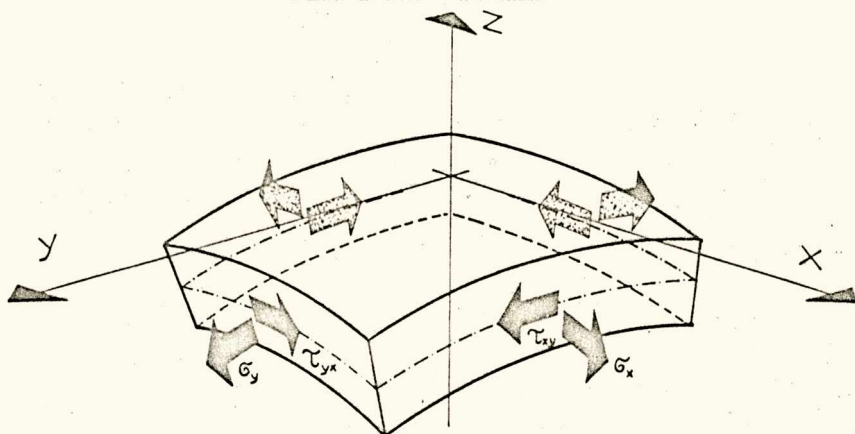
Rozdział IV

PROBLEMY STATYCZNE I TECHNOLOGICZNE

4.1. Problemy statyczne

4.1.1. Definicja stanu błonowego powłoki

Dźwigary powierzchniowe o jedno- lub dwukrzywiznowej powierzchni środkowej nazywamy powłokami. Odpowiednie zakrzywienie powierzchni środkowej powoduje skierowanie strumienia sił wewnętrznych w taki sposób, że siły te wywołują ściskanie, rozciąganie lub ścinanie powłoki w jej płaszczyźnie, eliminując w zasadzie siły wywołujące zginanie. Taki stan naprężeń nazywa się stanem błonowym. [13] [24]



Rys. 75. Błonowy stan naprężeń w elemencie powłoki.

Dla zapewnienia błonowego stanu pracy powłoki należy spełnić szereg następujących warunków:

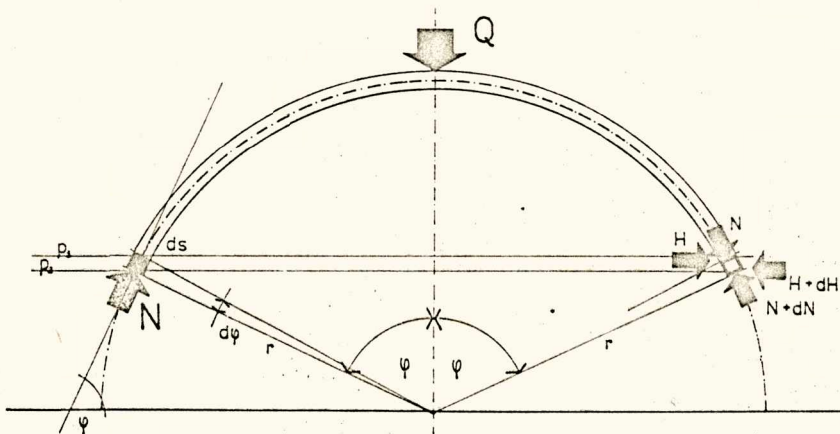
- grubość powłoki jest mała w stosunku do pozostałych wymiarów i nie zmienia się skokowo,
- powierzchnia środkowa jest jednakowo oddalona od górnej i dolnej powierzchni powłoki i zakrzywiona jest w sposób ciągły,
- obciążenie powłoki rozłożone jest równomiernie na całej jej powierzchni,

- podparcie powłoki winno być takie, aby siły brzegowe skierowane były stycznie do powierzchni środkowej. [24] [37]

Najczęściej proces projektowania elementu konstrukcji polega na wstępnym określeniu jego przekroju a następnie obliczeniu wypadkowej naprężeń w nim działających. Ponieważ siły zaburzające stan błonowy a powstające w miejscu podparcia powłoki mają nieznacznym zasięg jak i powodują niewielkie wartości sił wywołujących zginania, dlatego w projektowaniu przekryć powłokowych wystarczy przeważnie uwzględnić jedynie naprężenia normalne σ_x, σ_y , oraz naprężenia styczne $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ /rys. 75/. [24]

4.1.2. Przykłady naprężeń błonowych w powłokach kulistych

Obliczanie powłok wg teorii błonowej polega na wyznaczeniu wartości występujących w niej sił: południkowej /N/, równoleżnikowej /R/ i sił rozporowych /H/. Wielkość tych sił wyliczyć można z warunków równowagi pierścienia powłoki kulistej o szerokości ds , otrzymanego przez przecięcie tej powłoki dwiema równoległymi płaszczyznami p_1 i p_2 /rys. 76/.



Rys. 76.

Wartość składowej pionowej obciążenia symetrycznie rozłożonego na powierzchni kopuły określona

$$Q = -2\pi x \cdot N \cdot \sin\varphi$$

stąd wielkość siły południkowej wyniesie:

$$N = \frac{Q}{2\pi x \cdot \sin \varphi}$$

Siła N liczona na jednostkę długości odpowiedniego równoleżnika i jest zawsze siłą ściskającą.

Wartości sił rozporu H oraz sił równoleżnikowych R wyliczyć można także na podstawie warunków równowagi omawianego pierścienia. Na górną krawędź tego pierścienia działają siły N oraz siła H, zaś na dolną jego krawędź oddziałują przeciwnie do nich skierowane siły N + dN oraz siła H + dH. /rys. 76/. Tak więc pierścień kołowy o szerokości ds obciążony jest równomiernie na całym obwodzie różnicą sił poziomych równą:

$$dH = /H + dH/ - H$$

Wartość siły H będącej składową poziomą siły N wyraża się wzorem:

$$H = N \cdot \cos \varphi = \frac{Q \cos \varphi}{2\pi x \cdot \sin \varphi}$$

stąd:

$$H = \frac{Q \cdot \operatorname{ctg} \varphi}{2\pi x}$$

Ponieważ na pierścień o jednakowej szerokości ds przypada siła dH zatem siłą osiową R występującą w tym pierścieniu określa wzór:

$$R = \frac{dH \cdot x}{ds}$$

Znając już wzór na wartość siły H można łatwo otrzymać podobny wzór określający wartość siły R:

$$R = \frac{d/Q \operatorname{ctg} \varphi / x}{2\pi x \cdot ds} = \frac{1}{2\pi} \frac{d / Q \operatorname{ctg} \varphi /}{ds}$$

Podane wyżej wzory na wartości sił południkowych N i równoleżnikowych R posłużą do obliczenia wartości tych sił dla indywidualnych przypadków symetrycznego obciążenia powłok kulistych. Jednym z takich przypadków jest obciążenie kopuły ciężarem rozłożonym równomiernie g na jej powierzchni. Odpowiada to obciążeniom pochodzącym od ciężaru własnego konstrukcji kopuły, bądź od ciężaru jej pokrycia /rys. 77/.

Całkowite obciążenie kopuły dla $r_0 = r \cdot \sin \varphi$ i przy $ds = r d\varphi$ wynosi :

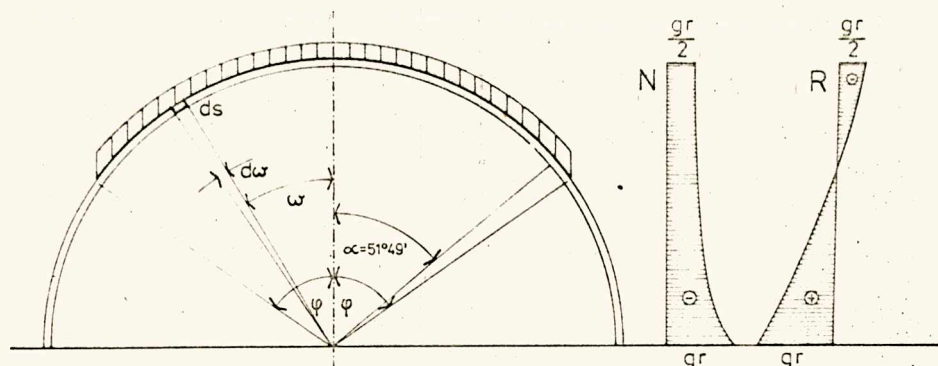
$$Q = \int_0^{\varphi} 2\pi gr^2 \sin \omega d\omega = 2\pi r^2 / 1 - \cos \varphi /$$

gdzie g oznacza wielkość ciężaru przypadającą na jednostkę długości południka. Siła południkowa równa jest więc:

$$N = \frac{2\pi gr^2 / 1 - \cos \varphi /}{2 \pi r \sin^2 \varphi} = \frac{gr / 1 - \cos \varphi /}{\sin^2 \varphi} = \frac{gr}{1 + \cos \varphi}$$

Siłę równoleżnikową R dla $ds = r d\varphi$ wyliczymy ze znanego już wzoru:

$$R = \frac{dQ / \operatorname{otg} \varphi /}{2 \pi r d\varphi} = gr \cdot \left(\cos \varphi - \frac{1}{1 + \cos \varphi} \right)$$



Rys. 77. Wielkości sił południkowych $/N/$ i równoleżnikowych $/R/$ przy obciążeniu kopuły ciężarem rozłożonym równomiernie na jej powierzchni.

Zgodnie z wcześniejszym zaobserwowanym faktem siła południkowa jest zawsze ściskająca $/- /$ osiągając w zworniku kopuły dla $\varphi = 0^\circ$ wartość równą $\frac{gr}{2}$, zaś na poziomie równoleżnika przy $\varphi = 90^\circ$ wartość $N = gr$.

Siła równoleżnikowa w wierzchołku kopuły jest siłą ściskającą $/- /$, wartości $R = \frac{gr}{2}$, zaś u jej podstawy jest siłą rozciągającą $/+ /$ osiągającą przy $\varphi = 90^\circ$ wartość $R = gr$.

Zmiana znaku siły R ma miejsce przy wartości $\alpha = 51^\circ 49'$ osiągając w tym punkcie wartość zerową. Powyżej wartości tego kąta w obszarze kopuły występują więc jedynie siły ściskające gdy zaś kopuła ma formę bardziej wyniosłą, jej podstawa musi być zdolna do przejścia dużych sił rozciągających. [24]

Innym rodzajem jest obciążenie rozłożone równomiernie na jednostkę rzutu poziomego kopuły $/p /$. Całkowite obciążenie kopuły wynosi:

$$Q = p\pi r \cdot \sin\varphi /^2 = p\pi r^2 \cdot \sin^2\varphi$$

Na podstawie podobnych zależności obliczymy wartość siły południkowej:

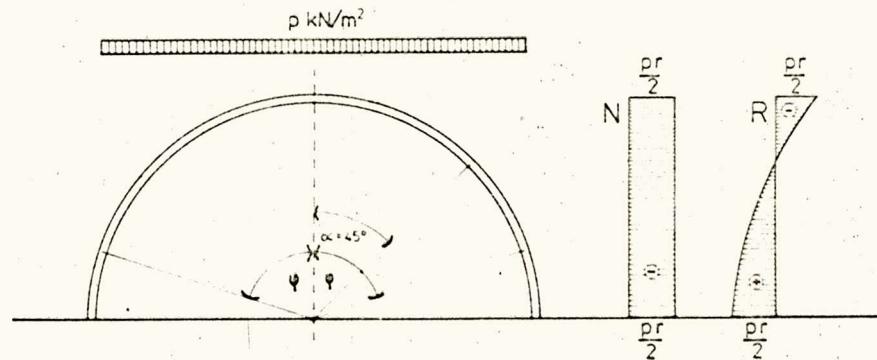
$$N = \frac{Q}{2\pi r \sin^2\varphi} = \frac{p\pi r^2 \sin^2\varphi}{2\pi r \sin^2\varphi} = \frac{pr}{2}$$

Siła południkowa dla tego typu obciążenia posiada stałą wartość w każdym przekroju kopuły. Wielkość siły równoleżnikowej R wyrażona jest następującym wzorem:

$$ds = r \cdot d\varphi$$

$$R = \frac{1}{2\pi} \frac{dQ}{ds} \operatorname{ctg}\varphi = \frac{pr}{2} \cos 2\varphi$$

Z powyższego wzoru wynika, że siła równoleżnikowa R dla $\varphi = 0$ osiąga wartość $\frac{pr}{2}$ zaś dla $\varphi = 90^\circ$ na poziomie równika kuli wynosi $R = \frac{pr}{2}$, Wartość zerową siła ta osiąga dla $\alpha = 45^\circ$ /rys. 78/.



Rys. 78. Wielkości sił południkowych /N/ i równoleżnikowych /R/ przy obciążeniu równomiernie rozłożonym na jednostkę powierzchni kopuły.

Siła rozporu, którą musi przenieść wieniec podporowy kopuły dla tego przypadku obciążenia dana jest wzorem:

$$S = H x = \frac{Q \operatorname{ctg}\varphi}{2\pi}$$

Siła rozporu zanika dla wartości $\varphi = 90^\circ$, tak więc w przekrojach kopułowych dla których w miejscu podparcia styczna do powłoki jest prostopadła do płaszczyzny podstawy, stosowanie dodatkowego wienca oporowego nie jest konieczne. Ta korzystna własność nie wpływa jednak na szerokie wykorzystywanie w budownictwie kopuł o takich parametrach ponieważ przy dużej wynio-

skości, kopuły te charakteryzują się minimalnym stopniem wykorzystania obejmowanej przez nie kubatury. Względy ekonomiczne decydują o tym, że najczęściej projektowanymi i wykonywanymi są kopuły o tzw. małej strzałce przekrycia, zaś te z kolei wymagają bardziej szczegółowej i pogłębionej analizy statycznej.

4.1.3. Projektowanie powłok wg teorii zgięciowej

W przekryciach o małej wyniosłości wyliczone wg zasad teorii błonowej naprężenia panujące w obszarze powłoki tuż przy wieńcu jak i w samym wieńcu oporowym różnią się nie tylko swymi wartościami lecz także znakiem. Powoduje to znacznie większe odkształcenia pierścienia podporowego niż samej powłoki i stwarza tym samym w rzeczywistej konstrukcji warunki pracy daleko odbiegające od zasad pracy powłoki w stanie błonowym. Zabezpieczeniem przed powstaniem dodatkowych odkształceń pochodzących od zginania jest wprowadzenie łuku przejściowego pomiędzy powłoką a zazwyczaj monolitycznie z nią połączonym wieńcem. Łuk przejściowy o odpowiednio uformowanym kształcie powinien znajdować się poniżej punktu zerowego sił równoleżnikowych. Zapewni to przejście przez powłokę części sił równoleżnikowych co spowoduje ujednolicenie odkształceń samej powłoki i jej wieńca podporowego. Innymi sposobami zabezpieczenia powłoki przed powstawaniem nadmiernych momentów zginających jest zastosowanie wieńca sprężonego, dzięki któremu można nie stosować łuku przejściowego, oraz wprowadzenie krzywizn przejściowych z jednoczesnym pogrubieniem powłoki w miejscach jej podparcia. Podstawową zasadą wykorzystywaną w teorii zgięciowej jest warunek jednoczesnego zrównania poziomych odkształceń promieniowych powłoki i sztywnego wieńca podporowego. Pole przekroju tego wieńca określone jest wzorem:

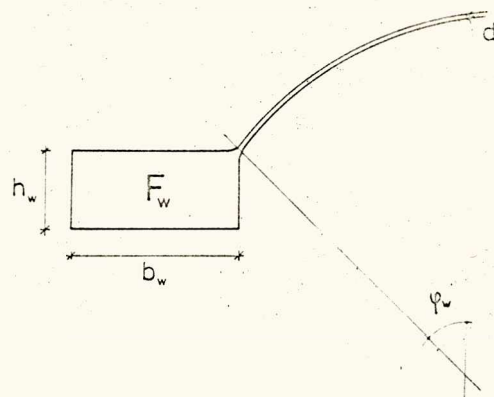
$$F_w = \frac{d \cdot \pi \cdot \cos \varphi_w}{\left(\frac{-R}{N} + \gamma \right) - \frac{rd \sin \varphi}{b_w}} \quad [23]$$

gdzie:

r - stała Poissona

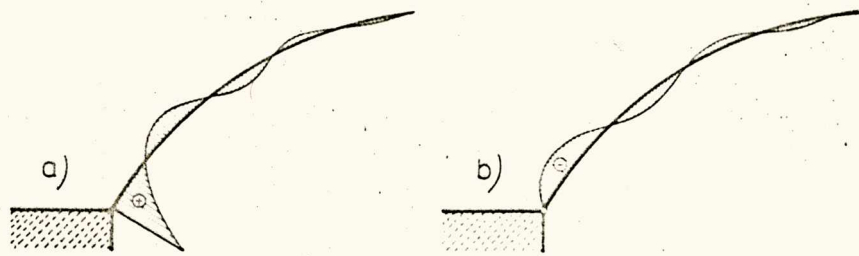
d - grubość powłoki

b_w - szerokość wieńca podporowego



Zaburzenia błonowego stanu równowagi powłoki prowadzą do wzrostu sił równoleżnikowych $/R/$ i południkowych $/N/$ o wartości wywołane zginaniem powłoki w miejscach jej podparcia i powodują powstanie momentów zginających działających w płaszczyznach południkowych $/M_\varphi/$ oraz momentów działających w płaszczyznach równoleżnikowych $/M_\theta/$. Proces projektowania powłoki wg teorii zgięciowej polega na wyliczeniu wartości podanych wyżej sił i momentów zginających i przeprowadzany jest dla dwóch sposobów posadowienia powłoki tj. dla powłok przegubowo opartych na wieńcu podporowym oraz dla powłok sztywno zamocowanych w nieodkształcalnym węźle oporowym.

Projektowana powłoka obok wielkości sił N i R musi być zdolna do przeniesienia obciążeń wywołanych momentem M_φ , którego charakterystyczny przebieg w zależności od sposobu podparcia powłoki pokazano na rysunku 79.



Rys. 79. Przebieg zmian wartości momentu M_φ , a/ przy sztywnym zamocowaniu, b/ przy przegubowym oparciu powłoki na wieńcu podporowym.

Wielkości momentu M_φ niekiedy dość znaczne, w punktach podparcia powłoki ulegają jednak szybko zmniejszeniu i stopniowemu zanikowi. Wartości momentów M_θ działających w płaszczyznach równoleżnikowych można w procesie projektowania pominąć ze względu na niewielkie ich wielkości. [23]

4.1.4. Ogólne uwagi dotyczące obliczenia i projektowania struktur prętowych

Obliczenia statyczne przestrzennych struktur prętowych oraz wymiarowanie przekrojów elementów konstrukcyjnych ze wzglę-

du na bardzo dużą liczbę prętów i węzłów jest procesem bardzo złożonym. W analizie statycznych struktur prętowych niewiadomy-
mi są przesunięcia oraz obroty węzłów i przy założeniu sztywne-
go połączenia prętów z węzłami liczba podstawowych niewiado-
mych równa jest sześciokrotnej liczbie węzłów. Skomplikowanie
tak dużą liczbą niewiadomych procesu obliczeń statycznych po-
woduje stosunkowo częste wykorzystywanie metod przybliżonych.
Ich zastosowanie dla pewnych grup podstawowych systemów kon-
strukcyjnych prowadzi do szybkiego oszacowania z zadowalającą
dokładnością wartości powstających w nich sił, wymaganych dla
zaprojektowania elementów całego przekrycia.

Każda projektowana struktura prętowa winna spełniać koniecz-
ne warunki sztywności. Dla jednowarstwowych przekryć prętowych
warunek ten przybiera postać:

$$p \geq 2w - 3$$

gdzie: p - liczba prętów

[7] [20] [21]

w - liczba węzłów

Dla przestrzennej konstrukcji prętowej sztywnej samej w sobie
zależność ta określona jest wzorem:

$$p \geq 3w - 6$$

Oprócz tego przestrzenne struktury prętowe składające się z wie-
łościanów zamkniętych o ścianach trójkątnych powinny spełniać
warunek geometrycznej niezmienności zapisanej w postaci:

$$p = w + s - 2$$

gdzie przez s oznaczono liczbę ścian tych wielościanów. [21]

Dla skomplikowanych struktur przestrzennych ostatni podany
wzór traci swą moc obowiązującą, a próby oszacowania geometrycz-
nej niezmienności struktury polegać muszą na badaniu czy dana
struktura składa się z prostych, zamkniętych wielościanów o ścia-
nach trójkątnych.

Oprócz tego przestrzenne struktury prętowe o węzłach przegubo-
wych spełniać muszą warunek:

$$p \geq 3w - r$$

gdzie:

r - liczba składowych reakcji podporowych

Warunek ten konieczny, lecz nie dostateczny określa liczbę

składowych reakcji podporowych /r/, przy których konstrukcja nie zmieni się w łańcuch kinematyczny. [21]

Naprężenia panujące w elementach przestrzennych struktur prętowych mogą być wyznaczone dla niektórych typów konstrukcyjnych przekryć płaskich na podstawie analogii płytowej, zaś dla jedno i dwuwarstwowych struktur na zasadzie analogii błonowej i zgięciowej. Wstępne wymiarowanie elementów powłoki prowadzone jest na podstawie panujących w konstrukcji naprężeń wyliczonych metodą sił i przemieszczeń. Do obliczeń przyjmuje się zastępcze grubości powłoki wyznaczone z analogii błonowej oraz zastępcze grubości zgięciowe powłok ciągłych. W obliczeniach należy uwzględnić także dopuszczalne odchyłki położenia węzłów i prętów na powierzchni środkowej powłoki wynikające z technicznych warunków wykonywania konstrukcji. [8] [25]

Bardzo ważnym we wstępnym etapie obliczeń jest dobre oszacowanie obciążenia krytycznego. Wyznaczanie grubości zastępczych powłoki oraz wielkości obciążeń krytycznych określa się indywidualnie dla podstawowych systemów konstrukcyjnych w zależności od własności użytego na konstrukcję materiału, sposobu podparcia, układu prętów struktur płaskich i przestrzennych a także sposobu łączenia prętów w węzłach tzn. dla konstrukcji o węzłach sztywnych i przegubowych. Oszacowanie wielkości naprężeń krytycznych wpływa na pewność i bezpieczeństwo projektowanego przekrycia. W jednowarstwowych dwukrzywiznowych płaskich strukturach prętowych utrata stateczności konstrukcji następuje najczęściej pod wpływem niesymetrycznego ich obciążenia. Utrata stateczności powłoki wywołana jest:

- utratą stateczności pręta,
- utratą stateczności węzła polegającą na przeskoku węzła do wnętrza konstrukcji,
- ogólną utratą stateczności całej konstrukcji. [7] [25]

O ile utrata stateczności pręta na ogół nie powoduje groźniejszych skutków to utrata stateczności węzła spowodowana jego przeskakiem do wnętrza przekrycia prowadzi najczęściej do utraty stateczności całego ustroju.

Trudności wynikające z ogromnej złożoności obliczeń statycznych spowodowały powstanie wielu metod przybliżonego ich rozwiązywania, znacznie tym samym przyspieszając i usprawniając projekto-

wanie prętowych przekryć strukturalnych. Metody przybliżone można jednak stosować w ograniczonym wieloma czynnikami zakresie. Nie można ich stosować dla badania stanu naprężeń w przykryciach o różnych kształtach wywołanych innym rodzajem obciążeń niż równomiernie rozłożone na całej powierzchni. Kompleksowe i dokładne obliczenia statyczne struktur prętowych pracujących w stanie sprężystym i plastycznym rozpiętych nad różnymi kształtami rzutów z uwzględnieniem różnych wariantów obciążenia może być dokonywane tylko za pomocą elektronicznych maszyn cyfrowych, przy użyciu odpowiednich dla tego sposobu obliczeń metod. [21] [47]

4.2. Problemy technologiczne

4.2.1. Technologia, proces produkcyjny, proces technologiczny

Już w najdawniejszych epokach historycznych umiano przy użyciu materiałów określonych mianem tradycyjnych wznosić kopuły o znacznych rozpiętościach, których budowa nawet w obecnej dobie stwarza pewne trudności. W przyszłości budowniczowie tych obiektów będąc projektantami byli jednocześnie ich wykonawcami nadzorując bezpośrednio wykonywanie materiałów konstrukcyjnych oraz aktywnie uczestnicząc w procesie wznoszenia obiektu. Powstała w wyniku procesu budowania konstrukcja jest materialnym świadectwem osiągniętego w danym czasie i miejscu poziomu sił wytwórczych. Stojące do dyspozycji architekta a wyznaczone poziomem sił wytwórczych środki techniczno-konstrukcyjne służące do wznoszenia budowli określają nie tylko parametry materialne, lecz również walory estetyczne powstających obiektów. Dla różniczenia epok w budownictwie nie tyle jest ważnym co, lecz jak się buduje. Ciągłe stawianie tego pytania prowadzi do powstawania wciąż nowych systemów konstrukcyjnych realizowanych w różnych technologiach.

Pojęciem technologii określa się:

"... metodę techniczną, będącą uporządkowanym zbiorem operacji, dzięki której za pomocą wykorzystywania zjawisk fizycznych osiąga się pożądaną zmianę stanu lub zachowania się przedmiotów materialnych..." zaś procesem produkcyjnym" nazywamy zespół

ściśle ze sobą powiązanych czynności potrzebnych do przekształcenia materiałów, surowców lub półprefabrykatów w gotowy wyrób". [42]

Zadaniem procesu technologicznego, obejmującego dwie fazy procesu produkcyjnego, jest uporządkowanie całości tych procesów przez ustalenie hierarchii ważności poszczególnych operacji. W takim ujęciu technologia wykonywania obiektów budowlanych składa się z procesu projektowania i produkcji elementów konstrukcyjnych oraz procesu montażu całości obiektu. Każdy z tych procesów składa się z kolei z wielu etapów, zależnych od typu przyjętej technologii budowlanej. [28]

Postępujący od połowy XIX wieku rozwój uprzemysłowionych metod budowania i uwarunkowany czynnikami ekonomicznymi powoduje coraz częstsze stosowanie^{nie} tylko prefabrykowanych systemów konstrukcyjnych lecz także szerokiego asortymentu innych elementów budowlanych. Tak więc zasady prefabrykacji coraz częściej wpływają na kształt i formę obiektów architektonicznych.

4.2.2. Podstawowe cechy systemów prefabrykowanych

Zastosowanie metod produkcji przemysłowej do wykonywania elementów budowlanych powoduje:

- zmechanizowanie i zautomatyzowanie produkcji prefabrykatów,
- uniezależnienie produkcji od warunków atmosferycznych dzięki przeprowadzaniu jej w fabrykach,
- obniżkę kosztów elementów składowych wynikającą z masowej ich produkcji,
- znaczne obniżenie ciężaru konstrukcji,
- skrócenie czasu i uproszczenie montażu obiektów,
- niskie koszty transportu oraz możliwość prostego składowania,
- ogólną obniżkę kosztów.

Podane wyżej cechy odnoszą się głównie do zasad prefabrykacji stosowanej w przestrzennych strukturach prętowych. Wykonywane w tym systemie konstrukcje mogą być wykorzystywane w obiektach o różnym przeznaczeniu funkcjonalnym a przez możliwość tworzenia dużej liczby kombinacji z jednoczesną swobodą kształtowania w trzech wymiarach pozwalają na uzyskanie intere-

sujących form architektonicznych. Prętowe przekrycia strukturalne pozwalają na przekrywanie nimi powierzchni o dowolnym kształcie podstawy przy równie dowolnie rozmieszczonym systemie podpór.

Ponadto przekrycia te charakteryzują się dużą sztywnością oraz pewnością samej konstrukcji, dzięki temu pod działaniem dużych sił wywołanych np. eksplozją nie ulegają natychmiastowemu zniszczeniu. Unifikacja elementów składowych pozwala na wymianę zużytych lub zniszczonych partii konstrukcji, a w przypadkach koniecznych równie prosty jak montaż proces rozbiórki przekrycia. [2] [9] [20] [33] [44] [48]

Obok licznych zalet prefabrykowane przekrycia strukturalne posiadają również wady. Struktury te składające się z dużej liczby elementów są ustrojami wielokrotnie statycznie niewyznaczalnymi. Nośność przekryć o małych wymiarach można określić na drodze doświadczałnej jednak dla struktur o większych rozmiarach koniecznym staje się dokonywanie obliczeń oraz wymiarowania ich elementów składowych za pomocą elektronicznych maszyn cyfrowych. Technika ta znacznie przyspieszając etap projektowania pozostaje jednak nadal techniką drogą. Zastosowanie w konstrukcji przekryć prefabrykowanych struktur prętowych powoduje konieczność wykorzystywania materiałów konstrukcyjnych o wysokim stopniu przetworzenia. Cena jednej tony tych konstrukcji jest dużo wyższa od ceny tej samej ilości materiałów tradycyjnych. Ogólną obniżkę kosztów uzyskuje się dzięki wielkoserijnej produkcji części składowych. Unifikacja elementów powoduje jednak niepełne wykorzystanie nośności zużytych na konstrukcję przekrycia materiałów. W płaskich przekryciach strukturalnych tylko znikoma liczba prętów jest w pełni obciążona, zatem ogromna większość prętów ma nadmierny przekrój.

Sposoby niwelowania rezerw nośności polegają głównie na stosowaniu w uprzednio dokładnie rozpoznanych partiach przekrycia prętów o różnych przekrojach, co nieco komplikuje proces montażu. Podkreślona na wstępie wielowariantowość zastosowań oraz możliwość tworzenia różnorodnych form architektonicznych dokonywana może być jedynie w ramach jednego z systemów konstrukcyjnych. Podniesienie efektywności przekryć strukturalnych polegające na zastosowaniu ich jako konstrukcji nośnej dwukrzywiznowych form powłokowych w znacznym stopniu ograniczają podstawowe zasady prefabrykacji elementów konstrukcji.

4.2.3. Ogólne zasady projektowania i wykonywania prefabrykowanych elementów przekryć

Wyznaczone na drodze rachunkowej wielkości sił i naprężeń panujących w całym obszarze przekrycia łącznie z rodzajem przyjętej w rozwiązaniu technologii i właściwym jej zastosowaniu cechami wytrzymałościowymi materiałów budowlanych decydują o sposobie wykonania oraz wielkościach przekrojów poprzecznych elementów konstrukcji.

Żelbetowe prefabrykowane elementy przekryć powłokowych mają grubość rzędu kilku centymetrów, wysokość ich odpowiednich żeber mieści się zazwyczaj w granicach od kilkunastu do kilkudziesięciu centymetrów, zaś ich długość przekracza niekiedy granicę kilkunastu metrów. Wykonuje się je najczęściej na placu budowy w formach drewnianych obitych blachą, stalowych, bądź matrycach żelbetowych zależnie od liczby wykonywanych elementów. Najistotniejszym w procesie projektowania jest uwzględnienie naprężeń powstających podczas ich montażu. Sposób montażu wpływać więc musi na ostateczną formę prefabrykatu. Montaż elementów przeprowadzany różnymi sposobami polega na złożeniu ich na powierzchni projektowanego przekrycia, gdzie łączy się je za pomocą śrub lub zespawanie stalowych nakładek a następnie zalewa się styki betonem o podwyższonej wytrzymałości. [23]

Względy ekonomiczne podane w rozdziale I pkt. 1.3 decydują o szerokim wykorzystywaniu prefabrykowanych konstrukcji metalowych czego przykładem jest rozwój systemów przekryć strukturalnych.

Generalna zasada projektowania konstrukcji ekonomicznej polegająca na zapewnieniu osiowego przekazywania sił między jej elementami ma szczególną moc obowiązującą w projektowaniu przestrzennych struktur prętowych. Ponieważ są one ustrojami bardzo skomplikowanymi składającymi się z dużej liczby elementów, nierównowaga ich połączeń prowadzi najczęściej do znacznych i nie wynikających bezpośrednio z wielkości obciążeń wzrostu naprężeń w węzłach oraz ich przemieszczeń, co ograniczać musi rozmiary projektowanych przekryć. Całkowicie rozbieralne systemy konstrukcyjne przestrzennych struktur prętowych składają się w zasadzie z dwóch podstawowych elementów; jednego bardzo prostego jakim jest pręt oraz drugiego bardziej złożonego jakim jest węzeł. Stopień dokładności wykonania tych elementów zależy

od charakteru ich połączeń, które decydują o sposobie ich pracy. Z punktu widzenia współpracy połączonych ze sobą części oprócz tolerancji wymiarowych połączeń duże znaczenie posiada dokładność ich kształtu i powierzchni. Dlatego należy dążyć do takiego projektowania węzłów i końcówek prętów, aby miały one optymalnie małą powierzchnię wspólną, która umożliwi dużą dokładność wykonywanych części i ich połączeń. Optymalne rozmiary połączeń wyznacza rodzaj ułożenia prętów w węzle oraz własności wytrzymałościowe przyjętych w rozwiązaniu materiałów konstrukcyjnych. Na trwałość i niezawodność wykonywanych połączeń wpływają również geometryczne własności części oraz jakość użytych materiałów. [23] [48]

Najczęściej stosowanymi w tych konstrukcjach są pręty stalowe bądź aluminiowe o przekrojach zamkniętych, zazwyczaj kołowych, rzadziej z kształtowników z blach o przekroju otwartym. Względy ekonomiczne, które zadecydowały o rozwoju prętowych struktur przestrzennych wymagają najczęściej łączenia ich elementów za pomocą śrub. Powoduje to jednak konieczność bardzo dokładnego wykonywania otworów na śruby. Tolerancja rozmieszczenia i wykonywania otworów w prefabrykowanych elementach budowlanych równa jest tolerancji przyjętej przy wykonywaniu podobnych otworów w elementach konstrukcji lotniczych i wynosi 0,125 mm. [36]

Ważnym dla tego typu połączeń są zabezpieczenia przed samoczynnym luzowaniem się śrub oraz zabezpieczenia antykorozyjne.

Samoczynne luzowanie się śrub ma miejsce w konstrukcjach narażonych na działanie obciążeń zmiennych oraz różnego rodzaju drgania w tym również drgania akustyczne. Najlepszym sposobem zabezpieczenia jest napinanie śrub aż do granicy plastyczności, dokonywane za pomocą np. kluczy dynamometrycznych. Nie wszędzie może być ono stosowane i dlatego zazwyczaj wykorzystuje się inne nieco mniej skuteczne lecz jednak wystarczające zabezpieczenia przez wprowadzanie przeciwnakrętek, podkładek podatnych i sprężystych, zawleczek a nawet odpowiednich klejów. Te ostatnie w podwyższonej temperaturze charakteryzują się spadkiem wytrzymałości.

Celem zabezpieczenia połączeń śrubowych przed korozją należy oddzielić metalowe ich części za pomocą różnego rodzaju podkładek z tworzyw sztucznych. Aluminiowe pręty konstrukcji

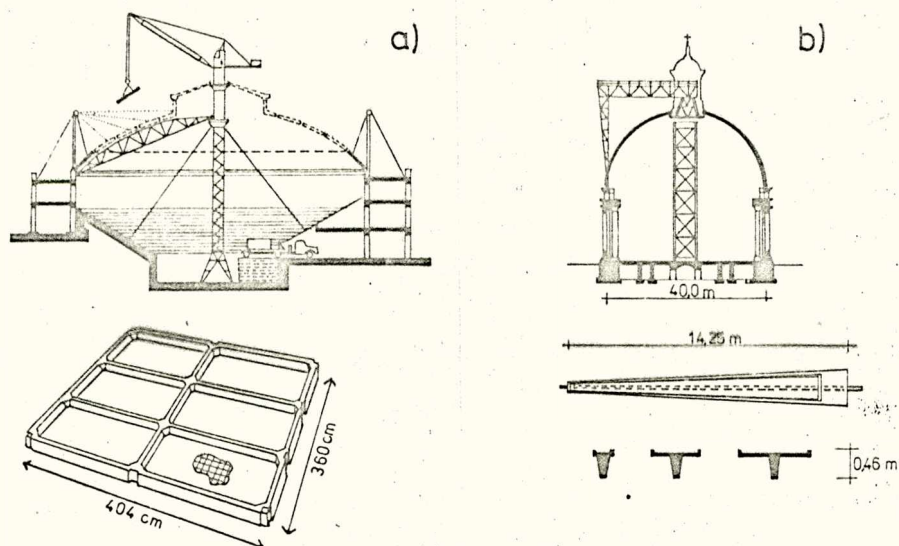
winny być łączone za pomocą śrub stalowych ze stali nierdzewnej bądź pokrytych neutralizującymi powłokami niklowymi lub chromowymi. W najczęściej wykorzystywanych konstrukcjach dla zabezpieczenia ich połączeń śrubowych przed korozją stosuje się substancje oleiste, ułatwiające montaż a następnie pokrywanie ich specjalnymi powłokami malarskimi.

Przytoczone wyżej zasady służą pomocą i muszą być respektowane przy określaniu geometryczno-konstrukcyjnych cech elementu modularnego, którego opracowanie jest kolejnym celem niniejszej pracy.

4.2.4. Metody montażu przekryć kopułowych

Proces montażu jest ostatnią fazą procesu technologicznego, który bezpośrednio związany jest z łączeniem oddzielnych jednostek w całość budowli. Koncepcja montażu, zależna od przyjętej technologii wykonania konstrukcji powstaje zazwyczaj równocześnie z projektem technicznym. Montaż prefabrykowanych przekryć kopułowych przeprowadzany jest poprzez łączenie ze sobą pojedynczych elementów bądź po uprzednim ich zespoleniu w odpowiednie segmenty kolejne układanie tych zestawów na powierzchni kopuły. Używa się do tego celu w zależności od wielkości części lub segmentów dźwigów stacjonarnych samojezdnych, podnośników hydraulicznych i elektrycznych, tymczasowych masztów montażowych oraz odpowiednio zaprojektowanych rusztowań. Montowanie gotowych segmentów odbywa się dwoma zasadniczymi sposobami, polegającymi na kolejnym układaniu ich w pasach równoleżnikowych kopuły /rys. 80a/ oraz poprzez układanie odpowiednio uformowanych żeber południkowych /rys. 80b/. [23]

Przedstawione na rys. 80 odmiany sposobów układania elementów prefabrykowanych dotyczą w zasadzie kopuł wykonywanych w technologii żelbetu. Rysunek 80a przedstawia schemat montażu kopuły stanowiącej przekrycie cyrku w Kijowie. Elementy składowe były układane w pasach równoleżnikowych i do momentu pełnego zamknięcia kopuły przytrzymywane były w swym położeniu przy pomocy systemu masztów zamocowanych w wieńcu kopuły i usztywnionych odpowiednio zakotwionymi odciągami. Poprawność ułożenia elementów kontrolowana była przy użyciu szablonu w postaci ruchomej kratownicy.



Rys. 80. Podstawowe sposoby układania prefabrykowanych elementów kopuł.

Ilustracją odmiennego sposobu układania elementów jest przykład montażu kopułowego przekrycia kościoła w Berlinie /rys. 80b/. Monolityczne żebra południkowe układane były za pomocą obrotowego dźwigu ustawionego również w środku kopuły. W dolnej swej części opierane były na wieńcu oporowym, zaś w górnej części na rusztowaniu opartym na konstrukcji dźwigu montażowego.

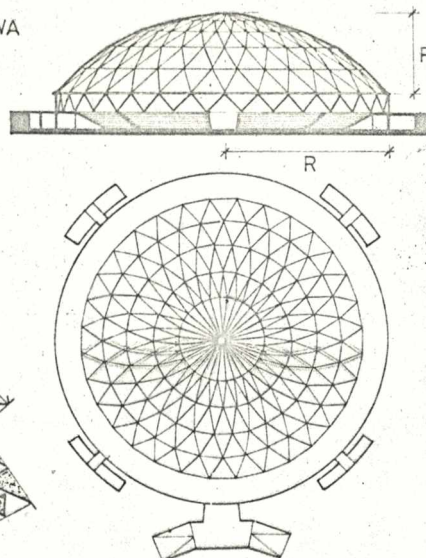
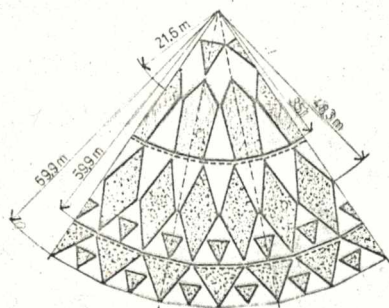
Dużą różnorodnością, uwarunkowaną własnościami wytrzymałościowymi metali cechują się przekrycia kopułowe wykonane z kształtowników stalowych i aluminiowych. W elementach składowych konstrukcji metalowej można nie uwzględnić dodatkowych naprężeń powstających podczas transportu a także zdolne są do przeniesienia różnych kierunków sił i naprężeń powstających podczas montażu konstrukcji. Podobna do zaprezentowanej wcześniej metody przy użyciu żurawi i rusztowań kratowych przeprowadzono montaż siatkowej kopuły hali widowiskowo-sportowej w Opolu /rys. 81/. [48]

Rysunek kopuły siatkowej podzielono na pięć współśrodkowych pasm. Podzielone trójkątne segmenty siatki ustawiono w kolejnych pasmach z zewnątrz kopuły, przy użyciu żurawi samojezdnych. Po ustawieniu pierwszego pasma przesuwano rusztowania do wnętrza kopuły. Ponieważ w ten sposób można było zmontować jedynie trzy pasma koniecznym stało się zmontowanie elementów

HALA WIDOWISKOWO - SPORTOWA
W OPOLU.

$R = 69,97 \text{ m}$

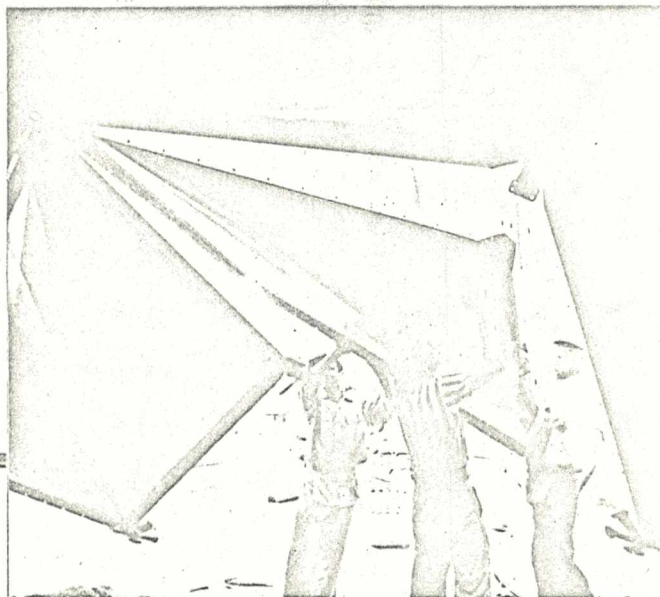
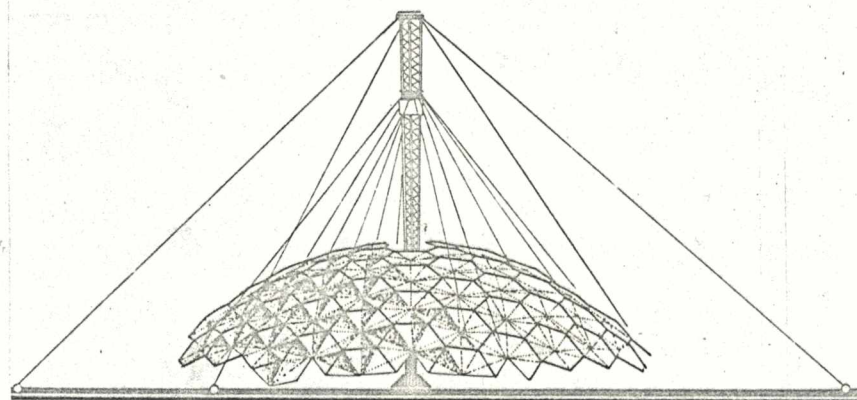
$F = 16,50 \text{ m}$



Rys. 81. Schemat podziału kopuły na elementy wysyłkowe.

pasm czwartego i piątego na poziomie posadzki obiektu a następnie przy pomocy centralnie umieszczonego masztu podniesienie tej części kopuły i zamontowanie w jej wierzchołku.

Idea centralnie umieszczonego masztu może być z powodzeniem stosowana dla wznoszenia całości konstrukcji /rys. 82/.

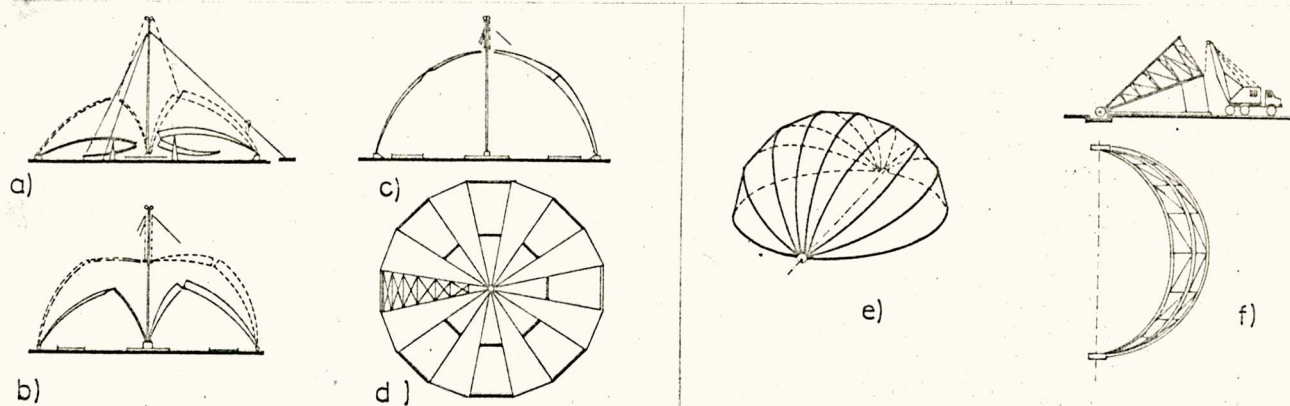


Rys. 82. Montaż kopuły geodezyjnej przy pomocy centralnie umieszczonego masztu.

Pomocniczy maszt montażowy ustawiony systemem zakotwionych w ziemi odciągów służy do podnoszenia zmontowanej już części przekrycia. Montaż następuje od wierzchołka ku dołowi kopuły, którą unoszą zamocowane w węzłach liny stalowe. Ten

sposób montażu umożliwia szybkie i proste zamocowywanie elementów składowych, eliminując potrzebę stosowania dodatkowych pomostów, gdyż wszystkie operacje dokonywane są na poziomie podstawy. Podobnie rzecz się ma przy wykorzystywaniu nadmuchiwanych balonów. Montaż rozpoczyna się od wierzchołka, następnie w miarę postępu montażu ku dołowi kopuły dopompowuje się balon. Po ukończeniu montażu wypuszcza się powietrze i usuwa balon. [46]

Swoboda kształtowania stalowych elementów konstrukcji wpływa na różnorodność sposobów ich montowania. Interesujące metody montażu lekkich kopuł żebrowych przedstawiono na rysunku 83. W pierwszej z zaproponowanych tu odmian metod montażu /rys.83a-d/ poszczególne sekcje w formie południkowych wycinków sfery umieszcza się promieniowo na poziomie podstawy kopuły. Dolne części tych elementów zamocowane są przegubowo w wielokątnym wieńcu oporowym. Przy pomocy centralnie umieszczonego masztu montażowego podnosi się je na niewielką wysokość. W tej pozycji do górnych krawędzi tych elementów zamocowuje się również przegubowo podobne elementy wierzchołka kopuły. Stalowe liny montażowe zamocowane w przegubie łączącym te elementy służą do dalszego ich podnoszenia do momentu, gdy końce górnych części można będzie oprzeć o podstawę masztu. Wokół rurowego masztu montuje się zwornik kopuły i także przegubowo łączy się go z południkowymi elementami konstrukcji.



Rys. 83. Sposoby montażu lekkich kopuł żebrowych.

Podnoszenie całej konstrukcji odbywa się przez podciąganie zwornika kopuły linami biegnącymi równolegle do osi masztu. W położeniu końcowym puste pola wypełnić można skratowaniem odpowiadającym rysunkowi krzyżulców w elementach nośnych. Lekkie przenośne kopuły żebrowe można także montować w sposób pokazany na rysunku 83e,f. Elementy o długości i kształcie jednego

południka kopuły układane są w poziomie podstawy kopuły, na której leżą również jej dwa zworniki. Montaż całości polega na podnoszeniu kolejnych sekcji i łączeniu w poziomie rzutu kopuły jej dalszych elementów. Ten interesujący sposób montażu można stosować jedynie dla przekryć o niewielkich rozmiarach. [4]

Rozdział V

ELEMENT MODULARNY W METODZIE KÓŁ WPISANYCH

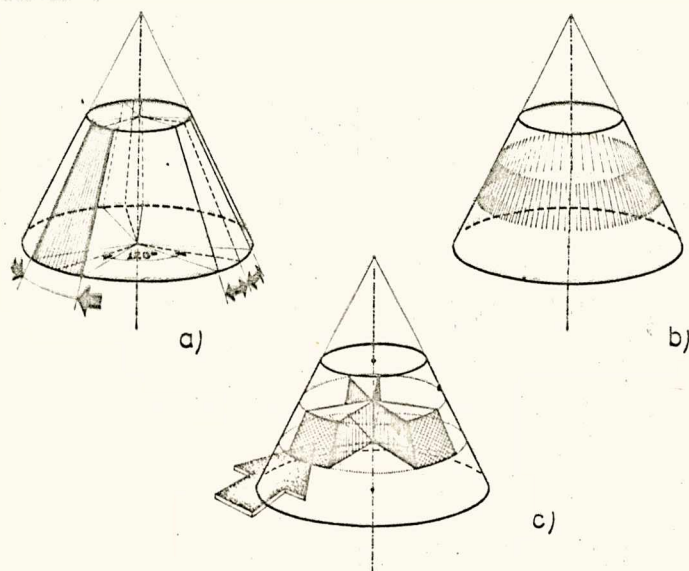
5.1. Ewolucja formy stożka

Poniższe rozważania są próbą dalszego rozwinięcia geometrycznej teorii konstruowania powłok metodą kół wpisanych w siatkę trójkątną. Istotą tej teorii jest zastosowanie w możliwie szerokim zakresie modułów geometryczno-konstrukcyjnych. Metoda ta służyć ma nie tylko konstruowaniu kopuł, lecz również wielu innych rodzajów przekryć. Przedstawienie przydatności tej metody przy konstruowaniu kopuł ma zasadnicze znaczenie, gdyż powierzchnia kulista z racji swych geometrycznych własności jest bardzo trudną w próbach budowania jej za pomocą elementów modularnych. Jeżeli zatem udaje się rozwiązać to zadanie na przykładzie przekrycia kopułowego można stwierdzić, że wszelkie inne powierzchnie, oczywiście pod pewnymi istotnymi zastrzeżeniami właściwymi każdej z nich, można budować wykorzystując tę metodę. Wnioski wypływające z podstawowych założeń metody kół wpisanych w siatkę trójkątną doprowadziły niejako po drodze do powstania metody deformacji siatki wtórnej, dzięki której otrzymuje się bardzo regularne siatki sferyczne.

Potwierdza to w jakimś stopniu słuszność przyjętych w metodzie kół wpisanych zasad i pozwala sądzić, że przeprowadzone na jej bazie rozważania zdążające do określenia optymalnego elementu modularnego mogą doprowadzić do zadowalających rozwiązań tego problemu.

Przyjmując dosłownie stożek jako moduł przestrzenno-konstrukcyjny i układając go odpowiednio na powierzchni kulistej oraz łącząc go odpowiednimi klinami można zbudować kopułę. W takim przypadku nie uzyska się jednak wszystkich dodatnich cech jakimi powinna się charakteryzować technologia i konstrukcja wykorzystująca elementy modularne. Zakres promieni kół wpisanych oraz podobny zakres zmian położenia najbliższych tworzących na sąsiadujących ze sobą stożkach określa stopień regularności trójkątnej siatki sferycznej. Wyznaczony charakte-

rem siatki sferycznej zakres podanych zmian określa tym samym wielkość aktywnych części powierzchni bocznej stożka. W wyniku oddziaływania sąsiadujących ze sobą stożków ich aktywnie pracująca część stanowiłaby znikomy procent ich wewnętrznej masy /rys. 84./



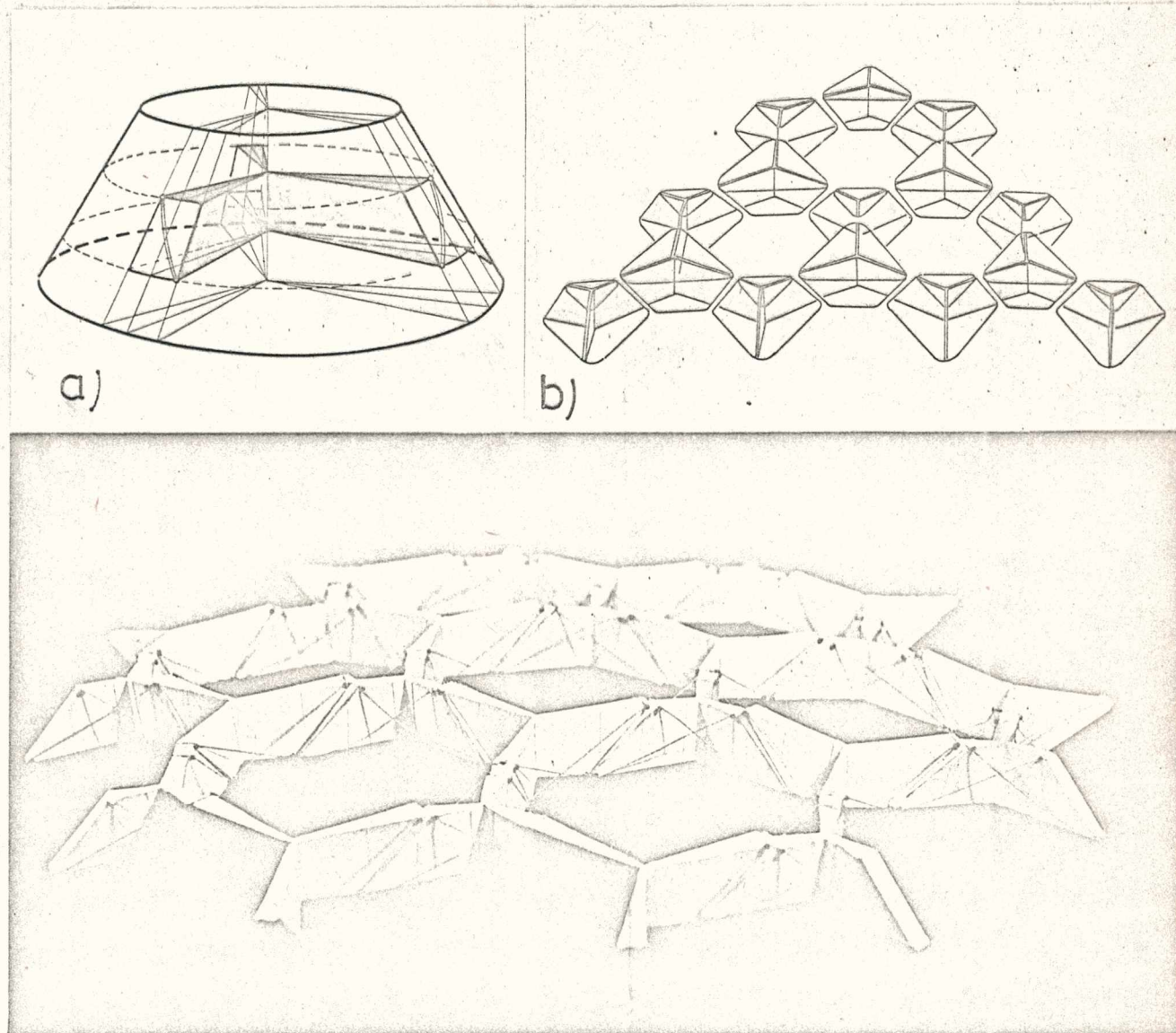
Rys. 84. Zakres aktywnych części elementu stożkowego.

Tak więc przy założeniu, że stożki te byłyby pełnymi bryłami dużą część ich materiału nie brałaby udziału w pracy konstrukcji, lecz stanowiła by tylko dodatkowe obciążenie całości. Próba podniesienia efektywności elementu polegać musi na wyodrębnieniu aktywnych części stożka i wyłącznie tylko ich stosowaniu. Po odrzuceniu zbędnej masy otrzymamy formę taką jak na rys. 85a.

Tak wykształcony element posiada swobodę ruchu polegającą na obrocie wokół osi symetrii stożka. Pozwala to na dostosowywanie się go do zmiennych wymagań położenia na powierzchni kuli, wynikającego ze zróżnicowania wielkości trójkątnej pól w siatce sferycznej. W ograniczonym przez zakres zmian położenia najbliższych tworzących na pobocznicę stożków elementach, wzajemne ich oddziaływanie odbywać się będzie głównie w płaszczyznach zawartych między osiami stożków tworząc geometryczną siatkę o oczkach sześciokątnych /rys. 85b/.

Tak więc wystarczy stosować płaskie elementy o zmiennych długościach układane prostopadle do powierzchni środkowej powłoki, aby zgodnie z warunkami oszczędności materiału zapewnić prawidłowe warunki pracy konstrukcji. Pojawia się tu sprzecz-

ność, gdyż stosowanie elementu konstrukcyjnego o zmiennej długości jest podstawową trudnością, którą staramy się ominąć poprzez wprowadzenie formy stożka jako podstawowego modułu geometryczno-konstrukcyjnego. Taki system konstrukcyjny byłby jednak do przyjęcia pod warunkiem nadania całemu ustrojowi większej sztywności przez wprowadzenie systemu krzyżujących się cięgien /rys. 85o/.

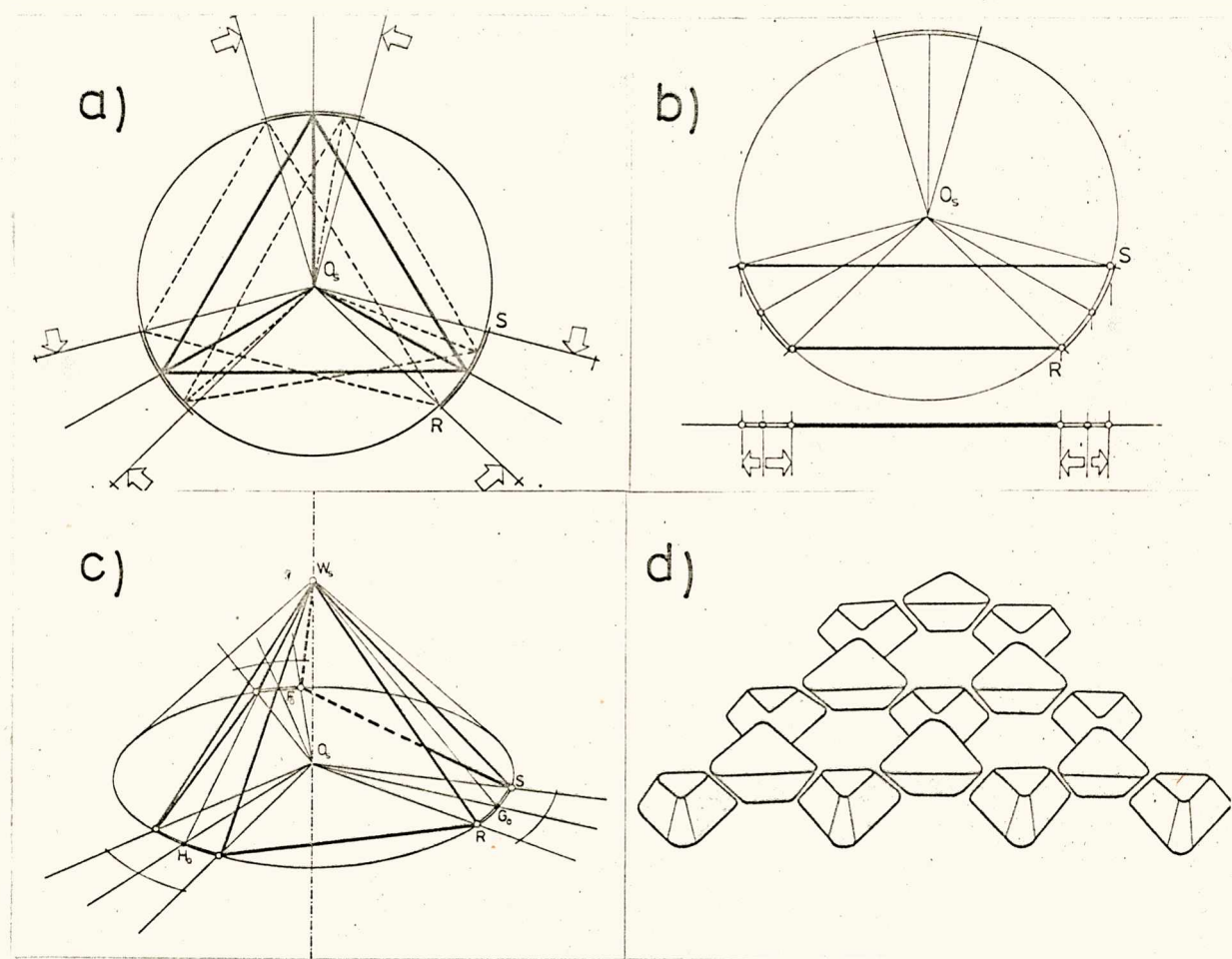


Rys. 85.

Zmiana długości poszczególnych zestawów elementów wynikająca z własności geometrycznych dwukrzywiznowej powierzchni, na której są one układane, przeprowadzona byłaby podobnie jak dla elementów stożkowych poprzez wzajemne ich przemieszczanie i łączenie za pomocą klina o zmiennych wartościach wychyleń.

Tym samym powodować to będzie konieczną zmianę długości krzyżujących się cięgien sprężających tę konstrukcję. Ponadto schemat statyczny jej przekroju poprzecznego jest tak samo niekorzystny jak dla usytuowanych wg zasad metody kół wpisanych elementów stożkowych. Dlatego choćby z tych przyczyn dalsze kontynuowanie w tym kierunku naszych dociekań najprawdopodobniej nie dałoby określonych na wstępie efektów.

Mankamenty poprzedniego schematu zmuszają do ponownego skierowania uwagi na element modułarny w postaci stożka, a ściślej jego podstawy. Zakres położenia aktywnych tworzących na pobocznicy stożka wyznacza w obrębie podstawy wielkości różnych trójkątów, które w dużym stopniu odpowiadają kształtom trójkątów siatki sferycznej /rys.86a/. Poprzez przyjęcie maksy-



Rys. 86.

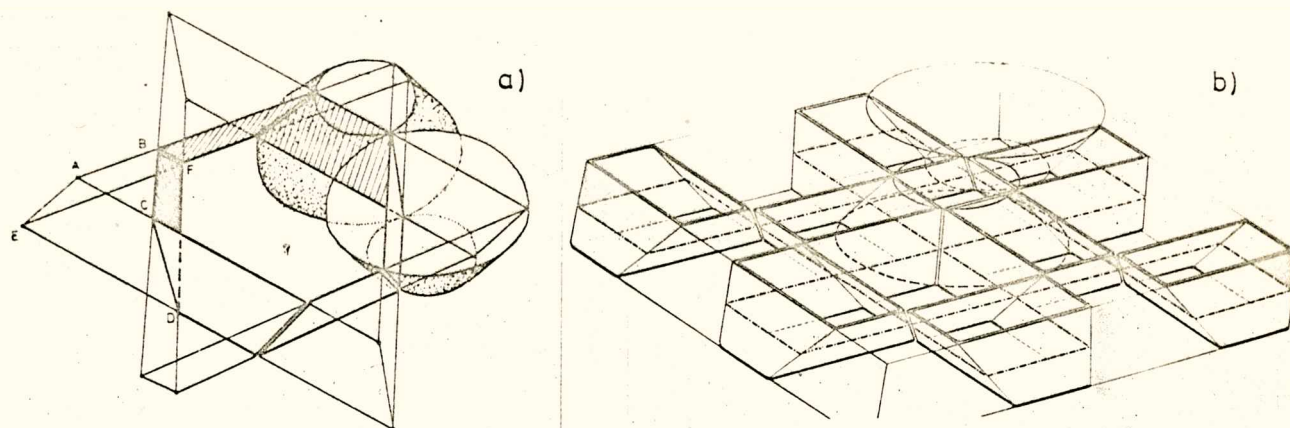
malnej i koniecznej wartości tych zmian wyrażonej miarą kąta RO_sS wyznaczymy minimalną i maksymalną długość cięciwy okręgu o środku w punkcie O_s /rys. 86b/. Najważniejszą jest jednak mi-

nimalna długość cięciwy określająca zbędne części stożka przyległe do jego powierzchni bocznej /rys. 86c/.

Po odrzuceniu proponowanych części element stożkowy znacznie straci na swej objętości. Powierzchnie wyznaczone punktami R i S oraz wierzchołkiem Ws pozostaną nadal odcinkami powierzchni bocznej stożka, pozostałe będą trójkątnymi ścianami płaskimi. Tak określone elementy sąsiadować będą ze sobą wzduż pozostałości swych powierzchni stożkowych i podobnie jak stożki łączone będą przy pomocy elementu klinowego /rys. 86d/.

System ten posiada więc wady charakterystyczne dla ułożenia samych stożków na powierzchni kuli, nie zamyka jednak drogi dla dalszych poszukiwań.

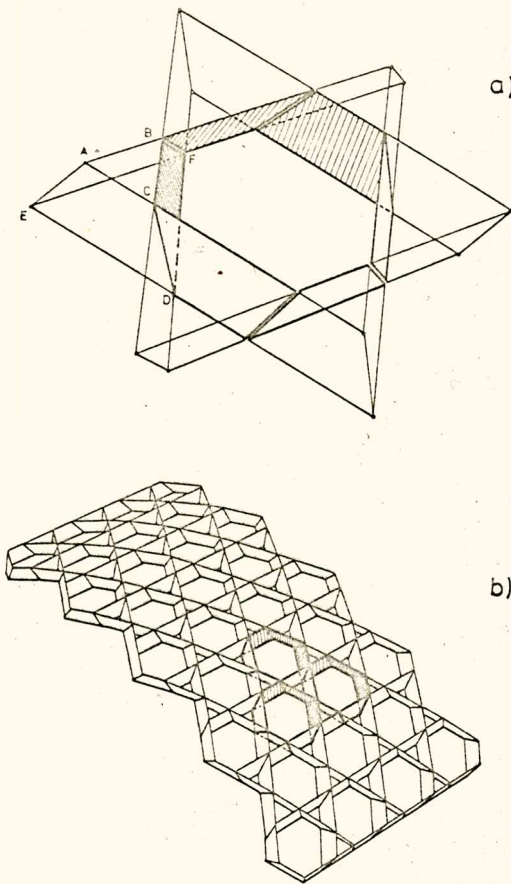
Dysponując regularną siatką sferyczną można zmniejszyć do minimum wartość kąta $RO_S S$ zmniejszając w takim samym stopniu wielkość powierzchni stożkowej na sąsiadujących elementach co ujednolici ich asortyment, nie spowoduje jednak żadnych istotnych zmian w takim systemie, a tym bardziej nie zlikwiduje jego wad. Należy więc pogodzić się z różnymi wielkościami trójkątnych ścian bocznych. Spójrzmy raz jeszcze na wymagane przez teorię kół wpisanych wzajemne usytuowanie stożków /rys. 87/.



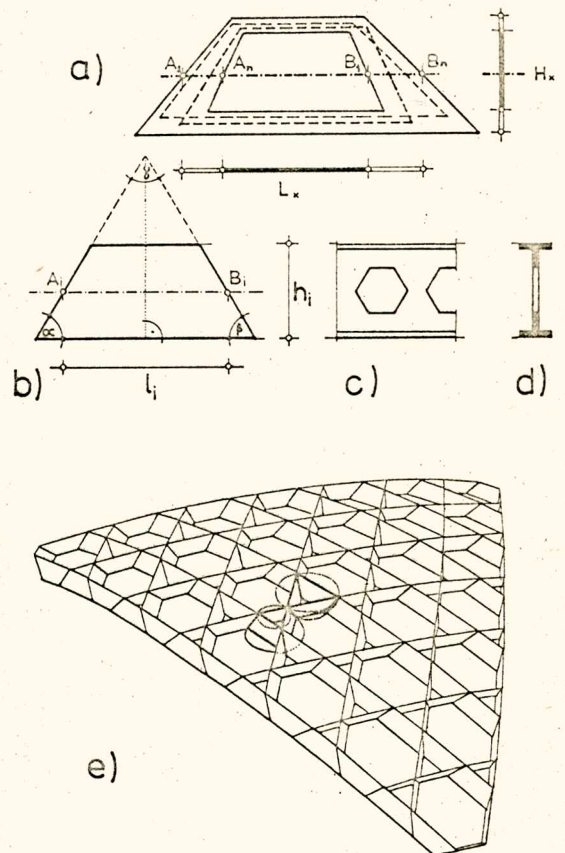
Rys. 87.

Jeżeli tego typu elementy układać będziemy na płaszczyźnie, wówczas najbliższe tworzące stożków będą równoległe do siebie, a w przypadku ciasnego ich ułożenia będą stykały się ze sobą. Podstawą odciętych wyżej opisanym sposobem elementów będzie trójkąt równoboczny, odpowiednie powierzchnie będą trójkątami równobocznymi a po ich obcięciu jak na rys. 87 będą tej samej wielkości prostymi trapezami. Ta własność pozwala na łączenie tych ścian w segmenty. Traktując materiał konstrukcyjny jako pas-

mo o pewnej wysokości, przez zagięcie go wzdłuż określonych linii odpowiadających krawędziom trapezów możliwym staje się łączenie tych ścian w sześcioboczne elementy. Na tej zasadzie można kształtować segmenty w formie czworoboków, które następnie przez kolejne ich dodawanie i łączenie wzdłuż załamanych krawędzi pasma utworzą ciekawą strukturę przestrzenną zdolną do przeniesienia pewnych obciążeń /rys. 87b/. Przyjęcie zróżnicowanych długości ścian trapezowych, koniecznych w przypadku jedno- i dwukrzywiznowych form przekryć nie wyklucza możliwości zastosowania dla ich potrzeb tej formuły konstrukcyjnej. W jedno-krzywiznowych powłokach walcowych dla przedstawionego na rys. 88 sposobu ułożenia segmentów występują trzy rodzaje wielkości trapezowych ścian. Przy stosunkowo dużych promieniach krzywizny przekrycia zróżnicowanie wysokości tych trapezów jest tak niewielkie że mogą być one "gięte" z pasma o tej samej wysokości.



Rys. 88.



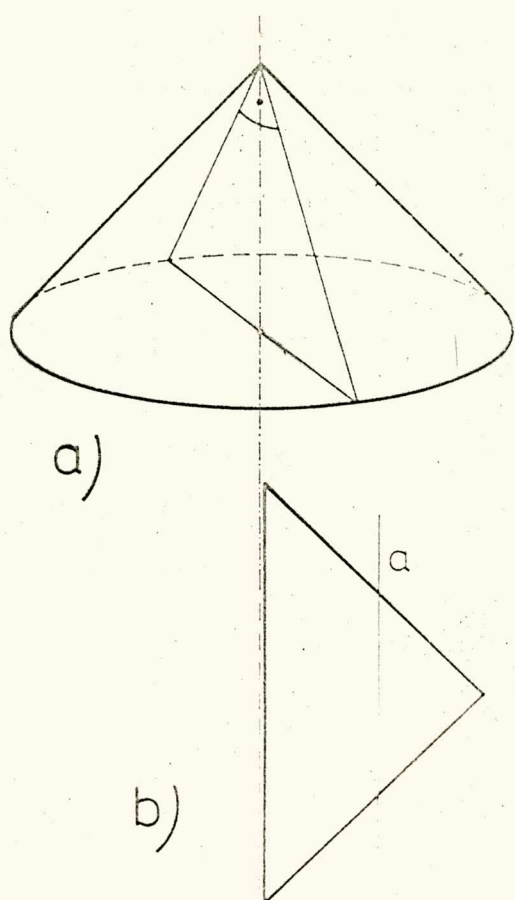
Rys. 89.

Dla innych form przekryć koniecznym staje się indywidualne określanie parametrów trapezowych ścian, a zróżnicowanie ich wiel-

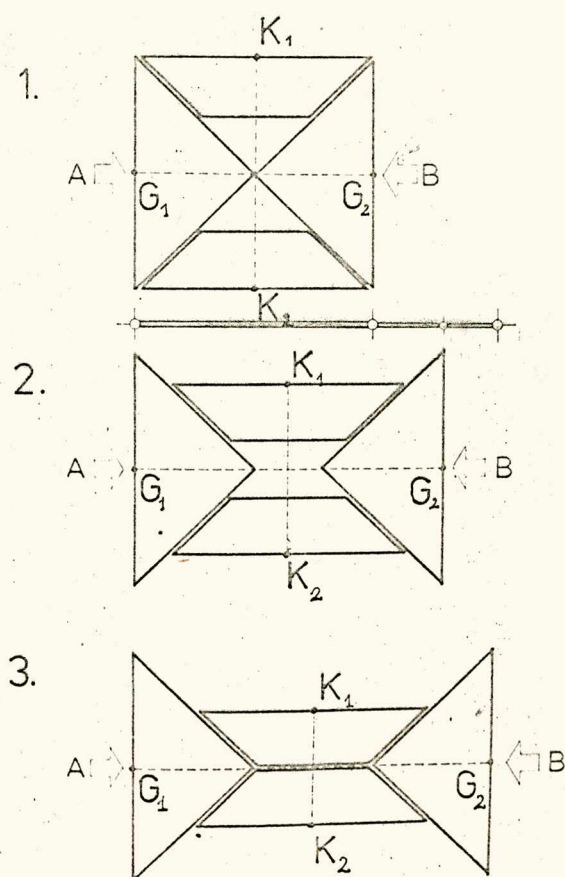
kości zależeć będzie od regularności siatki przestrzennej i wielkości krzywizn /rys. 89 a i b/. Trapezowe elementy ścian mogą być wykonywane z odpowiednio przygotowanych blach stalowych lub kształtowników /rys. 89 c i d/ a następnie połączone przegubowo za pomocą łączy zawiasowych lub sztywno przez zespawanie kolejnych krawędzi bocznych. Prezentowany system mógłby być szczególnie użyteczny w konstrukcjach niewielkich przekryć kopułowych, wykonywanych z klejonych elementów drewnianych, zapewniając im jednocześnie bardzo ciekawą formę plastyczną. Z przyczyn podanych wyżej nie można traktować tego systemu jako uniwersalnego tzn. spełniającego podane na wstępie założenia, dlatego ponownie zajmiemy się formą wyjściową elementu modułarnego jakim jest stożek.

Jedynym wymogiem stawianym wobec elementu stożkowego w teorii kół wpisanych jest to, aby był on stożkiem prostym o podstawie kołowej. Wysokość tego elementu poza wielkościami ekstremalnymi nie odgrywa więc żadnej roli. Założmy, celem uproszczenia rozważań, że jego przekrój podłużny przecinający wierzchołek oraz podstawę w jej środku jest równoramienne trójkątem prostokątnym /rys. 90a/. We wszystkich poprzednich rozważaniach jak i w teorii kół wpisanych oś stożka przecinała jego podstawę zawsze pod kątem prostym. Obracamy teraz trójkątny przekrój stożka tak, aby jego przeciwprostokątna była styczna do poprzedniej jego osi /rys. 90b/. Dodatkowo dzielimy ten trójkąt linią a , równoległą do podstawy. Podzielony w ten sposób trójkąt będzie podstawą mechanizmu otrzymywania szerokiego zakresu różnych długości przy użyciu wąskiego asortymentu części składowych i schematycznie przedstawiono go na rys. 91.

W położeniu 1 /rys. 91/ mniejsze trójkąty mogą pozostać na swoim miejscu gdyż nie przeszkadzają innym pracującym w tym schemacie elementom. Położenie to odpowiada najkrótszemu elementowi przekrycia. W położeniach 2 oraz 3 mniejsze elementy trójkątne należy usunąć ponieważ ich pozostanie w swoim miejscu uniemożliwia wzajemne przesunięcia pozostałych elementów. Przyjęcie tego modelu umożliwia uzyskanie szerokiego statycznie uzasadnionego zakresu zmian długości rzędu 50 - 60% i zależeć będzie od wysokości na jakiej podzielimy linią a dany trójkąt. Ściśle ułożone trapezy pochodzące z tego samego trójkąta pod działaniem sił ściskających przenoszą obciążenia na elementy trójkątne,

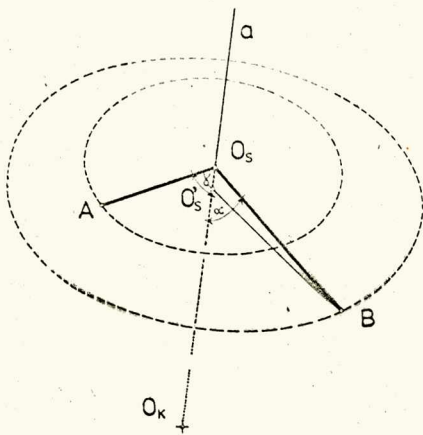


Rys. 90.

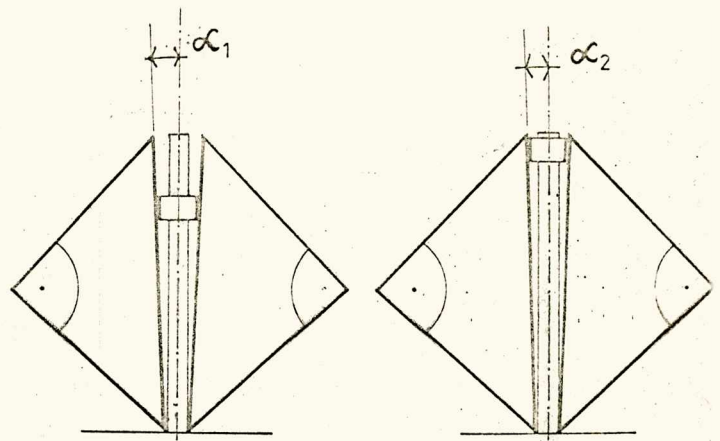


Rys. 91.

których podstawy leżą na prostych wychodzących ze środka sfery, zaś przy działaniu sił rozciągających nadają geometryczną sztywność układowi. Elementy trapezowe i trójkątne połączone są krzyżującymi się cięgnami umiejscowionymi w środkowej strefie ich przekrojów poprzecznych. Ciężna te regulują rozstaw elementów podstawowych zależnie od długości odcinka AB /rys. 91/. Pod działaniem sił ściskających będzie pracować ciężno $K_1 K_2$ a ciężno $G_1 G_2$ będzie ciężnem zerowym. Dodatkową zaletą przyjętego modułu jest fakt łatwiejszego wprowadzenia niezbędnego przy kształtowaniu krzywizn powłoki, dodatkowego elementu klinowego. Ponieważ w geometrycznej siatce trójkątnej opisującej powierzchnię kuli występować muszą różne długości jej odcinków to może się zdarzyć, że w jednym węźle mogą się spotkać odcinki z końców zakresu zmian ich długości /rys. 92/. W konsekwencji kąty zawarte między prostą wychodzącą ze środka kuli i przechodzącą przez ten węzeł będą miały różne wartości. Dlatego w przyjętym schemacie należy tak zaprojektować element węzłowy, aby możliwe było ustawianie właściwego kąta dla każdego z odcinków /rys. 93/.

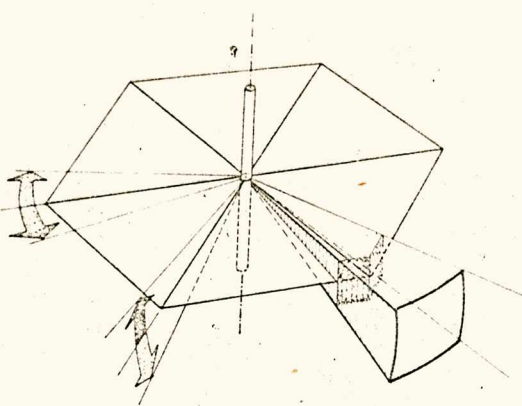


Rys. 92.

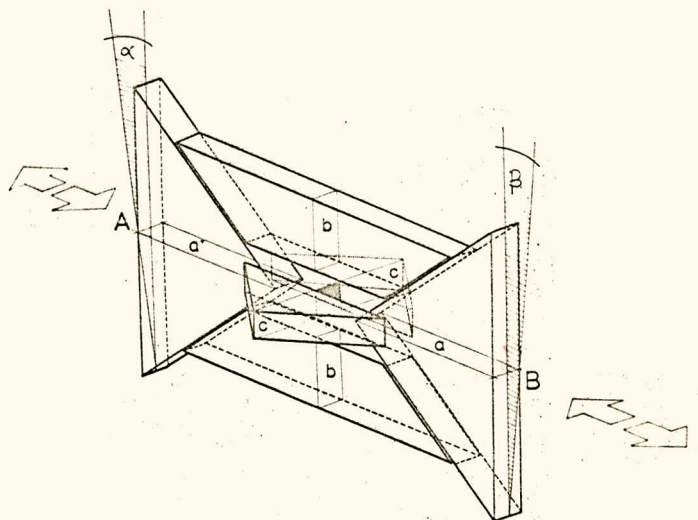


Rys. 93.

Regulację wartości potrzebnych kątów zapewni przesuwanie odpowiednio umiejscowionego i skonstruowanego pierścienia wzdłuż osi a . Taki jak na rys. 93 element węzłowy zapewnia możliwość łączenia z nim kilku elementów modularnych, które w sumie utworzyć mogą regularne układy trójkątne, czworokątne, i sześciokątne. Aby możliwym stało się konstruowanie w tych układach dwukrzywiznowych przekrój element węzłowy powinien być tak uformowany, aby zapewnić w dwóch płaszczyznach swobodę ruchów dołączonych do niego elementów modularnych /rys. 94/.



Rys. 94.



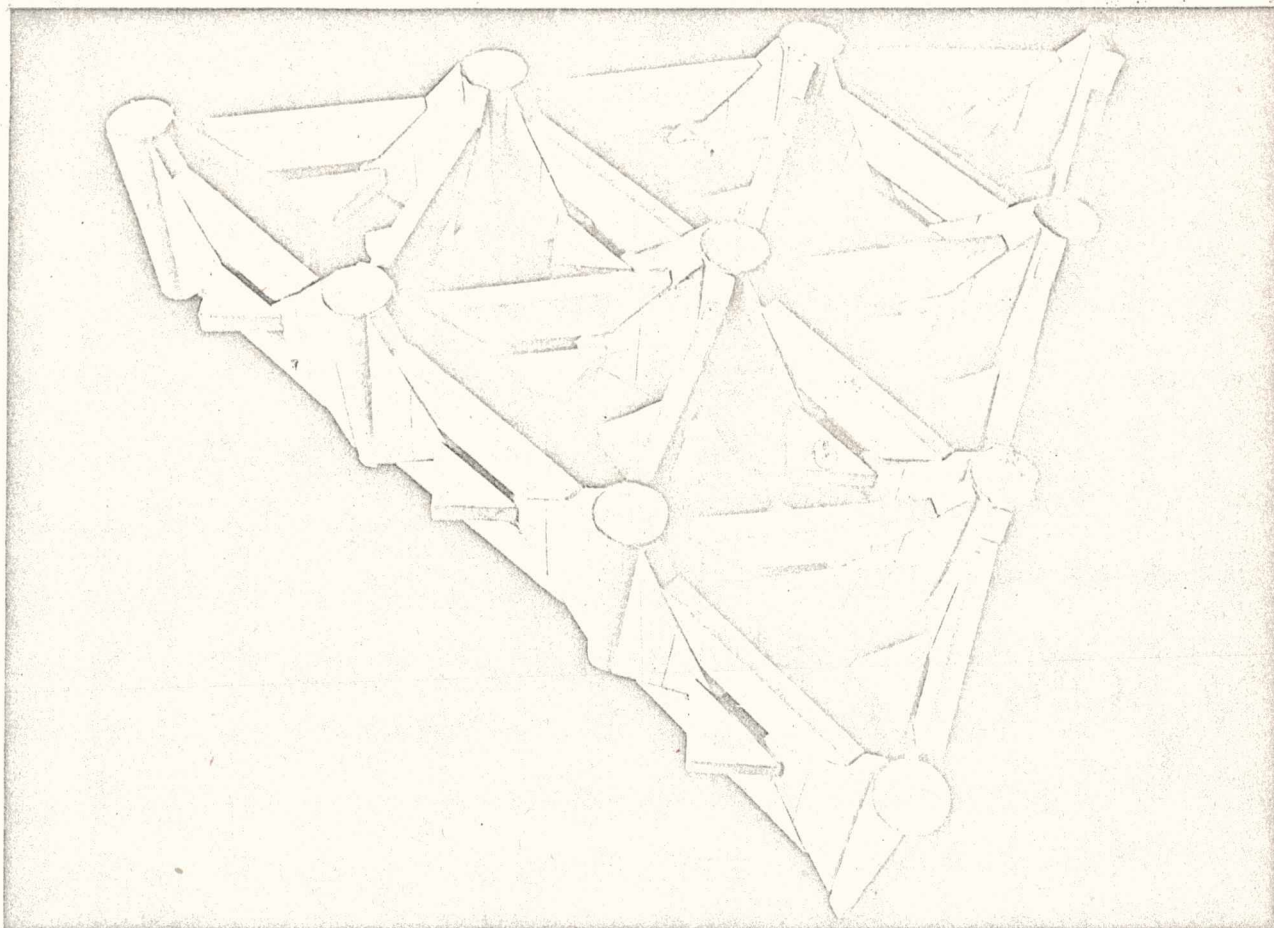
Rys. 95.

W omawianym obecnie systemie element modularny przybiera postać taką jak na rys. 95. Elementy trójkątne i trapezowe muszą więc

posiadać pewną "grubość", aby spełniać swe zadania.

Odcięty linią *a* /por. rys. 91/ mniejszy element trójkątny usytuowany jest po obu stronach sfery środkowej modułu i służy jego usztywnieniu i pod warunkiem odpowiedniego połączenia go z elementem trójkątnym może aktywnie uczestniczyć w pracy całego modułu. Łączone tak jak na rys. 96 elementy modułarne mogą stanowić konstrukcję nośną różnego rodzaju przekryć. Określony w ten sposób system geometryczno-konstrukcyjny posiada szereg wad a najważniejszą jest stosowanie w nim pełnościennych elementów konstrukcyjnych, co w zasadzie eliminuje go z dalszych rozważań.

Wykonane z takich elementów przekrycie byłoby stosunkowo ciężkie. Zalety wynikłe z ograniczenia liczby części składowych niweluje niewielki stopień wykorzystania nośności materiałów konstrukcyjnych zużytych na ewentualną ich budowę. Zawarta jednak w jego schemacie idea otrzymywania różnych długości poszczególnych elementów umożliwia wykonanie różnorodnych form przekryć powłokowych i dlatego będzie przedmiotem dalszych rozważań.

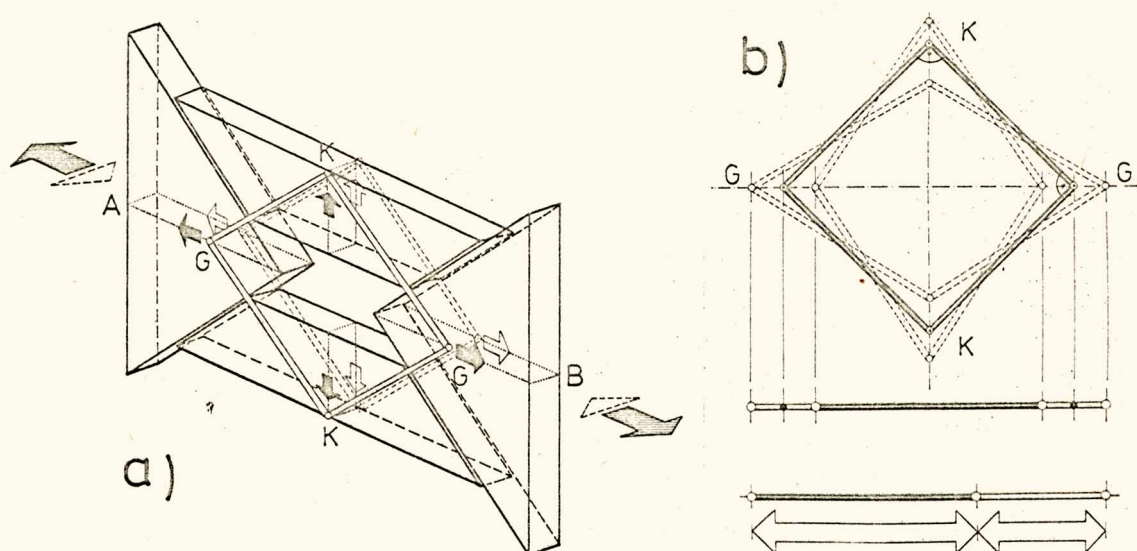


Rys. 96. Wycinek powłoki kulistej skonstruowany z elementów modułarnych.

5.2. Uwarunkowania geometryczne prętowo-ciężnowego systemu modułowego

Spójrzmy raz jeszcze na podstawowy moduł konstrukcyjny omawianego ostatnio systemu /rys. 95/. Siły od obciążeń zewnętrznych przebiegać będą w nim wzdłuż płaszczyzn wyznaczonych punktami zamocowania ciężarów. Wady tego modułu ulegną znacznemu zmniejszeniu jeżeli konieczne dla prawidłowej pracy statycznej ciężna zamocujemy po obu jego stronach. Ponadto ciężna te powinny mieć jednakową długość oraz w taki sposób być zamocowane do powierzchni bocznej elementów składowych, aby umożliwiać pełny zakres koniecznych zmian długości modułu konstrukcyjnego /rys. 97a/. Taki układ ciężen przenoszących w tym module siły rozciągające sam w sobie może stanowić podstawę innego systemu konstrukcyjnego.

Układ połączonych przegubowo prętów zapewni taki sam zakres zmian długości siatki sferycznej /rys. 97b/.



Rys. 97. Zmodyfikowany element konstrukcyjny.

Celem spełnienia tych wymagań przy zastosowaniu prętów o stałym przekroju i długości należy wprowadzić odpowiednio połączone z prętami ciężna o regulowanej długości.

Układając rombowe zestawy składające się z czterech równej długości prętów w konfiguracjach odpowiadających ich położeniu na bocznych ścianach zmodyfikowanego elementu konstrukcyjnego zapewnimy taką samą jak poprzednio liczbę wariantów ich ustawienia /rys. 98/. Pręty o jednakowej długości d będą przejmowały

siły ściskające, a połączone przegubowo ciągną pracować będą zawsze na rozciąganie. Należy wyróżnić dwa rodzaje przegubowych połączeń. Pierwszy z nich służyć będzie do łączenia czworokątnych zestawów prętowych /węzeł typu G/, drugi zaś umożliwić musi przegubowe połączenie prętów z cięgnami /węzeł typu K/. Z przyczyn technicznych w węzłach typu G schodzić się będą trzy, cztery oraz sześć czworokątnych zestawów prętowych, natomiast w węzłach typu K połączonych musi być zawsze pięć cięgien. W przekryciach płaskich węzły typu G leżeć będą w strefie środkowej struktury a czworokątne zestawy prętów będą do niej prostopadłe. Ze względów praktycznych czworokątny zestaw prętów o jednakowych długościach będzie przybierał formę kwadratu, zaś jego środkowe ciągnie osiągnie długość $\sqrt{2}a$, która zarazem jest wysokością całej struktury.

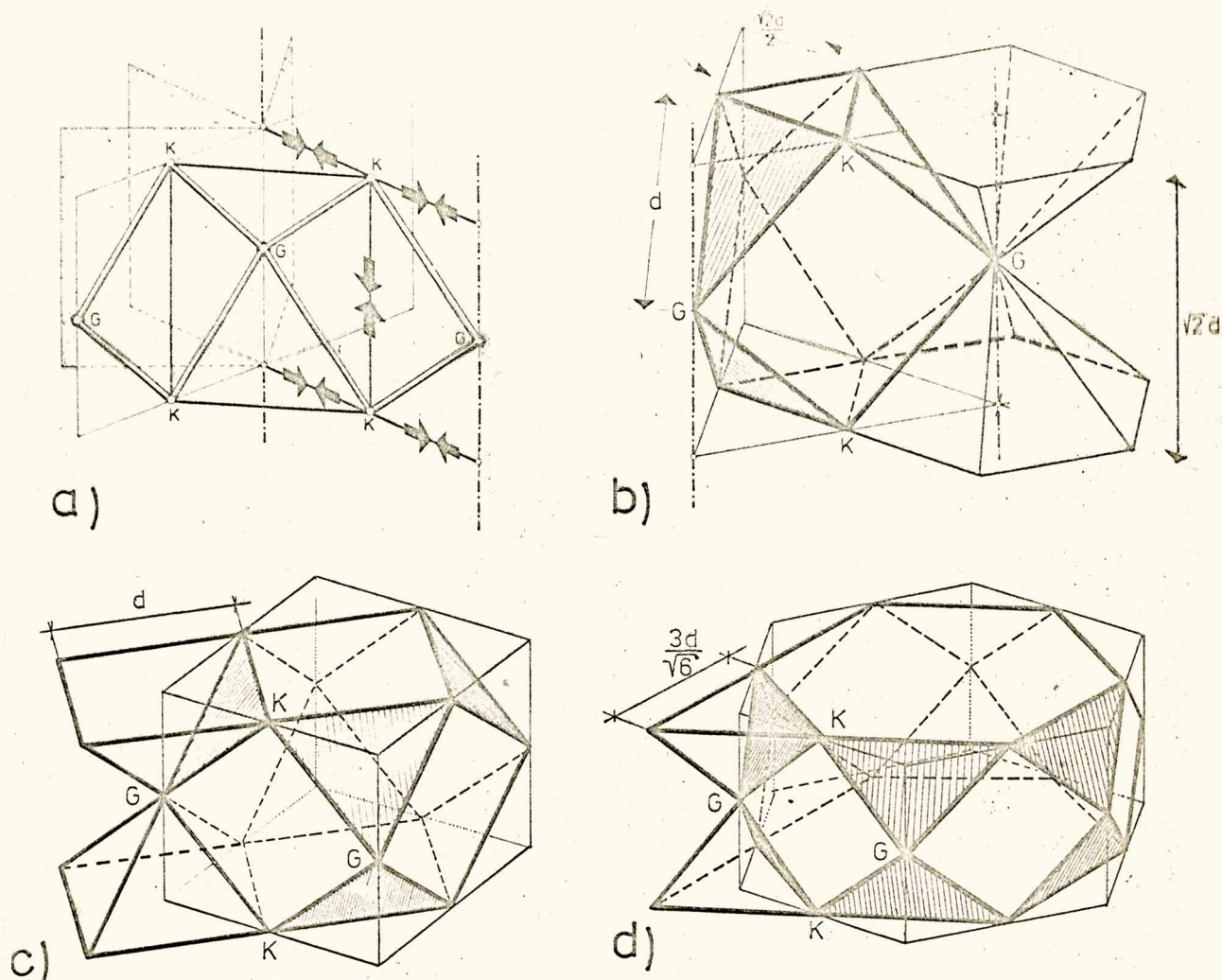
Na tym przykładzie możemy uporządkować i opisać warianty ustawień powtarzalnych elementów modularnych. W analizie geometrycznej pręty i ciągnia traktować będziemy tak samo tzn. jako krawędzie brył powstałych przez odpowiednie rozmieszczenie prętów i cięgien w przestrzeni, właściwe dla każdego z układów. Jeśli w węźle typu G schodzić się będzie sześć zestawów prętowych, to pręty wraz z węzłami wyznaczają w przestrzeni dwa rodzaje dopełniających się wzajemnie brył o układzie pokazanym na rys. 98b.

Podstawową bryłą dla tego układu jest 11-ścian, którego długości krawędzi podano również na tym rysunku. Dopełnienie tej bryły w płaskiej warstwie przekrycia stanowią dwa przeciwnie skierowane ostrosłupy proste o sześciokątnych podstawach. Tak więc układ ten składa się z jedenastościanu /JDN/ oraz dwóch ostrosłupów /2xOPS/ i będziemy oznaczać go skrótem JDN + 2xOPS.

W przypadku gdy w węźle G schodzą się cztery zestawy prętów to pręty te połączone cięgnami wyznaczają bryłę podstawową w formie czternastościanu /CO/ oraz dopełniające ją dwie połówki ośmiościanu / $2x\frac{1}{2}O$ / zatem oznaczać będziemy go jako $CO+2x\frac{1}{2}O$. Bryły te charakteryzują się tą samą długością swych krawędzi bocznych i równą d , czyli długości pręta podstawowego /rys. 98c/.

Schodzące się w węźle typu G trzy zestawy prętów określają wysokość płaskiej warstwy przekrycia równą $\sqrt{2}d$.

Układ brył składający się z dwudziestodwuścianu /DWS/ oraz dopełniających strukturę dwóch przeciwnie skierowanych czworoscia-



Rys. 98. Podstawowe układy bryłowe przestrzennego ustroju prętowo-ciężnowego.

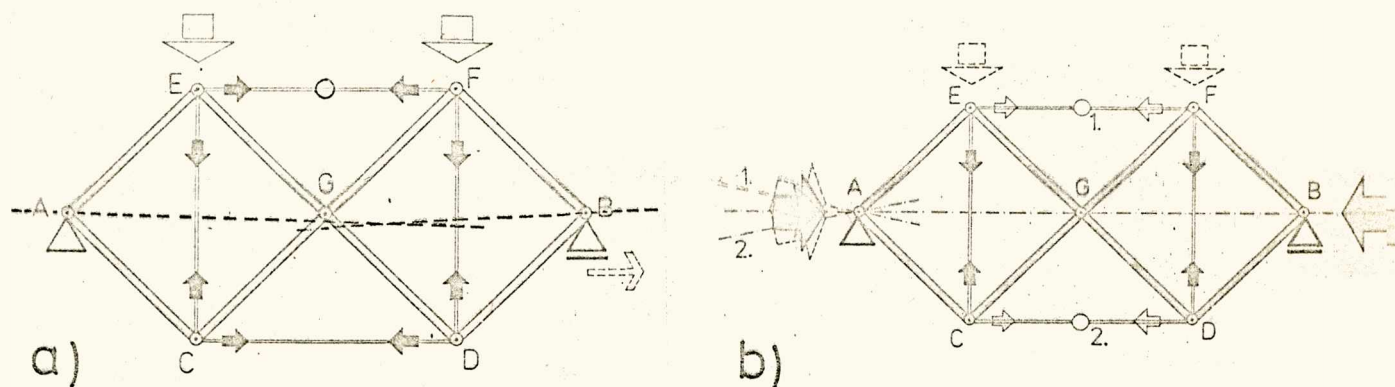
nów /T/ określać będziemy skrótem DWS + 2T.

Podstawowe związki miarowe tych brył przedstawiono na rys. 98d.

5.3. Zasady pracy statycznej przestrzennych struktur prętowo-ciężnowych

Podstawową analizę statyczną struktur o podanych wyżej układach przeprowadzimy na przykładzie dwóch połączonych w węzle typu G zestawów prętów. W przyjętym na wstępie założeniu pręty mają przenosić siły ściskające, zaś ciężna siły rozciągające. Dodatkowe ciężno o regulowanej długości biegnące wzdłuż przekątnej czworokąta prętów ogranicza swobodę ich ruchu tylko w jednym kierunku. Pod działaniem sił skierowanych zgodnie z osią ciężna czworokątny segment zamienia się w mechanizm.

Najprostszy zestaw dwóch współpracujących ze sobą segmentów obciążony i podparty tak jak element przekrycia pokazano na



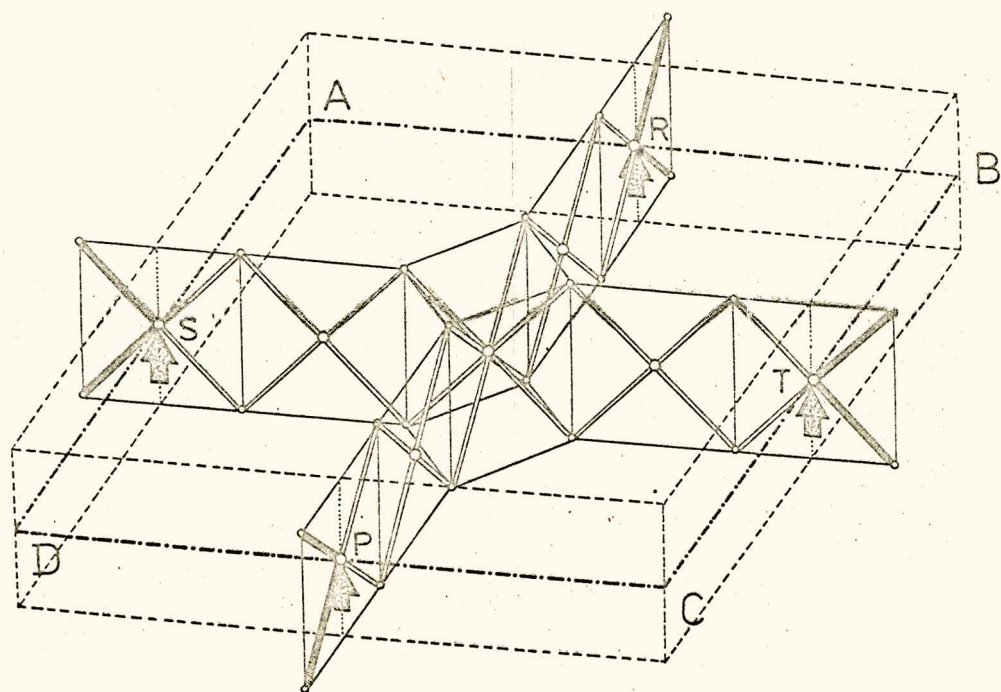
Rys. 99. Schemat pracy statycznej dwóch segmentów prętowych.

Pod działaniem sił zewnętrznych elementy konstrukcji przekrycia przeciwdziałać muszą głównie rozciąganiu oraz ściskaniu. Siły zewnętrzne przyłożone w punktach E i F za pośrednictwem prętów, które w tym schemacie będą zawsze elementami ściskanymi, powodują powstanie w cięgnach sił rozciągających, przy czym największą wartość ma siła działająca na odcinku CD, zaś najmniejszą bądź zerową wartość posiadać będzie siła rozciągająca na odcinku EF /rys. 99a/. Przegubowe połączenia samych prętów oraz takie samo łączenie ich z cięgnami powoduje przekazywanie sił na wszystkie części oraz równomierny rozkład naprężeń w elementach przekrycia. W tym samym segmencie poddanym czystemu rozciąganiu wzdłuż linii wyznaczonej punktami A, G i B teoretycznie nie powinno wystąpić naprężeń rozciągających w cięgnach pionowych EC i FD, zaś całą ich wartość przejęłyby cięgna EF i CD. Także w tym wypadku we wszystkich prętach panować będą naprężenia ściskające. Gdyby na ten sam segment konstrukcji przekrycia działały siły osiowo ściskające, wówczas całość naprężeń rozciągających musiałyby przejść cięgna EC oraz FD /rys. 99b/. W takim przypadku w obu cięgnach górnych tzn. EF i CD nie wystąpiłyby żadne naprężenia. Zazwyczaj siła ściskająca element konstrukcji przemieszcza się nieco w obrębie rdzenia elementu, co powoduje niewielkie zginania mimośrodowe. Gdy na podporze A siła ściskająca działać będzie w kierunku 1 wówczas oprócz cięgien EC i FD naprężenia rozciągające powstaną w cięgnie CD a cięgno EF będzie cięgnem zerowym i odwrotnie w pozycji siły 2 cięgno EF będzie

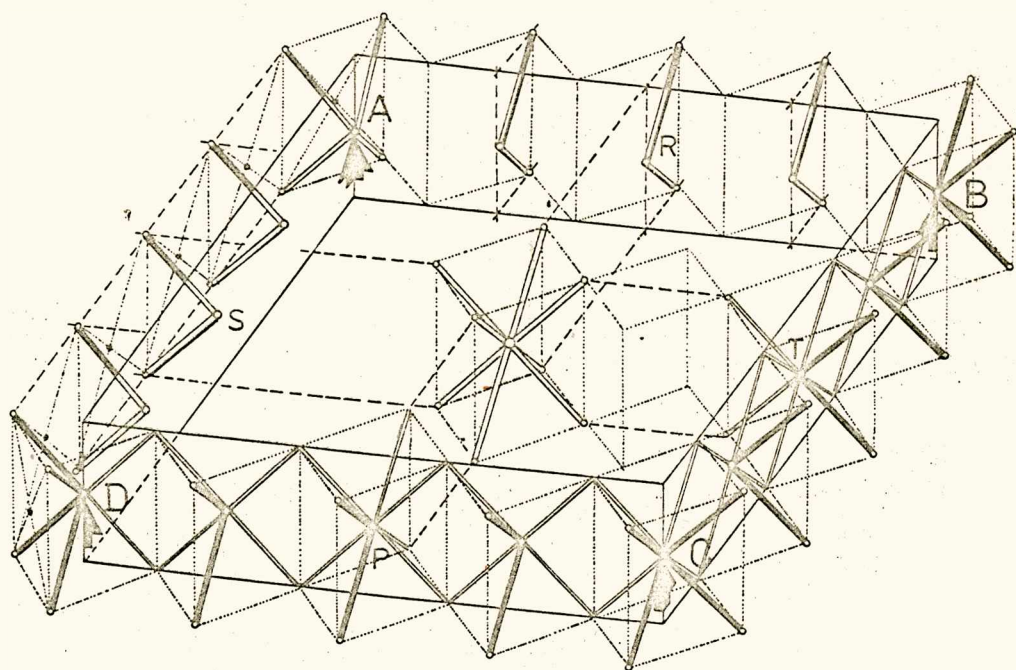
ciągłem pracującym a ciągną CD będzie zerowym. W każdym jednak wariancie obciążenia pręty konstrukcji poddane są osiowemu ściskaniu. Tą zasadę konstrukcyjną sprawdzoną w płaskim układzie elementów przeniesiemy na przestrzenne struktury prętowe o ustalonych wcześniej układach bryłowych. Ponieważ w układzie $CO + 2x \frac{1}{2} O$ segmenty prętowe są do siebie w każdej płaszczyźnie prostopadłe, zasady pracy statycznej dla tego układu będą najbardziej przejrzyste. Na rysunku 100 przedstawiono przestrzenne rozwinięcie omawianej zasady konstrukcyjnej. Położone w strefie środkowej pręty łączą się za pomocą ciągów zgodnie z układem bryłowym $CO + 2x \frac{1}{2} O$. W celu równomiernego rozłożenia obciążeń na wszystkie elementy konstrukcji należy na brzegach przekrycia, w punktach jego podparcia zastosować dodatkowe pręty leżące poza obrębem kwadratowego rzutu ABCD. Rysunek 101 przedstawia rozmieszczenie wszystkich dodatkowych prętów na obwodzie przekrycia oraz sposób ich połączenia za pomocą ciągów z pozostałymi prętami struktury. W narożnych punktach podparcia należy dodać dwie pary prętów, aby było ono rzeczywiście przekryciem strukturalnym.

Rozpatrywana struktura prętowo-ciężnowa pod działaniem obciążeń równomiernie rozłożonych na jej węzły górne w swych przekrojach głównych charakteryzuje się prawidłową wg podanych wstępnie założeń pracą elementów składowych polegającą na osiowym przekazywaniu sił oraz prawidłowym pod względem geometrycznym ułożeniu poszczególnych segmentów. Pod działaniem obciążeń nierównomiernie rozłożonych na powierzchni i pochodzącym np. od parcia wiatru struktura ta ma tendencję do skręcania wzdłuż swej powierzchni środkowej. Koniecznym staje się wprowadzenie stężeń brzegowych na całym obwodzie przekrycia, które na rys. 100 zaznaczono w obrębie krawędzi AD. Bardziej czytelnie przedstawiono je na rys. 102.

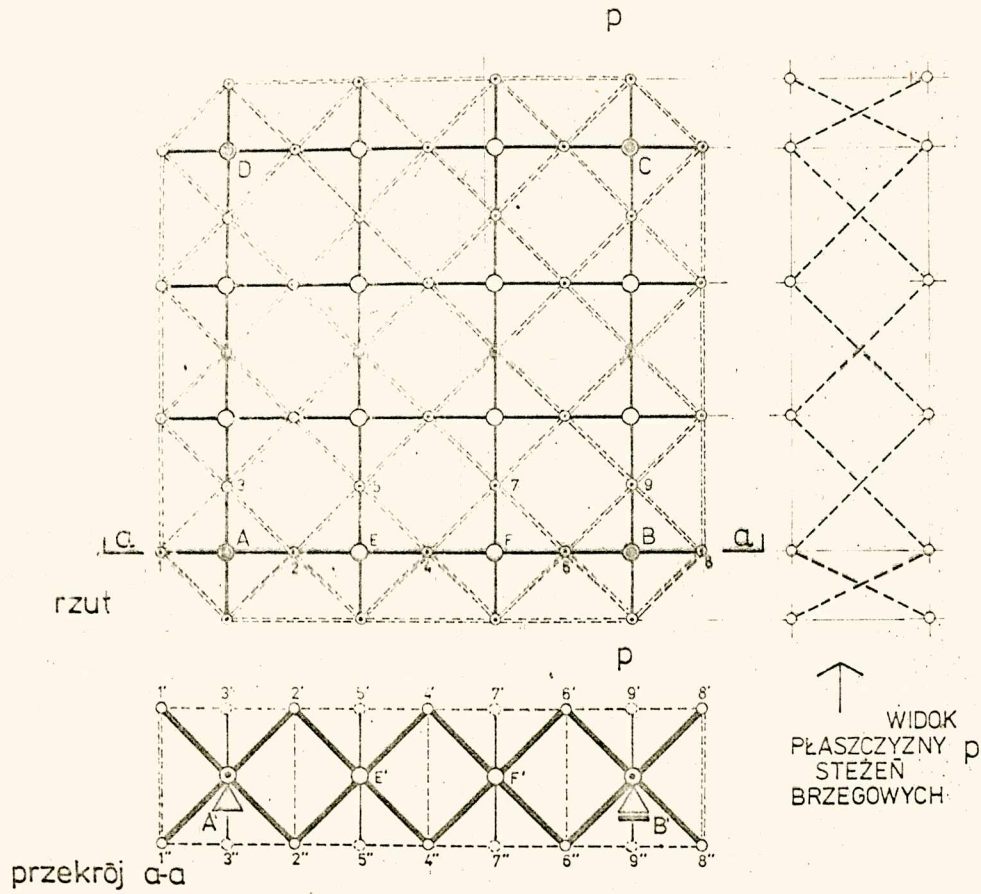
Na rysunku gdzie samą strukturę przedstawiono w układzie bryłowym szczególnie dobrze widocznym jest na jej obwodzie system dodatkowych par prętów oraz ich usytuowania w narożach przekrycia. Połączenie końców prętów krzyżującymi się ciągami w krawędziach bocznych jest koniecznym warunkiem prawidłowej pracy struktur prętowo-ciężnowych we wszystkich proponowanych układach przestrzennych. Na rysunku 102 przedstawiono rzut oraz przekrój prętowo-ciężnowej struktury o układzie $CO + 2x \frac{1}{2} O$, zaś strukturę o układzie JDN + 2x OPS pokazano na rysunku 104a, a z kolei ry-



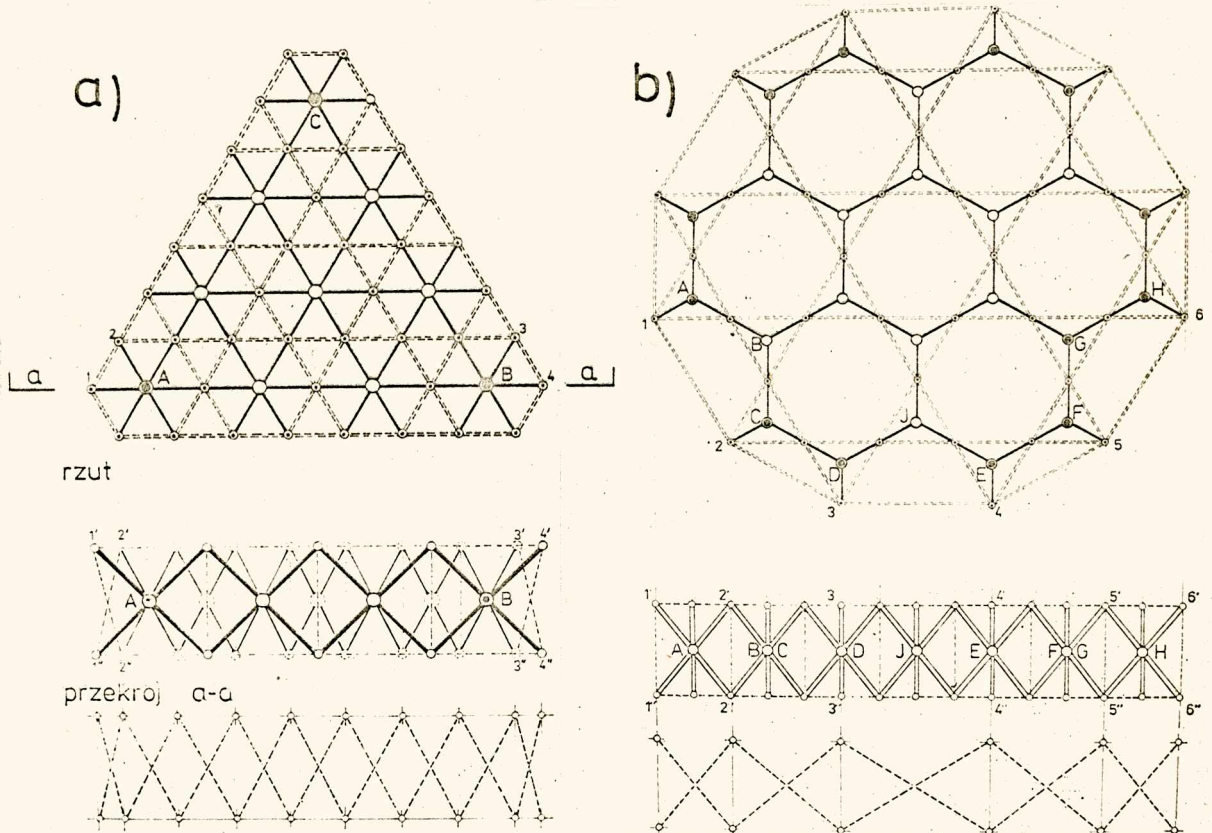
Rys. 100. Zasada pracy statycznej przestrzennej struktury prętowo-ciężnowej.



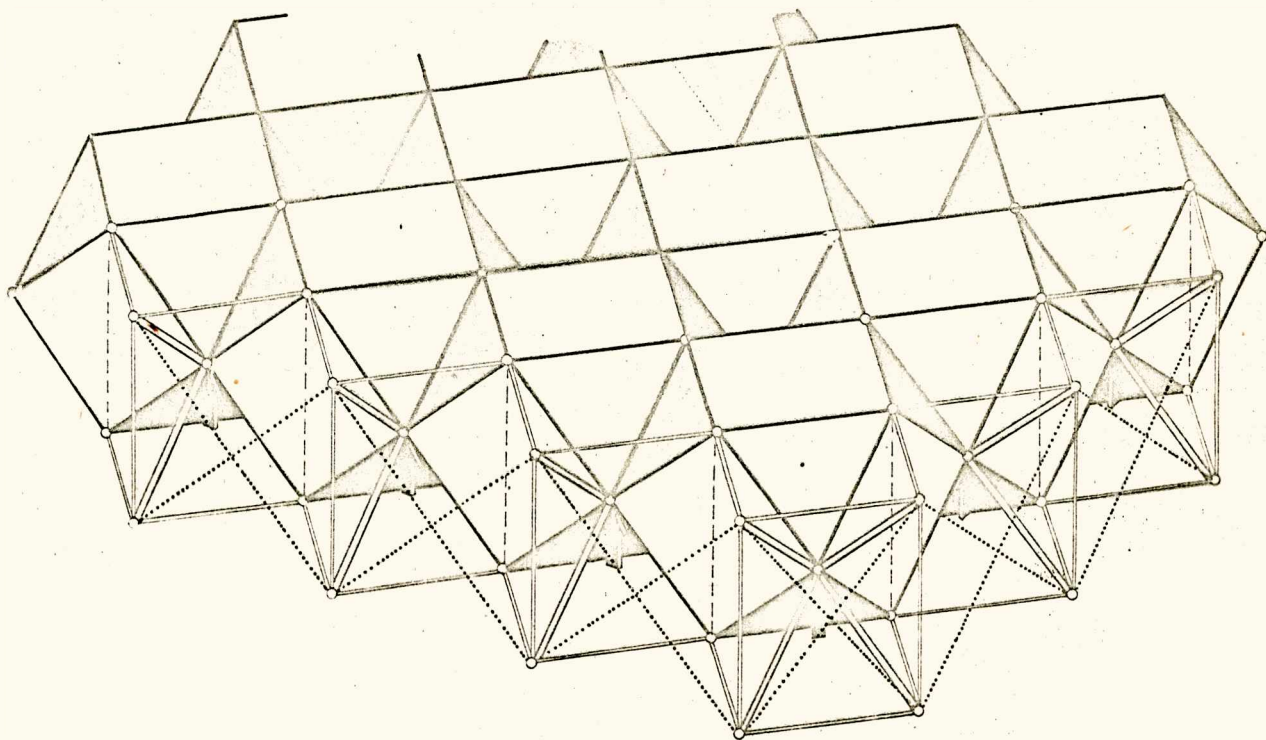
Rys. 101. Schemat stężeń brzegowych prętowo-ciężnowej struktury przestrzennej.



Rys. 103. Przestrzenna struktura prętowo-ciężnowa o układzie $CO + 2 \times \frac{1}{2} O$.



Rys. 104. Struktury prętowo-ciężnowe o układach bryłowych a/ JDN + $2 \times OPS$; b/ DWS + $2T$



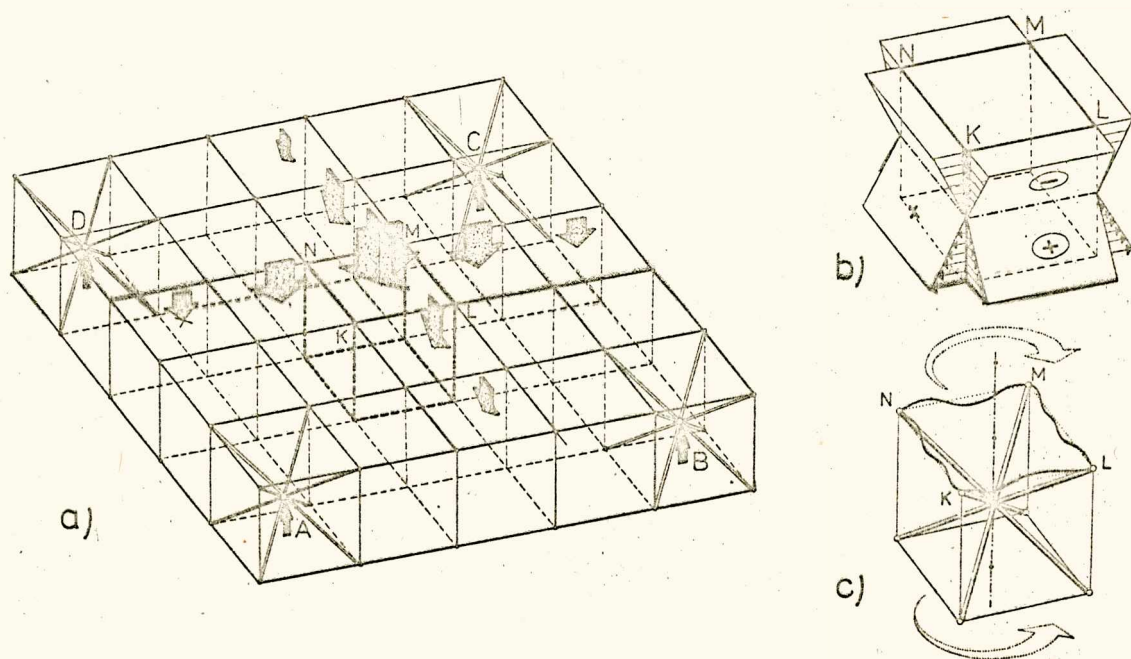
Rys. 102. Stężenia brzegowe struktury prętowo-ciężnowej
o układzie $CO + 2x \frac{1}{2} O$.

sunek 104b przedstawia strukturę o układzie prętów i ciężn określonej skrótem DWS + 2T.

Dla ostatecznego sprawdzenia pod względem statycznym poprawności przyjętych założeń prześledzimy zachowanie się układów prętów we fragmencie równomiernie obciążonego przekrycia. Z podanych wcześniej względów analizę tę przeprowadzimy dla struktury o układzie $CO + 2x \frac{1}{2} O$ symetrycznie podpartej w narożach kwadratowego rzutu ABCD /rys. 105a/.

Siły pochodzące od obciążeń własnych i zewnętrznych powodują, że centralny segment struktury w swej dolnej części doznaje wydłużeń, zaś górna część poddana działaniu sił ściskających zmniejsza swe rozmiary /rys. 105b/. Krawędziami tego segmentu są ciężna łączące końce ogniskujących się w jego środku elementów prętowych. Działanie sił wewnętrznych powoduje wzrost naprężeń w ciężnach dolnych i pionowych oraz istotne zmniejszenie bądź zupełny ich brak w ciężnach górnych /rys. 105c/.

W konsekwencji przy równoczesnym oddziaływaniu na konstrukcję nawet niewielkich obciążeń o zmiennym znaku jej obie powierzch-



Rys. 105. Naprężenia występujące w centralnym segmencie struktury.

nie, górna i dolna, ulegać będą wzajemnie przeciwnym przemieszczeniom. Przy tak rozmieszczonych prętach i cięgnach konstrukcja ta zamienia się w mechanizm. Zastosowanie stężeń brzegowych nie zabezpiecza struktury prętowo-cięgnowej przed skręcaniem jej w płaszczyźnie środkowej. Idea krzyżujących się cięgien może być bardzo pomocną dla nadania sztywności poszczególnym prostopadłościennym segmentom a przez to sztywności całej strukturze. W tym celu należy łączyć przeciwległe końce ogniskujących się w środku segmentu prętów. Część tak wykonanej struktury o układzie bryłowym $CO + 2x \frac{1}{2} O$ pokazano na rys. 106a.

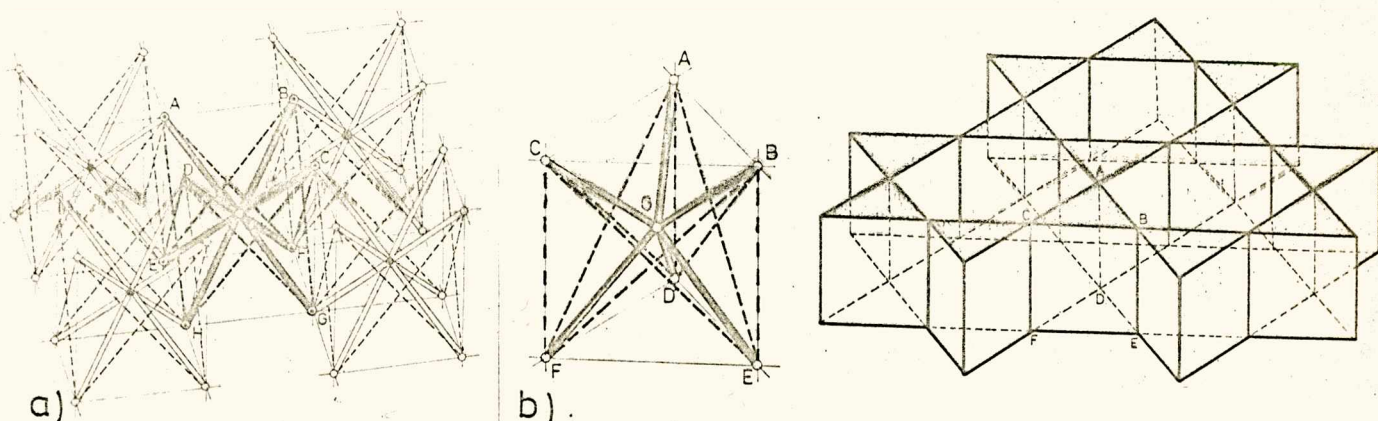
Ukośnie biegnące cięgna będą miały już inną długość i tak dla układu $CO + 2x \frac{1}{2} O$ osiągną wartość $e = \sqrt{3} d$ a dla układu $DWS + 2T$ długość przekątnej $e = \sqrt{\frac{7}{2}} d$ /rys. 106/.

Dla trzeciego typu struktury prętowo-cięgnowej o układzie $JDS + 2 OPS$ długość podobnych ukośnych cięgien wynosi $e = \sqrt{\frac{5}{2}} d$.

Wyodrębniony tak jak na rys. 106b segment struktury powinien spełniać warunek geometrycznej sztywności:

$$p \geq 3 w - 6$$

Sprawdzamy zgodność tego warunku dla segmentu struktury $PWS + 2T$



Rys. 106. Nowe rozmieszczenie cięgien w podstawowych układach brylowych struktur prętowo-ciężnowych.

przy koniecznym założeniu, że ciężna traktuje się również jako pręty. W danym segmencie liczba prętów równa jest $p = 3 \cdot 2 + 3 + 6 = 15$, zaś liczba węzłów wynosi $w = 3 \cdot 2 + 1 = 7$ zatem:

$$15 = 3 \cdot 7 - 6$$

Tak więc tego typu segment przekrycia jest konstrukcją sztywną samą w sobie. Sprowadza się to również dla podobnych segmentów struktur o układzie $CO + 2x \frac{1}{2} O$ oraz $JDS + 2 OPS$. Na tym stwierdzeniu możemy zakończyć wstępną analizę statyczną proponowanych struktur prętowo-ciężnowych.

5.4. Główne kryteria ekonomiczne struktur prętowo-ciężnowych

W ukształtowanym ostatecznie segmencie prętowo-ciężnowym podstawą do obliczeń długości krzyżujących się cięgien oraz długości ciężna wyznaczającego wysokość struktury jest stała długość ukośnie biegnących prętów ściskanych. Ciężna o regulowanej długości wraz z przegubowym połączeniem wszystkich elementów umożliwiają układanie tych segmentów na powierzchniach o dowolnych kształtach. Regularność opisującej krzywizny powłoki siatki przestrzennej pozwoli na zmniejszenie zakresu zmian długości cięgien. System krzyżujących się oraz pionowych cięgien

oprócz zapewnienia geometrycznej sztywności całej konstrukcji sprawia, że pręty konstrukcji są zawsze elementami ściskаными. Elementy prętowe są najkrótszymi elementami całej struktury. Ta własność proponowanych struktur ma szczególnie duże znaczenie z uwagi na to, że stateczność całej konstrukcji przy zadanych własnościach materiału konstrukcyjnego i kształcie przekroju określona jest długością wybooczeniową jednego bądź kilku prętów znajdujących się w najbardziej wyteżonej strefie przekrycia. Z tych też powodów optymalną wysokość dwuwarstwowych struktur prętowych określa stosunek:

$$\frac{h / \text{wysokość ustroju prętowego}}{d / \text{długość pręta pasa}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad [9]$$

W naszym przypadku jest dokładnie odwrotnie:

$$\frac{h}{d} = \frac{\sqrt{2}}{1}$$

Oznacza to, że dla krytycznych długości prętów ściskanych wysokość struktur prętowo-ciężnowych mogłaby być dwukrotnie mniejsza, lub inaczej, dla takich samych warunków podparcia i wysokości struktur rozpiętość struktury prętowo-ciężnowej byłaby dwukrotnie większa od rozpiętości przestrzennej ustroju prętowego. Dla tego ostatniego optymalną rozpiętość szacuje się na ok. $20h$, zatem teoretycznie optymalną rozpiętość struktury prętowo-ciężnowej można by określić na ok. $40h$. Te przypuszczenia należałoby zweryfikować na drodze doświadczalnej ponieważ mają one charakter szacunkowy i nie uwzględniają odmiennych warunków pracy elementów w obu porównywalnych ze sobą strukturach. Wydaje się jednak, że przy odpowiednio skonstruowanych zgodnie z wymogami struktury prętowo-ciężnowej węzłach, jej rozpiętość będzie zapewne istotnie większa od rozpiętości przestrzennej struktury prętowej o tej samej wysokości. Najważniejszą zaletą omawianych struktur prętowo-ciężnowych jest występujący tu podział pracy między ich elementami. Krótkie pręty przenoszą siły ściskające zaś stosunkowo długie ciężna pracują zawsze na rozciąganie. Tak więc przy teoretycznie dwukrotnie większej rozpiętości struktury prętowo-ciężnowej może być równocześnie znacznie lżejszą od podobnej przestrzennej struktury prętowej. Uzasadniają tą tezę własności materiałów konstrukcyjnych, które określają wielkości przekrojów elementów konstrukcji, te zaś są

znacznie większe dla elementów pracujących na ściskanie od elementów przejmujących siły rozciągające, dlatego cięgna mają mniejszą masę od prętów. Celem sprawdzenia tej tezy przeprowadzimy analizę porównawczą liczby prętów przypadających na jednostkę przekrywanej powierzchni dla struktur prętowych i proponowanych układów struktur prętowo-cięgnowych. Taka analiza pozwoli równocześnie na wyróżnienie najbardziej ekonomicznego układu struktur prętowo-cięgnowych.

Ponieważ w strukturach prętowo-cięgnowych występuje tylko jedna długość pręta, zatem będziemy je porównywać z przestrzennymi strukturami prętowymi, które tworzone są z prętów o jednakowych długościach. Takimi są struktury prętowe o układach bryłowych $\frac{1}{2} O + T$ oraz $O + T$. Pole powierzchni $/p/$ oraz liczbę prętów $/m/$ użytych na jej przekrycie w danych strukturach obliczać będziemy w zależności od liczby prętów $/n/$ leżących na bokach wielokąta, stanowiącego najwłaściwszą dla danego układu bryłowego formę przekrycia. Powierzchnia przekrycia liczona jest jako wielkość pola ograniczonego brzegowymi punktami podparcia właściwymi dla każdego z układów. Przez s oznaczamy stosunek liczby prętów do wielkości tak określonej powierzchni przekrycia. Tak określone wielkości dla struktury prętowej o układzie $\frac{1}{2} O + T$ przedstawiono w tabelicy 6, zaś dla przestrzennej struktury prętowej o układzie $O + T$ w tabelicy 7. Charakterystykę zmian wartości s określającej liczbę prętów przypadających na jednostkę przekrywanej powierzchni przedstawiono na rys. 107. Krzywa nr 1 obrazuje tę liczbę dla układu $\frac{1}{2} O + T$, a krzywa nr 2 wartości s w układzie bryłowym $O + T$.

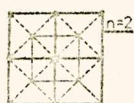
Na podstawie wartości s dla bardzo dużych n możemy stwierdzić, że w ruszcie przestrzennym o układzie $\frac{1}{2} O + T$ na jednostkę przekrywanej powierzchni przypada ok. 8 prętów, zaś w ruszcie na tę samą jednostkę powierzchni należy zużyć ok. 10 prętów.

Najbardziej ekonomicznym pod względem liczby prętów przypadających na jednostkę powierzchni przekrycia jest tzw. układ ortogonalno-diagonalny określany jako $\frac{1}{2} CO + \frac{1}{2} O$ lub ruszt OD. Składa się on z połówki czternastościanu $/\frac{1}{2} CO/$ oraz połówki ośmiościanu $/\frac{1}{2} O/$. Pręty warstwy górnej oraz pręty ukośne posiadają jednakową długość $/d/$, zaś pręty warstwy dolnej mają długość równą $\sqrt{2}d$. Pole powierzchni przekrycia dla tego układu równe jest $S = \sqrt{2}d^2$ a liczba prętów $m = 10n^2 + 6n$.

Tablica 6.

$$p = (n-1)^2 \cdot d^2$$

$$m = 8n^2$$



n	p	m	$s = \frac{m}{p}$
1	0	8	—
2	16	32	2,000
3	64	72	1,125
4	144	128	0,889
5	256	200	0,781
6	360	288	0,799
7	484	392	0,810
8	625	512	0,819
9	784	648	0,827
10	900	800	0,889
100	9900	80000	8,081
1000	999000	8000000	8,016
10000	99990000	800000000	8,001

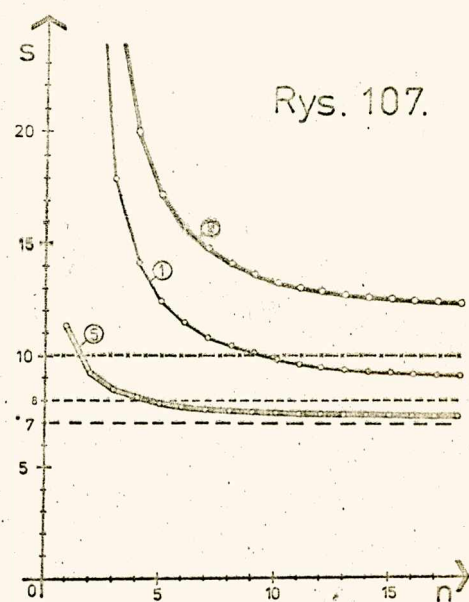
Tablica 7.

$$p = \frac{\sqrt{3}}{4} (n-1) \cdot d^2$$

$$m = 1,5(3n+n)$$

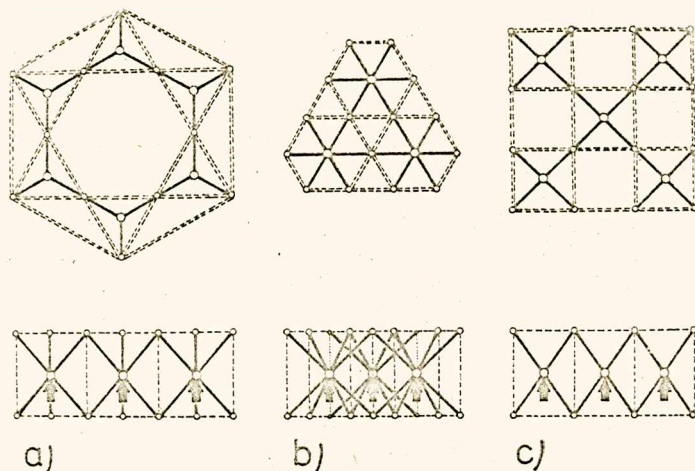


n	p	m	$s = \frac{m}{p}$
1	0	6	—
2	0,433013	21	48,497229
3	1,732050	48	27,980762
4	3,8971143	78	20,014809
5	6,928203	120	17,320508
6	10,825318	171	15,796903
7	15,58845	231	14,818657
8	21,21762	300	14,139191
9	27,712813	378	13,639960
10	35,07603	465	13,256917
100	1039,663	11325	10,892948
1000	4243,957	45150	10,638655
10000	432147,11	4501500	10,416592
100000	43292610	45001500	10,39473



Krzywa nr 5 na rys. 107 określa liczbę prętów przypadającą na jednostkę powierzchni przekrycia dla struktury prętowej o układzie $\frac{1}{2} CO + \frac{1}{2} O$. Dla tego rusztu na jednostkę powierzchni przekrycia przypada tylko ok. 7 prętów.

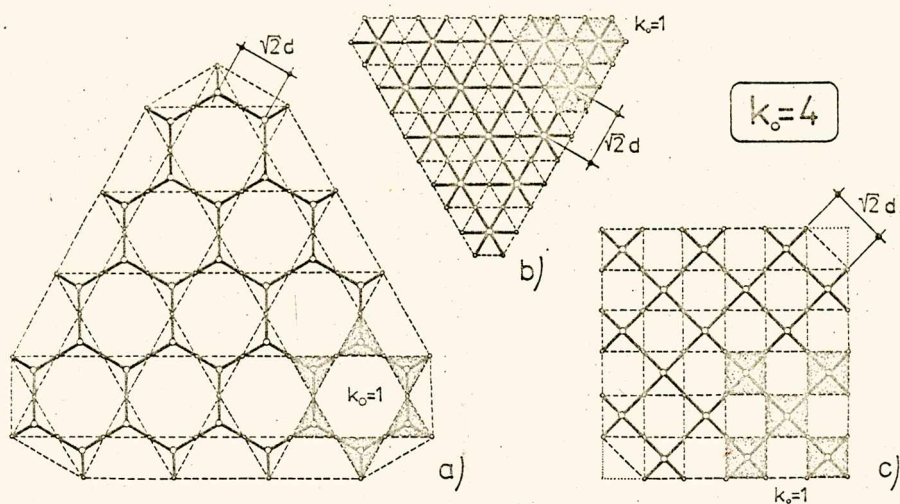
Aby wyznaczyć podobne wielkości dla struktur prętowo-ciężnowych należy dla każdego z układów bryłowych, zgodnie z brzegowymi warunkami podparcia /rozdział V. pkt. 5.3./ określić najmniejszą liczbę segmentów tworzących fragment struktury i nazywać je będziemy podstawowymi motywami konstrukcyjnymi. Na rys. 108 przedstawiono podstawowe motywy kolejno dla układów DWS + 2xT /a/, JDN + 2 OPS /b/ oraz CO + 2 x $\frac{1}{2} O$. (c)



Rys. 108. Podstawowe motywy konstrukcyjne przestrzennych struktur prętowo-ciężnowych.

Na podstawie rys. 108a określimy pomocną później liczbę cięgien przypadających na jeden pręt. W podstawowym motywie konstrukcyjnym struktury DWS + 2 x TP liczba prętów równa jest $6 \times 3 \times 2 = 36$ podczas gdy liczba cięgien łączących dolne i górne węzły typu K wynosi $6 \times 3 \times 2 + 12 = 48$, zatem na jeden pręt przypada $1\frac{1}{3}$ cięgna. W strefie środkowej bardziej rozbudowanych struktur liczba ta spadnie do $1\frac{1}{2}$ cięgna przypadającego na 1 pręt. Ponieważ zasady współpracy prętów i cięgien są identyczne we wszystkich układach struktur prętowo-cięgnowych tak więc podane wyżej liczby odnosić się będą również do nich.

Najmniejsze fragmenty omawianych struktur przedstawiono na powyższym rysunku dla czytelności ich przekrojów w starym układzie cięgien, tzn. gdy znajdowały się one w pasach górnych i dolnych. Pobieżna analiza wizualna pozwala stwierdzić, że najbardziej ekonomicznym układem prętów charakteryzować się będzie struktura o układzie CO + 2 x T /rys. 108a/. W sześciu prostopadłościennych segmentach znajduje się 36 prętów, podczas gdy w trzech segmentach struktury JDN + 2 x OPS przekrywających dużo mniejszą powierzchnię ograniczoną węzłami typu G znajduje się również $3 \times /2 \times 6/ = 36$ prętów. Obrazowe porównanie wielkości przekrywanych powierzchni dla trzech układów struktur pokazano na rys. 109, gdzie przez k_0 oznaczono liczbę segmentów na bokach wielokątów, przylegających do podstawowego motywu danej struktury i koniecznych dla jej dalszej rozbudowy.

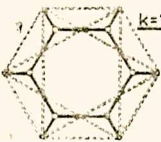


Rys. 109. Porównanie wielkości powierzchni przekrywanych strukturami prętowo-cięgnowymi.

Ze względu na trudności obliczenia potrzebnych pól powierzchni różnych struktur wynikających z odmiennego łączenia segmentów w podstawowe motywy konstrukcyjne a później ich dalszą rozbudowę, przyjęto następujący sposób: dla struktury prętowo-ciężnowej o układzie DWS + 2 x T wielkość powierzchni i liczbę prętów obliczano w zależności od k, oznaczającego liczbę podstawowych motywów konstrukcyjnych leżących na boku trójkąta, stanowiącego właściwą dla tego układu formę przekrycia. Dla obliczeń potrzebnych wielkości pozostałych układów struktur prętowo-ciężnowych przez k oznaczono liczbę prostopadłościennych segmentów leżących na bokach odpowiednich wielokątów. Przyjęcie takiego założenia nie prowadzi do fałszywych wyników uwzględnia jedynie odmienny charakter łączenia i budowy struktury DWS + 2 x T. Tak jak poprzednio za jednostkę obliczeń przyjęto długość podstawowego pręta. Liczbę prętów oraz wielkości powierzchni dla każdej ze struktur ze wzorów podanych kolejno w tablicy 8, 9 i 10. Dla każdej ze struktur podano wartości s, oznaczające liczbę prętów przypadającą na jednostkę przekrywanej powierzchni. Przebieg zmian wartości s w zależności od k dla każdej z analizowanych struktur prętowo-ciężnowych przedstawiono na rys. 110a.

Tablica 8.

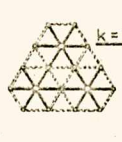
$$p = \frac{3}{2} \sqrt{3} k^2 d^2$$

$$m = (n^2 + 4n + 1) \cdot 6$$


k	p	m	$s = \frac{m}{p}$
1	2,598077	36	13,856407
2	10,39230	78	7,505553
3	23,38268	132	5,645202
4	41,56921	198	4,763139
5	64,95190	276	4,249298
6	93,53074	366	3,9131518
7	127,3057	468	3,676189
8	166,2768	582	3,500186
9	210,44417	708	3,364312
10	259,8076	846	3,256255
50	3495,190	16 206	2,495076
100	25980,76	62 406	2,402008
1000	2 598 076	6 024 006	2,318641
10 000	259 807 000	600 240 006	2,3103304

Tablica 9.

$$p = \frac{\sqrt{3}}{2} (k-1)^2 d^2$$

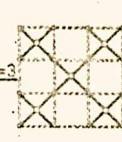
$$m = \left[\frac{k(k+1)}{2} \right] \cdot 12$$


k	p	m	$s = \frac{m}{p}$
1	0	12	—
2	0,86602	36	41,56922
3	3,464101	72	20,78461
4	7,794228	120	15,39600
5	13,85640	180	12,99038
6	21,65063	252	11,639381
7	31,176915	336	10,777205
8	42,43524	432	10,180217
9	55,42562	540	9,742785
10	70,14805	660	9,408671
50	2079,327	15 300	7,358150
100	8487,914	60 600	7,139562
1000	864 294,2	6 006 000	6,949022
10 000	86565220	600 060 000	6,930282

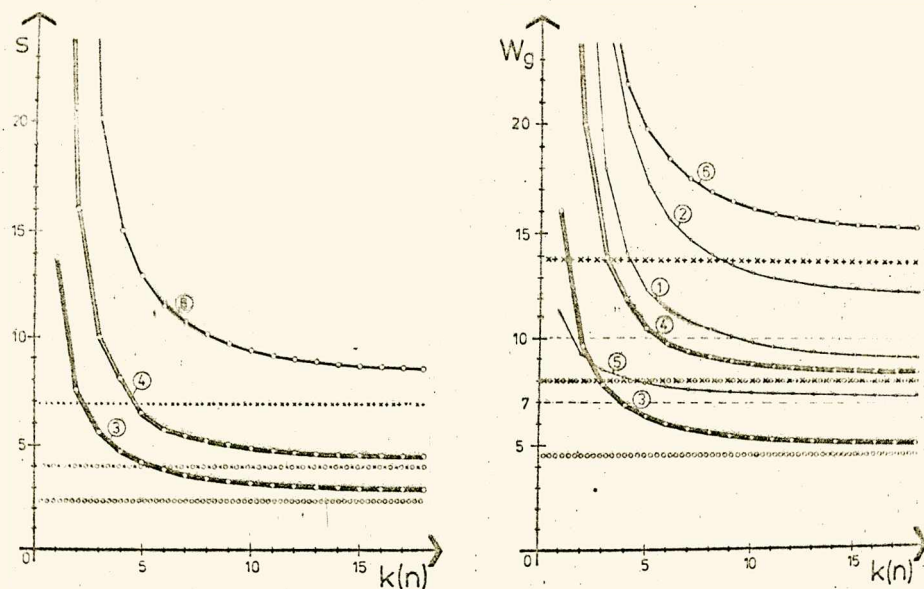
Tablica 10.

$$p = (k-1)^2 d^2$$

$$m_1 = [k-1/2 + k] \cdot 8$$

$$m_2 = [k^2/2] \cdot 8$$


k	p	m	$s = \frac{m}{p}$
1	0	8	—
2	1,0	16	16,0
3	4,0	40	10,0
4	9,0	64	7,111111
5	16,0	104	6,500000
6	25,0	144	5,760000
7	36,0	200	5,555555
8	49,0	256	5,22489
9	64,0	328	5,12500
10	81,0	400	4,93827
50	2401,0	10 000	4,1649313
100	9801,0	40 000	4,0812162
1000	998 001,0	4 000 000	4,008012
10 000	9998 001	400 000 000	4,0007998



Rys. 110. a/ liczba prętów struktur prętowo-ciężnowych przypadających na jednostkę powierzchni,
b/ porównywanie masy prętów przypadających na jednostkę powierzchni przekryć prętowych i prętowo-ciężnowych.

Przebieg krzywej nr 3 charakteryzującej strukturę DWS + 2xT potwierdza zaobserwowaną na wstępie prawidłowość. Strukturę tą cechuje najmniejsza spośród innych liczba prętów przypadających na jednostkę powierzchni przekrycia /2,31/. Obok niej równie niską wartością $s=4,0$ charakteryzuje się przestrzenna struktura prętowo-ciężnowa o układzie CO + 2 x $\frac{1}{2}$ O, a najmniej korzystnie wypada struktura JDN + 2x OPS gdzie na jednostkę powierzchni przekrycia przypada ok. 6,93 pręta.

W analizie statycznej traktuje się ciężna jako pręty w których z góry wiadomo, że panują naprężenia rozciągające. Należy więc otrzymane dla każdej ze struktur wartości s pomnożyć przez $1\frac{1}{4}$, ponieważ w ich strefach środkowych na 1 pręt przypada $1\frac{1}{4}$ ciężna, oraz dodać do wartości s pierwotnie otrzymanych, aby w pełni porównać przestrzenne struktury p prętowo-ciężnowe ze strukturami prętowymi.

Tym sposobem otrzymamy końcowe wartości s :

dla struktury DWS + 2x T:

$$s_k = 2,31 + 2,88 = 5,19$$

dla struktury CO + 2x $\frac{1}{2}$ O :

$$s_k = 4,00 + 5,00 = 9,00$$

dla struktury JDN + 2x OPS:

$$s_k = 6,93 + 8,66 = 15,59$$

Porównując ostateczne liczby prętów przypadające na jednostkę powierzchni w kolejnych strukturach prętowo-ciężnowych z odpowiadającymi im wartościami s z tablicy 6 i tablicy 7 musimy stwierdzić, że tylko strukturę prętowo-ciężnową DWS + 2x T cechuje mniejsza niż dla porównywanych ustrojów prętowych liczba prętów przypadająca na jednostkową powierzchnię. Pod tym względem struktura CO + 2x $\frac{1}{2}$ O jest tylko mniej ekonomiczna od ustroju O + T natomiast struktura JDN + 2x OPS jest zdecydowanie najmniej efektywna.

Wyliczmy teraz masę prętów przypadającą na jednostkę powierzchni przekrycia $/W_g/$. Ponieważ w obu rodzajach porównywanych struktur występują w zasadzie pręty o jednakowych długościach zakładamy, że jednostkowej długości pręt ma również jednostkową masę.

Na rysunku 110b krzywe nr 1, 2 i nr 5, w świetle przyjętych założeń, odpowiadają liczbie prętów przestrzennych struktur prętowych potrzebnych dla przekrycia jednostkowej powierzchni kolejno dla układów $\frac{1}{2}$ O + T, O + T oraz $\frac{1}{2}$ CO + $\frac{1}{2}$ O.

W celu wyliczenia podobnych wielkości dla struktur prętowo-ciężnowych założono bardzo niekorzystną relację mas między jej elementami polegającą na tym, że masa 1 pręta równa jest masie $1\frac{1}{4}$ przypadającego nań ciężna. W rzeczywistości elementy konstrukcji o których wiadomo, że zawsze występować będą w nich naprężenia rozciągające posiadają dużo mniejszy przekrój oraz odpowiednio mniejszą masę niż podobnej wielkości elementy pracujące na ściskanie. Na rys. 110b krzywe nr 3, 4 i 6 przedstawiają kolejno masę elementów struktur o układach DWS + 2x T, CO + $2\frac{1}{2}$ O oraz JDN + 2x OPS przypadającą na jednostkę przekrywanej nimi powierzchni, równą dwukrotnej liczbie pręta przypadających w omawianych strukturach na jednostkową powierzchnię.

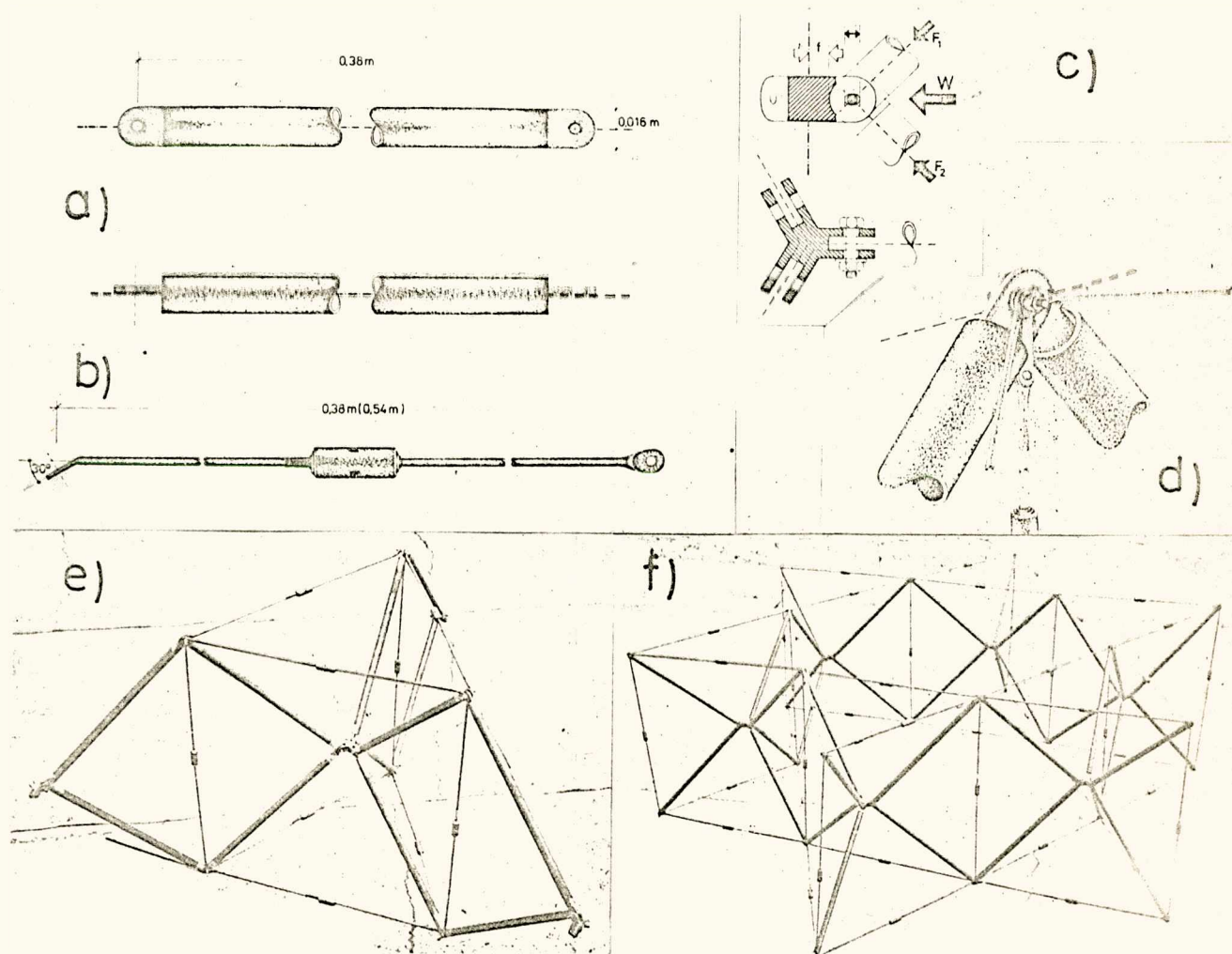
Na podstawie przeprowadzonych analiz stwierdzamy, że struktury prętowo-ciężnowe o układach DWS + 2x T oraz CO + 2x $\frac{1}{2}$ O mogą być równie ekonomiczne jak porównywane z nimi przestrzenne struktury prętowe zarówno pod względem ilości jak i masy elementów konstrukcji przypadających na jednostkę przekrywanych nimi powierzchni. W obliczeniach wszystkie węzły traktowano jako nie-

ważkie punkty materialne. W przyszłości po dokładnym opracowaniu wszystkich połączeń prętów i cięgien należy w celu pełnego porównania obu rodzajów struktur uwzględnić także rachunek kosztów, gdyż najdroższymi elementami wszystkich struktur są ich elementy węzłowe.

5.5. Wymagania stawiane połączeniom elementów składowych w przestrzennych strukturach prętowo-cięgnowych

W punkcie tym ograniczymy się do podania warunków geometrycznych poszczególnych części struktury prętowo-cięgnowej, których spełnienie zapewnia założoną na wstępie współpracę prętów i cięgien. Geometria elementów struktury oraz ich połączeń uwzględniać musi warunki pracy tych elementów oraz czynniki warunkujące prawidłowy montaż w rzeczywistej konstrukcji. Równocześnie dążyć należy do stosowania ujednoliconych i najprostszych form rozwiązań konstrukcyjnych, celem ułatwienia ich produkcji seryjnej i późniejszego montażu co prowadzi do ogólnej obniżki kosztów przekryć wykonywanych w danym systemie. W początkowej fazie pracy nad ustalaniem geometrii układów prętowo-cięgnowych oraz optymalnych kształtów ich elementów składowych posłużono się modelem podstawowego motywu konstrukcyjnego struktury o układzie DWS + 2x T /rys. 111/. Budowa tego modelu pozwoliła na ustalenie kolejności montowania prętów i cięgien oraz określenie sposobu dalszej rozbudowy struktur.

Długość prętów w świetle otworów wynosi 38,0 cm, zatem wysokość struktury równa jest $\sqrt{2} \cdot 38,0 \approx 54$ cm. Płaszczyzny końców rurowych prętów o przekroju kołowym są styczne do płaszczyzny symetrii pręta i usytuowane są na obu końcach po tej samej stronie płaszczyzny symetrii /rys. 111a/. Odpowiednio uformowane zakończenia prętów eliminują powstawanie momentów w płaszczyznach ich łączenia. Sztywne ciągnie stalowe posiada w połowie swej długości nakrętkę rzymską regulującą siłę jego napięcia oraz dostosowywanie się go do potrzebnych długości odcinków /rys. 111b/. Sposób łączenia prętów w węźle typu G przedstawiono na rys. 111c. W celu przesunięcia punktu przyłożenia sił bliżej środka ciężkości węzła typu "G" ^{należy} tak ukształtować otwór na śrubę łączącą pręty z węzłem, aby posiadała ona niewielką swobodę ruchu w poziomie



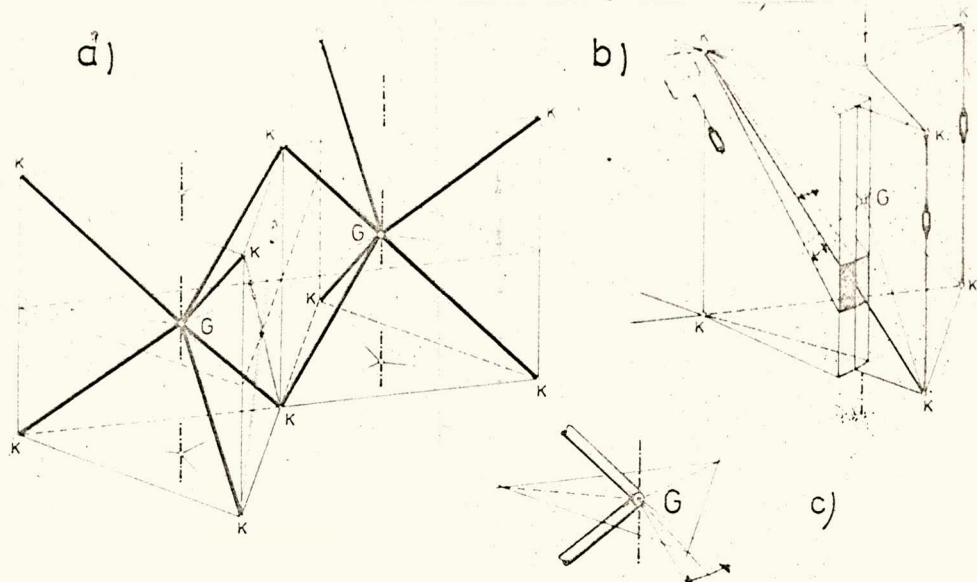
Rys. 111. Elementy składowe oraz model podstawowego modułu konstrukcyjnego struktury o układzie DWS + 2x T.

płaszczyzny środkowej węzła. Łączenie prętów w węźle typu "K" pokazano na rys. 111d, zaś na rys. 111e przedstawiono podstawowy segment montażowy. W etapie przygotowywania montażu należy najpierw do węzła typu "G" odłączyć trzy pary prętów, następnie każdą z nich uzupełniać dwoma prętami i pionowym cięgnem stosując do tego celu węzeł typu "K" w którym zamocowane już są parami cięgna dolne i górne. Przygotowane w ten sposób segmenty łączą się w węzłach typu "G" i usztywnia kolejnymi parami cięgien. Rysunek 111f przedstawia tak zmontowany podstawowy motyw konstrukcyjny struktury prętowo-ciężnowej o układzie DWS + 2x T. Zgodnie z warunkami podanymi w pkt. 5.3 rzeczywista konstrukcja każdego segmentu powinna być sprężona krzyżującymi się cięgnami i wymagać będzie stosowania odpowiednio ukształtowanego węzła typu "K".

Opisana wyżej konstrukcja modelu struktury DWS + 2x T nie może być traktowana jako ostatecznie uformowany system konstrukcyjny struktur prętowo-ciężnowych lecz jedynie jako punkt wyjścia dla opracowania takiego systemu.

O ile dla struktur prętowo-ciężnowych opracowanie prawidłowego pod względem statycznym sposobu łączenia prętów i węzłów nie stanowi zbyt trudnego zadania, to opracowanie systemu konstrukcyjnego zapewniającego przegubowe połączenia wszystkich elementów w dwukrzywiznowych strukturach prętowo-ciężnowych jest zadaniem bardziej złożonym. Trudności te zilustrowano na rys. 112a dla łączonych ze sobą dwóch prostopadłościennych segmentów struktury o układzie DWS + 2x T.

Zróżnicowanie długości odcinków w przestrzennych siatkach geometrycznych opisujących krzywizny danej powłoki powoduje konieczność stosowania w konstrukcji przekrycia prętów o różnych długościach. W przestrzennych strukturach prętowo-ciężnowych pojedynczy pręt zastąpiony został układem przegubowo połączonych ze sobą czterech prętów. Rozstaw tego zespołu może być regulowany za pomocą ciężna łączącego dwa skrajne przeguby zestawu prętów. Długości potrzebnych odcinków w zależności od charakteru siatki geometrycznej można określać jako odległości pomiędzy sąsiadującymi ze sobą węzłami typu "G", lub typu "K", odpowiednio przy tym regulując długościami ciężen. Zmiana konfiguracji zestawu prętów powoduje zmianę przestrzennego usytuowania ciężen stężających w stosunku do węzła typu "K" /rys. 112b/.



Rys. 112. Wymagania stawiane węzłom typu "G" i "K" struktury prętowo-ciężnowej stanowiącej konstrukcję przekrycia powłokowego.

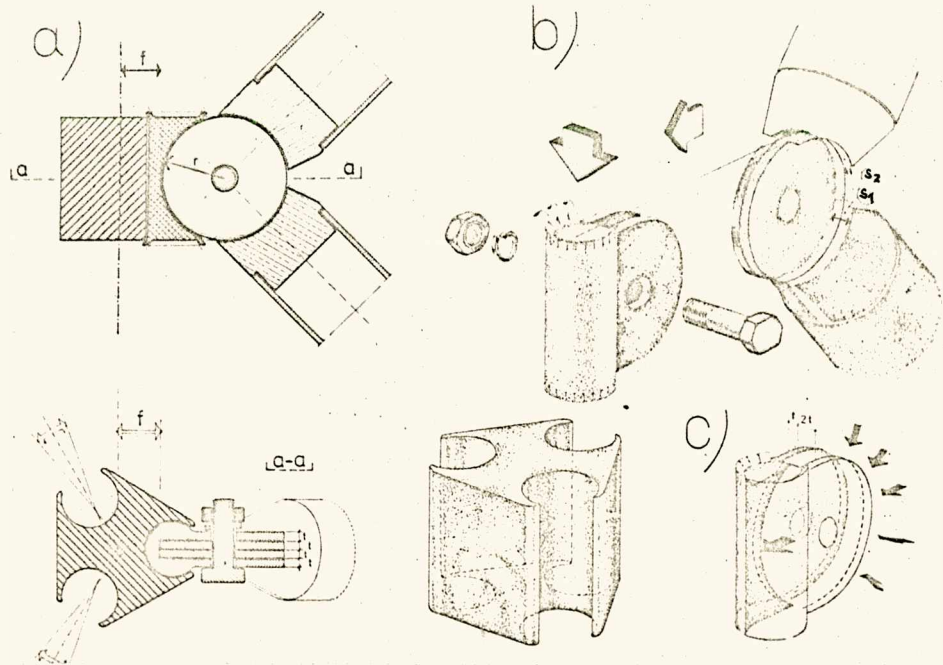
Tak więc węzeł typu "K", w którym schodzą się dwa pręty oraz pięć cięgien musi zapewnić wzajemnie swobodne i przegubowe ich połączenia. Powinien być tak zaprojektowany, aby ograniczyć do minimum wartości momentów zginających i skręcających, których powstawanie jest rezultatem różnego położenia w przestrzeni cięgien sprężających. Wielkości tych momentów ograniczy się do minimum poprzez takie połączenie niezależnych od siebie ukośnych cięgien, w którym pochodzące od nich naprężenia przekazywane były z obu stron centrycznie na oś prostopadłą do węzła typu "K" jak najbliższej jego środka ciężkości.

Konstrukcja węzła typu "G" poprawna pod względem statycznym musi umożliwiać łączenie do niego pod różnym kierunkiem zestawów prętowych. Swoboda ruchu przy stosunkowo blisko odległych od środka ciężkości węzła "G" punktów przyłożenia sił może odbywać się tylko w płaszczyźnie środkowej /rys. 112c/, gdyż wypadkowe działających sił przechodzić będą w zasadzie przez środek jego ciężkości. Rozwiązań konstrukcyjnych tego problemu może być bardzo dużo, jednak największą trudność sprawia takie zaprojektowanie systemu połączeń, aby składał się on z jak najmniejszego asortymentu różnych części składowych.

Wszelkie działania zmierzające do określenia geometrycznego części składowych modularnego systemu konstrukcyjnego opierać się muszą na pewnych, z góry już przyjętych założeniach, uwzględniających prawidłowe pod względem statycznym warunki pracy węzłów typu "G" oraz węzłów typu "K". Istotną rolę pełnić też będzie technologia wykonywania tych węzłów a później sposób oraz kolejność ich montażu. Propozycję rozwiązania geometrycznego węzłów typu "G" i "K" przedstawimy na przykładzie struktury prętowo-cięgnowej o układzie bryłowym DWS+2xT.

W powłokowych strukturach prętowo-cięgnowych elementem stałym, niezmiennym jest element prętowy, którego długość stanowić będzie jednostkę wszelkich innych wielkości geometrycznych. Najważniejszą cechą pręta podstawowego jest kształt i rozmiary jego końcówek. W dalszych rozważaniach przyjęto ideę taką jak w omawianym wcześniej modelu pomocniczym, gdzie dwie płaskie końcówki pręta są styczne po tej samej stronie do jego płaszczyzny symetrii /por. rys. 111a/. Połączone przegubowo za pomocą śrub pręty tworzą czworokątny zestaw, który odznaczać się musi wymaganą przez krzywizny powłoki swobodą wzajemnego usytuowania prętów.

Dlatego jednakowe, płaskie końcówki prętów mają kształt koła o promieniu nieco większym od promienia pręta rurowego /rys.113/. Dodatkowo, aby powiększyć zakres różnych długości uzyskiwanych za pomocą czworokątnego zestawu prętów wewnętrzne części końcówek tych prętów zostały ścięte tak jak pokazano to na rysunku 113a. Grubość końcówki pręta oznaczona na rys. 113 przez t w powiązaniu z jej promieniem r określi wymiary części łączących pręty z węzłem typu "G".



Rys. 113. Węzeł typu "G" dla struktury prętowo-ciężnowej o układzie DWS + 2xT.

Końcówki prętów winny być tak wykształcone, aby zapewnić bezmomentowe przekazywanie sił z prętów na śrubę je łączącą. Stąd walcowa powierzchnia oznaczona na rys. 113b symbolem s_1 ma wysokość równą $2t$, zaś po drugiej stronie płaszczyzny symetrii pręta wysokość płaszczyzny walcowej oznaczonej tym razem przez s_2 będzie równa wartości t .

Węzeł typu "G" stanowi odpowiednio uformowaną część prostopadłościennego bloku metalu. W pobliżu wierzchołków trójkątnych podstaw wydrążono prostopadle do nich trzy cylindryczne otwory o przekroju kołowym. Środki symetrii tych otworów są jednakowo odległe od środka ciężkości węzła typu "G". W otwory te wsuwane będą elementy łączące węzeł "G" z trzema parami prętów.

Węzeł ten, podobnie jak pręty omawianej struktury, będzie

zawsze elementem ściskany, tak więc musi być on głównie projektowany na działanie takich właśnie sił. Niewielkie siły rozciągające mogą wystąpić głównie podczas montażu segmentów i ich transportu do miejsca zamontowania oraz w wyniku lokalnej utraty stateczności pręta lub ciężna. Odpowiednie zagłębienie cylindrycznych otworów w masie prostopadłościennego bloku węzła "G" z pozostawieniem pewnych obejm pozwoli na przeniesienie niewielkich, incydentalnie występujących sił rozciągających.

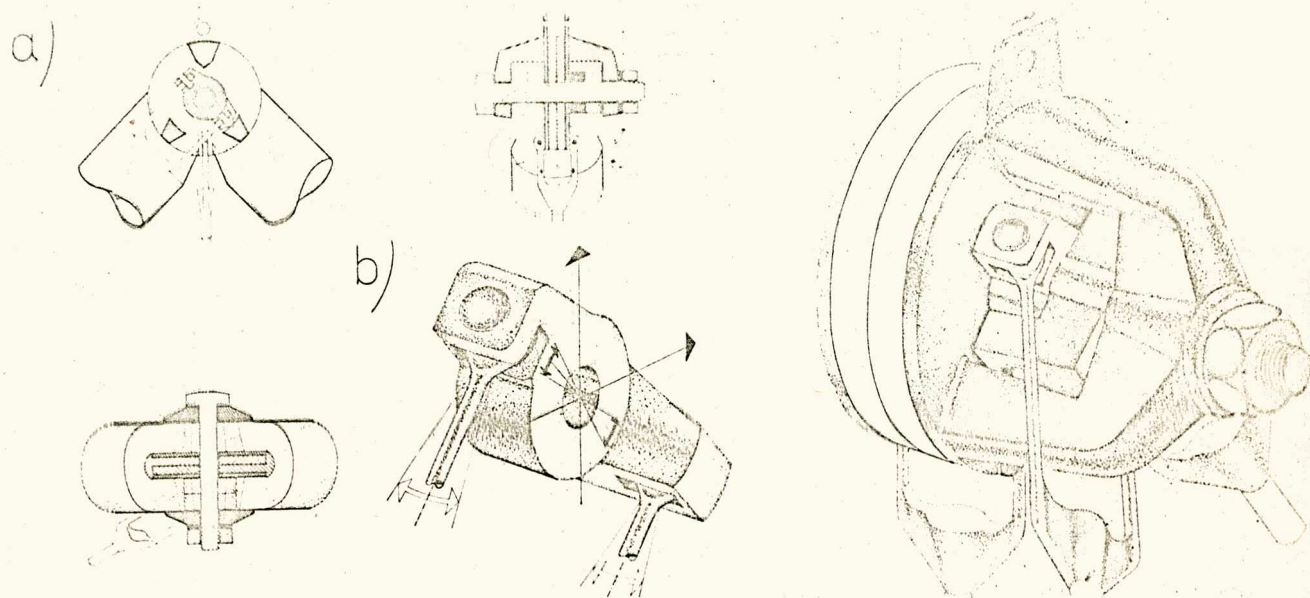
Cylindryczna część elementu łączącego na promień równy promieniowi otworów w prostopadłościennym bloku węzła "G" i po wsunięciu jej tam pozwala na obrót tej części w płaszczyznach prostopadłych do płaszczyzny środka ciężkości węzła typu "G".

Należy równocześnie zabezpieczyć część łączącą przed wypadnięciem w przypadku gdy wypadkowa działających na węzeł sił osiągnie wartość zerową. Dlatego powierzchnie górna i dolna części łączącej powinna mieć wystające nieco brzozy, które po rozklepaniu uniemożliwią ruchy tej części wzdłuż cylindrycznych otworów węzła typu "G" /rys. 113b/.

Element łączący pod różnymi kątami pary prętów z węzłem typu "G" musi być tak zbudowany aby punkt przyłożenia wypadkowej siły znajdował się jak najbliżej środka ciężkości. Kołowe wycięcie o promieniu r w płaszczyźnie środkowej elementu łączącego, przy owalnym otworze na śrubę, powoduje przesunięcie punktu przyłożenia siły bliżej środka ciężkości węzła "G", na odległość f oznaczoną tak na rys. 113a. Element łączący wykonany jest więc z dwóch symetrycznych połówek /rys. 113c/. Aby przekazywanie z prętów następowało także za pośrednictwem powierzchni bocznych końcówek prętów określonych uprzednio przez s_1 i s_2 dokładność ich wykonania jak i elementu łączącego musi być bardzo duża.

Dużo więcej trudności sprawia poprawne określenie budowy węzła typu "K". W węźle tym schodzą się dwa pręty, dwie pary krzyżujących się cięgien stężających oraz jedno ciężno pionowe, łączące dwa węzły "K". Obok dwóch przegubowo połączonych prętów i również przegubowo połączonych z nimi pięciorami ciężnami należy umożliwić także przegubowe zamocowanie w węźle typu "K" elementów pokrycia dachowego. Rozwiązanie geometryczno-konstrukcyjne węzła typu "K" będące kompromisem pomiędzy niekiedy sprzecznymi ze sobą wymaganiami stawianymi przez elementy łączące się

w tym węźle przedstawiono na rys. 114.



Rys. 114. Węzeł typu "K" w przestrzennych strukturach prętowo-ciężnowych.

Na rys. 114a pokazano w rzutach główne przekroje węzła "K". Najważniejszą jego częścią jest element łączący krzyżujące się ciężna /rys. 114b/. Wykorzystano tu zasadę przegubu krzyżowego. Pokazany na rys. 114b element łączący jedno ciężno sprężające posiada swobodę ruchu w płaszczyźnie prostopadłej do osi śruby. Widełkowo zakończone ciężno może obracać się także wokół punktów zamocowania go w elemencie łączącym. Czopy mocujące ciężno muszą być unieruchomione np. poprzez punktowe zespawanie w celu zabezpieczenia ich przed wypadnięciem.

Element łączący drugie ciężno jest taki sam, z tym, że jest on skierowany przeciwnie i obrócony o 90° w stosunku do poprzedniego. Przyjęcie takiego rozwiązania umożliwia w niezbędnym zakresie bezkonfliktowe łączenie pod różnymi kątami ciężien w węźle typu "K" zgodnie z wymaganiami stawianymi przez powłokowe struktury prętowo-ciężnowe /por. rys. 112b/.

Zasadniczy korpus węzła "K" składa się z dwóch części zespawanych następnie ze sobą. Pierwsza z nich jest płaska przylegająca do płaszczyzny końcówek prętów i umożliwia przegubowe łączenie z węźlem "K" pokrycia dachowego oraz pionowego ciężna konstrukcji. Ciężno to nie musi być połączone z węźlem w sposób

przegubowy ponieważ biegnie ono symetrycznie między dwoma węzłami typu "K" w każdym czworokątnym zestawie prętów. Widelkowe zakończenie pionowego cięgna winno mieć taki sam rozstaw wideltek jak cięgna stężające /b/, a to w celu ujednolicenia asortymentu cięgien /rys. 114/. Druga część korpusu węzła "K" będąca odpowiednio uformowanym trójnogiem zapewnia stabilność całemu połączeniu prętów i cięgien /rys. 114c/. Rozstaw nóg oraz ich kształt określa zakres koniecznych zmian kierunków łączenia z węzłem typu "K" ukośnych cięgien stężających /rys. 114a/.

Przedstawiona wyżej budowa węzła typu "K" obowiązywać będzie dla wszystkich omówionych wcześniej układów bryłowych przestrzennych struktur prętowo-cięgnowych, natomiast węzeł typu "G" przybierać będzie dla struktury o układzie JDS + 2xOPS formę prostopadłościanu o podstawie sześciokątnej zaś dla układu bryłowego CO + 2xT formę prostopadłościanu o podstawie kwadratowej.

5.6. Zasady kształtowania powłokowych struktur prętowo-cięgnowych

Przestrzenne struktury prętowo-cięgnowe powstały na drodze rozwoju zasad metody kół wpisanych w siatkę trójkątną i podobnie jak ona służyć mają konstruowaniu przekryć powłokowych za pomocą jednego elementu modularnego.

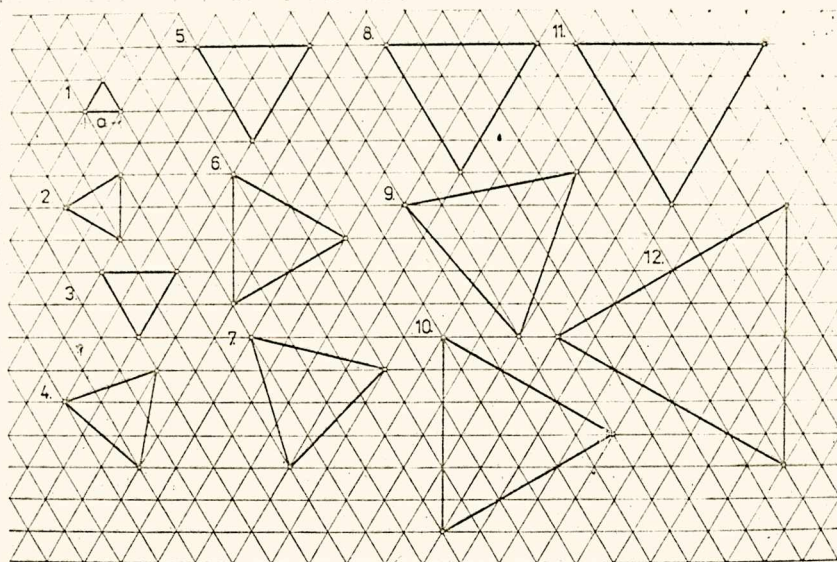
Takim elementem w strukturach prętowo-cięgnowych jest zestaw składający się z czterech równej długości i przegubowo połączonych ze sobą prętów oraz wewnętrznego cięgna regulującego długość tego zestawu. Łączenie zestawów odbywa się także przy użyciu cięgien o regulowanej długości i zależnie od liczby połączonych w jeden segment zestawów otrzymamy przestrzenne struktury prętowo-cięgnowe opisane układem współzależnych brył. Zastosowanie cięgien o regularnych długościach umożliwia wykorzystanie ich jako konstrukcji dwukrzywiznowych przekryć powłokowych. Przy jednakowych długościach prętów dostosowywania wielkości i kształtów segmentów konstrukcji do krzywizn danej powłoki odbywać się będzie poprzez zmianę długości odpowiednich cięgien. Podstawą do obliczeń wszelkich związków miarowych i potrzebnych długości cięgien jest siatka geometryczna przybliżająca powierzchnię da-

nej powłoki.

Wiodącą w naszych rozważaniach formą przekrycia jest kopuła kulista. Rodzaj i charakter opisującej sferę siatki trójkątnej decyduje o zakresie koniecznych zmian długości elementów potrzebnych do jej skonstruowania.

Regularne siatki sferyczne pozwalają do minimum zmniejszyć zakres zmian długości prętów, co pozwala na stosowanie elementów o typowych wymiarach. W konstrukcjach prętowo-ciężnowych wykorzystanie regularnej siatki sferycznej zmniejsza zakres zmian długości ciężarów oraz zmian kierunków zbiegających się w węzle typu "G" prętów. W świetle kryteriów regularności siatek sferycznych przedstawiona w rozdziale III metoda deformacji siatki wtórnej pozwala na otrzymywanie bardzo regularnych trójkątnych siatek sferycznych.

W metodzie deformacji siatki wtórnej z wielu możliwych podziałów trójkątnych ścian wielościanów stosuje się ze względu na łatwość obliczeń te, w których równoboczna ściana wielościanu podzielona jest liniami równoległymi do każdej z podstaw trójkąta.



Rys. 115. Kolejne możliwe podziały równobocznych trójkątnych ścian wielościanów foremnych.

Na rys. 115 tak określone podziały przedstawiono dla trójkątów o numerach kolejno 1, 3, 5, 8 i 11.

Dla właściwych metodzie deformacji siatki wtórnej podziałów równobocznych trójkątów sferycznych należy tak określić w ich obszarach układy bryłowe struktur prętowo-ciężnowych, aby możli-

wym było skonstruowanie całej powierzchni kulistej.

Dla struktury prętowo-ciężnowej o układzie bryłowym DWS + 2xT należy stosować takie siatki sferyczne, które powstają przez podzielenie boku trójkąta sferycznego na parzystą liczbę odcinków o równych długościach /rys. 116/. Rozmieszczenie segmentów struktury pokazano schematycznie w obszarach trójkątnych ścian 4-ścianu, 8-ścianu i 20-ścianu foremnego.

Dla potrzeb struktury o układzie JDN + 2x OPS należy również stosować siatki sferyczne powstające przez podział boków trójkątów sferycznych na parzystą liczbę jednakowej długości odcinków. Charakterystyczne dla tej struktury ułożenie segmentów w obszarach trójkątnych ścian 4-ścianu, 8-ścianu i 20-ścianu przedstawiono na rys. 117.

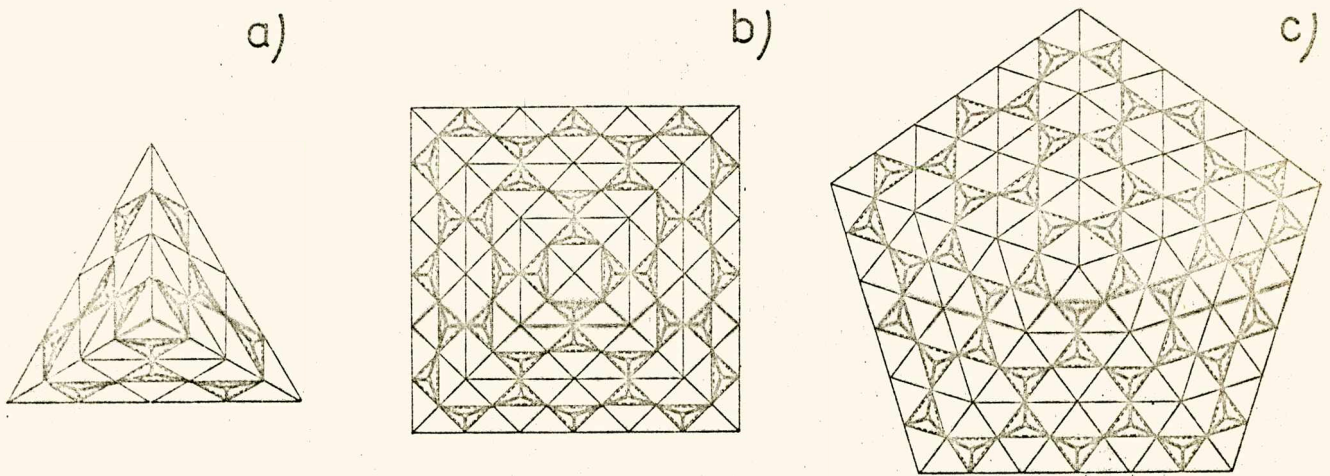
Najbardziej odpowiednimi dla struktury prętowo-ciężnowej o układzie CO + 2x $\frac{1}{2}$ O będą siatki powstałe na bazie sześcianu /rys. 118a/. Ponieważ na krawędzi AB nie można ułożyć zgodnie z wymogami pracy tej struktury kolejnego jej systemu, należy więc układać je w sposób pokazany na rys. 118b i c, dla dwukrotnie gęstszych podziałów krawędzi ściany sześcianu.

Długości wszystkich potrzebnych ciężarów wyliczyć można na podstawie symetrycznych partii każdej z siatek sferycznych przyjmując uprzednio wielkości podstawowe dla tych obliczeń, a będą one stanowiły długości promienia kuli oraz długość pręta struktury. Ta ostatnia wartość określa zarazem wysokość projektowanej struktury.

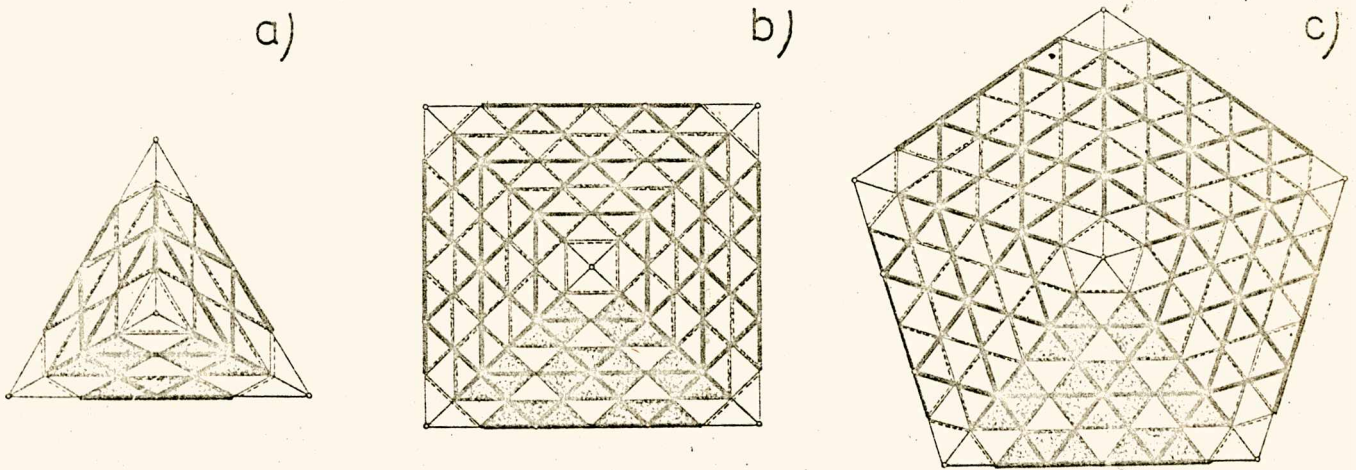
Sposób wykonywania tego typu struktur omówimy krótko na przykładzie przekrycia walcowego konstruowanego strukturą prętowo-ciężnową o układzie CO + 2x $\frac{1}{2}$ O. Z warunków brzegowych jej podparcia wynika, że krawędzie boczne należy podzielić na nieparzystą liczbę części, zaś krańcowe podpory boczne należy umieszczać tak jak w punkcie S /rys. 119/ z uwagi na występowanie w tej strefie największych sił zginających.

Gdyby strukturę tą dodatkowo nie podparto w punkcie S wówczas ciężna w obszarze nr 3 /rys. 119b/ byłyby ciężnami zerowymi, co powodowałoby dużą podatność na odkształcenia jej krawędzi łukowych.

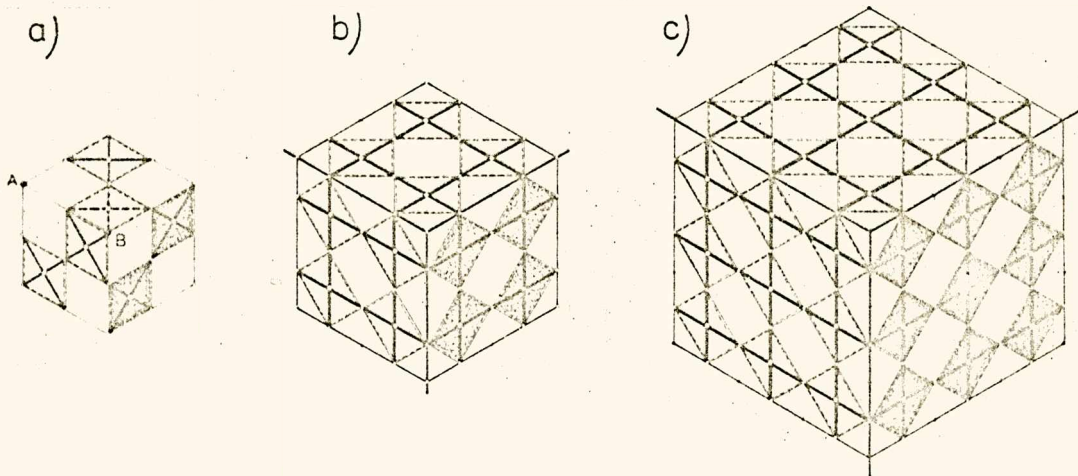
W przekryciu walcowym o takim układzie prętów i ciężarów występować będą jedynie dwie różne długości ciężarów. Przy zadanej wartości promienia powierzchni walcowej /R/ na której leżą



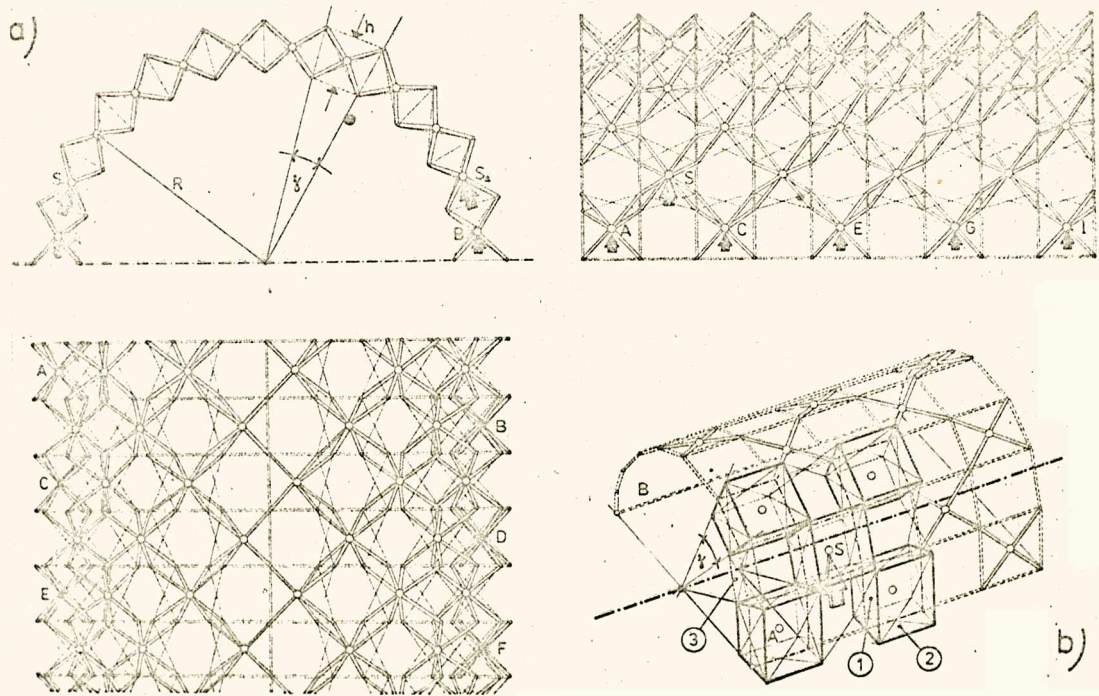
Rys. 116. Rozmieszczenie segmentów struktury o układzie DWS + 2xT w obszarach równobocznych ścian a/4-ścianu, b/8-ścianu c/ 20-ścianu foremnego.



Rys. 117. Układanie segmentów struktury o układzie JDN + 2x OPS w obszarach równobocznych ścian a/4-ścianu, b/8-ścianu, c/ 20-ścianu foremnego.



Rys. 118. Sposób układania segmentów struktury o układzie $CO+2x\frac{1}{2}O$ w obszarze kwadratowych ścian sześcianu.



węzły typu "G" oraz długości prętów struktury /d/ obliczymy jej wysokość znając także wartość kąta γ , będącego wielokrotnością podziału kąta 2π na n nieparzystych części. Przekątne trapezowych pól będą odpowiadały długościom krzyżujących się w nich cięgien. Długość cięgien leżących w prostokątnym obszarze nr 2 /rys. 119b/ obliczymy znając wysokość struktury prętowo-ciężnowej oraz długość odcinków leżących w podstawie przekrycia.

Dzięki wyraźnemu usytuowaniu prętów o różnych długościach na krawędziach poszczególnych segmentów proces montażu tego przekrycia jest w minimalnym stopniu narażony na niewłaściwe umieszczanie tych segmentów w kolejnych jego partiach.

5.7. Podstawowe założenia statyczne i geometryczne sposobu optymalnego wykorzystania nośności struktur prętowo-ciężnowych

Nośność przestrzennych struktur prętowych, składających się niekiedy z kilku tysięcy jednakowych prętów, ograniczona jest

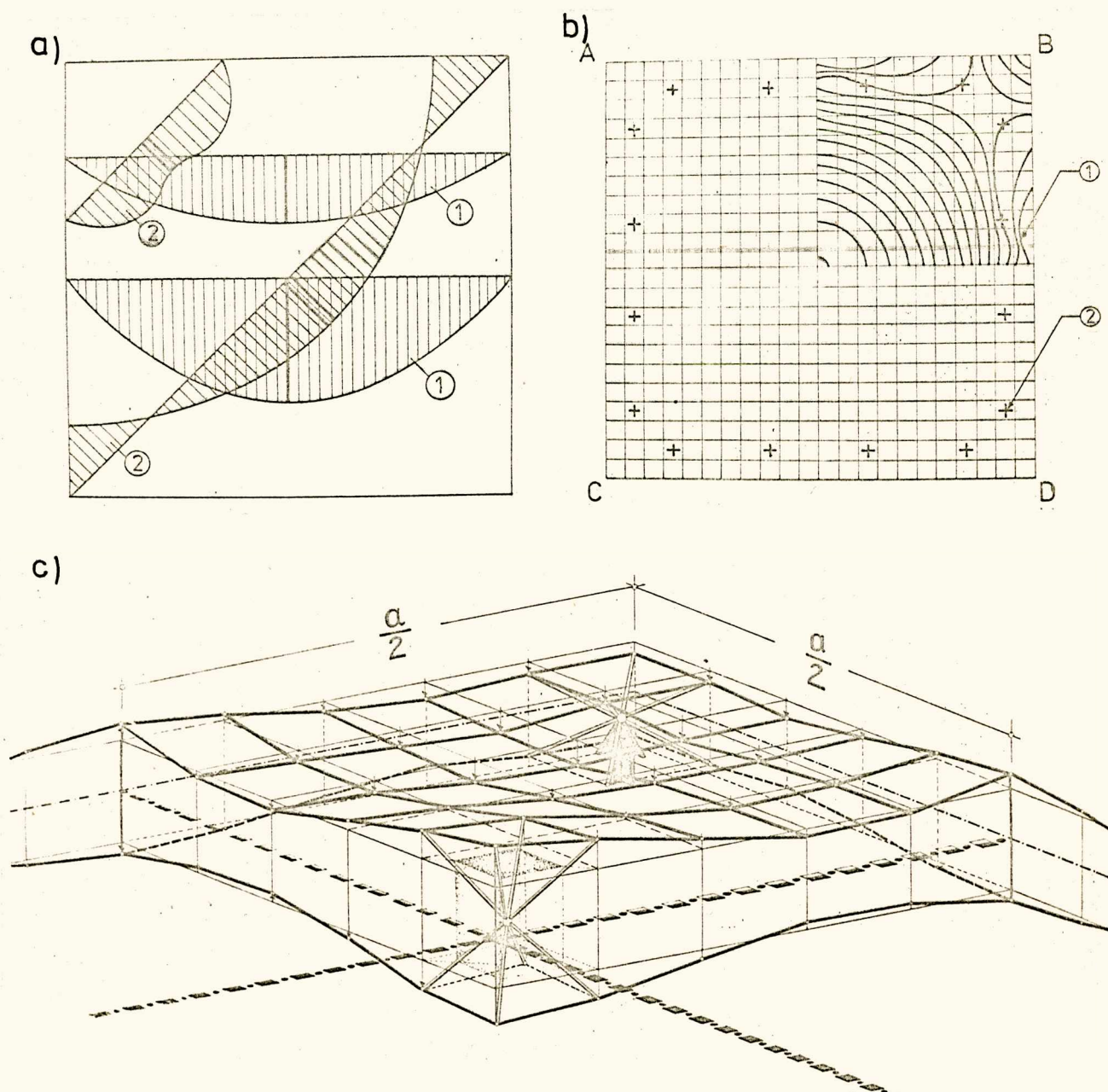
wytrzymałością kilku zaledwie prętów znajdujących się w strefie największego wyężenia konstrukcji. Ogromna większość elementów nie jest więc dostatecznie obciążona. **Budowa** struktury prętów o zróżnicowanych przekrojach jest sprzeczna z podstawową zasadą unifikacji części składowych; wymaga przeprowadzenia bardzo dokładnych obliczeń statycznych oraz komplikuje montaż przekrycia. [9]

W proponowanych układach prętowo-cięgnowych przyjęto zasadę podziału pracy między ich elementami; krótkie pręty konstrukcji pracują na ściskanie a cięgna przejmują naprężenia rozciągające. Z przeprowadzonych w pkt. 5.3. analiz porównawczych wynika, że niektóre struktury prętowo-cięgnowe przy mniejszym zużyciu materiałów konstrukcyjnych zdolne są do przekrywania dwukrotnie większych rozpiętości, przy jednakowych wysokościach struktur. Przekrywanie przestrzennymi strukturami prętowymi coraz większych rozpiętości pociąga za sobą konieczność stosowania odpowiednio większej wysokości samej struktury a przy zwiększonych rozmiarach przekrojów poprzecznych prętów powoduje coraz bardziej nie ekonomiczne wykorzystanie nośności materiałów konstrukcyjnych.

Duża swoboda w kształtowaniu za pomocą struktur prętowo-cięgnowych różnorodnych form przekryć nasuwa pytanie: czy można tak uformować powierzchnię górną i dolną samego przekrycia, aby naprężenia panujące we wszystkich elementach struktury były sobie równe. Odpowiednie uformowanie tych powierzchni powinno uwzględniać wielkości panujących w danym obszarze sił. Część konstrukcji narażona na największe naprężenia powinna posiadać największą wysokość, zaś partie niedociążone wysokość najmniejszą. Ustalenie kształtu tych powierzchni dokonano posilkując się wykresami momentów zginających i naprężeń głównych dla swobodnie podpartych na brzegu przestrzennych struktur prętowych /rys. 120 a i b/. [9] [21]

Takie uformowanie przekrojów struktury prętowo-cięgnowej powinno ujednolicić wielkości sił działających na każdy element struktury niezależnie od jego położenia. To z kolei zapewnia maksymalnie wykorzystanie nośności materiałów konstrukcyjnych przyczyniając się równocześnie do obniżenia kosztów związanych z projektowaniem i wykonywaniem konstrukcji przekrycia.

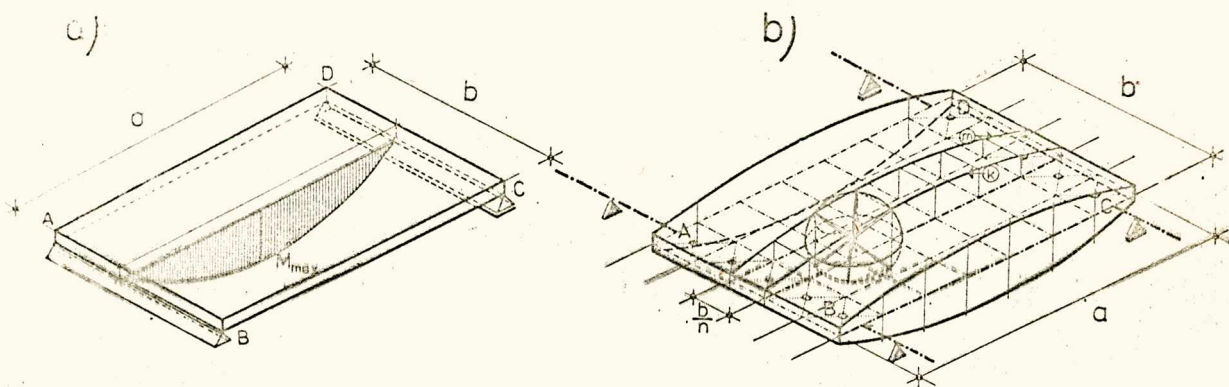
Kierując się zasadą odpowiedniego do wielkości sił formowania powierzchni górnych i dolnych przekrycia, przeprowadzimy



Rys. 120. a/ wykres momentów zginających[9], b/ wykres naprężeń głównych dla przestrzennych ustrojów prętowych,[21] c/ symetryczna ówiartka przekrycia uformowana wielkościami panującymi w niej naprężeń.

próbę ustalenia najbardziej ekonomicznego rozmieszczenia elementów w strukturze $CO + 2x \frac{1}{2} O$, stanowiącego swobodnie podparte na dwóch przeciwległych krawędziach przekrycie prostokątnego rzutu ABCD /rys. 121/.

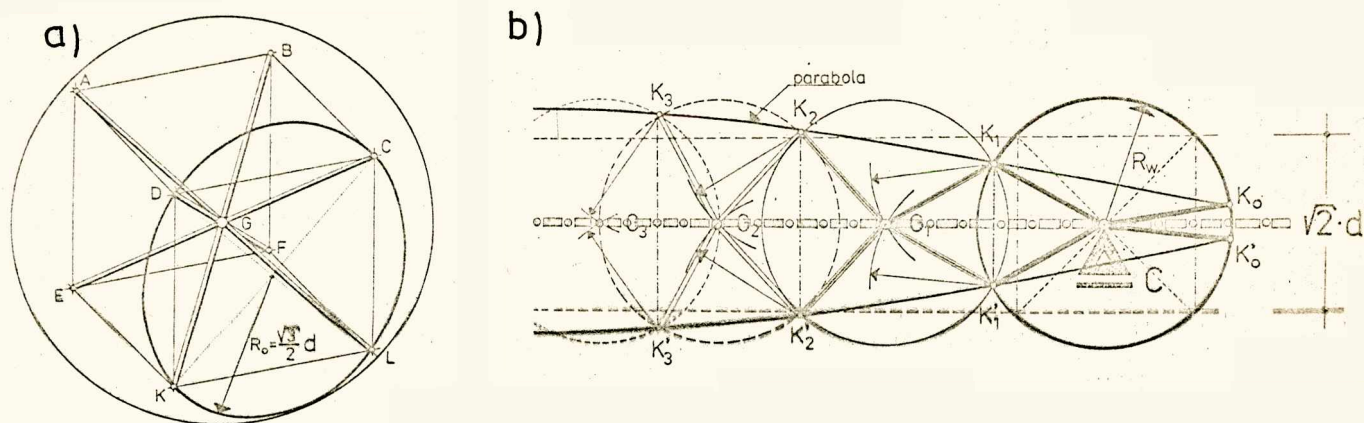
Dla tej formy rzutu oraz sposobu podparcia powierzchnię górną i dolną przekrycia ustalimy na podstawie wykresu momentów zgi-



Rys. 121.

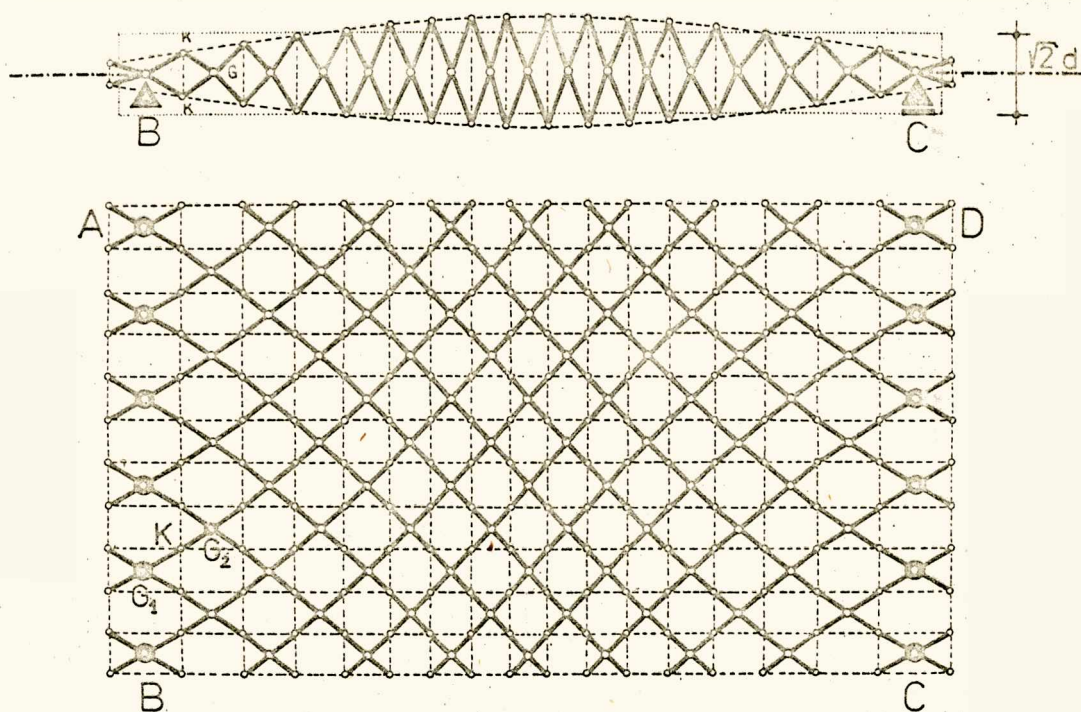
nających wyznaczonych przez analogię dla płyty podpartej ciągle na dwóch przeciwległych krawędziach i obciążonej tak samo jak struktura prętowo-ciężnowa /rys. 121a/. Dla obciążenia równomiernie rozłożonego na całej powierzchni wykresem momentów dla tej płyty jest parabola, której użyjemy do określenia kształtu powierzchni ograniczających strukturę prętowo-ciężnową. Zgodnie z wymogami struktury $CO + 2x \frac{1}{2}$ O krawędzie boczne prostokątnego rzutu dzielimy na n nieparzystych odcinków /rys. 121b/. Węzły typu "G" leżeć będą na powierzchni środkowej przekrycia. Położenie węzłów typu "K" na obu parabolicznych powierzchniach, określimy wpisując kulę o promieniu d równej długości podstawowego pręta tej struktury. Parabole m i k odpowiadają w rzucie prostokątnym na płaszczyznę środkową liniom prostym, łączącym punkty równego podziału krawędzi AB i CD. Punkty wspólne okręgów wyznaczonych płaszczyzną prostokątną do powierzchni środkowej przekrycia, oraz jednej z parabol wyznaczają położenie węzłów typu "K" na nowowyznaczonych powierzchniach dolnych i górnych struktury.

Długość promienia potrzebnego okręgu wynosi $R = \frac{\sqrt{3}}{2} d$. Pierwszym punktem zaczepienia środka tego okręgu jest punkt podparcia struktury /punkt C, rys. 122b/. Wykreślony z tego punktu okrąg pozwoli znaleźć położenie skrajnych węzłów oznaczonych przez K_0 , oraz pierwszych węzłów K_1 leżących na powierzchni parabolicznej. Następnie z punktów K_1 zakreślamy okręgi o promieniu $R_0 = R_w = \frac{\sqrt{3}}{2} d$ wyznaczając tym samym położenie na powierzchni środkowej przekrycia węzłów G_1 . Wyznaczanie następnych punktów odpowiadających położeniom węzłów typu "G" przeprowadza się tak samo.



Rys. 122. Określanie położenia węzłów w nowym układzie struktury $CO + 2x \frac{1}{2} O$.

Na rys. 123 przedstawiono wynik wszystkich tak przeprowadzonych operacji.



Rys. 123. Optymalne rozmieszczenie elementów struktury prętowo-ciężnowej $CO + 2x \frac{1}{2} O$.

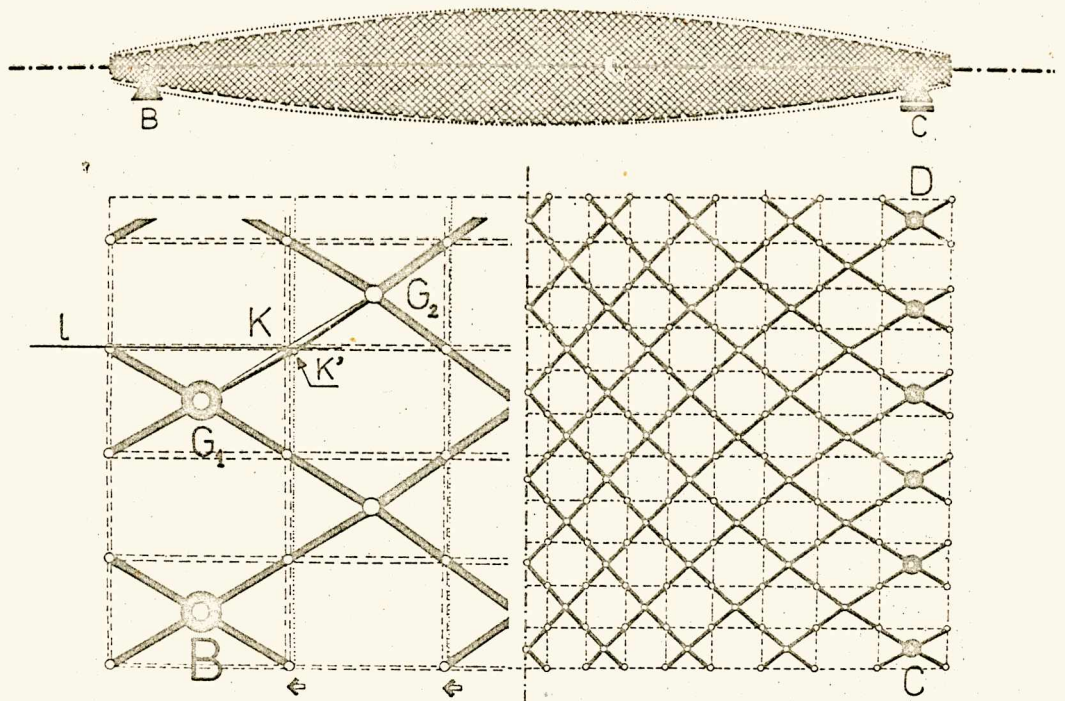
Wyznaczony wielkością panujących w przekroju sił nowy układ prętów i ciężn powinien charakteryzować się zbliżonymi do siebie wartościami sił przenoszonych przez każdy element przekroju. Wstępnym potwierdzeniem tych przypuszczeń może być rys-

nek zdeformowanej siatki czworokątnej, odpowiadającej umiejscowieniu poszczególnych par prętów w obszarze przekrycia. Najbardziej zagęszczoną strefą przekrycia jest strefa środkowa; jako najbardziej wyteżona część konstrukcji; najrzadziej strefa przypodporowa, gdzie wielkości sił przy założonym sposobie podparcia nie osiągają zbyt dużych wartości.

Z analizy rysunku linii łamanych wynika, że węzły typu "K" nie leżą na prostej wyznaczonej węzłami typu "G". Nie jest więc spełniony warunek współliniowego położenia w rzucie poziomym tych węzłów /por. rys. 103/.

Jest to warunek konieczny do spełnienia z uwagi na założenia wstępne dla struktur prętowo-ciężnowych, gdyż zestaw połączonych ze sobą przegubowo prętów i biegnącego pionowo ciężna musi być układem płaskim. Tak więc musimy nieco zmienić sposób ostatecznego ustalania położenia węzłów typu "K" na uformowanych wykresach momentów zginających powierzchniach ograniczających strukturę prętowo-ciężnową.

Aby węzły typu "K" umieszczone były w rzeczywistej konstrukcji zgodnie z wymaganiami prawidłowej pracy oraz umożliwiającymi ich proste wykonanie, należy węzły G_1 i G_2 połączyć odcinkiem prostym /rys. 124./.



Rys. 124. Określanie ostatecznego położenia węzłów typu "K".

Punkt przecięcia się tego odcinka z prostą 1 wyznaczy w rzucie poziomym nieco przesunięte w stosunku do poprzedniego miejsce położenie węzła K.

Określając w ten sposób położenia wszystkich węzłów typu "K" spowodujemy bardzo niewielkie przesunięcie linii cięgien w kierunku podpór brzegowych. W konsekwencji przekrój poprzeczny struktury w pobliżu jej miejsca podparcia będzie nieco większy a zatem lepiej przenoszącym naprężenia wywołane działaniem sił poprzecznych.

Przedstawiony sposób formowania powierzchni dolnych i górnych przestrzennych struktur pretowo-ciężnowych może rzeczywiście prowadzić do ujednolicenia wartości sił w całym obszarze przekrycia, jednak ostateczne stwierdzenie jego poprawności może nastąpić po dokładnej analizie statycznej uzupełnionej wynikami otrzymanymi na drodze doświadczalnej.

ZAKOŃCZENIE

Zgodnie z założeniami wstępnymi przedstawione w pracy na przykładzie przekrycia kopułowego rozważania zdążyły do opracowania takiego systemu konstrukcyjnego składającego się z minimalnej liczby elementów modularnych, który umożliwiłby kształtowanie różnorodnych form przekryć powłokowych. Koniecznym dla tego celu stało się również opracowanie regularnych siatek geometrycznych opisujących daną powierzchnię. Stanowi ona podstawę dla szeregu późniejszych działań.

Powstała w toku pracy nad tym zagadnieniem metoda deformacji siatki wtórnej pozwala na otrzymywanie bardzo regularnych siatek sferycznych. Charakteryzują się one najmniejszymi, granicznymi wartościami współczynnika η określającego stosunek długości odcinka najdłuższego do długości odcinka najkrótszego w całej siatce.

Niezmiernie ważną cechą siatek sferycznych uzyskiwanych na tej drodze jest to, iż przy tak nieznacznym zróżnicowaniu długości wszystkich odcinków, odcinki o takich samych długościach rozmieszczone są w sposób uporządkowany w kolejnych partiach siatki sferycznej. Ta ostatnia własność ułatwia fazę montażu kopuły eliminując w zasadzie pomyłki wynikające z niewłaściwej kolejności układania elementów na powierzchni przekrycia.

Podstawowa w tej metodzie zasada otrzymywania regularnych siatek sferycznych wykorzystuje własności rzutu środkowego ścian wielościanów na odpowiadające im sfery oraz własności rzutu prostopadłego na płaszczyznę, a w przyszłości może służyć do określania regularnych siatek przestrzennych dla potrzeb przekryć o dowolnych formach i rozpiętych nad równie dowolnym kształtem rzutu.

Metoda otrzymywania regularnych siatek sferycznych powstawała równolegle na wspólnej bazie z opracowywanym modularnym

systemem konstrukcyjnym. Tą wspólną bazę stanowiła metoda kół wpisanych w siatkę trójkątną. Podstawowym elementem modułarnym był stożek uzupełniony przez odpowiednio układany element klinowy, który łączył sąsiadujące ze sobą stożki. Na bazie określonego przez geometrię systemu kształtowania różnorodnych form powłokowych powstał, uwzględniający wymagania statyczne i ograniczenia natury technologicznej, modułarny system prętowo-ciężnowy.

W systemie tym element modułarny tworzą cztery identyczne pręty połączone ze sobą przegubowo oraz tak samo połączone z nimi ciężna o regulowanym rozstawie i sile napięcia. Krótkie pręty takiej struktury przestrzennej pracują zawsze na ściskanie zaś ciężna przenoszą wyłącznie siły rozciągające co pozwala na przekrywanie za jej pomocą dużo większych powierzchni niż przy użyciu przestrzennych struktur prętowych o takich samych długościach prętów. Możliwość płynnej regulacji długości niezależnych od siebie ciężen pozwala także na dostosowywanie wymiarów potrzebnych elementów składowych konstrukcji do wymagań geometrycznych każdej, także dowolnej formy przekrycia. Regularna siatka przestrzenna spowoduje zmniejszenie do koniecznego minimum zakresu zmian długości ciężen a w następstwie również ograniczy zakres różnych wzajemnych konfiguracji prętów i ciężen.

Wykorzystując tę własność proponowanych struktur prętowo-ciężnowych możemy, posługując się wykresami naprężeń głównych dla prostych form przekrycia tak formować jego powierzchnię górną i dolną, aby siły działające na każdy element konstrukcji w całym obszarze przekrycia były równej bądź zbliżonych do siebie wartości. W pracy pokazano tok postępowania przy wyznaczaniu nowych konfiguracji prętów i ciężen na przykładzie przekrycia w formie prostokąta podpartego ciągle na obu przeciwnych krawędziach. Dla innych także dwukrzywiznowych form przekryć oraz odmiennych sposobów podparcia należy przeprowadzić podobną procedurę posilając się wykresami naprężeń głównych odpowiadających danej formie przekrycia.

Przyjęcie zaproponowanego systemu prętowo-ciężnowego pozwala więc na równoczesne połączenie dwóch przeciwstawnych sobie cech konstrukcji ekonomicznej a opracowanie prostych zunifikowanych połączeń podnosi znacznie zalety tego systemu.

B I B L I O G R A F I A

- [1] Bass L. - Lamella domes in the United States.
The International Conference on Space Structures, University of Surrey 1966, s. 955-964
- [2] Bogucki W. - Budownictwo stalowe, tom 2,
Arkady, Warszawa 1977, s. 250-262
- [3] Borusiewicz W. - Konstrukcje budowlane dla architektów
Arkady, Warszawa 1978, s. 336
- [4] Brainov M.N. - Montierbare, transportable, leichte
Kuppelkonstruktionen. The International Conference on Space Structures,
University of Surrey 1966, s. 1015-1025
- [5] Broniewski T. - Historia architektury dla wszystkich
Ossolineum. Wrocław, Warszawa, Kraków, Gdańsk 1980, s. 84
- [6] Bródka J.
Lubiński - Lekkie konstrukcje stalowe
Arkady, Warszawa 1978
- [7] Brzóska Z. - Statyka; Stateczność konstrukcji prętowych; cienkościennych
PWN Warszawa 1961, s. 67
- [8] Buchert K.P. - Buckling considerations in the design
and construction of doubly curved space structures. The International Conference
on Space Structures,
University of Surrey 1966, s. 485-490

- [9] Buttner O. Lekkie budownictwo metalowe.
Stenker H. - Arkady, Warszawa 1975
- [10] Chastel A. - Sztuka włoska, WAiF, Warszawa 1978, s. 214
- [11] Du Chateau S. - Structure tridirectioneue Techniques &
Architecture nr 320 juin-juillet 1978, s. 62
- [12] Emmerich D.G. - Reseaux. The International Conference
on Space Structures, University of
Surrey 1966, s. 1059-1072
- [13] Flüge W. - Powłoki. Obliczenia statyczne
Arkady, Warszawa 1972
- [14] Fuliński J. - Dwuwarstwowe kratownice powierzchniowe
oparte na wielościanach wypukłych.
Zeszyty Naukowe Wyższej Szkoły Rolniczej
we Wrocławiu nr 44, 1962, s. 41-55
- [15] Fuliński J. - Tworzenie wielościanów wypukłych o dużej
liczbie ścian. Zeszyty Naukowe Wyższej
Szkoły Rolniczej we Wrocławiu nr 61 1966
- [16] Fuliński J. - Geometryczne elementy projektowania kratow-
nic powierzchniowych. Zeszyty Naukowe
Wyższej Szkoły Rolniczej we Wrocławiu nr 64
1966, s. 10-11
- [17] Fuliński J. - Geometryczne elementy projektowania dwu-
warstwowych kopuł geodezyjnych.
Zeszyty Naukowe Wyższej Szkoły Rolniczej
we Wrocławiu nr 82 1969, s. 167-186
- [18] Fuliński J. - Geometria kratownic powierzchniowych.
Prace Wrocławskiego Towarzystwa Naukowego
Wrocław 1973, s. 55
- [19] Giedion S. - Przestrzeń, czas i architektura.
Narodziny nowej tradycji. PWN Warszawa 1968,
s. 279-285; s. 495
- [20] Gutkowski W. - Regularne konstrukcje prętowe
PAN, IPPT, PWN Warszawa 1973

- [21] Gutkowski W. - Obliczenia statyczne przekryć strukturalnych. Arkady 1980, s.17; s.105-106
- [22] Kłosińska J. - Sztuka bizantyjska; WP, Warszawa 1975, s.35
- [23] Kobiak J.,
Stachurski - Konstrukcje żelbetowe.
Arkady, Warszawa 1979, s. 341-555, s.385, s.400
- [24] Kolendowicz T. - Mechanika budowli dla architektów,
Arkady, Warszawa 1977, s. 383-388
- [25] Kowal Z.
Rządowski - Poradnik projektanta konstrukcji stalowych Tom 2-gi. Dwukrzywiznowe powłoki prętowe, maszynopis powielony
- [26] Krajewski K. - Mała encyklopedia architektury i wnętrz.
Ossolineum, Wrocław, Warszawa, Gdańsk,
Kraków 1974
- [27] Krzemiński J. - Konstrukcje powłokowe. Kształtowanie geometryczne przekryć. Informator Projektanta przemysłowego, Warszawa 1963
- [28] Lecour J. - Architektur - Konstruktion und Technologie
DBZ nr 10 1978, s.1341-1345
- [29] Lisowski B. - Architektura konstrukcji powłokowych
Konstrukcje powłokowe. Teoria i zastosowania. Tom II-gi. Materiały z sympozjum.
Kraków, kwiecień 1974. PWN Warszawa 1979, s.107-129
- [30] Major M. - Pier Luigi Nervi, Henschelverlag Berlin 1970
- [31] Makai E.,
Tarnai T. - On some geometrical problems of single -
layered spherical grids with triangular
network.
The International Conference on Space
Structures, University of Surrey 1975, s.675-682
- [32] Makowski Z.S. - Space Structures. A short review of their
development; The International Conference
on Space Structures, University of Surrey
1966, s.1-8

- [33] Makowski Z.S. - Structures Spatiales, Bilan et Tendances; Techniques & Architecture, nr 320
juin-juillet 1978, s. 43-60
- [34] Mengerinhausen M. Noeuds, barres et plaques structurent l'espace; Techniques & Architecture nr 320
juin-juillet 1978, s. 72-74
- [35] Mengerinhausen M. Kompositionslehre raumlicher Stab-Fachwerke; The International Conference on Space Structures, University of Surrey 1966, s. 1109-1120
- [36] Mromliński R. - Konstrukcje aluminiowe, Arkady
Warszawa 1975
- [37] Nowacki W., - Dźwigary powierzchniowe. PWN Warszawa 1979
- [38] Otto F. - Dachy wiszące. Forma i konstrukcja; Arkady 1959
- [39] Otto F. - Die Multihalle auf der Bundesgartenschau Baumeister nr 8 1975, s. 702-711
- [40] Parczewski W. - Tworzywa sztuczne w architekturze PWN, Warszawa-Poznań 1977
- [41] Penkala T. - Zarys krystalografii PWN Warszawa 1977, s. 335
- [42] Puff T.,
Sołtys W. - Podstawy technologii montażu maszyn i urządzeń.
Wydawnictwa Naukowo-Techniczne,
Warszawa 1980
- [43] Rębielak J. - Konstrukcja kopuły kulistej metodą kół wpisanych w siatkę trójkątną; Architektura nr 9-10 1977, s. 64 65
- [44] Schaefer E.R. - Dome structures, The International Conference on Space Structures, University of Surrey 1966, s. 1045-1058

- [45] Torroja E. - Philosophy of Structures.
Berkeley. Los Angeles 1958
- [46] Wachsmann K. - The turning point of building. Structure
and design. Reinhold Publ. co.
Wiesbaden 1961
- [47] Woźniak Cz. - Siatkowe dźwigary powierzchniowe
PWN Warszawa 1970
- [48] Ziółko J.,
Orlik G. - Montaż konstrukcji stalowych.
Arkady Warszawa 1980, s.27



Instytut Architektury i Urbanistyki
Politechniki Wrocławskiej

A N E K S

do pracy doktorskiej pt.

"Kształtowanie form powłokowych za pomocą
elementów modularnych"

Promotor: Prof.nadzw. dr hab.inż. Tadeusz Kolondowicz

autor: mgr inż.arch. Janusz Rębielak



W r o c ł a w 1981

Program wykonywania na maszynie cyfrowej obliczeń długości odcinków siatki sferycznej napisany został w języku FORTRAN 1900. Dzięki uzyskanym na tej drodze wynikom można było sporządzić pełną charakterystykę wielościanów otrzymywanych poprzez zastosowanie proponowanej metody deformacji siatki wtórnej. Mechanizm metody, jak wskazuje na to jej nazwa, polega na odpowiednim deformowaniu siatki trójkątnej w obrębie płaskiej ściany wielościanu, a przez ponowne zrzutowanie jej na współśrodkową kulę uzyskuje się na powierzchni sferycznej regularne siatki trójkątne.

Danymi wejściowymi dla tego programu są:

- współrzędne wierzchołków trójkątnej ściany ABC podane na płaszczyźnie XOY w kolejności przeciwnej do kierunku ruchu wskazówek zegara,
- współrzędne punktów D_{AB} , D_{BC} i D_{AC} odpowiadających położeniom środka kuli opisanej na danym wielościanie i odpowiadającym kolejnym krawędziom trójkąta ABC,
- współrzędne położenia środka kuli na osi OZ /z/,
- długość promienia kuli opisanej /R/,
- stopień podziału boków trójkąta sferycznego /n/.

Powodem wprowadzenia odmiennego niż w pracy oznaczenia wierzchołków trójkąta podstawowego było znaczne ułatwienie napisania omawianego programu w rezultacie podane w wydrukach:

- współrzędne p. A odpowiadają współ. p. C /rozdział III/
- współrzędne p. B odpowiadają współ. p. B /rozdział III/
- współrzędne p. C odpowiadają współ. p. A /rozdział III/

Podobnie rzecz się ma ze współrzędnymi punktów D:

- współrzędne p. D_{AB} odpowiadają współ. p. D_{CB} /rozdział III/
- współrzędne p. D_{BC} odpowiadają współ. p. D_{AB} /rozdział III/

- współrzędne p. D_{AC} odpowiadają współ. p. D_{CA} /rozdział III/

Pozostałe dane wejściowe jak i oznaczenia punktów pozostają bez zmian.

Ogólny schemat dokonywanych za pomocą tego programu obliczeń przedstawiono na stronie 3. Jest on w dużej mierze podobny do przeprowadzonych w rozdziale III-cim pkt. 3.4 obliczeń długości krawędzi 2000-ściannu z tym, że nie wykorzystywano tu wzoru podanego na rysunku 38 dla ostatecznego wyznaczenia długości potrzebnych odcinków na powierzchni sferycznej. W omawianym programie długości tych odcinków liczone są na podstawie przestrzennych współrzędnych punktów odpowiadających w rzucie środkowym węzłom zdeformowanej siatki trójkątnej.

Sposób wyznaczania położenia węzłów siatki trójkątnej w płaskim układzie współrzędnych jest identyczny z przedstawionym w pracy i zilustrowanym na rysunku 37. W programie na EMC określaniem współrzędnych węzłów zdeformowanej siatki zajmuje się procedura SIATKA, której ogólny opis przedstawiono na str. 4.

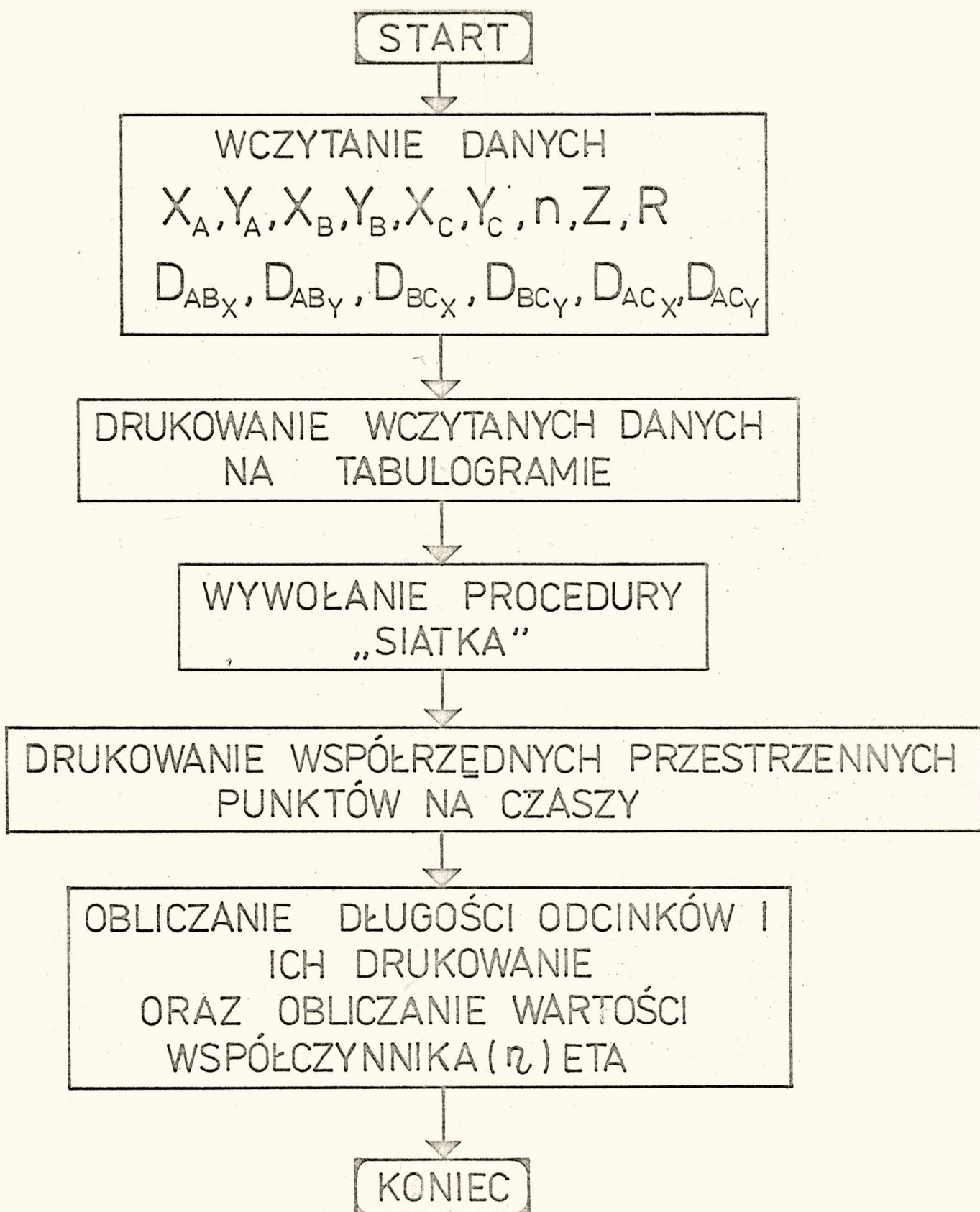
Wywoływana na początku procedury SIATKA procedura PODZIAŁ dokonuje podziału krawędzi określonego przez współrzędne wierzchołków trójkąta i polega na podziale kąta np. A, D_{AB}, B na n równych części /por. rys. 33/. Punkty przecięcia się kolejnych prostych z odcinkiem np. AB posłużą do napisania równań innych prostych, które wyznaczą wewnątrz podstawowego trójkąta ABC mniejsze trójkątne pola. Zadaniem następnej procedury ŚRODEK jest wyznaczenie, w sposób identyczny do podanego w rozdziale III-cim pkt. 3.4, środków ciężkości odpowiednio określonych trójkątnych pól.

Środki ciężkości tych trójkątów są więc punktami węzłowymi zdeformowanej siatki trójkątnej w obszarze trójkąta podstawowego.

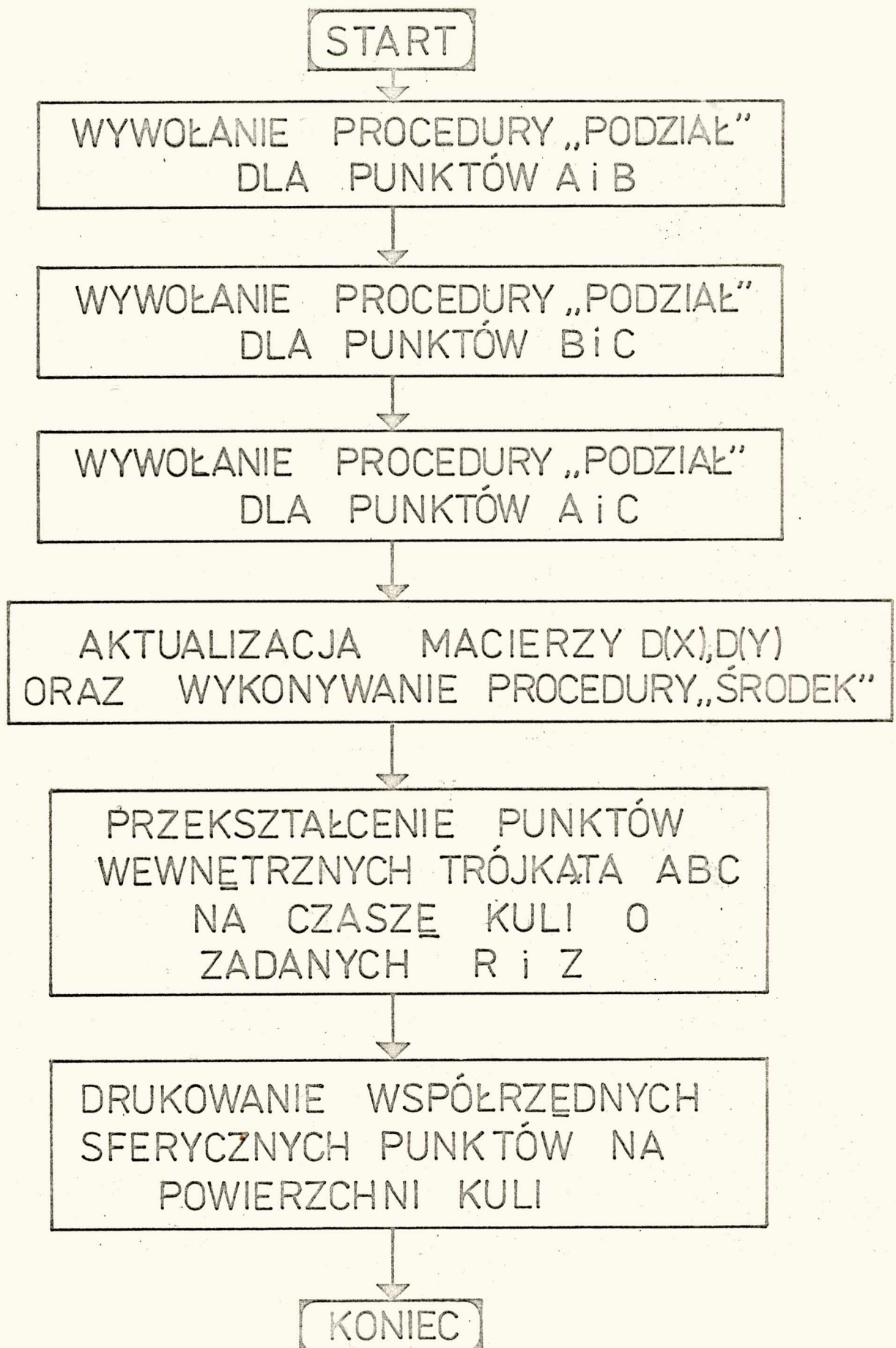
Aby maszyna cyfrowa nie obliczała długości wszystkich odcinków między poszczególnymi węzłami siatki trójkątnej koniecznym stało się wprowadzenie pomocniczego układu współrzędnych przedstawionego na rys. 1, który równocześnie umożliwia zapamiętanie każdego węzła wraz z jego współrzędnymi. Przyjęta numeracja węzłów w połączeniu z odpowiednią kolejnością dokonywania obliczeń odległości pomiędzy sąsiadującymi ze sobą węzłami znacznie skraca czas ich trwania.

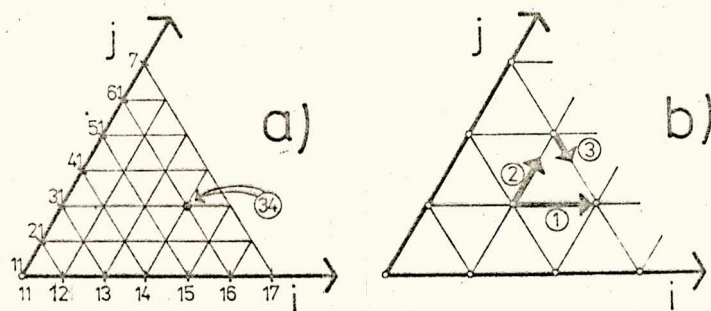
- 3 -

OGÓLNY SCHEMAT PROGRAMU OBLICZANIA DŁUGOŚCI ODCINKÓW SIATEK SFERYCZNYCH



OPIS PROCEDURY „SIATKA”





Rys. 1. a/ pomocniczy układ współrzędnych,
b/ kolejność wykonywania obliczeń długości między sąsiadującymi ze sobą węzłami trójkątnej siatki sferycznej.

Pomocniczy układ współrzędnych wyznaczony zostaje rodzajem trójkąta podstawowego, zaś numeracja kolejnych punktów na obu jego osiach zależna jest od stopnia podziału boków trójkąta na n równych części. Boki trójkąta podstawowego na rys. 1a podzielone zostały na $n=6$ części a typ przyjętej tu numeracji kolejnych węzłów siatki pokazano na przykładzie węzła nr 34. Kolejność wykonywanych obliczeń długości potrzebnych odcinków przedstawiono na rys. 1b. W przyjętym układzie współrzędnych dokonuje się najpierw obliczeń długości odcinka zawartego między węzłami o tej samej współrzędnej j -owej tzn. między punktami o współrzędnych $/j; i/$ i $/j; i+1/$, następnie punktami $/j; i/$ a $/j+1; i/$ oraz w końcu między punktami $/j+1; i/$ a $/j+1; i+1/$. Taka procedura eliminuje powtarzanie procesu obliczeń długości odcinków zawartych między tymi samymi punktami.

Dla każdego stopnia podziału boków trójkąta sferycznego obliczono także wartość współczynnika η charakteryzującego zróżnicowanie długości odcinków w obszarze tego trójkąta. Współczynnik η określony jest jako stosunek długości odcinka najdłuższego do długości odcinka najkrótszego w całej siatce. Aby wyróżnić i zlokalizować odcinki o ekstremalnych długościach przeprowadzono równoległe dwie procedury. Założeniem pierwszej z nich mającej na celu wyłowienie odcinka najdłuższego było, że pierwsza obliczona wartość jest długością odcinka najkrótszego

w całej siatce i poprzez porównanie jej z wartością następną zapamiętywana była wartość większa od wyliczonej na wstępie.

Procedura określania długości odcinka najkrótszego siatki jest podobna do poprzedniej z tym, że założono iż pierwsza obliczona wartość jest długością odcinka najdłuższego siatki i z porównania jej z następną obliczoną wielkością zapamiętywana była ta, która była mniejsza. Określenie dla każdego stopnia podziału n wartości współczynnika η polegało na podzieleniu wartości długości odcinka najdłuższego przez wyodrębnioną wartość długości odcinka najkrótszego całej siatki sferycznej.

Celem uzupełnienia rozdziału III pracy przedstawiono wyniki dokonanych obliczeń, na podstawie których sformułowano zawarte w tym rozdziale twierdzenia i prawidłowości dotyczące proponowanej metody deformacji siatki wtórnej. Kolejne pozycje zawierają:

Pozycja 1 - wydruki dotyczące obliczeń długości krawędzi wielościanów powstałych na bazie 20-ścianu foremnego wraz z wartościami współczynników η dla kolejnych n .

Pozycja 2 - wydruki dotyczące obliczeń długości krawędzi wielościanów powstałych na bazie 8-ścianu foremnego wraz z wartościami współczynników η dla kolejnych n .

Pozycja 3 - wydruki dotyczące obliczeń długości odcinków siatki sferycznej rozpiętej nad rzutem sześciokątnym ABCDEF.

Pozycja 4 - wydruki dotyczące obliczeń długości krawędzi wielościanów powstałych na bazie 12-ścianu foremnego wraz z wartościami współczynników η dla kolejnych n .

Pozycja 5 - wydruki dotyczące obliczeń długości krawędzi wielościanów powstałych na bazie sześciianu wraz z wartościami współczynników η dla kolejnych n .

Pozycja 6 - wydruki dotyczące obliczeń długości odcinków siatki sferycznej rozpiętej nad trójkątem równobocznym dla $R=1a$ i $Z=-0,75a$, gdzie a jest długością promienia sfery, z wartościami współczynnika η dla kolejnych n .

ZADANIE WYZNACZENIA OPTYMALNEJ SIATKI SFERYCZNEJ.

DANE WEJŚCIOWE

A(-0,5000000,-0,2886751) B(0,5000000,-0,2886751) C(0,0 , 0,5773502)
DAB(0,0 , 0,5203421) DBC(-0,4506296,-0,2601710) DBC(0,4506296,-0,2601710)

Z=-0,7557614 R= 0,9510564

I= 1 J= 1 X= -0,500000 Y= -0,288675 Z= -0,000000
I= 1 J= 2 X= 0,0 Y= -0,339358 Z= 0,132689
I= 1 J= 3 X= 0,500000 Y= -0,288675 Z= -0,000000
I= 2 J= 1 X= -0,293892 Y= 0,169679 Z= 0,132689
I= 2 J= 2 X= 0,293893 Y= 0,169678 Z= 0,132689
I= 3 J= 1 X= 0,0 Y= 0,577350 Z= -0,000000

KRAWEDZ((1, 1),(1, 2))= 0,5197836
KRAWEDZ((1, 1),(2, 1))= 0,5197839
KRAWEDZ((1, 2),(2, 1))= 0,5877852
KRAWEDZ((1, 2),(1, 3))= 0,5197836
KRAWEDZ((1, 2),(2, 2))= 0,5877841
KRAWEDZ((1, 3),(2, 2))= 0,5197819
KRAWEDZ((2, 1),(2, 2))= 0,5877853
KRAWEDZ((2, 1),(3, 1))= 0,5197829
KRAWEDZ((2, 2),(3, 1))= 0,5197849

ETA=1,13082931 RMAX= 0,5877853 RMIN= 0,5197819 N= 2

I= 1 J= 1 X= -0,500000 Y= -0,288675 Z= -0,000000
I= 1 J= 2 X= -0,310113 Y= -0,320810 Z= 0,084131
I= 1 J= 3 X= -0,105083 Y= -0,337280 Z= 0,127249
I= 1 J= 4 X= 0,105078 Y= -0,337280 Z= 0,127250
I= 1 J= 5 X= 0,310108 Y= -0,320811 Z= 0,084132
I= 1 J= 6 X= 0,500000 Y= -0,288675 Z= -0,000000
I= 2 J= 1 X= -0,432885 Y= -0,108157 Z= 0,084132
I= 2 J= 2 X= -0,223460 Y= -0,129013 Z= 0,159624
I= 2 J= 3 X= -0,000001 Y= -0,135985 Z= 0,185523
I= 2 J= 4 X= 0,223458 Y= -0,129015 Z= 0,159624
I= 2 J= 5 X= 0,432887 Y= -0,108161 Z= 0,084131
I= 3 J= 1 X= -0,344633 Y= 0,077639 Z= 0,127250
I= 3 J= 2 X= -0,117765 Y= 0,067992 Z= 0,185523
I= 3 J= 3 X= 0,117766 Y= 0,067991 Z= 0,185523
I= 3 J= 4 X= 0,344635 Y= 0,077635 Z= 0,127249
I= 4 J= 1 X= -0,239552 Y= 0,259644 Z= 0,127250
I= 4 J= 2 X= 0,000001 Y= 0,258028 Z= 0,159624
I= 4 J= 3 X= 0,239554 Y= 0,259640 Z= 0,127250
I= 5 J= 1 X= -0,122773 Y= 0,428971 Z= 0,084131
I= 5 J= 2 X= 0,122776 Y= 0,428967 Z= 0,084132
I= 6 J= 1 X= 0,0 Y= 0,577350 Z= -0,000000

KRAWEDZ((1, 1),(1, 2))= 0,2101608
KRAWEDZ((1, 1),(2, 1))= 0,2101651
KRAWEDZ((1, 2),(2, 1))= 0,2455488
KRAWEDZ((1, 2),(1, 3))= 0,2101615
KRAWEDZ((1, 2),(2, 2))= 0,2235935
KRAWEDZ((1, 3),(2, 2))= 0,2417355
KRAWEDZ((1, 3),(1, 4))= 0,2101611
KRAWEDZ((1, 3),(2, 3))= 0,2344310
KRAWEDZ((1, 4),(2, 3))= 0,2344295
KRAWEDZ((1, 4),(1, 5))= 0,2101614
KRAWEDZ((1, 4),(2, 4))= 0,2417356
KRAWEDZ((1, 5),(2, 4))= 0,2235901
KRAWEDZ((1, 5),(1, 6))= 0,2101660
KRAWEDZ((1, 5),(2, 5))= 0,2455487
KRAWEDZ((1, 6),(2, 5))= 0,2101601
KRAWEDZ((2, 1),(2, 2))= 0,2235909
KRAWEDZ((2, 1),(3, 1))= 0,2101612
KRAWEDZ((2, 2),(3, 1))= 0,2417359
KRAWEDZ((2, 2),(2, 3))= 0,2250626
KRAWEDZ((2, 2),(3, 2))= 0,2250628
KRAWEDZ((2, 3),(3, 2))= 0,2355316
KRAWEDZ((2, 3),(2, 4))= 0,2250630
KRAWEDZ((2, 3),(3, 3))= 0,2355317
KRAWEDZ((2, 4),(3, 3))= 0,2250625
KRAWEDZ((2, 4),(2, 5))= 0,2235940
KRAWEDZ((2, 4),(3, 4))= 0,2417358
KRAWEDZ((2, 5),(3, 4))= 0,2101616

KRAWEDZ((3, 1),(3, 2))= 0,2344304
KRAWEDZ((3, 1),(4, 1))= 0,2101616
KRAWEDZ((3, 2),(4, 1))= 0,2344317
KRAWEDZ((3, 2),(3, 3))= 0,2355317
KRAWEDZ((3, 2),(4, 2))= 0,2250626
KRAWEDZ((3, 3),(4, 2))= 0,2250627
KRAWEDZ((3, 3),(3, 4))= 0,2344315
KRAWEDZ((3, 3),(4, 3))= 0,2344300
KRAWEDZ((3, 4),(4, 3))= 0,2101615
KRAWEDZ((4, 1),(4, 2))= 0,2417362
KRAWEDZ((4, 1),(5, 1))= 0,2101612
KRAWEDZ((4, 2),(5, 1))= 0,2235941
KRAWEDZ((4, 2),(4, 3))= 0,2417357
KRAWEDZ((4, 2),(5, 2))= 0,2235905
KRAWEDZ((4, 3),(5, 2))= 0,2101610
KRAWEDZ((5, 1),(5, 2))= 0,2455496
KRAWEDZ((5, 1),(5, 1))= 0,2101613
KRAWEDZ((5, 2),(6, 1))= 0,2101653

ETA=1,16839314 RMAX= 0,2455496 RMIN= 0,2101601 N= 5

ETA=1,17387772 RMAX= 0,1235348 RMIN= 0,1052365 N=10

ETA=1,17435169 RMAX= 0,1030073 RMIN= 0,0877141 N=12

ETA=1,17454815 RMAX= 0,0951046 RMIN= 0,0809712 N=13

ETA=1,17483044 RMAX= 0,0824496 RMIN= 0,0701799 N=15

ETA=1,17490864 RMAX= 0,0773038 RMIN= 0,0657955 N=16

ETA=1,17511845 RMAX= 0,0727702 RMIN= 0,0619259 N=17

ETA=1,17505836 RMAX= 0,0687261 RMIN= 0,0584873 N=18

ETA=1,17520142 RMAX= 0,0651174 RMIN= 0,0554095 N=19

ZWIĄZKI MIAROWE SIATEK
SFERYCZNYCH POWSTAŁYCH
NA BAZIE 20-ścianu foremnego

POZYCJA 1

I= 1	J= 1	X= -0.500000	Y= -0.288675	Z= -0.000000
I= 1	J= 2	X= -0.407553	Y= -0.306620	Z= 0.046980
I= 1	J= 3	X= -0.310114	Y= -0.320810	Z= 0.084130
I= 1	J= 4	X= -0.208878	Y= -0.331072	Z= 0.110996
I= 1	J= 5	X= -0.105085	Y= -0.337280	Z= 0.127249
I= 1	J= 6	X= 0.0	Y= -0.339358	Z= 0.132689
I= 1	J= 8	X= 0.208869	Y= -0.331073	Z= 0.110998
I= 1	J= 9	X= 0.310105	Y= -0.320811	Z= 0.084133
I= 1	J=10	X= 0.407544	Y= -0.306621	Z= 0.046984
I= 1	J=11	X= 0.500000	Y= -0.288675	Z= -0.000000
I= 2	J= 1	X= -0.469314	Y= -0.199633	Z= 0.046983
I= 2	J= 2	X= -0.372037	Y= -0.214792	Z= 0.092744
I= 2	J= 3	X= -0.269574	Y= -0.226270	Z= 0.127777
I= 2	J= 4	X= -0.163300	Y= -0.233982	Z= 0.151484
I= 2	J= 5	X= -0.054695	Y= -0.237857	Z= 0.163445
I= 2	J= 6	X= 0.054693	Y= -0.237860	Z= 0.163445
I= 2	J= 7	X= 0.163294	Y= -0.233985	Z= 0.151484
I= 2	J= 8	X= 0.269568	Y= -0.226274	Z= 0.127777
I= 2	J= 9	X= 0.372033	Y= -0.214799	Z= 0.092744
I= 2	J=10	X= 0.469317	Y= -0.199641	Z= 0.046980
I= 3	J= 1	X= -0.432884	Y= -0.108154	Z= 0.084133
I= 3	J= 2	X= -0.330743	Y= -0.120317	Z= 0.127777
I= 3	J= 3	X= -0.223459	Y= -0.129012	Z= 0.159624
I= 3	J= 4	X= -0.112632	Y= -0.134238	Z= 0.179012
I= 3	J= 5	X= -0.000002	Y= -0.135984	Z= 0.185523
I= 3	J= 6	X= 0.112632	Y= -0.134242	Z= 0.179012
I= 3	J= 7	X= 0.223457	Y= -0.129016	Z= 0.159624
I= 3	J= 8	X= 0.330742	Y= -0.120323	Z= 0.127777
I= 3	J= 9	X= 0.432887	Y= -0.108162	Z= 0.084130
I= 4	J= 1	X= -0.391152	Y= -0.015350	Z= 0.110998
I= 4	J= 2	X= -0.284284	Y= -0.024425	Z= 0.151484
I= 4	J= 3	X= -0.172570	Y= -0.030420	Z= 0.179013
I= 4	J= 4	X= -0.057862	Y= -0.033406	Z= 0.192945
I= 4	J= 5	X= 0.057861	Y= -0.033408	Z= 0.192945
I= 4	J= 6	X= 0.172572	Y= -0.030425	Z= 0.179012
I= 4	J= 7	X= 0.284284	Y= -0.024432	Z= 0.151484
I= 4	J= 8	X= 0.391156	Y= -0.015358	Z= 0.110996
I= 5	J= 1	X= -0.344631	Y= 0.077642	Z= 0.127250
I= 5	J= 2	X= -0.233336	Y= 0.071566	Z= 0.163445
I= 5	J= 3	X= -0.117764	Y= 0.067993	Z= 0.185523
I= 5	J= 4	X= 0.000001	Y= 0.066813	Z= 0.192945
I= 5	J= 5	X= 0.117766	Y= 0.067990	Z= 0.185523
I= 5	J= 6	X= 0.233340	Y= 0.071559	Z= 0.163445
I= 5	J= 7	X= 0.344636	Y= 0.077633	Z= 0.127249
I= 6	J= 1	X= -0.293890	Y= 0.169683	Z= 0.132689
I= 6	J= 2	X= -0.178642	Y= 0.166297	Z= 0.163445
I= 6	J= 3	X= -0.059937	Y= 0.164662	Z= 0.179012
I= 6	J= 4	X= 0.059941	Y= 0.164661	Z= 0.179012
I= 6	J= 5	X= 0.178646	Y= 0.166292	Z= 0.163445
I= 6	J= 6	X= 0.293895	Y= 0.169674	Z= 0.132689
I= 7	J= 1	X= -0.239551	Y= 0.259646	Z= 0.127249
I= 7	J= 2	X= -0.120984	Y= 0.258412	Z= 0.151484
I= 7	J= 3	X= 0.000003	Y= 0.258026	Z= 0.159624
I= 7	J= 4	X= 0.120989	Y= 0.258409	Z= 0.151484
I= 7	J= 5	X= 0.239556	Y= 0.259638	Z= 0.127250
I= 8	J= 2	X= -0.061168	Y= 0.346592	Z= 0.127777
I= 8	J= 3	X= 0.061175	Y= 0.346589	Z= 0.127778
I= 8	J= 4	X= 0.182283	Y= 0.346422	Z= 0.110999
I= 9	J= 1	X= -0.122773	Y= 0.428971	Z= 0.084131
I= 9	J= 2	X= 0.000004	Y= 0.429589	Z= 0.092744
I= 9	J= 3	X= 0.122778	Y= 0.428964	Z= 0.084134
I=10	J= 1	X= -0.061765	Y= 0.506260	Z= 0.046980
I=10	J= 2	X= 0.061770	Y= 0.506253	Z= 0.046984
I=11	J= 1	X= 0.0	Y= 0.577350	Z= -0.000000

KRAWEDZ((1, 1),(1, 2))= 0.1052408

KRAWEDZ((1, 1),(2, 1))= 0.1052497

KRAWEDZ((1, 2),(2, 1))= 0.1235338

KRAWEDZ((1, 2),(1, 3))= 0.1052415

KRAWEDZ((1, 2),(2, 2))= 0.1085727

KRAWEDZ((1, 3),(2, 2))= 0.1230795

KRAWEDZ((1, 3),(1, 4))= 0.1052415

KRAWEDZ((1, 3),(2, 3))= 0.1117426

KRAWEDZ((1, 4),(2, 3))= 0.1222661

KRAWEDZ((1, 4),(1, 5))= 0.1052415

KRAWEDZ((1, 4),(2, 4))= 0.1146432

KRAWEDZ((1, 5),(2, 4))= 0.1210239

KRAWEDZ((1, 5),(1, 6))= 0.1052461

KRAWEDZ((1, 5),(2, 5))= 0.1171932

KRAWEDZ((1, 6),(2, 5))= 0.1193312

KRAWEDZ((1, 6),(1, 7))= 0.1052365

KRAWEDZ((1, 6),(2, 6))= 0.1193274

KRAWEDZ((1, 7),(2, 6))= 0.1171873

KRAWEDZ((1, 7),(1, 8))= 0.1052415

KRAWEDZ((1, 7),(2, 7))= 0.1210234

KRAWEDZ((1, 8),(2, 7))= 0.1146395

KRAWEDZ((1, 8),(1, 9))= 0.1052415

KRAWEDZ((1, 8),(2, 8))= 0.1222644

KRAWEDZ((1, 9),(2, 8))= 0.1117373

KRAWEDZ((1, 9),(1, 10))= 0.1052415

KRAWEDZ((1, 9),(2, 9))= 0.1230769

KRAWEDZ((1, 10),(2, 9))= 0.1085650

KRAWEDZ((1, 10),(1, 11))= 0.1052505

KRAWEDZ((1, 10),(2, 10))= 0.1235337

KRAWEDZ((1, 11),(2, 10))= 0.1052402

KRAWEDZ((2, 1),(2, 2))= 0.1085656

KRAWEDZ((2, 1),(3, 1))= 0.1052413

KRAWEDZ((2, 2),(3, 1))= 0.1230772

KRAWEDZ((2, 2),(2, 3))= 0.1038941

KRAWEDZ((2, 2),(3, 2))= 0.1038950

KRAWEDZ((2, 3),(3, 2))= 0.1223429

KRAWEDZ((2, 3),(2, 4))= 0.1091584

KRAWEDZ((2, 3),(3, 3))= 0.1122471

KRAWEDZ((2, 4),(3, 3))= 0.1212604

KRAWEDZ((2, 5),(2, 6))= 0.1093876

KRAWEDZ((2, 5),(3, 5))= 0.1177149

KRAWEDZ((2, 6),(3, 5))= 0.1177182

KRAWEDZ((2, 6),(2, 7))= 0.1093267

KRAWEDZ((2, 6),(3, 6))= 0.1197329

KRAWEDZ((2, 7),(3, 6))= 0.1152039

KRAWEDZ((2, 7),(2, 8))= 0.1091586

KRAWEDZ((2, 7),(3, 7))= 0.1212608

KRAWEDZ((2, 8),(3, 7))= 0.1122481

KRAWEDZ((2, 8),(2, 9))= 0.1038954

KRAWEDZ((2, 8),(3, 8))= 0.1223432

KRAWEDZ((2, 9),(3, 8))= 0.1088941

KRAWEDZ((2, 9),(2, 10))= 0.1085733

KRAWEDZ((2, 9),(3, 9))= 0.1230798

KRAWEDZ((2, 10),(3, 9))= 0.1052415

KRAWEDZ((3, 1),(3, 2))= 0.1117380

KRAWEDZ((3, 1), (4, 1))=	0,1052415
KRAWEDZ((3, 2), (4, 1))=	0,1222650
KRAWEDZ((3, 2), (3, 3))=	0,1122484
KRAWEDZ((3, 2), (4, 2))=	0,1091585 ← 12-15
KRAWEDZ((3, 3), (4, 2))=	0,1212607
KRAWEDZ((3, 3), (3, 4))=	0,1126316
KRAWEDZ((3, 3), (4, 3))=	0,1126316 ← 15-16
KRAWEDZ((3, 4), (4, 3))=	0,1198776
KRAWEDZ((3, 4), (3, 5))=	0,1128320
KRAWEDZ((3, 4), (4, 4))=	0,1155893
KRAWEDZ((3, 5), (4, 4))=	0,1180047
KRAWEDZ((3, 5), (3, 6))=	0,1128349
KRAWEDZ((3, 5), (4, 5))=	0,1180049
KRAWEDZ((3, 6), (4, 5))=	0,1155918
KRAWEDZ((3, 6), (3, 7))=	0,1126292
KRAWEDZ((3, 6), (4, 6))=	0,1198776
KRAWEDZ((3, 7), (4, 6))=	0,1126291
KRAWEDZ((3, 7), (3, 8))=	0,1122493
KRAWEDZ((3, 7), (4, 7))=	0,1212605
KRAWEDZ((3, 8), (4, 7))=	0,1091582
KRAWEDZ((3, 8), (3, 9))=	0,1117432
KRAWEDZ((3, 8), (4, 8))=	0,1222655
KRAWEDZ((3, 9), (4, 8))=	0,1052416
KRAWEDZ((4, 1), (4, 2))=	0,1146401
KRAWEDZ((4, 1), (5, 1))=	0,1052415
KRAWEDZ((4, 2), (5, 1))=	0,1210241
KRAWEDZ((4, 2), (4, 3))=	0,1152116
KRAWEDZ((4, 2), (5, 2))=	0,1093296 ← 14-13
KRAWEDZ((4, 3), (5, 2))=	0,1197331
KRAWEDZ((4, 3), (4, 4))=	0,1155894
KRAWEDZ((4, 3), (5, 3))=	0,1128325
KRAWEDZ((4, 4), (5, 3))=	0,1180049
KRAWEDZ((4, 4), (4, 5))=	0,1152235
KRAWEDZ((4, 5), (4, 6))=	0,1155918
KRAWEDZ((4, 5), (5, 5))=	0,1180047
KRAWEDZ((4, 6), (5, 5))=	0,1128345
KRAWEDZ((4, 6), (4, 7))=	0,1152102
KRAWEDZ((4, 6), (5, 6))=	0,1197326
KRAWEDZ((4, 7), (5, 6))=	0,1093281
KRAWEDZ((4, 7), (4, 8))=	0,1146436
KRAWEDZ((4, 7), (5, 7))=	0,1210242
KRAWEDZ((4, 8), (5, 7))=	0,1052412
KRAWEDZ((5, 1), (5, 2))=	0,1171903
KRAWEDZ((5, 1), (6, 1))=	0,1052413
KRAWEDZ((5, 2), (6, 1))=	0,1193301 ← 6-14
KRAWEDZ((5, 2), (5, 3))=	0,1177161
KRAWEDZ((5, 2), (6, 2))=	0,1093859 ← 14-14
KRAWEDZ((5, 3), (6, 2))=	0,1177168 ← 17-14
KRAWEDZ((5, 3), (5, 4))=	0,1180046 ← 17-18
KRAWEDZ((5, 3), (6, 3))=	0,1128333 ← 17-16
KRAWEDZ((5, 4), (6, 3))=	0,1155906 ← 18-16
KRAWEDZ((5, 4), (5, 5))=	0,1180049
KRAWEDZ((5, 4), (6, 4))=	0,1155905
KRAWEDZ((5, 5), (6, 4))=	0,1128335
KRAWEDZ((5, 5), (5, 6))=	0,1177174
KRAWEDZ((5, 5), (6, 5))=	0,1177163
KRAWEDZ((5, 6), (6, 5))=	0,1093881
KRAWEDZ((5, 6), (5, 7))=	0,1171914
KRAWEDZ((5, 6), (6, 6))=	0,1193293
KRAWEDZ((5, 7), (6, 6))=	0,1052416
KRAWEDZ((6, 1), (6, 2))=	0,1193295 ← 14-6
KRAWEDZ((6, 1), (7, 1))=	0,1052416
KRAWEDZ((6, 2), (7, 1))=	0,1171921
KRAWEDZ((6, 2), (6, 3))=	0,1197327 ← 16-14
KRAWEDZ((6, 2), (7, 2))=	0,1093289 ← 14-13
KRAWEDZ((6, 3), (7, 2))=	0,1152112 ← 16-13
KRAWEDZ((6, 3), (6, 4))=	0,1198776 ← 16-16
KRAWEDZ((6, 3), (7, 3))=	0,1126301 ← 15-16
KRAWEDZ((6, 4), (7, 3))=	0,1126304
KRAWEDZ((6, 4), (6, 5))=	0,1197329
KRAWEDZ((6, 4), (7, 4))=	0,1152101
KRAWEDZ((6, 5), (7, 4))=	0,1093239
KRAWEDZ((6, 5), (6, 6))=	0,1193302
KRAWEDZ((6, 5), (7, 5))=	0,1171897
KRAWEDZ((6, 6), (7, 5))=	0,1052413
KRAWEDZ((7, 1), (7, 2))=	0,1210246 ← 13-3
KRAWEDZ((7, 1), (8, 1))=	0,1052413
KRAWEDZ((7, 2), (8, 1))=	0,1146439
KRAWEDZ((7, 2), (7, 3))=	0,1212605 ← 15-13
KRAWEDZ((7, 2), (8, 2))=	0,1091581
KRAWEDZ((7, 3), (8, 2))=	0,1122492 ← 15-12
KRAWEDZ((7, 3), (7, 4))=	0,1212605
KRAWEDZ((7, 4), (7, 5))=	0,1091584
KRAWEDZ((7, 4), (8, 4))=	0,1146402
KRAWEDZ((7, 5), (8, 4))=	0,1052415
KRAWEDZ((8, 1), (8, 2))=	0,1222657 ← 12-4
KRAWEDZ((8, 1), (9, 1))=	0,1052414
KRAWEDZ((8, 2), (9, 1))=	0,1117434 ← 12-3
KRAWEDZ((8, 2), (8, 3))=	0,1223432 ← 12-12
KRAWEDZ((8, 2), (9, 2))=	0,1038939 ← 11-12
KRAWEDZ((8, 3), (9, 2))=	0,1088950
KRAWEDZ((8, 3), (8, 4))=	0,1222648
KRAWEDZ((8, 3), (9, 3))=	0,1117378
KRAWEDZ((8, 4), (9, 3))=	0,1052412
KRAWEDZ((9, 1), (9, 2))=	0,1230803 ← 11-3
KRAWEDZ((9, 1), (10, 1))=	0,1052412
KRAWEDZ((9, 2), (10, 1))=	0,1085737
KRAWEDZ((9, 2), (9, 3))=	0,1230773
KRAWEDZ((9, 2), (10, 2))=	0,1085657
KRAWEDZ((9, 3), (10, 2))=	0,1052414
KRAWEDZ((10, 1), (10, 2))=	0,1235348 ← 1-0
KRAWEDZ((10, 1), (11, 1))=	0,1052415
KRAWEDZ((10, 2), (11, 1))=	0,1052510

ZADANIE WYZNACZENIA OPTYMALNEJ SIATKI SFERYCZNEJ

DANE WEJŚCIOWE

A(-0,5000000,-0,2886751) B(0,5000000,-0,2886751) C(0,0 , 0,5773502).

DAB(0,0 , 0,2113249) DBC(-0,1830125,-0,1056623) DBC(0,1830125,-0,1056623)

Z=-0,4082482 R= 0,7071065

(2)→ETA=1,30656524 RMAX= 0,7071068 RMIN= 0,5411946 N= 2

ETA=1,36602974 RMAX= 0,5000004 RMIN= 0,3660244 N= 3

ETA=1,38705254 RMAX= 0,3826846 RMIN= 0,2758977 N= 4

I= 1	J= 1	X= -0,500000	Y= -0,288675	Z= 0,0
I= 1	J= 2	X= -0,321020	Y= -0,363752	Z= 0,106174
I= 1	J= 3	X= -0,110617	Y= -0,403222	Z= 0,161994
I= 1	J= 4	X= 0,110614	Y= -0,403222	Z= 0,161994
I= 1	J= 5	X= 0,321018	Y= -0,363752	Z= 0,106175
I= 1	J= 6	X= 0,500000	Y= -0,288675	Z= 0,0
I= 2	J= 3	X= -0,000000	Y= -0,170396	Z= 0,278021
I= 2	J= 4	X= 0,261514	Y= -0,150986	Z= 0,231137
I= 2	J= 5	X= 0,475528	Y= -0,096136	Z= 0,106174
I= 3	J= 1	X= -0,404508	Y= 0,105816	Z= 0,161994
I= 3	J= 2	X= -0,147566	Y= 0,085198	Z= 0,278021
I= 3	J= 3	X= 0,147568	Y= 0,085197	Z= 0,278021
I= 3	J= 4	X= 0,404509	Y= 0,105813	Z= 0,161994
I= 4	J= 1	X= -0,293892	Y= 0,297408	Z= 0,161994
I= 4	J= 2	X= 0,000001	Y= 0,301970	Z= 0,231138
I= 4	J= 3	X= 0,293894	Y= 0,297405	Z= 0,161994
I= 5	J= 1	X= -0,154508	Y= 0,459887	Z= 0,106174
I= 5	J= 2	X= 0,154511	Y= 0,459885	Z= 0,106176
I= 6	J= 1	X= 0,0	Y= 0,577350	Z= 0,000000

KRAWEDZ((1, 1),(1, 2))= 0,2212314
KRAWEDZ((1, 1),(2, 1))= 0,2212337
KRAWEDZ((1, 2),(2, 1))= 0,3090131
KRAWEDZ((1, 2),(1, 3))= 0,2212312
KRAWEDZ((1, 2),(2, 2))= 0,2538236
KRAWEDZ((1, 3),(2, 2))= 0,3019508
KRAWEDZ((1, 3),(1, 4))= 0,2212310
KRAWEDZ((1, 3),(2, 3))= 0,2826753
KRAWEDZ((1, 4),(2, 3))= 0,2826755
KRAWEDZ((1, 4),(1, 5))= 0,2212312
KRAWEDZ((1, 4),(2, 4))= 0,3019506
KRAWEDZ((1, 5),(2, 4))= 0,2538217
KRAWEDZ((1, 5),(1, 6))= 0,2212339
KRAWEDZ((1, 5),(2, 5))= 0,3090173
KRAWEDZ((1, 6),(2, 5))= 0,2212303
KRAWEDZ((2, 1),(2, 2))= 0,2538229
KRAWEDZ((2, 1),(3, 1))= 0,2212312
KRAWEDZ((2, 2),(3, 1))= 0,3019515
KRAWEDZ((2, 2),(2, 3))= 0,2663912
KRAWEDZ((2, 2),(3, 2))= 0,2663913
KRAWEDZ((2, 3),(3, 2))= 0,2951342
KRAWEDZ((2, 3),(2, 4))= 0,2663911
KRAWEDZ((2, 3),(3, 3))= 0,2951341
KRAWEDZ((2, 4),(3, 3))= 0,2663911
KRAWEDZ((2, 4),(2, 5))= 0,2538237
KRAWEDZ((2, 4),(3, 4))= 0,3019509
KRAWEDZ((2, 5),(3, 4))= 0,2212312
KRAWEDZ((3, 1),(3, 2))= 0,2826758
KRAWEDZ((3, 1),(4, 1))= 0,2212310
KRAWEDZ((3, 2),(4, 1))= 0,2826774
KRAWEDZ((3, 2),(3, 3))= 0,2951342
KRAWEDZ((3, 2),(4, 2))= 0,2663911
KRAWEDZ((3, 3),(4, 2))= 0,2663909
KRAWEDZ((3, 3),(3, 4))= 0,2826756
KRAWEDZ((3, 3),(4, 3))= 0,2826757
KRAWEDZ((3, 4),(4, 3))= 0,2212310

KRAWEDZ((4, 1),(5, 1))= 0,2212310
KRAWEDZ((4, 2),(5, 1))= 0,2538248
KRAWEDZ((4, 2),(4, 3))= 0,3019508
KRAWEDZ((4, 2),(5, 2))= 0,2538222
KRAWEDZ((4, 3),(5, 2))= 0,2212310
KRAWEDZ((5, 1),(5, 2))= 0,3090138
KRAWEDZ((5, 1),(6, 1))= 0,2212312
KRAWEDZ((5, 2),(6, 1))= 0,2212349

ETA=1,39681911 RMAX= 0,3090188 RMIN= 0,2212303 N= 5

ETA=1,40213299 RMAX= 0,2588206 RMIN= 0,1845905 N= 5

ETA=1,40534973 RMAX= 0,2225236 RMIN= 0,1583403 N= 7

ETA=1,40742874 RMAX= 0,1950921 RMIN= 0,1386160 N= 5

ZWIĄZKI MIAROWE SIATEK
SFERYCZNYCH POWSTAŁYCH
NA BAZIE 8-ścianu foremnego

POZYCJA ②

ZWIĄZKI MIAROWE 200-ścianu (por. rys.44 str.66.)

ETA=1.40992832 RMAX= 0.1564386 RMIN= 0.1109549 N=10

ETA=1.41064072 RMAX= 0.1423168 RMIN= 0.1008883 N=11

ETA=1.41122532 RMAX= 0.1305282 RMIN= 0.0924928 N=12

ETA=1.41172028 RMAX= 0.1205423 RMIN= 0.0853868 N=13

ETA=1.41214085 RMAX= 0.1119705 RMIN= 0.0792913 N=14

ETA=1.41235638 RMAX= 0.1045330 RMIN= 0.0740131 N=15

ETA=1.41265678 RMAX= 0.0980225 RMIN= 0.0693887 N=16

ETA=1.41275406 RMAX= 0.0922704 RMIN= 0.0653124 N=17

ETA=1.41300201 RMAX= 0.0871604 RMIN= 0.0616845 N=18

ETA=1.41342640 RMAX= 0.0784680 RMIN= 0.0555162 N=20

ETA=1.41331196 RMAX= 0.0747334 RMIN= 0.0528782 N=21

ETA=1.41338253 RMAX= 0.0713413 RMIN= 0.0504756 N=22

ETA=1.41342640 RMAX= 0.0682433 RMIN= 0.0482821 N=23

ETA=1.41353226 RMAX= 0.0654052 RMIN= 0.0462708 N=24

ETA=1.41382313 RMAX= 0.0628018 RMIN= 0.0444198 N=25

ZADANIE WYZNACZENIA OPTYMALNEJ SIATKI SFERYCZNEJ

DANE WEJSCIOWE

A(-0,5000000,-0,8660254) B(0,5000000,-0,8660254) C(0,0 , 0,0
DAB(0,0 , 1,3134232) DBC(-1,7320499,-1,0000000) DBC(1,7320499,-1,0000000)

Z=-2,0000000 R= 2,2360678

ETA=1,04823494 RMAX= 0,5274671 RMIN= 0,5031953 N= 2

ETA=1,05210018 RMAX= 0,3533562 RMIN= 0,3358577 N= 3

ETA=1,05345821 RMAX= 0,2654683 RMIN= 0,2519969 N= 4

I= 1	J= 1	X= -0,500000	Y= -0,866025	Z= 0,0
I= 1	J= 2	X= -0,301636	Y= -0,880402	Z= 0,033202
I= 1	J= 3	X= -0,100820	Y= -0,887619	Z= 0,049870
I= 1	J= 4	X= 0,100816	Y= -0,887619	Z= 0,049870
I= 1	J= 5	X= 0,301633	Y= -0,880402	Z= 0,033202
I= 1	J= 6	X= 0,500000	Y= -0,866025	Z= 0,0
I= 2	J= 1	X= -0,405254	Y= -0,701922	Z= 0,084004
I= 2	J= 2	X= -0,203487	Y= -0,712277	Z= 0,109300
I= 2	J= 3	X= -0,000001	Y= -0,715736	Z= 0,118424
I= 2	J= 4	X= 0,203485	Y= -0,712278	Z= 0,109799
I= 2	J= 5	X= 0,405255	Y= -0,701922	Z= 0,084004
I= 3	J= 1	X= -0,307027	Y= -0,531786	Z= 0,150102
I= 3	J= 2	X= -0,102638	Y= -0,538352	Z= 0,167856
I= 3	J= 3	X= 0,102639	Y= -0,538353	Z= 0,167855
I= 3	J= 4	X= 0,307028	Y= -0,531788	Z= 0,150102
I= 4	J= 1	X= -0,206162	Y= -0,357082	Z= 0,197724
I= 4	J= 2	X= 0,000001	Y= -0,360166	Z= 0,206871
I= 4	J= 3	X= 0,206163	Y= -0,357085	Z= 0,197723
I= 5	J= 1	X= -0,103525	Y= -0,179310	Z= 0,226452
I= 5	J= 2	X= 0,103526	Y= -0,179313	Z= 0,226451
I= 6	J= 1	X= 0,0	Y= 0,0	Z= 0,236068

KRAWEDZ((1, 1),(1, 2))= 0,2016352
KRAWEDZ((1, 1),(2, 1))= 0,2072778
KRAWEDZ((1, 2),(2, 1))= 0,2125401
KRAWEDZ((1, 2),(1, 3))= 0,2016352
KRAWEDZ((1, 2),(2, 2))= 0,2092043
KRAWEDZ((1, 3),(2, 2))= 0,2118416
KRAWEDZ((1, 3),(1, 4))= 0,2016354
KRAWEDZ((1, 3),(2, 3))= 0,2107326
KRAWEDZ((1, 4),(2, 3))= 0,2107316
KRAWEDZ((1, 4),(1, 5))= 0,2016351
KRAWEDZ((1, 4),(2, 4))= 0,2118421
KRAWEDZ((1, 5),(2, 4))= 0,2092025
KRAWEDZ((1, 5),(1, 6))= 0,2016398
KRAWEDZ((1, 5),(2, 5))= 0,2125401
KRAWEDZ((1, 6),(2, 5))= 0,2072750
KRAWEDZ((2, 1),(2, 2))= 0,2036732
KRAWEDZ((2, 1),(3, 1))= 0,2072750
KRAWEDZ((2, 2),(3, 1))= 0,2119432
KRAWEDZ((2, 2),(2, 3))= 0,2036978
KRAWEDZ((2, 2),(3, 2))= 0,2092651
KRAWEDZ((2, 3),(3, 2))= 0,2108171
KRAWEDZ((2, 3),(2, 4))= 0,2036930
KRAWEDZ((2, 3),(3, 3))= 0,2108172
KRAWEDZ((2, 4),(3, 3))= 0,2092644
KRAWEDZ((2, 4),(2, 5))= 0,2036753
KRAWEDZ((2, 4),(3, 4))= 0,2119482
KRAWEDZ((2, 5),(3, 4))= 0,2072756
KRAWEDZ((3, 1),(3, 2))= 0,2052640
KRAWEDZ((3, 1),(4, 1))= 0,2072754
KRAWEDZ((3, 2),(4, 1))= 0,2108730
KRAWEDZ((3, 2),(3, 3))= 0,2052771
KRAWEDZ((3, 2),(4, 2))= 0,2093006
KRAWEDZ((3, 3),(4, 2))= 0,2093007
KRAWEDZ((3, 3),(3, 4))= 0,2052648
KRAWEDZ((3, 4),(3, 5))= 0,2108710

KRAWEDZ((4, 1),(4, 2))= 0,2053881
KRAWEDZ((4, 1),(5, 1))= 0,2072753
KRAWEDZ((4, 2),(5, 1))= 0,2093033
KRAWEDZ((4, 2),(4, 3))= 0,2053879
KRAWEDZ((4, 2),(5, 2))= 0,2093051
KRAWEDZ((4, 3),(5, 2))= 0,2072752
KRAWEDZ((5, 1),(5, 2))= 0,2070509
KRAWEDZ((5, 1),(5, 1))= 0,2072723
KRAWEDZ((5, 2),(5, 1))= 0,2072750

ETA=1,05407715 RMAX= 0,2125401 RMIN= 0,2016361 N= 5

ETA=1,05447197 RMAX= 0,1771953 RMIN= 0,1680415 N= 6

ETA=1,05466557 RMAX= 0,1519239 RMIN= 0,1440492 N= 7

ETA=1,05477715 RMAX= 0,1329520 RMIN= 0,1260482 N= 8

ZWIĄZKI MIAROWE SIATEK
SFERYCZNYCH POWSTAŁYCH
NAD 6-kątem ABCDEF

POZYCJA

3

ETA=1.06645298 RMAX= 0.1071784 RMIN= 0.1004993 N=11

ETA=1.06531334 RMAX= 0.0892491 RMIN= 0.0837772 N=12

ETA=1.06478691 RMAX= 0.0823601 RMIN= 0.0773489 N=13

ETA=1.07138824 RMAX= 0.0768014 RMIN= 0.0716839 N=14

ETA=1.07413197 RMAX= 0.0716516 RMIN= 0.0667065 N=15

ETA=1.07349014 RMAX= 0.0671508 RMIN= 0.0625536 N=16

ETA=1.08113670 RMAX= 0.0634105 RMIN= 0.0586516 N=17

ETA=1.08019161 RMAX= 0.0598584 RMIN= 0.0554146 N=18

ETA=1.08233929 RMAX= 0.0568352 RMIN= 0.0525440 N=19

ETA=1.08517551 RMAX= 0.0539807 RMIN= 0.0497437 N=20

ETA=1.08669186 RMAX= 0.0514957 RMIN= 0.0473876 N=21

ETA=1.08859825 RMAX= 0.0491309 RMIN= 0.0451322 N=22

ETA=1.09226894 RMAX= 0.0470591 RMIN= 0.0430838 N=23

ETA=1.09268093 RMAX= 0.0451435 RMIN= 0.0413144 N=24

ETA=1.09533119 RMAX= 0.0433622 RMIN= 0.0395882 N=25

ZADANIE WYZNACZENIA OPTIMALNEJ SIATKI SFERYCZNEJ

DANE WEJŚCIOWE

A(-0.5000000,-0.6881909) B(0.5000000,-0.6881909) C(0.0 , 0.0)
DAR(0.0 , 0.6208250) DBC(-0.9008536,-0.6545084) DSC(0.9003536,-0.5545084)

Z=-1.1135159 R= 1.4012585

ETA=1.15997696 RMAX= 0.5278308 RMIN= 0.4550354 N= 2

ETA=1.16864109 RMAX= 0.3553894 RMIN= 0.3041047 N= 3

ETA=1.17168427 RMAX= 0.2674656 RMIN= 0.2282743 N= 4

I= 1 J= 1 X= -0.500000 Y= -0.688191 Z= 0.000000

I= 1	J= 2	X= -0.304318	Y= -0.719103	Z= 0.050017
I= 1	J= 3	X= -0.102164	Y= -0.734724	Z= 0.075293
I= 1	J= 4	X= 0.102162	Y= -0.734724	Z= 0.075293
I= 1	J= 5	X= 0.304318	Y= -0.719103	Z= 0.050018
I= 1	J= 6	X= 0.500000	Y= -0.688191	Z= 0.000001
I= 2	J= 1	X= -0.410596	Y= -0.565137	Z= 0.101209
I= 2	J= 2	X= -0.207680	Y= -0.587309	Z= 0.141659
I= 2	J= 3	X= 0.000000	Y= -0.594754	Z= 0.155251
I= 2	J= 4	X= 0.207681	Y= -0.587311	Z= 0.141658
I= 2	J= 5	X= 0.410599	Y= -0.565141	Z= 0.101206
I= 3	J= 1	X= -0.314214	Y= -0.432479	Z= 0.181758
I= 3	J= 2	X= -0.105578	Y= -0.446345	Z= 0.210552
I= 3	J= 3	X= 0.105581	Y= -0.446346	Z= 0.210551
I= 3	J= 4	X= 0.314217	Y= -0.432482	Z= 0.181754
I= 4	J= 1	X= -0.212491	Y= -0.292469	Z= 0.240307
I= 4	J= 2	X= 0.000002	Y= -0.298812	Z= 0.255513
I= 4	J= 3	X= 0.212494	Y= -0.292473	Z= 0.240306
I= 5	J= 1	X= -0.107156	Y= -0.147487	Z= 0.275834
I= 5	J= 2	X= 0.107159	Y= -0.147492	Z= 0.275833
I= 6	J= 1	X= 0.0	Y= 0.0	Z= 0.287743

KRAWEDZ((1, 1),(1, 2))= 0.2043250
KRAWEDZ((1, 1),(2, 1))= 0.1826975
KRAWEDZ((1, 2),(2, 1))= 0.1939619
KRAWEDZ((1, 2),(1, 3))= 0.2043250
KRAWEDZ((1, 2),(2, 2))= 0.1873676
KRAWEDZ((1, 3),(2, 2))= 0.1930520
KRAWEDZ((1, 3),(1, 4))= 0.2043256
KRAWEDZ((1, 3),(2, 3))= 0.1908507
KRAWEDZ((1, 4),(2, 3))= 0.1908491
KRAWEDZ((1, 4),(1, 5))= 0.2043250
KRAWEDZ((1, 4),(2, 4))= 0.1930520
KRAWEDZ((1, 5),(2, 4))= 0.1873641
KRAWEDZ((1, 5),(1, 6))= 0.2043272
KRAWEDZ((1, 5),(2, 5))= 0.1939608
KRAWEDZ((1, 6),(2, 5))= 0.1826922
KRAWEDZ((2, 1),(2, 2))= 0.2030935
KRAWEDZ((2, 1),(3, 1))= 0.1826946
KRAWEDZ((2, 2),(3, 1))= 0.1921741
KRAWEDZ((2, 2),(2, 3))= 0.2082582
KRAWEDZ((2, 2),(3, 2))= 0.1871949
KRAWEDZ((2, 3),(3, 2))= 0.1903397
KRAWEDZ((2, 3),(2, 4))= 0.2032584
KRAWEDZ((2, 3),(3, 3))= 0.1903399
KRAWEDZ((2, 4),(3, 3))= 0.1871945
KRAWEDZ((2, 4),(2, 5))= 0.2030951
KRAWEDZ((2, 4),(3, 4))= 0.1921729
KRAWEDZ((2, 5),(3, 4))= 0.1826946
KRAWEDZ((3, 1),(3, 2))= 0.2110673
KRAWEDZ((3, 2),(4, 2))= 0.1859085
KRAWEDZ((3, 3),(4, 2))= 0.1859087
KRAWEDZ((3, 3),(3, 4))= 0.2110673
KRAWEDZ((3, 3),(4, 3))= 0.1897169
KRAWEDZ((3, 4),(4, 3))= 0.1826943
KRAWEDZ((4, 1),(4, 2))= 0.2131311
KRAWEDZ((4, 1),(5, 1))= 0.1826944
KRAWEDZ((4, 2),(5, 1))= 0.1855339
KRAWEDZ((4, 2),(4, 3))= 0.2131294
KRAWEDZ((4, 2),(5, 2))= 0.1855290
KRAWEDZ((4, 3),(5, 2))= 0.1826941
KRAWEDZ((5, 1),(5, 2))= 0.2143148
KRAWEDZ((5, 1),(6, 1))= 0.1826929
KRAWEDZ((5, 2),(6, 1))= 0.1826987

ETA=1.17309189 RMAX= 0.2143148 RMIN= 0.1826922 N= 5

ETA=1.17387390 RMAX= 0.1787524 RMIN= 0.1522755 N= 6

ETA=1.17431450 RMAX= 0.1532945 RMIN= 0.1305395 N= 7

ETA=1.17466450 RMAX= 0.1341823 RMIN= 0.1142322 N= 8

ZWIĄZKI MIAROWE SIATEK
SFERYCZNYCH POWSTAŁYCH
NA BAZIE 12-ścianu foremnego

ZWIĄZKI MIAROWE 1500-ścianu (por. rys. 50 str. 73)

POZYCJA

4

ETA=1.17483902 RMAX= 0.1192985 RMIN= 0.1015446 N= 9

ETA=1.17509174 RMAX= 0.0976359 RMIN= 0.0830879 N=11

ETA=1.17527580 RMAX= 0.0895144 RMIN= 0.0761646 N=12

ETA=1.17523575 RMAX= 0.0826281 RMIN= 0.0703077 N=13

ETA=1.20256615 RMAX= 0.0728012 RMIN= 0.0646960 N=14

ETA=1.20111561 RMAX= 0.0725621 RMIN= 0.0604122 N=15

ETA=1.20033169 RMAX= 0.0679987 RMIN= 0.0566499 N=16

ETA=1.19878197 RMAX= 0.0639507 RMIN= 0.0533463 N=17

ETA=1.19812679 RMAX= 0.0603771 RMIN= 0.0503929 N=18

ETA=1.21504307 RMAX= 0.0576957 RMIN= 0.0474845 N=19

ETA=1.21357155 RMAX= 0.0547697 RMIN= 0.0451310 N=20

ETA=1.21252251 RMAX= 0.0521341 RMIN= 0.0429964 N=21

ETA=1.21321392 RMAX= 0.0497192 RMIN= 0.0409814 N=22

ETA=1.22325325 RMAX= 0.0478610 RMIN= 0.0301267 N=23

ZADANIE WYZNACZENIA OPTIMALNEJ SIATKI SFERYCZNEJ

DANE WEJŚCIOWE

A(0,0 , -0,5000000) B(0,5000000, -0,5000000) C(0,0 , 0,0)
DAB(0,0 , 0,2071066) DBC(-0,3535533, -0,3535533) DBC(0,5000000, 0,0)

Z=-0,5000000 R= 0,8560254

ETA=1.59505081 RMAX= 0,4234208 RMIN= 0,2654591 N= 2

ETA=1,60957241 RMAX= 0,2854758 RMIN= 0,1773612 N= 3

ETA=1.61466694 RMAX= 0,2149497 RMIN= 0,1331232 N= 4

I= 1 J= 1 X= 0,0 Y= -0,612372 Z= 0,112372
I= 1 J= 2 X= 0,106334 Y= -0,607739 Z= 0,107739
I= 1 J= 3 X= 0,211060 Y= -0,593908 Z= 0,093908
I= 1 J= 4 X= 0,312592 Y= -0,571090 Z= 0,071090

I= 1 J= 5 X= 0,409393 Y= -0,539628 Z= 0,039628
I= 1 J= 6 X= 0,500000 Y= -0,500000 Z= 0,0
I= 2 J= 1 X= 0,0 Y= -0,509037 Z= 0,200629
I= 2 J= 2 X= 0,110286 Y= -0,502741 Z= 0,196483
I= 2 J= 3 X= 0,218842 Y= -0,486246 Z= 0,182402
I= 2 J= 4 X= 0,323940 Y= -0,459853 Z= 0,158481
I= 2 J= 5 X= 0,423761 Y= -0,423761 Z= 0,125182
I= 3 J= 1 X= 0,0 Y= -0,393167 Z= 0,271634
I= 3 J= 2 X= 0,113335 Y= -0,383885 Z= 0,267976
I= 3 J= 3 X= 0,224703 Y= -0,363469 Z= 0,253259
I= 3 J= 4 X= 0,332100 Y= -0,332100 Z= 0,227612
I= 4 J= 1 X= 0,0 Y= -0,267616 Z= 0,323639
I= 4 J= 2 X= 0,115320 Y= -0,253937 Z= 0,319889
I= 4 J= 3 X= 0,228352 Y= -0,228352 Z= 0,303562
I= 5 J= 1 X= 0,0 Y= -0,135476 Z= 0,355353
I= 5 J= 2 X= 0,116293 Y= -0,116293 Z= 0,350256
I= 6 J= 1 X= 0,0 Y= 0,0 Z= 0,366025

KRAWEDZ((1, 1),(1, 2))= 0,1065351
KRAWEDZ((1, 1),(2, 1))= 0,1358954
KRAWEDZ((1, 2),(2, 1))= 0,1722724
KRAWEDZ((1, 2),(1, 3))= 0,1065354
KRAWEDZ((1, 2),(2, 2))= 0,1375340
KRAWEDZ((1, 3),(2, 2))= 0,1702598
KRAWEDZ((1, 3),(1, 4))= 0,1065357
KRAWEDZ((1, 3),(2, 3))= 0,1395815
KRAWEDZ((1, 4),(2, 3))= 0,1684579
KRAWEDZ((1, 4),(1, 5))= 0,1065353
KRAWEDZ((1, 4),(2, 4))= 0,1419141
KRAWEDZ((1, 5),(2, 4))= 0,1667099
KRAWEDZ((1, 5),(1, 6))= 0,1065388
KRAWEDZ((1, 5),(2, 5))= 0,1447448
KRAWEDZ((1, 6),(2, 5))= 0,1652127
KRAWEDZ((2, 1),(2, 2))= 0,1105433
KRAWEDZ((2, 1),(3, 1))= 0,1358950
KRAWEDZ((2, 2),(3, 1))= 0,1726756
KRAWEDZ((2, 2),(2, 3))= 0,1107011
KRAWEDZ((2, 2),(3, 2))= 0,1387348
KRAWEDZ((2, 3),(3, 2))= 0,1700945
KRAWEDZ((2, 3),(2, 4))= 0,1109703
KRAWEDZ((2, 3),(3, 3))= 0,1418769
KRAWEDZ((2, 4),(3, 3))= 0,1676925
KRAWEDZ((2, 4),(2, 5))= 0,1112453
KRAWEDZ((2, 4),(3, 4))= 0,1454875
KRAWEDZ((2, 5),(3, 4))= 0,1652138
KRAWEDZ((3, 1),(3, 2))= 0,1137737
KRAWEDZ((3, 1),(4, 1))= 0,1358951
KRAWEDZ((3, 2),(4, 1))= 0,1715442
KRAWEDZ((3, 2),(3, 3))= 0,1141755
KRAWEDZ((3, 2),(4, 2))= 0,1330677
KRAWEDZ((3, 3),(3, 4))= 0,1147855
KRAWEDZ((3, 3),(4, 3))= 0,1442235
KRAWEDZ((3, 4),(4, 3))= 0,1652141
KRAWEDZ((4, 1),(4, 2))= 0,1151887
KRAWEDZ((4, 1),(5, 1))= 0,1358950
KRAWEDZ((4, 2),(5, 1))= 0,1690859
KRAWEDZ((4, 2),(4, 3))= 0,1170359
KRAWEDZ((4, 2),(5, 2))= 0,1409574
KRAWEDZ((4, 3),(5, 2))= 0,1652135
KRAWEDZ((5, 1),(5, 2))= 0,1179748
KRAWEDZ((5, 1),(6, 1))= 0,1358950
KRAWEDZ((5, 2),(6, 1))= 0,1652156

ETA=1.62082577 RMAX= 0,1726766 RMIN= 0,1065361 N= 5

ETA=1.62369919 RMAX= 0,1441793 RMIN= 0,0887968 N= 6

ETA=1.62506676 RMAX= 0,1237007 RMIN= 0,0761204 N= 7

ETA=1.62685394 RMAX= 0,1083659 RMIN= 0,0666107 N= 8

ZWIĄZKI MIAROWE SIATEK
SFERYCZNYCH POWSTAŁYCH
NA BAZIE SZESZCIANU

POZYCJA 5

ZWIĄZKI MIAROWE 1200-ścianu (por. rys. 58 str. 81)

ETA=1.62892246 RMAX= 0.0868099 RMIN= 0.0532928 N=10

ETA=1.63040924 RMAX= 0.0724112 RMIN= 0.0444129 N=12

ETA=1.63088036 RMAX= 0.0668615 RMIN= 0.0409972 N=13

ETA=1.63113213 RMAX= 0.0620961 RMIN= 0.0380693 N=14

ETA=1.63231087 RMAX= 0.0579772 RMIN= 0.0355185 N=15

ETA=1.63277531 RMAX= 0.0543663 RMIN= 0.0332969 N=16

ETA=1.63307762 RMAX= 0.0511754 RMIN= 0.0313368 N=17

ETA=1.63336086 RMAX= 0.0482400 RMIN= 0.0285257 N=18

ETA=1.63369179 RMAX= 0.0458044 RMIN= 0.0280373 N=19

ETA=1.63389683 RMAX= 0.0435183 RMIN= 0.0266346 N=20

ETA=1.63400269 RMAX= 0.0414495 RMIN= 0.0253668 N=21

ETA=1.64915752 RMAX= 0.0395739 RMIN= 0.0239964 N=22

ETA=1.64871979 RMAX= 0.0378551 RMIN= 0.0229603 N=23

ETA=1.64834118 RMAX= 0.0362807 RMIN= 0.0220104 N=24

ETA=1.64811039 RMAX= 0.0348349 RMIN= 0.0211363 N=25

ZADANIE WYZNACZENIA OPTIMALNEJ SIATKI SFERYCZNEJ

DANE WEJŚCIOWE

A(-0,5728219,-0,3307188) B(0,5728219,-0,3307188) C(0,0 , 0,5514376)
DAB(0,0 , 0,4889610) DBA(-0,4234526,-0,2444804) DBC(0,4234526,-0,2444804)

Z=-0,7500000 R= 1,0000000

ETA=1.16349629 RMAX= 0.6988365 RMIN= 0.6005315 N= 2

ETA=1.19486809 RMAX= 0.4825260 RMIN= 0.4038320 N= 3

ETA=1.20584393 RMAX= 0.3663232 RMIN= 0.3037898 N= 4

I= 1	J= 1	X= -0,572822	Y= -0,330719	Z= 0,000000
I= 1	J= 2	X= -0,357853	Y= -0,376754	Z= 0,104399
I= 1	J= 3	X= -0,121687	Y= -0,400475	Z= 0,158192
I= 1	J= 4	X= 0,121686	Y= -0,400475	Z= 0,158192
I= 1	J= 5	X= 0,357851	Y= -0,376755	Z= 0,104400
I= 1	J= 6	X= 0,572822	Y= -0,330719	Z= 0,000000
I= 2	J= 1	X= -0,505205	Y= -0,121531	Z= 0,104399
I= 2	J= 2	X= -0,263324	Y= -0,152030	Z= 0,202653
I= 2	J= 3	X= -0,000000	Y= -0,162277	Z= 0,236745
I= 2	J= 4	X= 0,263323	Y= -0,152031	Z= 0,202653
I= 2	J= 5	X= 0,505205	Y= -0,121532	Z= 0,104399
I= 3	J= 1	X= -0,407665	Y= 0,094854	Z= 0,158192
I= 3	J= 2	X= -0,140536	Y= 0,081138	Z= 0,236745
I= 3	J= 3	X= 0,140536	Y= 0,081137	Z= 0,236745
I= 3	J= 4	X= 0,407665	Y= 0,094853	Z= 0,158192
I= 4	J= 1	X= -0,285978	Y= 0,305621	Z= 0,158192
I= 4	J= 2	X= 0,000000	Y= 0,304059	Z= 0,202653
I= 4	J= 3	X= 0,285979	Y= 0,305620	Z= 0,158192
I= 5	J= 1	X= -0,147353	Y= 0,498286	Z= 0,104399
I= 5	J= 2	X= 0,147354	Y= 0,498285	Z= 0,104400
I= 6	J= 1	X= 0,0	Y= 0,661438	Z= 0,000000

KRAWEDZ((1, 1),(1, 2))= 0,2433725
KRAWEDZ((1, 1),(2, 1))= 0,2433733
KRAWEDZ((1, 2),(2, 1))= 0,2947056
KRAWEDZ((1, 2),(1, 3))= 0,2433731
KRAWEDZ((1, 2),(2, 2))= 0,2628506
KRAWEDZ((1, 3),(2, 2))= 0,2894174
KRAWEDZ((1, 3),(1, 4))= 0,2433726
KRAWEDZ((1, 3),(2, 3))= 0,2787758
KRAWEDZ((1, 4),(2, 3))= 0,2787753
KRAWEDZ((1, 4),(1, 5))= 0,2433730
KRAWEDZ((1, 4),(2, 4))= 0,2894174
KRAWEDZ((1, 5),(2, 4))= 0,2628497
KRAWEDZ((1, 5),(1, 6))= 0,2433742
KRAWEDZ((1, 5),(2, 5))= 0,2947059
KRAWEDZ((1, 6),(2, 5))= 0,2433722
KRAWEDZ((2, 1),(2, 2))= 0,2628506
KRAWEDZ((2, 1),(3, 1))= 0,2433729
KRAWEDZ((2, 2),(3, 1))= 0,2894177
KRAWEDZ((2, 2),(2, 3))= 0,2657188
KRAWEDZ((2, 2),(3, 2))= 0,2657186
KRAWEDZ((2, 3),(3, 2))= 0,2810708
KRAWEDZ((2, 3),(2, 4))= 0,2657190
KRAWEDZ((2, 3),(3, 3))= 0,2810709
KRAWEDZ((2, 4),(3, 3))= 0,2657139
KRAWEDZ((2, 4),(2, 5))= 0,2628512
KRAWEDZ((2, 4),(3, 4))= 0,2894179
KRAWEDZ((2, 5),(3, 4))= 0,2433727
KRAWEDZ((3, 1),(3, 2))= 0,2787759
KRAWEDZ((3, 1),(4, 1))= 0,2433727
KRAWEDZ((3, 2),(4, 1))= 0,2787774
KRAWEDZ((3, 2),(3, 3))= 0,2810712
KRAWEDZ((3, 2),(4, 2))= 0,2657190
KRAWEDZ((3, 3),(4, 2))= 0,2657188
KRAWEDZ((3, 3),(3, 4))= 0,2787775
KRAWEDZ((3, 3),(4, 3))= 0,2787759

KRAWEDZ((4, 1),(4, 2))= 0,2894152
KRAWEDZ((4, 1),(5, 1))= 0,2433731
KRAWEDZ((4, 2),(5, 1))= 0,2628515
KRAWEDZ((4, 2),(4, 3))= 0,2894177
KRAWEDZ((4, 2),(5, 2))= 0,2628502
KRAWEDZ((4, 3),(5, 2))= 0,2433727
KRAWEDZ((5, 1),(5, 2))= 0,2947058
KRAWEDZ((5, 1),(6, 1))= 0,2433732
KRAWEDZ((5, 2),(6, 1))= 0,2433747

ETA=1.21092987 RMAX= 0.2947058 RMIN= 0.2433722 N= 5

ETA=1.21371651 RMAX= 0.2463394 RMIN= 0.2029629 N= 6

ETA=1.21537209 RMAX= 0.2115337 RMIN= 0.1740484 N= 7

ETA=1.21646786 RMAX= 0.1853127 RMIN= 0.1523367 N= 8

ZWIĄZKI MIAROWE SIATEK
SFERYCZNYCH POWSTAŁYCH
NAD TRÓJKĄTEM ABC.

POZYCJA 6

ETA=1.21721458 RMAX= 0.1648573 RMIN= 0.1354381 N= 9

ETA=1.21778679 RMAX= 0.1484596 RMIN= 0.1219093 N=10

ETA=1.21818542 RMAX= 0.1350242 RMIN= 0.1108404 N=11

ETA=1.21849537 RMAX= 0.1238111 RMIN= 0.1016092 N=12

ETA=1.21873283 RMAX= 0.1143190 RMIN= 0.0938015 N=13

ETA=1.21895218 RMAX= 0.1061739 RMIN= 0.0871025 N=14

ETA=1.21904278 RMAX= 0.0991111 RMIN= 0.0813024 N=15

ETA=1.21926975 RMAX= 0.0929312 RMIN= 0.0762187 N=16

ETA=1.21934414 RMAX= 0.0874774 RMIN= 0.0717413 N=17



ETA=1.21946716 RMAX= 0.0782806 RMIN= 0.0641925 N=19

ETA=1.21955395 RMAX= 0.0743703 RMIN= 0.0609815 N=20

ETA=1.21965212 RMAX= 0.0703378 RMIN= 0.0580803 N=21
