

Piotr Dniestrzański, Jerzy Sacała

Akademia Ekonomiczna we Wrocławiu

KILKA PRZYKŁADÓW NIESTANDARDOWYCH ROZWIĄZAŃ ZADAŃ Z RACHUNKU PRAWDOPODOBIENSTWA

Pomysł wygłoszenia tego referatu i napisania na jego podstawie artykułu zrodził się podczas dyskusji prowadzonych przez autorów w przerwach zajęć przeprowadzanych na kursach przygotowawczych dla kandydatów na Akademię Ekonomiczną we Wrocławiu. Wymieniając poglądy na temat przygotowania kandydatów, zorientowaliśmy się, że w niektórych zadaniach z rachunku prawdopodobieństwa stosują oni często dziwne i nienaturalne metody rozwiązywania. Potwierdzeniem tych spostrzeżeń była sytuacja, która miała miejsce w lipcu 2005 roku podczas egzaminu wstępnego na Akademię Ekonomiczną we Wrocławiu. Jedno (z pięciu) zadań wyglądało następująco:

Zadanie 1 – (egzamin wstępny, AE, Wrocław 2005)

W urnie jest czternaście kul białych i sześć czarnych. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że wśród losowo wybranych pięciu kul są dokładnie trzy białe.

Wydawałoby się, że jest to standardowe zadanie z kombinatoryki, na kombinację, na zastosowanie symbolu Newtona. Jednak sprawdzając prace, stwierdziliśmy, że około 30% kandydatów próbowało rozwiązać zadanie za pomocą tak zwanego drzewka, rozrysowując pięć etapów losowania kolejnych kul, a następnie wybierając „ścieżki” spełniające warunki zadania. Co ciekawe, wielu z nich uzyskało w ten sposób prawidłowy wynik. Powstał problem, jak te rozwiązania oceniać. Formalnie rzecz biorąc, zadanie jest rozwiązane dobrze, ale metoda fatalna. Zwolenników takiej metody można natychmiast zapytać, a co by uczeń zrobił, gdyby losowano 50 kul z 70? Komentując to, W. Rybicki stwierdził, że drzewka to plaga szkół średnich, że niektórzy nauczyciele nie uczą żadnych innych metod, widząc w drzewkach uniwersalny sposób na ominięcie kombinatoryki, prawdopodobieństwa

warunkowego, prawdopodobieństwa całkowitego, niezależności i tym podobnych spraw stanowiących przecież sedno klasycznego rachunku prawdopodobieństwa.

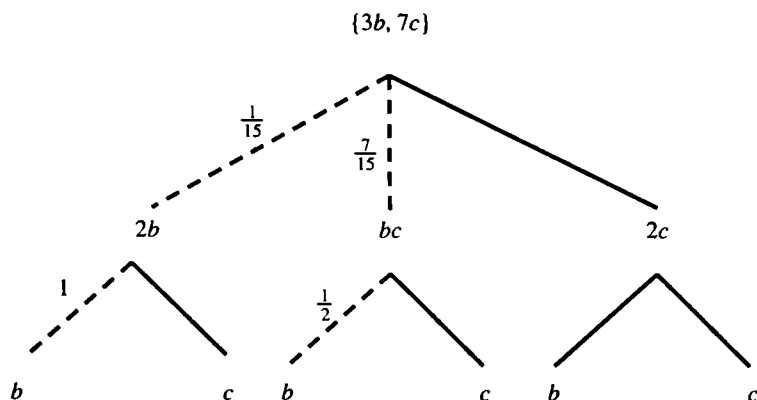
Powyższy komentarz bardzo dobrze współbrzmi z niektórymi тезami tego referatu. Chcemy w nim bowiem zwrócić uwagę na kilka zadań, które, naszym zdaniem, są wymyślane sztucznie tylko po to, żeby zmusić ucznia do stosowania wzoru na prawdopodobieństwo całkowite, względnie rysowania drzewka. Podkreślimy to wyraźnie: nie jesteśmy przeciwnikami wzoru na prawdopodobieństwo całkowite (to byłby absurd!). Nie chcemy również całkowicie potępiać drzewek, wiedząc, że w wielu sytuacjach są one jedyną rozsądną metodą opisu sytuacji probabilistycznej. Jesteśmy natomiast przeciwnikami sztucznego wymyślania problemów pod konkretne metody ich rozwiązania, widząc w tym działalność niedydaktyczną i nienaukową. W nauce wymyśla się rozwiązania do problemów, a nie odwrotnie. Współbrzmi to z tym, co często podkreśla A. Smoluk, że matematyka upraszcza i jest najkrótszą drogą do celu. A każdy, kto komplikuje rzeczy proste i zmierza do celu naokoło, uprawia antymatematykę i należy z tym walczyć.

Oto kolejny przykład. W każdym podręczniku z rachunku prawdopodobieństwa można znaleźć zadanie następującego typu:

Zadanie 2

Z urny, w której znajdują się 3 kule białe i 7 czarnych, losujemy 2 kule, a następnie z nich wybieramy jedną. Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosowano kulę białą.

Oczywiście można raz (podkreślimy: jeden raz) pozwolić uczniowi rozwiązać to zadanie „na piechotę”. Oto takie rozwiązanie (rys. 1):



Rys. 1. Ilustracja graficzna do zadania 2

Źródło: opracowanie własne.

$$P = \frac{1}{15} \cdot 1 + \frac{7}{15} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{10}.$$

My jednak pozwolilibyśmy uczniowi na powyższe rozwiązanie tylko po to, aby zobaczył on, że wynik jest taki sam, jakbyśmy tę kulę losowali bezpośrednio z dziesięciu. Bo przecież nie może być inny!!! W ostatecznym rozrachunku, w sposób losowy, wybraliśmy jedną kulę z dziesięciu, wśród których były trzy białe. Szansa na białą kulę nie może być inna niż 0,3. A jeśli ktoś się upiera przy drzewku, to proponujemy rozwiązać kolejne zadanie.

Zadanie 3

Z urny, w której znajdują się 3 kule białe i 7 czarnych, losujemy 5 kul, a następnie z nich wybieramy 3. Z wybranych 3 kul losujemy jedną. Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosowano kulę białą.

To prawdopodobieństwo jest wciąż 0,3. Zadanie można jeszcze bardziej skomplikować, mówiąc, że najpierw kule rozmieszcza się losowo w trzech urnach, następnie losuje urnę, z tej urny wybiera się trzy kule, a z tych trzech jedną. Takiego zadania praktycznie nie da się rozwiązać klasycznie, a naszym zdaniem, można wytłumaczyć to uczniowi tak, aby rozwiązanie (wynik) zobaczył od razu.

Konkluzja:

Jeżeli wśród n elementów jest k wyróżnionych, to **niezależnie od mechanizmu losowania** prawdopodobieństwo wylosowania elementu wyróżnionego wynosi

$$P = \frac{k}{n}.$$

Konkluzja powyższa jest oczywista, stanowi ona niejako komentarz do klasycznej definicji prawdopodobieństwa.

Przedstawiamy teraz dwa kolejne zadania pochodzące ze zbioru zadań maturalnych (K. Cegiłka, J. Przyjemski (1991)).

Zadanie 4

Z zestawu tematów egzaminacyjnych składającego się z 10 tematów z algebry, 9 tematów z geometrii i 6 tematów z rachunku prawdopodobieństwa wyjęto losowo jeden temat i nie oglądając go odłożono na bok. Następnie przystąpiono do losowania drugiego tematu. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że za drugim razem wylosowano temat z algebry.

Dajemy głowę, że każdy uczeń (niestety również prawie każdy nauczyciel) zaczyna w tym momencie rysować drzewko (nawiasem mówiąc, to drzewko jest na ogół niepotrzebnie rozrysowane na trzy gałęzie (algebra, geometria i rachunek prawdopodobieństwa), zamiast na dwie (algebra i reszta)). A przecież to zadanie jest identyczne z zadaniem 2, tylko trzeba je przedstawić tak: wśród 25 elementów jest 10 wyróżnionych. Wybieramy z nich 24 (bo przecież odłożyć 1 to wybrać 24) i z tych 24 wybieramy 1. Obliczyć prawdopodobieństwo wylosowania elementu wyróżnionego. Wynik nie może być inny jak 10/25, czyli 2/5. Oczywiście drzewkiem uzyskamy ten sam wynik, ale w tym momencie przychodzi nam do głowy

sytuacja, w której zadania dotyczą siedmiu działów matematyki i najpierw odkłada się jedno zadanie, potem 3, potem jeszcze 5 i dopiero losuje jedno. Zwolennikom drzewek życzymy powodzenia.

W tym momencie nie jest już trudno przekonać uczniów, że teza zawarta w następnym zadaniu jest oczywista.

Zadanie 5 (K. Cegiełka, J. Przyjemski (1991))

W urnie jest m losów, w tym k wygrywających ($m > 2$ i $k < m$). Z urny tej jeden los wyjmuje pierwsza osoba, a następnie z pozostałych losów również jeden los wyjmuje druga osoba. Wykazać, że prawdopodobieństwa wylosowania wygrywającego losu dla obu osób są jednakowe.

Oczywiście oba te prawdopodobieństwa są równe k/m . Każdy uczeń uwierzy, że ewentualna trzecia, czwarta i kolejne osoby mają taką samą szansę na wygraną. Idąc „za ciosem”, proponujemy teraz następujące zadanie:

Zadanie 6

Ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ losujemy kolejno 4 cyfry i układając je w kolejności losowania, tworzymy z nich liczbę czterocyfrową. Oblicz prawdopodobieństwo, że otrzymamy liczbę parzystą.

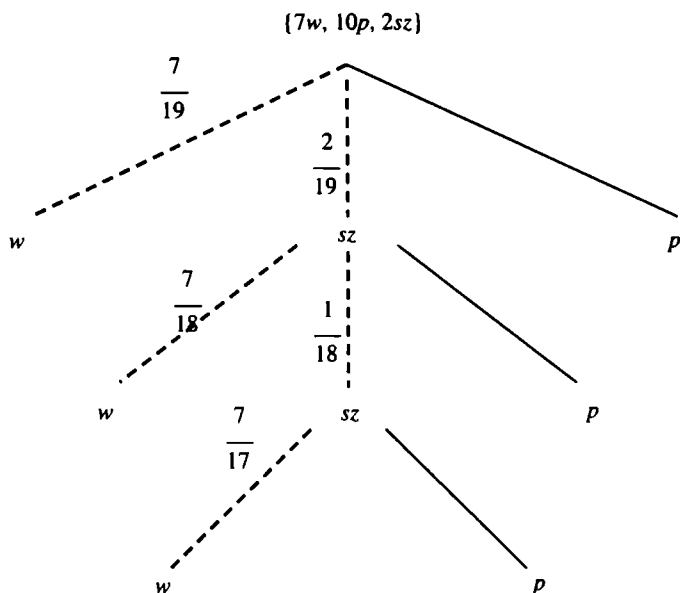
Niestety, przypuszczalnie dalej będzie problem ze skojarzeniem tego zadania z poprzednimi. Wielu rozwiązujących to zadanie na pewno zapyta, czy losowanie jest ze zwracaniem, czy bez. Jesteśmy przekonani, że odpowiedź: „w tym zadaniu to nie ma znaczenia” zaskoczy nie tylko niejednego ucznia. Oczywiście, wielu z nich natychmiast powie, że jeśli losujemy ze zwracaniem, to prawdopodobieństwo wylosowania za czwartym razem liczby parzystej (a przecież do tego sprowadza się to zadanie) jest takie samo jak za pierwszym razem, czyli $3/7$. A jeśli losujemy bez zwracania? To też $3/7$. Bo przecież jest 7 elementów, 3 wyróżnione, odkładamy jeden, potem drugi, potem trzeci i losujemy jeden. Można też użyć innego argumentu: na początku eksperymentu każda liczba ma jednakową szansę, by być losowana jako czwarta, więc szansa na parzystą jest $3/7$.

Oto kolejny przykład zadania, gdzie można odejść od żmudnych rachunków:

Zadanie 7

Na loterii jest 7 losów wygrywających, 10 przegrywających i 2 dające prawo ponownego losowania. Oblicz prawdopodobieństwo, że kupując jeden los, wygramy (przy założeniu, że wykorzystujemy prawa do ewentualnych kolejnych losowań).

To zadanie również można pozwolić rozwiązać uczniom przez klasyczne drzewko (w – los wygrywający, p – los przegrywający, sz – los dający prawo ponownego losowania).



Rys. 2. Ilustracja graficzna do zadania 7

Źródło: opracowanie własne.

$$P = \frac{7}{19} + \frac{2}{19} \cdot \frac{7}{18} + \frac{2}{19} \cdot \frac{1}{18} \cdot \frac{7}{17} = \frac{7}{17}.$$

My jednak pozwolilibyśmy uczniom na rozwiązanie „klasyczne” tylko po to, żeby zobaczyli, że rozwiązanie jest trywialne. Gdyby nie mogli tego zobaczyć, to zadalibyśmy im zadanie domowe, w którym losów dających dodatkową szansę jest 50. Po takiej modyfikacji na ogół słyszy się poprawną odpowiedź: Te losy nie mają znaczenia i prawdopodobieństwo jest takie, jakby ich wcale nie było! A tym, którzy ciągle nie są przekonani, proponujemy następującą „obrazkową” ilustrację zjawiska. Wyobraźmy sobie, że mamy urnę, losy wygrywające to kule białe, przegrywające – czarne, a losy dające dodatkową szansę to takie kulki, że jak się je chwyci w celu wyciągnięcia, to pękają i znikają jak bańka mydlana. I tych bańek jest bardzo dużo. Wkładamy rękę do takiej urny i próbujemy wyciągnąć kulę. Pewnie pierwszych kilka (a może kilkanaście) pierwszych nam pęknie. Ale wreszcie trafimy na taką, która nie pęka. Czy ważne jest za którym razem? Nie!!! Eksperyment się skończy w momencie trafienia jednej z 17, którą da się wyjąć. Jakie jest prawdopodobieństwo, że będzie to kula biała? $7/17$ i inne być nie może.

Zauważmy jeszcze, że ostatnie zadanie to przepis na atrakcyjną loterię. Z doświadczenia wiemy, że ten przykład też pozwala słuchaczom zrozumieć istotę zjawiska. Wyobraźmy sobie, że organizujemy loterię. Przygotowujemy 500 losów po złotówce, z których niektóre wygrywają (powiedzmy od 10 do 50 złotych), reszta

przegrywa, ale wszystko jest tak skalkulowane, że jak sprzedamy wszystkie, to coś zarobimy. Następnie dodajemy do naszej loterii np. 3000 losów, które kosztują złotówkę i wygrywają złotówkę. Te pękające kulki są tymi losami dającymi dodatkową szansę, bo każdy z graczy w takiej sytuacji prosi o dodatkowy los. Słuchacze czują, że te losy są bez znaczenia, że szanse na wygraną się przez nie nie zmieniają, a my i tak swoje zarobimy. Losy te mają jednak ogromne znaczenie psychologiczne. Dzięki nim loteria będzie bardzo atrakcyjna, bo wielu uczestników za jedną złotówkę, będzie miało szansę wielokrotnego losowania, co osłodzi im to, że w końcu pewnie i tak przegrają. Więc może kupią kolejny los.

Jako ciekawostkę podajemy jeszcze na koniec rozwiązanie zadania 4 z książki, z której zostało ono zaczerpnięte (K. Cegiełka, J. Przyjemski (1991)). Rozwiązanie to przedstawiamy jako przykład, którego nie polecamy naśladować. Zwłaszcza, że we wspomnianym zbiorze (i we wszystkich innych, które przeglądaliśmy) nie ma słowa o innych metodach rozwiązywania tego typu zadań.

Ze zbioru 25 tematów losujemy bez zwracania dwa tematy i interesujemy się ich kolejnością. Za zbiór zdarzeń elementarnych Ω przyjmujemy zbiór wszystkich różnowartościowych ciągów dwuwyrzawowych o wyrazach należących do zbioru 25 tematów.

Zatem $\Omega = 25 \cdot 24 = 600$. Uznajemy wszystkie zdarzenia elementarne za jednakowo prawdopodobne. Oznaczamy przez B zdarzenie polegające na wylosowaniu za drugim razem tematu z algebry, przez C – zdarzenie polegające na wylosowaniu obu tematów z algebry, przez D – zdarzenie polegające na wylosowaniu za pierwszym razem tematu z geometrii lub rachunku prawdopodobieństwa i za drugim razem tematu z algebry.

Mamy:

$$\overline{B} = \overline{C} = \overline{D} = 10 \cdot 9 + (9 + 6) \cdot 10 = 240$$

i ostatecznie

$$P(B) = \frac{\overline{B}}{\Omega} = \frac{240}{600} = \frac{2}{5}.$$

Wnioski końcowe

Celem artykułu było zwrócenie uwagi na pewne (naszym zdaniem) mankamenty nauczania rachunku prawdopodobieństwa na poziomie szkoły średniej. Być może nie zabieralibyśmy głosu w tej sprawie, gdyby nie świadomość dużej szkodliwości niektórych „technik dydaktycznych” wykorzystywanych od wielu lat na tym poziomie nauczania. O tym, jak mocno są one zakorzenione, świadczy fakt, że nie trafiliśmy na żaden podręcznik lub zbiór zadań, w którym byłoby choćby wspomniane o możliwym innym spojrzeniu na omówione przez nas zagadnienia rachunku prawdopodobieństwa. Nie rozwodząc się zbyt długo nad potencjalnymi tego

konsekwencjami dla uczniów (skutki są aż nadto widoczne chociażby przy okazji sprawdzania egzaminów wstępnych), sugerujemy, że być może szansą na korektę są kursy odpowiednich przedmiotów na studiach wyższych.

Literatura

- K. Cegielka, J. Przyjemski (1991). *Zadania maturalne z matematyki z rozwiązaniami*. Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne. Warszawa.
- A. Kielbasa (2002). *Matura z matematyki w liceach ogólnokształcących*. Wydawnictwo 2000. Warszawa.
- H. Lubowicz, B. Wieprzkowicz (1994). *Zbiór zadań z matematyki dla kandydatów na studia techniczne*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne. Warszawa.
- H. Pawłowski (2004). *Matematyka 3. Podręcznik dla liceum ogólnokształcącego, liceum profilowanego i technikum*. Wydawnictwo Pedagogiczne OPERON. Gdynia.
- W. Szlenk (1999). *Rachunek prawdopodobieństwa dla klasy IV LO i technikum*. Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne. Warszawa.

SOME NON-STANDARD EXAMPLES OF TASKS SOLUTION OF PROBABILITY CALCULUS

Summary

The authors present and analyse atypical solutions concerning probability calculus in secondary schools and basic course at economic universities. They also mention their influence on understanding of discussed problems by students of different types of schools.