

**Małgorzata Guzowska**

Uniwersytet Szczeciński

**DYSKRETNY CHAOS  
W SYSTEMACH EKONOMICZNYCH****1. Wstęp**

Dużą część rozważań ekonomii matematycznej zajmuje dynamika gospodarcza. Przy formalnym przedstawianiu modelu dynamicznego mamy możliwość wyboru, gdyż można go sformułować w kategoriach ciągłych lub okresowych. W analizie ciągłej czas zmienia się w sposób ciągły i przyjmuje się, że każda zmienna jest ciągłą i różniczkowalną formą czasu. Warunki modelu dynamicznego redukują się wówczas do równania różniczkowego. W analizie okresowej strumień czasu jest podzielony na kolejne okresy o stałej długości przyjętej jako jednostkę czasu i wtedy warunki modelu dynamicznego redukują się do równania względem wybranej zmiennej, czyli do równania różnicowego. Z tego względu badania dynamiki ekonomicznej skupiają się w dwóch nurtach. Pierwszy nurt tworzą prace ukazujące zastosowanie równań różniczkowych (R.G.D. Allen (1961), (1975); J.M. Blatt (1983); R.C. Hilborn (1994); A. Medio, G. Galo (1992); H.G. Schuster (1995)). Drugi nurt wyznaczają prace wykorzystujące do opisu dynamiki ekonomicznej równania różnicowe.

W przypadku zastosowań równań różnicowych w ekonomii najczęściej spotyka się ich liniowe postacie (R.G.D. Allen (1961), (1975); G. Gandolfo (1971); S. Goldberg (1960)). Wynika to z łatwości rozwiązania i interpretacji wyników. Należy jednak pamiętać, że ogólnie uporządkowane układy liniowe są anormalne. E. Fermi wykrzyknął pewnego razu: „Nie jest powiedziane w Biblii, że wszystkie prawa przyrody są wyrażalne równaniami liniowymi”<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup> Fermi cytowany w pracy S.M. Ulam (1976).

Odkrycie nowych praw matematycznych oraz wzrastająca zdolność obliczeniowa w ostatniej dekadzie doprowadziły do wzrostu zainteresowania nieliniowymi modelami dynamicznymi, także tymi w postaci dyskretnej (J. Benhabib, R.H. Day (1982); R. Day (1983); G. Chen, X. Dong (1993); J.M. Grandmont (1986); T. Puu (1993); H. Zawadzki (1996) i wielu innych), których zachowanie jest jakościowo odmienne od przebiegu obserwowanego w modelach liniowych.

Niniejsza praca jest propozycją rozszerzenia tematyki zajęć z ekonomii matematycznej o analizę modeli ekonomicznych opisanych nieliniowymi równaniami różnicowymi<sup>2</sup>. Za wyborem tym przemawia przede wszystkim fakt, że jednostki gospodarcze myślą i planują w kategoriach okresowych, także dane empiryczne mają zazwyczaj postać okresową, natomiast tak jak wspomniano wcześniej, rzeczywistość nie zawsze ma charakter liniowy.

## 2. Dynamika nieliniowych równań różnicowych pierwszego rzędu

W ostatnich latach z pomocą w rozwiązywaniu i określaniu warunków zachowań dynamicznych nieliniowych równań różnicowych przyszła teoria chaosu, a dokładniej teoria bifurkacji. Między innymi dzięki definicji *bifurkacji lokalnych* (S.N. Elaydi (1999); H.W. Lorenz (1989) i inni) można przeprowadzić w sposób analityczny analizę dynamiki dla nieliniowych modeli różnicowych.

Rozważmy równanie różnicowe pierwszego rzędu jako najprostszy rodzaj układu dynamicznego:

$$y_{t+1} = f(y_t). \quad (1)$$

Dla pewnej wartości początkowej  $y_0$  chcemy znać rozwój procesu opisanego wzorem (1) dla  $t \rightarrow \infty$

$$\{y_0, y_1, y_2, \dots\} = \{y_0, f(y_0), f^2(y_0), \dots\},$$

zwanego w literaturze *trajektorią* czy też *ścieżką czasową* (A.C. Chiang (1994)).

Ścieżka czasowa, jakiej szukamy dla równania różnicowego, powinna być funkcją zmiennej  $t$ , która jest zgodna z danym równaniem różnicowym i jego warunkami początkowymi. Prócz tego nie może zawierać żadnych wyrażeń różnicowych.

Do zbadania dynamicznych własności równania logistycznego, a także dla innych równań tego typu posłużymy się następującą definicją:

### Definicja

Niech  $f : R \rightarrow R$  będzie funkcją jednoparametrową oraz pierwszego rzędu:

$$y_{t+1} = f(y_t, \alpha), \quad y \in R, \quad \alpha \in R. \quad (2)$$

Punkt  $y^*$ , będący rozwiązaniem równania

$$y^* = f(y^*, \alpha),$$

nazywany jest *punktem równowagi* lub *punktem stacjonarnym* równania (2).

<sup>2</sup> Ograniczając się jednak do równań różnicowych rzędu pierwszego.

Dodatkowo jest on *stabilnym punktem równowag*, gdy zachodzi warunek:

$$\left| \frac{\partial f(y^*)}{\partial y} \right| < 1. \quad (3)$$

Rozważania analogiczne do definicji bifurkacji lokalnych proponują także metody numeryczne.

Każdy z omawianych przez nas modeli może być opisany jako

$$X_{t+1} = \Phi(X_t), \quad (4)$$

gdzie  $\Phi$  jest funkcją nieliniową; zależność (4) nosi nazwę *metody iteracyjnej jednopunktowej* (G. Dahlquist, A. Björck (1983)). Zgodnie z nią, jeśli istnieje rozwiązanie równania (4), to zachodzi

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X_t = c, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} X_{t+1} = c,$$

czyli

$$X = \Phi(X), \quad (5)$$

w wyniku którego otrzymamy punkty równowagi  $c_i$ .

Proces zbieżności z otrzymanymi rozwiązaniami będzie następował wtedy, gdy spełniony zostanie warunek:

$$|\Phi'(c_i)| < 1. \quad (6)$$

Przy czym dla  $0 < \Phi'(c_i) < 1$  zbieżność do punktu równowagi będzie miała charakter *asymptotyczny*, a dla  $-1 < \Phi'(c_i) < 0$  *oscylacyjny*.

Aby zilustrować zastosowanie powyższych definicji zostaną one wykorzystane do analizy zachowań dynamicznych<sup>3</sup> dla jednego z modeli ekonomicznych opisanych nieliniowym równaniem różnicowym, mianowicie dla modelu Stutzerza (H.W. Lorenz (1989)).

Model Stutzerza był jednym z pierwszych w ekonomii, dzięki któremu można było śledzić dynamikę chaotyczną (M.J. Stutzer (1980)). Stutzer podkreślił różnicę pomiędzy systemami dynamicznymi dla czasów ciągłego oraz dyskretnego. Rozważył on nieliniowy model cyklu wzrostu przedstawiony wcześniej dla czasu ciągłego przez Haavelmo (T. Haavelmo (1954)) z:

$$Y = KN^a, \quad K > 0, \quad 0 < a < 1 \quad (7)$$

jako funkcją produkcji ze stałym zapasem kapitału. Dodatkowo założył, że stopa wzrostu zatrudnienia opisana jest jako:

$$\frac{\dot{N}}{N} = \alpha - \beta \frac{N}{Y}, \quad \alpha, \beta > 0, \quad (8)$$

czyli stopa wzrostu wzrasta, gdy wzrasta produkt (dochód) na głowę.

<sup>3</sup> Analizę ograniczono do analizy dynamiki, pominięto zaś, ze względu na ograniczenie wielkości pracy, dodatkowe analizy ekonomiczne.

Łącząc (7) i (8) oraz zastępując operator różniczkowy przez skończoną różnicę ( $\dot{N}$  przez  $N_{t+1} - N_t$ ), otrzymujemy nieliniowe równanie różnicowe rzędu pierwszego, opisujące zachowanie się w czasie zatrudnienia:

$$N_{t+1} = (1 + \alpha) N_t - \beta \frac{N_t^{2-a}}{K}. \quad (9)$$

Przeprowadzenie analizy dynamicznej dla powyższego równania (9) pozwoli określić optymalne zatrudnienie, jest to jednak kłopotliwe dla powyższej postaci, dlatego za pomocą transformacji:

$$N_t = \left( \frac{K(1 + \alpha)}{\beta} \right)^{\frac{1}{1-a}} x_t \quad (10)$$

można zapisać równanie (9) jako:

$$x_{t+1} = (1 + \alpha) x_t (1 - x_t^{1-a}), \quad (11)$$

gdzie:  $x_t = N_t \left( \frac{K(1 + \alpha)}{\beta} \right)^{-\frac{1}{1-a}}$ .

Równanie (11) jest nadal nieliniowym równaniem różnicowym rzędu pierwszego, a jego postać umożliwi dalszą analizę dynamiczną.

Aby znaleźć stan równowagi oraz przedziały, w których następuje zbieżność do stanu równowagi, posłużymy się własnościami bifurkacji lokalnych. Za parametr decyzyjny, od którego uzależnione będzie zachowanie ścieżki czasowej przyjmiemy  $\alpha$ .

Niech

$$\Phi(x) = (1 + \alpha) x (1 - x^{1-a}). \quad (12)$$

Rozwiążemy równanie:

$$\Phi(x) = x, \text{ czyli } (1 + \alpha) x (1 - x^{1-a}) = x,$$

w wyniku rozwiązania którego otrzymujemy dwa punkty równowagi:

$$c_0 = 0, \quad c_1 = \left( \frac{\alpha}{1 + \alpha} \right)^{\frac{1}{1-a}}.$$

W dalszych rozważaniach pomijamy rozwiązanie trywialne  $c_0$ . Następnie badamy zbieżność równania (12) z punktem równowagi  $c_1$ . Zgodnie z definicją bifurkacji lokalnych musi być spełniony warunek:  $|\Phi'(c_1)| < 1$ , z rozwiązania którego

wynika, że  $c_1$  jest stabilnym punktem równowagi, gdy  $\alpha \in \left( 0, \frac{2}{1-a} \right]$ , przy czym

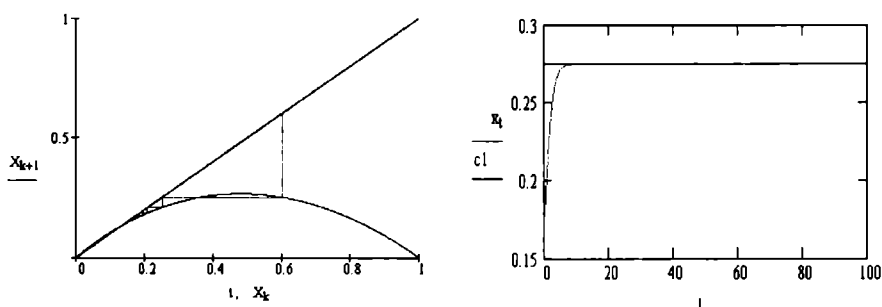
dla  $\alpha \in \left(0, \frac{1}{1-a}\right]$  jest to asymptotycznie stabilny punkt równowagi, natomiast

dla  $\alpha \in \left(\frac{1}{1-a}, \frac{2}{1-a}\right]$ , zbieżność do  $c_1$  przyjmuje postać oscylacyjną.

Dla lepszego zilustrowania zachowania modelu można posłużyć się jednocześnie podejściem graficznym. Niech parametr  $a = 0.2$ , natomiast początkowa wartość  $x_0 = 0.6$ .

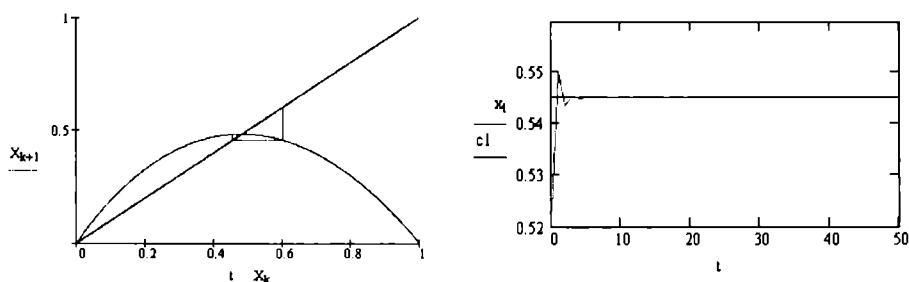
Zgodnie z powyższymi rozważaniami stabilnym punktem równowagi równania (12) jest  $c_1 = \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^{\frac{10}{8}}$ , dla parametru  $\alpha \in (0, 2.5]$ . Przy czym dla  $\alpha \in (0, 1.25]$  zbieżność z poziomem równowagi ma charakter jednostajny, natomiast dla  $\alpha \in (1.25, 2.5]$  oscylacyjny.

Rysunki 1-3 obrazują tempo oraz rodzaj zbieżności (zbieżność jednostajną lub oscylacyjną) do poziomu równowagi w zależności od wartości parametru  $\alpha$ . Zachowanie w czasie równania (12) przedstawione na tych wykresach potwierdza prawdziwość wyników uzyskanych drogą analityczną.



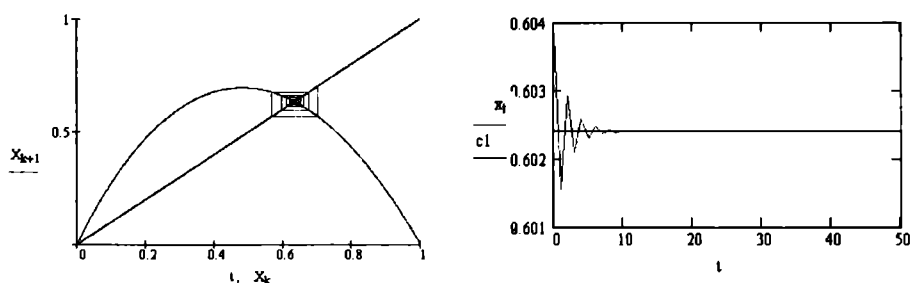
Rys. 1. Zbieżność ze stanem równowagi dla  $\alpha = 1.1$

Źródło: opracowanie własne.



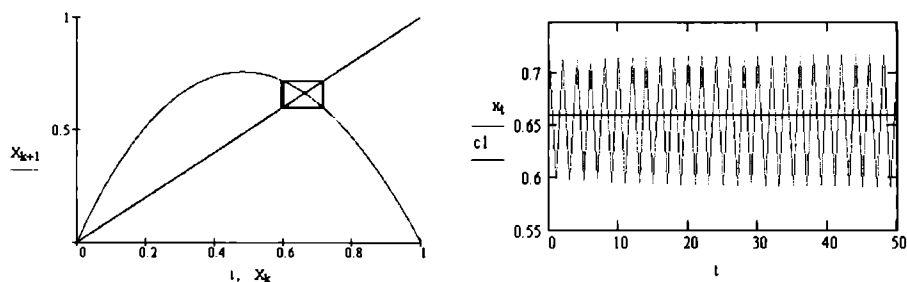
Rys. 2. Zbieżność ze stanem równowagi dla  $\alpha = 1.254$

Źródło: opracowanie własne.

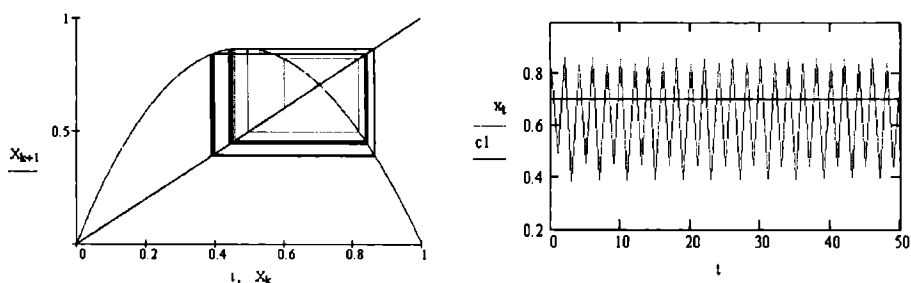
Rys. 3. Zbieżność do stanu równowagi dla  $\alpha = 1.7$ 

Źródło: opracowanie własne.

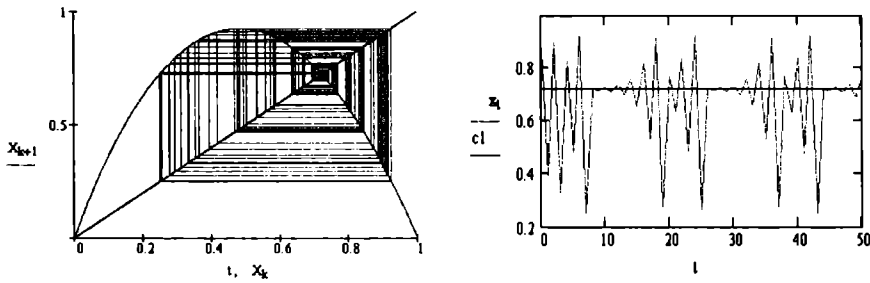
Warunkiem osiągnięcia przez model poziomu równowagi było  $\alpha \leq 2.5$  przy ustalonych wielkościach pozostałych parametrów. Można zadać więc pytanie, co się stanie, gdy parametr  $\alpha$  przekroczy tę wartość? Okazuje się, że gdy parametr dalej rośnie, wartość naszej funkcji zaczyna przeskakiwać między dwoma poziomami, cyklicznie. Im bardziej rośnie parametr, tym podwojenia pojawiają się coraz szybciej, a co za tym idzie, model zaczyna osiągać nieskończoną liczbę różnych wartości. Zachowanie modelu przechodzi więc w zachowanie chaotyczne, którego nie możemy obserwować w przypadku liniowych równań różnicowych. Omawiane zachowania przedstawiają poniższe rysunki.

Rys. 4. Zachowanie  $x_{t+1} = (1 + \alpha) x_t(1 - x_t^{1-\alpha})$  dla  $\alpha = 2.54$  (2-cykl)

Źródło: opracowanie własne.

Rys. 5. Zachowanie  $x_{t+1} = (1 + \alpha) x_t(1 - x_t^{1-\alpha})$  dla  $\alpha = 3.06$  (4-cykl)

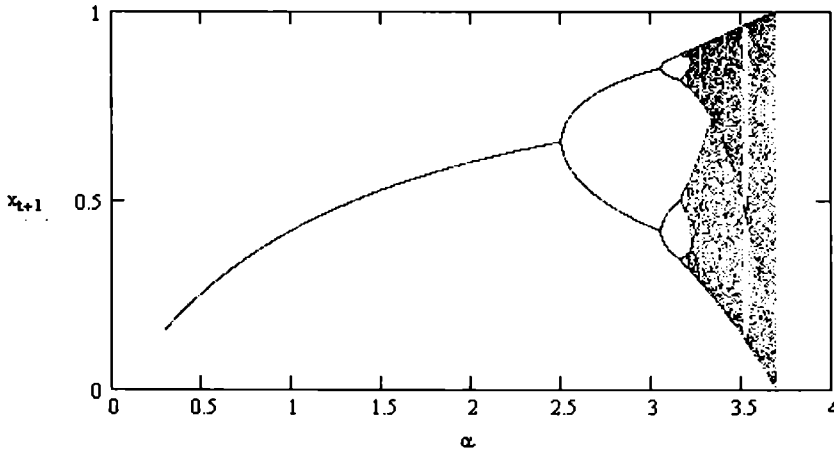
Źródło: opracowanie własne.



Rys. 6. Zachowanie  $x_{t+1} = (1 + \alpha)x_t(1 - x_t^{1-\alpha})$  dla  $\alpha = 3.33$  (oscylacje wybuchowe – chaos)

Źródło: opracowanie własne.

Kolejne zmiany zachowania ścieżki czasowej funkcji  $x_{t+1} = (1 + \alpha)x_t(1 - x_t^{1-\alpha})$  w zależności od parametru  $\alpha$  obrazuje diagram bifurkacyjny (rys. 7).



Rys. 7. Diagram bifurkacyjny dla  $x_{t+1} = (1 + \alpha)x_t(1 - x_t^{1-\alpha})$  ze względu na zmianę parametru  $\alpha$

Źródło: opracowanie własne.

### 3. Podsumowanie

Wraz z pojawieniem się przedstawionych w pracy definicji coraz częściej zaczęto przeprowadzać analizy zachowań nieliniowych modeli ekonomicznych, także dla ich postaci dyskretnych. W literaturze możemy spotkać między innymi rozważania dla takich modeli, jak: model logistyczny Roosa, model logistyczny Mansfielda, model logistyczny Verhulsta-Maya (J. Creedy, V.L. Martin (1994)), nieliniowy model pączyzny (M. Jarsulic (1983)), konkurencyjny brak równowagi oraz finansowe sprzężenie zwrotne (M. Kopel (1996)), neoklasyczny model wzro-

stu (M. Guzowska, S. Grzesiak (2001); H.W. Lorenz (1989)), model Stutzerza (M. Guzowska (2002); W.H. Lorenz (1989)) i wiele innych.

Wprowadzenie rozważań dotyczących tego typu modeli w zakres ekonomii matematycznej wydaje się być celowe z kilku względów: po pierwsze pokazują one zachowanie zgoła odmienne od tych prezentowanych przez liniowe równania różnicowe, ponadto opisują i pomagają zrozumieć takie zagadnienia jak: teoria popytu, teoria produkcji, zagadnienie równowagi ogólnej czy wzrostu gospodarczego. Dodatkowo znajomość zachowania modeli opisanych nieliniowymi równaniami różnicowymi to także punkt wyjścia do rozważań, takich jak: kontrola zachowań chaotycznych (G. Chen, X. Dong (1993); E. Ott, M. Spano (1995); T. Shinbrot, E. Ott, C. Grebogi, J.A. Yorke (1990)) rozważanych także dla zjawisk ekonomicznych (M. Kopel (1996)) czy też analizy zachowań dla tego typu modeli o większej liczbie parametrów decyzyjnych (M. Guzowska (2004)).

## Literatura

- R.G.D. Allen (1961). *Ekonomia matematyczna*. PWN. Warszawa.
- R.G.D. Allen (1975). *Teoria makroekonomiczna*. PWN. Warszawa.
- J. Benhabib, R.H. Day (1982). *A characterization of erratic in the overlapping generations model*. Journal of Economics Dynamics and Control 4. Str. 37-55.
- J.M. Blatt (1983). *Dynamic Economic Systems: A Post – Keynesian Approach*. M.E. Sharpe. New York.
- G. Chen, X. Dong (1993). *From chaos to order – Perspectives and methodologies in controlling nonlinear dynamical systems*. International Journal of Bifurcation and Chaos 3. Str. 1363-1409.
- A.C. Chiang (1994). *Podstawy ekonomii matematycznej*. PWN. Warszawa.
- J. Creedy, V.L. Martin (1994). *Chaos in nonlinear models in economics: Theory and applications*. Edward Elgar Publishing Company. Hampshire.
- G. Dahlquist, A. Bjorck (1983). *Metody numeryczne*. PWN. Warszawa.
- R. Day (1983). *The emergence of chaos from classical economic growth*. Quarterly Journal of Economics 97. Str. 201-213.
- S.N. Elaydi (1999). *Discrete Chaos*. Chapman and Hall/CRC. Boca Raton.
- G. Gandolfo (1971). *Mathematical Methods and Models in Economic Dynamics*. NHPC. London.
- S. Goldberg (1960). *Introduction to Difference Equations with illustrative examples from Economics, Psychology and Sociology*. John Wiley & Sons, New York.
- J.M. Grandmont (1986). *Periodic and Aperiodic Behavior in Discrete one-Dimensional Dynamical Systems, Contributions to Mathematical Economics*. Ed. Hildenbrand W., Mas-Colell A., Elsevier North Holland. Str. 225-246.
- M. Guzowska, S. Grzesiak (2001). *Analiza dynamiczna neoklasycznego modelu wzrostu opisanego nieliniowym równaniem różnicowym*. Materiały konferencji: Dynamiczne modele ekonomiczne. Toruń.
- M. Guzowska (2002). *Analiza zjawisk bifurkacyjnych oraz analiza dynamiczna w modelu Stutzerza*. Zeszyty Naukowe US nr 345. Prace Katedry Ekonometrii i Statystyki nr 13. Szczecin.
- M. Guzowska (2004). *Bubble Bifurcations in the Economic Models*. Zeszyty Naukowe US nr 394 cz. I. Szczecin.

- T. Haavelmo (1954). *A study in the theory of economic evolution*. North Holland. Amsterdam.
- R.C. Hilborn (1994). *Chaos and Nonlinear Dynamics*. Oxford University Press. New York.
- M. Jarsulic (1983). *Non – linear dynamics in economic theory*. Edward Elgar Publishing. Aldershot.
- M. Kopel (1996). *On keeping in the orbit close to its target in the chaotic quadratic map*. Cornell University, Department of Economics.
- O. Lange (1959). *Ekonomia polityczna*. Tom I. PWN. Warszawa.
- H.W. Lorenz (1989). *Nonlinear Dynamical Economic and Chaotic Motion*. Springer-Verlag. Berlin.
- A. Medio, G. Galo (1992). *Chaotic Dynamics. Theory and Applications to Economics*. Cambridge University Press. Cambridge.
- E. Ott, M. Spano (1995). *Controlling chaos*. Physics Today.
- T. Puu (1993). *Nonlinear Economics Dynamics*. Springer-Verlag. Berlin.
- H.G. Schuster (1995). *Chaos deterministyczny. Wprowadzenie*. Wydawnictwo Naukowe PWN. Warszawa.
- T. Shinbrot, E. Ott, C. Grebogi, J.A. Yorke (1990). *Using chaos to direct trajectories to targets*. Physical Review Letters 65. Str. 3215-3218.
- M.J. Stutzer (1980). *Chaotic Dynamics and Bifurcation in Macro Model*. Journal of Economics Dynamics & Control 2. Str. 353-377.
- S.M. Ulam (1976). *Adventures of a Mathematician*. Scribners. New York.
- H. Zawadzki (1996). *Chaotyczne systemy dynamiczne. Elementy teorii i wybrane przykłady ekonomiczne*. Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej im. K. Adamieckiego. Katowice.

## DISCRETE CHAOS IN ECONOMIC SYSTEMS

### Summary

Considerations presented in paper referring to the dynamic models described by difference equations are focussed on their non-linear form. Discovery of new mathematical laws and increasing numerical capabilities in the last decade caused increase of interest in non-linear dynamic models, which behaviour differs from behaviour of linear models. The non-linear models apart from the dynamic analysis allow observing chaotic behaviours that are generated by them. Also, economists noticed that introduction of non-linearity allows better presentation of issues that cannot be explained by means of the simple models. The goals of the paper were: collecting of economic models described by non-linear difference equations, presentation of methods of analysis of dynamics for non-linear difference equations, application on above-presented methods in analysis of dynamic properties of discussed models. indication of usefulness of methods of analysis of dynamics for non-linear difference equations at trials of use of methods of control of behaviour of chaotic models.

The paper presents cause-effects relationships P-S-R, its particular modifications and sustainable development rules as a pillars of sustainable development indicators system. Another structure of indicators were presented in this study. The example of air quality indicators are included.