

Adrianna Mastalerz-Kodzis, Ewa Pośpiech

Akademia Ekonomiczna w Katowicach

WYBRANE POJĘCIA MATEMATYCZNE I ICH INTERPRETACJE W EKONOMII

1. Wstęp

Narzędzia matematyczne mają szerokie zastosowanie w różnych dziedzinach nauki. Dlatego też studenci kierunków ekonomicznych, aby móc się nimi posługiwać, uczestniczą w cyklu wykładów i ćwiczeń z matematyki i przedmiotów pokrewnych, takich jak ekonomia matematyczna, matematyka finansowa, badania operacyjne, matematyka dyskretna itp. Ważne jest, aby przedstawiając pojęcia matematyczne, wskazywać ich użyteczność i bezpośrednio nawiązywać do prostych modeli ekonomicznych. Tak ukierunkowany proces nauczania wiedzy matematycznej pozwala słuchaczom lepiej zrozumieć sens opanowywania niejednokrotnie trudnego materiału i budować pozytywną motywację do pracy. Celem artykułu jest więc przedstawienie wybranych pojęć matematycznych i ukazanie możliwości ich zastosowań w ekonomii i naukach jej pokrewnych.

2. Funkcje i rekurencja a cena równowagi

Jednym z podstawowych pojęć matematyki jest funkcja. Za pomocą funkcji przedstawia się wiele zależności występujących w różnych dziedzinach życia. Wprowadzając pojęcie funkcji, przedstawia się jej rodzaje, podaje się najważniejsze własności oraz terminy pokrewne. Chcąc ukazać zastosowanie niektórych z nich w omawianym kontekście, należałoby przytoczyć pojęcia: funkcji, iniekcji, suriekcji, funkcji odwrotnej, złożenia funkcji (superpozycji), funkcji liniowej, ciągów liczbowych, ciągu i szeregu geometrycznego itp., jednak ze względu na ich elementarność nie zostanie to uczynione. Podane zostanie natomiast określenie ciągu zdefiniowanego rekurencyjnie.

Definicja 1. Mówimy, że ciąg zdefiniowany jest rekurencyjnie, jeśli:

(1) Określony jest pewien skończony zbiór wyrazów ciągu, zazwyczaj pierwszego lub kilku początkowych.

(2) Pozostałe wyrazy ciągu zdefiniowane są za pomocą poprzednich wyrazów ciągu.

Wzór definiujący ciąg w powyższy sposób nazywa się *wzorem, równaniem lub zależnością rekurencyjną*.

Sformułowany jest następujący problem: dana jest funkcja popytu i podaży pewnego towaru, nie będącego artykułem pierwszej potrzeby. Przy danych funkcjach popytu i podaży możliwe jest wyznaczenie ceny równowagi. Na skutek czynników zewnętrznych następuje wzrost ceny. Jak zareaguje rynek?

Powyższy problem dotyczy zagadnienia równowagi rynkowej. Równowaga na rynku określona jest przez cenę równowagi x_r , osiągnięta w punkcie przecięcia krzywej popytu i podaży. Oznacza to, że podaż jest rozdzielona między konsumentów, którzy są w stanie zapłacić za towar cenę x_r . Jeżeli cena wzrasta, następuje spadek popytu i wzrost podaży – pojawia się nadwyżka podaży nad popytem. Jeżeli cena jest niższa niż cena równowagi, występuje nadwyżka popytu nad podażą. Obydwie te sytuacje (stany nierównowagi) nie są jednak w gospodarce rynkowej długotrwałe. Nadwyżka podaży nad popytem wpływa na obniżenie ceny, spadek ceny powoduje natomiast wzrost popytu, ale ogranicza podaż. Z kolei nadwyżka popytu nad podażą oznacza wzrost ceny, co zmniejsza popyt oraz zwiększa podaż, powodując nadwyżkę podaży nad popytem itd. W rozumowaniu tym zakłada się, że krzywe popytu i podaży nie zmieniają swego położenia, a przemieszczanie się wzdłuż tych krzywych powoduje jedynie zmieniająca się cena (na podstawie M. Nasiłowski (1996)).

Zaprezentowane wyżej współzależności wyjaśniają, jak zmieniająca się cena kształtuje proces dostosowawczy popytu i podaży do równowagi rynkowej. Wykorzystując wspomniane wyżej pojęcia matematyczne, można dokonać ilościowej analizy rozważanego problemu (na podstawie R.G.D. Allen (1975), T. Bednarski (2004), A.C. Chiang (1994), A. Ostoja-Ostaszewski (1996)).

Przykład 1

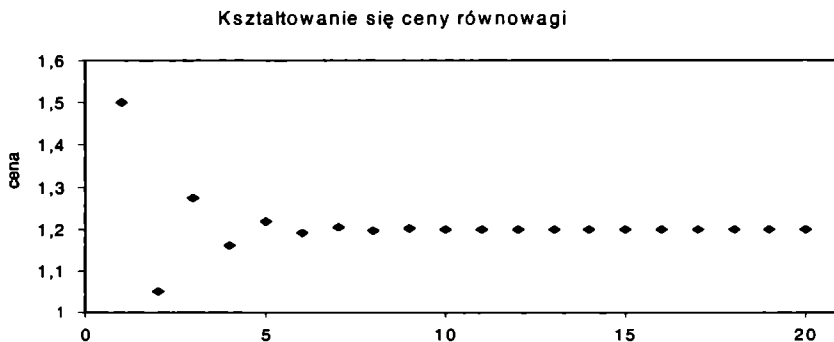
Dana jest funkcja popytu $d(x) = \frac{3}{2} - x$ i podaży $s(x) = \frac{x-0,6}{2}$ pewnego towaru, gdzie x oznacza cenę jednostkową (wartości funkcji popytu i podaży odnoszą się do setek tysięcy sztuk). Wyznaczyć cenę równowagi tego artykułu z przedziału $(0,5; 1,5)$ i przedstawić zachowanie się rynku, jeżeli cena wzrośnie do $x_0 = 1,5$ zł.

Cenę równowagi wyznacza się, przyrównując funkcje podaży i popytu. Użyta cena to 1,2 zł, dla której podaż wynosi $s(1,2) = 0,3$.

Jeżeli cena wzrośnie do 1,5 zł, to zgodnie z prawem podaży (danym funkcją s), producenci zwiększą produkcję do wielkości $s(1,5) = 0,45$. Konsumentci, zgodnie z funkcją popytu, wykupią towar, lecz po cenie $d^{-1}(0,45) = 1,05$ (funkcja odwrotna

do funkcji popytu d^{-1} przedstawia cenę w zależności od wielkości popytu). Cena na takim poziomie spowoduje spadek podaży do wartości $s(1,05) = 0,225$, a to z kolei nie zaspokoi popytu konsumentów i cena towaru ponownie wzrośnie do poziomu $d^{-1}(0,225) = 1,275$ itd. Wzajemne oddziaływanie na siebie producentów i konsumentów doprowadza do uzyskania następującego ciągu cen: 1,5; 1,05; 1,275; 1,1625; 1,21875; 1,190625; 1,204688; 1,197656; 1,201172; 1,199414; 1,200293; 1,199854; 1,200073; 1,199963; 1,200018; 1,199991; 1,200005; 1,199998; 1,200001; 1,199999¹.

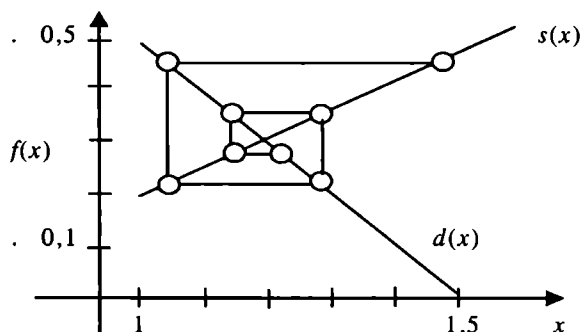
Wartości cen zbiegają do wyznaczonej na początku ceny równowagi. Kształtowanie się ceny równowagi obrazuje rys. 1.



Rys. 1. Kształtowanie się ceny równowagi

Źródło: opracowanie własne.

Rysunek 2 przedstawia następujące po sobie etapy dostosowywania się rynku do zaistniałej sytuacji, w której cenie 1,5 zł odpowiada wartość podaży 0,45, popytowi na poziomie 0,45 odpowiada cena 1,05 zł, cena ta obniża następnie podaż do wartości 0,225, co z kolei powoduje wzrost ceny do wartości 1,275 itd.



Rys. 2. Model przedstawiający proces zmian rynkowych

Źródło: opracowanie własne.

¹ Przedstawiono pierwszych 20 wartości.

Model ukazujący proces stabilizowania się rynku przedstawiony na powyższym rysunku nazywa się *modelem pajęczynowym*.

Analityczne ujęcie powyższej sytuacji wymaga podania funkcji, według której ceny zbiegają do ceny równowagi. Po wzroście ceny towaru, na skutek oddziaływania czynników zewnętrznych, zmieniła się podaż, a ta z kolei pociągnęła za sobą kolejną zmianę ceny. Cena zmieniła się z x_0 do $f(x_0) = d^{-1}(s(x_0))$ (zgodnie z przeprowadzoną wcześniej analizą).

W rozważanym przykładzie funkcja f przyjmie postać

$$f(x) = d^{-1}(s(x)) = 1,5 - \frac{x - 0,6}{2} = 1,8 - 0,5x = \frac{9}{5} - \frac{1}{2}x.$$

Proces dostosowywania się rynku zobrazować można poprzez wielokrotne składanie funkcji f ze sobą lub za pomocą liniowego równania rekurencyjnego $x_{n+1} = 1,8 - 0,5x_n$, dla $x_0 = 1,5$. Dzięki takiemu ujęciu ciąg cen zapisać można następująco:

$$\begin{aligned} x_1 &= f(x_0) = \frac{9}{5} - \frac{1}{2}x_0, \\ x_2 &= f(f(x_0)) = \frac{9}{5} - \frac{1}{2}\left(\frac{9}{5} - \frac{1}{2}x_0\right) = \frac{9}{5}\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}x_0, \\ x_3 &= f(f(f(x_0))) = \frac{9}{5} - \frac{1}{2}\left[\frac{9}{5}\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}x_0\right] = \frac{9}{5}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{8}x_0, \\ x_4 &= f(f(f(f(x_0)))) = \frac{9}{5} - \frac{1}{2}\left[\frac{9}{5}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{8}x_0\right] = \frac{9}{5}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) + \frac{1}{16}x_0 \text{ itd.} \end{aligned}$$

Obserwując wartości ciągu, wnioskować można, że n -krotna superpozycja funkcji f przyjmie postać

$$\underbrace{f \circ \dots \circ f(x_0)}_{n \text{ razy}} = \frac{9}{5} \left[1 + \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right] + \left(-\frac{1}{2}\right)^n x_0.$$

Wyrażenie w nawiasie kwadratowym jest sumą ciągu geometrycznego o pierwszym wyrazie $a_1 = 1$ i ilorazie $q = -\frac{1}{2}$. Jeżeli więc n dążyć będzie do nieskończoności, wówczas mamy do czynienia z szeregiem geometrycznym i sumę w nawiasie można zapisać, korzystając ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego, a wyrażenie $\left(-\frac{1}{2}\right)^n x_0$, gdy n dąży do nieskończoności, zmierza do zera. Otrzymuje się zatem

$$\underbrace{f \circ \dots \circ f(x)}_{n \text{ razy}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{9}{5} : \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{6}{5} = 1,2.$$

Rekurencyjny ciąg cen, który obrazuje proces stabilizacyjny rynku, zmierza do ceny równowagi niezależnie od ceny x_0 .

3. Elementy teorii grafów a planowanie tras

W przypadku wielu zagadnień praktycznych istotnym narzędziem opisu zjawiska są grafy. Na bazie teorii grafów rozwiązywać można wiele problemów z różnych dziedzin nauki, takich jak chemia, genetyka, lingwistyka, elektronika, socjologia itp. Szerokie zastosowanie tej teorii widoczne jest także w ekonomii i naukach jej pokrewnych. Aby móc wykorzystać tę teorię do zadań praktycznych, niezbędne jest wprowadzenie elementarnych pojęć. Poniżej podano kilka istotnych definicji i twierdzeń (na podstawie J. Abtowa i in. (2002), J. Piszczala (1998), K.A. Ross, C.R.B. Wrigt (2003), T. Sawik (1998), R.J. Wilson (2004)).

Definicja 2

Graf nieskierowany G to para zbiorów $(V(G), E(G))$, gdzie: $V(G)$ – niepusty zbiór wierzchołków grafu G , a $E(G)$ to zbiór nieuporządkowanych par wierzchołków zwanych *krawędziami grafu*.

Definicja 3

Ciąg krawędzi w grafie, które łączą się ze sobą nazywamy *drogą*.

Definicja 4

Jeśli w drodze wierzchołek początkowy pierwszej krawędzi pokrywa się z wierzchołkiem końcowym ostatniej krawędzi, to drogę taką nazywamy *drogą zamkniętą*.

Definicja 5

Drogę nazywamy *drogą prostą*, jeśli wszystkie jej krawędzie są różne (na podstawie R.J. Wilson (2004)).

Definicja 6

Zamkniętą drogę prostą, której ciągiem wierzchołków jest ciąg $x_1 x_2 \dots x_n x_1$ nazywamy *cyklem*, jeśli wierzchołki $x_1, x_2, \dots, x_n$ są różne.

Definicja 7

Graf jest *spójny*, jeśli każda para różnych wierzchołków jest połączona drogą w tym grafie.

Definicja 8

Grafem z wagami (*grafem obciążonym*) nazywamy graf spójny, w którym każdej krawędzi przyporządkowano pewną liczbę nieujemną. Liczbę przypisaną krawędzi nazywamy *wagą* tej krawędzi.

Definicja 9

Stopień wierzchołka V to liczba dwuwierzchołkowych krawędzi z V jako jednym z wierzchołków, plus podwojona liczba pętli o wierzchołku V (czyli krawędzi VV).

Definicja 10

Cyklem Eulera w grafie nazywamy zamkniętą drogę, która przechodzi przez każdą krawędź dokładnie jeden raz. Ogólniej, droga prosta zawierająca wszystkie krawędzie grafu G nazywana jest *drogą Eulera* w G .

Twierdzenie 1 (Eulera)

Graf spójny G zawiera cykl Eulera (jest tzw. *grafem eulerowskim*) wtedy i tylko wtedy, gdy stopień każdego wierzchołka grafu G jest parzysty.

Twierdzenie 2

Graf spójny G , mający dokładnie dwa wierzchołki stopnia nieparzystego, ma drogę Eulera.

Algorytm Fleury'ego (wyznaczania drogi lub cyklu Eulera)

1. Wybieramy dowolny wierzchołek V nieparzystego stopnia, jeśli taki istnieje. W przeciwnym przypadku wybiera się dowolny wierzchołek V .

2. Jeśli z wierzchołka V nie wychodzi żadna krawędź, algorytm jest zakończony.

3. Jeśli pozostała dokładnie jedna krawędź wychodząca z wierzchołka V do np. wierzchołka W , usuwamy tę krawędź i przechodzimy do punktu 5.

4. Jeśli została więcej niż jedna krawędź wychodząca z wierzchołka V , wybieramy taką krawędź wychodzącą z wierzchołka V do W , po usunięciu której graf pozostanie spójny; usuwamy tę krawędź².

5. Wierzchołek W traktujemy jako początkowy i przechodzimy do kroku 2.

Sformułowany jest następujący problem: wyznaczyć trasę, po której należy się poruszać tak, aby przejść każdą z ulic i aby przebyta droga była jak najkrótsza.

Powyższe zagadnienie może być rozpatrywane jako przypadek tzw. (*nieskie-rowanego*) *problemu chińskiego listonosza*, w którym listonosz na każdą z ulic musi doręczyć pocztę, przebyć przy tym jak najkrótszą drogę i powrócić do punktu wyjścia. Graf obciążony będzie przedstawiał trasę, jaką ma do przebycia listonosz. Jeżeli graf będzie zawierał cykl Eulera, to cykl ten będzie rozwiązaniem zadania, natomiast jeśli graf nie jest eulerowski, to zagadnienie staje się bardziej złożone, gdyż niektóre odcinki trasy trzeba pokonać przynajmniej dwukrotnie. Zagadnienie wyznaczania trasy przejścia przez kolejne odcinki ma wiele różnych zastosowań w zarządzaniu procesami obsługi i zaopatrzenia.

Przykład 2

Organizator wystawy musi optymalnie wyznaczyć trasę zwiedzania ekspozycji, przy czym wejście oznaczone jest za pomocą wierzchołka C . Graf przedstawiający plan tras obrazuje rysunek 3 (w nawiasach zamieszczono wagi oznaczające długość odcinka w m).

Każdy wierzchołek powyższego grafu jest stopnia parzystego, a więc graf jest eulerowski. Istnieje zatem cykl Eulera, który wyznaczyć można, stosując algorytm Fleury'ego.

1. Wybieramy wierzchołek C (wejście) i usuwamy przykładowo krawędź f , przechodząc w ten sposób do wierzchołka B .

2. Wybieramy następną krawędź, której początkiem jest B , np. a , łączącą wierzchołek B z A .

² Kolejno usuwane krawędzie tworzą cykl lub drogę Eulera.

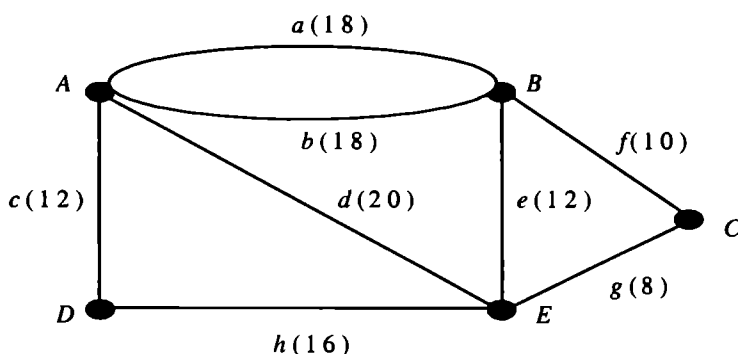
3. Wybieramy kolejną krawędź np. d i usuwamy ją z grafu. Jesteśmy przy wierzchołku E .

4. Możemy następnie usunąć krawędź e lub h (usunięcie krawędzi g spowodowałoby uzyskanie grafu niespójnego). Usuwamy krawędź h i docieramy do wierzchołka D .

5. Następnie usuwamy kolejno krawędzie c , b , e i g , docierając tym samym do punktu wyjścia C .

A zatem jedną z możliwych optymalnych tras zwiedzania ekspozycji jest cykl $fadhcbeg$ (wierzchołek C to wejście–wyjście).

W tym przypadku wagi nie odgrywały istotnej roli, jeśli jednak rozkładu tras nie da się przedstawić za pomocą grafu eulrowskiego, wówczas wagi są istotne.

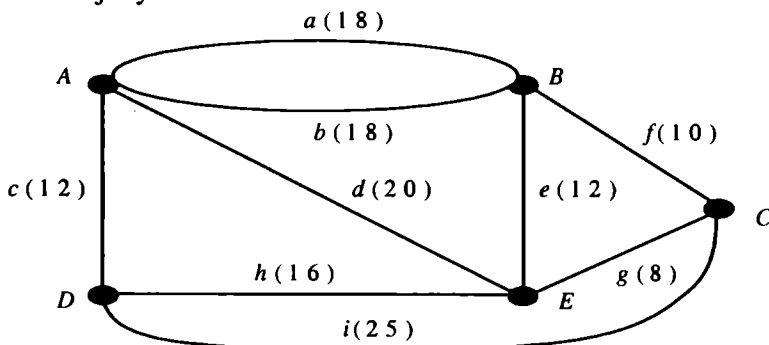


Rys. 3. Plan trasy zwiedzania ekspozycji

Źródło: opracowanie własne.

Przykład 3

Organizator wystawy musi optymalnie wyznaczyć trasę zwiedzania ekspozycji, przy czym wejście oznaczone jest za pomocą wierzchołka C . Graf przedstawiający plan tras obrazuje rys. 4.



Rys. 4. Plan trasy zwiedzania ekspozycji

Źródło: opracowanie własne.

W powyższym grafie wierzchołki A , B i E są stopnia parzystego, a C i D są stopnia nieparzystego. Graf ten nie jest więc eulerowski i nie istnieje cykl Eulera. Jednak zgodnie z twierdzeniem 2, graf ten ma drogę Eulera, którą wyznaczyć można za pomocą algorytmu Fleury'ego. Punktem wyjścia algorytmu będzie wierzchołek stopnia nieparzystego C (wejście); przechodząc przez wszystkie krawędzie dojść można do drugiego wierzchołka stopnia nieparzystego D . Przykładowa trasa to: *fadhcbegi*. Aby powrócić możliwie krótką drogą do punktu wyjścia, trzeba znaleźć najkrótszą drogę z punktu D do C . Jest nią *hg*. A zatem, pokonując trasę *fadhcbegihg*, zwiedzimy całą ekspozycję i będzie to najkrótsza droga (jedna z kilku) – przejdziemy wówczas 163 m.

4. Zakończenie

Studenci kierunków ekonomicznych na pierwszym roku studiów poznają podstawowe teorie mikroekonomiczne, wśród których znajduje się teoria równowagi rynkowej. Narzędzia potrzebne do przeprowadzenia ilościowej analizy – określenie i własności funkcji, ciągi i ich zbieżność, szereg geometryczny itp., stanowią materiał wykładany w szkołach średnich. Na zajęciach pierwszego roku w ramach matematyki, prowadzonych równoległe do wykładu z mikroekonomii, niektóre z tych pojęć są przypomniane, a pewne nowe elementy (np. pojęcie definicji rekurencyjnej) mogą być wprowadzone. Ponadto tematyka równowagi i związanej z tym ilościowej analizy pojawia się na zajęciach z ekonomii matematycznej na latach późniejszych. Wprowadzony materiał jest więc niezbędny w toku dalszego zdobywania wiedzy.

Elementy teorii grafów, w wersji mniej lub bardziej rozbudowanej, pojawiają się na zajęciach z badań operacyjnych (lub z matematyki dyskretniej). Implementację tej teorii można znaleźć w różnego rodzaju problemach dotyczących zagadnień logistycznych. Umiejętność korzystania z tego narzędzia pozwala na rozwiązywanie wielu praktycznych problemów, w których istnieje potrzeba jednoczesnego przedstawienia elementów i zachodzących między nimi powiązań.

Świadomość możliwości zastosowania dostępnych pojęć matematycznych w rozważaniach ekonomicznych jest istotnym czynnikiem kształtującym umiejętności i podejście do różnego typu zagadnień. Przedstawianie interpretacji i możliwości zastosowania narzędzi matematycznych w zagadnieniach ekonomicznych, a zatem ukazanie użyteczności aparatu matematycznego w różnych obszarach ekonomii, jest ważnym elementem motywującym studentów do zgłębiania matematyki i nauk pokrewnych i ma zachęcać zajmujących się różnego typu analizami do sięgania po narzędzia matematyczne.

Literatura

- J. Abtowa, K. Piasecki, T. Róžański, Z. Świtalski (2002). *Matematyka wspomagająca zarządzanie*. Wydawnictwo AE, Poznań.
- R.G.D. Allen (1975). *Teoria makroekonomiczna. Ujęcie matematyczne*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe. Warszawa.
- T. Bednarski (2004). *Elementy matematyki w naukach ekonomicznych. Podręcznik dla studentów ekonomii*. Oficyna Ekonomiczna. Kraków.
- A.C. Chiang (1994). *Podstawy ekonomii matematycznej*. Państwowe Wydawnictwo Ekonomiczne. Warszawa.
- M. Nasilowski (1996). *System rynkowy. Podstawy mikro- i makroekonomii*. Wydawnictwo Key Text. Warszawa.
- A. Ostoja-Ostaszewski (1996). *Matematyka w ekonomii. Modele i metody. Algebra elementarna*. Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.
- J. Piszczala (1998). *Matematyka i jej zastosowanie w naukach ekonomicznych*. Wydawnictwo AE, Poznań.
- K.A. Ross, C.R.B. Wright (2003): *Matematyka dyskretna*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- T. Sawik (1998). *Badania operacyjne dla inżynierów zarządzania*. Wydawnictwa AGH. Kraków.
- R.J. Wilson (2004). *Wprowadzenie do teorii grafów*. Wydawnictwo Naukowe PWN. Warszawa.

SELECTED MATHEMATICAL TOOLS AND THEIR HYPOTHETICAL APPLICATIONS

Summary

Mathematical tools find numerous applications in differing disciplines. The purpose of the article is to present selected mathematical concepts and their applications in economics as well as other disciplines. These concepts are illustrated with examples.