

Jerzy Mika

Akademia Ekonomiczna w Katowicach

O UOGÓLNIONYCH MACIERZACH ODWROTNYCH

1. Definicje i określenia

Uogólnione macierze odwrotne nazywane też macierzami pseudoodwrotnymi, w roku 1920 amerykański matematyk E.H. Moore (E.H. Moore (1920)), zdefiniował jako następujące granice:

$$A^+ = \lim_{\delta \rightarrow 0} (A^T A + \delta^2 E)^{-1} A^T = \lim_{\delta \rightarrow 0} A^T (A A^T + \delta^2 E)^{-1},$$

gdzie: E – odpowiednia macierz jednostkowa.

W roku 1955 brytyjski matematyk i filozof R. Penrose (R. Penrose (1955)) zdefiniował uogólnione macierze odwrotne alternatywnie, mianowicie jako macierze $A^+ = A^+_{n \times m}$, które dla dowolnych macierzy $A = A_{m \times n}$ spełniają następujący układ czterech aksjomatów nazywanych charakterystyką Penrose'a uogólnionych macierzy odwrotnych: $(A A^+)^T = A A^+$, $(A^+ A)^T = A^+ A$, $A^+ A A^+ = A^+$, $A A^+ A = A$.

Dowodzi się, że dla dowolnej macierzy A istnieje dokładnie jedna uogólniona macierz odwrotna A^+ oraz że powyższe dwie definicje uogólnionych macierzy odwrotnych są równoważne. W związku z tym macierze pseudoodwrotne nazywa się też macierzami odwrotnymi Moore'a-Penrose'a lub macierzami MP-odwrotnymi.

2. Podstawowe własności uogólnionych macierzy odwrotnych

Jeżeli macierz A jest nieosobliwa, to uogólniona macierz odwrotna i macierz odwrotna do niej są identyczne: $(A = A_{n \times n} \wedge \det A \neq 0) \Rightarrow A^{-1} = A^+$,
czyli:

a) dla macierzy nieosobliwych pojęcia uogólnionej macierzy odwrotnej i macierzy odwrotnej są synonimami, a istota tego pojęcia ujawnia się dla macierzy prostokątnych i osobliwych.

b) w teorii i zastosowaniach algebry macierzy, w przypadkach nieistnienia odpowiednich macierzy odwrotnych ich substytutami mogą być uogólnione macierze odwrotne. A ponadto: $(A^+)^+ = A$, $(A^T)^+ = (A^+)^T$, $(\alpha \cdot A)^+ = \alpha^{-1} \cdot A^+$.

3. Zastosowanie uogólnionych macierzy odwrotnych do rozwiązywania układów równań liniowych

W teorii i praktyce stosowania uogólnionych macierzy odwrotnych do rozwiązywania układów równań liniowych postaci:

$$A X = b,$$

gdzie wymiary macierzy A oraz wektorów X i b są dowolne i wynikają z kontekstu, przede wszystkim należy zauważyć, że rozpatrywany układ równań liniowych jest zgodny wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek:

$$A A^+ b = b,$$

co stanowi swoisty substytut klasycznego twierdzenia Kroneckera-Capellego z teorii układów równań liniowych. Ponadto w przypadku zgodności rozpatrywanego układu każdy wektor postaci:

$$\bar{X} = A^+ b + (E - A^+ A) Y,$$

gdzie: Y – dowolny wektor R^n , jest rozwiązaniem rozpatrywanego układu równań liniowych; zbiorem wszystkich rozwiązań tego układu równań liniowych będzie:

$$\bar{D} = \{ \bar{X} \in R^n; \bar{X} = A^+ b + (E - A^+ A) Y \wedge Y \in R^n \},$$

przy czym rozwiązanie szczególne układu równań liniowych, następującej postaci

$$\bar{X}_0 = A^+ b$$

charakteryzujące się minimalną normą, nazywamy rozwiązaniem normalnym rozpatrywanego układu równań liniowych, natomiast rozwiązanie normalne jest jedynym rozwiązaniem rozpatrywanego układu równań liniowych, jeżeli układ ten będzie kramerowski.

4. Rozwiązania uogólnione sprzecznych układów równań liniowych

W przypadku, gdy rozpatrywany układ równań liniowych będzie sprzeczny, każdy określony wyżej wektor $\bar{X}$ będzie uogólnionym rozwiązaniem tego układu w sensie kwadratu normy euklidesowej, czyli minimalizuje on następujący kwadrat normy euklidesowej tzw. wektora odchylenia:

$$v = \|A\bar{X} - b\|_2^2 = \min_{X \in R^n} \{ \|AX - b\|_2^2 \}.$$

Stwierdzamy też, że w rozpatrywanym przypadku zbiór postaci $\bar{D}$ będzie zbiorem wszystkich rozwiązań uogólnionych, w określonym sensie, rozpatrywanego układu równań liniowych. Ponadto analogicznie do zgodnych układów równań liniowych szczególne rozwiązanie uogólnione postaci $\bar{X}_0 = A^+ b$ nazywane będzie normalnym rozwiązaniem uogólnionym.

W konsekwencji powyższych ustaleń można stwierdzić, że:

- dowolny sprzeczny układ równań liniowych rozpatrywanego typu ma nieskończenie wiele rozwiązań uogólnionych postaci $\bar{X}$ lub dokładnie jedno uogólnione rozwiązanie normalne $\bar{X}_0$,
- układy równań liniowych rozpatrywanej postaci są niesprzeczne ze względu na zagadnienie wyznaczania ich rozwiązań uogólnionych w sensie kwadratu normy euklidesowej,
- w przypadku zgodności rozpatrywanych układów, pojęcie rozwiązań uogólnionych pokrywa się z pojęciem rozwiązań tych układów w klasycznym sensie,
- wyznaczanie rozwiązań uogólnionych układów równań liniowych rozpatrywanej postaci można traktować jako uogólnienie klasycznego zagadnienia rozwiązywania układów równań liniowych tego typu.

5. Wyznaczanie uogólnionych macierzy odwrotnych

Wyznaczanie uogólnionych macierzy odwrotnych z podanych wyżej definicji jest słabo efektywne numerycznie, a ponadto można stwierdzić, że w ogólnym przypadku wyznaczanie uogólnionych macierzy odwrotnych jest nieelementarne. W związku z tym, głównie z praktycznego punktu widzenia, na szczególną uwagę zasługują te przypadki wyznaczania uogólnionych macierzy odwrotnych, dla których można uzyskać uogólnioną macierz odwrotną w sposób elementarny, czyli przez zastosowanie wyłącznie podstawowych działań na macierzach. Można tego dokonać między innymi w następujących przypadkach.

1. Jeżeli macierz A jest nieosobliwa, to uogólniona macierz odwrotna i macierz odwrotna do niej są identyczne, czyli:

$$\text{jeżeli } A = A_{n \times n} \text{ oraz } \det A \neq 0, \text{ to } A^{-1} = A^+.$$

W tym przypadku pojęcia uogólnionej macierzy odwrotnej i macierzy odwrotnej są bowiem synonimami.

2. Jeżeli macierz A jest macierzą jednowierszową lub jednokolumnową, to:

$$A^+ = \frac{A^T}{\|A\|_2^2}.$$

3. Dla dowolnej macierzy $A = A_{m \times n}$ prawdziwy jest następujący wzór:

$$[E, A]^+ = \begin{bmatrix} E - A (E + A^T A)^{-1} A^T \\ (E + A^T A)^{-1} A^T \end{bmatrix}.$$

Powyższa własność wskazuje, jak można elementarnie wyznaczyć pewną szczególną uogólnioną macierz odwrotną, często występującą w zastosowaniach.

4. Jeżeli $A = A_{m \times n}$ oraz $\text{rz } A = m$, to: $A^+ = A^T (A A^T)^{-1}$, oraz:
jeżeli $A = A_{m \times n}$ oraz $\text{rz } A = n$, to: $A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$.

W związku z tym dla macierzy rzędu pełnego można zaproponować następujący dwuwariantowy wzór na elementarne wyznaczenie uogólnionej macierzy odwrotnej:

$$A^+ = \begin{cases} A^T (AA^T)^{-1}, & \text{gdy: } m \leq n, \\ (A^T A)^{-1} A^T, & \text{gdy: } m > n. \end{cases}$$

5. W teorii uogólnionych macierzy odwrotnych dowodzi się, że:

$$A^+ = A^T (AA^T)^+ \quad \text{oraz:} \quad A^+ = (A^T A)^+ A^T.$$

W związku z tym dla dowolnej macierzy można zaproponować następujący dwuwariantowy wzór na wyznaczenie uogólnionej macierzy odwrotnej pozwalający na jej wyznaczenie za pośrednictwem wyznaczenia odpowiedniej symetrycznej macierzy Grama minimalnego stopnia:

$$A^+ = \begin{cases} A^T (AA^T)^+, & \text{gdy: } m \leq n, \\ (A^T A)^+ A^T, & \text{gdy: } m > n. \end{cases}$$

Ponadto, jeżeli M jest kwadratową macierzą symetryczną, czyli: $M = M^T$ oraz: $M = VDV^T$, gdzie: $D = [d_{ij}]_{m \times n}$ – diagonalna macierz wartości własnych macierzy M , V – ortogonalna macierz wektorów własnych odpowiadających poszczególnym wartościom własnym macierzy M , to (por. np. A. Albert (1977)):

$$M^+ = VD^{(-1)}V^T,$$

gdzie: $D^{(-1)} = [d_{ij}^+]_{m \times n}$ – diagonalna uogólniona macierz odwrotna dla macierzy D , czyli macierz o następujących elementach diagonalnych:

$$d_{ii}^{(-1)} = \begin{cases} d_{ii}^{-1}, & \text{gdy: } d_{ii} \neq 0 \\ 0, & \text{gdy: } d_{ii} = 0 \end{cases} \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, n.$$

Wobec tego finalnie otrzymujemy następujący dwuwariantowy wzór na wyznaczenie uogólnionej macierzy odwrotnej, pozwalający na jej wyznaczenie za pośrednictwem wyznaczenia odpowiedniej macierzy odwrotnej minimalnego stopnia:

$$A^+ = \begin{cases} A^T V_1 D_1^{(-1)} V_1^T, & \text{gdy: } m \leq n, \\ V_2 D_2^{(-1)} V_2^T A^T, & \text{gdy: } m > n. \end{cases}$$

gdzie: V_1, D_1 – odpowiednie macierze wartości własnych i wektorów własnych macierzy AA^T , V_2, D_2 – odpowiednie macierze wartości własnych i wektorów własnych macierzy $A^T A$.

6. Podsumowanie

Najbardziej istotne i najciekawsze są dotychczasowe próby zastosowania metod uogólnionych macierzy odwrotnych w statystyce matematycznej (por. np. (A. Albert (1977); H. Theil (1979)), ekonometrii (por. np. M. Kosiorowska (1979); H. Theil (1979)) oraz w programowaniu matematycznym (por. np. A. Ben-Israel,

A. Charnes (1968); J. Mikka (1985), (2000)). Bardziej powszechne stosowanie uogólnionych macierzy odwrotnych w procesach zastosowań rachunku macierzowego ogranicza fakt, że wyznaczanie uogólnionych macierzy odwrotnych w ogólnym przypadku jest procedurą nieelementarną i nieobecną w większości systemów informatycznych realizujących obliczenia matematyczne. Istotne z praktycznego punktu widzenia mogą więc być niektóre procedury pozwalające efektywnie wyznaczać uogólnione macierze odwrotne niektórych typów za pomocą wykorzystania wyłącznie elementarnych metod rachunku macierzowego.

Literatura

- A. Albert (1977). *Regresja, pseudoinwersja i rekurentnoje oceniniwanie* Nauka. Moskwa.
- A. Ben-Israel, A. Charnes (1968). *An explicit solution of a special class of linear programming problems*. Operations Research 16.
- M. Kosiorowska (1979). *Estymacja liniowych modeli ekonometrycznych metodą uogólnionych odwrotności macierzy*. Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu 160(182).
- J. Mika (1982). *O pewnej wersji metody macierzy pseudoodwrotnych w programowaniu liniowym*. Przegląd Statystyczny 1.
- J. Mika (1982). *Ob odnom metodie wyczislenia obobszczennych reszeni zadacz linijnogo programirovania i jego primienieniach w planirowani*. Kurzfassungen der Beitrage, Halle-Wittenberg. Mathematik und Kybernetik in der Ökonomie VII
- J. Mika (1985). *On determining optimal generalized solution of different types of linear and nonlinear programming problems by means of pseudoinverse matrix method*. Kurzfassungen der Beitrage. Magdeburg. Mathematik und Kybernetik in der Ökonomie VIII.
- J. Mika (1990). *Uogólnione rozwiązania i korekcje sprzecznych modeli optymalizacyjnych we wspomaganiu procesów podejmowania decyzji ekonomicznych*. Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej w Katowicach. Katowice.
- J. Mika (2000). *Optymalne uogólnione rozwiązania zadań programowania matematycznego z liniowym układem warunków ograniczających w procesach wspomagania podejmowania decyzji*. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej w Gliwicach 1481. Seria: Zarządzanie, z. 2.
- E.H. Moore (1920). *Abstrakt*. American Mathematical Society 26.
- R. Penrose (1955). *A generalized inverse for matrices*. Proceeding Cambridge Philosophical Society 51.
- H. Theil (1979). *Zasady ekonometrii*. PWN. Warszawa.
- M. Warmus (1992). *Uogólnione odwrotności macierzy*. PWN. Warszawa.

ON THE GENERALIZED INVERSE MATRICES

Summary

In the present paper showed various method of elementary calculating of generalized inverse matrices. There has this to make possible the more universal application of generalized inverse matrices to the dissolving of various concrete and utilitarian.