

Piotr Obidziński

Uniwersytet Szczeciński

WPROWADZENIE FUNKCJI UŻYTECZNOŚCI JAKO JEDNEGO Z POJĘĆ PODSTAW TEORII UBEZPIECZEŃ

1. Wstęp

Praca stanowi propozycję wprowadzenia pojęcia funkcji użyteczności w czasie zajęć z przedmiotu podstawy teorii ubezpieczeń jako terminu, na bazie którego dokonuje się konstrukcji miary skłonności do ryzyka. Celem jest uzmysłowienie studentom słabości klasycznej teorii użyteczności w odniesieniu do takich poza-ekonomicznych czynników jak ludzkie skłonności.

2. Funkcja użyteczności jako podstawa oceny skłonności

Poniżej przedstawiony zostanie sposób wyznaczania funkcji użyteczności na podstawie tzw. gry hazardowej. Ogólną zasadą gry jest określanie przez decydenta (osobę zainteresowaną ubezpieczeniem posiadanego dobra) maksymalnej składki, jaką gotów jest zapłacić za pełne ubezpieczenie. Zakłada się, że decydent ma informacje dotyczące prawdopodobieństwa utraty kapitału. W rzeczywistości decydent albo ma konkretną wiedzę na temat ryzyka (np. w ubezpieczeniach OC pojazdów mechanicznych), albo też, nie mając dostępu do tych informacji, dokonuje indywidualnej oceny ryzyka. W każdym jednak wypadku decydent staje przed koniecznością przybliżonego określenia ryzyka.

Podając pierwszą składkę (od całego posiadanego kapitału), decydent określa pierwszy punkt funkcji użyteczności. Następnie podana wielkość składki staje się nowym kapitałem, dla którego decydent znowu podaje maksymalną składkę. W ten sposób powstaje kolejny punkt funkcji. Proces ten jest powtarzany tak długo, aż decydent zrezygnuje z dalszego ubezpieczania kapitału ze względu na jego małą

wartość. W efekcie otrzymujemy kilka wartości funkcji użyteczności pozwalających określić preferencje decydenta. Poniżej opisany został algorytm konstrukcji funkcji użyteczności.

Założmy, że decydent posiadający pewien kapitał w naraża się na stratę losową X , której rozkład jest znany. Jeżeli ma on funkcję użyteczności u , to maksymalną składkę G , jaką gotów jest zapłacić za pełne ubezpieczenie od straty X , można wyprowadzić ze wzoru

$$u(w - G) = E(u(w - X)). \quad (1)$$

Lewa strona oznacza użyteczność płacenia składki G za pełne ubezpieczenie od straty X , prawa zaś oznacza oczekiwaną użyteczność nieubezpieczenia się.

Funkcję użyteczności można wyznaczyć w wyniku przeprowadzenia tzw. gry hazardowej opartej na zależności (1). Dla celów wyznaczenia funkcji użyteczności dobrano punkty początkowe 0 oraz w , gdzie w stanowi cały kapitał, jakim dysponuje decydent. Następnie decydent, znając prawdopodobieństwo p utraty posiadanego kapitału, podaje wielkość składki G_1 tak, aby zachodziła równość

$$u(w - G_1) = p \cdot u(0) + (1 - p) \cdot u(w). \quad (2)$$

Powyższa równość wyraża obojętność decydenta wobec alternatywy zapłacenia składki oraz akceptacji oczekiwanej użyteczności jego kapitału. Lewa strona równości oznacza użyteczność płacenia składki G_1 za pełne ubezpieczenie od straty X , prawa zaś – oczekiwaną użyteczność nieubezpieczenia się.

Decydent podaje zatem maksymalną kwotę G_1 , jaką gotów jest zapłacić za pełne ubezpieczenie od zdarzenia, po którym z prawdopodobieństwem $1 - p$ pozostanie kapitał w lub z prawdopodobieństwem p – kapitał 0.

Na podstawie powyższej równości określamy wartość funkcji użyteczności w punkcie $w_1 = w - G_1$, czyli

$$u(w_1) = p \cdot u(0) + (1 - p) \cdot u(w). \quad (3)$$

Następnie procedurę tę powtarza się, przyjmując

$$w_2 = w - G_2$$

oraz

$$u(w_2) = p \cdot u(w_1) + (1 - p) \cdot u(w). \quad (4)$$

Ogólnie dla $k \geq 2$ wartości funkcji użyteczności $u(w_k)$ wyznaczamy, przyjmując

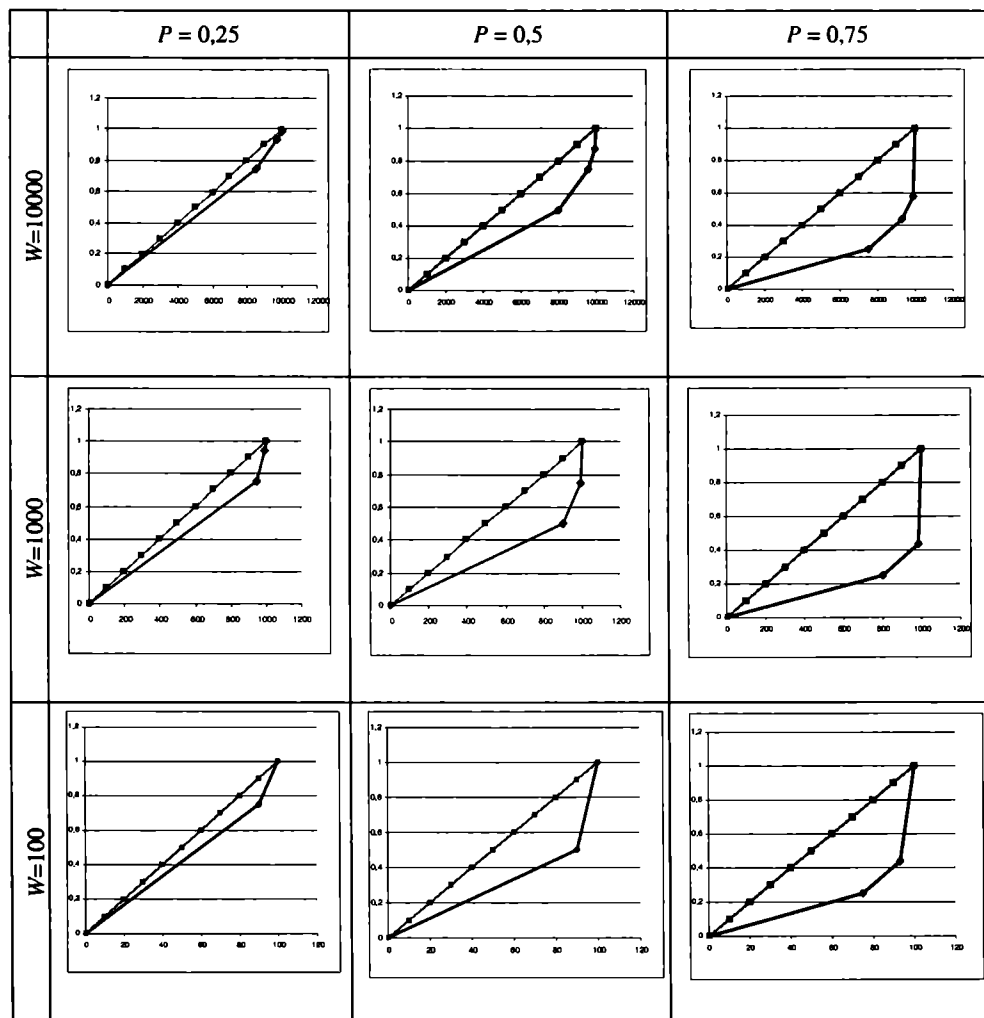
$$w_k = w - G_k,$$

ze wzoru

$$u(w_k) = p \cdot u(w_{k-1}) + (1 - p) \cdot u(w). \quad (5)$$

Jak już wcześniej zaznaczono, decydent podejmuje decyzje w pewnym pasie możliwych rozwiązań zależnie od czynników zewnętrznych oraz wewnętrznych. Rysunek 1 przedstawia kształtowanie się funkcji użyteczności w zależności od tych

czynników. Zasymlowano je przez wprowadzenie trzech możliwych kwot, jakimi dysponuje decydent, oraz trzech możliwych prawdopodobieństw straty dla każdej z kwot. Odpowiadają one rozważaniom Poppera (K. Popper (1996)), że należy wyznaczać prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A w sytuacji B ($p(A, B) = r$). Badanie przeprowadzane jest wśród wszystkich studentów w czasie zajęć z przedmiotu podstawy teorii ubezpieczeń. Rysunek 1 przedstawia funkcje użyteczności dla wybranego losowo studenta.



Rys. 1. Kształtowanie się funkcji użyteczności wybranego decydenta w różnych wariantach sytuacyjnych

Źródło: opracowanie własne na podstawie przeprowadzonej gry.

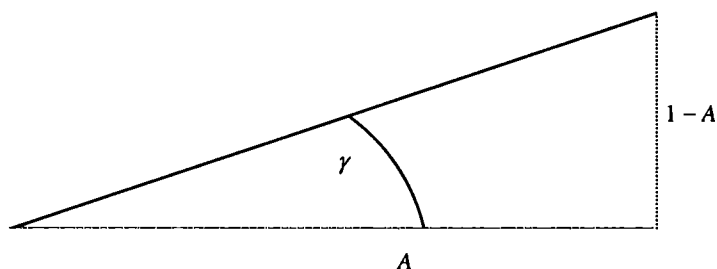
3. Propozycje miar skłonności

Zasadniczym celem wyznaczenia funkcji użyteczności jest stwierdzenie preferencji konsumenta co do konkretnego dobra materialnego lub niematerialnego. Przez preferencję rozumiemy tu skłonność decydenta do otrzymania tego dobra.

Obecnie pojawia się wiele definicji skłonności, u których podstaw leżą rozważania filozoficzne. Niepodważalnym autorytetem w tej dziedzinie jest K. Popper. W swojej pracy (K. Popper (1996)) stwierdza on: „Możemy oszacować wielkość (...) skłonności za pomocą odwołania się do względnej częstości faktycznych zajść tego zdarzenia w wielkiej liczbie rzutów albo, innymi słowy, poprzez stwierdzenie, jak często dane zdarzenie faktycznie zachodzi”. A zatem skłonność mierzyć można za pomocą prawdopodobieństwa:

$$P(x) = \frac{m}{n}. \quad (6)$$

Teorię Poppera rozwija w swoich pracach naukowych J. Hozer. Jego geometryczna interpretacja skłonności opiera się na poglądzie, że skłonność to nachylenie postawy w kierunku czegoś lub kogoś, zwiększające prawdopodobieństwo określonych zdarzeń (J. Hozer (2002), (2003)). Nachylenie to najlepiej ilustruje przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego. Mierzyć je można kątem między przeciwprostokątną a przyprostokątną.



Rys. 2. Graficzna ilustracja skłonności (nachylenia)

Źródło: J. Hozer (2002).

Tangens kąta γ mierzy skłonność

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{1 - A}{A}, \quad (7)$$

gdzie A – frakcja zdarzeń (cech), gdzie występuje interesujące nas zjawisko, $1 - A$ – frakcja zdarzeń (cech), gdzie nie występuje interesujące nas zjawisko.

Im mniej zdarzeń, w których nie występuje interesujące nas zdarzenie, tym większa skłonność.

Statystyczne podejście można wykorzystać przy wyznaczaniu zarówno indywidualnej skłonności człowieka, jak i skłonności zbiorowej (skłonności danej zbior-

rowości ludzkiej). Do opisu skłonności indywidualnej można wykorzystać także teorię użyteczności.

Poniższe rozważania dotyczą badania skłonności indywidualnej. Nie jest to analiza statystyczna, lecz propozycja wykorzystania funkcji użyteczności, która została w obszernym stopniu opisana w literaturze. Dodatkowo celem tych rozważań jest uwypuklenie słabości klasycznej teorii użyteczności i odniesienie się do teorii behawioralnych próbujących uwzględnić czynnik psychologiczny.

Klasyczne metody wyznaczania funkcji użyteczności kapitału opierają się na kapitale, jakim dysponuje decydent (ustalona kwota), oraz prawdopodobieństwie utraty tego kapitału na poziomie 0,5 (jednakowe prawdopodobieństwo utraty i zachowania kapitału).

W rzeczywistości jednak podejmowanie decyzji dotyczących posiadanych dóbr jest czynnością o wiele bardziej złożoną. Ludzie nie zawsze kierują się racjonalnymi przesłankami. Założenie teorii użyteczności, że preferencje konsumenta muszą być racjonalne (tzn. spójne i przechodnie) jest mocne i w rzeczywistości może nie zawsze być spełnione. Kształt funkcji użyteczności zależy od skłonności osoby podejmującej decyzje do ponoszenia ryzyka. W klasycznej teorii użyteczności zakłada się, że jednostka (racjonalna) rozważa poszczególne alternatywy zawsze w kontekście całego swojego majątku – w kategoriach absolutnych. Tymczasem Tversky i Kahneman podkreślają, że ludzi cechuje awersja do strat o natężeniu większym niż radość z zysków tej samej wartości bezwzględnej (A. Tversky, D. Kahneman (1981)). Skrajnym przykładem takiego podejścia decydenta jest stwierdzenie „Nie założę się, ponieważ strata 100 dolarów ciążyłaby mi bardziej niż wygrana 200”, wypowiedziane przez pewnego ekonomistę w odpowiedzi na propozycję P. Samuelsona, dotyczącą uczestnictwa w zadanej grze z możliwą stratą 100 oraz zyskiem 200 dolarów (P. Samuelson (1963)). Ponadto awersja do strat uzależniona jest od relacji między wielkością straty a poziomem całego majątku. Autorzy wprowadzają pojęcie *funkcji wartości*. Według nich centralnym zagadnieniem jest to, iż nośnikami postrzeganej i odczuwanej wartości są **zmiany** w poziomie bogactwa (zyski lub straty), a nie absolutny poziom bogactwa (jak zakłada teoria oczekiwanej użyteczności).

Rozważając skłonność człowieka do ponoszenia ryzyka finansowego (do narażania siebie na poniesienie straty finansowej), należy zwrócić szczególną uwagę na informacje o danym ryzyku, którymi kieruje się osoba. Zgodnie z klasyczną teorią użyteczności do podstawowych informacji należą:

- wartość dobra narażonego na utratę (czynnik wewnętrzny),
- okoliczności, w których podejmowane są decyzje – prawdopodobieństwo straty (czynnik zewnętrzny).

Dlatego, aby prawidłowo opisać użyteczność decydenta, należałoby przyjąć, że nie ma on jednolitej funkcji użyteczności, lecz podejmuje decyzje w pewnym pasie możliwych rozwiązań, zależnie od opisanych powyżej czynników (jego preferencje są „rozmyte”). Ten sam decydent może przejawiać jednocześnie zarówno awersję,

jak i skłonność do ryzyka. Podobne zdanie wyraża Popper, pisząc: „sytuacja zmienia możliwości, a tym samym i skłonność” (K. Popper (1996), str. 24). A zatem do badania skłonności należy, według niego, wykorzystywać prawdopodobieństwa absolutne oraz warunkowe. Popper wyraża opinię, że w sytuacji stabilnej „możemy posługiwać się prawdopodobieństwami absolutnymi lub skłonnościami absolutnymi, dokonawszy niepodważalnie adekwatnego opisu warunków zachodzenia danego zdarzenia.” (K. Popper (1996), str. 26). Zgodnie z tymi słowami prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A wynosi r : $p(A) = r$; gdy okoliczności ulegają zmianie, można powiedzieć, iż r to prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A w sytuacji B : $p(A, B) = r$.

4. Wnioski z przeprowadzonego badania

Funkcję użyteczności wybranego studenta zbudowano w dziewięciu wariantach sytuacyjnych, w zależności od kwoty narażonej na stratę (warunek wewnętrzny – zależny od decydenta) oraz od prawdopodobieństwa straty (wyrażającego warunki zewnętrzne, w których osoba podejmuje decyzję).

Zgodnie z deskryptywną teorią podejmowania decyzji, zaproponowaną przez Kahnemana i Tversky'ego, badaniu należy poddać zmiany skłonności w zależności od zmian w poziomie bogactwa. W tym celu dobrze jest posłużyć się konkretną miarą skłonności. W pracy (P. Obidziński (2004), str. 83) przedstawiono propozycję miary skłonności M , opartą na prawdopodobieństwie geometrycznym:

$$M = \frac{\int_0^w (x - w \cdot u(x)) dx}{\int_0^w x dx}, \quad (8)$$

gdzie: M – miara skłonności; w – kapitał do dyspozycji decydenta; u – funkcja użyteczności kapitału.

Skłonności badanego decydenta wyznaczone zgodnie ze wzorem (8) przedstawiono w tab. 1.

Tabela 1. Skłonności decydenta w różnych warunkach decyzyjnych

	$p = 0,25$	$p = 0,5$	$p = 0,75$
$w = 100$	0,150	0,400	0,649
$w = 1000$	0,211	0,438	0,651
$w = 10\,000$	0,102	0,333	0,604

Źródło: obliczenia własne.

Tabela 2. Przyrosty względne łańcuchowe skłonności decydenta w różnych warunkach decyzyjnych ze względu na wzrost poziomu bogactwa

Wzrost poziomu bogactwa [w %]	$p = 0,25$	$p = 0,50$	$p = 0,75$
bazowy	0%	0%	0%
900%	40,67%	9,50%	0,31%
900%	-51,66%	-23,97%	-7,22%

Źródło: obliczenia własne.

Tabela 3. Przyrosty względne łańcuchowe skłonności decydenta w różnych warunkach decyzyjnych ze względu na wzrost prawdopodobieństwa straty

Wzrost prawdopodobieństwa straty [w %]	bazowy	100%	50%
$w = 100$	0%	166,67%	62,25%
$w = 1000$	0%	107,58%	48,63%
$w = 10\,000$	0%	226,47%	81,38%

Źródło: obliczenia własne.

Decydent w każdej z tych sytuacji wykazywał skłonność do ryzyka (wypukła krzywa użyteczności). Zauważalne jest, że skłonność ta rosła proporcjonalnie do wzrostu prawdopodobieństwa straty (coraz większe odchylenie krzywej użyteczności od linii obojętności, wzrost wartości miary M). Może to wynikać z niewłaściwej oceny zmiany poziomu ryzyka. Decydent wprowadził zwiększoną składkę, ale w sposób niewystarczający w stosunku do wzrostu realnego ryzyka.

Interesujące wydaje się to, że skłonność ta nie miała charakteru monotonicznego ze względu na poziom bogactwa. Decydent przejawiał najmniejszą skłonność do ryzyka finansowego przy poziomie bogactwa 10 000 zł. Wydaje się to naturalne gdyż miał wówczas najwięcej do stracenia.

Wysoki poziom bogactwa (10 000 zł) powoduje rzeczywiste zmniejszenie się skłonności do ryzyka (por. tab. 3). Natomiast przy średnim i niskim poziomie bogactwa (kwoty 100 zł i 1000 zł) decydent wykazywał zbliżony poziom skłonności (jednak wyższy niż w przypadku kwoty 10 000 zł). Przypadek ten potwierdza wnioski Kahnemana i Tversky'ego, że sam poziom bogactwa nie determinuje postrzeganej wartości, lecz że należy uwzględnić także zmiany w jego poziomie oraz relację między wielkością straty a poziomem całego majątku.

W pracy przedstawiono wyniki gry hazardowej dla losowo wybranego decydenta i tylko dla niego można wyciągać wnioski. Ogólnie badaniu poddawani są studenci kierunku „Ekonometria i statystyka” na zajęciach z przedmiotu podstawy

teorii ubezpieczeń Każda z badanych osób samodzielnie wyznacza w trakcie laboratoriów własną funkcję użyteczności oraz skłonność do ryzyka przy wymienionych warunkach. Wnioski statystyczne z badania są następujące:

- Zdecydowana większość studentów (ponad 90%) przejawia skłonność do ryzyka. Studenci jako osoby w większości niepracujące nie mają realnego stosunku do „posiadanych dóbr”, gdyż najczęściej nie są w rzeczywistości ich właścicielami i nie zapracowują na te dobra.
- Skłonność do ryzyka maleje w miarę wzrostu wieku decydentów (analogiczne badanie przeprowadzono wśród osób starszych – studentów studiów zaocznych, gdzie dominowała awersja do ryzyka).

Literatura

- A. Cieślak (2003). *Behawioralna ekonomia finansowa. Modyfikacja paradygmatów funkcjonujących w nowoczesnej teorii finansów*. Narodowy Bank Polski. Warszawa.
- J. Hozer (2002). *Ekonometryczna interpretacja skłonności w ekonomii*. Przegląd Statystyczny 3. Warszawa.
- J. Hozer (2003) *Tempus locus homo casus et fortuna regit factum – zbiór esejów ekonomicznych*. IADiPG. Szczecin.
- J. Hozer, M. Doszyń (2004). *Ekonometria skłonności*. PWE. Warszawa.
- P. Obidziński (2004). *Propozycja miary skłonności do ryzyka finansowego na podstawie funkcji użyteczności*. W: Inwestycje i ubezpieczenia – tendencje światowe a polski rynek. Tom 2. AE. Wrocław.
- W. Ostasiewicz (2000). *Modele aktuarialne*. Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu.
- K. Popper (1996). *Świat skłonności*. Znak. Kraków.
- P. Samuelson (1963). *Risk and uncertainty: A fallacy of large numbers*. Science 98. Str. 108-113.
- A. Tversky, D. Kahneman (1981). *The framing decisions and the rationality of choice*. Science 211. Str. 453-458.

INTRODUCING OF UTILITY FUNCTION AS FUNDAMENTAL IDEA OF INSURANCE THEORY

Summary

In this article author presents the way of introducing utility function at exercises on “Basis of Insurance Theory” subject. Author propose his own idea of gamble leading to construct utility function in different situations defined by capital and risk. Except construct utility function author presents the measure of inclination to risk.