

Henryk Zawadzki

Akademia Ekonomiczna w Katowicach

SYSTEMY ALGEBRY KOMPUTEROWEJ A NAUCZANIE MATEMATYKI I PRZEDMIOTÓW POKREWNYCH

1. O systemach algebry komputerowej

Pierwsze nowoczesne i ogólnodostępne systemy algebry komputerowej¹ (*computer algebra systems* – CAS) pojawiły się na początku lat 80-tych XX wieku. Dzisiaj CAS są nie tylko narzędziem służącym do wykonywania obliczeń naukowych i technicznych; zmieniły one również sposób nauczania matematyki w wyższych uczelniach.

Systemy algebry komputerowej są oprogramowaniem stworzonym przede wszystkim w celu manipulacji formułami matematycznymi i zautomatyzowania trudnych, często nużących algebraicznych przekształceń. Nowa generacja CAS umożliwia również sporządzanie wyrafinowanej grafiki, edycję tekstów oraz tworzenie multimedialnych prezentacji. CAS zawierają także język programowania umożliwiający użytkownikom pisanie własnych procedur. Pierwszy program komputerowy tego typu stworzył we wczesnych latach sześćdziesiątych XX wieku M.J.G. Veltman (laureat nagrody Nobla w dziedzinie fizyki w roku 1999). Program ten nazywał się *SCHOONSCHIP* i został stworzony jako narzędzie wspomagające pracę zespołu fizyków².

¹ W literaturze można też spotkać nazwy: komputerowe systemy algebraiczne (J. Ombach (1999)) lub komputerowe systemy obliczeń symbolicznych (A. Palczewski (1999)).

² Z doświadczeń Veltmana przy pracy nad *SCHOONSCHIP* korzystał m.in. S. Wolfram (twórca programu *Mathematica*), gdy w 1979 roku rozpoczął pracę nad programem SMP – pierwszym nowoczesnym systemem algebry komputerowej.

Do najbardziej znanych systemów algebry komputerowej ogólnego przeznaczenia (*general purpose CAS*) obecnych dzisiaj na rynku należą (w kolejności alfabetycznej): *Derive*, *Maple*, *Mathcad*, *Mathematica*, *Matlab* oraz *Maxima*³. Dominującą pozycję na rynku edukacyjnym wydają się mieć *Maple* i *Mathematica*.

Twórcą programu *Mathematica*, a dokładniej – jego pierwszej wersji, która ukazała się 23 kwietnia 1988 roku, jest S. Wolfram. Kolejne, udoskonalone wersje programu, pisane już przy współudziale liczego grona programistów oraz naukowców różnych specjalności i sprzedawane jako produkt firmy Wolfram Research Inc. z siedzibą w Champaign, IL, USA, stały się światowym standardem w dziedzinie obliczeń naukowych. *Mathematica* jest dziś nieocenionym narzędziem nie tylko dla matematyków i fizyków, lecz także m.in. dla inżynierów różnych specjalności, statystyków, lekarzy, biologów oraz specjalistów z dziedziny biznesu i finansów. Grono licencjonowanych użytkowników tego programu liczy obecnie ponad milion osób. Stosowany jest on do celów dydaktycznych i naukowych w setkach najlepszych wyższych uczelni na całym świecie. Najnowszą wersją programu jest obecnie *Mathematica 5.2*⁴.

2. Nauczanie wspomagane CAS

Stosowanie wspomnianego wyżej oprogramowania przynosi studentom i pracownikom dydaktycznym liczne korzyści oraz wywiera istotny wpływ zarówno na uczenie się, jak i na nauczanie matematyki.

CAS uwalniają studentów i pracowników dydaktycznych od żmudnych i czasochłonnych obliczeń numerycznych lub symbolicznych (mających często jedynie pomocniczy charakter) i pozwalają się skoncentrować na meritum rozważanych problemów. Dają studentom możliwość szybkiego sprawdzenia swoich umiejętności, np. poprawności obliczeń wykonanych uprzednio bez CAS (obliczanie rzędu czy wyznacznika macierzy, odwracanie macierzy, obliczanie granic funkcji, pochodnych, całek itp.). Umożliwiają tworzenie wysokiej jakości dwuwymiarowej i trójwymiarowej grafiki (np. wykresów funkcji, których przebieg należy zbadać, czy trajektorii równań różniczkowych), niekiedy bardzo trudnej lub niemożliwej do otrzymania bez CAS. Mogą również ułatwiać dowodzenie twierdzeń oraz rozwiązywanie zadań o charakterze teoretycznym. Bardziej zaawansowanym użytkownikom umożliwiają pisanie własnych procedur i udostępnianie ich innym *via Mathematica Information Center* lub za pomocą *webMathematica*. Możliwości CAS w zakresie edycji tekstów i prezentacji multimedialnej mogą być pomocne przy przygotowaniu prac seminaryjnych lub dyplomowych, referatów i prezentacji. Jest

³ Zob. np. M.J. Wester (1999).

⁴ Obszerną informację na temat programu *Mathematica* i innych produktów Wolfram Research Inc., a także wiele publikacji poświęconych temu programowi i jego zastosowaniom można znaleźć w Internecie na stronach www.wolfram.com oraz www.mathematica.pl.

bardzo prawdopodobne, że część studentów, poznawszy CAS w trakcie zajęć z matematyki, może stosować to oprogramowanie na innych zajęciach oraz w przyszłej pracy zawodowej. Umiejętność posługiwania się zaawansowanym oprogramowaniem, jakim są CAS, jest również atutem docenianym przez przyszłych pracodawców.

Pracownikom naukowo-dydaktycznym CAS umożliwiają między innymi przeliczanie (bez niepotrzebnej straty czasu) przykładów i zadań, np. przed kolokwium, ćwiczeniami lub wykładem, czy też przygotowywanie własnych, „pasujących” przykładów. Są nieocenioną pomocą w przygotowywaniu materiałów dydaktycznych dla studentów (w wersji pisemnej lub elektronicznej – np. w celu wykorzystania w pracowni komputerowej). Dzięki CAS możliwe jest (wymagające oczywiście sporego nakładu pracy) przygotowanie multimedialnych, interaktywnych wykładów i prezentacji, zawierających grafikę i animacje (matematyki uczymy się, m.in. patrząc!). Prezentowane przykłady i grafikę można oczywiście w dowolny sposób modyfikować i zmieniać, nawet w trakcie trwania wykładu, czy seminarium – w trakcie dyskusji ze słuchaczami.

Na stronach internetowych producentów CAS można znaleźć wiele dobrze opracowanych i darmowych materiałów, które pomagają dydaktykom stosować CAS w trakcie prowadzonych zajęć. Powstaje również coraz więcej książek zawierających wykłady „wspomagane” CAS (w języku polskim godnymi polecenia są m.in. J. Ombach (1999) i A. Palczewski (1999).

Nie ulega wątpliwości, że studenci, aby w pełni wykorzystać możliwości, jakie oferują CAS, powinni najpierw opanować odpowiednie fragmenty teorii (np. analizy matematycznej czy algebry) i nauczyć się rozwiązywać zadania bez CAS. Opanowanie obsługi CAS (przynajmniej w podstawowym zakresie) zajmuje coraz mniej czasu i jest coraz łatwiejsze. Istnieje bowiem tendencja do maksymalnego jej upraszczania, m.in. przez stosowanie palet z symbolami oraz dodawanie do programów bardzo rozbudowanych i zawierających wiele gotowych przykładów systemów pomocy.

Oczywiście może się zdarzyć, że część studentów nie będzie widziała potrzeby uczenia się np. reguł różniczkowania, metod całkowania czy obliczania wyznaczników, skoro mogą otrzymać wyniki, „klikając” w klawiaturę. Niektórzy mogą również bezkrytycznie podchodzić do otrzymanych za pomocą programów rezultatów, nie zauważając nonsensów, które mogą być np. spowodowane błędnym wprowadzeniem danych czy nieodpowiednio dobranym zakresem zmienności zmiennych.

3. Uwagi końcowe

Powyższe rozważania mają oczywiście sens tylko wtedy, gdy pracownicy i studenci posiadają wspomniane wyżej oprogramowanie lub też mają do niego swobodny dostęp. W Polsce wysokie ceny tych programów są ciągle jeszcze największą przeszkodą na drodze do ich zastosowania w procesie dydaktycznym na

wyższych uczelniach. Pewnym „światelkiem w tunelu” mogą być wprowadzone niedawno przez producentów wersje semestralne i roczne tych programów, dostępne dla studentów za cenę podręcznika akademickiego, oraz perspektywa (dość mglista na razie) unijnych grantów przeznaczonych na cele dydaktyczne. Mniejsze koszty licencji na 10-20 stanowisk umożliwiłyby – na wybranych kierunkach czy specjalnościach – prowadzenie zajęć z matematyki (algebry, analizy, równań różniczkowych, ekonomii matematycznej itp.) wspomaganych komputerowo, tak jak to się już robi m.in. na zajęciach ze statystyki, ekonometrii, prognoz i symulacji czy z badań operacyjnych.

Autor jest zdania, że umiejętność posługiwania się CAS powinno być dla studentów uczelni technicznych i ekonomicznych czymś tak naturalnym jak stosowanie edytora tekstu czy arkusza kalkulacyjnego. Aby tak się mogło stać, oprócz wspomnianych już funduszy potrzebne jest również pozytywne nastawienie pracowników naukowo-dydaktycznych i gotowość podjęcia się przez nich dodatkowych obowiązków.

Literatura

- J. Ombach (1999). *Wykłady z równań różniczkowych wspomagane komputerowo „Maple”*. Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego. Kraków.
- A. Palczewski (1999). *Równania różniczkowe zwyczajne. Teoria i metody numeryczne z wykorzystaniem komputerowego systemu obliczeń symbolicznych*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne. Warszawa.
- M.J. Wester (1999). *Computer Algebra Systems: A practical Guide*. John Wiley & Sons. Chichester, UK.

COMPUTER ALGEBRA SYSTEMS IN TEACHING MATHEMATICS AND RELATED SUBJECTS

Summary

Computer Algebra Systems (CAS) are type of software package that is used in manipulation of mathematical formulae. The main purpose of this article is to provide arguments justifying thesis that the role of CAS as a tool supporting didactic process should increase. In author's opinion the ability to use CAS should become as common among students, as ability to use word processors, spreadsheets and Internet. The article contains information about some well known CAS and their capabilities. It also describes benefits students and lecturers can achieve using this kind of software. The article ends up with some remarks on accessibility of CAS and perspectives of their use in teaching mathematics and related subjects at polish universities.