

Nr 1117

PRACE NAUKOWE

Akademii Ekonomicznej
im. Oskara Langego we Wrocławiu

Dydaktyka matematyki

Redaktor naukowy
Antoni Smoluk

Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej
im. Oskara Langego we Wrocławiu
Wrocław 2006



Komitety Redakcyjne

Andrzej Matysiak (przewodniczący),
Tadeusz Borys, Jan Lichtarski, Adam Nowicki, Zdzisław Pisz,
Waldemar Podgórski, Wanda Ronka-Chmielowiec, Jan Skalik, Stanisław Urban

Recenzenci

Marian Matłoka, Józef Stawicki

Redaktor Wydawnictwa

Aleksandra Śliwka

Korektor

Barbara Cibis

Projekt okładki

Beata Dębska

Kopiowanie i powielanie w jakiegokolwiek formie
wymaga pisemnej zgody Wydawcy

© Copyright by Akademia Ekonomiczna we Wrocławiu
Wrocław 2006

PL ISSN 0324-8445

Druk i oprawa: Zakład Graficzny AE we Wrocławiu. Zam. 422/06

Spis treści

Antoni Smoluk: Słowo wstępne	7
Marek Biernacki: Wychowanie – droga do wolności czy do zniewolenia. Ryzyko wychowawcze	11
Piotr Chrzan: Program, nauczanie i weryfikacja wiedzy z przedmiotu zastosowania matematyki w finansach i bankowości	17
Piotr Dniestrzański, Jerzy Sacała: Kilka przykładów niestandardowych rozwiązań zadań z rachunku prawdopodobieństwa	26
Ewa Drabik: Czy istnieje optymalna metoda prowadzenia seminarium magisterskiego? ...	33
Małgorzata Guzowska: Dyskretny chaos w systemach ekonomicznych	40
Anna Janiga-Ćmiel: Wykorzystanie modelu różnicowego do analizy cykliczności wydatków budżetu państwa w zależności od dochodów	49
Alina Jóźwikowska, Wacława Tempczyk: Sprawdziany testowe z matematyki – sposób na głębsze zrozumienie i utrwalenie wykładanego materiału	58
Jacek Juzwiszyn, Andrzej Krzywicki: Równania hydrodynamiki a modele ekonomiczne	69
Halina Klepacz, Elżbieta Porazińska, Elżbieta Żółtowska: Intuicja i precyzja w kształceniu matematycznym ekonomisty	77
Halina Klepacz, Elżbieta Porazińska, Elżbieta Żółtowska: Poprawność i precyzja treści matematycznych w podręcznikach ekonomii	84
Ludomir M. Laudański: Jak uczyć statystyki? – propozycja	90
Arkadiusz Maciuk: Metryki w uczeniu ekonomii	106
Andrzej Malawski: O aksjomatyzacji ekonomii – uwagi na półwiecze nowoczesnej teorii równowagi	114
Adrianna Mastalerz-Kodzis, Ewa Pośpiech: Wybrane pojęcia matematyczne i ich interpretacje w ekonomii	122
Jerzy Mika: O uogólnionych macierzach odwrotnych	131
Piotr Obidziński: Wprowadzenie funkcji użyteczności jako jednego z pojęć podstaw teorii ubezpieczeń	136
Krzysztof Piasecki, Marek Serafin, Łukasz Świątczak: Analiza porównawcza strategii inwestowania na GPW w Warszawie	144
Wanda Ronka-Chmielowiec: Metody aktuarialne w programach studiów na kierunku Finanse i Bankowość Wydziału Zarządzania i Informatyki Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu	155
Beata Stolorz: Wykorzystanie własności funkcji liniowej do badania strategii opcyjnych ..	164
Aleksander Strasburger: O koncepcji i doświadczeniach z wykładu „Wstęp do analizy funkcjonalnej i wypukłej” dla kierunku Ekonometria i Informatyka w Szkole Głównej Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie	172
Joanna Trzęsiok, Michał Trzęsiok: Metryki i ich zastosowanie w metodach wielokryterialnych wspomagających podejmowanie decyzji	180
Andrzej Wilkowski: O krzywych eliptycznych	188
Henryk Zawadzki: Systemy algebry komputerowej a nauczanie matematyki i przedmiotów pokrewnych	194

Summaries

Marek Biernacki: Education to freedom or constraint. The risk of education	16
Piotr Chrzan: Curriculum, education and knowledge validation on math application in finance and banking	25
Piotr Dniestrzański, Jerzy Sacala: Some non-standard examples of tasks solution of probability calculus	32
Ewa Drabik: Does it exist an optimal method of leading a seminar for candidates for master's degree?	39
Małgorzata Guzowska: Discrete chaos in economic systems	48
Anna Janiga-Ćmiel: Application of differential model to the analysis of revenue- -based state budget expenditure periodicity	57
Alina Jóźwikowska, Wacława Tempczyk: Mathematical test exercises – a method to understand deeper and consolidate knowledge	68
Jacek Juzwiszyn, Andrzej Krzywicki: Hydrodynamic equations – economic models? .	76
Halina Klepacz, Elżbieta Porazińska, Elżbieta Żółtowska: Intuition and precision in mathematical education of an economist	83
Halina Klepacz, Elżbieta Porazińska, Elżbieta Żółtowska: Correctness and preci- sion of mathematical content in economic manuals	89
Ludomir M. Laudanski: How to teach statistics? – a proposal	104
Arkadiusz Maciuk: Metrics in teaching of economics	113
Andrzej Malawski: Axiomatization of economics. Remarks in connection with half-century of modern theory of equilibrium	121
Adrianna Mastalerz-Kodzis, Ewa Pośpiech: Selected mathematical tools and their hypothetical applications	130
Jerzy Mika: On the generalized inverse matrices	135
Piotr Obidziński: Introducing of utility function as fundamental idea of insurance theory	143
Krzysztof Piasecki, Marek Serafin, Łukasz Świątczak: Comparative analysis of strategies of investment on Warsaw Stock Exchange	154
Wanda Ronka-Chmielowiec: Actuarial methods in finance and banking programme study of management and computer science faculty at Wrocław University of Economics.....	163
Beata Stolorz: Use of properties of the linear function in the study of option strategies ...	171
Aleksander Strasburger: On concepts and experiences gained by conducting lectures “An introduction to functional and convex analysis” addressed to students of computer sciences and econometrics at the Warsaw Agricultural University	179
Joanna Trzęsiok, Michał Trzęsiok: Matrices and their applications to the multicrite- ria optimization supprting the decision makingprocess	187
Andrzej Wilkowski: On elliptic curves	193
Henryk Zawadzki: Computer algebra systems in teaching mathematics and related subjects.....	197

SŁOWO WSTĘPNE

*Co dziś zrobiłeś dobrze,
jutro zrób to lepiej.*

Matematyka jest wiedzą o świecie fizycznym w ujęciu abstrakcyjnym. Istota matematyki tkwi w utożsamianiu obiektów różnej natury, lecz takiej samej struktury. Ta identyfikacja jest zasadniczą barierą na drodze do królestwa matematyki. Dla prawdziwego matematyka ciągi arytmetyczne i geometryczne są tym samym, widzi on bowiem analogie pomiędzy analogiami. Analogią jest homomorfizm – pomiar matematyczny. Podobno nie ma królewskiej drogi do matematyki; nie ma ideału, ale dążyć do ideału trzeba – nie należy ustawać w szukaniu prostej i gładkiej drogi do świata nauki. Matematycy konstruują obiekty idealne, których w naturze nie ma. Nie ma jednej matematyki. Każdy problem naukowy niesie swoją specyficzną matematykę pozwalającą go rozwiązać najprościej. Matematyka studentów ekonomii jest nieco inna niż matematyka specjalistów od mechaniki lotu. Każda teoria jest pusta bez bogatego zasobu przykładów. Matematyka to nie twierdzenia, definicje i zadania, to prawa nauki wzbogacające wiedzę o świecie. Wiemy, jak jest, i na tej podstawie możemy przewidywać, co będzie. Dobrze również posiąść umiejętność tworzenia scenariuszy potrzebnych szczególnie wtedy, gdy nie znamy praw: żyć przecież jakoś trzeba. Modele to mosty pontonowe – budowle czasowe, służące celom doraźnym; nie są to prawdy wieczne, niezmiennie. Matematyka ekonomiczna jest w pierwszej kolejności algebrą liniową, a następnie analizą. Matematyka zwiększa moment siły i wydajność pracy.

Postęp dydaktyki jest pochodną postępu nauki. Osiągnięcia trudne dla pokolenia twórców i odkrywców stają się oczywiste i naturalne dla ich wnuków. Nauka, a szczególnie matematyka, wymaga okresowego przeplanowania. Zdobycie nowych szczytów pozwala z wyższego punktu widzenia spojrzeć na całość, rozjaśnić ciemne doliny. Niektóre działy matematyki mają fundamentalne znaczenie dla nauki. Należy tu niewątpliwie teoria wyznaczników i form różniczkowych, teoria równań algebraicznych oraz szeregi ortogonalnych i równań różniczkowych. Istnieje także wiedza salonowa i matematyka salonowa. Należenie do kręgu wtajemniczonych zawsze nobilituje. Wrocławski matematyki Witold Wolibner widział w teorii wyznaczników szczyt abstrakcji i najtrudniejszy dział algebry. Pewnie coś w tym jest, bo wyznaczniki orientują przestrzeń;

przestrzenie wymiaru nieskończonego nie mają orientacji; bez orientacji nie ma całek na rozmaitościach.

Matematyka jest podstawą wszystkich nauk i kluczem do nich. Tam, gdzie jest nauka, z konieczności zawsze jest matematyka. Powszechnie matematyka kojarzy się z językiem symbolicznym. Owszem, język symboliczny jest ważną częścią nauki, ale nie stanowi jej istoty, podobnie jak notacja muzyczna ma znikomy wpływ na walory emocjonalne utworu. Zgrabnie dobrana symbolika i adekwatne słownictwo ułatwiają badanie i mają zasadniczy wpływ na dydaktykę. Każda nauka jest o czymś, ma podkład w świecie fizycznym; nie ma nauki o niczym.

Matematyka w formie abstrakcyjnej ogniskuje w sobie wszystkie konkretne dyscypliny. Twierdzenie matematyczne weryfikuje doświadczenie. Prawo Pitagorasa wykryli budowniczowie. Istotą matematyki wykładu jest piękno formalne, ekonomia myśli oraz głębokie i liczne zastosowania; jest to wiedza klasyczna, trwała i profitująca.

Matematyka jest wszędzie tam, gdzie jest nauka. Litery w alfabecie Braille’a są macierzami:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

o trzech wierszach i dwóch kolumnach, których elementy są jedynkami lub zerami: jedynka oznacza wypukłość, zero – brak wypukłości. Każda decyzja jest pewnym wyważonym poglądem, który w naszej opinii przyniesie największą korzyść. Testator zapisał matce jedną trzecią majątku, gdy urodzi syna, i dwie trzecie, gdy córkę, a resztę majątku przeznaczył mającemu się pojawić potomkowi. Urodziły się bliźnięta: chłopiec i dziewczynka. Jak podzielić majątek pomiędzy matkę i dzieci? Jest to zadanie znane prawnikom starożytnego Rzymu. Jeden z nich – Salvianus – podał rozwiązanie: $\frac{4}{7}$ dla syna, $\frac{2}{7}$ dla matki i $\frac{1}{7}$ dla córki. Jest to rozwiązanie prawnicze; rozwiązanie matematyczne jest inne: $\frac{1}{3}$ dla syna, $\frac{1}{2}$ dla matki i $\frac{1}{6}$ dla córki. Prosta analiza logiczna właśnie do tego wyniku prowadzi jednoznacznie; istotna jest wypukłość. Problem sprawiedliwego podziału jest zadaniem bardziej matematycznym niż etycznym, moralnym czy prawnym.

Nauka ma kościec matematyczny. Józef Gołuchowski – wybitny, choć zapomniany polski filozof – wywodził wszystkie nauki z tęsknoty do Boga. Myśl ta nieobca jest Pitagorejczykom. Uprawianie nauki w szkole pitagorejckiej było tożsame z poświęceniem się służbie bożej. Nauka oczyszcza i uszlachetnia, podnosi w dostępne nielicznym regiony ducha. Nauka dla Pitagorejczyków jest modlitwą, obcowaniem z Istotą Najwyższą, jest tajemnicą udzieloną wybranym. Nauka jest wiarą w ład przyrody i jego poznawalność. Problem zawiera w sobie język i narzędzie. Najpierw konkretne zadanie, później abstrakcja i uogólnienia. John Keynes uważał, że zawód ekonomisty łączy w sobie trzy umiejętności:

matematyka, męza stanu i mędrca. Równanie ekonomistów jest natury probabilistycznej – wypukłą kombinacją matematyki, polityki i filozofii:

$$E = \frac{4}{7}M + \frac{2}{7}P + \frac{1}{7}F.$$

Ekonomiczna jedność jest w $\frac{4}{7}$ wiedzą – matematyką, w $\frac{2}{7}$ praktyczną umiejętnością działania, sztuką zarządzania – polityką, wreszcie w $\frac{1}{7}$ refleksją nad tym, po co się żyje i co robi się dobrego dla bliźnich – mądrością. Równanie ekonomistów ma za podstawę Keynesa; współczynniki wypukłej kombinacji odgadł autor niezależnie od rozwiązania Salvianusa. Zestawimy je z głośnym równaniem telegrafistów:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + p \frac{\partial u}{\partial t} + qu;$$

porównanie wzmacnia siłę oddziaływania i jest swego rodzaju narzędziem mnemotechnicznym.

Obszerne sprawozdanie z VII konferencji „Nauczanie matematyki i przedmiotów pokrewnych na studiach ekonomicznych” ukazało się w *Mathematical Economics* 9 pióra doktora Andrzeja Misztala – przewodniczącego komitetu organizacyjnego, w skład którego oprócz niego wchodził jeszcze doktorzy: Piotr Dniestrzański, Jacek Juzwiszyn, Arkadiusz Maciuk, Jerzy Sacała. Dziękuję im wszystkim za wysiłek włożony w organizację konferencji. Dziękuję autorom za ciekawe referaty, dziękuję wszystkim uczestnikom za udział w konferencji, za troskę o jakość nauczania najważniejszego przedmiotu studiów ekonomicznych: matematyki. Za wszystkie niedociągnięcia organizacyjne odpowiada tylko i wyłącznie kierownik Katedry Matematyki Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu, która konferencję organizowała. Dziękuję pani mgr Elżbiecie Szlachcic za pracę nad ujednoliceniem i przygotowaniem referatów do druku, dziękuję Wydawnictwu za wysiłek włożony w staranne wydanie tych użytecznych materiałów konferencyjnych. Zapraszam w imieniu przyszłych organizatorów na VIII konferencję, która – jeśli Bóg pozwoli – odbędzie się w 2010 roku również we Wrocławiu.

Wrocław, 31 maja 2006 roku

Antoni Smoluk