

Biblioteka
Politechniki Wrocławskiej

Biblioteka Główna i OINT
Politechniki Wrocławskiej



100100247495

▣ **EISENBETON** ▣
RAHMEN u. GEWÖLBE

VON

H. SCHLÜTER

VERLAG VON **HERMANN MEUSSER**
BERLIN

Biblioteka
Politechniki Wrocławskiej

~~L 823 kl~~

also 1689.

32

B 540

— Eisenbetonbau — Rahmen und Gewölbe

Ein ausführliches Lehrbuch der praktischen Statik
einfacher und mehrstieliger Rahmen
auf dem Grundsatz der virtuellen Arbeit

L 833 14

nebst einem

Anhang über die Elemente der Einflußlinienlehre für
vollwandige Träger

Mit vielen vollständig durchgeführten Zahlenbeispielen,
400 Abbildungen und 2 Tafeln

Von

H. Schlüter

Zweite, vermehrte und verbesserte Auflage



Berlin

Verlag von Hermann Meusser

1920

Alle Rechte vorbehalten,
auch das der Übersetzung in fremde Sprachen.
Copyright 1919 by Hermann Meusser, Berlin.



Insl. 5637.

354285L/1

ak. 5637/49

Seinem ehemaligen Chef
Herrn Dr. - Ing. h. c. M. Koenen,
Baudirektor der A.-G. für Beton- und Monierbau,
gewidmet vom Verfasser.

Vorwort zur ersten Auflage.

Die statische Unbestimmtheit wird immer mehr zu einer charakteristischen Eigentümlichkeit der Eisenbetonbauweise, das schnelle Umspringen mit ihr immer mehr zu einem Bedürfnis weiter Fachkreise, so daß schon mehrere Autoren daraus Anlaß genommen haben, spezielle Arbeiten über die biegungsfesten Stabzüge zu veröffentlichen — abgesehen von den fortlaufenden Neuerscheinungen in den Zeitschriften.

Viele, die sich — eigentlich nur im sicheren Besitze der Elementarkenntnisse der Statik — für den Eisenbetonbau spezialisiert haben, sehen sich im Laufe ihrer Praxis bald vor Aufgaben gestellt, die ihre Kräfte übersteigen, ohne daß sie mit Hilfe der umfangreichen Arbeiten unserer großen Statiker imstande wären, sich die sehr erwünschte Abrundung ihrer Fachbildung zu verschaffen, weil diese zuviel voraussetzen. Auch mancher vollkommen für sein Spezialfach vorbereitete jüngere Eisenbetoningenieur mußte sich bisher doch erst langsam zu einer gewissen Klarheit in der Anwendung des Gelernten auf die Aufgaben der Praxis hindurcharbeiten.

Die Folgen sind mechanische Anwendung unverständener Formeln, die als letztes Hilfsmittel aus Taschenbüchern und Kalendern entnommen werden, und anschließend konstruktive Mißgriffe.

Diesem Übelstand möchte Verfasser mit seinem Buch abhelfen; eine sichere Beherrschung der in Frage kommenden Gesetze, die doch schließlich allen Abhandlungen zugrunde liegen, muß dem ernst Forschenden das Verständnis für die schwierigeren Aufgaben eröffnen, so daß er sich alle einschlägigen Arbeiten bald zunutze machen kann.

Verfasser bringt deswegen nach der Einleitung, die — zunächst in Kürze von den statisch bestimmten Bauwerken handelnd — die statische Unbestimmtheit an mehreren Beispielen bespricht und die Notwendigkeit der Kenntnis der elastischen Formänderungen zur Lösung derselben erörtert, im

Abschnitt I die Berechnungsverfahren auf Grund rechnerischer Ermittlung der Formänderungen und im

Abschnitt II die Berechnungsverfahren auf Grund zeichnerischer Ermittlung der Formänderungen.

Jeder Abschnitt beginnt mit einem Abriß der Elastizitätslehre und geht dann zur Berechnung statisch unbestimmter Systeme über.

Im ersten Abschnitt bringt die Elastizitätslehre zunächst die Formänderungsberechnungen sowohl auf Grund elementarer Ableitungen wie mit Hilfe der Arbeitsgesetze. Es werden die Gleichungen für Formänderungsarbeit und Verschiebungsarbeit abgeleitet, und es wird schließlich nach dem einfachen Prinzip der virtuellen Verrückungen die Brauchbarmachung des Gesetzes der Verschiebungsarbeit für die Ermittlung von Formänderungen und statisch unbestimmten Größen bei den verschiedensten Fällen der Auflagerung gezeigt.

In der eigentlichen Rahmen- und Gewölbetheorie schließt Verfasser sich dann möglichst der Literatur an und hofft so dem Schüler die Fähigkeit zu vermitteln, sich auf dieser Grundlage selbständig weiterzubilden.

Ganz besonders werden die Anregungen befolgt, die Herr Prof. Robert Otzen in seinem Buche: „Praktische Winke zum Studium der Statik“ gegeben hat. Es soll also „Verminderung der Gedächtnisarbeit, Belebung der Verstandestätigkeit, Begreifen und Beherrschen der Gesetze das Ziel des Studierenden sein, nicht Auswendiglernen von Formeln und Gleichungen oder bequeme Zusammenstellung von Tatsachen ohne Begründung“ Nur die völlige Klarheit in der Ableitung ist geeignet, die Konstruktionsprinzipien für das Detail klar zur Erkenntnis zu bringen.

Die Bedürfnisse des Praktikers werden berücksichtigt durch die bis zu Ende durchgeführten Rechnungen und die steten Bemerkungen über die Brauchbarkeit dieses oder jenes Systems. Der Anschluß an das Handbuch für Eisenbetonbau ersparte die Angabe weiterer konstruktiver Einzelheiten.

Von dem Prinzip der Einflußliniengleichungen bei der Bestimmung der statisch unbestimmten Größen ist stets Gebrauch gemacht worden, und zwar sowohl bei der Rahmen- als auch bei der Gewölbeberechnung. Ebenso wurde auch die Deutung der Integrale und die damit verbundene große Abkürzungsmöglichkeit jeder Rechnung stets gezeigt.

Da es im übrigen gegenüber den sonstigen Voraussetzungen für die Anwendung der Elastizitätstheorie auf statisch unbestimmte Systeme des Eisenbetonbaues oft ungerechtfertigt erscheint, den Hauptsatz stets in vollständiger Form zu gebrauchen, so ist Ver-

fasser darauf bedacht gewesen, nach Vorführung der vollständigen Ableitungen, Kürzungen anzuwenden da, wo es angebracht erschien.

Für den Brückenbau ist eine sichere Kenntnis der statischen Verhältnisse gelenkloser Bögen unter den verschiedensten Einflüssen erforderlich; hier erläuterte Verfasser das seit langer Zeit bekannte und grundlegende Verfahren von Prof. Mörsch.

Den Abschnitt über die erforderlichen und ausreichenden Elemente der höheren Mathematik hat Verfasser hinzugefügt, um zu zeigen, mit wie wenig Kenntnissen aus diesem Gebiete man in den Aufgaben der Statik gemeinhin auskommt, und wie leicht die grundlegenden Rechnungsarten der Differential- und Integralrechnung auch von solchen zu verstehen sind, die sich vielleicht noch nicht damit beschäftigt haben. —

Auf den gegebenen Grundlagen hätten ohne große Mühe mehr Spezialfälle und die Lösung schwierigerer Aufgaben aufgebaut werden können; jedoch mußte sich Verfasser hierin aus Rücksicht auf den Umfang des Buches Beschränkung auflegen; insbesondere mag es einer weiteren Auflage überlassen bleiben, den II. Abschnitt über die zeichnerische Behandlung noch weiter auszubauen. Es ließen sich später auch noch zu den einzelnen Kapiteln Literaturnachweise über solche Arbeiten und Aufsätze anbringen, die für den Leser dieses Buches ohne weiteres verständlich sind. —

Ich möchte noch auf mein gleichzeitig erschienenenes Buch „Eisenbetonbau, Säule und Balken“ hinweisen. Es soll dem Anfänger die grundlegenden Rechnungsarten des Eisenbetonbaues als Quelle für alle möglichen Anwendungsformen vorführen.

Zum Schluß spreche ich Herrn Robert Gsell, meinem früheren Assistenten, für seine verdienstvolle Hilfe meinen herzlichsten Dank aus.

Im Juni 1913.

Hans Schlüter.

Vorwort zur zweiten Auflage.

Im Vorwort zur ersten Auflage bemerkte ich, daß auf den vorgetragenen Grundlagen ein weiterer Ausbau des Buches leicht zu erzielen sei. Die vorliegende neue Auflage enthält die gedachten Erweiterungen. Hinzugekommen sind die Abschnitte: „Beliebig gelagerte einfache Rahmen“ (S. 189—194), „Mehrstielige Gelenkrahmen mit Pendelstützen“ (S. 195—202), „Mehrstielige Gelenkrahmen mit steif angeschlossenen Stützen“ (S. 203—222) und „Eingespannte mehrstielige Rahmen“ (S. 271—285) sowie die mehr der Übersicht dienenden Abschnitte: „Allgemeinere Fassung der Elastizitätsbedingungen“ (S. 286—297) und „Höhere Grade statischer Unbestimmtheit und ihr praktischer Wert“ (S. 324—331). Neu bearbeitet und erweitert wurden die Abschnitte „Eingespannte einfache Rahmen“ (S. 223—259), „Geschlossene Rahmen“ (S. 260—270) und „Mehrstielige Rahmen unter Zugrundelegung statisch unbestimmter Hauptsysteme“ (S. 298—323), dieser durch Hinzufügung des Kapitels „Der durchlaufende Träger als Hauptsystem“ (S. 316—323). Ergänzt wurde der Abschnitt „Elastizitätslehre“ insbesondere durch die Ableitung der Clapeyronschen Gleichung nach der Biegelshre (S. 38—45) und nach der Arbeitsgleichung (S. 87—90) sowie durch Hinzufügung eines Absatzes über die Zulässigkeit der Berechnung von Eisenbetonkonstruktionen nach der Elastizitätslehre (S. 57—59). Zur Ergänzung der gelegentlich vorgeführten Beispiele, die durchweg von einer bereits vorliegenden Rahmenachse und bekannten Stärkeverhältnissen ausgehen, behandelt in Kürze Kap. XVIa (S. 182—188) das Thema „Entwurfsvorschläge und Feststellung der Rahmenachse“.

Nach dem alten Grundsatz ist größter Wert gelegt auf das Hervortreten der Gesetzmäßigkeiten in der Herleitung der statischen Beziehungen und anschauliche, über den Einzelfall hinausgehende Darstellung des Stoffes. Im Abschnitt „Allgemeinere Fassung der Elastizitätsbedingungen“ ist der Gesetzmäßigkeit, der die Berechnung aller Rahmenwerke unterliegt, zusammenfassender Ausdruck verliehen. Die Entbehrlichkeit der Ausführung von Integrationen, die schon bei den in der 1. Auflage behandelten einfachen Fällen

überall hervortrat, erweist sich damit als unbeschränkt in der Rahmenberechnung.

Der der ersten Auflage beigegebene Anhang über die Elemente der höheren Mathematik für den Bedarf des Statikers ist inzwischen als selbständiges Büchlein im gleichen Verlage erschienen¹⁾.

Der die zeichnerische Ermittlung der Formänderungen und anschließende Berechnungsverfahren behandelnde zweite Teil meines Buches, 1. Auflage, wird als besonderer Band in gehöriger Erweiterung erscheinen; praktisch ist die zeichnerische Behandlung schon in vorliegendem Bande bei der Berechnung der Gewölbe (S. 354 und 377 u. f. mit Tafel II) gezeigt, wo sie zufolge fortwährenden Wechsels der Querschnittsstärke vornehmlich am Platze ist. In den anderen hier behandelten Fällen dürfte die zeichnerische Lösungsweise der vorgetragenen sehr einfachen analytischen gegenüber kaum einen Vorteil voraushaben.

Möchten alle, die durch ihre Nachfragen und Vorausbestellungen dem Verlage mit die Veranlassung gegeben haben, diese neue Auflage herauszugeben, ihre Erwartungen auch hinsichtlich der Erweiterungen erfüllt finden. Die Herausgabe einer in Wort und Bild so stark erweiterten Neuauflage in einer für das Baugewerbe im allgemeinen so aussichtsarmen und für die Sache selbst so teuren Zeit ist trotzdem ein neuer Beweis für die großzügige Haltung der Firma Hermann Meusser in kurz gesagt allen Fragen des Verlagsgeschäftes, von der bisher meine Arbeit in förderlichster Weise getragen war und über die ich gern dankend quittiere.

Berlin-Friedenau, im Juli 1919.

H. Schlüter.

¹⁾ Anzeig und Inhaltsverzeichnis am Schluß.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Einleitung.	
Kapitel I. Gleichgewichtsbedingungen, Auflagerungsarten und Beispiele für statisch bestimmte Bauwerke	1
Gleichgewichtsbedingungen	1
Statisch bestimmte Bauwerke	3
Auflagerungsarten	4
Auflagerungsarten im Beton- und Eisenbetonbau	7
Beispiele für äußerlich statisch bestimmte Bauwerke	8
Der einfache Balken	8
Der einseitig eingespannte Träger	12
Der Dreigelenkbogen	13
Der Gerberträger	14
Kapitel II. Die statische Unbestimmtheit, Wahl des statisch bestimmten Hauptsystems und der statisch nicht be- stimmbaren Größen	14
Der Grad der statischen Unbestimmtheit	14
Wahl des statisch bestimmten Hauptsystems und der statisch nicht bestimmbaren Größen	18
Kapitel III. Allgemeines über elastische Formänderungen	20
Elastizitätslehre.	
Kapitel IV. Formänderungsberechnungen auf Grund ele- mentarer Ableitungen	23
Die rechnerische Bestimmung der 3 Arten der elastischen Form- änderung mit Hilfe des Hookeschen Gesetzes	23
Einleitung	23
Formänderung durch Längskräfte	23
Formänderung durch Querkkräfte	25
Formänderung durch Biegung	26
Entwicklung der Formel für die Durchbiegung aus der elemen- taren Ableitung für den Krümmungsradius	29
Bestimmung von Durchbiegungen für einige einfache Fälle	30
Bestimmung von Auflagerdrücken (statisch unbestimmte Größen)	34
Bestimmung von Durchbiegungen in beliebigen Schnitten einfacher oder durchlaufender Träger	38
Träger auf mehreren Stützen (Clapeyronsche Gleichung)	38
Die Differentialgleichung der elastischen Linie	45
Anwendung auf verschiedene Trägerarten	47
Bestimmung von Auflagerdrücken	51

	Seite
Vergleich zwischen Formänderung aus Biegung mit der infolge von Querkraften	53
Bedeutung der Durchbiegungsberechnungen für die Praxis	55
Zulässigkeit der Berechnung von Eisenbetonkonstruktionen nach der Elastizitätslehre	57
Kapitel V. Rechnerische Bestimmung der elastischen Formänderung mit Hilfe der Arbeitsgleichung	59
Begriff der Arbeit	59
Formänderungsarbeit	59
Formänderungsarbeit einer Längskraft	61
Formänderungsarbeit bei Biegung	64
Formänderungsarbeit einer Querkraft	67
Formänderungsarbeit beliebiger äußerer Kräfte in der Ebene eines Stabes	67
Verschiebungsarbeit	69
Das Prinzip der virtuellen Verrückungen	72
Grundgleichung der Verschiebungsarbeit (Arbeitsgleichung)	73
Verschiebungsarbeit für die Längsbewegung	73
Verschiebungsarbeit für die Querbewegung	74
Verschiebungsarbeit für die Drehbewegung	74
Brauchbarmachung der Arbeitsgleichung zur Ermittlung von Formänderungen	76
Zusammenhang zwischen Verschiebungsarbeit und Formänderungsarbeit	77
Die rechnerische Bestimmung von Formänderungen mit Hilfe der allgemeinen Arbeitsgleichung	78
Bestimmung von Durchbiegungen für einige einfache Fälle	79
Bestimmung von Auflagerdrücken (statisch unbestimmten Größen)	87
Träger auf mehreren Stützen (Clapeyronsche Gleichung)	87
Kapitel VI. Allgemeines über statisch unbestimmte Bauwerke und die Ermittlung der statisch nicht bestimm- baren Größen	90
Allgemeines	90
Ermittlung der statisch nicht bestimm- baren Größen	91
Möglichkeiten für die linke Seite der Arbeitsgleichung, d. i. die virtuelle Arbeit der Auflagerkräfte:	96
Angriffspunkt starr	96
Angriffspunkt nachgiebig	97
Virtuelle Arbeit der Auflagergröße bei innerlich statisch unbestimmten Bauwerken	97
Einzelne Sonderfälle	98
Das Temperaturglied der rechten Seite	99
Vollständige Arbeitsgleichung	100
Übereinstimmung der Ableitungen aus der Formänderungsarbeit und der Arbeitsgleichung (Castiglianoscher Satz)	100

Der Zweigelenkrahmen.

Kapitel VII. Die Gleichung für den Schub bei gleich hohen Kämpfern	103
---	------------

	Seite
Kapitel VIII. Durchführung der Berechnung eines Zweigelenkrahmens mit direkter Benutzung der in Kap. VII abgeleiteten Integralformeln	107
Einfluß der Belastung	107
Einfluß der Temperatur	114
Einfluß der Lagernachgiebigkeit	116
Kapitel IX. Die geometrische Deutung der in Kap. VII abgeleiteten Integralformeln	116
Kapitel X. Beispiele mit Gebrauch der in Kap. IX gedeuteten Integralformeln	118
Der symmetrische Rahmen mit einfach gebrochenem Riegel und gleichmäßiger Last	118
Der unsymmetrische Rahmen mit verschiedener Belastung	121
Allgemeine Behandlung eines einfachen rechteckigen Rahmens mit wagerechter Belastung	126
Der einfache rechteckige Rahmen mit gleichmäßig verteilter wagerechter Belastung	129
Der einfache rechteckige Rahmen mit einseitigem Erddruck	130
Der unsymmetrische Rahmen mit Winddruck	133
Kapitel XI. Berechnung der Einflußliniengleichungen für den einfachen rechteckigen Rahmen ohne und mit Kragarmen	139
Einflußlinie für den Horizontalschub	139
Einflußlinien für die Biegemomente	141
Der rechteckige Zweigelenkrahmen mit Kragarmen	143
Kapitel XII. Der Rahmen mit gebogenem (oder gebrochenem) Riegel ohne und mit Kragarmen	145
Ermittlung des Horizontalschubes für lotrechte Last mit Hilfe der gedeuteten Integrale	145
Berechnung der Einflußliniengleichung des Horizontalschubes bei lotrechter Last	145
Konstruktion der Einflußlinien für Biegemomente	152
Entwicklung einer Formel aus der allgemeinen Einflußliniengleichung	154
Ermittlung des Horizontalschubes bei Temperaturänderung	155
Einflußliniengleichungen für den bogenförmigen Rahmen mit Kragarmen bei lotrechter Last	156
Der Rahmen mit gebogenem Riegel bei seitlicher Belastung	160
Bildung einfacher Schlußformeln	160
Kapitel XIII. Der eigentliche Zweigelenkbogen	167
Die Ermittlung des Horizontalschubes mit Hilfe der gedeuteten Integrale	167
Einflußliniengleichungen	168
Kapitel XIV. Der Zweigelenkrahmen mit Zuggurt	169
Schlußformeln für parabolisch gebogenen Riegel	173
Kapitel XV. Der Zweigelenkrahmen mit ungleich hohen Kämpfergelenken sowie der einstiellige Rahmen	174
Kapitel XVI. Anwendbarkeit des Zweigelenkrahmens	177
Im Hochbau	177
Im Brückenbau	180
Kapitel XVIa. Entwurfsvorschläge und Feststellung der Rahmenachse	182

Beliebig gelagerte einfache Rahmen.

	Seite
Kapitel XVII. Der einseitig gelenkige Stabzug oder Rahmen	189
Kapitel XVIII. Der beiderseits eingespannte gerade Träger	192
Kapitel XIX. Der einerseits eingespannte, andererseits frei drehbar gelagerte gerade Träger	194

Mehrstielige Gelenkrahmen mit Pendelstützen.

Kapitel XX. Rahmen mit einer Pendelstütze	195
Kapitel XXI. Rahmen mit zwei Pendelstützen	199

Mehrstielige Gelenkrahmen mit steif angeschlossenen Stützen.

Kapitel XXII. Der Rahmen mit einer Zwischenstütze.	203
Berechnungsgang im allgemeinen	203
Beispiele	207
Kapitel XXIII. Die Eckmomente als unbestimmte Größen	214
Berechnungsgang im allgemeinen	214
Anwendung	215
Darstellung der Einzelrahmen und Vorzeichen der Momentenflächen auf den Mittelstielen	216
Symmetrische Fälle.	218
Kapitel XXIV. Der Rahmen mit zwei Zwischenstützen	219
Berechnungsgang im allgemeinen	219
Die Eckmomente als unbestimmte Größen	221

Eingespannte einfache Rahmen.

Kapitel XXV. Bestimmungsgleichungen der statisch unbestimmten Größen	223
Berechnungsgang im allgemeinen	223
Der einfache Träger als Hauptsystem und lotrechte Belastung	226
Das Hauptsystem bei wagerechter Belastung	229
Die Eckmomente als unbestimmte Größen	230
Kapitel XXVI. Voneinander unabhängige Bestimmungsgleichungen für X, Y, Z und symmetrische Rahmen	232
Kapitel XXVII. Voneinander unabhängige Bestimmungsgleichungen für X, Y, Z und unsymmetrische Rahmen	237
Kapitel XXVIII. Lösung mit Rücksicht auf Normalkräfte	240
Kapitel XXIX. Berücksichtigung von Wärmeschwankungen	245
Kapitel XXX. Berechnung der Einflußliniengleichungen bei lotrechter Belastung	245
Kapitel XXXI. Der eingespannte Rahmen mit Kragarmen	248
Kapitel XXXII. Beispiel der Berechnung eines Durchlasses bei völliger Einspannung der Seitenwände	249
Kapitel XXXIII. Anwendbarkeit des eingespannten oder geschlossenen Rahmens	258

Der geschlossene Rahmen.		Seite
Kapitel XXXIV. Allgemeines		260
Kapitel XXXV. Beispiel der Berechnung eines Kastenrahmens (Dachbinder in biegungsfester Verbindung mit dem Deckenunterzug)		260
Eingespannte mehrstielige Rahmen.		
Kapitel XXXVI. Der Rahmen mit Pendelzwischenstütze		271
Kapitel XXXVII. Der dreistielige Rahmen ohne Gelenke . .		280
Berechnungsgang im allgemeinen		280
Die Eckmomente als unbestimmte Größen		285
Allgemeinere Fassung der Elastizitätsbedingungen.		
Kapitel XXXVIII.		286
Die vier aus beiderseitig gelenkiger einseitig gelenkiger und beiderseits eingespannter Lagerung eines einfachen Rahmens hervorgehenden Grundelastizitätsbedingungen		287
Die Anwendung der Grundelastizitätsbedingungen bei mehrstieligen Rahmen und Elastizitätsbedingung 5		289
Die zwei Grundgleichungen der Elastizitätsbedingungen		296
Gebrauch der Elastizitätsbedingungen für Richtigkeitsprüfungen		297
Mehrstielige Rahmen unter Zugrundelegung statisch unbestimmter Haupt-systeme.		
Kapitel XXXIX. Der Zweigelenrahmen als Hauptsystem (Beispiel der Berechnung eines Dachrahmens mit Pendelstütze)		298
Einleitung		298
Lotrechte Belastung		299
Rahmen ohne Mittelstütze		299
Ermittlung des Stützendrucks X_b		300
Endgültige Größe von X_a und der lotrechten Drücke A und B		306
Endgültige Momentenfläche und Richtigkeitsprüfung		306
Wagerechte Belastung		307
Bemessung		312
Kapitel XL. Der durchlaufende Träger als Hauptsystem (Ermittlung von Einflußlinien für den Zweigelenrahmen mit aufgelagerten Kragarmen)		316
Kapitel XLI. Konstruktive Einzelheiten zu den Abschnitten der mehrstieligen Rahmen		322
Höhere Grade statischer Unbestimmtheit und ihr praktischer Wert.		
Kapitel XLII. Der Einfluß höherer Grade statischer Unbestimmtheit auf die Stärkeverhältnisse		324
Kapitel XLIII. Das Erfordernis der Unterteilung größerer Rahmenwerke		325
Bogendächer.		
Kapitel XLIV.		
Einleitung		332

Glatte Bogendächer:		Seite
Flacher Zweigelenkbogen mit Zuggurt		333
Berücksichtigung ungleichmäßiger Erwärmung		333
Nähere Erläuterung der im Handbuch gegebenen Gleichungen		334
Einflußliniengleichungen für den Horizontalschub		340
Der flache gelenklose Bogen		342
Die Bestimmungsgleichungen der 3 statisch unbestimmten Größen		342
Nähere Erläuterung der im Handbuch gegebenen Gleichungen		343
Einflußliniengleichungen		348
Konstruktionseinzelheiten glatter Bogendächer		349
Bogendach mit überhöhtem Zuggurt		349
Bogendächer mit gesprengtem Zuggurt		351
Bogendach mit Kragarmen		352
Bogenbinderdächer:		
Allgemeines		353
Die statische Berechnung		353
Der gelenklose Bogenbinder in zeichnerischer Behand- lung		353
Berechnung größerer eingespannter Brückengewölbe. (Einfacher und doch genauer Rechnungsgang nach Prof. Mörsch.)		
Kapitel XLV.		
Einleitung und Voraussetzungen für die Berechnung		358
Entwurf		361
Berechnung nach Prof. Mörsch:		
Berechnung der drei statisch unbestimmten Größen		364
Deutung der Integrale		364
Verwendung der Einflußlinien der drei statisch unbestimmten Größen zur Bildung von Einflußlinien für die Kern- punktmomente		366
Berücksichtigung der Formänderung des Gewölbes durch Eigengewicht		367
Berücksichtigung der Temperatur- und Schwindeinflüsse		372
Allgemeine Schlußbemerkungen		376
Kapitel XLVI.		
Beispiel der Berechnung einer gelenklosen Bogen- brücke mit zeichnerischer Ermittlung der statisch un- bestimmten Größen und direkter Benutzung der- selben zur Bestimmung der Momente		
Bestimmung der Gewölbeform		378
Einflußlinien der statisch unbestimmten Größen		379
Die Biegungsspannungen infolge Eigengewichts		384
Die Biegungsspannungen infolge der Verkehrslasten		385
Temperaturspannungen		389
Zusammenstellung und Schlußbemerkungen		390
Einflußlinien für die Kernpunktmomente		392

	Seite
Die Elemente der Einflußlinienlehre für vollwandige Konstruktionen.	
1. Einflußlinie einer Auflagerreaktion	393
2. Belastungsprinzip und Ordinatenmessung bei gleichmäßiger Last	395
3. Einflußlinie für die Querkraft im Querschnitt K eines einfachen Balkens	396
4. Einflußlinie für das Biegemoment im Querschnitt K	397
5. Beschränkung der Einflußlinien für die Ermittlung der Maximal- werte an ganz bestimmten Stellen	398
6. Geltungsbereich und Charakteristik der Einflußlinien	398
7. Indirekte Belastung	399
8. Einflußlinien beim Gerberbalken	401
9. Einflußlinien beim Dreigelenkbogen	401

Einleitung.

Kapitel I.

Gleichgewichtsbedingungen, Auflagerungsarten und Beispiele für äußerlich statisch bestimmte Bauwerke.

Gleichgewichtsbedingungen.

Für die Beurteilung der Wirkung einer Kraft sind maßgebend:

1. Ihre Größe (in kg oder t).
2. Ihre Richtung (wagrecht, lotrecht, schräg).
3. Die Lage ihres Angriffspunktes (Knotenpunkt eines Fachwerkes, Säule oder Auflager).

An ihrem Angriffspunkt ruft jede Kraft eine Gegenkraft wach, die ihr gleich sein muß an Größe, gleich an Richtung, aber entgegengesetzt im Sinn, sofern eine bewegende Wirkung auf den Punkt ausgeschlossen sein soll.

Jedes Bauwerk steht im Grunde genommen unter der Wirkung einer einzigen Kraft, die wir uns als Resultierende aller Lasten vorstellen können, und die Bedingung für den Ruhezustand des Bauwerkes ist, daß eine Gegenkraft — die Resultierende aller Reaktionen — diese in der oben angegebenen Weise aufhebt.

In der Statik hat es sich als praktisch erwiesen, an Stelle der Resultierenden selbst, stets mit deren lotrechten und wagerechten Seitenkräften zu arbeiten, weil dadurch eine bequeme Handhabe für die Feststellung von Richtung und Größe einer Kraft gegeben ist. —

So ist der einfache Balken nach Abb. 1 durch die nach Lage, Größe, Richtung und Sinn gegebene Kraft R belastet, und wir würden die bei diesem Belastungsfall auftretende resultierende Gegenkraft aus beiden Auflagern zusammen nach Lage, Größe,

Richtung und Sinn ohne weiteres erhalten, wenn wir einfach R beibehalten, den Pfeil aber umkehrten.

Statt dessen geben wir aber K_l und K_r an und von K_l noch H und V , weil uns an der Kenntnis der Anteile jedes Auflagers an der Gesamtreaktion gelegen ist.

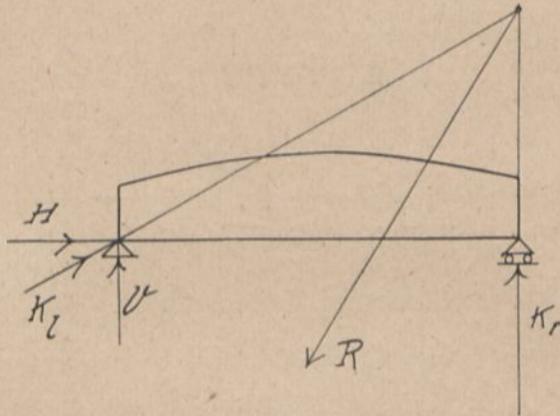


Abb. 1.

Würde die Resultierende von H , V und K_r sich nicht genau nach Lage, Größe und Richtung mit der Last R decken und umgekehrten Sinn haben, dann bliebe offenbar eine Kraftwirkung übrig, die das Gleichgewicht störte. Wir können hier drei Fälle unterscheiden:

1. Die Gegenkraft entspricht nach Lage und Richtung der Last R , ohne ihre volle Größe zu erreichen: das Bauwerk wird in der Pfeilrichtung von R verschoben.

2. Die Gegenkraft entspricht nach Größe und Richtung der Last R , verläuft aber in einem gewissen Abstände parallel zu ihr: das Bauwerk wird gedreht.

3. Jede andere von 1 und 2 verschiedene Art der Gegenkraft ruft gleichzeitig Verschiebung und Verdrehung des Bauwerkes hervor.

Aus der zu fordernden Sicherheit gegen Verschiebung entsteht die Gleichgewichtsforderung, daß ein Kraftüberschuß in irgendeiner Richtung nicht verbleiben darf; praktischerweise entstehen daraus zwei Gleichgewichtsbedingungen:

1. Summe aller lotrechten Kräfte gleich Null.
2. Summe aller wagerechten Kräfte gleich Null.

Aus der zu fordernden Sicherheit gegen Verdrehung entsteht die dritte Gleichgewichtsforderung, daß irgendein Kräftepaar nicht verbleiben darf. Das ist aber bekanntlich erfüllt, wenn

3. die Summe der statischen Momente sämtlicher Kräfte, bezogen auf einen beliebigen Punkt, gleich Null ist.

Die letzte Bedingung hängt zusammen mit der Lage der Kräfte zueinander in der Ebene. Hätten wir im angegebenen Beispiel (Abb. 2) A den Wert 2000 und B den

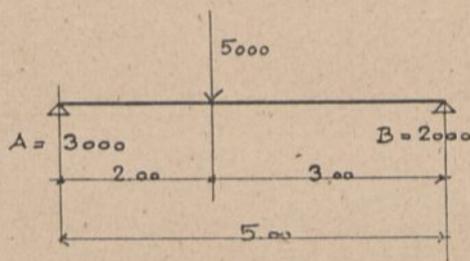


Abb. 2.

Wert 3000, also umgekehrt, wie es richtig ist, zugeschrieben, so wäre wohl die erste Bedingung erfüllt: „Summe aller lotrechten Kräfte gleich Null“ (die zweite Bedingung kommt nicht in Frage), aber nicht die dritte Bedingung: „Summe aller drehenden Einflüsse gleich Null“; denn dies ist nur der Fall, wenn $A = 3000$ und $B = 2000$ ist. Alles in allem fordern die drei Gleichgewichtsbedingungen \sum aller Kraftwirkungen gleich Null.

Diese drei Bedingungen geben daher für die rechnerische Untersuchung drei Bestimmungsgleichungen, womit drei Unbekannte gefunden werden können. Wenn also bei einem Bauwerk die Lasten gegeben sind und somit der eine Teil der äußeren Kräfte, so kann der andere Teil der äußeren Kräfte, nämlich die Auflagerreaktionen, mit Hilfe der drei Gleichgewichtsbedingungen gefunden werden, aber nur so lange, als auch nicht mehr als drei unbekannte Auflagergrößen vorhanden sind. Das ist z. B. der Fall bei einem einfachen Balken nach Abb. 1.

Statisch bestimmte Bauwerke.

Solche liegen vor, wenn die Auflagerkräfte sich ausschließlich mit Hilfe der drei Gleichgewichtsbedingungen bestimmen lassen. Ferner ist noch die Bedingung vorhanden, daß jeder Bruchteil des Bauwerkes für sich ebenfalls mit Hilfe der

drei Gleichgewichtsbedingungen berechenbar bleibt, d. h. es müssen bei einem abgeschnittenen Teil die inneren Spannkkräfte, welche nach der Trennung gewissermaßen als äußere Kräfte in Erscheinung treten, ebenfalls mit Hilfe der drei Gleichgewichtsbedingungen bestimmbar sein. Wenn man sich nämlich bei einem

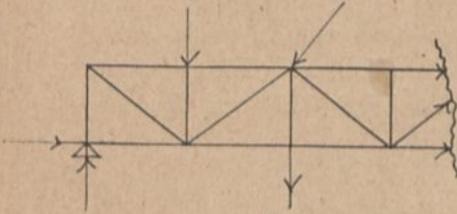


Abb. 3.

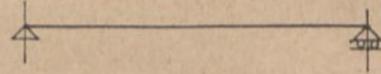
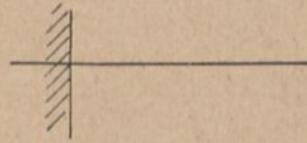


Abb. 4.

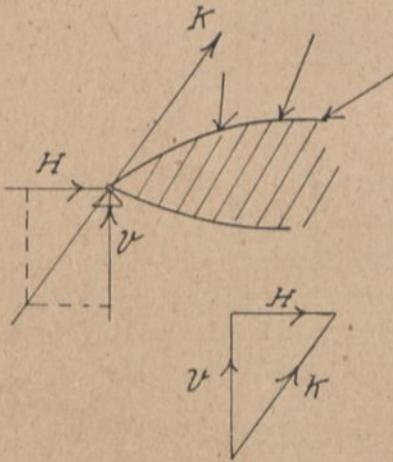


Abb. 6.

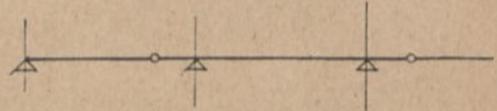


Abb. 5.

solchen abgeschnittenen Stück (Abb. 3) die Auflagerung nach der Schnittstelle hin verlegt denkt, dann können die dort anzubringenden Kräfte auch als Auflagerkräfte angesehen werden und alle übrigen als Belastung.

Zu unterscheiden haben wir noch einfache Bauwerke, die nur aus einem starren Körper bestehen, und mehrteilige Bauwerke, entstanden aus der gelenkartigen Verbindung einzelner einfacher Bauteile (Abb. 4 und 5).

Auflagerungsarten.

Beim festen Auflagergelenk (Abb. 6) liegt der Stützpunkt der Scheibe fest, und diese kann nur eine Drehung um den festen Punkt ausführen. Genau genommen müßte ein solches Gelenk

mit Hilfe eines Gelenkbolzens gebildet werden. Der Auflagerdruck geht durch den Drehpunkt der Scheibe, bekannt ist also seine Lage in der Ebene, unbekannt ist seine Richtung und Größe, sobald beliebige Kräfte die Scheibe in ihrer Ebene belasten. Es sind also noch zwei Unbekannte vorhanden: die beiden Komponenten. Man kann ein solches festes Auflagergelenk durch zwei starre Stäbe ersetzen, wodurch die Anzahl 2 der Unbekannten noch klarer zum Ausdruck kommt (Abb. 7).

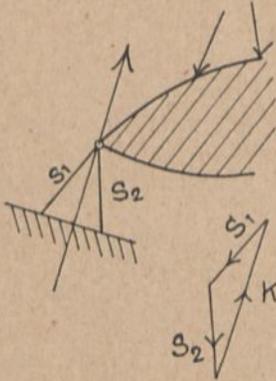


Abb. 7.

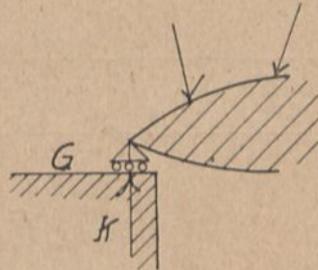


Abb. 8.

Beim beweglichen Auflagergelenk (Abb. 8) kann sich der Stützpunkt der Scheibe auf einer geraden Ebene bewegen. Eine wagerechte Komponente der Auflagerkraft würde also von einem beweglichen Auflagergelenk nicht auf die Unterstützung übertragen werden können. Aufnehmbar bleibt daher nur eine zur Gleitebene senkrechte Kraft. Lage und Richtung derselben ist bekannt, unbekannt aber ihre Größe, so daß bei einem beweglichen Auflagergelenk nur eine Unbekannte vorhanden ist. Bauwerke mit einem festen und einem beweglichen Auflager haben somit drei unbekannte Auflagerkräfte und sind mit Hilfe der drei Gleichgewichtsbedingungen bestimmbar. Eine andere Form des beweglichen Lagers ist die Pendelstütze (Abb. 9), deren Drehung für den abgestützten Träger dieselbe Wirkung hat wie ein Rollenlager.

Die durch ein bewegliches Auflager dem Bauwerk gebotene freie Ausdehnungsmöglichkeit behebt das Auftreten von Spannungen infolge von Ausdehnungen oder Zusammenziehungen des Bauwerkes, wie solche durch die unter der Belastung oder den Einfluß von Wärmeschwankungen eintretenden Formänderungen entstehen.

Beim **eingespannten Träger** (Abb. 10) geht die Kraft-
richtung K nicht mehr durch einen bestimmten Punkt (Schwer-
punkt des Einspannungsquerschnittes) der Auflagerung hindurch;
zwei Unbekannte wären nur so lange vorhanden, als dies tat-
sächlich der Fall wäre.

Das Wesen der Einspannung besteht eben darin, daß eine
Drehung des eingespannten Kör-
pers wie bei dem festen Auflager-
gelenk nicht stattfinden kann.

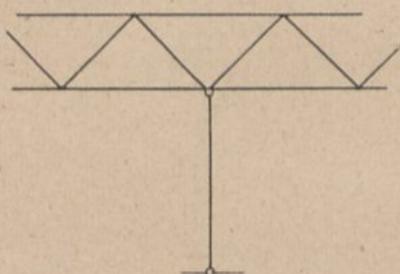


Abb. 9.

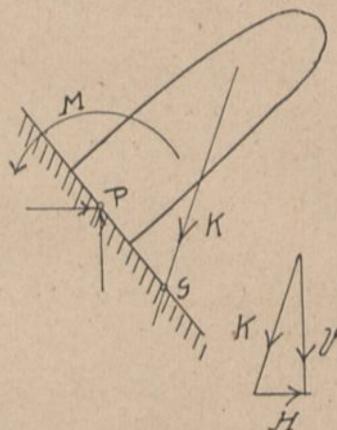


Abb. 10.

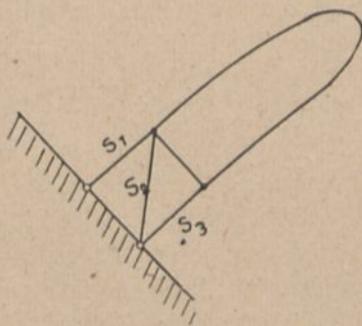


Abb. 11.

Man kann sich eine Einspannung auch dadurch bewirkt
denken, daß im Schwerpunkt des verspannten Querschnittes die
Horizontal- und Vertikalkomponente der resultierenden Kraft
und ein Moment M angreifen (Abb. 10). Für den Fall, daß der
Punkt G mit P zusammenfällt, wird das Moment M gleich Null,
d. h. der Träger kommt als eingespannter Träger nicht zur Gel-
tung. Wir haben also an einer Einspannungsstelle drei

Unbekannte. Diese treten wieder klarer in Erscheinung, wenn wir uns die Einspannung durch drei Stäbe bewerkstelligen denken (Abb. 11).

Auflagerungsarten im Beton- und Eisenbetonbau.

Als feste Auflagergelenke werden, wenn absolute Korrektheit in der Auflagerung ein dringendes Bedürfnis ist, namentlich

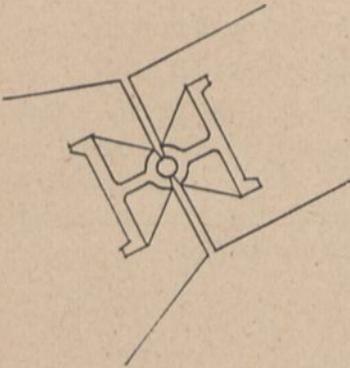


Abb. 12.

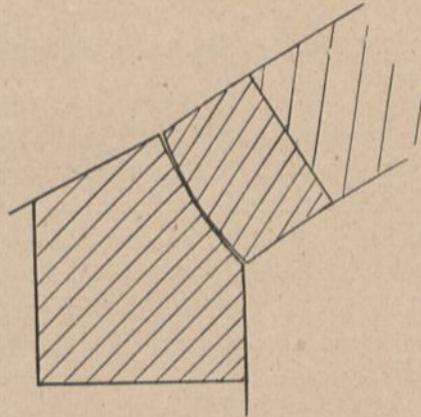


Abb. 13.

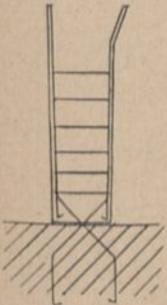


Abb. 14.

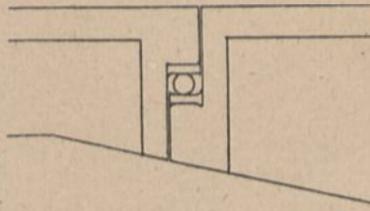


Abb. 15.

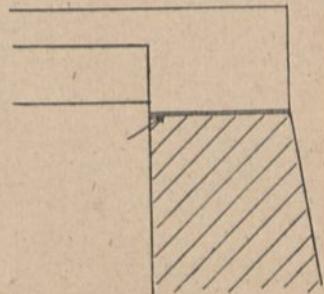


Abb. 16.

bei großen konzentrierten Drücken, Stahlgelenke verwendet, die auf einem Stahlbolzen drehbar sind (Abb. 12). In den Druckflächen zwischen Stahl und Beton wird der Beton oft mit 60 bis 100 kg/cm² beansprucht. Billiger sind die Betongelenksteine (Abb. 13), welche jedoch für große konzentrierte Drücke (bei großen Bogenrippen) nicht geeignet sind. Bei Aufstützung von Rahmenbindern usw. werden die festen Auflagergelenke meist nur unvollkommen ausgeführt. Die Anordnung der Eisen-

einlagen muß hier den gelenkigen Charakter der Auflagerung zum Ausdruck bringen (Abb. 14). Bei großen Hallenbauten wird man die festen Auflagergelenke nicht in dieser unvollkommenen Form ausführen, sondern zu Bolzengelenken schreiten.

Das bewegliche Auflagergelenk kann ebenfalls je nach Erfordernis der Konstruktion mehr oder weniger korrekt ausgeführt werden (Abb. 15); für kleinere Bauwerke genügt in der Regel eine besonders hergerichtete Fuge (Abb. 16).

Beispiele für äußerlich statisch bestimmte Bauwerke.

a) Einteilige Bauwerke.

Der einfache Balken (Abb. 1, Seite 2). Bei beliebiger Richtung der Lastresultierenden wird eine wagerechte Seitenkraft stets vom festen Auflagergelenk aufgenommen, während das bewegliche Auflager nur senkrecht zur Gleitebene gerichteten Druck empfängt. Das gleiche gilt für den Balken mit überstehendem Kragarm (Abb. 17).

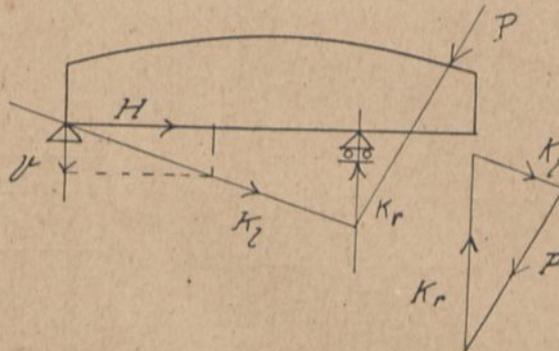


Abb. 17.

Es ist noch von Wichtigkeit, hier näher auf die Bestimmung des Maximalmomentes bei wandernder Last einzugehen.

Das in Frage kommende Gesetz ist im Lehrbuch „Höhere Mathematik“¹⁾ unter M in den Absätzen 27 und 28 eingehend erläutert. Es lautet:

„Das im Angriffspunkt einer wandernden Last jeweilig auftretende Biegemoment erreicht dann seinen Größtwert, wenn diese Last (gehörig zu einer beweglichen Gruppe von Lasten mit bestimmten

¹⁾ Verlag von Herm. Meusser.

Abständen) und die Resultierende aller zurzeit auf dem Balken befindlichen Lasten symmetrisch zur Balkenmitte stehen.“

Sind nur Einzellasten innerhalb des beweglichen Lastenzuges vorhanden, so kann man nach diesem Gesetz augenblicklich sowohl das unter jeder Einzellast größtmögliche Biegemoment, als auch das unter all diesen Möglichkeiten für die Berechnung des Trägers maßgebende absolut größte

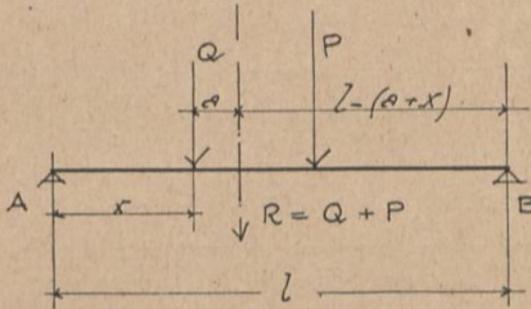


Abb. 18.

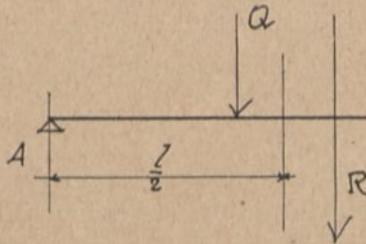


Abb. 19.

Biegemoment (unter einer der Resultierenden zunächst liegenden Einzellasten) bestimmen.

Da zwei ungleich große Lasten (durch eine Dampfwalze) bei Balkenbrücken sehr häufig in Frage kommen, so sei die Anwendung des Gesetzes auf diesen sehr einfachen Spezialfall noch besonders gezeigt.

Die Lasten seien Q und P in bestimmtem Abstand und mit bestimmter Lage der Mittelkraft R ; Q sei größer als P . Offenbar ist das größtmögliche Moment unter Q zu suchen (Abb. 18), und es tritt dort ein, wenn Q und R symmetrisch zur Balkenmitte stehen (Abb. 19), wenn also nach Abb. 18

$$x = \frac{l}{2} - \frac{a}{2} \text{ ist.}$$

Befindet sich innerhalb eines beweglichen Lastenzuges außer Einzellasten noch gleichmäßige Last, so trifft zwar dieselbe Gesetzmäßigkeit zu, doch sind wir hier nicht in der Lage, die Resultierende des gerade auf dem Träger befindlichen Lastenzuges nach Größe und Lage (innerhalb des Lastenzuges) festzulegen, weil wir nicht wissen, wieviel von der gleichmäßigen Last sich in dem Augenblick auf dem Träger befindet, wo unter der gerade betrachteten Last das dort größt-

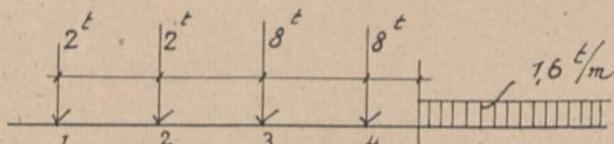


Abb. 20.

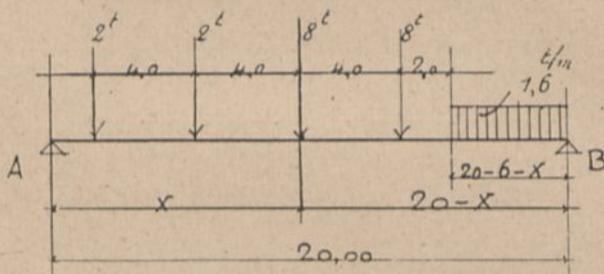


Abb. 21.

mögliche Moment auftritt. Diese Schwierigkeit kommt zu der (auch bei nur Einzellasten) bestehenden Ungewißheit hinzu, unter welcher Einzellast das absolut größte Moment zu suchen ist. In solchen Fällen sieht man am besten von allgemeinen Lösungen mit Buchstaben ab, sondern setzt gleich Zahlen ein und verfährt nach folgendem Beispiel:

Ein Lastenzug nach Abb. 20 fahre über eine Brücke von 20 m Spannweite.

Da wir, wie gesagt, von vornherein nicht wissen können, unter welcher Last das absolut größte Moment eintreten wird, so sind wir darauf angewiesen, einen Versuch zu machen und führen denselben für Last 3 durch.

Nach Abb. 21 ist dann

$$A = \left[2 \cdot 2t(20 - x + 6) + 2 \cdot 8t(20 - x - 2) \right. \\ \left. + \frac{1,6t(14 - x)^2}{2} \right] \cdot \frac{1}{20}$$

gibt $A = 27,45 - 2,12x + 0,04x^2$

und $M_x = A \cdot x - 2t \cdot 4 - 2t \cdot 8$

oder $M_x = 27,45x - 2,12x^2 + 0,04x^3 - 24$

$$\frac{dM_x}{dx} = 27,45 - 4,24x + 0,12x^2 = 0^1)$$

oder $x^2 - 35,3x = -229$

$$x_{1,2} = \frac{35,3}{2} \pm \sqrt{17,65^2 - 229}$$

$$x_1 = 26,75$$

$$x_2 = 8,55 \text{ m.}$$

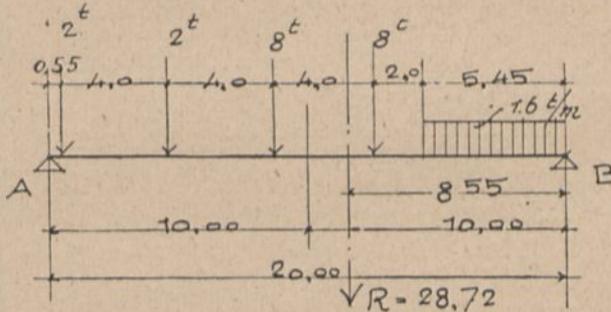


Abb. 22.

Bei diesem x befinden sich — wie wir jetzt festzustellen haben — noch alle zuerst einbezogenen Lasten auf dem Träger (Abb. 22).

Wir erhalten:

$$M_x = 27,45 \cdot 8,55 - 2,12 \cdot 8,55^2 + 0,04 \cdot 8,55^3 - 24 = 80 \text{ mt,}$$

was wirklich ein Maximum ist, da der zweite Differentialquotient negativ wird:

$$\frac{d^2 M_x}{dx^2} = -4,24 + 0,24x = -2,19^2).$$

Die Resultierende aller Lasten hat vom rechten Auflager aus den Abstand

$$a = \frac{8,72 \cdot \frac{5,45}{2} + 8 \cdot (7,45 + 11,45) + 4 \cdot 17,45}{28,72} = \approx 8,55 \text{ m,}$$

so daß Last 3 und A symmetrisch zur Balkenmitte stehen.

¹⁾ Höhere Mathematik, K, Abs. 23.

²⁾ Desgl. L.

Beim Vergleich der Einzellasten mit der Streckenlast scheint uns aber ein noch größeres Moment auftreten zu können wenn wir etwa die in Abb. 23 gegebene Anordnung betrachten. Hierfür wäre dieselbe Untersuchung noch einmal durchzuführen.

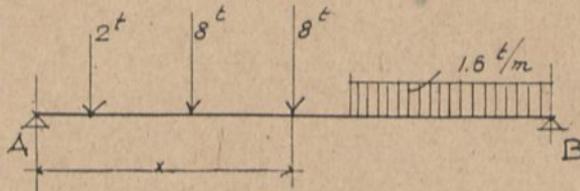


Abb. 23.

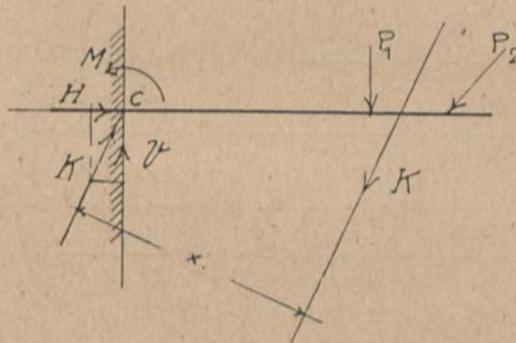


Abb. 24.

Berücksichtigt ist noch nicht das Eigengewicht des Balkens. Beträgt dieses z. B. 2 t/m, so ist das Moment in Balkenmitte

$$Mg = \frac{gl^2}{8} = \frac{2 \cdot 20^2}{8} = 100 \text{ mt,}$$

welches wir einfach addieren können. Die genaue Berechnung mit Einbeziehung des Eigengewichtes in die Differentiation bietet auch weiter keine Schwierigkeiten; ein merklicher Unterschied kommt dabei nicht mehr heraus.

Der einseitig eingespannte Träger (Freitträger Abb. 24). Alle äußeren Kräfte P_1, P_2, \dots (mit der Resultierenden K) erzeugen am Einspannungspunkt c einen gleich großen und gleich gerichteten Lagerdruck K . Für den Fall, daß die äußere Resultierende ihrer Richtung nach auf den Punkt c trifft, entsteht keine Beanspruchung des Einspannungsquerschnittes; derselbe wirkt dann wie ein festes Auflagergelenk, dessen beide Unbekannten nunmehr H und V sind. In der Regel liegen aber

diese beiden Resultierenden K nicht in einer Geraden, sondern haben einen Abstand x . Es entsteht also außerdem am Punkt c noch ein Moment $K \cdot x = M$. Die Wirkung des Momentes kann man sich auch etwa nach Abb. 25 auslegen, wobei es freisteht,

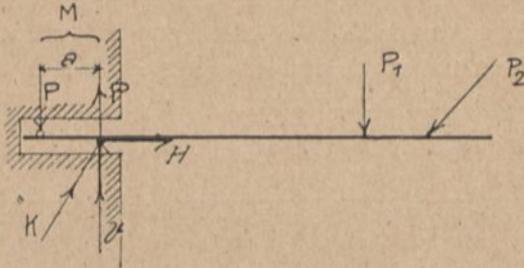


Abb. 25.

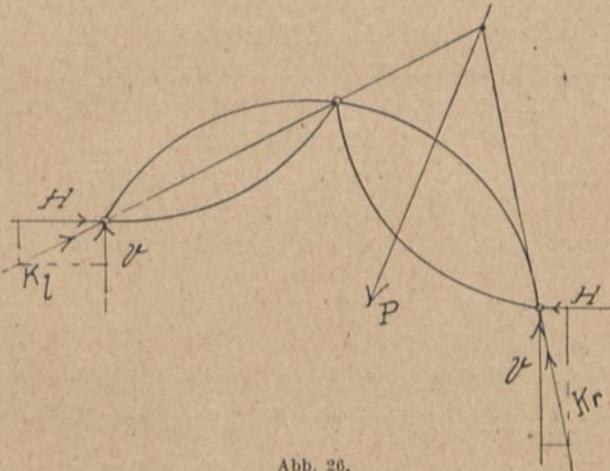


Abb. 26.

die Kraft P willkürlich anzunehmen und den zugehörigen Hebelarm a aufzusuchen oder umgekehrt zu verfahren.

Wir haben also beim eingespannten Träger drei Unbekannte, H , V und M .

b) Mehrteilige Bauwerke.

Der Dreigelenkbogen (Abb. 26) besitzt zwei feste Aufgelenke und ein bewegliches Mittelgelenk. Die Richtung von K_l muß bei der angegebenen Belastung durch den linken und mittleren Gelenkpunkt hindurchgehen, wenn eine Drehung der linken unbelasteten Scheibe gegen die

rechte nicht eintreten soll. Damit ist auch die Richtung von K , gegeben. An jedem Auflager ergeben sich nun zwei Unbekannte, nämlich Größe und Richtung des Kämpferdruckes, so daß vier Unbekannte vorhanden sind.

Da aber die Richtung von K_1 durch die Verbindungsgerade zwischen Auflager und Mittelgelenk festgelegt ist, so scheidet eine Unbekannte aus, und das System bleibt mit nur drei Unbekannten statisch bestimmt.

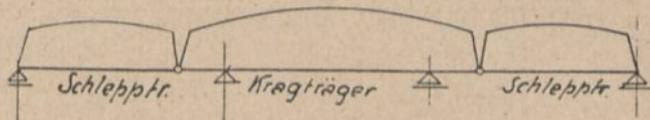


Abb. 27.

Der Gerberbalken (Abb. 27) hat ein festes und mehrere bewegliche Auflager. Auf eine Öffnung ohne Gelenke muß stets eine mit mindestens einem Gelenk folgen; in der Regel sind es zwei. Im ganzen müssen so viel Gelenke vorhanden sein, wie überzählige Mittelstützen vorhanden sind. Man unterscheidet Krag- und Schleppträger, wovon jeder, genau genommen, für sich als statisch bestimmter Träger ein festes und ein bewegliches Auflagergelenk erhalten muß¹⁾.

Kapitel II.

Die statische Unbestimmtheit, das statisch bestimmte Hauptsystem und die statisch nicht bestimmbareren Größen.

Der Grad der statischen Unbestimmtheit.

Der in Abb. 28 dargestellte Rahmen, der mit beliebigen Kräften in seiner Ebene belastet sein soll, besitzt ein eingespanntes Auflager *I*, ein festes Auflagergelenk *II* und ein bewegliches Auflagergelenk *III*²⁾. An jedem Auflager greifen die entsprechenden un-

¹⁾ Ein schönes Beispiel für diese im Eisenbetonbau gelegentlich (bei unsicherem Baugrund) sehr zweckmäßige und wirkungsvoll ausführbare Bauart stellt die Arndtstraßen-Überführung in Königsberg dar (Viadukt von ca. 250 m Länge). Deutsche Bauzeitung, Mitteilungen Nr. 7 und 8, 1912. — Die Überwindung einer Spannweite von 40 m mit Hilfe Gerberscher Träger zeigen die Entwürfe zu einer Eisenbetonbrücke (Deutsche Bauzeitung, Mitteilungen Nr. 11, 1916).

²⁾ Der Fall ist absichtlich ganz allgemein gewählt und hat keine praktische Bedeutung.

bekannten Auflagerreaktionen an, so daß sich im ganzen sechs davon ergeben. Da nur drei Gleichgewichtsbedingungen vorhanden sind, so ist das System also dreifach statisch unbestimmt. Der Rahmen nach Abb. 29 ist also nur einfach statisch unbestimmt. Wenn die statische Unbestimmtheit nur durch die

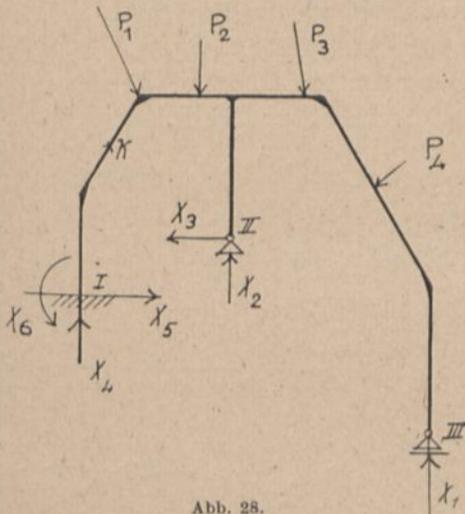


Abb. 28.

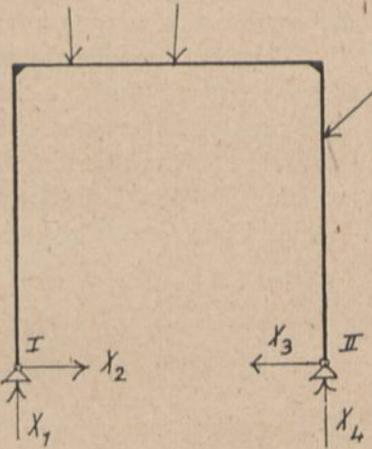


Abb. 29.

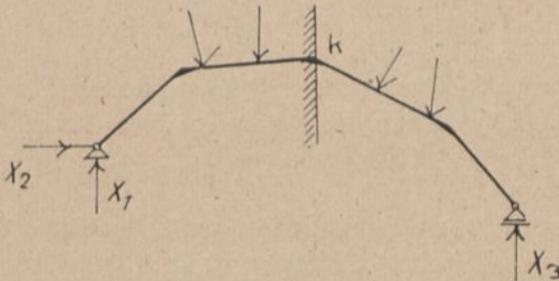


Abb. 30.

Auflagerreaktionen verursacht ist, wie in diesem Falle, so spricht man von einer **äußerlichen statischen Unbestimmtheit**; denn sind die Auflagerreaktionen bekannt, wobei wir unter Reaktionen nicht nur einfache Kräfte, sondern auch Momente zu verstehen haben, so ist für jeden beliebigen Querschnitt K des Stabzuges Längskraft, Querkraft und Biegemoment ohne weiteres bestimmbar. Diese drei Kraftwirkungen treten nämlich in jedem biegungsfesten Stabzug auf im Gegen-

satz zu einem Fachwerk, dessen Stäbe nur reine Normalspannungen erhalten, sofern sie nicht auch noch direkter Biegung ausgesetzt sind.

Zum Beweise brauchen wir nur an einen beliebigen einfachen Träger zu denken (Abb. 30); wir erkennen sofort, daß in jedem Querschnitt K der gleiche Fall vorliegt wie in Kapitel I, Auflagerungsarten, eingespannte Träger.

Anstatt der lotrechten und wagerechten Komponente der in dem eingespannten Querschnitt wirkenden Resultierenden suchen wir zweckmäßigerweise dort die Tangentiale und Normale zum Querschnitt, so daß die drei Unbekannten an beliebiger Stelle eines biegungsfesten Stab-

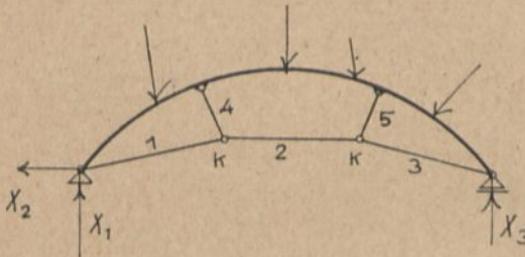


Abb. 31.

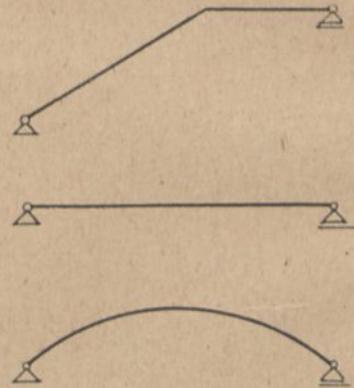


Abb. 32.

zuges Längskraft, Querkraft und Biegemoment sind. Sind an einer beliebigen Stelle der Stabachse diese drei inneren Kraftwirkungen bekannt, so ist damit auch der ganze Stabzug statisch völlig bestimmbar.

Die innerliche statische Unbestimmtheit zeigt Abb. 31. Der Träger ist zunächst seiner Auflagerung nach äußerlich statisch bestimmt, und zwar sowohl mit als auch ohne die verspannenden Stäbe, weil der Bogen an und für sich als steifer Stabzug durchlaufen soll.

Das System stellt also äußerlich genau so einen einfachen Balken dar wie einer der Träger in Abb. 32; nur hebt die gelenkig angeschlossene Verspannung die einfache Bestimmbarkeit im Innern auf. Danach ist der Träger weder als einfacher biegungsfester Stab noch als Fachwerk anzusehen, sondern als ein Mittelglied zwischen beiden. Offenbar genügt hier schon die Kenntnis der Spannkraft eines der unteren Stäbe, um alle übrigen und damit auch das ganze System völlig statisch bestimmt zu machen.

Die in den Stäben wirkenden Kräfte sind dann nämlich einfach als neu hinzukommende äußere Belastung an dem — dann auch innerlich statisch bestimmten — Balken anzusehen. Das System ist also innerlich einfach statisch unbestimmt.

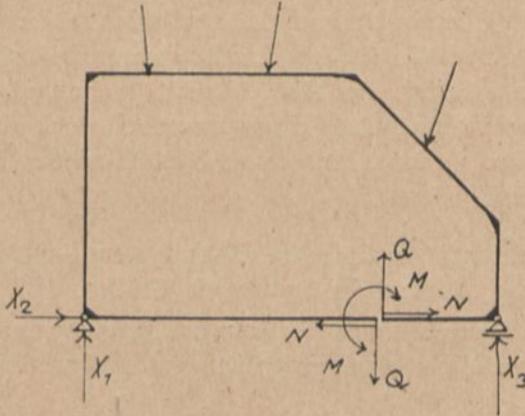


Abb. 33.

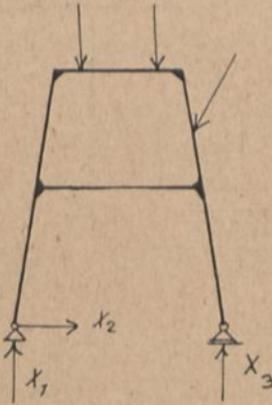


Abb. 34.

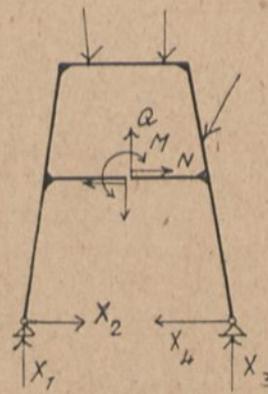


Abb. 35.

Derselbe Fall liegt vor, wenn die Zugstange ohne Sprengung ausgeführt wird, wobei die Hängestäbe keinen Systemzug erhalten, aber trotzdem meist zur Vermeidung allzu großer Durchbiegung der Zugstange beibehalten werden.

Abb. 33 zeigt einen vollständig geschlossenen Rahmen, der äußerlich statisch bestimmt ist, innerlich aber unbestimmt. Der Rahmen ist seiner Natur nach ein biegunsfester Stabzug und



unterscheidet sich von den vorhergehenden nur dadurch, daß er geschlossen ist, was an und für sich jedoch gleichgültig ist.

Der Rahmen ist also innerlich dreifach statisch unbestimmt.

Führen wir nach Art der Abb. 31 ein Portal aus, jedoch mit steifen Anschlüssen der Zugstange (Abb. 34), so erkennen wir sofort die Übereinstimmung dieses Falles mit Abb. 33. Bilden wir in demselben Gerüstpfiler außerdem noch beide Lager als feste Gelenke aus, wie dies Abb. 35 zeigt, so kommt zu der innerlichen dreifachen statischen Unbestimmtheit noch eine äußerliche einfache hinzu, wodurch das ganze System vierfach statisch unbestimmt wird.

Wahl des statisch bestimmten Hauptsystems und der statisch nicht bestimmbareren Größen.

Die Wahl des statisch bestimmten Hauptsystems erfolgt so, daß die überzähligen Auflagergrößen entfernt werden.

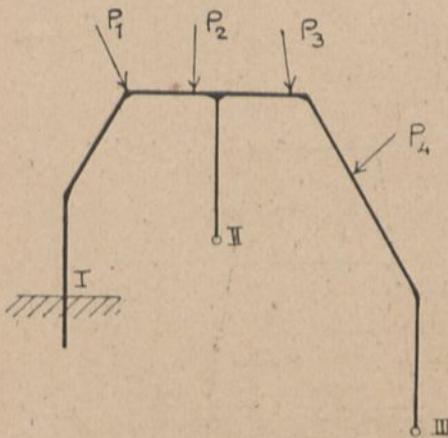


Abb. 36.

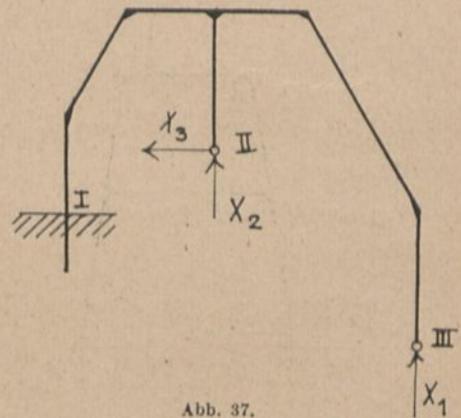


Abb. 37.

Für den Rahmen Abb. 28 könnten wir das statisch bestimmte Hauptsystem z. B. einfach dadurch herstellen, daß wir die Auflager II und III gänzlich entfernten. Wir erhielten dann einen beim Auflager I fest eingespannten einfachen Kragträger und als unbestimmte Größen die Kräfte X_1 , X_2 und X_3 ¹⁾. Die Be-

¹⁾ An diesem Beispiel soll nur das Grundsätzliche erläutert werden, weswegen es auch ganz allgemein gehalten ist; ob es zweckmäßig ist, in dem vorliegenden Falle in der angedeuteten Weise vorzugehen, sei vorläufig dahingestellt.

rechnung der wahren inneren Spannungen und wirklichen Auflagerreaktionen eines statisch unbestimmten Systems fußt nun auf der Betrachtung folgender gleichzeitig bestehender Belastungszustände:

1. Des statisch bestimmten Hauptsystems, belastet durch die äußeren Kräfte $P_1, P_2, P_3, P_4 \dots$ (Abb. 36).
2. Des statisch bestimmten Hauptsystems, belastet lediglich mit den überzähligen Größen X_1, X_2 und X_3 (Abb. 37).

Die Wahl des statisch bestimmten Hauptsystems ist beliebig.

Als solche kennen wir hauptsächlich den einfachen Kragträger und den einfachen Balken (mit einem festen und einem beweglichen Auflager). Ein System mit zwei oder drei beweglichen

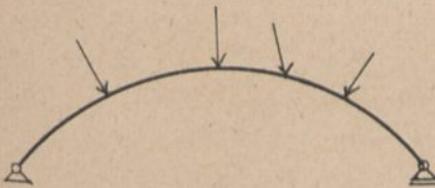


Abb. 38.

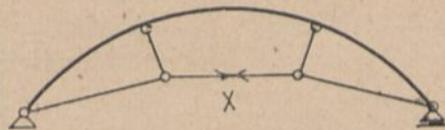


Abb. 39.

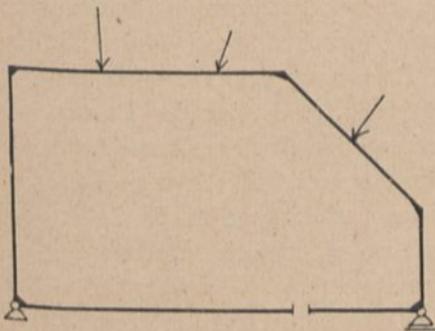


Abb. 40.

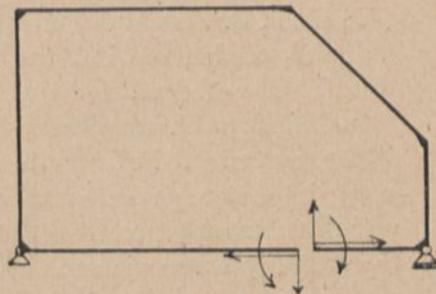


Abb. 41.

Auflagern können wir also nicht als statisch bestimmtes Hauptsystem ansehen. Bei der Auswahl der zu entfernenden Größen wird man stets so vorgehen, daß sich bei dem entstehenden Hauptsystem die Rechnung möglichst einfach gestaltet. Es brauchen auch nicht immer ganze Auflager entfernt zu werden. So können wir z. B. den Rahmen Abb. 29 dadurch statisch bestimmt machen, daß wir aus einem der beiden festen Gelenke ein Rollenlager machen, so daß ein einfacher Balken entsteht. Im System nach

Abb. 31 wäre die innerliche statische Unbestimmtheit auszuschalten nach Abb. 38 und die Belastung mit X nach Abb. 39 vorzunehmen. Den Rahmen Abb. 33 führen wir durch einen Schnitt im unteren Riegel in das Hauptssystem Abb. 40 über; Abb. 41 zeigt dieses mit den überzähligen Größen belastet.

Kapitel III.

Allgemeines über elastische Formänderungen.

Ein Bauwerk verändert unter äußeren Lasten seine Form so lange, bis ein neuer Gleichgewichtszustand, also Ruhe eingetreten ist. Der ursprüngliche Gleichgewichtszustand und die

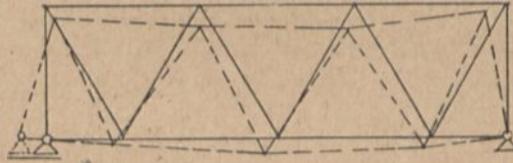


Abb. 42.

Abmessungen des Bauwerkes können also nur dann als unverändert angesehen werden, wenn die Größe der Formänderungen gegenüber den Bauwerksabmessungen verschwindend klein ist. Würde z. B. durch die eintretende Belastung die Verschiebung so groß werden wie in Abb. 42 dargestellt, so hätten die Lasten ihre Lage geändert, und die Berechnung der Auflagerkräfte und des Gleichgewichtszustandes mit Hilfe der ersten Maße wäre hinfällig geworden. Bei normaler Belastung sind aber in Wirklichkeit die entstehenden Veränderungen so unbedeutend, daß die für das starr angenommene Bauwerk aufgestellten Gleichgewichtsberechnungen vor wie nach als richtig beibehalten werden können.

Diese Voraussetzung wird bei allen statischen Berechnungen gemacht. Trotzdem ist es erforderlich, die Größe der elastischen Formänderungen zu kennen, und zwar aus folgenden Gründen:

1. Durchbiegungen (insbesondere weit gespannter Bauteile) haben in gewissen Grenzen zu bleiben.

2. Die Formänderungen eines Bauteils können — abgesehen von der mit ihnen verbundenen unbedeutenden Beeinflussung der rechnermäßigen Spannungen — zur Mitbeanspruchung eines anderen mit dem ersten verbundenen Bauteils

führen und diesem somit eine Belastung zuführen, die er nach der Lastverteilung unmittelbar nicht erhalten hätte (vgl. den Einfluß der einzelnen Balken einer Plattenbalkenbrücke aufeinander durch die Querträgerkonstruktion oder Versteifungen).

2. Schließlich bietet uns die Kenntnis und Beachtung der elastischen Formänderung das einzige Hilfsmittel zur Untersuchung von Bauwerken, die sich nicht mehr mit Hilfe der drei Gleichgewichtsbedingungen berechnen lassen.

Wir wollen nun die Elastizitätslehre, soweit sie für unser Gebiet erforderlich ist, von Grund auf mit ihren einzelnen Anwendungen auf die Berechnung von Durchbiegungen und Auflagergrößen, in elementarer und allgemeiner Behandlung, betrachten, bis wir schließlich zur Ableitung der Grundgesetze für die Berechnung statisch unbestimmter Systeme vorschreiten können. Man unterscheidet eine rechnerische und eine zeichnerische Behandlung dieses Stoffes, bei der sich in beiden Fällen praktische Lösungswege ergeben. Wir betrachten in diesem Buch die grundlegenden analytischen Verfahren.

Elastizitätslehre.

Kapitel IV.

Formänderungsberechnungen auf Grund elementarer Ableitungen.

a) Die rechnerische Bestimmung der drei Arten der elastischen Formänderung mit Hilfe des Hookeschen Gesetzes.

Einleitung.

Wir unterscheiden drei Arten der Formänderung:

1. Durch Längskräfte (kommt nur bei großen Abmessungen in Betracht).
2. Durch Querkräfte (in den meisten Fällen zu vernachlässigen).
3. Durch Biegemomente (meist sehr erheblich gegenüber 2).

Obgleich für die Formänderungen der Einfluß der Querkräfte allgemein vernachlässigt werden darf und zwar immer in den Fällen, wo die Querschnittsabmessungen gegenüber den Bauwerksabmessungen sehr klein sind, so muß man sich doch stets bewußt bleiben, daß die Querkräfte tatsächlich vorhanden sind und von Fall zu Fall überlegen, ob die durch sie bewirkte Formänderung einen nennenswerten Betrag erreicht. Die Ermittlung der Formänderungen erfolgt hier auf Grund des Hookeschen Gesetzes, wonach die Dehnungen sich verhalten wie die Spannungen.

1. Formänderung durch Längskräfte.

Ein eingespannter prismatischer Stab (Abb. 43) sei in seiner Längsrichtung durch die Kraft P beansprucht. Infolge des Gleichgewichts zwischen den äußeren und inneren Kräften muß

$$P = \sigma \cdot F \quad \text{oder} \quad \sigma = \frac{P}{F}$$

sein. Gleichzeitig und in gleichem Verhältnis mit der Spannung erfährt der Stab infolge seiner Elastizität eine Verlängerung Δl . Da nun diese naturgemäß sowohl von der Stablänge als auch von der Spannung abhängig ist, so folgt sie der Gleichung

$$\Delta l = \alpha \cdot l \cdot \sigma \quad \text{oder} \quad \frac{\Delta l}{l} = \alpha \cdot \sigma.$$

Hierin bedeutet α diejenige Verlängerung (Verkürzung), welche 1 cbcm, durch 1 kg beansprucht, erfährt; α wird allgemein als

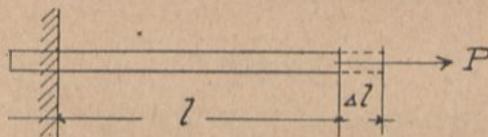


Abb. 43.

Dehnungszahl bezeichnet. Das Verhältnis ε zwischen der Verlängerung Δl und der ursprünglichen Länge l heißt Dehnung.

Also ist

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \alpha \cdot \sigma,$$

d. h. Dehnung = Dehnungszahl \times Spannung. Allgemein wird nun an Stelle der Dehnungszahl α ihr reziproker Wert $\frac{1}{\alpha} = E$ (Elastizitätsmodul) genannt, so daß die Dehnungsgleichung lautet:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma}{E} = \alpha \cdot \sigma.$$

$$\text{Für } \varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = 1 \text{ wird dann } \sigma = E,$$

d. h. ein Stab von 1 cm Länge würde durch eine Belastung von E kg um seine eigene Länge von 1 cm verlängert werden müssen. Die Spannung von der Größe $\sigma = E$ kann daher bei den für uns in Betracht kommenden Materialien nicht zur Wirklichkeit werden, hat also nur theoretischen Vergleichswert; in die Rechnung eingeführt, gilt E nur in Zusammenhang mit Spannungen unterhalb der Proportionalitätsgrenze.

Da mit größer werdendem α die Dehnbarkeit eines Materials zunimmt, so wäre die Kenntnis dieser Zahl zur Beurteilung der Elastizität desselben am zweckmäßigsten. Wird anstatt α

der reziproke Wert E angegeben, so beachte man stets, daß mit steigendem E die Elastizität abnimmt.

Betrachten wir weiter die Grundgleichung der Dehnung:

$$\varepsilon = \alpha \cdot \sigma.$$

Für Holz und Eisen stellt diese Gleichung eine gerade Linie dar (Abb. 44). Für Stein und Beton ist der Elastizitätsmodul je nach dem Grade der Spannung verschieden; infolgedessen lautet das Gesetz der Dehnung hier

$$\varepsilon = \alpha \cdot \sigma^m \text{ (Potenzgesetz),}$$

wobei m von der Art des Materials abhängig und für Beton nach Versuchen von C. v. Bach gleich 1,1 bis 1,2 zu setzen ist.

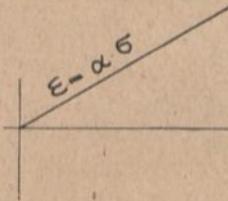


Abb. 44.

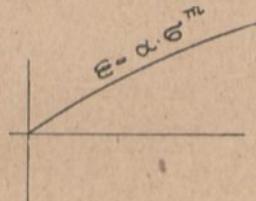


Abb. 45.

Beim Beton verhalten sich also die Dehnungen nicht wie die Spannungen¹⁾. Abb. 45 stellt diese Gleichung bildlich dar, die Spannungen als Ordinaten und die Dehnungen als Abszissen aufgetragen.

2. Formänderung durch Querkräfte.

Zu unterscheiden ist direkte Abscherung (Abb. 46), wobei die durchschnittliche Schubspannung $\tau = \frac{R}{F}$ ist, und Abscherung in Zusammenhang mit Biegung, welches die Regel ist (Abb. 47). Außer der Formänderung durch die zwischen zwei um ein Maß λ voneinander entfernt liegenden, sonst aber parallelen Querschnitten herrschende Biegung, deren Ursachen in den Normalspannungen liegt, tritt nämlich zwischen diesen noch eine Parallelverschiebung infolge der Querkräfte ein. Diese Formänderung wird gemessen durch den Verschiebungswinkel γ , um den sich zwei benachbarte Querschnitte F_1 und F_2 parallel gegeneinander verschieben. Nach dem Hookeschen Gesetz ver-

¹⁾ Für die Berechnung darf Verhältnisgleichheit zwischen Spannung und Dehnung angenommen werden.

halten sich die Verschiebungswinkel γ wie die Schubspannungen τ dividiert durch die Gleitzahl G , also

$$\gamma = \frac{\tau}{G}.$$

G richtet sich nach dem Material. Die Belastung G kg würde die um 1 cm entfernten Nachbarquerschnitte eines Stabes von 1 cm² Querschnittsfläche um das Maß von 1 cm gegeneinander verschieben (Abb. 47). Insofern hat die Gleitzahl eine gewisse Ähnlichkeit mit dem Elastizitätsmodul.

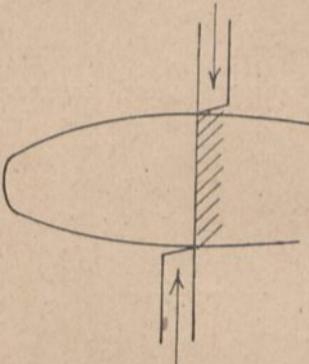


Abb. 46.

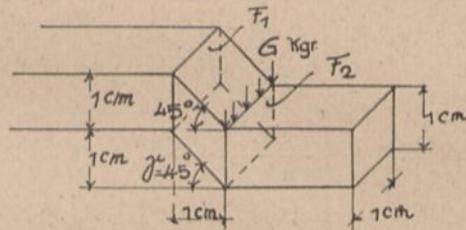


Abb. 47.

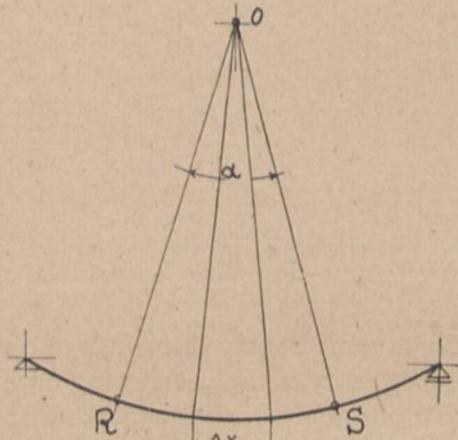


Abb. 48.

3. Formänderung durch Biegung.

Die neutrale Faser wird weder verlängert noch verkürzt, sondern nur gebogen und heißt elastische Linie. Wir betrachten den Teil RS (Abb. 48) irgendeines gebogenen Stabes und denken uns das sehr kleine Bogenstück Δx mit dem Zentriwinkel $\Delta \alpha$ herausgeschnitten (Abb. 49); der Krümmungsradius

an dieser Stelle sei ϱ . Wir können sodann die Fläche OEF als Kreissektor auffassen. Δx ist ein Differential der elastischen Linie und kann als solches als Bogenstück mit dem konstanten Radius ϱ angesehen werden. Damit ist aber nicht gesagt, daß

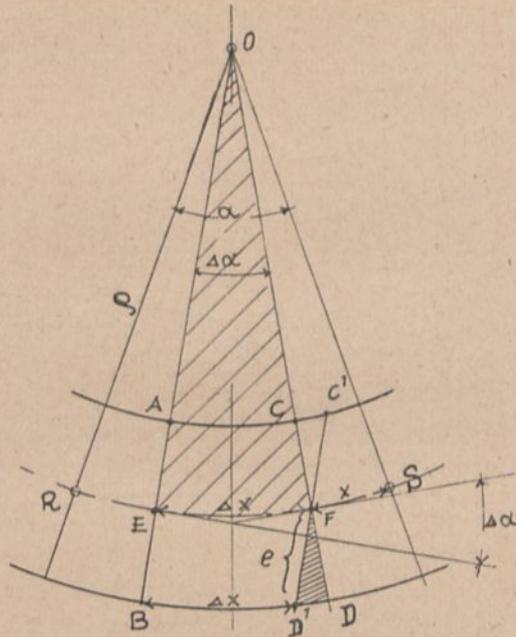


Abb. 49.

dieser Radius ϱ für alle Punkte der elastischen Linie Geltung haben soll, auch nicht zwischen R und S ; im Gegenteil hat jedes Differential Δx seinen eigenen Radius ϱ , so daß die Lage des Mittelpunktes O sich fortwährend ändert. Wäre das nicht der Fall, dann bestände kein Unterschied zwischen elastischer Linie und Kreisbogen.

$\triangle D'FD$ ähnlich $\triangle OEF$ (weil sehr klein),

also

$$D'D : EF = \Delta l : l = \varepsilon = \text{Dehnung von } \Delta x.$$

Nun ist

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

(vgl. Formänderung durch Längskräfte), also

$$\frac{D'D}{EF} = \frac{\sigma}{E}.$$

Ferner ist

$$D'F = e \quad \text{und} \quad \frac{e}{\varrho} = \frac{D'D}{EF};$$

öbiger Wert eingesetzt, gibt

$$\frac{e}{\varrho} = \frac{\sigma}{E}.$$

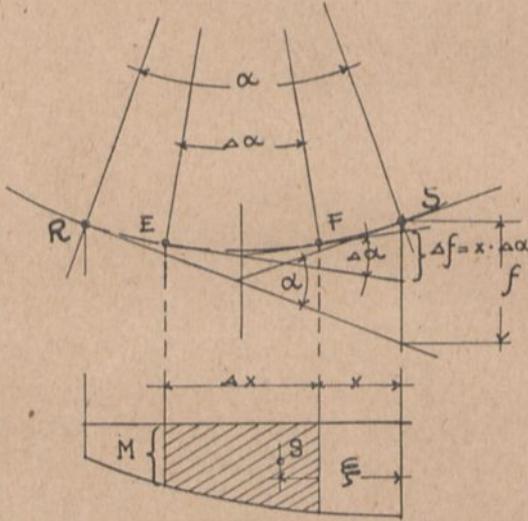


Abb. 50.

$$\text{Für } \sigma = \frac{M}{W} = \frac{M \cdot e}{J}$$

$$\text{ist } \frac{e}{\varrho} = \frac{M \cdot e}{J \cdot E} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{\varrho} = \frac{M}{E \cdot J},$$

woraus

$$\varrho = \frac{E \cdot J}{M}.$$

Setzt man ferner in die Gleichung $\frac{1}{\varrho} = \frac{M}{E \cdot J}$ den Wert $\Delta x = \Delta \alpha \cdot \varrho$, also $\varrho = \frac{\Delta x}{\Delta \alpha}$ ein, so erhält man

$$\Delta \alpha = \frac{M \cdot \Delta x}{E \cdot J}.$$

Für die ganze Strecke RS , die wir betrachtet haben, ist dann

$$\alpha = \frac{\sum M \cdot \Delta x}{E \cdot J}.$$

Zu dieser Formel können wir nun noch folgende Deutung finden:

$$\sum_{x=0}^{x=RS} M \cdot \Delta x = F.$$

F stellt die Momentenfläche des Trägers für den Teil RS dar (Abb. 50), also

$$\alpha = \frac{F}{E \cdot J}.$$

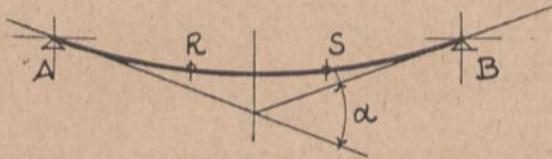


Abb. 51.

Betrachten wir nicht nur das Stück RS , sondern den ganzen Balken AB , so bedeutet also α den Winkel, um den sich die Endquerschnitte des Balkens, die vor der Durchbiegung parallel standen, gegeneinander geneigt haben (Abb. 51).

b) Entwicklung der Formel für die Durchbiegung aus der elementaren Ableitung für den Krümmungsradius¹⁾.

Wir betrachten zunächst wieder das Stück RS und ziehen durch S eine Lotrechte (Abb. 50). Von dieser Lotrechten ab gemessen liege um das veränderliche Maß x entfernt ein zu x gehöriges Differential Δx . Dann ist das Stückchen, welches die Tangenten in F und E , d. i. in den Endpunkten des Differentials der elastischen Linie auf der Lotrechten abschneiden, $\Delta f = x \cdot \Delta \alpha$.

Da nun

$$\Delta \alpha = \frac{M \cdot \Delta x}{E \cdot J},$$

so ist

$$\Delta f = \frac{x \cdot M \cdot \Delta x}{E \cdot J}$$

¹⁾ Bearbeitet nach Keck-Hotopp, „Elastizitätslehre“, erster Teil. Helwingsche Verlagsbuchhandlung, Hannover.

und

$$f = \frac{\sum M \cdot \Delta x \cdot x}{E \cdot J}$$

oder

$$f = \frac{1}{E \cdot J} \sum_{x=0}^{x=RS} M \cdot \Delta x \cdot x.$$

Der im \sum -Zeichen stehende Wert stellt die Summe der statischen Momente aller Flächenstreifen $M \cdot \Delta x$ in bezug auf die Lotrechte durch den Punkt S dar und ist danach gleich der ganzen Fläche mal dem wagerechten Abstand ihres Schwerpunktes von der Lotrechten durch S , also $= F \cdot \xi$; somit

$$f = \frac{F \cdot \xi}{E \cdot J}.$$

Mit Hilfe der Strecke f sind wir imstande, an jeder Stelle eines einfachen oder durchgehenden Trägers mit konstantem Trägheitsmoment für jeden Belastungsfall die Ordinaten der Biegelinie und die Verdrehung der Querschnitte aus der ursprünglichen Lage festzustellen, soweit nur die Biegungseinflüsse in Frage kommen. Wir behandeln im nachfolgenden unter Nr. 1 die Anwendung der Gleichung für f zur Bestimmung der Durchbiegungen am Ende von Kragträgern, und in der Mitte von Trägern auf zwei Stützen, unter Nr. 2 im Zusammenhang damit die Bestimmung von Auflagerdrücken, unter Nr. 3 die Anwendung derselben Gleichung zur Bestimmung der Durchbiegung in beliebigen Schnitten eines einfachen oder durchgehenden Trägers und unter Nr. 4 die Herleitung der Clapeyronschen Gleichung mit Hilfe der Beziehungen für α und f .

1. Bestimmung von Durchbiegungen für einige einfache Fälle.

Freitragger mit einer Einzellast am Ende (Abb. 52).

$$\alpha = \frac{F}{E \cdot J} = \frac{P \cdot l \cdot \frac{l}{2}}{E \cdot J} = \frac{P \cdot l^2}{2 \cdot E \cdot J}$$

$$f = \frac{F \cdot \xi}{E \cdot J} = \frac{P \cdot l^2}{2} \cdot \frac{2}{3} \frac{l}{E \cdot J}$$

oder

$$f = \frac{P \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot J}.$$

Freitragger mit einer gleichmäßig verteilten Last (Abb. 53).

$$\alpha = \frac{q \cdot l^2}{2} \cdot \frac{l}{3 \cdot E \cdot J} = \frac{q \cdot l^3}{6 \cdot E \cdot J}$$

$$f = \alpha \cdot \xi = \frac{q \cdot l^3}{6 \cdot E \cdot J} \cdot \frac{3}{4} l$$

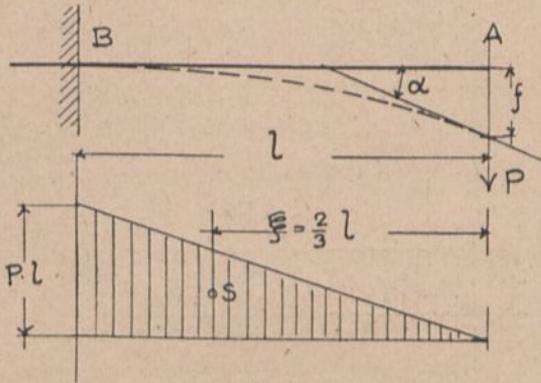


Abb. 52.

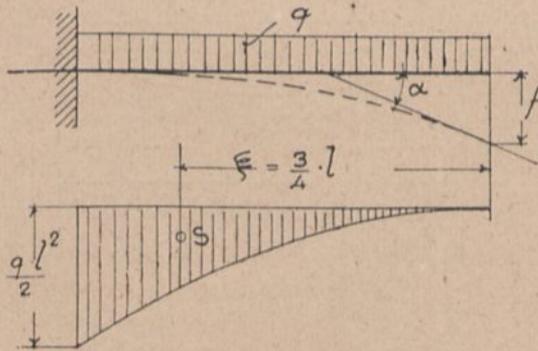


Abb. 53.

oder

$$f = \frac{q \cdot l^4}{8 \cdot E \cdot J}$$

Freitragger belastet mit einem Moment (Abb. 54).

$$\alpha = \frac{M \cdot l}{E \cdot J}$$

$$f = \alpha \cdot \xi = \frac{M \cdot l}{E \cdot J} \cdot \frac{l}{2}$$

oder

$$f = \frac{M \cdot l^2}{2E \cdot J}$$

Träger auf zwei Stützen mit gleichmäßig verteilter Last (Abb. 55).

$$f = \frac{2}{3} \cdot \frac{q \cdot l^2}{8} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{5}{16} l \cdot \frac{1}{E \cdot J}$$

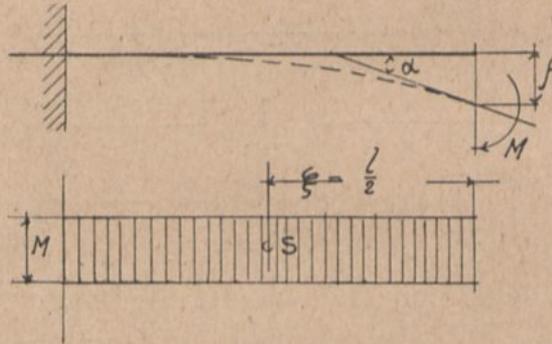


Abb. 54.

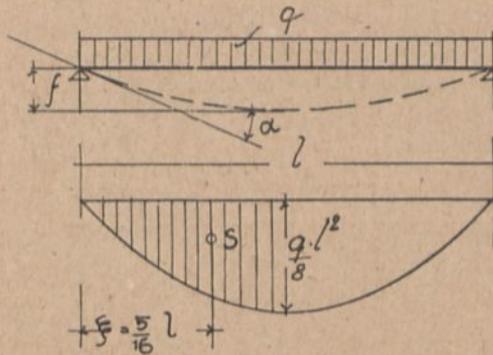


Abb. 55.

oder

$$f = \frac{5}{384} \cdot \frac{q \cdot l^4}{E \cdot J}$$

Träger auf zwei Stützen mit zwei symmetrisch liegenden Einzellasten (Abb. 56).

$$f = \frac{F \cdot \xi}{E \cdot J} = \frac{1}{E \cdot J} \left(P \cdot a \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4} - \frac{P \cdot a^2}{2} \cdot \frac{a}{3} \right)$$

oder

$$f = \frac{P \cdot a}{24 \cdot E \cdot J} \cdot (3l^2 - 4a^2)$$

Das letzte Ergebnis dient zur Verallgemeinerung, wenn man sich die Durchbiegung in der Mitte aus zwei Teilen bestehend denkt, deren jeder durch eine der Lasten bewirkt ist. Es wäre also $f = 2 \cdot f'$.

Allgemeiner Fall, wenn die Lasten beliebigen Abstand haben (Abb. 57).

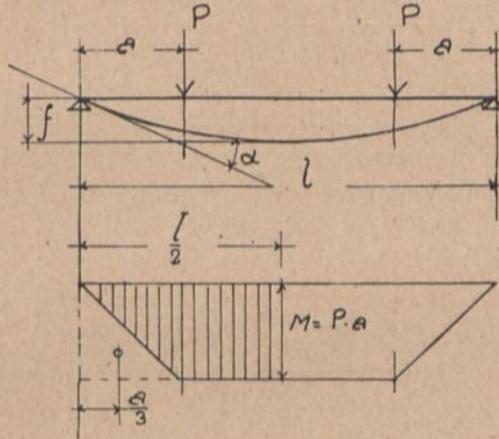


Abb. 56.

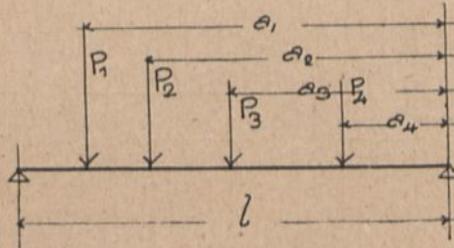


Abb. 57.

$$f = \frac{P_1 \cdot a_1}{48 \cdot E \cdot J} \cdot (3l^2 - 4a_1^2) + \frac{P_2 \cdot a_2}{48 \cdot E \cdot J} \cdot (3l^2 - 4a_2^2) + \frac{P_3 \cdot a_3}{48 \cdot E \cdot J} \cdot (3l^2 - 4a_3^2) + \dots$$

oder

$$f = \frac{1}{48 \cdot E \cdot J} \cdot \sum P \cdot a (3l^2 - 4a^2).$$

Für eine Einzellast in der Mitte ist

$$f = \frac{P \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot J}.$$

2. Bestimmung von Auflagerdrücken (statisch unbestimmten Größen).
Träger an einem Ende eingespannt und am anderen Ende frei aufliegend (Abb. 58).

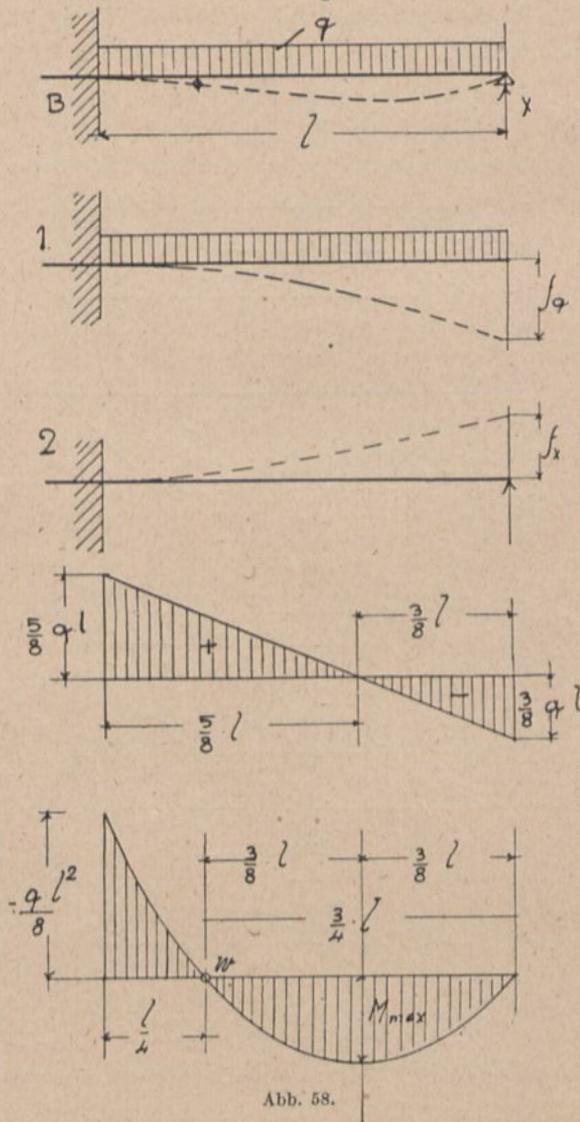


Abb. 58.

Man entfernt die statisch überzählige Größe X und erhält als statisch bestimmtes Hauptsystem einen einfachen Kragträger, den man 1. mit der äußeren Last und 2. mit der überzähligen Größe allein zu belasten hat. Man stellt für jeden Fall die Durchbiegung

fest und braucht dann nur noch diese beiden Durchbiegungen gleichzusetzen, da eine Senkung bei X ausgeschlossen sein soll.

Es ist:

$$f_q = \frac{q \cdot l^4}{8 \cdot E \cdot J}$$

und

$$f_x = \frac{X \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot J},$$

also

$$\frac{q \cdot l^4}{8 \cdot E \cdot J} = \frac{X \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot J},$$

woraus

$$X = \frac{3}{8} \cdot q \cdot l.$$

$$B + X = q \cdot l$$

$$B = q \cdot l - X$$

oder

$$B = q \cdot l - \frac{3}{8} \cdot q \cdot l$$

$$B = \frac{5}{8} \cdot q \cdot l.$$

Ferner

$$-M_B - \frac{3}{8} q \cdot l \cdot l + q \cdot l \cdot \frac{l}{2} = 0,$$

daraus

$$M_B = -\frac{q \cdot l^2}{8}.$$

Das positive M_{\max} wird einfach vom Endauflager aus bestimmt. Die Querkraft ist bei $\frac{3}{8}l = 0$, also

$$M_{\max} = \frac{3}{8} \cdot q \cdot l \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{l}{2} = \frac{9}{128} \cdot q \cdot l^2.$$

Die Lage des Wendepunktes der elastischen Linie, gleichbedeutend mit dem Nullpunkt des Momentes, muß sich aus der Gleichung für einen beliebigen Abstand x ergeben

$$M_x = \frac{3}{8} \cdot q \cdot l \cdot x - q \cdot \frac{x^2}{2} = 0,$$

daraus

$$x = \frac{3}{4} l.$$

Träger auf drei Stützen (Abb. 59).

Zunächst denken wir uns die Mittelstütze entfernt und berechnen die Durchbiegung des so erhaltenen einfachen Trägers, wobei wir den Fall eines einseitig eingespannten Trägers zugrunde legen können.

Wir erhalten infolge der Reaktion Q nach oben

$$f_Q = \frac{Q \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot J}$$

und nach unten infolge der gleichmäßigen Last q

$$f_q = \frac{q \cdot l^4}{8 \cdot E \cdot J} = \frac{Q l^3}{8 \cdot E \cdot J}.$$

Die Durchbiegung f wäre demnach

$$f = \frac{Q l^3}{3 \cdot E \cdot J} - \frac{Q \cdot l^3}{8 \cdot E \cdot J} = \frac{5 \cdot Q \cdot l^3}{24 \cdot E \cdot J}.$$

Da eine Mittelstütze vorhanden ist, so muß jetzt diese Durchbiegung f von der Mittelstütze C aufgehoben werden. Wir erhalten für die Kraft $\frac{C}{2}$ in bezug auf die Einspannung in der Mitte

$$f_c = \frac{C}{2} \cdot \frac{l^3}{3 \cdot E \cdot J} = \frac{C \cdot l^3}{6 \cdot E \cdot J}.$$

Es muß nun $f = f_c$ sein, also

$$\frac{5 \cdot Q \cdot l^3}{24 \cdot E \cdot J} = \frac{C \cdot l^3}{6 \cdot E \cdot J},$$

daraus

$$C = \frac{5}{4} Q \quad \text{und} \quad A = B = \frac{3}{8} Q.$$

Dasselbe Ergebnis hätten wir auch erzielen können mit Gebrauch der Formel für den Träger auf zwei Stützen bei gleichmäßiger Belastung bzw. einer Einzellast in der Mitte.

Die maximalen Feldmomente betragen

$$M_{\max} = \frac{3}{8} Q \cdot \frac{3}{8} l - \frac{3}{8} Q \cdot \frac{3}{16} l = \frac{9}{128} \cdot Q \cdot l.$$

Anmerkung. Zieht man von dem Moment in $\frac{3}{8} l$ des Trägers unter Voraussetzung drehbarer Auflagerung an beiden Enden den zugehörigen Einfluß des negativen Momentes, also $\frac{q l^2}{8} \cdot \frac{3}{8} \frac{l}{l}$ ab, so ergibt das den für M_{\max} berechneten Wert; die Momentenlinie in Abb. 58 und 59 ist also eine verschobene Parabel.

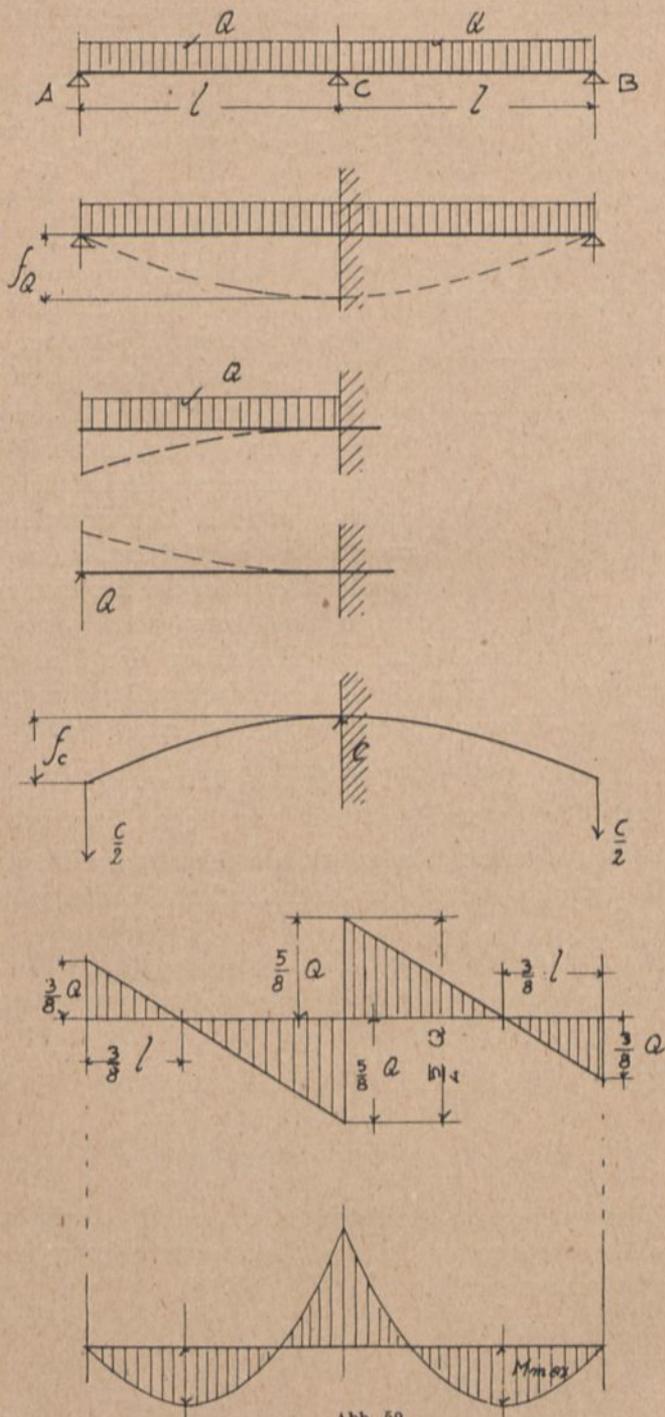


Abb. 50.

3. Bestimmung von Durchbiegungen in beliebigen Schnitten einfacher oder durchlaufender Träger.

Die Durchbiegung f im beliebigen Punkte m des Trägers ergibt sich aus der Differenz $\delta'_1 - f'$ (Abb. 60). δ'_1 ist durch δ_1 bekannt, und dieses findet man ohne weiteres für $x = l$ und mit der zugehörigen gesamten Momentenfläche; f' läßt sich genau so für $x = b$ und mit dem zur Länge b gehörigen Teilstück der Momentenfläche ermitteln. Dabei sind die Lotrechten durch A und m die Geraden, auf die sich die statischen Momente $F \cdot \xi$

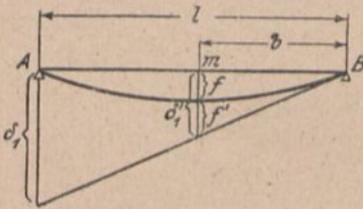


Abb. 60.

zu beziehen haben. Die Art der Verbiegung des Trägers ist dabei gleichgültig.

Gehört das Trägerfeld einem durchlaufenden Träger an, so ist außer der positiven Momentenfläche auch die negative, durch die Zusammenhangsmomente über den Stützen bedingte Momentenfläche bei der Bestimmung des Wertes von F und $F \cdot \xi$ zu beachten, sonst aber genau so zu verfahren. Unter Nr. 4 wird die Herleitung der Clapeyronschen Gleichung mit Hilfe derselben einfachen Beziehungen, auf die sich unsere bisherigen Vorführungen stützten, gezeigt.

4. Träger auf mehreren Stützen.

(Ableitung der Clapeyronschen Gleichung nach der Biegungslehre.)¹⁾

Es liege ein beliebig belasteter durchlaufender Träger vor, dessen Stützpunkte unter der eintretenden Belastung gewisse

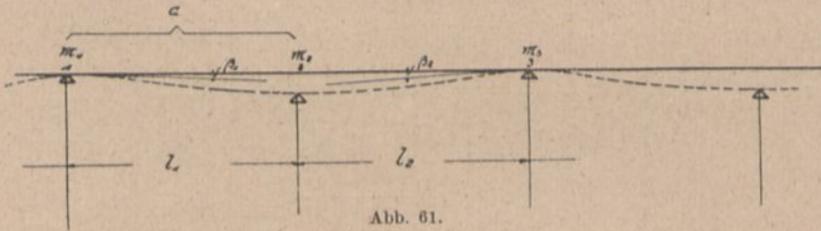


Abb. 61.

vertikale Verschiebungen c erlitten haben mögen. Gesucht seien die statisch unbestimmten Größen, die Zusammenhangsmomente über den Stützpunkten.

Wir betrachten ein beliebiges Feld a (Abb. 61), schneiden es,

¹⁾ Vgl. Keck-Hotopp I, S. 144.

um es statisch bestimmt zu machen, aus dem Zusammenhang heraus und erhalten:

1. das statisch bestimmte Hauptsystem, den einfachen Balken, mit beliebiger Belastung und zugehörigen Momenten M_{0x} , zugehörigen Auflagerreaktionen C_0 und Querkräften Q_0 (Abb. 62);

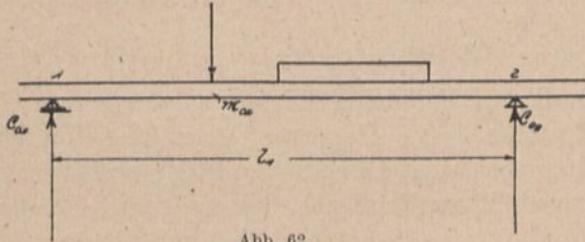


Abb. 62.

2. das statisch bestimmte Hauptsystem, belastet mit den statisch unbestimmten Größen, das sind die Zusammenhangsmomente M_1 und M_2 (Abb. 63).

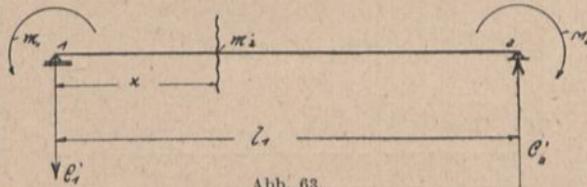


Abb. 63.

Für den Fall, daß M_1 und M_2 gleich sind, entstehen hierbei keine lotrechten Reaktionen C'_1 und C'_2 . Wird dagegen $M_2 > M_1$, so verbleibt ein nach rechts drehender Rest $M_2 - M_1$, der an der Wirkungsstelle der lotrechten Reaktionen C das nach links drehende Gegenmoment $C'_1 \cdot l_1 = C'_2 \cdot l_1$ erzeugt, so daß

$$C'_2 = C'_1 = \frac{M_2 - M_1}{l_1}. \quad (1)$$

An beliebiger Stelle x ist im selben Falle das Moment

$$M'_x = -C'_1 \cdot x - M_1;$$

C'_1 aus voriger Gleichung eingesetzt:

$$M'_x = -M_2 \cdot \frac{x}{l_1} + M_1 \cdot \frac{x}{l_1} - M_1;$$

$$M'_x = -M_1 \left(1 - \frac{x}{l_1}\right) - M_2 \cdot \frac{x}{l_1} = -M_1 \cdot \frac{l_1 - x}{l_1} - M_2 \cdot \frac{x}{l_1}.$$

Das Gesamtmoment ist also:

$$M_x = M_{0x} + M'_x = M_{0x} - M_1 \cdot \frac{l_1 - x}{l_1} - M_2 \cdot \frac{x}{l_1}. \quad (3)$$

Abb. 64 erklärt die unter (3) angegebene Gleichung zeichnerisch.

Zur weiteren Behandlung unserer Aufgabe benutzen wir jetzt die Gleichung $\alpha = \frac{F}{E \cdot J}$ (S. 29 und Abb. 51), indem wir unter α in diesem Falle den Winkel $\alpha_1 - \alpha_2$ der Abb. 65 verstehen und unter F die Momentenfläche, die dem ganzen Belastungsfall entspricht und sich also aus der positiven, aber sonst ganz beliebigen Momentenfläche des einfachen Trägers F_1 und der negativen, durch die beiden Zusammenhangsmomente bedingten Momentenfläche zusammensetzt (Abb. 64).

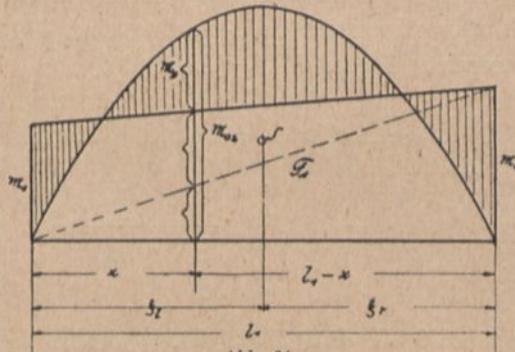


Abb. 64.

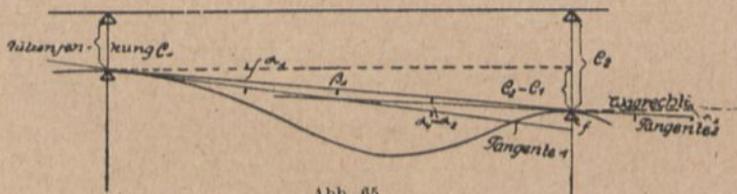


Abb. 65

Wir erhalten also an Hand der Abb. 64 und 65

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \frac{F_1 - \frac{M_2 \cdot l_1}{2} - \frac{M_1 \cdot l_1}{2}}{E \cdot J},$$

woraus

$$E \cdot J (\alpha_1 - \alpha_2) = F_1 - \frac{M_2 \cdot l_1}{2} - \frac{M_1 \cdot l_1}{2}. \quad (4)$$

Bringen wir nun für die in Abb. 65 gekennzeichnete, zu dem Winkel $\alpha_1 - \alpha_2$ gehörige Strecke f die Gleichung

$$f = \frac{F \cdot \xi}{E \cdot J}$$

zur Anwendung und verstehen wir darin unter F wieder die algebraische Summe der für die vorliegende Öffnung in Betracht kommenden Momentenflächen, so hätten wir an Hand von Abb. 64

$$f = \frac{1}{E \cdot J} \left(F_1 \cdot \xi_r - M_2 \cdot \frac{l_1}{2} \cdot \frac{l_1}{3} - M_1 \cdot \frac{l_1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot l_1 \right).$$

Wenn andererseits (Abb. 65)

$$f = l_1 \alpha_1 - (c_2 - c_1)$$

und

$$c_2 - c_1 = l_1 \operatorname{tg} \beta_1 = \infty l_1 \beta_1,$$

also

$$f = l_1 \alpha_1 - l_1 \beta_1$$

ist, so erhalten wir aus unserer Gleichung für f :

$$E \cdot J (l_1 \alpha_1 - l_1 \beta_1) = F_1 \xi_r - M_2 \cdot \frac{l_1^2}{6} - M_1 \cdot \frac{l_1^2}{3},$$

und weiter bei Division mit l_1

$$E \cdot J \alpha_1 = E \cdot J \beta_1 + \frac{F_1 \cdot \xi_r}{l_1} - \frac{M_2 \cdot l_1}{6} - \frac{M_1 \cdot l_1}{3}. \quad (5)$$

Für das nächstfolgende Feld ergibt sich entsprechend (ξ_l und ξ_r sinngemäß auch auf dieses Feld angewendet)

$$E \cdot J \alpha_2 = E \cdot J \beta_2 + \frac{F_2 \cdot \xi_r}{l_2} - \frac{M_3 \cdot l_2}{6} - \frac{M_2 \cdot l_2}{3}. \quad (6)$$

Weiter Gleichung (6) von Gleichung (5) abgezogen gibt:

$$E \cdot J \alpha_1 - E \cdot J \alpha_2 = E \cdot J (\beta_1 - \beta_2) + \frac{F_1 \cdot \xi_r}{l_1} - \frac{F_2 \cdot \xi_r}{l_2} - M_2 \cdot \left(\frac{l_1}{6} - \frac{l_2}{3} \right) + \frac{M_3 \cdot l_2}{6} - \frac{M_1 \cdot l_1}{3}. \quad (6a)$$

Setzen wir für die linke Seite von Gleichung (6a) die rechte Seite von Gleichung (4) ein, so ergibt sich

$$F_1 - \frac{M_2 \cdot l_1}{2} - \frac{M_1 \cdot l_1}{2} = E \cdot J (\beta_1 - \beta_2) + \frac{F_1 \cdot \xi_r}{l_1} - \frac{F_2 \cdot \xi_r}{l_2} - M_2 \cdot \left(\frac{l_1}{6} - \frac{l_2}{3} \right) + \frac{M_3 \cdot l_2}{6} - \frac{M_1 \cdot l_1}{3}.$$

Bringen wir weiter alle M nach links und multiplizieren wir die ganze Gleichung mit -6 , so erhalten wir

$$3 M_2 \cdot l_1 + 3 M_1 \cdot l_1 - M_2(l_1 - 2l_2) - 2 M_1 \cdot l_1 + M_3 \cdot l_2 \\ = 6 F_1 - \frac{6 F_1 \cdot \xi_r}{l_1} + \frac{6 F_2 \cdot \xi_r}{l_2} + 6 E \cdot J \cdot (\beta_2 - \beta_1);$$

woraus

$$M_1 \cdot l_1 + 2 M_2(l_1 + l_2) + M_3 \cdot l_2 \\ = 6 F_1 \cdot \frac{l_1 - \xi_r}{l_1} + \frac{6 F_2 \cdot \xi_r}{l_2} + 6 E \cdot J \cdot (\beta_2 - \beta_1).$$

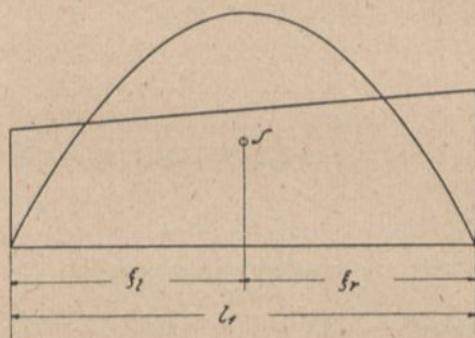


Abb. 66.

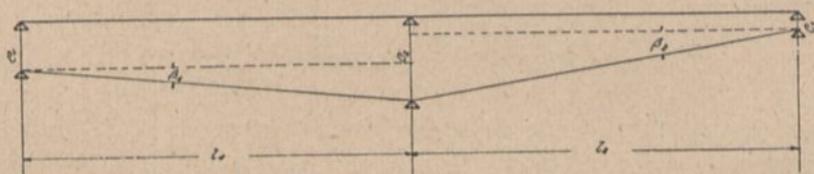


Abb. 67.

Für $l_1 - \xi_r = \xi_l$ (Abb. 66) und für die Winkel β ihre Tangenten eingesetzt, also

$$\beta_2 - \beta_1 = \operatorname{tg} \beta_2 - \operatorname{tg} \beta_1 = \frac{c_2 - c_3}{l_2} - \frac{c_2 - c_1}{l_1} \quad (\text{Abb. 67})$$

erhalten wir die Clapeyronsche Gleichung:

$$\text{I. } M_1 \cdot l_1 + 2 M_2(l_1 + l_2) + M_3 \cdot l_2 \\ = \frac{6 F_1 \cdot \xi_l}{l_1} + \frac{6 F_2 \cdot \xi_r}{l_2} + 6 E \cdot J \left[\frac{c_2 - c_3}{l_2} - \frac{c_2 - c_1}{l_1} \right].$$

Diese Gleichung ist bekanntlich so oft aufzustellen, als unbekannte Stützenmomente vorhanden sind, so daß die Anzahl der Gleichungen der Anzahl der Unbekannten entspricht und diese ermittelt werden können.

$F_1 \cdot \xi_l$ und $F_2 \cdot \xi_r$ stellen hierin die statischen Momente der primären Momentenflächen, bezogen auf die linke Auflagerlotrechte des linken Feldes bzw. die rechte Auflagerlotrechte des rechten Feldes dar und werden entsprechend auch mit L und R bezeichnet.

Statische Voraussetzungen für die Gültigkeit der Clapeyronschen Gleichung sind insbesondere:

1. Ein Lager fest, alle anderen wagerecht beweglich.
2. Unnachgiebigkeit der Auflager nach oben, so daß kein Abheben des Balkens eintreten kann; eine Nachgiebig-

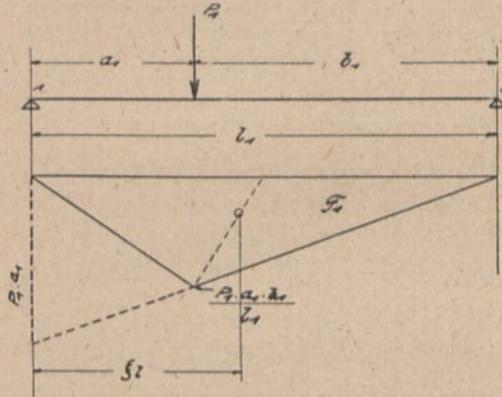


Abb. 68.

keit der Träger nach unten wäre entsprechend zu berücksichtigen.

3. Konstantes Trägheitsmoment.

Wie weit gegen diese Voraussetzungen bei der Ausführung durchlaufender Träger im Eisenbetonbau verstoßen wird und welchen Näherungsgrad daher die Clapeyronsche Gleichung für die Praxis gemeinhin besitzt, ist in Band I näher auseinandergesetzt.

Deutung des Gliedes der rechten Seite bei Belastung durch Einzellasten (Abb. 68):

$$\frac{6 F_1 \cdot \xi_l}{l_1} = \frac{6}{l_1} \left[P_1 a_1 \cdot \frac{l_1}{2} \cdot \frac{l_1}{3} - P_1 a_1 \cdot \frac{a_1}{2} \cdot \frac{a_1}{3} \right] = \frac{P_1 \cdot a_1}{l_1} [l_1^2 - a_1^2].$$

Ebenso erhalten wir für das zweite Glied der rechten Seite:

$$\frac{6 F_2 \cdot \xi_r}{l_2} = \frac{P_2 \cdot a_2}{l_2} [l_2^2 - a_2^2].$$

Die Clapeyronsche Gleichung für mehrere Einzel-
lasten lautet somit:

$$\text{II. } M_1 \cdot l_1 + 2 M_2 (l_1 + l_2) + M_3 \cdot l_2 = \sum \frac{P_1 \cdot a_1}{l_1} (l_1^2 - a_1^2) \\ + \sum \frac{P_2 \cdot a_2}{l_2} (l_2^2 - a_2^2) + 6 E \cdot J \left(\frac{c_2 - c_3}{l_2} - \frac{c_2 - c_1}{l_1} \right).$$

Zu beachten bleibt bei Einsetzung der Längen, daß sich die Maße a_1 auf das zu M_1 gehörige Auflager, die Maße a_2 auf das zu M_3 gehörige Auflager beziehen, so daß der Abstand der Lasten von dem jeweiligen Mittelaullager nicht in Frage kommt.

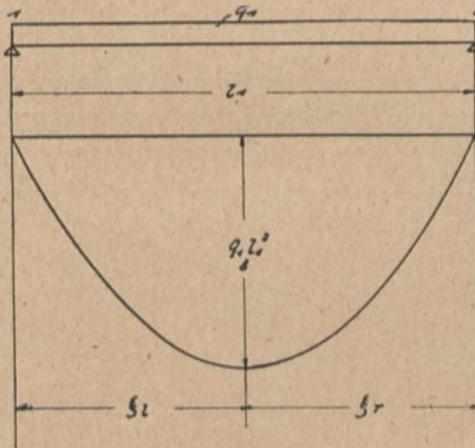


Abb. 69.

Bei gleichmäßiger Belastung mit q_1 wird (Abb. 69)

$$\frac{6 F_1 \cdot \xi_l}{l_1} = \frac{6 F_1' \cdot \xi_r}{l_1} = \frac{6}{l_1} \left(\frac{2}{3} l_1 \frac{q_1 \cdot l_1^2}{8} \cdot \frac{l_1}{2} \right) = \frac{1}{4} q_1 \cdot l_1^3; \\ \frac{6 F_2 \cdot \xi_r}{l_2} = \frac{1}{4} q_2 \cdot l_2^3,$$

so daß die Clapeyronsche Gleichung für gleichmäßige
Belastung lautet:

$$\text{III. } M_1 \cdot l_1 + 2 M_2 (l_1 + l_2) + M_3 \cdot l_2 \\ = \frac{1}{4} (q_1 \cdot l_1^3 + q_2 \cdot l_2^3) + 6 E \cdot J \left(\frac{c_2 - c_3}{l_2} - \frac{c_2 - c_1}{l_1} \right).$$

Die rechten Seiten der Clapeyronschen Gleichung
stellen Minuswerte dar, weil die Zusammenhangsmo-
mente bei belasteten Öffnungen negativer Natur sind.

Bei unnachgiebigen Stützen wird das letzte Glied
(das sogenannte Korrektionsglied) gleich Null.

Für einen Träger auf drei Stützen, dessen Mittelaufleger die Senkung c_2 erfährt, während die Endaufleger fest bleiben (Abb. 70), ergibt sich das entsprechende Zusammenhangsmoment infolge dieser Senkung aus der Gleichung:

$$2 M_2(l_1 + l_2) = 6 E \cdot J \left[\frac{c_2 - 0}{l_2} - \frac{c_2 - 0}{l_1} \right] = -6 E \cdot J \cdot c_2 \left(\frac{1}{l_2} + \frac{1}{l_1} \right).$$

Die Auflagerdrücke jedes Feldes sind nach den Angaben zu 1 und 2 Seite 39 zu bestimmen; sie sind also am ein-

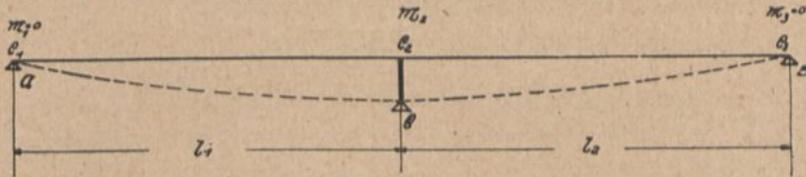


Abb. 70.

fachen Balken zu bestimmen, der einmal wie gewöhnlich durch lotrechte Lasten, sodann durch die Differenz der Stützenmomente in Anspruch genommen ist; ist hierbei M_2 größer als M_1 , so tritt für Auflager 2 eine Druckerhöhung von

$$C'_2 = \frac{M_2 - M_1}{l_1} \quad (\text{Abb. 63})$$

und für Auflager 1 eine Druckverminderung von

$$C'_1 = \frac{M_2 - M_1}{l_1}$$

ein; ist $M_2 = M_1$, so entsprechen die Reaktionen des betreffenden Feldes genau denen eines gewöhnlichen Trägers. Die Gesamtdrücke auf irgendeinen Stützpunkt des durchlaufenden Trägers ergeben sich einfach aus den Teildrücken der beiden anschließenden Felder.

e) Die Differentialgleichung der elastischen Linie.¹⁾

Diese gibt im allgemeinen dieselben Resultate. Was wir mit Hilfe der elementaren Ableitung für den Krümmungsradius aber noch nicht feststellen konnten, das war eine allgemeine Gleichung für die elastische Linie (Biegelinie) bei den verschiedenen Belastungsfällen. Da das Moment sich ständig ändert, so besagt die Gleichung für den Krümmungsradius

$$\varrho = \frac{E \cdot J}{M},$$

¹⁾ Bearbeitet nach Keck-Hotopp, „Elastizitätslehre“, erster Teil.

daß auch der Radius ϱ veränderlich ist und gewissermaßen jedes kleine Element der Biegelinie seinen eigenen Radius hat.

Abb. 71 zeigt einen beliebig gestützten und beliebig belasteten Balken. Um die Ableitung zu vereinfachen, ist die Ein

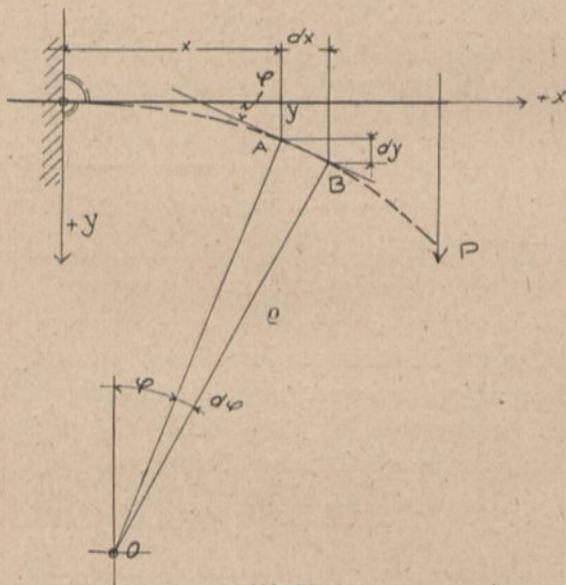


Abb. 71.

spannung wagerecht angenommen und beziehen wir die Ordinaten auf ein Achsenkreuz, welches entsprechend einfach gewählt ist. Es ist nun das kleine Element des Bogenstückes

$$AB = \varrho \cdot d\varphi$$

und

$$\varrho = \frac{AB}{d\varphi} = \frac{dx}{d(\operatorname{tg} \varphi)}$$

oder

$$\varrho = \frac{dx}{d \frac{dy}{dx}}; \quad \frac{1}{\varrho} = \frac{d \frac{dy}{dx}}{dx}$$

Die rechte Seite bedeutet den zweiten Differentialquotienten von y nach x , also

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

Früher erhielten wir das Resultat $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E \cdot J}$; damit lautet jetzt unsere Differentialgleichung der elastischen Linie

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{E \cdot J}.$$

Bei mehrfacher Verbiegung eines Stabes oder Stabgebildes wäre die Differentialgleichung für jeden Kurvenast besonders zu bestimmen; Beispiel dazu Zentralbl. d. Bauverwaltg. 1916, S. 210 (Nr. 230).

1. Anwendung auf verschiedene Trägerarten.

α) Es soll für den in Abb. 72 dargestellten Belastungszustand die Gleichung der elastischen Linie, bezogen auf das angegebene Achsenkreuz, berechnet werden.

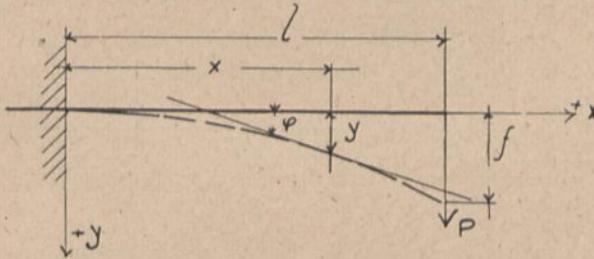


Abb. 72.

Wir greifen einen Punkt mit den Koordinaten x, y heraus und stellen für diesen die Differentialgleichung der elastischen Linie auf:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{E \cdot J} = \frac{P \cdot (l - x)}{E \cdot J}.$$

Um zu der Gleichung der Linie zu kommen, welche die gerade Beziehung zwischen x und y ausdrückt, müssen wir die Gleichung zweimal integrieren.

Differentialgleichung
$$\frac{d}{dx} \frac{dy}{dx} = \frac{P(l-x)}{E \cdot J}$$

oder

$$d \frac{dy}{dx} = \frac{P(l-x)}{E \cdot J} \cdot dx;$$

integriert

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P}{E \cdot J} \left(l \cdot x - \frac{x^2}{2} \right) + C$$

$$\frac{dy}{dx} = \text{Steigung} = \text{tg } \varphi .$$

Wir können nun aus der folgenden Betrachtung die noch unbekannte Konstante C gewinnen, welche vor der zweiten Integration festgestellt sein muß.

Für $x = 0$ ist auch $\text{tg } \varphi = 0$, also

$$0 = \frac{P}{E \cdot J} \cdot \left(l \cdot 0 - \frac{0^2}{2} \right) + C$$

$$0 = 0 + C$$

daher

$$C = 0 ,$$

also endgültig

$$\frac{dy}{dx} = \text{tg } \varphi = \frac{P}{E \cdot J} \left(l \cdot x - \frac{x^2}{2} \right) .$$

Diese Differentialgleichung erster Ordnung gestattet für jedes beliebige x die Auffindung des Winkels φ , z. B. für

$$x = l$$

ist

$$\text{tg } \varphi = \frac{P}{E \cdot J} \left(l \cdot l - \frac{l^2}{2} \right) = \frac{P \cdot l^2}{2 \cdot E \cdot J}$$

(vgl. früheres Resultat).

Die zweite Integration liefert

$$\int dy = \int \frac{P}{E \cdot J} \cdot \left(l \cdot x - \frac{x^2}{2} \right) \cdot dx$$

$$y = \frac{P}{E \cdot J} \cdot \left(l \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} \right) + C_1$$

$$y = \frac{P \cdot x^2}{2 \cdot E \cdot J} \cdot \left(l - \frac{x}{3} \right) + C_1 .$$

Auch hier können wir wieder mit Leichtigkeit die Konstante C_1 herausschaffen, denn wir wissen, daß für $x = 0$ auch $y = 0$ wird.

Also

$$0 = \frac{P \cdot 0^2}{2 \cdot E \cdot J} \cdot \left(l - \frac{0}{3} \right) + C_1 ;$$

daher wird $C_1 = 0$ und unsere Schlußgleichung lautet

$$y = \frac{P \cdot x^2}{2 \cdot E \cdot J} \cdot \left(l - \frac{x}{3} \right).$$

In ähnlicher Weise lassen sich die Konstanten stets feststellen. Für $x = l$ stellt y weiter nichts dar als die größte Durchbiegung f des Freitragers am Ende; also erhalten wir

$$y = \frac{P \cdot l^2}{2 \cdot E \cdot J} \cdot \left(l - \frac{l}{3} \right)$$

$$y = \frac{P \cdot l^2}{2 \cdot E \cdot J} \cdot \frac{2}{3} l = \frac{P \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot J}$$

(vgl. früheres Resultat).

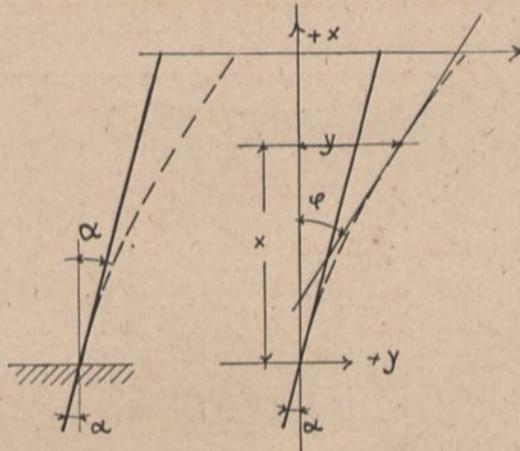


Abb. 73.

β) Für den unter einem bestimmten Winkel α eingespannten Stab (Abb. 73) ergibt sich analog zu α bezogen auf das angegebene Achsenkreuz:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P}{E \cdot J} \cdot \left(l \cdot x - \frac{x^2}{2} \right) + \operatorname{tg} \alpha$$

und

$$y = \frac{P \cdot x^2}{2 E \cdot J} \cdot \left(l - \frac{x}{3} \right) + \operatorname{tg} \alpha \cdot x.$$

γ) Für den in Abb. 74 dargestellten Balken mit einer gleichförmigen Belastung p und einer Einzellast P in der Mitte ist die Gleichung der elastischen Linie in bezug auf das angegebene Achsenkreuz zu ermitteln.

$$A = B = p \cdot \frac{l}{2} + \frac{P}{2}$$

$$M = A \cdot x - p \cdot \frac{x^2}{2}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{E \cdot J} = \frac{A \cdot x - p \cdot \frac{x^2}{2}}{E \cdot J}$$

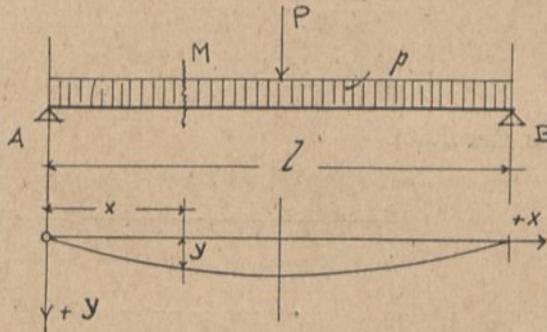


Abb. 74.

integriert

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{E \cdot J} \cdot \left(A \cdot \frac{x^2}{2} - p \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} \right) + C$$

Für

$$x = \frac{l}{2} \text{ ist } \frac{dy}{dx} = 0$$

$$0 = \frac{1}{E \cdot J} \cdot \left(\frac{A \cdot l^2}{2 \cdot 4} - \frac{p \cdot l^3}{6 \cdot 8} \right) + C$$

$$0 = \frac{A \cdot l^2}{8 \cdot E \cdot J} - \frac{p \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot J} + C$$

$$C = \frac{p \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot J} - \frac{A \cdot l^2}{8 \cdot E \cdot J}$$

somit

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{E \cdot J} \cdot \left(A \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{p \cdot x^3}{6} \right) + \overbrace{\frac{p \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot J} - \frac{A \cdot l^2}{8 \cdot E \cdot J}}^C$$

usw.

Die Schlußgleichung lautet dann

$$y = \frac{P}{16 \cdot E \cdot J} \cdot \left(l^2 \cdot x - \frac{4x^3}{3} \right) + \frac{p}{48 \cdot E \cdot J} \cdot (2 \cdot l^3 \cdot x - 4 \cdot l \cdot x^3 + 2 \cdot x^4)$$

δ) Für den in Abb. 75 dargestellten Kragbalken mit einer dreieckförmigen Last P ist

$$M_x = \frac{P \cdot (l-x)^2}{l^2} \cdot \frac{(l-x)}{3},$$

demnach

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{P \cdot (l-x)^3}{3 \cdot l^2 \cdot E \cdot J}.$$

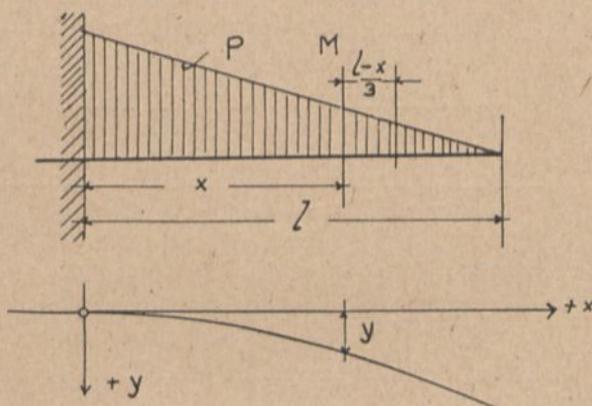


Abb. 75.

Es ergibt sich schließlich

$$y = \frac{P \cdot l^3}{12 \cdot E \cdot J} \left[\frac{x}{l} + \frac{(l-x)^5}{5 l^5} - \frac{1}{5} \right].$$

2. Bestimmung von Auflagerdrücken.

Der einseitig eingespannte und am anderen Ende frei aufliegende Balken mit gleichmäßiger Belastung q (Abb. 76)

$$M_x = \frac{q \cdot x^2}{2} - B \cdot x$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{q \frac{x^2}{2} - B \cdot x}{E \cdot J}$$

integriert

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{E \cdot J} \left(\frac{q}{2} \cdot \frac{x^3}{3} - B \cdot \frac{x^2}{2} \right) + C.$$

Für $x = l$ ist $\text{tg } \varphi = 0$

$$0 = \frac{1}{E \cdot J} \left(\frac{q \cdot l^3}{6} - \frac{B \cdot l^2}{2} \right) + C,$$

daraus

$$C = \frac{1}{E \cdot J} \cdot \left(\frac{B \cdot l^2}{2} - \frac{q \cdot l^3}{6} \right);$$

also

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{E \cdot J} \left(\frac{q \cdot x^3}{6} - \frac{B \cdot x^2}{2} + \frac{B \cdot l^2}{2} - \frac{q \cdot l^3}{6} \right).$$

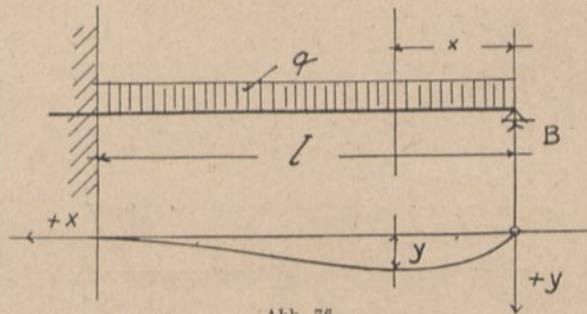


Abb. 76.

Weiter integriert

$$y = \frac{1}{E \cdot J} \cdot \left(\frac{q}{6} \cdot \frac{x^4}{4} - \frac{B}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{B \cdot l^2}{2} \cdot x - \frac{q \cdot l^3}{6} \cdot x \right) + C_1$$

$$y = \frac{1}{6 \cdot E \cdot J} \cdot \left(\frac{q}{4} \cdot x^4 - q \cdot l^3 \cdot x + 3 \cdot B \cdot l^2 \cdot x - B \cdot x^3 \right) + C_1.$$

Für $x = 0$ ist $y = 0$, somit

$$C_1 = 0.$$

Für $x = l$ ist $y = 0$, folglich

$$0 = \frac{1}{6 \cdot E \cdot J} \cdot \left(\frac{q}{4} \cdot l^4 - q \cdot l^4 + 3 \cdot B \cdot l^3 - B \cdot l^3 \right)$$

oder

$$0 = \frac{1}{6 \cdot E \cdot J} \cdot \left(\underbrace{-\frac{3}{4} \cdot q \cdot l^4}_{\text{kann nicht 0 sein}} + \underbrace{2 \cdot B \cdot l^3}_{\text{muß also = 0 sein}} \right);$$

folglich

$$2 \cdot B \cdot l^3 = \frac{3}{4} \cdot q \cdot l^4$$

daraus

$$B = \frac{3 \cdot q \cdot l^4}{4 \cdot 2 \cdot l^3}$$

oder

$$B = \frac{3}{8} \cdot q \cdot l.$$

Die Endgleichung lautet mit $C_1 = 0$ und

$$B = \frac{3}{8} \cdot q \cdot l$$

$$y = \frac{q \cdot l^4}{48 \cdot E \cdot J} \cdot \left(\frac{x}{l} - \frac{3 \cdot x^3}{l^3} + \frac{2 \cdot x^4}{l^4} \right).$$

Anmerkung. Die Ermittlung von Durchbiegungen mittelbar aus der Gleichung der elastischen Linie ist immer dann umständlicher als mit Hilfe der einfachen unter b) vorgeführten Beziehungen, wenn die Gleichung erst aufgestellt werden muß. Es ergeben sich nämlich hierbei oft Schwierigkeiten in der Feststellung der Konstanten, insbesondere bei unsymmetrischen Belastungsfällen.

d) Vergleich zwischen Formänderung aus Biegung mit der infolge von Querkräften.¹⁾

α) Ein Flußeisenstab von 100 cm² Querschnitt und 3 m Kraglänge werde an seinem freien Ende durch eine Einzellast

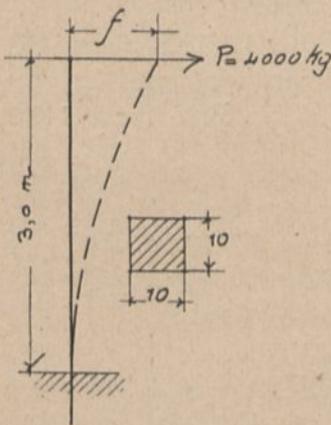


Abb. 77.

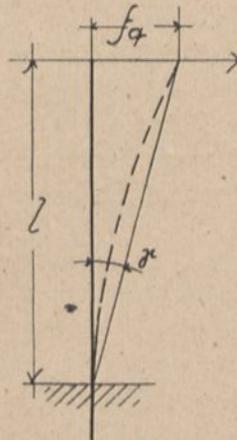


Abb. 78.

$P = 4000 = \text{kg}$ beansprucht (Abb. 77). Wie groß ist seine Durchbiegung f ?

$$f = \frac{P \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot J} = \frac{4000 \cdot 300^3}{3 \cdot 2150000 \cdot \frac{10 \cdot 10^3}{12}} = 20 \text{ cm.}$$

¹⁾ Bearbeitet nach Otzen, „Praktische Winke zum Studium der Statik“. Kreydel's Verlag, Wiesbaden.

Im Vergleich zu dieser Formänderung aus dem Biegemoment sei nun die Formänderung berechnet, welche lediglich durch die Querkraft bewirkt wird, also nur durch die Parallelverschiebung der Querschnitte gegeneinander (Abb. 78).

Nach Früherem (Seite 26) ist

$$\gamma = \frac{\tau}{G}; \quad \text{also} \quad f_q = \gamma \cdot l$$

oder

$$f_q = \frac{\tau \cdot l}{G}$$

Die Schubspannung ist ihrerseits:

$$\tau = \frac{P}{k \cdot F}$$

wobei k stets kleiner als 1 ist und sich nach der Querschnittsform richtet. Somit ergibt sich die Durchbiegung infolge der Querkraft zu

$$f_q = \frac{P \cdot l}{k \cdot F \cdot G}$$

Nun beträgt für das Rechteck $k = \frac{5}{6}$, für Flußeisen die Gleitzahl $G = 830\,000 \text{ kg/cm}^2$ (für Mauerwerk ungefähr ebensoviel wie für Beton: $= 0,3 \cdot E$, wobei E für Beton von 140 000 bis 350 000 anzunehmen ist).

Damit ist für unseren Fall

$$f_q = \frac{4000 \cdot 300}{\frac{5}{6} \cdot 100 \cdot 830\,000} = 0,0173 \text{ cm.}$$

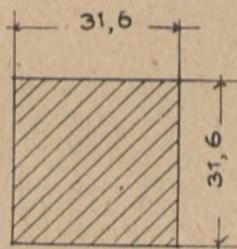


Abb. 79.

β) Es soll nun ein Betonpfeiler von 1000 cm^2 Querschnitt (Abb. 79) für dieselbe Belastung untersucht werden. Die Elastizitätsmodul des Betons sei zu $200\,000 \text{ kg/cm}^2$, also die Gleitzahl G zu $0,3 \cdot 200\,000 = 60\,000$ angenommen.

Dann erhalten wir infolge des Biegemomentes

$$f = \frac{P \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot J} = \frac{4000 \cdot 300^3}{3 \cdot 200\,000 \cdot 83\,500} = 2,16 \text{ cm}$$

und infolge der Querkraft

$$f_q = \frac{P \cdot l}{k \cdot G \cdot F} = \frac{4000 \cdot 300}{\frac{5}{6} \cdot 60\,000 \cdot 1000} = 0,024 \text{ cm.}$$

Für den Flußeisenstab ist das Verhältnis

$$\frac{f_q}{f} = \frac{0,0173}{20} = \infty \frac{1}{1000}$$

und für den Betonpfeiler

$$\frac{f_q}{f} = \frac{0,024}{2,16} = \infty \frac{1}{100}$$

Untersucht man nun noch einen dritten Fall, wobei der Querschnitt an Größe zunimmt, also das in der Biegunslinie liegende Trägheitsmoment noch bedeutend größer wird, während in allen Fällen die Länge l die gleiche bleiben soll, so dürfte das Verhältnis $\frac{f_q}{f}$ schließlich zu $\frac{1}{1}$ werden, und in solchem Falle dürfte man dann die Formänderung infolge der Querkraft gegenüber der bei Biegung nicht mehr vernachlässigen.

e) Bedeutung der Durchbiegungsberechnungen für die Praxis.¹⁾

Die hier gegebenen Beispiele für die Ermittlung von Durchbiegungen haben — abgesehen von ihrer vollen theoretischen Gültigkeit — im Rahmen dieses Buches hauptsächlich Bedeutung als notwendige Zwischenstufe für die weiteren Betrachtungen.

Gewiß können wir den hier eingeschlagenen Weg auch zur Berechnung der Durchbiegungen von Eisenbetonkonstruktionen

¹⁾ Sehr beachtenswerte Klarstellungen über den Wert der Durchbiegungsmessungen im Eisenbetonbau bringt ein Sonderdruck der Schweiz. Bauzeitung, Band LXX, 1917: „Das Versuchswesen in der Praxis des Eisen- und Eisenbetonbaues“ (S. 13—16) von F. Hübner, Bern, Kontrollingenieur im Schweiz. Eisenbahndepartement.

benutzen; die Lösung solcher Aufgaben hat aber wenig praktischen Wert, weil E und J schwer mit zutreffenden Werten einsetzbar sind¹⁾.

Nach Stadium II²⁾ (wirkungslose Betonzugzone) müßte man bei der Aufstellung der Differentialgleichung der elastischen Linie von der Eisenanstrengung ausgehen, weil bei dieser Voraussetzung das elastische Verhalten des Eisens maßgebend für die Bestimmung der Durchbiegungen ist³⁾.

Die nach diesem Prinzip berechneten Durchbiegungen übertreffen jedoch die wirklich auftretenden um 150 bis 200%. Das hat dahin geführt, Durchbiegungsformeln nach Stadium I (mitwirkende Betonzugzone) aufzustellen, wobei das Trägheitsmoment des gesamten, als homogen angesehenen, Querschnittes eingeführt wird. Aber auch in diesem Falle betrug nach den von Dipl.-Ing. Kaufmann angestellten Versuchen⁴⁾ die Differenz zwischen den errechneten und den tatsächlich gemessenen Werten der Durchbiegung noch immer 50 bis 100%. Die Ursachen für diese bedeutenden Differenzen liegen, abgesehen von der Fragwürdigkeit unserer Rechnung hinsichtlich der wahren Größe von E und J , in der Monolithität der Eisenbetonkonstruktionen, den großen Auflagerflächen und der durch die Einbindung der Balken in das Mauerwerk bewirkten, oft nicht unbedeutenden Einspannung. Wir stehen hier vor einer sehr vorteilhaften Eigentümlichkeit der Eisenbetonkonstruktionen, da es sich in der Regel darum handelt, die Konstruktionshöhe auf ein Minimum zu beschränken, wobei also die Rücksicht auf Durchbiegung allein nicht von vornherein eine gewisse Minimalhöhe des Querschnitts unmöglich macht.

Von Interesse in dieser Frage ist noch ein Aufsatz von Michael Gombos im Heft III, Beton und Eisen 1913: „Berechnung

¹⁾ Nowak schlägt vor, bei Berechnung von Durchbiegungen $E = 200\,000$ bis $250\,000$ kg/cm² zu setzen (Zeitschrift d. österr. Ing.- u. Arch.-Vereins 1911, S. 55), während Christiani für Beton nach fünfmonatiger Erhärtung sogar $E = 300\,000$ kg/cm² findet (Beton und Eisen 1911, S. 179). Nach Professor Dr.-Ing. Gehler gelten die Werte $E = 140\,000$ kg/cm² und $n = 15$ nur für den Bruchzustand („Der Rahmen“, S. 101). Er fand für 5 Jahre alten Beton $E = 550\,000$ kg/cm² (S. 25).

²⁾ Vgl. Schlüter, „Eisenbetonbau, Säule und Balken“, Anzeige am Schluß.

³⁾ Dr.-Ing. W. Frank gibt in seinem Buch „Eisenbetonbau“ derartige Ableitungen, die ohne weiteres verständlich sind.

⁴⁾ Beton und Eisen 1912, Heft I.

der Durchbiegungen kontinuierlicher Balkenträger.“ Auseinandersetzungen über die zulässige Durchbiegung kontinuierlicher Platten bringt Beton und Eisen 1914, Heft IV, S. 97, Frage 9 mit Antworten a, b, c und d in Heft VIII, S. 182; Heft X, S. 225; Heft XI, S. 248.

f) Zulässigkeit der Berechnung von Eisenbetonkonstruktionen nach der Elastizitätslehre.

Die im vorangehenden Abschnitt zum Ausdruck gebrachte Schwierigkeit, zwischen berechneter und gemessener Durchbiegung eine Übereinstimmung zu erzielen, darf uns nicht zu dem Schluß verleiten, daß die Elastizitätslehre im Eisenbetonbau keine genügenden Voraussetzungen für die Richtigkeit der darauf aufgebauten Berechnungsarten finde. Der Mangel genauere Übereinstimmung zwischen Berechnung und Messung bei Durchbiegungen beruhte wie gezeigt auf mangelhafter Erfassung der wirklichen Werte von E und J sowie der Lagerungsbedingungen in der Rechnung. Die Zulässigkeit der Elastizitätslehre für die Berechnung statisch unbestimmter Größen aber setzt die Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes für die eintretenden Formänderungen, also Verhältnisgleichheit zwischen Spannung und Dehnung bzw. zwischen Biegemoment und Formänderungswinkel voraus. Das Bestehen derselben kann nur durch Versuche und unmittelbare Messungen geprüft werden und ist durch solche zur Genüge erwiesen worden. Die Zulässigkeit der Verhältnisgleichheit zwischen Spannung und Dehnung bei Normalspannungen ist so allgemein bekannt, daß wir darauf nicht weiter hinzuweisen brauchen. Daß auch zwischen den Biegemomenten und den zugehörigen Formänderungswinkeln annähernd vollkommene Verhältnisgleichheit besteht, beweisen Feststellungen von Prof. Mörsch an Hand von in der Materialprüfungsanstalt Stuttgart erzielten Versuchsergebnissen¹⁾. Bei den Stuttgarter Versuchen erfolgte die Messung der Formänderungen innerhalb einer längeren Strecke mit konstantem Biegemoment; die Größe des Formänderungswinkels wurde hierbei aus den gemessenen Längenänderungen des oberen und unteren Randes des Probekalkens festgestellt.

¹⁾ Mörsch, „Die Beziehung zwischen Formänderung und Biegemoment bei Eisenbetonbalken“ (Deutscher Ausschuß für Eisenbeton 1912, Heft 18; auch Mörsch, „Eisenbetonbau“ 1912, S. 350).

So ergibt sich für die Verkürzung Δ_o und die Verlängerung Δ_u der Formänderungswinkel zu (Abb. 80)

$$\Delta_\alpha = \frac{\Delta_o + \Delta_u}{\bar{d}}$$

Verwendet man die für die konstante Strecke gewonnenen Formänderungswinkel für einen Biegungsfall mit beliebigem

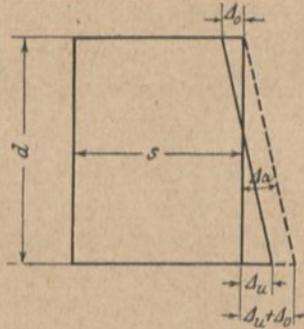


Abb. 80.

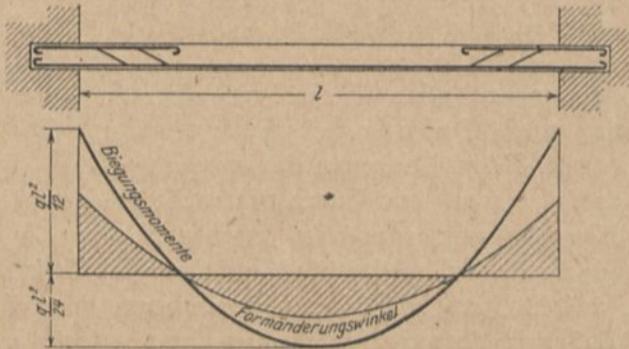


Abb. 81.

Momentwechsel, den wir nach der Elastizitätslehre festgestellt haben, derart, daß wir zu den mathematisch nach der Elastizitätslehre ermittelten Momenten für eine größere Anzahl Querschnitte (in Abständen von 1 cm) die zugehörigen Drehwinkel auftragen, so muß sich, wenn die mathematische Berechnung richtig sein soll, für die Winkelkurve die gleiche Bedingung erfüllen, die der Ermittlung der Momente oder der Momentenkurve vorausgestellt ist. Das läßt sich tatsächlich erweisen.

Für einen eingespannten Träger muß nach den später weiter entwickelten Bedingungen die Summe der Momentenflächen

gleich Null sein ($\int \frac{M ds}{E \cdot J} = 0$); für die Formänderungen bedeutet das $\int d_x = 0 = \int \Delta_x \cdot ds = 0$, d. h. die schraffierten Flächen der Winkeländerungskurve müssen sich ausgleichen. Dies konnte an diesem und noch anderen Fällen bis auf praktisch nicht in Betracht kommende Abweichungen erwiesen werden (Abb. 81). Der nach der Elastizitätslehre auf Grund des Hooke'schen Gesetzes ermittelte Verlauf der Momente stimmt also hinreichend genau mit dem auf Grund der tatsächlichen Formänderung des Eisenbetons sich ergebenden überein.

Dieses Ergebnis steht in gutem Einklang mit den genauen rechnerischen Feststellungen von Petermann über die Größe von Spannungen und Formänderungen auf der Grundlage des Potenzgesetzes, sowie von unbestimmten Größen auf der Grundlage des Parabelgesetzes für die Formänderung des Betons im Vergleich mit den entsprechenden Werten bei Berechnung nach dem einfachen Hooke'schen Gesetz¹⁾.

Kapitel V.

Rechnerische Bestimmung der elastischen Formänderung mit Hilfe der Arbeitsgleichung.

a) Begriff der Arbeit.

Arbeit ist Kraft mal Weg, positiv oder negativ, je nachdem Kraft und Weg die gleiche oder entgegengesetzte Richtung zueinander haben. Treten elastische Formänderungen ein, so müssen die äußeren und inneren Kräfte, die auf ein Bauwerk einwirken, einen Weg zurücklegen, also Arbeit leisten.

b) Formänderungsarbeit.

Denkt man sich einen beliebigen elastischen Körper, z. B. einen Fachwerkträger, von äußeren unter sich im Gleichgewicht stehenden Kräften (Belastung und Reaktionen) ergriffen, so ändert derselbe seine Form so lange, bis zwischen den äußeren Kräften und den durch die Formänderung wachgerufenen und sich ihr widersetzen inneren Spannkraften Gleichgewicht entstanden ist. Bei der Bewegung der Knotenpunkte leisten also

¹⁾ Armierter Beton 1915, Heft 1 und 2.

die äußeren Kräfte positive Arbeit, die inneren negative Arbeit. Weil eine Verschiebung des Knotenpunktes eintritt, wird beim Anwachsen der Belastung die positive Arbeit zunächst größer sein als die negative; der Überschuß zeigt sich in der Verschiebung. In dem Augenblicke aber, wo das Gleichgewicht eingetreten ist, oder kurz vorher sind positive und negative Arbeit in einem Zeiteilchen dt einander gleich groß und heben sich gegenseitig auf (vgl. Eisenbahnzug auf horizontaler Strecke nach Abstellung des Dampfes).

Von dieser Voraussetzung ausgehend werden die an einem Bauwerk angreifenden Kräfte nach dem Grundsatz zu berechnen sein, daß die Arbeit der äußeren Kräfte gleich ist der Arbeit der inneren Kräfte. Bezeichnen wir also mit P die äußeren Kräfte, mit δ ihre Wege bei der Formänderung des Bauwerks, mit S_p allgemein die im Innern des Bauwerks wachgerufenen Kräfte, die Spannungen, und mit Δs allgemein deren Wege (Längenveränderungen, Querverschiebungen, Drehungen), so lautete unser Grundgesetz allgemein

$$\sum P \cdot \delta = -\sum S_p \cdot \Delta s \quad \text{oder} \quad L_a = -L_i.$$

Der Beweis der Richtigkeit dieser Gleichung gehört als rein wissenschaftliches Problem nicht hierher; er könnte mathematisch auf Grund geometrisch-mechanischer Ableitungen oder — für die Anschauung klarer — nach dem Prinzip von der Erhaltung der Kräfte erfolgen¹⁾.

Ganz plötzliche Belastungen eines Bauwerkes, wobei die äußeren Kräfte gleich in voller Größe wirken, brauchen nun in der Regel nicht vorausgesetzt zu werden; es entstünden dadurch Vibrationen. Im Gegenteil kann man stets annehmen, daß die äußeren Kräfte von Null an allmählich anwachsen und die im Inneren entstehenden Spannkräfte stets gleichen Schritt damit halten, so daß positive und negative Arbeit während aller Zeiteilchen dt , die zum Anwachsen der Kraft gebraucht werden, einander gleich groß sind. Beim allmählichen Abnehmen der äußeren Kräfte verschwinden auch dann die inneren Kräfte wieder, und der Körper kehrt, wenn er völlig elastisch ist, wieder in seine ursprüngliche Form zurück. Bei

¹⁾ Eine Entwicklung auf dem ersten Wege bringt Müller - Breslau in „Die neueren Methoden der Festigkeitslehre“, dritte Auflage, Anhang; auch Zschetzsche, „Handbuch der Baustatik“, I. Band, Artikel 23 und 24.

diesem Vorgang nun leisten die inneren Kräfte die positive und die äußeren die negative Arbeit. Wir bezeichnen die äußere Formänderungsarbeit mit A_a , die innere mit A_i und beschäftigen uns in den nachfolgenden Abschnitten mit der Feststellung der Größe beider Arbeitswirkungen in den für uns wichtigen Kraftäußerungen durch eine Längskraft, eine Querkraft und ein Biegemoment.

Wird ein gerader Stab von einer auf seine Verlängerung gerichteten Längskraft ergriffen, so leistet diese während ihres allmählichen Anwachsens und des Eintretens der Verlängerung positive Formänderungsarbeit A_a , und die sich damit stets im Gleichgewicht befindlichen inneren Spannkkräfte leisten negative Formänderungsarbeit A_i . Nach dem Hookeschen Gesetz wachsen aber die inneren Spannkkräfte in gleichem Verhältnis mit der Verlängerung und also auch in gleichem Verhältnis mit den äußeren Kräften. Die Formänderungsarbeit beider Kraftwirkungen ist also halb so groß, als wenn die beiden Kräfte gleich zu Anfang in ihrer Endgröße gewirkt hätten. Dasselbe gilt von den Formänderungsarbeiten aller Kraftwirkungen für Körper aus homogenem Material, mit denen wir uns nachfolgend beschäftigen¹⁾.

1. Formänderungsarbeit einer Längskraft.

Der Stab in Abb. 82 habe die Länge l und den Querschnitt F . Die angreifende Kraft K wachse von Null bis K . Die inneren Spannkkräfte seien in jedem Stadium gleich $\sigma \cdot F$; von der Quersammenziehung sei abgesehen. In irgendeinem Augenblicke sei x die bis dahin eingetretene Längenänderung, σ_x die dazu gehörige innere Spannung und K_x die herrschende äußere Kraft. Dann ist zunächst stets:

$$F \cdot \sigma_x = K_x. \quad (1)$$

Lassen wir jetzt eine weitere Längenänderung eintreten um dx , dann beträgt die innere Formänderungsarbeit für diese Verlängerung

$$\begin{aligned} \text{Arbeit} &= \text{Kraft} \times \text{Weg} \\ dA_i &= -F \cdot \sigma_x \cdot dx \end{aligned} \quad (2)$$

und die äußere Formänderungsarbeit gleichzeitig

$$dA_a = +K_x \cdot dx. \quad (3)$$

¹⁾ Bearbeitet nach Keck-Hotopp, „Elastizitätslehre“, zweiter Teil.

Innere Formänderungsarbeit.

Da

$$\Delta l = \frac{\sigma}{E} \cdot l,$$

so wird in unserem Falle

$$x = \frac{\sigma_x}{E} \cdot l$$

und

$$dx = \frac{d\sigma_x \cdot l}{E}.$$

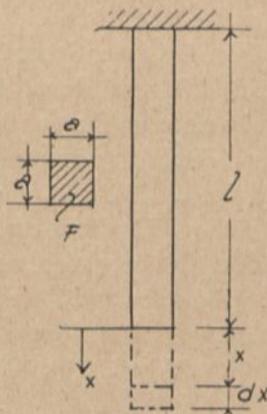


Abb. 82.

Diesen Wert für dx eingesetzt in Gleichung (2), gibt

$$dA_i = -F \cdot \sigma_x \cdot \frac{d\sigma_x \cdot l}{E}. \quad (4)$$

Während nun die Spannung von Null bis σ anwächst, also, σ_x schließlich zu σ wird, entsteht die innere Formänderungsarbeit

$$\int dA_i = -\frac{F \cdot l}{E} \int_0^{\sigma} \sigma_x \cdot d\sigma_x$$

$$A_i = -\frac{F \cdot l}{E} \cdot \frac{\sigma^2}{2}. \quad (5)$$

Da $F \cdot l$ das Stabvolumen ist, so kann man daher auch schreiben

$$A_i = -\frac{V \cdot \sigma^2}{2 \cdot E}. \quad (6)$$

Äußere Formänderungsarbeit.

Wir erhalten aus Gleichung (1)

$$\sigma_x = \frac{K_x}{F}$$

und setzen diesen Wert ein in

$$x = \frac{\sigma_x \cdot l}{E},$$

womit

$$x = \frac{K_x}{F} \cdot \frac{l}{E}, \quad (7)$$

also

$$dx = \frac{l}{F \cdot E} \cdot dK_x.$$

Dies eingesetzt in Gleichung (3), gibt

$$dA_a = +K_x \cdot \frac{l}{F \cdot E} \cdot dK_x. \quad (8)$$

Während nun die Kraft von Null bis K wächst, entsteht demnach die äußere Formänderungsarbeit

$$\int dA_a = + \frac{l}{F \cdot E} \int_0^K K_x \cdot dK_x$$

$$A_a = \frac{l}{F \cdot E} \cdot \frac{K^2}{2}. \quad (9)$$

Bezeichnen wir nun den durch die Kraft K schließlich hervorgerufenen Größtwert der Verlängerung x mit δ , so ist nach Gleichung (7) mit $K_x = K$

$$\Delta l = x = \delta = \frac{K \cdot l}{F \cdot E}.$$

Hieraus folgt

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\delta}{l} = \frac{\sigma}{E} = \frac{K}{E \cdot F}.$$

Schreibt man nun für Gleichung (9)

$$A_a = \frac{1}{2} K \cdot \frac{K \cdot l}{E \cdot F},$$

so folgt

$$A_a = \frac{1}{2} K \cdot \delta$$

oder

$$A_a = \frac{K \cdot \delta}{2} \quad (10)$$

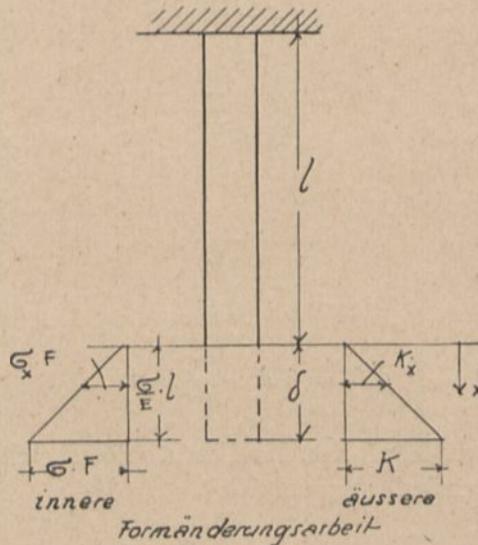


Abb. 83.

Eine zeichnerische Darstellung dieser Ergebnisse gibt Abb. 83.

2. Formänderungsarbeit bei Biegung.

Das zuerst parallel begrenzte Stabelement dx (Abb. 84) hat nach der Biegung Keilform angenommen. dx soll ein Differential des gebogenen Stabes sein, welches seinerseits in eine Anzahl untergeordneter Differentiale, die als wagerechte Plättchen anzusehen sind, zerfällt. Ein solches Plättchen von der Höhe dz , der Länge dx und der Breite w ist als Stab für sich anzusehen, der einer Verlängerung oder Verkürzung durch die gerade dort wirkende Spannung $+$ oder $-\sigma$ ausgesetzt ist. Auch hier muß man wieder annehmen, daß die als äußere Kraft anzusehende Spannung $\pm\sigma$ von 0 bis zu ihrer Endgröße wächst. Die Endgröße steht in Beziehung zur Randspannung σ_1 . Wir gebrauchen nun für die Aufstellung der Formänderungs-

arbeit, welche dieser kleine Körper bis zum Eintreten der endgültigen Spannung $\pm\sigma$ leistet, die Gleichung (6)

$$A_i = -\frac{V \cdot \sigma^2}{2 \cdot E},$$

also hier

$$d d A_i = -\frac{(w \cdot dz \cdot dx) \cdot \sigma^2}{2 \cdot E}.$$

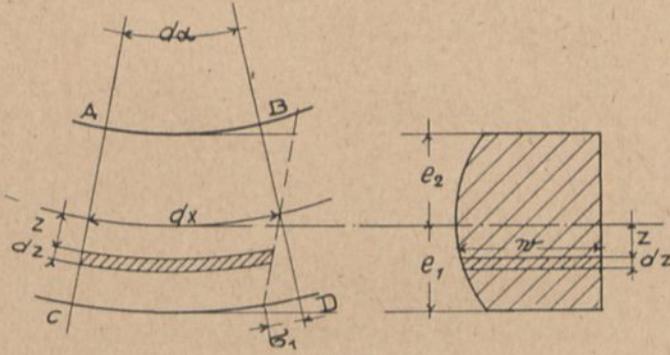


Abb. 84.

Mit

$$\sigma = \frac{\sigma_1 \cdot z}{e_1}$$

ist

$$d d A_i = -\frac{w \cdot dz \cdot dx}{2 \cdot E} \cdot \frac{\sigma_1^2 \cdot z^2}{e_1^2},$$

also für alle Plättchen des Stabelementes ABCD:

$$d A_i = -\frac{dx \cdot \sigma_1^2}{2 \cdot E \cdot e_1^2} \int_{-e_2}^{+e_1} z^2 dz \cdot w.$$

Das Integral bedeutet den allgemeinen Ausdruck für das Trägheitsmoment des betreffenden Querschnittes und wäre beispielsweise für ein Rechteck

$$J = \frac{b \cdot h^3}{12},$$

also

$$d A_i = -\frac{dx \cdot \sigma_1^2}{2 \cdot E \cdot e_1^2} \cdot J.$$

Dieser Ausdruck ist immer negativ, weil $(+\sigma_1)^2$ sowie $(-\sigma_1)^2$ stets positive Werte sind.

Wir haben zunächst die Formänderungsarbeit eines Stabelementes gewonnen und können nun damit die bei der Biegung des Stabes eintretende Gesamtformänderungsarbeit des ganzen Stabes durch Integration bestimmen:

$$A_t = - \int_0^l \frac{dx \cdot \sigma_1^2}{2 \cdot E \cdot e_1^2} \cdot J.$$

Nun ist

$$\sigma_1 = \frac{M \cdot e_1}{J},$$

also

$$A_t = - \int_0^l \frac{dx \cdot M^2 \cdot e_1^2 \cdot J}{2 \cdot E \cdot e_1^2 \cdot J^2}$$

somit

$$A_t = - \int_0^l \frac{M^2 \cdot dx}{2 \cdot E \cdot J}.$$

Da in der Gleichung $\sigma_1 = \frac{M \cdot e_1}{J}$ gleichzeitig der allgemeine Ausdruck für die inneren Spannungen und äußeren Kräfte gegeben ist, so stellt das erzielte Ergebnis gleichzeitig auch die äußere Formänderungsarbeit dar, also

$$A_a = + \int_0^l \frac{M^2 \cdot dx}{2 \cdot E \cdot J}.$$

Nach früherer Ableitung ist der Winkel $d\alpha$, welcher das Keilstück einschließt,

$$d\alpha = \frac{M \cdot dx}{E \cdot J};$$

also können wir auch schreiben

$$A_a = + \int_0^l \frac{M \cdot d\alpha}{2},$$

worin vergleichsweise $\frac{M}{2}$ als mittlere arbeitende Kraft und $d\alpha$ als Arbeitsweg derselben angesehen werden kann.

3. Formänderungsarbeit einer Querkraft.

Entsprechend dem Vorhergehenden ergibt sich

$$-A_i = A_a = \int_0^l \frac{Q^2 \cdot dx}{2 \cdot G \cdot k \cdot F}$$

und mit $\delta q = \gamma \cdot dx$ (vgl. S. 54)

$$\delta q = \frac{\tau}{G} \cdot dx = \frac{Q}{k \cdot F} \cdot \frac{dx}{G} \quad \text{und} \quad -A_i = A_a = \int_0^l \frac{Q \cdot \delta q}{2}$$

4. Formänderungsarbeit beliebiger äußerer Kräfte in der Ebene eines Stabes.

Denkt man sich von einem gebogenen Stab von der Länge l einen Teil abgeschnitten, so kann man die dadurch für den stehbleibenden Teil verloren gegangene Wirkung durch eine Gesamtresultierende R oder durch drei Kraftwirkungen N , M , Q (N und Q im Schwerpunkt des Querschnittes angreifend) ersetzen (Abb. 85). Dann ist also

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M \cdot z}{J} + \frac{Q}{k \cdot F}$$

An Hand dieser allgemeinen Spannungsgleichung können wir die Gesamtformänderungsarbeit für die Länge l wie folgt bestimmen:

1. Für die Längskraft N ist nach Gleichung (5) allgemein:

$$A_i = -\frac{F \cdot l \cdot \sigma^2}{E \cdot 2}$$

Diese Arbeit bezieht sich zunächst nur auf einen beliebigen geraden Stab von der Länge l ; wir besitzen innerhalb eines Elementes ds unzählige solcher Stäbe (eigentlich „Plättchen“) vom Querschnitt dF (Abb. 85) und haben daher erst für alle diese mit der konstanten Länge ds die Formänderungsarbeit zu bilden. Diese ist analog Gleichung (5)

$$d d A_i = -\frac{dF \cdot ds}{E} \int_{-\epsilon_2}^{+\epsilon_1} \sigma^2$$

$$\text{und mit } \sigma = \frac{N}{F}$$

$$d d A_i = -\int_{-\epsilon_1}^{+\epsilon_1} \frac{N^2}{F^2} \cdot \frac{dF}{2} \cdot \frac{ds}{E}$$

Das Integral $\int_{-e_2}^{+e_1}$ bezieht sich auf die Querschnittselemente dF ; ds ist zunächst konstant.

Also erhalten wir mit ausgeführter Integration:

$$dA_i = -\frac{N^2}{F^2} \cdot \frac{ds}{2 \cdot E} \cdot F = \frac{N^2 \cdot ds}{2 \cdot E \cdot F},$$

woraus dann für die ganze Stablänge:

$$A_i = -\int_0^l \frac{N^2 \cdot ds}{2 \cdot E \cdot F}.$$

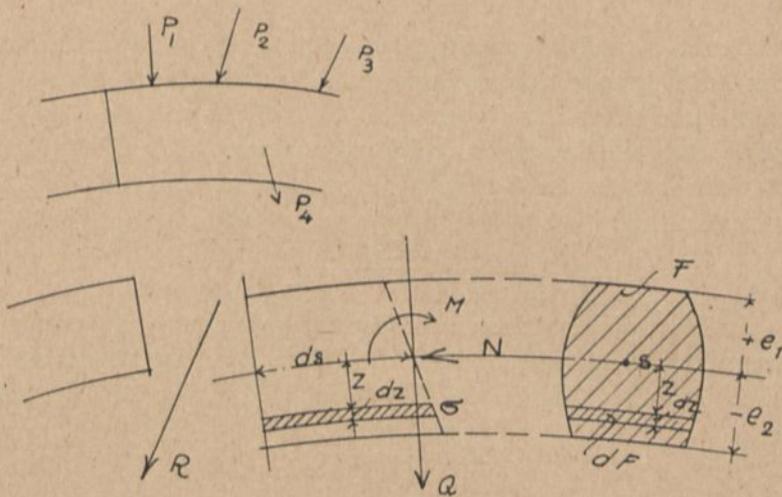


Abb. 85.

2. Für das Biegemoment M hatten wir schon oben vollständig erhalten:

$$-A_i = A_a = \int_0^l \frac{M^2 \cdot ds}{2 \cdot E \cdot J}.$$

3. Für die Querkraft Q ebenso:

$$-A_i = A_a = \int_0^l \frac{Q^2 \cdot ds}{2 \cdot G \cdot k \cdot F}.$$

Also Gesamtformänderungsarbeit

$$A_a = -A_i = \int \frac{N^2 \cdot ds}{2 \cdot E \cdot F} + \int \frac{M^2 \cdot ds}{2 \cdot E \cdot J} + \int \frac{Q^2 \cdot ds}{2 \cdot G \cdot k \cdot F}.$$

Um diese Formänderungsarbeit für die äußeren Kräfte an unserem Stabstück in der Form von Kraft \times Weg hervortreten zu lassen, berücksichtigen wir, daß

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma}{E} = \frac{N}{F \cdot E}, \quad \text{also} \quad \Delta l = \frac{N}{F \cdot E} \cdot l$$

ist und daß wir in diesem Falle für l in die allgemeine Gleichung das Differential ds einzusetzen haben, so daß

$$\Delta ds = \frac{N}{F \cdot E} \cdot ds = \text{Arbeitsweg der Kraft } N;$$

ebenso daß

$$\Delta d\alpha = \frac{M \cdot ds}{E \cdot J} = \text{„Arbeitsweg“ des Momentes } M$$

und

$$d\delta q = \frac{Q \cdot ds}{G \cdot k \cdot F} = \text{Arbeitsweg der Kraft } Q.$$

Also erhalten wir

$$A_a = \int_0^l \frac{N \cdot \Delta ds}{2} + \int_0^l \frac{M \cdot \Delta d\alpha}{2} + \int_0^l \frac{Q \cdot d\delta q}{2}.$$

Ohne weitere Ableitung können wir — die Arbeitswege der einzelnen äußeren Kräfte P betrachtend — feststellen:

$$A_a = \frac{\sum P_n \cdot \delta_n}{2},$$

weil die Formänderungsarbeit der einzelnen Kräfte $P_1 P_2$ bis P_n gleich sein muß der Formänderungsarbeit ihrer Ersatzkräfte.

e) Verschiebungsarbeit.¹⁾

Wirken gleichzeitig mehrere Kräfte auf einen Körper, so erzeugt jede für sich allein eine bestimmte Formänderung und leistet auch eine äußere Formänderungsarbeit, die gleich ist der inneren Formänderungsarbeit. Gleichzeitig leistet aber eine jede Kraft infolge der durch die anderen Kräfte stattfindenden Formänderungen des Bauwerkes, also infolge einer von ihr selbst ganz unabhängigen Bewegungsursache ihres Angriffspunktes, eine weitere Arbeit. Diese Arbeit würde nun genau dieselbe sein, wenn die Bewegung des Angriffspunktes der Last durch irgendeine andere Ursache, etwa durch eine Verschie-

¹⁾ Bearbeitet nach Otzen, „Praktische Winke“.

bung des ganzen Bauwerkes, veranlaßt worden wäre; daher nennt man sie Verschiebungsarbeit. Zu unterscheiden sind wieder äußere und innere Verschiebungsarbeit. Das Kennzeichen einer Verschiebungsarbeit ist demnach eine von der in ihrem Angriffspunkt verschobenen Kraft selbst völlig unabhängige Bewegungsursache.

Wirkt z. B. im Punkte m eines Balkens (Abb. 86) die Kraft P_m , so vollbringt sie dort die äußere Formänderungsarbeit

$$A_a = \frac{P_m \cdot \delta_m}{2},$$

und es tritt danach Ruhezustand ein. Durch irgendeine andere Veranlassung, etwa eine zweite Last, eine Temperaturänderung

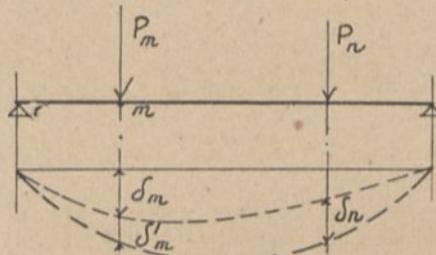


Abb. 86.

oder eine Lageverschiebung oder dergleichen, werde nun der Balken aufs neue deformiert, wobei auch die erste Durchbiegung bei m sich um den Betrag δ'_m vergrößert. Dadurch tritt eine neue Arbeitsleistung der Kraft P_m ein, indem sie den Weg δ'_m in voller Größe durchläuft und also die äußere Verschiebungsarbeit

$$A_v = P_m \cdot \delta'_m$$

leistet.

Auch jede andere Kraftwirkung (eine Längskraft, Querkraft oder ein Biegemoment) kann Formänderungs- und Verschiebungsarbeit leisten.

Zur Erläuterung der Verschiebungsarbeit einer inneren Kraft werde die Spannung in einem Fachwerkstab betrachtet.

Ein Fachwerk sei durch eine Kraft P belastet (Abb. 87). Zunächst leistet dann die Kraft P die äußere Formänderungsarbeit $A_a = \frac{1}{2} \cdot P \cdot \delta$, wobei der Weg δ die Projektion des Weges auf die Krafrichtung ist. Dann leistet aber auch die innere Spannkraft S eine Formänderungsarbeit. Tritt diese z. B.

als Zugkraft auf, so wird sie den Stab von der Länge s um das Stück Δs verlängern und infolgedessen die innere Formänderungsarbeit

$$A_i = -\frac{S \cdot \Delta s}{2}$$

erzeugen.

Das --Zeichen deswegen, weil die Kraft entgegengesetzt zu ihrem Richtungssinn den Weg zurücklegt. Der Richtungssinn der Kraft geht sofort klar hervor, wenn wir uns die Wirkung der

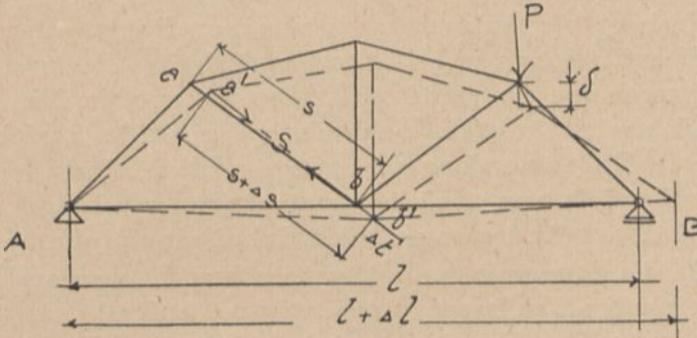


Abb. 87.

inneren Spannkraft durch äußere Kräfte ersetzt denken, die an den Knotenpunkten angreifen. Dabei werden bei einer Zugspannkraft nämlich Kräfte anzubringen sein, die die beiden Knotenpunkte a und b in ihrem richtigen Abstand zusammenhalten, während wir andererseits wissen, daß die innere Zugspannkraft den Abstand zwischen diesen beiden Knotenpunkten in der Tat vergrößert. Erfährt nun jetzt das System noch eine Temperaturerhöhung, so daß der Stab s nochmals, und zwar um Δt verlängert wird, also die Länge $s + \Delta s + \Delta t$ erhält, so leistet die Spannkraft S die innere Verschiebungsarbeit

$$A_v = -S \cdot \Delta t.$$

Diese Verschiebungsarbeit entstand hier durch eine weitere Verlängerung des Stabes; sie kann ebensogut durch eine Verschiebung des ganzen Bauwerkes hervorgerufen gedacht werden. Es sei also wiederholt, daß die angeführten Verschiebungsarbeiten dieselben sein würden, wenn die gleiche Bewegung der Angriffspunkte von P oder S durch irgendeine von den Kräften selbst unabhängige Ursache veranlaßt worden wäre.

d) Das Prinzip der virtuellen Verrückungen (Verschiebungen oder Geschwindigkeiten).¹⁾

Um die ruhenden und verborgenen Verhältnisse der Statik zu nötigen, sichtbar hervorzutreten, erteilen wir dem System eine virtuelle, d. h. gedachte Verschiebung, welche mit dem tatsächlichen Bewegungszustand des Systems (etwa infolge einer Formänderung) nichts zu tun haben soll, sondern eigens für den Zweck der statischen Untersuchung hervorgerufen gedacht wird. (In gewissem Grade können wir solche virtuelle Verschiebung als Schlußstadium einer Formänderungsarbeit auffassen, da ja bei einer Formänderung die zugehörigen Bewegungen von den einzelnen Kräften mit einer in dem letzten Zeitteilchen dt konstant anzunehmenden Größe zurückgelegt werden.) Die Anwendung dieses sogenannten Prinzips der virtuellen Verrückungen ermöglicht statische Untersuchungen, ohne auf die Formänderungsarbeit dabei einzugehen.

Da die Bewegung gedacht ist, so braucht man auch nicht nach einer Kraft zu fragen, welche etwa von außen her zur Erzeugung einer solchen Verschiebung erforderlich wäre. Will man sich zur Unterstützung der Anschauung eine solche Kraft vorstellen, so hätte man sie jedenfalls als unendlich klein und als für den Gleichgewichtszustand nicht in Betracht kommend anzusehen²⁾.

Befindet sich nun ein starrer Körper unter der Wirkung mehrerer Kräfte im Gleichgewicht, und erteilt man ihm eine virtuelle Verrückung, welche so vorzunehmen wäre, daß daraus für unsere statische Untersuchung ein Nutzen entsteht (wobei vorauszusetzen ist, daß die Verrückung den Umständen nach überhaupt möglich sein muß), so ist dabei die Summe der Arbeit sämtlicher Kräfte und Momente gleich Null³⁾. Dabei sollen alle Bewegungen so klein sein, daß die Wirkungsart aller Kräfte und Momente auch nach der Verschiebung als unverändert gelten kann.

Um die virtuelle Arbeitsleistung einer Kraft herbeizuführen, ist es oft nötig, an einem Bauwerke gedachte Änderungen vorzunehmen. Damit z. B. bei einem vollwandigen Träger ein

¹⁾ Abgekürzt: P. d. v. G.

²⁾ Vgl. „Abhandlung zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften“ von Moritz Cantor, Teil: Rich. Lindt, „Das P. d. v. G.“

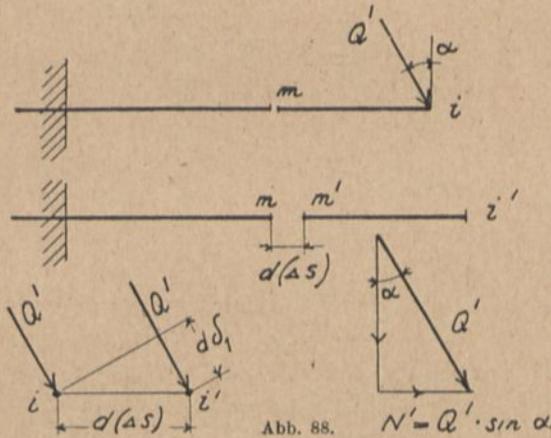
³⁾ Arbeit der äußeren Kräfte gleich Arbeit der inneren Kräfte, vgl. das bereits oben unter Formänderungsarbeit Gesagte (S. 60).

Moment in einem bestimmten Querschnitt eine virtuelle Arbeit leisten kann (Drehung des rechts vom Schnitt gelegenen Teils gegen den linken), wäre in dem Querschnitt ein Gelenk eingeschaltet zu denken. Oder damit eine Stabkraft in einem Fachwerke Arbeit leisten kann, wäre der betreffende Stab durchschnitten zu denken.

Um nun das P. d. v. G. auf ein beliebiges Kräftesystem anwenden zu können, müssen wir uns die Grundgleichung der Verschiebungsarbeit allgemein ableiten, nachdem wir bisher die Verschiebungsarbeit nur an Hand von zwei Beispielen betrachtet haben.

e) Grundgleichung der Verschiebungsarbeit (Arbeitsgleichung).¹⁾

Allgemein: Gegeben ein Freitragender und am Ende desselben eine gedachte Kraft Q' (Abb. 88). Es erleide der Querschnitt m



eine virtuelle Verschiebung, zusammengesetzt aus Längsbewegung, Querbewegung und Drehung. Die Folge davon wird sein, daß die Kraft Q' am Punkte i diese Bewegungen mitmacht; sie erzeugt dieselben aber nicht. Es sollen nun die drei virtuellen Arbeiten, welche durch diese Bewegung hervorgerufen werden, festgestellt werden.

1. Verschiebungsarbeit für die Längsbewegung.

Infolge der Längsbewegung von m nach m' um das Maß $d(\Delta s)$ bewegt sich auch der Punkt i und damit die Last Q' nach rechts (Abb. 88).

¹⁾ Bearbeitet nach Otzen, „Praktische Winke“.

Die Arbeit, die Q' „leistet“, ist: Weg $d(\Delta s) \times$ Kraftkomponente von Q' in Richtung der Bewegung, also

$$A_v = d(\Delta s) \cdot Q' \cdot \sin \alpha = d(\Delta s) \cdot N',$$

oder auch Kraft $Q' \times$ Weg in der Kraftrichtung, also

$$A_v = Q' \cdot d\delta_1;$$

demnach

$$A_{v1} = Q' d\delta_1 = N' \cdot d(\Delta s).$$

2. Verschiebungsarbeit für die Querbewegung.

Infolge der Querbewegung von m nach m' bewegt sich auch der Punkt i nach i' (Abb. 89) und die Arbeit, die Q' leistet, ist

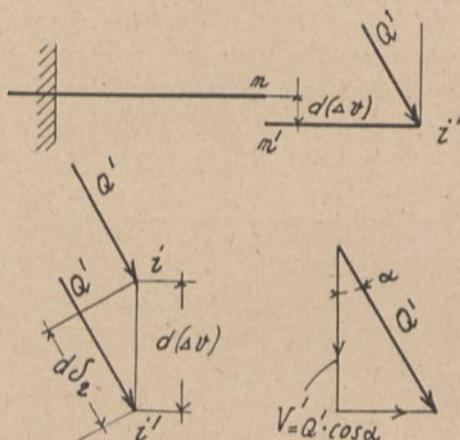


Abb. 89.

entweder Weg $d(\Delta v) \times$ Kraftkomponente von Q' in Richtung der Bewegung, also

$$A_v = d(\Delta v) \cdot Q' \cdot \cos \alpha = d(\Delta v) \cdot V',$$

oder auch Kraft $Q' \times$ Weg in der Kraftrichtung, also

$$A_v = Q' \cdot d\delta_2;$$

demnach

$$A_{vq} = Q' \cdot d\delta_2 = V' \cdot d(\Delta v).$$

3. Verschiebungsarbeit für die Drehbewegung.

Infolge der Drehung um m , welche bei Annahme eines Gelenkes in m möglich ist und um den Winkel $d(\Delta \varphi)$ erfolgt (Abb. 90), ergibt sich wieder eine Verschiebungsarbeit von Q' am Punkt $i =$ Weg $d(\Delta \varphi) \cdot r \times$ Kraftkomponente von Q' in Richtung dieses Weges, also

$$A_v = d(\Delta \varphi) \cdot r \cdot Q' \cdot \cos \alpha,$$

wobei der Weg $d(\Delta\varphi) \cdot r$ wegen seiner Kleinheit als lotrecht, d. h. also in Richtung von $N' = Q' \cdot \cos \alpha$ gedacht werden kann. In dieser Gleichung ist $r \cdot \cos \alpha = r'$, also können wir auch schreiben

$$A_v = \underbrace{r'}_{\text{Moment.}} \cdot \underbrace{Q'}_{\text{Weg, den das Moment „durchläuft“}} \cdot d(\Delta\varphi).$$

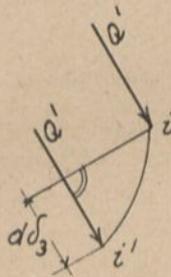
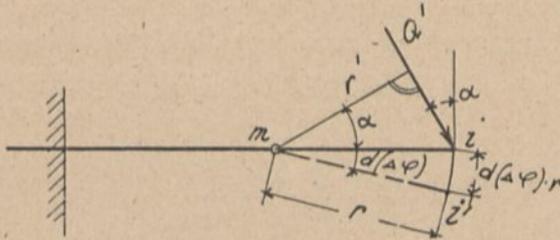


Abb. 90.

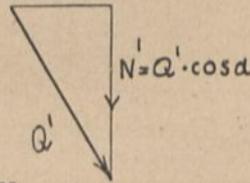


Abb. 91.

Oder wir sagen Kraft $Q' \times$ Weg in der Kraftrichtung, also

$$A_v = Q' \cdot d\delta_3,$$

demnach

$$A_{vm} = Q' \cdot d\delta_3 = M' \cdot d(\Delta\varphi).$$

Die Gesamtverschiebungsarbeit der Kraft Q' infolge einer beliebigen Verrückung des Querschnittes m ist also allgemein:

$$A_v = \underbrace{Q' d\delta}_{\text{äußere}} = \underbrace{N' d(\Delta s) + V' \cdot d(\Delta v) + M' \cdot d(\Delta\varphi)}_{\text{innere}};$$

oder wenn mehrere Lasten Q' gedacht werden und zugleich mehrere Querschnitte m beliebige Verrückungen erfahren sollen:

$$A_v = \sum Q' \delta = \int N' \cdot d(\Delta s) + \int V' \cdot d(\Delta v) + \int M' \cdot d(\Delta\varphi).$$

Die gedachten Kräfte Q' bezeichnet man als Kraftgruppe, die also beliebig angenommen werden kann (Abb. 91).

Die zugrunde gelegten Verrückungen des Querschnittes m oder mehrerer Querschnitte m , bestehend aus

Längsbewegung $d(\Delta s)$

Querbewegung $d(\Delta v)$

Drehbewegung $d(\Delta \varphi)$

und die daraus folgenden Verschiebungen von i $d\delta_1$, $d\delta_2$ und $d\delta_3$ der Angriffspunkte von Q' in deren Richtungen werden als Verschiebungsgruppe bezeichnet (Abb. 92).

Verschiebungsgruppe

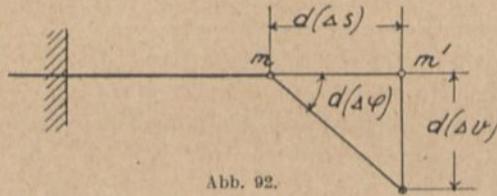


Abb. 92.

Die Kraftgruppe ist jedenfalls unabhängig von der Verschiebungsgruppe; $d(\Delta s)$, $d(\Delta v)$ und $d(\Delta \varphi)$ können durch eine beliebige Ursache hervorgerufen gedacht werden.

f) Brauchbarmachung der Arbeitsgleichung zur Ermittlung von Formänderungen.

Wir können nun anstatt der bisher willkürlich angenommenen Verschiebungsgruppe eine solche annehmen, welche einem gegebenen Belastungszustande entspricht, um so die Arbeitsgleichung auf eine für unsere Zwecke brauchbare Form zu bringen. Hinsichtlich der Gültigkeit der Arbeitsgleichung braucht aber dieser Belastungszustand in dem Augenblicke nicht zu bestehen, wo wir die mit ihm verbundene Verschiebungsgruppe auf eine beliebige Kraftgruppe wirken lassen.

So gelangen wir später zur Auffindung statisch unbestimmter Größen lediglich dadurch, daß wir auf das statisch bestimmte Hauptsystem, belastet mit den unbekanntenen Größen (vgl. Kap. II) als $\sum Q'$, die Verschiebungsgruppe des tatsächlichen Belastungszustandes anwenden (Kap. VI).

Zu dem oben angegebenen Zweck drücken wir nun die einzelnen Verschiebungen $d(\Delta s)$, $d(\Delta v)$, $d(\Delta \varphi)$ durch die ihnen zugrunde

liegenden, zunächst bei beliebiger Belastung möglichen Längskräfte N , Querkkräfte V und Momente M allgemein aus mit der Absicht, bei dem Gebrauch der auf diese Weise ausgedrückten Arbeitsgleichung diesen N , V und M die für unser Ziel jeweils zweckmäßigen Werte beizulegen.

Nach dem Hookeschen Gesetz ist:

$$\varepsilon = \frac{\Delta s}{s} = \frac{\sigma}{E} = \frac{N}{E \cdot F}; \quad \Delta s = \frac{N}{E \cdot F} \cdot s,$$

also

$$d(\Delta s) = \frac{N \cdot ds}{E \cdot F}.$$

Die Formänderung $d(\Delta v)$ ist $\gamma \cdot ds$ (vgl. S. 54); denn sie wird gemessen durch den Verrückungswinkel γ , um den sich zwei benachbarte Querschnitte im Abstände von ds parallel zueinander verschieben (vgl. Abb. 47).

Wir erhalten also mit

$$\tau = \frac{Q}{k \cdot F} \quad \text{und} \quad \gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{Q}{k \cdot F \cdot G};$$

$$d(\Delta v) = \frac{V \cdot ds}{k \cdot F \cdot G}.$$

$d(\Delta \varphi)$ wird genau entsprechend der Gleichung $\Delta d\alpha = \frac{M \cdot ds}{E \cdot J}$, die wir früher schon kennengelernt haben:

$$d(\Delta \varphi) = \frac{M \cdot ds}{E \cdot J}.$$

Damit lautet die Arbeitsgleichung

$$\sum Q' \cdot \delta = \int \frac{N' \cdot N}{E \cdot F} \cdot ds + \int \frac{V' \cdot V}{G \cdot k \cdot F} \cdot ds + \int \frac{M' \cdot M}{E \cdot J} \cdot ds.$$

Verschiebungsarbeit der Kraftgruppe = Verschiebungsarbeit der Verschiebungsgruppe (die inneren Verschiebungen durch deren ursächliche Kraftwirkungen ersetzt).

g) Zusammenhang zwischen Verschiebungs- und Formänderungsarbeit.

In dem Gesetz für die Verschiebungsarbeit hatten wir für die Kraftgruppe einen beliebigen Wert vorausgesetzt und die Verschiebungsgruppe ebenfalls durch äußere Kräfte von beliebiger Größe entstanden gedacht. Wir können also den allgemeinen Ausdrücken der Kraftgruppe N' , V' und M' und der Verschie-

bungsgruppe N , V und M beliebige Werte beimessen, da ja in der allgemeinen Gleichung beide vollständig unabhängig voneinander waren.

Ist die Kraftgruppe identisch mit der Verschiebungsgruppe, dann wird $N' = N$, $V' = V$ und $M' = M$ und es folgt

$$\sum Q \cdot \delta = \int \frac{N^2 \cdot ds}{E \cdot F} + \int \frac{V^2 \cdot ds}{G \cdot k \cdot F} + \int \frac{M^2 \cdot ds}{E \cdot J}$$

Dieser Spezialfall der Verschiebungsarbeit gestattet einen Vergleich mit der Formänderungsarbeit, und wir erkennen daraus die Tatsache, daß die Verschiebungsarbeit das Doppelte ist von der Formänderungsarbeit; denn die Formänderungsarbeit lautet

$$A_a = -A_i = \int \frac{N^2 \cdot ds}{2 \cdot E \cdot F} + \int \frac{V^2 \cdot ds}{2 \cdot G \cdot k \cdot F} + \int \frac{M^2 \cdot ds}{2 \cdot E \cdot J}$$

h) Die rechnerische Bestimmung von Formänderungen mit Hilfe der allgemeinen Arbeitsgleichung.¹⁾

Die allgemeine Grundgleichung der Verschiebungsarbeit

$$\sum Q' \cdot \delta = \int \frac{N' \cdot N \cdot ds}{E \cdot F} + \int \frac{V' \cdot V \cdot ds}{G \cdot k \cdot F} + \int \frac{M' \cdot M \cdot ds}{E \cdot J}$$

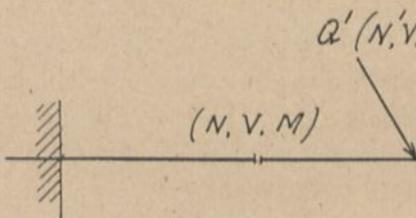


Abb. 93.

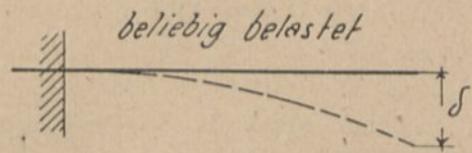


Abb. 94.

welche für den in Abb. 93 gegebenen Fall abgeleitet ist, aber allgemeine Gültigkeit hat, kann wie folgt zur Bestimmung von Formänderungen und Durchbiegungen benutzt werden:

Die Verschiebung δ , welche z. B. der Endpunkt eines Freitragers (Abb. 94) infolge einer beliebigen Belastung desselben erleidet, sei die gesuchte Formänderung. Wenn wir nun diese Formänderung δ (als Maß gemessen) als fertige Verschiebung auffassen und allein (als Resultat) auf der linken Seite unserer Arbeitsgleichung erhalten

¹⁾ Zugrunde liegt: Müller-Breslau, „Die neueren Methoden der Festigkeitslehre“, 4. Aufl., S. 150.

wollen, so müssen wir einen Kunstgriff eintreten lassen, der darin besteht, daß wir für die Kraftgruppe $\sum Q'$ den Wert 1 wählen. Dann lautet die linke Seite $\sum Q' \cdot \delta = 1 \cdot \delta = \delta$. Diese „Kraftgruppe 1“ wird man natürlich am Orte und im Sinne der gesuchten Formänderung annehmen. Auf der rechten Seite der Gleichung muß man naturgemäß die zu dieser „Kraftgruppe 1“ gehörigen inneren Kräfte N' , V' und M' einsetzen; wir geben ihnen die besondere Bezeichnung N_a , V_a und M_a . Als Verschiebungsgruppe haben wir die für die vollendete Durchbiegung ursächliche, wirkliche Belastungsgruppe einzuführen, und somit lautet unsere Gleichung:

$$1 \cdot \delta = \int \frac{N_a \cdot N \cdot ds}{E \cdot F} + \int \frac{V_a \cdot V \cdot ds}{G \cdot k \cdot F} + \int \frac{M_a \cdot M \cdot ds}{E \cdot J}.$$

I. Bestimmung von Durchbiegungen für einige einfache Fälle.¹⁾

Beispiel 1. Zu berechnen sei die Durchbiegung δ_n des in Abb. 95 gegebenen Kragträgers mit gleichmäßiger Belastung q .

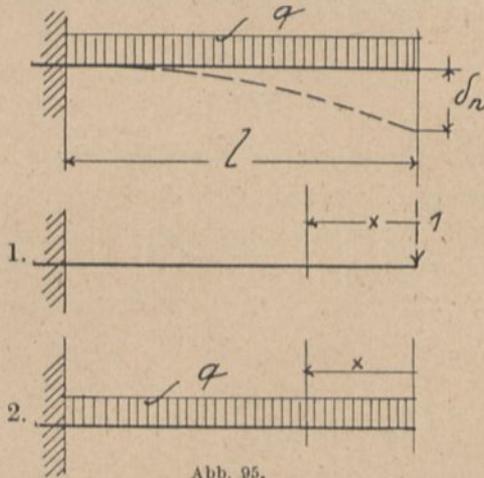


Abb. 95.

1. Kraftgruppe: Last 1 am Orte der gesuchten Formänderung. Dazu gehörig als innere Wirkung $N_a = 0$; $V_a = 1$; $M_a = 1 \cdot x$.
2. Verschiebungsgruppe: Die Wirkungen der wirklichen Last

$$N = 0; V = q \cdot x; M = \frac{q \cdot x^2}{2}.$$

¹⁾ Die Verdrehungen der Querschnitte am Orte der Durchbiegung sind einfach $\alpha = \int \frac{M \cdot ds}{E \cdot J}$ (vgl. S. 29 $\alpha = \frac{F}{E \cdot J}$).

Also lautet unsere Arbeitsgleichung:

$$1 \cdot \delta = \int_0^l \frac{0 \cdot 0 \cdot dx}{E \cdot F} + \int_0^l \frac{1 \cdot q \cdot x \cdot dx}{G \cdot k \cdot F} + \int_0^l \frac{1 \cdot x \cdot q \cdot x^2 \cdot dx}{E \cdot J \cdot 2}$$

daraus

$$\delta = 0 + \frac{q \cdot l^2}{2 \cdot G \cdot k \cdot F} + \frac{q \cdot l^4}{8 \cdot E \cdot J}$$

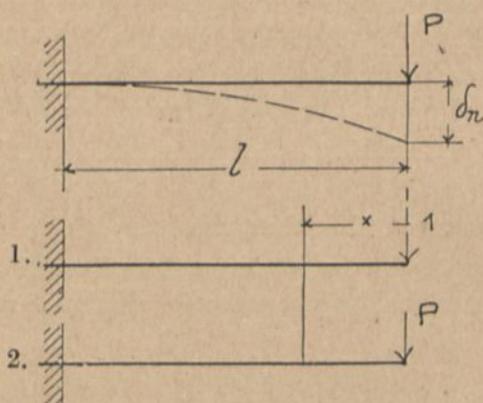


Abb. 96.

Beispiel 2. Freitragter mit Einzellast P am Ende (Abb. 96).

1. Kraftgruppe: Last 1 am Orte der gesuchten Durchbiegung.

Dazu die innere Wirkung $N_a = 0$; $V_a = 1$; $M_a = 1 \cdot x$.

2. Verschiebungsgruppe: Wirkliche Last $N = 0$; $V = P$;
 $M = P \cdot x$.

Also

$$\delta = \int_0^l 0 + \int_0^l \frac{1 \cdot P \cdot dx}{G \cdot k \cdot F} + \int_0^l \frac{1 \cdot x \cdot P \cdot x \cdot dx}{E \cdot J}$$

$$\delta = 0 + \frac{P \cdot l}{G \cdot k \cdot F} + \frac{P \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot J}$$

(vgl. die früheren Resultate).

Der Gebrauch der Arbeitsgleichung zur Ermittlung von Formänderungen ist also dem Gebrauch der Differentialgleichung der elastischen Linie entschieden vorzuziehen und liefert sogar noch den Einfluß der Längs- und Querkkräfte.

Beispiel 3. Freitragter gleichen Widerstandes gegen Biegung mit einer Einzellast P am Ende (Abb. 97).

Allgemein ist der Querschnitt $F = b \cdot \frac{x}{l} \cdot h$ und das wechselnde Trägheitsmoment $J = \frac{1}{12} \cdot b \cdot \frac{x}{l} \cdot h^3$.

1. Kraftgruppe wie vor = 1.
2. Verschiebungsgruppe ebenfalls wie vor.

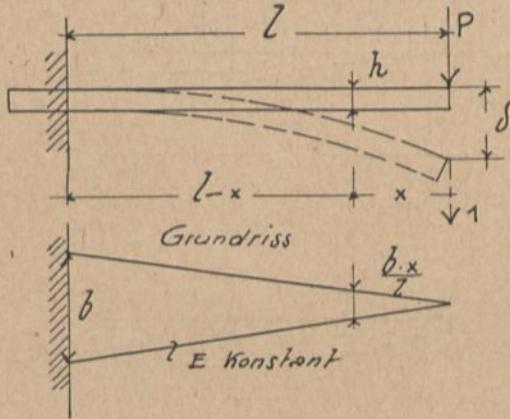


Abb. 97.

Also

$$\delta = \int_0^l \frac{1 \cdot P \cdot dx}{G \cdot k \cdot F} + \int_0^l \frac{1 \cdot x \cdot P \cdot x \cdot dx}{E \cdot \frac{1}{12} \cdot b \cdot \frac{x}{l} \cdot h^3}$$

$$\delta = \frac{P \cdot l}{G \cdot k \cdot b \cdot h} \cdot \int_0^l \frac{dx}{x} + \frac{12 \cdot P \cdot l}{E \cdot h^3 \cdot b} \cdot \int_0^l x \cdot dx$$

$$\delta = \frac{P \cdot l}{G \cdot k \cdot b \cdot h} \cdot \log. \text{ nat. } l.^1) + \frac{6 \cdot P \cdot l^3}{E \cdot b \cdot h^3}$$

Beispiel 4. Freitragler mit einer dreieckförmigen Last P bei konstantem E und J (Abb. 98).

1. Kraftgruppe wie vor.
2. Verschiebungsgruppe:

$$N = 0; \quad V = P \cdot \frac{x^2}{l^2}; \quad M = P \cdot \frac{x^2}{l^2} \cdot \frac{x}{3} = \frac{P \cdot x^3}{3 \cdot l^2}$$

¹⁾ Vgl. Höh. Mathematik A, Absatz 17.

$$\delta = \int_0^l \frac{1 \cdot P \cdot x^2}{G \cdot k \cdot F} \cdot dx + \int_0^l \frac{1 \cdot x \cdot P \cdot x^3}{E \cdot J \cdot 3l^2} \cdot dx$$

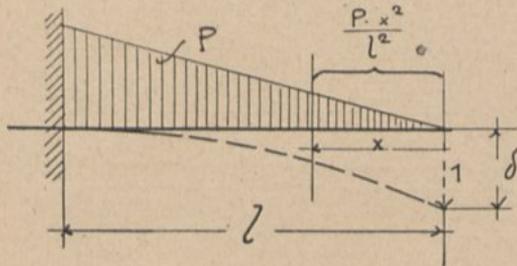


Abb. 98.

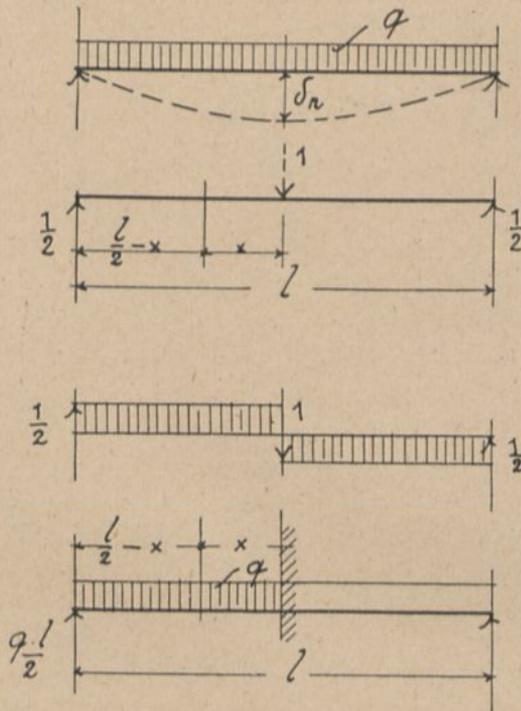


Abb. 99.

$$\delta = \frac{P \cdot l^3}{3 \cdot G \cdot k \cdot F \cdot l^2} + \frac{P \cdot l^5}{E \cdot J \cdot 5l^2 \cdot 3}$$

$$\delta = \frac{P \cdot l}{3 \cdot G \cdot k \cdot F} + \frac{P \cdot l^3}{E \cdot J \cdot 15}$$

Nach dem Ergebnisse der Differentialgleichung der elastischen Linie hätten wir bekommen mit

$$y = \frac{P \cdot l^3}{12 \cdot E \cdot J} \cdot \left(\frac{x}{l} + \frac{(l-x)^5}{5 l^5} - \frac{1}{5} \right)$$

(vgl. früher), für $y = \delta$ und $x = l$

$$\delta = \frac{P \cdot l^3}{12 \cdot E \cdot J} \cdot \left(\frac{l}{l} + \frac{(l-l)^5}{5 l^5} - \frac{1}{5} \right)$$

$$\delta = \frac{P \cdot l^3 \cdot 4}{60 \cdot E \cdot J} = \frac{P \cdot l^3}{15 \cdot E \cdot J}$$

Beispiel 5. Balken auf zwei Stützen gleichmäßig belastet (Abb. 99).

1. Kraftgruppe: Last 1 am Ort der gesuchten Durchbiegung;
dazugehörig die innere Wirkung $N_a = 0$; $V_a = \pm \frac{1}{2}$;

$$M_a = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{l}{2} - x \right).$$

2. Verschiebungsgruppe:

$$N = 0; \quad V = q \cdot \frac{l}{2} - q \cdot \left(\frac{l}{2} - x \right) = q \cdot x;$$

$$M = \frac{q \cdot l}{2} \cdot \left(\frac{l}{2} - x \right) - \frac{q \cdot \left(\frac{l}{2} - x \right)^2}{2}$$

$$\delta_n = \pm \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{1}{2} \cdot q \cdot x \cdot dx \cdot \frac{1}{G \cdot k \cdot F}$$

$$+ 2 \cdot \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{l}{2} - x \right) \cdot \left[\frac{q \cdot l}{2} \cdot \left(\frac{l}{2} - x \right) - \frac{q \cdot \left(\frac{l}{2} - x \right)^2}{2} \right] \cdot dx \cdot \frac{1}{E \cdot J}$$

$$\delta_n = \pm \frac{q \cdot l^2}{16 \cdot G \cdot k \cdot F}$$

$$+ 2 \cdot \int_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{l}{4} - \frac{x}{2} \right) \cdot \left[\frac{q \cdot l^2}{4} - \frac{q \cdot l \cdot x}{2} - \frac{q}{2} \cdot \left(\frac{l^2}{4} - l \cdot x + x^2 \right) \right] \cdot dx \cdot \frac{1}{E \cdot J}$$

ausgerechnet:
$$\delta_n = 2 \cdot \frac{5 \cdot q \cdot l^4}{768 \cdot E \cdot J} = \frac{5 \cdot q \cdot l^4}{384 \cdot E \cdot J}$$

(vgl. früheres Resultat).

2. Lösung (Abb. 100).

$$\delta_n = 2 \cdot \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{x \cdot \left(\frac{q \cdot l \cdot x}{2} - \frac{q \cdot x^2}{2} \right)}{E \cdot J} \cdot dx$$

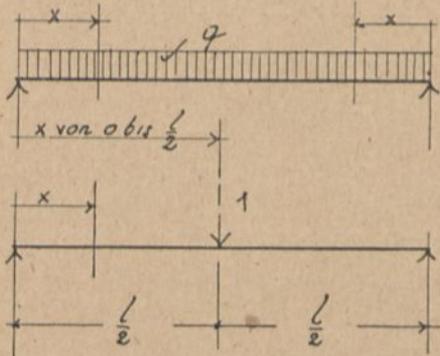


Abb. 100.

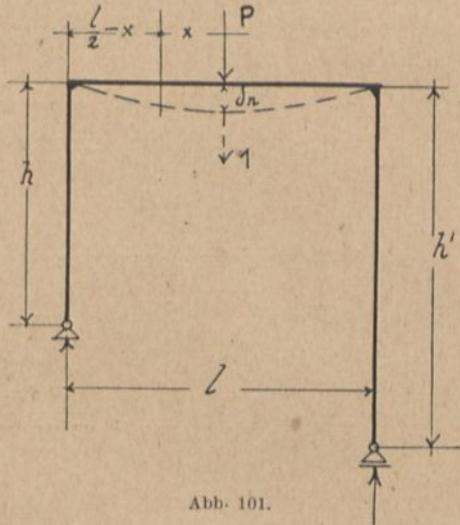


Abb. 101.

oder

$$\begin{aligned} \delta_n &= 2 \cdot \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{q \cdot l \cdot x^2}{4 \cdot E \cdot J} \cdot dx - 2 \cdot \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{q \cdot x^3}{4 \cdot E \cdot J} \cdot dx \\ &= 2 \cdot \left[\frac{q \cdot l \cdot l^3}{4 \cdot E \cdot J \cdot 24} - \frac{q}{4 \cdot E \cdot J} \cdot \frac{l^4}{64} \right] \\ &= 2 \cdot \left[\frac{q \cdot l^4}{96 \cdot E \cdot J} - \frac{q \cdot l^4}{256 \cdot E \cdot J} \right] \\ \delta_n &= 2 \cdot \left[\frac{4 \cdot q \cdot l^4}{384 \cdot E \cdot J} - \frac{1,5 \cdot q \cdot l^4}{384 \cdot E \cdot J} \right] = \frac{5 \cdot q \cdot l^4}{384 \cdot E \cdot J} \end{aligned}$$

Wird die Durchbiegung an beliebiger anderer Stelle gesucht, so ist die gedachte Last 1 dort anzunehmen, im übrigen aber genau so zu verfahren; die Integration erfolgt dann für zwei ungleich lange Trägerteile (a und b).

Beispiel 6. Es soll die Durchbiegung δ_n , von der Last P herrührend, in der Mitte des in Abb. 101 dargestellten Trägers berechnet werden.

Diese setzt sich zusammen aus der Durchbiegung des Riegels selbst und der Zusammendrückung der Stützen. Die Integrale sind demnach für alle drei Stabteile zu bilden.

1. Kraftgruppe: Last 1 in der Mitte, dazu

$$\begin{aligned} N_a \text{ in den Stielen} &= \text{je } \frac{1}{2} \\ &\text{in dem Riegel} = 0 \\ V_a \text{ in dem Riegel} &= \pm \frac{1}{2} \\ &\text{in den Stielen} = 0 \\ M_a \text{ in dem Riegel} &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{l}{2} - x \right) \\ &\text{in den Stielen} = 0. \end{aligned}$$

2. Verschiebungsgruppe:

$$\begin{aligned} N \text{ in den Stielen} &= \text{je } \frac{P}{2} \\ &\text{in dem Riegel} = 0 \\ V \text{ in dem Riegel} &= \pm \frac{P}{2} \\ M \text{ in dem Riegel} &= \frac{P}{2} \cdot \left(\frac{l}{2} - x \right). \end{aligned}$$

Durch Längskräfte werden also nur die beiden Pfosten in Anspruch genommen, durch Querkräfte nur der Riegel.

$$\delta_n = \int_0^{h(h')} \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{2} \cdot \frac{ds}{E \cdot F} \pm 2 \cdot \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{1 \cdot P \cdot ds}{2 \cdot 2 \cdot G \cdot k \cdot F} + 2 \cdot \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{l}{2} - x \right)^2 \cdot \frac{P}{2} \cdot dx}{E \cdot J}$$

Für $h = h'$ angenommen, ist

$$\delta_n = 2 \cdot \frac{P}{4} \cdot \frac{h}{E \cdot F} \pm 2 \cdot \frac{P}{4 \cdot G \cdot k \cdot F} \cdot \frac{l}{2} + 2 \cdot \frac{P}{4 \cdot E \cdot J} \cdot \int_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{l^2}{4} - l \cdot x + x^2 \right) \cdot dx.$$

Aufgelöst gibt

$$\delta_n = \frac{P \cdot h}{2 \cdot E \cdot F} + 0 + \frac{P \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot J}.$$

Beispiel 7. Für einen ähnlichen einfachen Balken wie vor (Abb. 102) soll die Durchbiegung in der Mitte und zwar mit Vernachlässigung von N und V berechnet werden.

1. Kraftgruppe: Last 1 in der Mitte, dazu im Innern

$$M_a = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{l}{2} - x \right),$$

wobei es gleichgültig ist, auf welcher Seite vom Punkt i das x sich befindet.

2. Verschiebungsgruppe: Von 0 bis i

$$M = \frac{q \cdot b}{2} \cdot \left(\frac{l}{2} - x \right),$$

x veränderlich von o bis a ; ferner

$$M = \frac{q \cdot b}{2} \cdot \left(\frac{l}{2} - x \right) - \frac{q \cdot \left(\frac{b}{2} - x \right)^2}{2};$$

x veränderlich von a bis $\frac{l}{2}$.

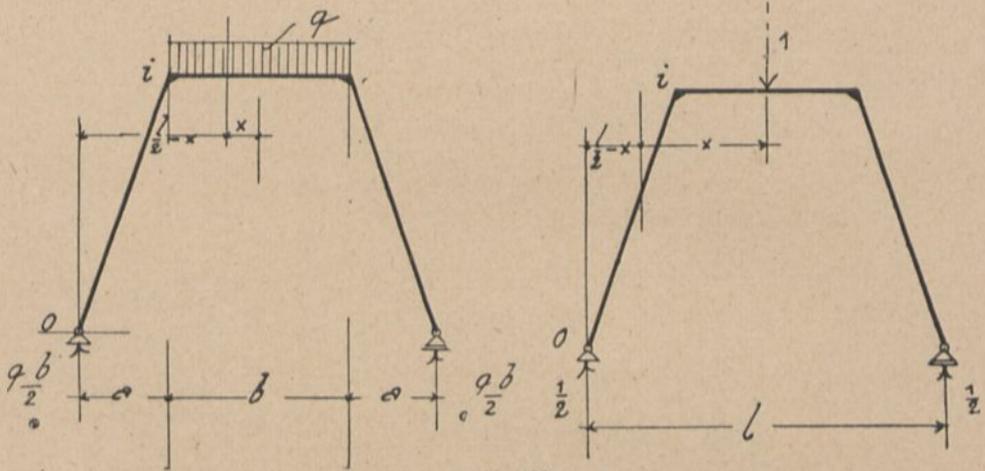


Abb. 102.

$$\delta_n = 2 \cdot \int_0^a \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{l}{2} - x \right) \cdot q \cdot \frac{b}{2} \cdot \left(\frac{l}{2} - x \right) \cdot dx}{E \cdot J}$$

$$+ 2 \cdot \int_a^{\frac{l}{2}} \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{l}{2} - x \right) \cdot \left[\frac{q \cdot b}{2} \cdot \left(\frac{l}{2} - x \right) - \frac{q \cdot \left(\frac{b}{2} - x \right)^2}{2} \right] \cdot dx}{E \cdot J}$$

usf.

2. Bestimmung von Auflagerdrücken (statisch unbestimmten Größen).

Diese erfolgt, solange an einem Auflager nur eine statisch unbestimmte Größe auftritt — wie beim einseitig eingespannten, am anderen Ende frei aufliegenden Träger (Abb. 58) — in derselben Weise, wie S. 35 vorgeführt, also durch Gleichsetzung der δ -Werte, wobei in allen Belastungsfällen der δ -Wert der gesuchten Auflagergröße dem in Beispiel 2 S. 80 für eine Einzellast P am Ende ermittelten entspricht. Für gleichmäßige Belastung wäre also der statisch unbestimmte Lagerdruck am gelenkigen Auflager zu finden aus den Ergebnissen der Beispiele 1 und 2, also aus der Beziehung

$$\frac{q \cdot l^2}{2 \cdot G \cdot k \cdot F} + \frac{q \cdot l^4}{8 \cdot E \cdot J} = \frac{X \cdot l}{G \cdot k \cdot F} + \frac{X \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot J},$$

für die dreieckförmige Belastung P aus den Ergebnissen der Beispiele 4 und 2, also aus

$$\frac{P \cdot l}{3 \cdot G \cdot k \cdot F} + \frac{P \cdot l^3}{E \cdot J \cdot 15} = \frac{X \cdot l}{G \cdot k \cdot F} + \frac{X \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot J}$$

usf.

3. Träger auf mehreren Stützen (Ableitung der Clapeyronschen Gleichung nach dem Arbeitsgesetz).¹⁾

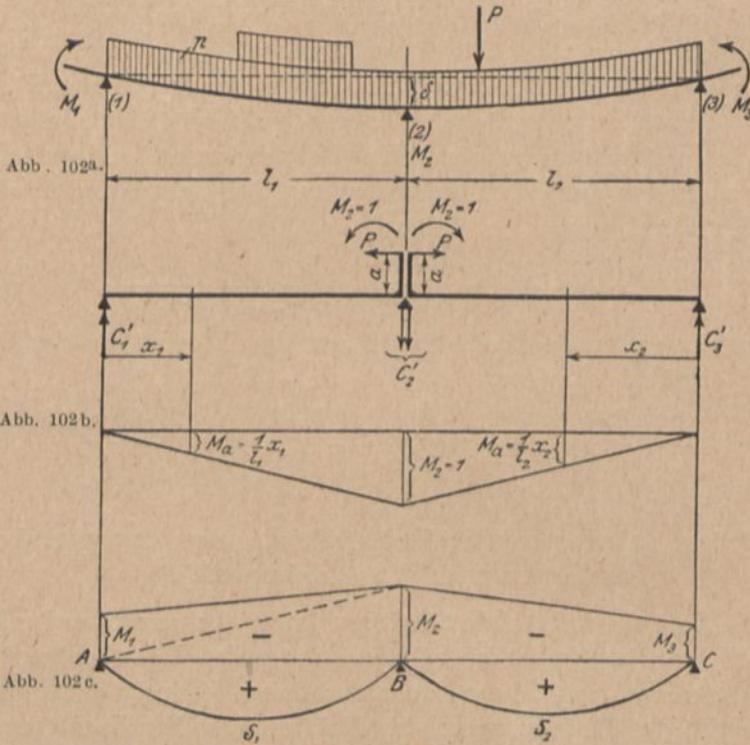
Es liege ein frei auf drei Stützpunkten ruhender, ursprünglich wagerechter, kontinuierlicher Balken unter beliebiger senkrechter Belastung vor, auf dessen Endquerschnitte beliebig große, von außerhalb des Balkens wirkenden Kräften herrührende Biegemomente M_1 und M_3 einwirken mögen (Abb. 102a); E und J seien konstant²⁾. Es soll das Biegemoment M_2 über der Mittelstütze unter der Voraussetzung berechnet werden, daß der Stützpunkt (2) sich um δ senkt.

Die Lösungsart der Aufgabe unterscheidet sich grundsätzlich nicht von der unter 1 S. 79 zur Ermittlung von Durchbiegungen gebrauchten; ein Unterschied besteht nur darin, daß hier am Angriffsorte der gesuchten Größe M_2 bzw. des dieser entsprechenden Auflagerdruckes C'_2 die Senkung δ gegeben ist,

¹⁾ Vgl. Müller-Breslau, „Die neueren Methoden der Festigkeitslehre“, dritte Auflage, S. 96.

²⁾ Bequem brauchbare Koeffizienten zur Berücksichtigung des Wechsels im Trägheitsmoment bringt ein Aufsatz von Franke, Monatsschrift „Armierter Beton“ 1919, Heft 3, S. 70.

und die Verschiebungsgruppe im Gegensatz zu unseren bisherigen Ermittlungen den Einfluß der unbekannt GröÙe mit enthält. Die Anwendung der Arbeitsgleichung muß also hier zur Ermittlung der statisch unbestimmten GröÙe führen, es sei nun eine Senkung δ erfolgt oder $\delta = 0$.



Wir erhalten also:

1. Kraftgruppe: Moment $M_2 = 1$ am Orte der Senkung δ ¹⁾. Dasselbe entspricht einem Momente $P \cdot a$ nach Abb. 102b, einwirkend auf die beiden einfachen Träger von der Länge l_1 und l_2 , die nach Entfernung der Belastung, wozu auch die Momente M_1 und M_3 gehören, entstehen. Dazugehörig eine dreieckige Momentenfläche und die Reaktionen:

$$C_1' = \frac{1}{l_1}, \quad C_3' = \frac{1}{l_2} \quad \text{aufwärts gerichtet}$$

¹⁾ Wir hatten bei der Ableitung der Arbeitsgleichung für $\sum Q'$ keinerlei Voraussetzungen gemacht, können dafür also auch ein Kräftepaar — Moment — einsetzen und geben diesem zweckmäßig hier wieder die GröÙe 1.

und

$$C'_2 = \frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} = \frac{l_1 + l_2}{l_1 \cdot l_2} \quad \text{abwärts gerichtet.}$$

Senkt sich die Mittelstütze um δ , so lautet daher die linke Seite der Arbeitsgleichung $\frac{l_1 + l_2}{l_1 \cdot l_2} \cdot \delta$. Die inneren Wirkungen von $M_2 = 1$ sind für den Teil l_1 $M_a = \frac{1}{l_1} \cdot x_1$, für den Teil l_2 $M_a = \frac{1}{l_2} \cdot x_2$.

2. Verschiebungsgruppe: Die Wirkungen der vollständigen Belastung, die Gesamtmomente, die wir vorläufig mit M bezeichnen wollen. Die vollständige Momentenfläche besteht aus einem Trapez, das bei (1) und (2) die Höhen M_1 und M_2 hat, und aus der Momentenfläche AS_1B , welche dem bei (1) und (2) frei aufliegenden Einzelbalken von der Länge l_1 entsprechen würde (Abb. 102c).

Unsere Arbeitsgleichung lautet nunmehr:

$$E \cdot J \frac{l_1 + l_2}{l_1 \cdot l_2} \delta = \frac{1}{l_1} \int_0^{l_1} x_1 \cdot M \cdot dx_1,$$

soweit l_1 in Frage kommt.

Das Integral bedeutet das statische Moment der wirklichen Momentenfläche, bezogen auf die Senkrechte durch den Stützpunkt (1). Bezeichnen wir das statische Moment der zum einfachen Träger gehörigen Momentenfläche, bezogen auf diese Senkrechte, mit \mathcal{Q}_1 , so erhalten wir

$$\int_0^{l_1} x_1 M \cdot dx_1 = \mathcal{Q}_1 + M_1 \frac{l_1}{2} \cdot \frac{l_1}{3} + M_2 \frac{l_1}{2} \cdot \frac{2l_1}{3},$$

also

$$\frac{1}{l_1} \int_0^{l_1} x_1 M \cdot dx_1 = \frac{\mathcal{Q}_1}{l_1} + \frac{1}{6} (M_1 \cdot l_1 + 2 M_2 \cdot l_1);$$

für den Teil l_1 ergibt sich ebenso

$$\frac{1}{l_2} \int_0^{l_2} x_2 \cdot M \cdot dx_2 = \frac{\mathfrak{R}_2}{l_2} + \frac{1}{6} (M_3 \cdot l_2 + 2 M_2 \cdot l_2),$$

wobei \mathfrak{R}_2 das statische Moment der zu l_2 gehörigen einfachen Momentenfläche BS_2C , bezogen auf die Auflagersenkrechte durch (3), bedeutet.

Unsere Gleichung lautet nach Multiplikation mit 6 im ganzen

$$6 E J \delta \frac{l_1 + l_2}{l_1 l_2} = 6 \frac{\mathfrak{L}_1}{l_1} + 6 \frac{\mathfrak{R}_2}{l_2} + M_1 \cdot l_1 + 2 M_2 (l_1 + l_2) + M_3 l_2.$$

Diese Gleichung ermöglicht die Berechnung der unbekanntenen Größe M_2 .

Der Vergleich dieser Ableitung mit der nach der Biegungslehre (S. 38 u. f.) zeigt die großen Vorteile der Verwendung der Arbeitsgleichung. Einzelfälle der Belastung sind schon S. 44 behandelt.

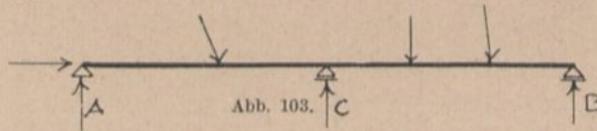
Im Zusammenhang mit den schon S. 43 aufgeführten statischen Voraussetzungen für die Anwendbarkeit der Clapeyronschen Gleichung sei auf einen Aufsatz¹⁾ hingewiesen, der für einen Träger auf drei Stützen bei verschiedenem Steifigkeitsverhältnis zwischen Balken und Stützen die zugehörige Berechnung als Rahmen in ihren Ergebnissen einerseits mit den Ergebnissen nach der Berechnung als durchlaufender Träger, andererseits mit dem Ergebnisse nach der Berechnung als eingespannter Träger vergleicht. Bei kräftigem Stützenquerschnitt nähert man sich danach dem Zustand fester Einspannung, während ein steifes Balkenprofil auf schwachen Stützen in seiner Wirkungsweise annähernd dem durchlaufenden Balken entspricht (vgl. hierzu die Ausführungen über die Voraussetzungen in der Anwendung der Clapeyronschen Gleichung in Bd. I); im übrigen sei auf die Einzelheiten des genannten Aufsatzes verwiesen, der die Grenzwerte der Steifigkeitsverhältnisse ermittelt, bei welchen ein Träger auf drei Stützen als fest eingespannt oder kontinuierlich gelagert annäherungsweise berechnet werden darf.

Kapitel VI.

Allgemeines über statisch unbestimmte Bauwerke und die Ermittlung der statisch nicht bestimmaren Größen X.

a) Allgemeines.

In Ergänzung von Kapitel II bemerken wir, daß es als selbstverständlich vorausgesetzt werden muß, die Entfernung der statisch überzähligen Größen so vorzunehmen, daß kein verschiebliches Bauwerk entsteht.



Als Beispiel für eine solche Möglichkeit sei ein Träger auf drei Stützen angeführt (Abb. 103), der die bekannten Auflager haben soll, also ein festes und zwei bewegliche mit zusammen

¹⁾ „Die Bedeutung des Steifigkeitsverhältnisses bei einfachen Rahmenkonstruktionen“ von Bauinspektor Scharff, Hamburg; *Armierter Beton* 1912, Heft 10, 11 und 12.

vier Unbekannten. Als überzählige Größe können wir jede der lotrechten Reaktionen wählen, nur nicht die eine wagerechte, da in diesem Falle aus dem festen Gelenk ein wagerecht bewegliches Auflager entstehen und das statisch bestimmte Hauptsystem unter dem Einfluß der Kräfte verschieblich werden würde.

b) Ermittlung der statisch nicht bestimmbar Größen X .
(Geometrische Erklärung.)

Die Figuren a und b des in Abb. 104 dargestellten Stabzuges zeigen uns das statisch bestimmte Hauptsystem einerseits belastet mit den äußeren Kräften und andererseits belastet mit den überzähligen Größen, hier Xa und Xb genannt.

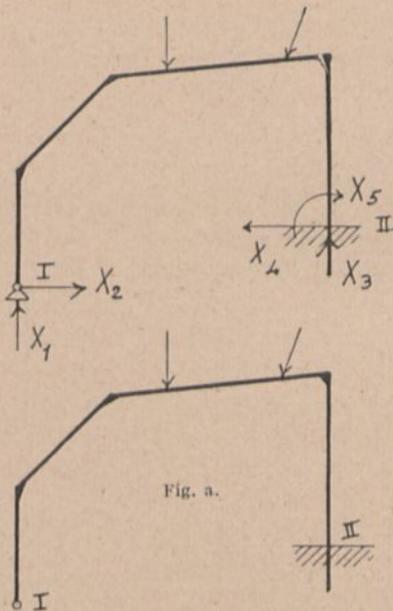


Abb. 104

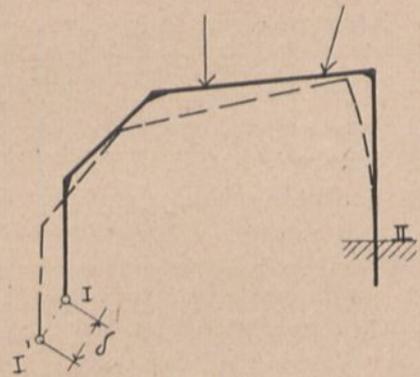


Abb. 105.

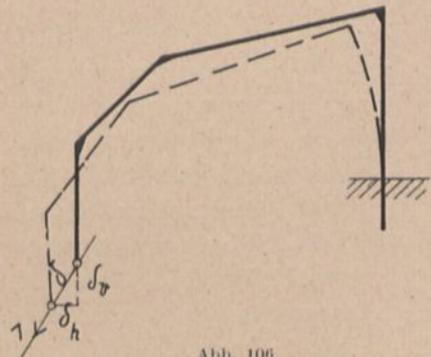


Abb. 106.

Wie schon erläutert, muß ein statisch bestimmtes Hauptsystem, sofern es als einfacher Balken vorliegt, stets ein festes

und ein bewegliches Auflager haben, oder es muß als Freitragler (Fig. a) am freien Ende freie Bewegungsmöglichkeit besitzen. Beim Dreigelenkbogen als Grundsystem liegt die freie Bewegungsmöglichkeit im Mittelgelenk. Die Veranlassung dafür, daß beim vorliegenden System das Lager I nicht frei beweglich ist, ist das feste Auflagergelenk bzw. sind es die beiden dort wirkenden noch unbekanntenen Größen Xa und Xb oder deren Resultierende R .

Das Vorhandensein der Resultierenden R oder ihrer beiden Komponenten Xa und Xb verhindert also eine Verschiebung des Punktes I . Diesen Vorgang kann man sich auch getrennt vorstellen.

1. Nach der Belastung gemäß Fig. a wird eine Verschiebung von Punkt I nach I' eintreten (Abb. 105), welche nichts anderes ist und nicht anders zu berechnen wäre als eine Durchbiegung δ nach den früheren Beispielen.

Gegenüber den bisher berechneten Fällen der Durchbiegung besteht hier nur der eine Unterschied, daß uns die Richtung von δ und somit auch die Richtung der anzubringenden Kraft 1 unbekannt ist. Um dennoch die Verschiebung $I-I'$ zu finden, müssen wir also zunächst darauf verzichten, die Last 1 gleich in Richtung der Resultierenden anzusetzen und begnügen uns damit, die lotrechte und wagerechte Projektion von δ festzustellen, δ_v und δ_h (Abb. 106). Hierdurch müssen wir als Resultierende δ finden.

Um δ_v und δ_h zu gewinnen, brauchen wir nur unsere Arbeitsgleichung genau nach der früheren Weise zweimal anzusetzen.

Die Übereinstimmung mit den früheren Durchbiegungsberechnungen möge Abb. 107 andeuten.

Wollten wir diese Aufgabe wirklich durchführen, so müßten wir analog unseren früheren Berechnungen hier sowohl für die eine als für die andere Last 1 Längskraft, Querkraft und Biegemoment für jeden Stabteil in einfacher Weise bestimmen und diese Werte, jedesmal mit den für beide gleichen Wirkungen der Verschiebungsgruppe, unter das Integral setzen. Man hätte sowohl für Längskraft, Querkraft als Biegemoment jedes Integral viermal anzuschreiben, weil vier Stabteile vorhanden sind. Läßt man diese Vierteilung außer Betracht, so würden unsere beiden Gleichungen ganz allgemein lauten:

$$1. \quad 1 \cdot \delta_v = \int \frac{N_{av} \cdot N \cdot ds}{E \cdot F} + \int \frac{V_{av} \cdot V \cdot ds}{G \cdot k \cdot F} + \int \frac{M_{av} \cdot M \cdot ds}{E \cdot J},$$

daraus also δ_v ;

$$2. \quad 1 \cdot \delta_h = \int \frac{N_{ah} \cdot N \cdot ds}{E \cdot F} + \int \frac{V_{ah} \cdot V \cdot ds}{G \cdot k \cdot F} + \int \frac{M_{ah} \cdot M \cdot ds}{E \cdot J},$$

daraus also δ_h .

δ_v und δ_h zusammengesetzt ergeben dann δ , die Gesamtverschiebung von I .

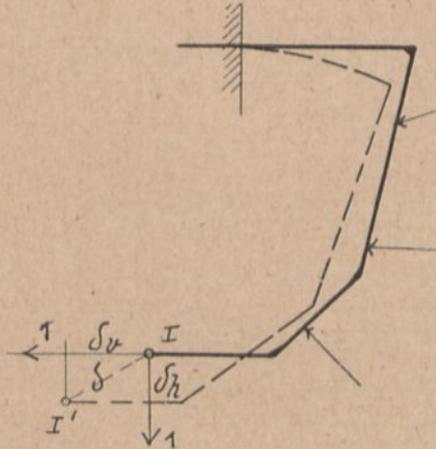


Abb. 107.

Wenn man die Aufgabe nur für die Biegemomente durchführt, so hätte man für diese allein schon $2 \cdot 4 = 8$ Integrale aufzustellen.

2. Unter dem Einfluß der bei bestimmter äußerer Belastung sich einstellenden statisch unbestimmbaren Größen wird nun in jedem Augenblick, wo der freie Punkt I das Bestreben zeigt, sich im Sinne von δ zu verschieben, diese Verschiebung annulliert (wenigstens wollen wir vorläufig diesen einfachsten Fall annehmen). Die Resultierende von X_a und X_b (R) durchläuft also nicht den Weg δ , sondern den Weg Null. Wir können uns diesen Vorgang auch so vorstellen, daß nach Abb. 104 Fig. a zunächst eine tatsächliche Verschiebung erfolgt und nach Abb. 104 Fig. b die Rückschiebung durch die überzähligen Größen.

Beide Vorgänge zusammen betrachtet liefern uns die Möglichkeit, die Arbeitsgleichung so aufzustellen, daß wir die statisch unbestimmten Größen daraus gewinnen können. Mit dem Wege $\delta = 0$ lauten nämlich unsere linken Seiten der Gleichungen: $1 \cdot 0$. Zu diesen wirklichen Verschiebungswegen gehörte dann im Innern des Systems die

für beide Wege gleiche wirkliche Verschiebungsgruppe, welche sich nunmehr aus den Einflüssen der Belastung selbst und der statisch überzähligen Größen X_a und X_b gleichzeitig zusammensetzt. Um ein Beispiel zu geben, seien für die Längskraft N die Kräfte noch näher angegeben.

1. N auf die Verschiebung hin wirkend, genannt N_0 (Belastung).

2. Diesem N entgegenwirkend dasjenige N , das von der unbestimmten Größe R herrührt: N_R , so daß die wirkliche Verschiebungsgruppe lautet:

$$N = N_0 - N_R.$$

Für N_R können wir auch schreiben $N_{aR} \cdot R$, d. h. der Einfluß einer in Richtung der Kraft R wirkenden Kraft 1 auf N ist mit R zu multiplizieren. N_{aR} ist also die Einheit zu N_R .

Somit erhalten wir:

$$N = N_0 - N_{aR} \cdot R.$$

Führt man jetzt anstatt R deren Komponenten X_a und X_b ein, und nennt man den Einfluß von $X_a = 1$ gleich N_a und den Einfluß von $X_b = 1$ gleich N_b , so lautet dieselbe Verschiebungsgruppe:

$$N = N_0 - (N_a \cdot X_a + N_b \cdot X_b).$$

Die linken Seiten lauten:

$$1. \quad 1 \cdot \delta_v = 1 \cdot 0$$

$$2. \quad 1 \cdot \delta_h = 1 \cdot 0.$$

Sowohl bei der Aufstellung von 1. als auch von 2. muß, da jedesmal der Weg $= 0$ wurde, im Innern ein und dieselbe Verschiebungsgruppe tätig gewesen sein, nämlich das soeben angegebene

$$N = N_0 - (N_a \cdot X_a + N_b \cdot X_b).$$

Wir wissen, daß die Größen X_a und X_b entgegengesetzt zu unseren Lasten 1 wirken, welche wir für die Anwendung der Arbeitsgleichungen benötigen. Unser Ansatz der Arbeitsgleichung bezieht sich also auf den Zustand $X_a = -1$ und $X_b = -1$.

Unsere Gleichungen lauten nunmehr:

$$1. \quad 1 \cdot 0 = \int \frac{N_a \cdot (N_0 - N_a \cdot X_a - N_b \cdot X_b) \cdot ds}{E \cdot F} + \int \frac{V_a \cdot (V_0 - V_a \cdot X_a - V_b \cdot X_b) \cdot ds}{G \cdot k \cdot F} + \int \frac{M_a \cdot (M_0 - M_a \cdot X_a - M_b \cdot X_b) \cdot ds}{E \cdot J},$$

$$2. \quad 1 \cdot 0 = \int \frac{N_b \cdot (N_0 - N_a \cdot X_a - N_b \cdot X_b) \cdot ds}{E \cdot F} \\ + \int \frac{V_b \cdot (V_0 - V_a \cdot X_a - V_b \cdot X_b) \cdot ds}{G \cdot k \cdot F} + \int \frac{\overbrace{M_b \cdot (M_0 - M_a \cdot X_a - M_b \cdot X_b)}^M \cdot ds}{E \cdot J}.$$

Die Arbeitsgleichung muß also so oft aufgestellt werden, als Unbekannte vorhanden sind.

Bemerkung: Bildet man von dem Ausdruck M die partielle Ableitung nach X_b , so erhält man

$$\frac{\partial M}{\partial X_b} = -M_b.$$

Man kann also für die Werte, welche auf die Zahl 1 Bezug haben (M_b , V_b und N_b und natürlich auch ebenso M_a , V_a und N_a), die partiellen Differentialquotienten¹⁾ der wirklichen Verschiebungsgruppe nach den gleichnamigen, statisch unbestimmten Größen einsetzen, also z. B.

$$\int \frac{M_b \cdot (M_0 - M_a \cdot X_a - M_b \cdot X_b) \cdot ds}{E \cdot J} = - \int \frac{\partial M}{\partial X_b} \cdot \frac{(M_0 - M_a \cdot X_a - M_b \cdot X_b) \cdot ds}{E \cdot J}.$$

Schlußbetrachtung zur Arbeitsgleichung.

Wir wollen uns darüber klar sein, daß wir zur Ermittlung der statisch unbestimmten Größen mit vollständiger Umgehung der Feststellung irgendeiner tatsächlichen Formänderung gelangt sind, eben nur durch die geschickte Anwendung des Prinzips der virtuellen Verrückungen. Wollte man nun die unbestimmten Größen nicht auf diese Weise finden, so müßte man sie aus den Formänderungen berechnen, was folgendermaßen vor sich gehen würde:

Für das statisch bestimmte Hauptsystem wird die Verschiebung an der Stelle berechnet, wo später die unbestimmte Größe angreifen soll. Dies geschieht, wie bekannt, mittels der Arbeitsgleichung oder mittels eines noch später zu betrachtenden zeichnerischen Verfahrens (Konstruktion der Biegelinie, Stabzugverfahren usw.). Sodann hätte man mit Hilfe desselben Verfahrens für eine Kraft = 1 entgegengesetzt zur Richtung der gefundenen Verschiebung die Rückschiebung festzustellen. Nun erhält man durch Division der Rückschiebung in die erste Ver-

¹⁾ Vgl. Schlüter, „Höhere Mathematik“, Absatz 11.

schiebung ganz einfach die überzählige Größe selbst. So betrage z. B. bei einem Hauptssystem (Abb. 108) die wagerechte Verschiebung, festgestellt durch die Arbeitsgleichung, 6 cm, die

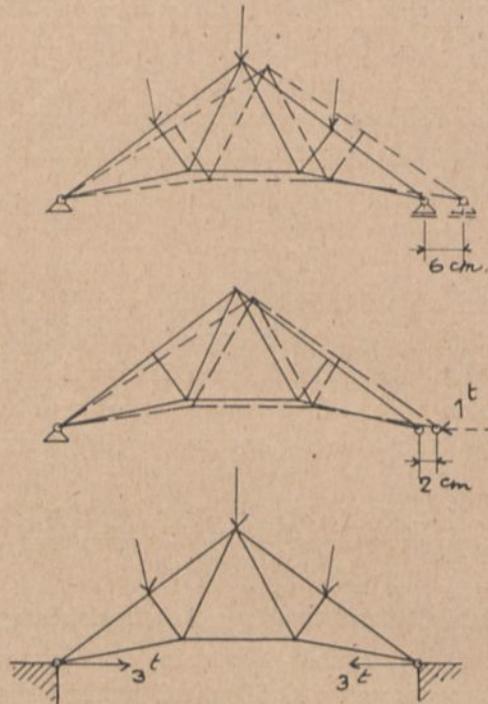


Abb. 108.

Rückschiebung infolge der Kraft 1 an derselben Stelle 2 cm. Folglich wäre die in diesem einfach statisch unbestimmten System vorhandene Horizontalkraft $X_a = \frac{6}{2} = 3 \text{ t}$.

c) Möglichkeiten für die linke Seite der Arbeitsgleichung
(Virtuelle Arbeit der Auflagerkräfte).

Es sind folgende drei Fälle möglich, ohne daß die rechte Seite sich irgendwie ändert:

1. Der Angriffspunkt der überzähligen Größen ist starr (wie bei unserer Ableitung zuerst angenommen). In solchen Fällen sagt man: Die statisch unbestimmten Größen machen die Formänderungsarbeit (für uns rechnerisch Verschiebungsarbeit) zu einem Minimum. Man spricht daher vom „Satz vom Minimum der Formänderungsarbeit“.

2. Die statisch unbestimmten Größen können nicht bis zur vollen Gegengröße gegen die Verschiebungskräfte anwachsen, um jede Bewegung δ aufzuheben. Dieser Fall tritt ein, wenn das Lager, wogegen sich die unbestimmten Größen stützen, und dem sie erst ihre Entstehung verdanken, nicht starr ist. So ist etwa das Mauerwerk als Auflager nachgiebig, zusammendrückbar, oder der ganze Pfeiler dreht sich. Es steht nun auf der linken Seite nicht mehr $1 \cdot 0$, sondern $1 \cdot \delta_n$, worin δ_n gewissermaßen den Bewegungsrest von Hin- und Rückschiebung bedeutet. Eine solche Verschiebung kann man, wenn sie befürchtet werden muß, von vornherein schätzen, oder sie ist schon durch irgendwelche Umstände gegeben. Hier kann man natürlich nicht sagen, daß ein Minimum der Formänderungsarbeit vorliegt.

3. Die überzählige Größe ist keine Lagerkraft, wenn innerlich unbestimmte Systeme vorliegen, sondern etwa die Spannkraft einer Zugstange eines Zweigelenkbogens oder Rahmens. Unsere

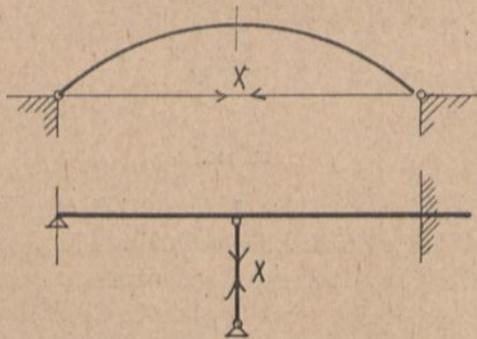


Abb. 109.

Betrachtung bezüglich der Beweglichkeit ihres Angriffspunktes können wir in solchem Falle naturgemäß nicht auf einen äußeren Lagerpunkt anwenden. Wir müssen vielmehr zusehen, welchen Weg die statisch unbestimmte Größe im Innern durchläuft, und erkennen, daß dieser von der Elastizität desjenigen Teiles abhängig ist, in welchem sie wirkt, so daß daher der Weg von der statisch unbestimmten Größe selbst direkt abhängig ist (Abb. 109).

Unter Voraussetzungen, wo stets mit einem elastischen Wege A_s zu rechnen ist, könnte man nur dann von einem Minimum der Formänderungsarbeit sprechen, wenn die elastischen Dehnungen im

X-Stäbe verschwindend klein sind. Damit dies nun eintritt, ist man bei der Konstruktion darauf bedacht, die X-Stäbe so stark zu dimensionieren, daß eine elastische Dehnung so gut wie ausgeschlossen ist. So wird man beispielsweise eine Zugstange besser mit 600 bis 700 kg/cm² beanspruchen als mit 1000 kg/cm². Bei solcher Praxis kann man auch hier überall von einem Minimum der Formänderungsarbeit sprechen. Bei Zulassung einer hohen Beanspruchung wäre entschieden mit einer elastischen Dehnung Δ_s zu rechnen.

Während also bei äußerlich statisch unbestimmten Bauwerken die linke Seite als eine Funktion der Auflager anzusehen ist,

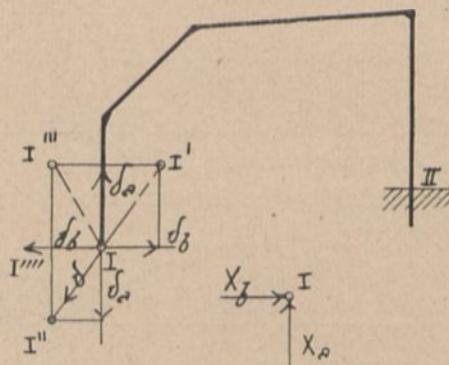


Abb. 110.

insofern der Weg, den die Last 1 durchläuft, von der mehr oder weniger großen Nachgiebigkeit derselben abhängig ist, so können wir sagen: Bei innerlich statisch unbestimmten Systemen ist die linke Seite eine Funktion der statisch unbestimmten Größen selbst und wir haben für sie mit Hinweis auf einen Stab zu schreiben $1 \cdot \Delta_s$.

4. Einzelne Sonderfälle. Das Auflager II des in Abb. 110 gegebenen Systems sei vollständig unveränderlich. Für das Auflager I betrachten wir nun verschiedene Bewegungszustände, wobei X_b immer nach rechts und X_a immer nach oben wirkend vorausgesetzt sei.

1. Bewegung von I nach I'. Es betragen dann die Arbeiten der Auflagerkräfte, welche bei der Bewegung entstanden sind, mit anderen Worten die linken Seiten der Arbeitsgleichung, für den Zustand $X_a = 1 = +1 \cdot \delta_a$ und für den Zustand $X_b = 1 = +1 \cdot \delta_b$, wobei δ_a und δ_b die Projektionen von δ auf die Kraft-richtung sind.

2. Bewegung von I nach I'' . Die Wege δ_a und δ_b müssen nunmehr als negativ eingeführt werden, da die Bewegung im umgekehrten Sinne der Kräfte 1 vollendet wird. Wir haben also für $X_a = 1 = -1 \cdot \delta_a$ und für $X_b = 1 = -1 \cdot \delta_b$.

3. Bewegt sich der Punkt I nach I''' , so haben wir entsprechend dem Vorhergehenden für $X_a = 1 = +1 \cdot \delta_a$ und für $X_b = 1 = -1 \cdot \delta_b$.

4. Bewegt sich I nach I'''' nur wagerecht, so haben wir für $X_a = 1 = +1 \cdot 0 = 0$ und für $X_b = 1 = -1 \cdot \delta_b$.

5. Wäre I vollständig unverrückbar, so wäre für beide Zustände die linke Seite $= 0$.

Betrachten wir ferner den in Abb. 111 dargestellten Rahmen, der dreifach statisch unbestimmt ist. Ist Lager II unbeweglich und auch das Lager I nur wagerecht verschieblich, so lautet die linke Seite für alle drei Gleichungen: $1 \cdot 0$. Im allgemeinen nennt man die linke Seite L' , d. h. virtuelle Arbeit der Auflagerkräfte für die einzelnen Zustände $X_a = 1, X_b = 1, X_c = 1$ usw.

d) Das Temperaturglied der rechten Seite.

Es bezeichne ε den linearen Wärmeausdehnungskoeffizienten für 1°C Änderung der Temperatur gegenüber dem Wärmezustande bei der Aufstellung des Bauwerkes. Er ist $+$ bei Erhöhung und $-$ bei Erniedrigung der Temperatur. Der Wärmeausdehnungskoeffizient ε und die Temperatur t können ebenso wie der Elastizitätsmodul E häufig als über längere Strecken konstant angenommen werden. Die Wärmeausdehnung hat mit den im System tätigen Kräften nichts zutun, obwohl sie selbst gewisse Spannungen erzeugt.

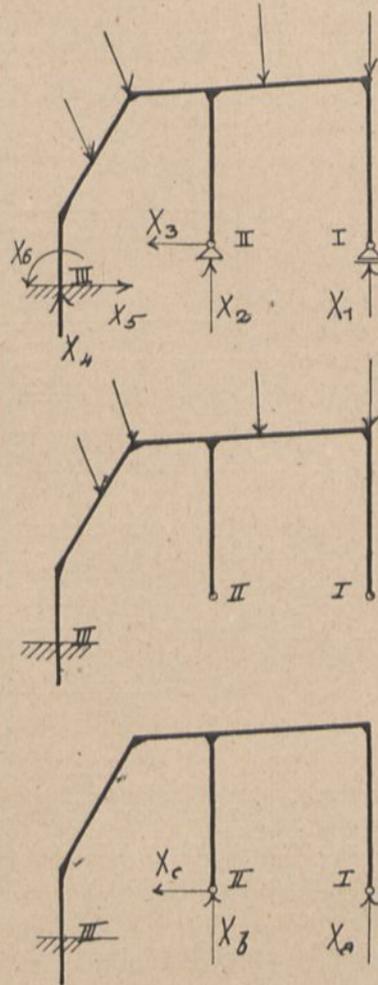


Abb. 111.

Während sonst bei Längenänderung $d(\Delta s)$ eine Längskraft N als Ursache vorauszusetzen war, so ist hier anstatt derselben die Dehnung $\varepsilon \cdot t$ vorhanden. Unser Integral bezüglich der Längskräfte lautete

$$\int \frac{N_a \cdot N \cdot ds}{E \cdot F},$$

und das Temperaturglied lautet daher entsprechend

$$\int N_a \cdot \varepsilon \cdot t \cdot ds.$$

e) Vollständige Arbeitsgleichung.

$$L' = \int \frac{\overbrace{M_a(M_0 - M_a \cdot X_a - M_b \cdot X_b - \dots)}^M}{E \cdot J} \cdot ds$$

$$+ \int \frac{\overbrace{N_a(N_0 - N_a \cdot X_a - N_b \cdot X_b - \dots)}^N}{E \cdot F} \cdot ds$$

$$+ \int \frac{\overbrace{V_a(V_0 - V_a \cdot X_a - V_b \cdot X_b - \dots)}^V}{G \cdot k \cdot F} \cdot ds + \int N_a \cdot \varepsilon \cdot t \cdot ds.$$

Bezeichnen wir die mit der wirklichen Verschiebungsgruppe in Zusammenhang stehenden Faktoren unter dem Integral einfach mit M , N , V und vernachlässigen wir den Einfluß der Querkräfte, so lautet unsere Gleichung

$$L' = \int \frac{M_a \cdot M \cdot ds}{E \cdot J} + \underbrace{\int \frac{N_a \cdot N \cdot ds}{E \cdot F}}_{\substack{\text{wird meist auch} \\ \text{noch vernach-} \\ \text{läßigt}}} + \underbrace{\int N_a \cdot \varepsilon \cdot t \cdot ds}_{\substack{\text{wird nur bei sehr} \\ \text{genauer Berechnung} \\ \text{berücksichtigt}}}$$

Die Anwendung dieses Arbeitsgesetzes, aufgebaut auf dem einfachen Prinzip der virtuellen Verrückungen, gestattet also die Berechnung von statisch unbestimmten Größen mit Umgehung der Berechnung der wirklichen Formänderung und ist immer praktisch bei Bauwerken, deren Form geradlinig oder nach einfachen Gesetzen berechenbar ist und deren Material dem Hookeschen Gesetz folgt, besonders bei ruhender oder gesetzmäßig fortschreitender Belastung.

f) Die Übereinstimmung der Ableitungen aus der Formänderungsarbeit und der Arbeitsgleichung (Castiglianoscher Satz).

Es genügt, wenn wir die beabsichtigten Erläuterungen für einen Teil der Formänderungsarbeit, z. B. für Biegung, geben.

Die Formänderungsarbeit beträgt

$$A = \int \frac{M^2 ds}{2EJ}.$$

Die Formänderungsarbeit bezieht sich zunächst auf alle an einem Bauwerk wirkenden Kräfte, Belastungen und Reaktionen bzw. auch andererseits auf die inneren Spannungen.

Leiten wir den Ausdruck nach irgendeiner der in M enthaltenen Größen (beispielsweise nach einer der statisch unbestimmten Größen X) ab, so erhalten wir zunächst

$$\frac{\partial A}{\partial M} = \int \frac{2 \cdot M \cdot ds}{2 \cdot E \cdot J}$$

und dann

$$\frac{\partial A}{\partial M} \cdot \frac{\partial M}{\partial X} = \frac{\partial A}{\partial X} = \int \frac{M \cdot ds}{E \cdot J} \cdot \frac{\partial M}{\partial X}.$$

Für $\frac{\partial M}{\partial X}$ können wir, wie früher gezeigt, M' oder Ma setzen, also

$$\frac{\partial A}{\partial X} = \int \frac{M \cdot M' \cdot ds}{E \cdot J}.$$

Die rechte Seite stimmt überein mit unserem auf Grund des Prinzips der virtuellen Verrückungen abgeleiteten Arbeitsgesetz.

Darum müssen auch die linken Seiten gleich sein; wir erhalten also

$$L' = \frac{\partial A}{\partial X},$$

d. h. die virtuelle Arbeit einer der statisch unbestimmten Größen bzw. die elastische Verschiebung des Angriffspunktes dieser Größe ist gleich der ersten Abgeleiteten der wirklichen Formänderungsarbeit nach der betreffenden Größe.

Der hier ausgesprochene Satz ist von Alberto Castigliano zuerst nachgewiesen worden und wird nach ihm benannt.

Unser auf Grund des Prinzips der virtuellen Verrückungen abgeleitetes Arbeitsgesetz entspricht also genau dem Castiglianoschen Satze.

Inwiefern der Hauptsatz dazu geeignet sein soll, Bestimmungsgleichungen für die statisch unbestimmten Größen zu liefern, und zwar mit Berücksichtigung der verschiedenartigen Beschaffenheit der Auflager, an welchen sie angreifen, oder der elastischen

Nachgiebigkeit der Konstruktionsglieder, in welchen innerlich statisch unbestimmte Größen wirken, das zeigt die zuerst gegebene Ableitung auf Grund des Prinzips der virtuellen Verrückungen viel klarer als die von Castigliano gegebene Ableitung ausgehend von der Formänderungsarbeit. Vielfach wird aber von der Formänderungsarbeit bzw. der Abgeleiteten derselben nach einer der gesuchten unbestimmten Größen ausgegangen, weshalb auf diesen Zusammenhang hier hingewiesen sein möge.

Bei der Anwendung des Hauptsatzes haben wir es nicht mit der tatsächlichen Formänderungsarbeit zu tun; auch in der von Castigliano gegebenen Form der Abgeleiteten der Formänderungsarbeit haben wir es lediglich mit einer Verschiebungsarbeit, und sogar meist nur gedachten (virtuellen) Verschiebungsarbeit zu tun; denn die Abgeleitete der Formänderungsarbeit nach irgendeiner der statisch unbestimmten Größen ist weiter nichts als die Verschiebungsarbeit der Kraft 1, welche diese am Orte der gesuchten Durchbiegung oder am Angriffspunkt der statisch unbestimmten Größe infolge des Weges δ leistet, welcher bei Anwendung des Gesetzes zur Ermittlung von Durchbiegungen der gesuchte Wert selbst ist, bei Anwendung des Gesetzes zur Ermittlung statisch unbestimmter Größen aber gegeben ist, und zwar als elastische Verlängerung oder Verkürzung eines Stabes oder als elastische Nachgiebigkeit der Auflager. In diesem letzten Falle wird δ , wenn völlige Starrheit der Auflager vorliegt, zu Null, so daß

$$L' = 1 \cdot \delta = \frac{\partial A}{\partial X} = 0$$

wird.

$\frac{\partial M}{\partial X}$ ist also auch weiter nichts als die Momentwirkung einer Last = 1 auf das System, welche am Orte und im Richtungssinn von X angreift.

Der Zweigelenkrahmen.

Kapitel VII.

Die Gleichung für den Schub bei gleich hohen Kämpfern.¹⁾

Bei dem in Abb. 112 dargestellten Rahmen mit einer beliebigen Belastung treten die vier unbekanntes Auflagerkräfte X_1 , X_2 , X_3 und X_4 auf.

Wir machen jetzt, wie in Fig. a ersichtlich, das eine Lager wagerecht beweglich und erhalten damit das statisch bestimmte Hauptsystem mit der äußeren Belastung und die dazugehörigen, auf einfache Weise bestimmbar Auflagerreaktionen. Fig. b zeigt nun dasselbe Hauptsystem, aber allein mit der unbestimmten Größe belastet, dem Horizontalschub am beweglich gemachten Lager I, genannt X_a .

Natürlich gehört zu den einzelnen Belastungen, bevor wir an die Berechnung herangehen können, die Feststellung der dazugehörigen Auflagerreaktionen. Da die Gelenke I und II gleich hoch liegen sollen, so haben wir nach Fig. b beim Lager II nur die eine wagerechte Auflagerreaktion zu verzeichnen, welche ebenfalls $= X_a$ ist. Würden die Gelenke nicht auf gleicher Höhe gelegen haben, so wären die Auflagerreaktionen nach Abb. 113 entstanden²⁾.

Es sind also zunächst gemäß Fig. a die Auflagerreaktionen A_0 , B_0 und C_0 für den Belastungszustand P_1 , P_2 , P_3 bis P_n nach den bekannten Regeln der Statik zu berechnen, bevor man zur Bestimmung der Biegemomente übergehen kann. Genau so hat man für Fig. b zunächst die Auflagerreaktionen zu bestimmen.

Damit die Aufgabe allgemein gelöst wird, wollen wir gleich annehmen, daß für den statisch unbestimmten Zustand nach

¹⁾ Vgl. auch: Müller-Breslau, „Die neueren Methoden“, 4. Aufl., S. 116, und Handbuch für Eisenbetonbau, 1. Aufl., Band IV, Teil 1, S. 494.

²⁾ Später (Kapitel XV) wird gezeigt, daß X_a in solchem Falle zweckmäßig in Richtung der Verbindungslinie der Gelenkpunkte anzunehmen ist.

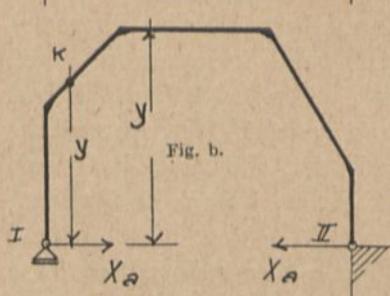
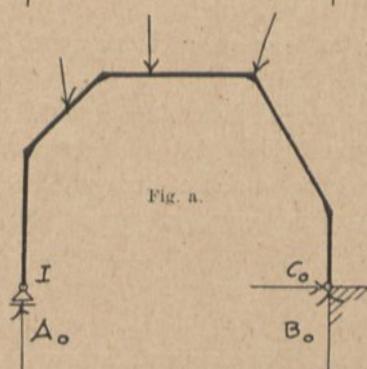
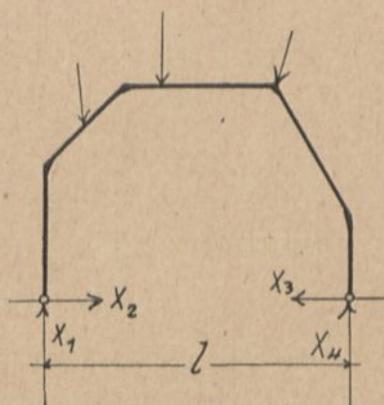


Abb. 112.

vollzogener Belastung das Lager I eine kleine Verschiebung nach außen erlitten haben möge. Wir stehen also vor einer kleinen Vergrößerung der Spannweite. Es kommt nicht darauf an, an welchem Lager sie eintritt, sondern daß sie überhaupt eintritt. Wir können sie uns mit derselben Wirkung auch am rechten Lager vorstellen oder geteilt an beiden. Jedenfalls lautet die linke Seite unserer Gleichung, wenn wir dieselbe jetzt nach Fig. b mit $X_a = 1$ aufstellen,

$$L' = -1 \cdot \Delta l,$$

weil die Last 1 entgegengesetzt zu ihrer Richtung verschoben wird (vgl. Kap. VI, c) Möglichkeiten für die linke Seite).

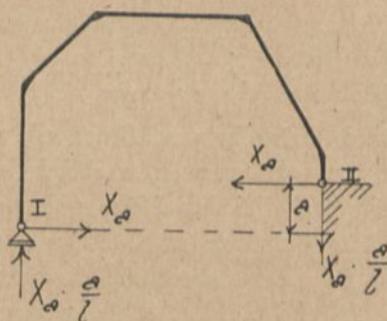


Abb. 113.

Es folgt nun die Bestimmung der rechten Seite der Gleichung:

$$L' = \int \frac{M_a \cdot M \cdot ds}{EJ} + \int \frac{N_a \cdot N \cdot ds}{EF} + \int N_a \cdot \varepsilon \cdot t \cdot ds^1),$$

¹⁾ Gegenüber derselben Gleichung im genannten Handbuch (S. 494) fehlt hier noch das Glied zur Berücksichtigung einer ungleichmäßigen Erwärmung, auf die wir, entsprechend ihrer Bedeutung, erst später eingehen (S. 333 u. f.).

für diesen Fall also:

$$L' = \int \frac{M_a(M_0 - M_a \cdot X_a)}{EJ} ds + \int \frac{N_a(N_0 - N_a \cdot X_a)}{EF} ds + \int N_a \cdot \varepsilon \cdot t \cdot ds.$$

(Ableitung siehe Kap. VI, e.)

Momente. Bei der Aufstellung dieser wird genau so wie früher ein Moment als positiv angesehen, wenn es unten (innen) Zugspannungen und oben (außen) Druckspannungen hervorbringt. Genau so wie früher bei Berechnung von Durchbiegungen haben wir sodann die Einflüsse der wirklichen Verschiebungsgruppe und die Einflüsse der Belastung infolge $X_a = 1$ festzustellen. Allgemein beträgt in unserem Falle, wo nur eine Unbekannte (X_a) vorhanden ist,

$$M = M_0 - M_a \cdot X_a.$$

M_0 = Moment der äußeren Kräfte, M_a = Biegemoment an einem beliebigen Punkt infolge $X_a = 1$, also

$$M_a = 1 \cdot y \text{ (Abb. b);}$$

somit haben wir $M = M_0 - 1 \cdot y \cdot X_a$

oder $M = M_0 - X_a \cdot y.$

In dieser Gleichung kommt es richtig zum Ausdruck, daß, wie es der Augenschein lehrt, die Momente infolge X_a negativer Natur sind. Für die Belastung $X_a = 1$ allein wäre also

$$M_a = -1 \cdot y = -y \left(\text{vgl. } \frac{\partial M}{\partial X_a} = -y \right).$$

Längskräfte. Die wahre Längskraft an beliebiger Stelle ist allgemein

$$N = N_0 - N_a \cdot X_a.$$

N_a = Einfluß von $X_a = 1$ auf die Längskräfte, an und für sich $= 1 \cdot \cos \alpha$ (Abb. 114); also

$$N = N_0 - 1 \cdot \cos \alpha \cdot X_a$$

oder $N = N_0 - X_a \cdot \cos \alpha.$

Für den Belastungszustand $X_a = 1$ ist

$$N_a = -1 \cdot \cos \alpha = -\cos \alpha \left(\text{vgl. } \frac{\partial N}{\partial X_a} = -\cos \alpha \right).$$

Querkräfte vernachlässigen wir.

Temperaturglied. Hierin haben wir nur für N_a den Wert $-\cos \alpha$ einzuführen.

Unsere ganze Gleichung lautet somit

$$L' = -\Delta l = \int \frac{(M_0 - X_a \cdot y) \cdot (-y) \cdot ds}{E \cdot J} + \int \frac{(N_0 - X_a \cdot \cos \alpha) \cdot (-\cos \alpha) \cdot ds}{E \cdot F} + \int \varepsilon \cdot t \cdot (-\cos \alpha) \cdot ds,$$

ausmultipliziert

$$- \Delta l = - \int \frac{M_0 \cdot y \cdot ds}{E \cdot J} + X_a \cdot \int \frac{y^2 \cdot ds}{E \cdot J} - \int \frac{N_0 \cdot \cos \alpha \cdot ds}{E \cdot F} \\ + X_a \cdot \int \frac{\cos^2 \alpha \cdot ds}{E \cdot F} - \varepsilon \int t \cdot \cos \alpha \cdot ds.$$

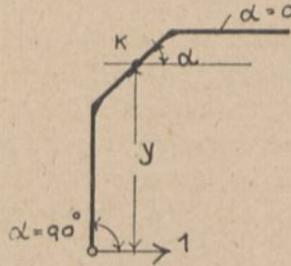


Abb. 114.

Innerhalb der einzelnen Stabstücke, über welche zu integrieren ist, dürfen wir E und J als konstant voraussetzen, so daß diese Bezeichnungen vor die Integralzeichen treten.

Um E fortzuschaffen, multiplizieren wir dann die ganze Gleichung mit E ; außerdem erweitern wir dieselbe mit noch einem mittleren Trägheitsmoment (J_m^1), wodurch sich ein weiterer Vorteil zeigen wird:

$$- \Delta l \cdot E \cdot J_m = - \int M_0 \cdot y \cdot ds \cdot \frac{J_m}{J} + X_a \cdot \int y^2 \cdot ds \cdot \frac{J_m}{J} \\ - \int N_0 \cdot \cos \alpha \cdot ds \cdot \frac{J_m}{F} + X_a \int \cos^2 \alpha \cdot ds \cdot \frac{J_m}{F} - \varepsilon \int t \cdot \cos \alpha \cdot ds \cdot E \cdot J_m.$$

Die Glieder mit X_a abgesondert:

$$X_a \left[\int y^2 \cdot ds \cdot \frac{J_m}{J} + \int \cos^2 \alpha \cdot ds \cdot \frac{J_m}{F} \right] = \int M_0 \cdot y \cdot ds \cdot \frac{J_m}{J} \\ + \int N_0 \cdot \cos \alpha \cdot ds \cdot \frac{J_m}{F} + \varepsilon \cdot E \cdot J_m \int t \cdot \cos \alpha \cdot ds - \Delta l \cdot E \cdot J_m,$$

daraus

$$X_a = \frac{\int M_0 \cdot y \cdot ds \cdot \frac{J_m}{J} + \int N_0 \cdot \cos \alpha \cdot ds \cdot \frac{J_m}{F} + \varepsilon \cdot E \cdot J_m \int t \cdot \cos \alpha \cdot ds - \Delta l \cdot E \cdot J_m}{\int y^2 \cdot ds \cdot \frac{J_m}{J} + \int \cos^2 \alpha \cdot ds \cdot \frac{J_m}{F}}$$

Der Einfluß des zweiten Zählergliedes und des zweiten Nennergliedes ist außerordentlich gering und höchstens bei flachen Bögen

¹⁾ Wird in Müller-Breslau J_c genannt.

von einiger Bedeutung; diese Glieder stellen uns nämlich den Einfluß der Normalkräfte dar, auf deren Mitberücksichtigung wir erst später zurückkommen werden¹⁾. Das Verhältnis von $\frac{J_m}{J}$ nennen wir v . Dasselbe wird, wenn wir J_m so wählen, daß es den am meisten vorkommenden Trägheitsmomenten entspricht, für viele Stabteile = 1. Es kommt also nicht darauf an, die Trägheitsmomente der zu berechnenden Stabteile vorher zu kennen, sondern nur ihr Verhältnis zueinander.

Somit lautet unsere Gleichung

$$X_a = H = \frac{\int M_0 \cdot y \cdot v \cdot ds + \varepsilon \cdot E \cdot J_m \int t \cdot \cos \alpha \cdot ds - E \cdot J_m \cdot \Delta l}{\int y^2 \cdot v \cdot ds}.$$

In beiden Gleichungen hängen die Nennergrößen nur von der Form des Bauwerkes ab und haben also nichts zu tun mit den Einflüssen der Belastungen, welche wir im Zähler vorfinden. Der Zähler enthält nacheinander den Einfluß der Belastung im statisch bestimmten Hauptsystem, dann den Einfluß einer Temperaturveränderung, schließlich den Einfluß einer horizontalen Lagernachgiebigkeit. Je nach dem Grad der Genauigkeit, welchen wir wählen, haben wir es nun in der Hand, den Schub zu bestimmen; jeder Einfluß ist getrennt auszurechnen.

Bei gewöhnlichen Projektarbeiten genügt vollständig der Einfluß der Belastung mit der Gleichung

$$X_a = H = \frac{\int M_0 \cdot y \cdot v \cdot ds}{\int y^2 \cdot v \cdot ds}.$$

Kapitel VIII.

Durchführung der Berechnung eines Zweigelenkrahmens mit direkter Benutzung der im Kap. VII abgeleiteten Integralformeln (Rechnerische Auswertung der Integrale).²⁾

Einfluß der Belastung.

1. Zu ermitteln sei der von der Belastung herrührende Horizontalschub H_p des in Abb. 115 dargestellten Rahmens.

¹⁾ Seite 240 und 333.

²⁾ Literatur vgl. Kap. VII.

Das Trägheitsmoment J_r des Riegels sei n -mal so groß als das Trägheitsmoment J_s der Stiele.

Allgemein ist

$$H_p = \frac{\int M_0 \cdot y \cdot v \cdot ds}{\int y^2 \cdot v \cdot ds}$$

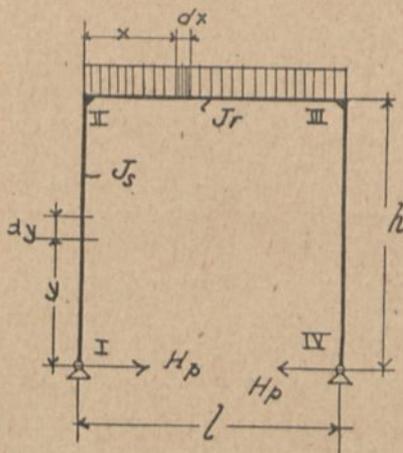


Abb. 115.

Die Integrale sind für jeden Rahmenteil auszuwerten, also für zwei Stiele und einen Riegel. Zunächst müssen wir uns klar darüber werden, welchen Wert v für jeden dieser drei Stabteile hat.

Es war $v = \frac{J_m}{J}$, worin J_m ein beliebig gewähltes und J je das Trägheitsmoment des betreffenden Rahmenteiles selbst sein sollte.

Wir wählen hier $J_m = J_r$; dann ist für den Riegel

$$v = \frac{J_r}{J_r} = 1,$$

für die Stiele

$$v = \frac{J_r}{J_s} = n!$$

Auflösung der Integrale: Es muß sowohl für das Nennerglied als auch für das Zählerglied die Auswertung für 3 Stabteile erfolgen.

Nennerformgröße: Es ist für die Stiele

$$\begin{aligned} \int y^2 \cdot v \cdot ds &= \int_I y^2 \cdot ds \cdot v + \int_{III} y^2 \cdot ds \cdot v \\ &= 2 \left[n \cdot \int_0^h y^2 \cdot dy \right] \\ &= 2 \cdot n \cdot \frac{h^3}{3}, \end{aligned}$$

für den Riegel

$$\int y^2 \cdot v \cdot ds = \int_{II} y^2 \cdot v \cdot ds = 1 \cdot y^2 \int_0^l dx = 1 \cdot h^2 \cdot l.$$

Also Nennergröße

$$\int y^2 \cdot v \cdot ds = 2 \cdot n \cdot \frac{h^3}{3} + h^2 \cdot l.$$

Zählergröße: Für das statisch bestimmte Hauptssystem (den einfachen Balken) ist die von der Belastung herrührende Momentenfläche eine Parabel mit der Pfeilhöhe $\frac{p \cdot l^2}{8}$ und der Länge l (Abb. 116). Die Momentenfläche hat also dieselbe Form wie bei einem einfachen Balken ohne Stiele. Da für die Stiele ein M_0 nicht vorhanden ist, so werden auch die Integrale für die Stiele = 0. Es liefert also nur der Riegel einen Beitrag zum Zählerintegral.

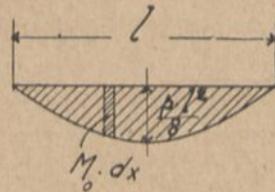


Abb. 116.

$$\int M_0 \cdot y \cdot ds \cdot v = \int_{II} M_0 \cdot y \cdot ds \cdot v = 1 \cdot h \cdot \int_0^l M_0 \cdot dx :$$

Das Integral $\int_0^l M_0 \cdot dx$ bedeutet weiter nichts als den Inhalt der Momentenfläche.

Also Zählergröße

$$= h \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{p \cdot l^2}{8} \cdot l = \frac{p \cdot l^3 \cdot h}{12}$$

Der Schub beträgt demnach

$$H_p = + \frac{\frac{p \cdot l^3 \cdot h}{12}}{2 \cdot n \cdot \frac{h^3}{3} + h^2 \cdot l}$$

oder

$$H_p = + \frac{p \cdot l_i^2}{12 \cdot h \cdot \left(1 + \frac{2}{3} \cdot n \cdot \frac{h}{l}\right)}$$

Das $+$ -Zeichen bestätigt unsere erste Annahme, daß der Schub nach innen gerichtet ist, wie überhaupt ein positives Ergebnis stets als eine Bestätigung der Annahme des Richtungsinnes einer Kraft oder eines Momentes aufzufassen ist.

2. Unter Annahme der in Abb. 117 gegebenen Abmessungen seien nunmehr die auftretenden Spannungen zu untersuchen.

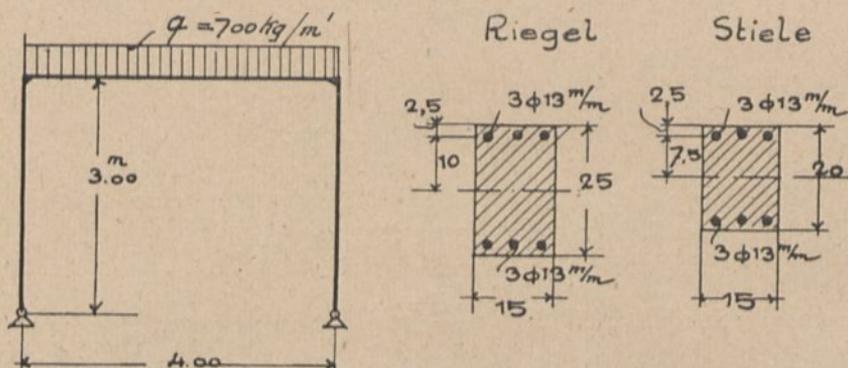


Abb. 117.

Zunächst haben wir für den vorliegenden Fall n auszurechnen, da die Abmessungen bereits gegeben sind. Liegen die Abmessungen noch nicht vor, so ist n (bzw. v) zunächst zu schätzen und später die Übereinstimmung mit dieser Annahme nachzuprüfen.

Es beträgt

$$J_r = \frac{1}{12} \cdot 15 \cdot 25^3 + 2 \cdot 15 \cdot 4 \cdot 10^2 \quad 1)$$

$$= 19\,531 + 12\,000 = 31\,531 \text{ cm}^4$$

$$J_s = \frac{1}{12} \cdot 15 \cdot 20^3 + 2 \cdot 15 \cdot 4 \cdot 7,5^2$$

$$= 10\,000 + 6\,750 = 16\,750 \text{ cm}^4,$$

also

$$n = \frac{J_r}{J_s} = \frac{31\,531}{16\,750} = 1,88.$$

¹⁾ Nach den neuen Bestimmungen vom 13. Januar 1916 § 16, Ziffer 1, Absatz 2 ist bei der Ermittlung der äußeren Kräfte statisch unbestimmter Gebilde mit $n = 10$ zu rechnen.

(Ohne Berücksichtigung der Eiseneinlagen $n = \frac{19\,531}{10\,000} = 1,95$;
oder schließlich auch nur $n = \frac{25^3}{20^3} = 1,95$.)

Also der Nenner

$$N = 12 \cdot h \cdot \left(1 + \frac{2}{3} \cdot n \cdot \frac{h}{l}\right) = 12 \cdot 3,0 \cdot \left(1 + \frac{2}{3} \cdot 1,88 \cdot \frac{3,0}{4,0}\right) = 12 \cdot 3,0 \cdot 1,94$$

und somit der Horizontalschub

$$H_p = + \frac{700 \cdot 4,0^2}{12 \cdot 3,0 \cdot 1,94} = +161 \text{ kg.}$$

Nachdem somit alle Auflagerkräfte bekannt sind, können wir den Momentenverlauf aufzeichnen.

M_0 in der Balkenmitte beträgt

$$\frac{0,700 \cdot 4,0^2}{8} = 1,40 \text{ mt.}$$

Für die Stiele ist $M_0 = 0$, so daß zunächst Fig. a in Abb. 118 entsteht.

Einfluß des Horizontalschubes (Fig. b).

Für die Stiele

$M_{\max} = -H \cdot h = -161 \cdot 3,0 = -0,483 \text{ mt}$, abnehmend bis auf 0 im Gelenkpunkt.

Über den Riegel pflanzt sich das Moment $-0,483$ gleichmäßig fort, da für jeden Punkt desselben die Höhe h konstant ist. Die Zusammenfügung beider Flächen ergibt die wahre Momentenfläche Fig. c.

Zu berechnen bzw. nachzuprüfen wäre nun der Mittelquerschnitt des Riegels für das Moment $+0,917 \text{ mt}$.

Es liegt ein Fall exzentrischen Druckes vor; und zwar ist die in dem Riegel tätige Normalkraft aus den Reaktionen zu berechnen und beträgt hier lediglich 161 kg^1). Die Exzentrizität, welche bei unsymmetrischen Querschnitten vom Schwerpunkt des Querschnittes aus zu messen ist, beträgt

$$p = \frac{M}{N} = \frac{0,917}{0,161} = 5,70 \text{ m,}$$

¹⁾ Wie in anderen Fällen der Normaldruck zu finden ist, ist S. 313 oben näher erläutert.

so daß in diesem Falle

$$e = 570 - \frac{25}{2} = 557,5 \text{ cm} \quad (\text{Abb. 119}).$$

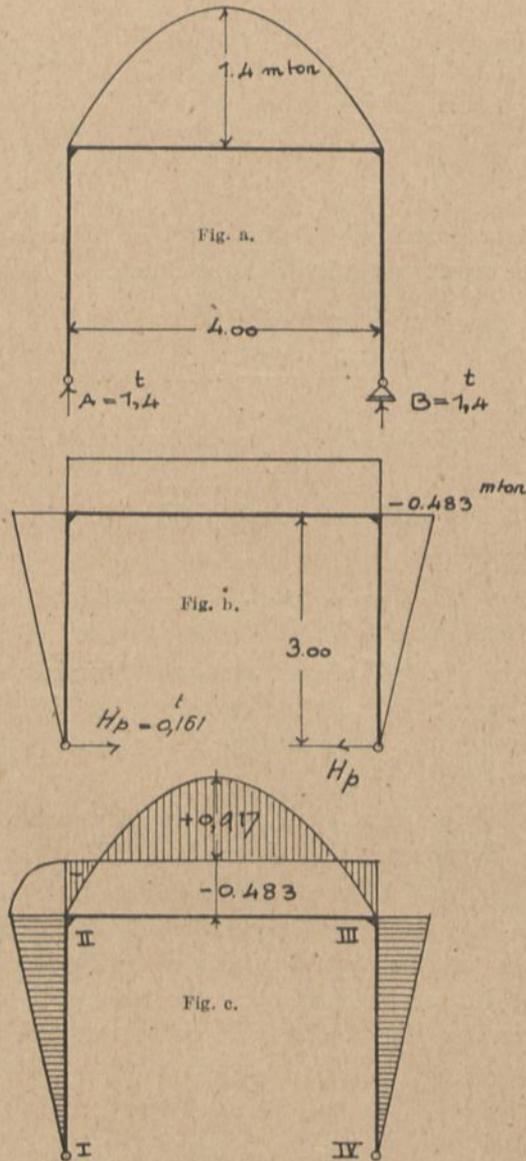


Abb 118.

Nach Band I¹⁾ ist nun

$$\begin{aligned} \frac{15}{6 \cdot 15 \cdot 4,0} \cdot x^3 - \frac{15 \cdot (-557,5)}{2 \cdot 15 \cdot 4,0} \cdot x^2 - [2 \cdot (-557,5) - 25] \cdot x \\ = 2 \cdot 2,5^2 + 25^2 - (2 \cdot 2,5 - 557,5) \cdot 25 \\ \frac{x^3}{24} + 69,6 x^2 + 1140 x = 14\,450, \end{aligned}$$

woraus $x = 8,4$ cm;

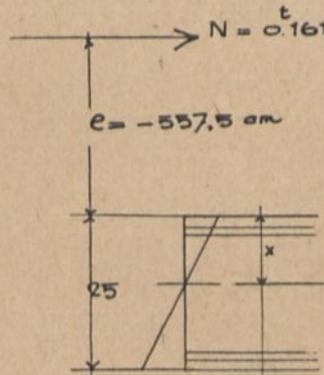


Abb. 119.

somit

$$\sigma_b = \frac{161}{\frac{15 \cdot 8,4}{2} + \frac{15 \cdot 4,0}{8,4} \cdot (2 \cdot 8,4 - 25)} = 35,8 \text{ kg/cm}^2$$

und

$$\sigma_e = 35,8 \cdot \frac{15 \cdot (22,5 - 8,4)}{8,4} = 900 \text{ kg/cm}^2.$$

$$\sigma'_e = 35,8 \cdot 15 \frac{5,9}{8,4} = 377 \text{ kg/cm}^2.$$

Kontrolle: $D_b + D_e - Z_e = 161$ kg,

$$D_b = 35,8 \cdot 8,4 \cdot \frac{15}{2} = 2253 \text{ kg},$$

$$D_e = 4,0 \cdot 377 = 1508$$

zusammen 3761 kg,

$$Z_e = 4,0 \cdot 900 = 3600$$

Rest 161 kg.

¹⁾ Schlüter, „Eisenbetonbau: Säule und Balken“, Verlag von Herm. Meußner, Berlin, Anzeige am Schluß.

Schwerpunkt des statisch wirksamen Querschnittes (von der Oberkante aus)

$$s_0 = \frac{\frac{15 \cdot 8,4^2}{2} + 15 \cdot 4,0 (2,5 + 22,5)}{15 \cdot 8,4 + 15 \cdot (4,0 + 4,0)} = 8,25 \text{ cm.}$$

Mit dem dadurch $12,50 - 8,25 = 4,25$ cm höher ausfallenden Achsensystem des Rahmens ergeben sich die Spannungen von $\sigma_b = 37,0 \text{ kg/cm}^2$, $\sigma_e' = 390$, $\sigma_e = 920 \text{ kg/cm}^2$. Kapitel XVI a bringt nähere Einzelheiten über die Feststellung der zugrundegelegten Systemachse.

Prüft man vergleichsweise die Spannungen nach für nur einfache Biegung, so erhält man, da ein Fall doppelter Armierung vorliegt

$$x = -\frac{15 \cdot 8,0}{15} + \sqrt{8^2 + 8 \cdot 25} = 8,2 \text{ cm}$$

und

$$\sigma_b = \frac{91\,700}{\frac{15 \cdot 8,2}{2} \left(22,5 - \frac{8,2}{3}\right) + 15 \cdot 4 \cdot \frac{5,7}{8,2} \cdot 20} = 44,6 \text{ kg/cm}^2.$$

Die zuerst aufgestellten Trägheitsmomente beziehen sich auf den vollen Querschnitt, also mit Berücksichtigung des Betons in der Zugzone. Über die Berechtigung dieser Annahme bei Rahmenberechnungen siehe Kapitel XVI a (vgl. auch die angezogenen Bestimmungen § 16, Ziffer 1).

Einfluß der Temperatur¹⁾.

3. Es soll nun für den Rahmen (Abb. 120) der Horizontalschub H_t abgeleitet werden, und zwar für den Fall, daß die Temperatur im Riegel t_r °C und in den Stielen t_s °C gegenüber der Temperatur bei der Herstellung beträgt.

Allgemein ist

$$H_t = \frac{\varepsilon \cdot E \cdot J_m \int t \cdot \cos \alpha \cdot ds}{y^2 \cdot d \int s \cdot v}$$

Das Nennerglied ist nach Beispiel 1

$$N = 2 \cdot n \cdot \frac{h^3}{3} + h^2 \cdot l = h^2 \cdot l \cdot \left(1 + \frac{2}{3} \cdot n \cdot \frac{h}{l}\right).$$

Das Zählerglied ist wieder für die einzelnen Stabteile zu deuten.

¹⁾ Vorschriften über die Berücksichtigung der Wärmeschwankungen und des Schwindens in den neuen Bestimmungen vom 13. Januar 1916, § 15.

Für die Stiele ist $\cos \alpha = \cos 90^\circ = 0$; diese liefern also keine Beiträge zum Zählerintegral. Für den Riegel ist $\cos \alpha = \cos 0 = 1$ und daher

$$\int t \cdot \cos \alpha \cdot ds = t_r \cdot 1 \cdot \int_0^l ds = t_r \cdot l.$$

Somit lautet unsere Gleichung

$$H_t = \frac{\varepsilon \cdot E \cdot J_r \cdot t_r \cdot l}{h^2 \cdot l \cdot \left(1 + \frac{2}{3} \cdot n \cdot \frac{h}{l}\right)}$$

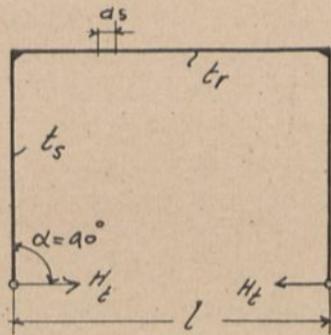


Abb. 120.

oder

$$H_t = \frac{\varepsilon \cdot E \cdot J_r \cdot t_r}{h^2 \cdot \left(1 + \frac{2}{3} \cdot n \cdot \frac{h}{l}\right)}$$

Bei Temperaturzunahme ist erklärlicherweise H_t nach innen gerichtet, also +, bei Temperaturabnahme nach außen, also -.

4. Für den vorliegenden Fall sei die Größe des Horizontal-schubes für einen Temperaturunterschied von $\pm 30^\circ \text{C}$ zu ermitteln.

Für Eisenbeton ist $\varepsilon = 0,000\ 01$ pro 1°C^1 ,

$$E = 210\ 000 \text{ kg/cm}^2 \text{ } ^2).$$

Ferner war

$$J_r = 31\ 531 \text{ cm}^4,$$

$$h = 300 \text{ cm}$$

und

$$1 + \frac{2}{3} \cdot n \cdot \frac{h}{l} = 1,94.$$

Demnach

$$H_t = \frac{0,000\ 01 \cdot 210\ 000 \cdot 31\ 531 \cdot (\pm 30^\circ)}{300^2 \cdot 1,94} = \pm 11,3 \text{ kg.}$$

¹⁾ Bestimmungen vom 13. Januar 1916, § 15 Ziffer 2, Absatz 3 $\varepsilon = 1:10^5$.

²⁾ Desgl. Bestimmungen § 16, Ziffer 1, Absatz 2.

Dieser Einfluß kann also die ausschlaggebenden Momente entweder vergrößern oder verringern; allgemein ist H_t für Zweigelenrahmen von nur geringer Bedeutung.

Einfluß der Lagernachgiebigkeit.

5. Zum Schluß sei noch der Einfluß einer zu erwartenden Lagernachgiebigkeit, die zu $\Delta l = 0,5$ cm angenommen werden soll, untersucht.

Allgemein ist

$$H_{\Delta l} = - \frac{E \cdot J_m \cdot \Delta l}{\int y^2 \cdot v \cdot ds}$$

also hier

$$H_{\Delta l} = - \frac{210\,000 \cdot 31\,531 \cdot (+0,5)}{300^2 \cdot 400 \cdot 1,94} = -47,3 \text{ kg.}$$

Die Einflüsse von Lagernachgiebigkeit und Temperatur sind nur so weit zu berücksichtigen, als für gewisse Teile des Rahmens größere Momente dadurch verursacht werden können.

Kapitel IX.

Die geometrische Deutung der unter Kap. VII abgeleiteten Integralformeln¹⁾.

Die Linie I—II (Abb. 121) bedeute ein beliebiges Rahmenachsenstück, worüber wir nach Kap. VIII die M_0 -Fläche auf-

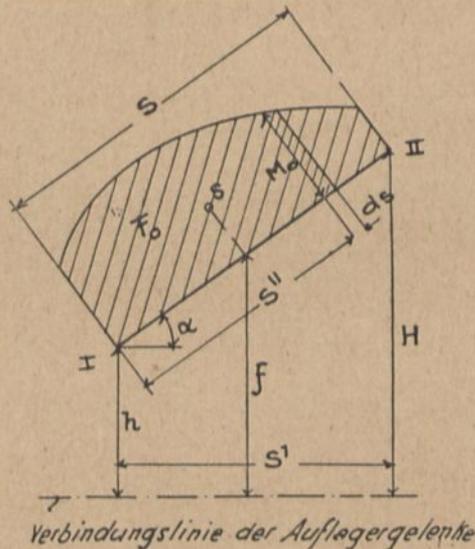


Abb. 121.

¹⁾ Vgl. Müller-Breslau, „Die neueren Methoden“, 4. Aufl., S. 126 f.

getragen haben, hier genannt das Teilstück derselben F_0 . Das Trägheitsmoment von I bis II und die Temperatur t seien konstant angenommen. Wir bestimmen nun den Einfluß dieses Stabelementes auf die einzelnen Integrale unserer Gleichung

$$H = \frac{\int M_0 \cdot y \cdot ds \cdot v + \varepsilon \cdot E \cdot J_m \cdot \int t \cdot \cos \alpha \cdot ds - E \cdot J_m \cdot \Delta l}{\int y^2 \cdot v \cdot ds}$$

1. Beitrag zum Nennerglied.

Da v konstant ist, so bedeutet $\int y^2 \cdot ds$ wie ersichtlich das Trägheitsmoment des Rahmenachsenstückes s bezogen auf die durch die Auflagergelenke gehende Achse; es ergibt sich in einfacher Weise zu

$$J = \frac{s}{3} \cdot (H^2 + H \cdot h + h^2)^1$$

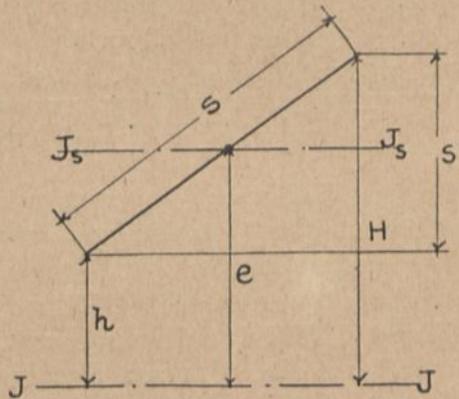


Abb. 122.

aus $J = J_s + s \cdot e^2$ nach Abb. 122, wenn man für J_s als Ergebnis einer einfachen Integration $\frac{s \cdot s'^2}{12}$ setzt. Demnach

$$\int_i^{II} y^2 \cdot v \cdot ds = \frac{v \cdot s}{3} \cdot (H^2 + H \cdot h + h^2).$$

2. Beitrag zum ersten Zählerglied.

Mit Ausscheidung von v bedeutet $M_0 \cdot ds$ ein Differential der Fläche F_0 und y den Abstand des auf die Rahmenachse pro-

¹⁾ Vgl. Müller-Breslau, „Die neueren Methoden“, S. 126.

²⁾ Ableitung in Schlüter, „Höhere Mathematik“, Nr. 33 und 34.

jizierten Schwerpunktes dieses Elementes von der Auflagergelenkwagerechten. Das Integral bedeutet somit: Inhalt der ganzen Fläche $F_0 \times$ Abstand f ihres auf die Rahmenachse projizierten Schwerpunktes von der Gelenkachse, also

$$\int_i^I M_0 \cdot y \cdot ds \cdot v = v \cdot F_0 \cdot f.$$

3. Beitrag zur Temperaturgröße.

Mit t konstant verbleibt nur die Deutung $\int \cos \alpha \cdot ds$; wir erkennen darin die Horizontalprojektion s' unseres Rahmenachsenstückes s (s' aus Abb. 121), also:

$$\int_i^{II} t \cdot \cos \alpha \cdot ds = t \cdot s'.$$

Da nun ein beliebiger Rahmen aus mehreren Stücken $I-II$ zusammengesetzt ist, so erhalten wir allgemein

$$H = \frac{\sum v \cdot F_0 \cdot f + \varepsilon \cdot E \cdot J_m \sum t \cdot s' - E \cdot J_m \cdot \Delta t}{\sum \left[\frac{v \cdot s}{3} \cdot (H^2 + H \cdot h + h^2) \right]}.$$

Während Kapitel VIII einen Weg zeigt, wie man die Gleichung für den Horizontalschub analytisch aufzulösen hat, gibt Kapitel IX ein allgemeines Resultat für die geometrische Auflösung. Das Resultat von Kapitel IX verdient gegenüber dem in Kapitel VIII den Vorzug, weil es — allgemein gehalten — keinen bestimmten Stabzug voraussetzt.

Kapitel X.

Beispiele mit Gebrauch der in Kap. IX gedeuteten Integralformeln.

Beispiel 1. Der symmetrische Rahmen mit einfach gebrochenem Riegel.

Für den in Abb. 123 dargestellten Rahmen sei der Horizontalschub H_p , herrührend von einer gleichmäßigen Belastung von 300 kg per lfd. m Horizontalprojektion, zu ermitteln.

Das J_r des Riegels sei von vornherein zweimal so groß als das J_s der Stiele angenommen.

Wählen wir $J_m = J_r$, dann ist für den Riegel

$$v = \frac{J_m}{J} = \frac{J_r}{J_r} = 1$$

und für die Stiele

$$v = \frac{J_m}{J} = \frac{J_r}{J_s} = 2.$$

Wir bilden zunächst die Nennergröße. Da der Rahmen symmetrisch ist, so brauchen wir die Rechnung nur für eine Hälfte durchzuführen.

Allgemein

$$\text{Nenner} = \sum \left[\frac{v \cdot s}{3} \cdot (H^2 + H \cdot h + h^2) \right]$$

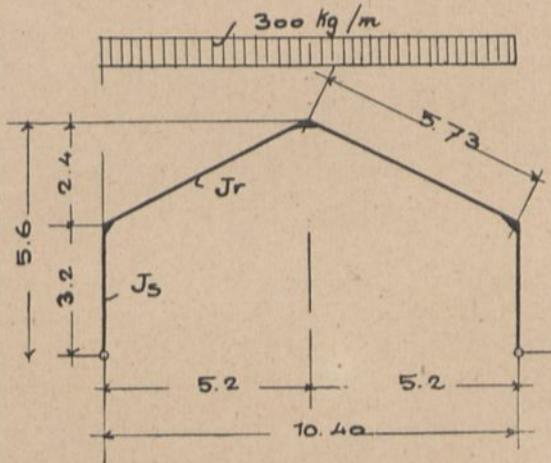


Abb. 123.

also

$$N = 2 \cdot \left[\overbrace{\frac{2 \cdot 3,2}{3} (3,2^2 + 3,2 \cdot 0 + 0^2)}^{\text{Stiel}} + \overbrace{\frac{1 \cdot 5,73}{3} (5,6^2 + 5,6 \cdot 3,2 + 3,2^2)}^{\text{Riegelhälfte}} \right] = 271,4 \text{ m}^3.$$

Zählerglied: Allgemein $\sum v \cdot F_0 \cdot f$.

Dazu ist erst die M_0 -Fläche für das statisch bestimmte Hauptsystem mit der Parabelhöhe $\frac{0,3 \cdot 10,4^2}{8} = 4$ mt aufzuzeichnen und auf die Rahmenachse zu übertragen (Abb. 124, a), wobei die einzelnen Ordinaten der Momentenfläche ihren Wert beibehalten,

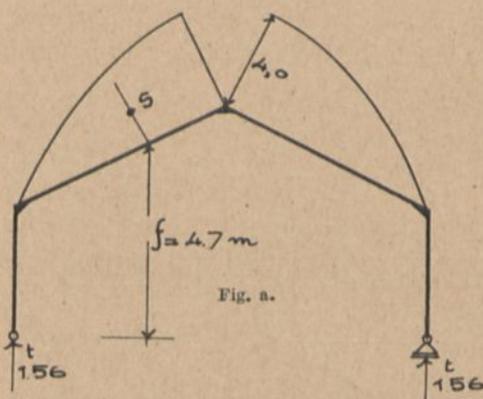
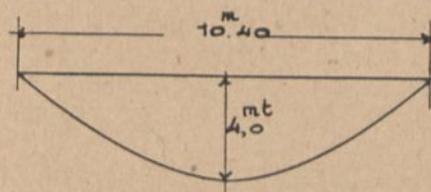


Fig. a.

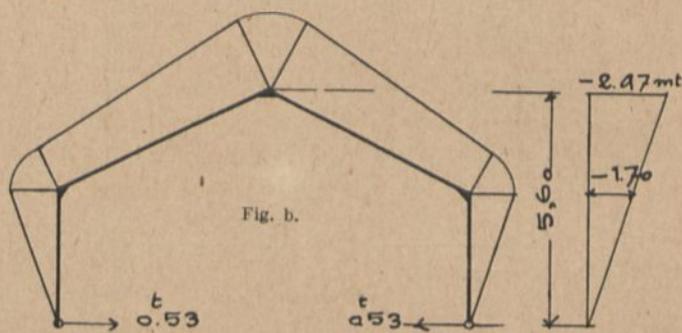


Fig. b.

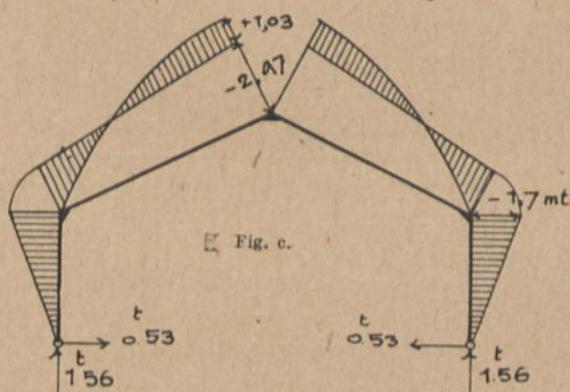


Fig. c.

Abb. 124.

während aus der Länge 5,2 m bis Rahmenmitte schräg gemessen 5,73 m wird. Somit wird für jede Hälfte

$$F_0 = + \left(\frac{2}{3} \cdot 5,2 \cdot 4,0 \right) \cdot \frac{5,73}{5,2} = +15,3 \text{ tm}^2$$

und das zugehörige $f = 3,2 + \frac{5}{8} \cdot 2,4 = 4,7 \text{ m}$.

Also im ganzen $\sum v \cdot F_0 \cdot f = 2 \cdot 15,3 \cdot 4,7 = 144 \text{ tm}^3$ und

$$H_p = + \frac{144}{271,4} = +0,53 \text{ t.}$$

Im Firstpunkt des statisch bestimmten Hauptsystems beträgt das Moment infolge $H_p M = 0,53 \cdot 5,6 = -2,97 \text{ m t}$ und in Höhe der Stiele $M = 0,53 \cdot 3,2 = -1,70 \text{ m t}$ (Fig. b). Die wirkliche Momentenfläche erhalten wir durch Zusammensetzung der M_0 -Fläche und der H -Fläche (Fig. c).

Für denselben Rahmen sei der Einfluß einer Temperaturänderung von $\pm 30^\circ \text{C}$ auf der linken Seite und $\pm 10^\circ \text{C}$ auf der rechten Seite untersucht.

Allgemein ist

$$H_t = \frac{\varepsilon \cdot E \cdot J_m \cdot \sum t \cdot s'}{N}$$

Für die Stiele ist $s' = 0$ und für die Riegelhälften je 5,2 m, also

$$\sum t \cdot s' = \pm [30^\circ (0 + 5,2) + 10^\circ (5,2 + 0)] = \pm 208 \text{ m}^\circ.$$

Demnach

$$H_t = \frac{0,000\,01 \cdot 2\,100\,000 \cdot 208 \cdot J_r}{271,4},$$

worin E in $\text{t}^\circ/\text{m}^2$, J_r in m^4 auszudrücken ist, so daß sich H_t in t ergibt.

Beispiel 2. Der unsymmetrische Rahmen mit verschiedener Belastung.

Der in Beton und Eisen 1911, Heft 10, behandelte beiderseits eingespannte Dachrahmen soll hier unter der Annahme einer gelenkartigen Auflagerung (Abb. 125) und unter der vereinfachenden Annahme gleicher Trägheitsmomente für alle Stabstücke, ohne Einfluß von Temperatur und Lagerverschiebung, berechnet werden.

Wir wählen $J_m = J$, dann ist für alle Stabteile $v = 1$.

Allgemein

$$H = \frac{\sum v \cdot F_0 \cdot f}{\sum \left[\frac{v \cdot s}{3} \cdot (H^2 + H \cdot h + h^2) \right]}$$

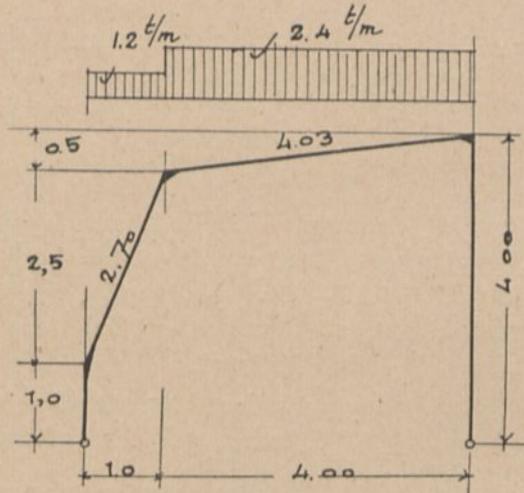


Abb. 125.

Man findet die beiden Bruchglieder am besten mit Hilfe der folgenden Zusammenstellungen.

Nennerglied (vgl. Abb. 129):

Stab	v	s	H	h	H^2	$H \cdot h$	h^2	$\frac{\alpha}{H^2 + H \cdot h + h^2}$	$s \cdot \alpha$
ab	1	1,0	1,0	0	1,0	0	0	1	1,0
bc	1	2,70	3,5	1,0	12,25	3,5	1	16,75	45,20
cd	1	4,03	4,0	3,5	16	14	12,25	42,25	170
de	1	4,0	4,0	0	16	0	0	16	64

3. Nenner = 280,20

also

$$N = \frac{280,20}{3} = 93,5 \text{ m}^3.$$

Zählerglied:

Das statisch bestimmte Hauptsystem ist wieder ein einfacher Balken von der Spannweite 5 m (Abb. 126). Die Auflagerreaktionen betragen

$$A_0 = \frac{2,4 \cdot 4,0 \cdot 2,0 + 1,2 \cdot 4,5}{5,0} = 4,92 \text{ t}$$

$$B_0 = 2,4 \cdot 4,0 + 1,2 \cdot 1,0 - 4,92 = 5,88 \text{ t}.$$

Für diesen wird nun die Momentenfläche aufgetragen, was in bekannter Weise durch Substituierung von Einzellasten für die Streckenlasten erfolgt (siehe Abb. 127). Die so gewonnene Momen-

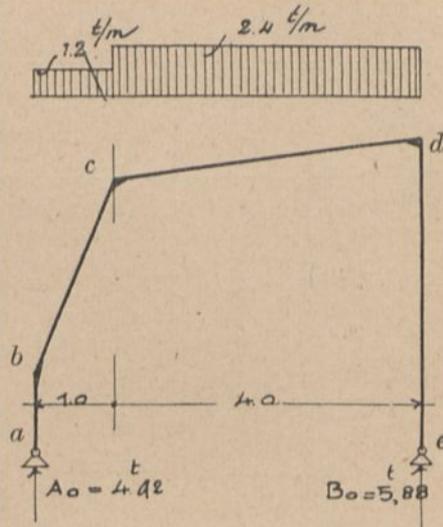


Abb. 126.

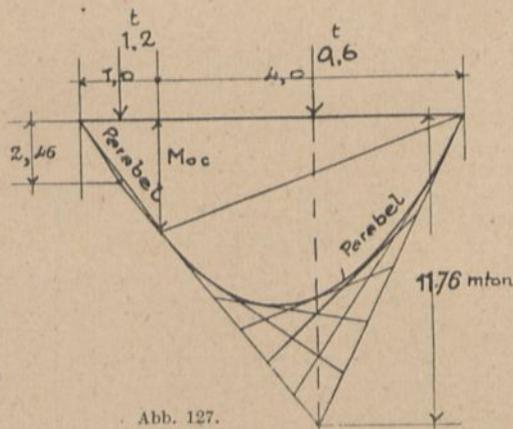


Abb. 127.

tenfläche wäre auf den geknickten Riegel zu übertragen. Bei der weiteren Arbeit begegnet man nun Schwierigkeiten, da die Teilstücke der Momentenfläche sowie die Abstände f unbequem zu berechnen sind. Man schlägt deshalb folgenden Weg ein:

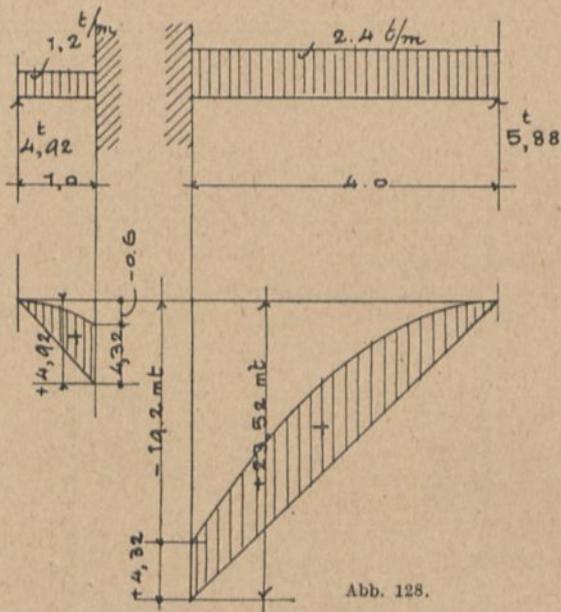


Abb. 128.

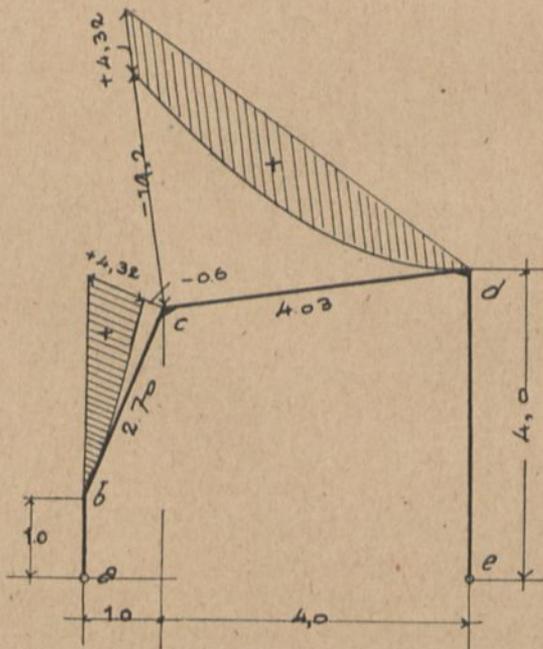


Abb. 129.

Nach Abb. 128 und 129:

Stab	v	F_0	f	$v \cdot F_0 \cdot f$
ab	1	0	0	0
bc	1	$\left\{ \begin{array}{l} + \frac{1}{2} \cdot 2,70 \cdot 4,92 = +6,63 \\ - \frac{1}{3} \cdot 2,70 \cdot 0,60 = -0,54 \end{array} \right.$	$1,0 + 2,5 \cdot \frac{2}{3} = 2,67 \text{ m}$	$+ 17,70$
			$1,0 + 2,5 \cdot \frac{3}{4} = 2,88 \text{ „}$	$- 1,55$
cd	1	$\left\{ \begin{array}{l} + \frac{1}{2} \cdot 4,03 \cdot 23,52 = +47,4 \\ - \frac{1}{3} \cdot 4,03 \cdot 19,2 = -25,8 \end{array} \right.$	$3,5 + \frac{0,5}{3} = 3,67 \text{ „}$	$+ 174,00$
			$3,5 + \frac{0,5}{4} = 3,63 \text{ „}$	$- 93,00$
de	1	0	0	0
				$\Sigma v \cdot F_0 \cdot f = +96,15$

also

$$H = \frac{\Sigma v \cdot F_0 \cdot f}{\text{Nenner}} = \frac{96,15}{93,5} = +1,03 \text{ t.}$$

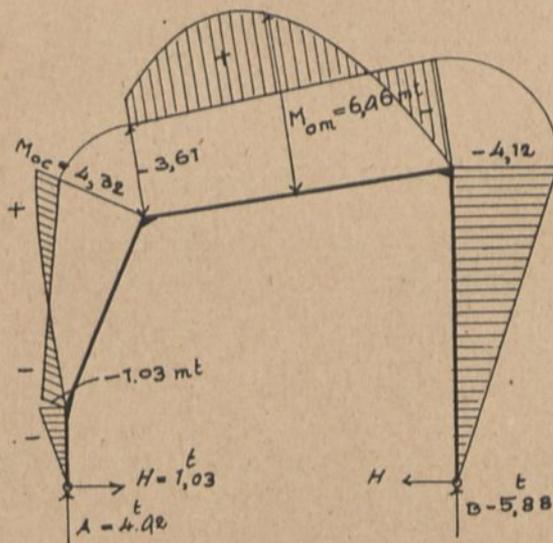


Abb. 130.

Die durch diesen Horizontalschub erzeugte Momentenfläche ist nun mit der ursprünglichen M_0 -Fläche zu kombinieren, genau so, wie dies in vorigem Beispiel getrennt vorgeführt wurde. Abb. 130 zeigt die endgültige Momentenfläche; für den Riegel liegt das größte Moment außerhalb der Mitte.

Beispiel 3. Allgemeine Behandlung eines einfachen rechteckigen Rahmens mit wagerechter Belastung.

Es sei eine Einzellast in beliebiger Lage angenommen (Abb. 131). Das Trägheitsmoment des Riegels sei n -mal so groß als dasjenige der Stiele. Wählen wir $J_m = J_r$, dann ist für den Riegel

$$v = \frac{J_m}{J} = \frac{J_r}{J_r} = 1,$$

für die Stiele

$$v = \frac{J_m}{J} = \frac{J_r}{J_s} = n.$$

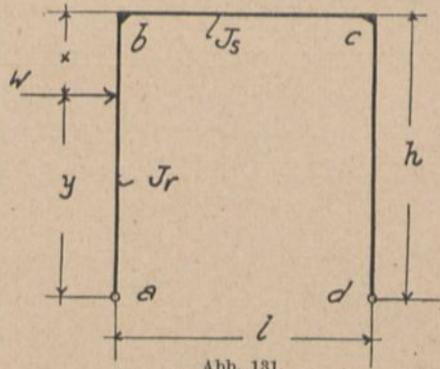


Abb. 131.

Wir nehmen das bewegliche Auflagergelenk auf der belasteten Seite an.

Reaktionen und Momentenflächen des statisch bestimmten Hauptsystems zeigt Abb. 132.

Reaktionen: Beim festen Auflager wagerecht W ; für beide als Gegenwirkung zu dem Moment $W \cdot y$ die lotrechten Reaktionen $\pm \frac{W \cdot y}{l}$.

Als Nennerglied für diese rechteckige Form erhielten wir schon früher

$$N = h^2 \cdot l \cdot \left(1 + \frac{2}{3} \cdot n \cdot \frac{h}{l} \right).$$

Zählerglied:

Stab	v	F_0	f	$v \cdot F_0 \cdot f$
ab	n	$-\frac{1}{2} \cdot x \cdot W \cdot x = -\frac{W \cdot x^2}{2}$	$h - \frac{x}{3}$	$-W \cdot \frac{x^2}{2} \cdot \left(h - \frac{x}{3} \right) \cdot n$
bc	1	$-\frac{W \cdot x + W \cdot h}{2} \cdot l$	h	$-\frac{W}{2} \cdot (x + h) \cdot l \cdot h \cdot 1$
cd	n	$-\frac{W \cdot h^2}{2}$	$\frac{2}{3} h$	$-\frac{W \cdot h^2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot h \cdot n = -\frac{W \cdot h^3}{3} \cdot n$

$$\sum v \cdot F_0 \cdot f = -\frac{W \cdot x^2}{2} \cdot h \cdot n + \frac{W \cdot x^3}{6} \cdot n - \frac{W \cdot x \cdot l \cdot h}{2} - \frac{W \cdot l \cdot h^2}{2} - \frac{W \cdot h^3}{3} \cdot n$$

(Generalnenner = 6)

$$= -\frac{W}{6} \cdot (3 \cdot x^2 \cdot h \cdot n - x^3 \cdot n + 3 \cdot x \cdot l \cdot h + 3 \cdot l \cdot h^2 + 2 \cdot h^3 \cdot n).$$

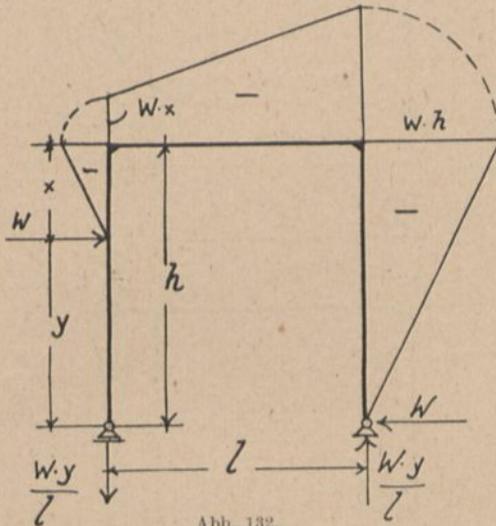


Abb. 132.

Demnach

$$H = -\frac{W \cdot (3 \cdot x^2 \cdot h \cdot n - x^3 \cdot n + 3 \cdot x \cdot l \cdot h + 3 \cdot l \cdot h^2 + 2 \cdot h^3 \cdot n)}{6 \cdot h^2 \cdot l \cdot \left(1 + \frac{2}{3} \cdot n \cdot \frac{h}{l}\right)}$$

Das wäre eine allgemeine Formel für den Horizontalschub bei beliebiger Lage der Last W .

Sonderfall: $x = 0$ (Abb. 133, Fig. a):

$$H = -\frac{W}{6} \cdot \frac{(3 \cdot l \cdot h^2 + 2 \cdot h^3 \cdot n)}{h^2 \cdot l \cdot \left(1 + \frac{2}{3} \cdot n \cdot \frac{h}{l}\right)},$$

woraus

$$H = -\frac{W}{6} \cdot 3 = -\frac{W}{2}.$$

Das —-Zeichen deutet an, daß der Schub nach außen gerichtet ist, also positive Momente erzeugt (Fig. b). Nach algebraischer Addition beider Momentenflächen sowie der Auflagergrößen erhält man dann Fig. c.

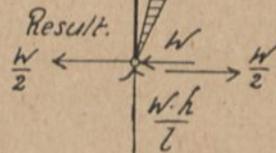
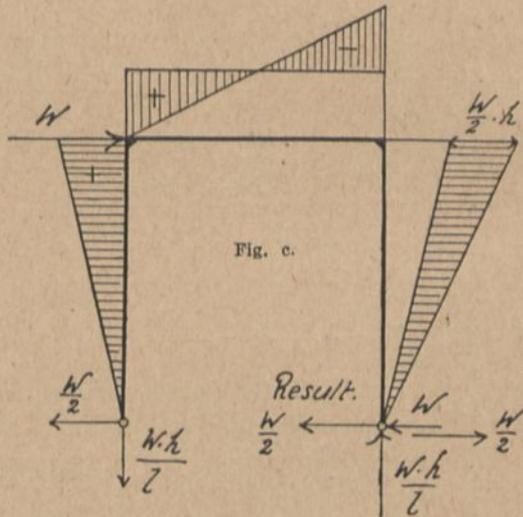
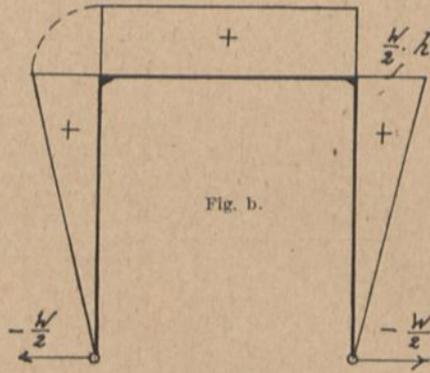
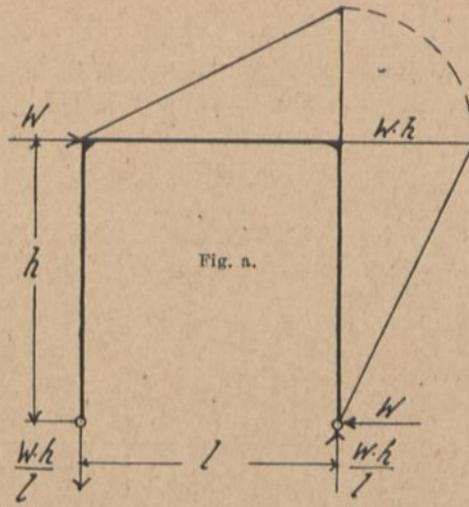


Abb. 133.

Beispiel 4. Der einfache rechteckige Rahmen mit einer gleichmäßig verteilten wagerechten Belastung (Abb. 134).

Es sei wieder für den Riegel $v = 1$ und für die Stiele $v = n$. Mit beweglichem Lager a erhalten wir die in Abb. 135 dargestellten M_0 -Flächen und Reaktionen.

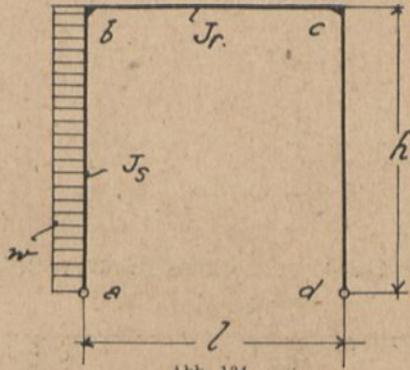


Abb. 134.

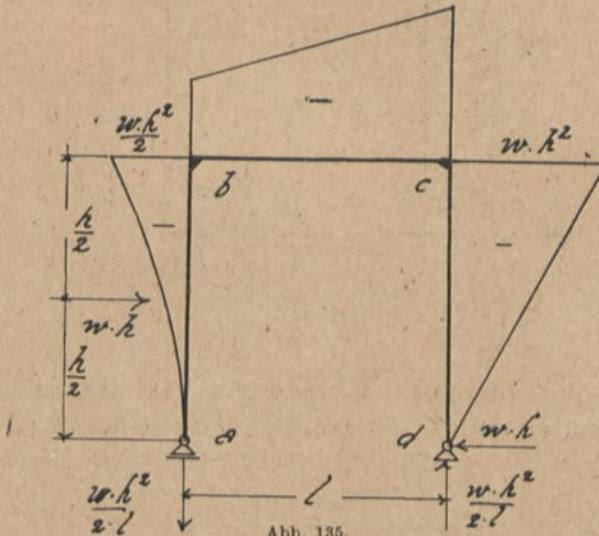


Abb. 135.

Zählerglied:

Stab	v	F_0	f	$v \cdot F_0 \cdot f$
ab	n	$-\frac{1}{3} \cdot \frac{w \cdot h^2}{2} \cdot h = -\frac{w \cdot h^3}{6}$	$\frac{3}{4} \cdot h$	$-n \cdot \frac{w \cdot h^4}{8}$
bc	1	$-\frac{w \cdot h^2}{2} \cdot l + \left(-\frac{w \cdot h^2}{4} \cdot l\right)$	h	$-\frac{w \cdot h^3}{2} \cdot l - \frac{w \cdot h^3}{4} \cdot l$
cd	n	$-\frac{w \cdot h^3}{2}$	$\frac{2}{3} \cdot h$	$-n \cdot \frac{w \cdot h^4}{3}$

$$\begin{aligned}\sum v \cdot F_0 \cdot f &= -\frac{w \cdot h^3}{24} \cdot (3 \cdot n \cdot h + 12 \cdot l + 6 \cdot l + 8 \cdot n \cdot h) \\ &= -\frac{w \cdot h^3}{24} \cdot (11 \cdot n \cdot h + 18 \cdot l)\end{aligned}$$

somit

$$H = -\frac{w \cdot h^3 \cdot (11 \cdot n \cdot h + 18 \cdot l)}{24 \cdot h^2 \cdot l \cdot \left(1 + \frac{2}{3} \cdot n \cdot \frac{h}{l}\right)}$$

oder

$$H = -\frac{w \cdot h \cdot (11 \cdot n \cdot h + 18 \cdot l)}{24 \cdot l \cdot \left(1 + \frac{2}{3} \cdot n \cdot \frac{h}{l}\right)}$$

Beispiel 5. Der einfache rechteckige Rahmen mit einseitigem Erd-
druck (Abb. 136).

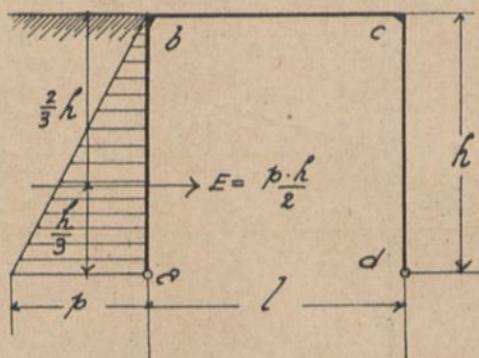


Abb. 136.

Die M_0 -Momente und Auflagergrößen für das statisch bestimmte Hauptsystem sind in Abb. 137 dargestellt. Es sei wieder für die Stiele $v = n$ und für den Riegel $v = 1$, also Nennergröße

$$N = h^2 \cdot l \left(1 + \frac{2}{3} \cdot n \cdot \frac{h}{l}\right).$$

Bestimmung der Zählergröße.

Den Einfluß der Seitenbelastung des Pfostens auf das Zählerglied ermitteln wir am besten analytisch wie folgt:

Wir nehmen zunächst den Erddruck über den ganzen Pfosten konstant an (Abb. 138), wobei sich die Momentenfläche als Parabel ergibt; dann subtrahieren wir die von dem ergänzenden Erddruck-dreieck hervorgerufene kubische Parabelfläche und erhalten die

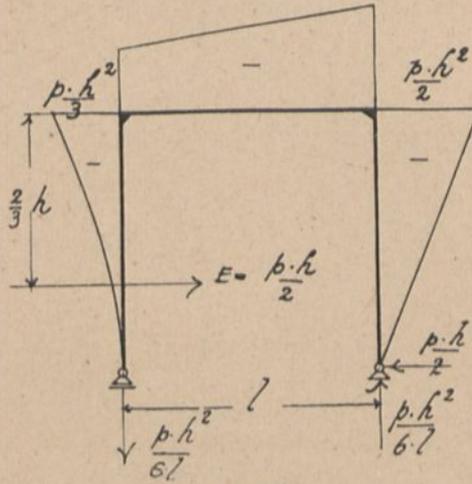


Abb. 137.

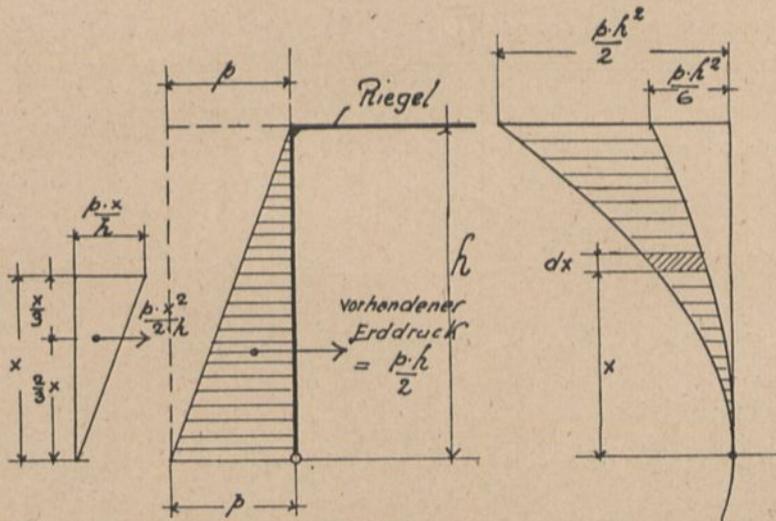


Abb. 138.

in Abb. 138 schraffierte M_0 -Fläche. Das Moment an beliebiger Stelle x ist

$$M_x = \frac{p \cdot x^2}{2} - \frac{p \cdot x^3}{6 \cdot h}$$

und das Differential der F_0 -Fläche

$$dF_0 = \left(\frac{p \cdot x^2}{2} - \frac{p \cdot x^3}{6 \cdot h} \right) \cdot dx$$

also

$$F_0 = \int_0^h \left(\frac{p \cdot x^2}{2} - \frac{p \cdot x^3}{6 \cdot h} \right) dx.$$

Das statische Moment von F_0 bezogen auf die Auflagergelenkwagerechte ist

$$\begin{aligned} F_0 \cdot f &= \int_0^h \left(\frac{p \cdot x^2}{2} - \frac{p \cdot x^3}{6 \cdot h} \right) dx \cdot x \\ &= \frac{p}{2} \cdot \int_0^h x^3 \cdot dx - \frac{p}{6 \cdot h} \cdot \int_0^h x^4 dx \\ &= \frac{p \cdot h^4}{8} - \frac{p \cdot h^4}{30} \\ F_0 \cdot f &= \frac{11 \cdot p \cdot h^4}{120}. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir

Stab	v	F_0	f	$v \cdot f \cdot F_0$
ab	n			$-\frac{11 \cdot p \cdot h^4}{120} \cdot n$
bc	1	$-\frac{5}{12} \cdot p \cdot h^2 \cdot l$	h	$-\frac{5}{12} \cdot p \cdot h^3 \cdot l$
cd	n	$-\frac{p \cdot h^3}{4}$	$\frac{2}{3} \cdot h$	$-\frac{p \cdot h^4}{6} \cdot n$

$$\sum v \cdot F_0 \cdot f = -\frac{1}{6} \cdot p \cdot h^3 \cdot l \left(\frac{11 \cdot h \cdot n}{20 \cdot l} + \frac{5}{2} + \frac{h \cdot n}{l} \right).$$

Demnach

$$H = -\frac{p \cdot h \cdot \left(\frac{11 \cdot h \cdot n}{20 \cdot l} + \frac{5}{2} + \frac{h \cdot n}{l} \right)}{6 \cdot \left(1 + \frac{2}{3} \cdot n \cdot \frac{h}{l} \right)}$$

oder

$$H = -\frac{p \cdot h \cdot \left(\frac{31}{20} \cdot \frac{h \cdot n}{l} + \frac{5}{2} \right)}{6 \cdot \left(1 + \frac{2}{3} \cdot n \cdot \frac{h}{l} \right)}.$$

Zu dieser Gleichung können wir auch auf die Weise gelangen, daß wir in die allgemeine Gleichung (Beispiel 3) für W ein Differential des Erddruckes (siehe Abb. 139)

$$dE = \left(\frac{2E}{h} \cdot \frac{x}{h} \right) \cdot dx$$

einsetzen und dann die Gleichung zwischen den Grenzen von 0 und h integrieren, also

$$\begin{aligned}
 H &= - \int_0^h \left[\frac{2 \cdot E \cdot x \cdot (3 \cdot x^2 \cdot h \cdot n + 3 \cdot x \cdot h \cdot l + 3 \cdot l \cdot h^2 + 2 \cdot h^3 \cdot n - x^3 \cdot n)}{6 \cdot h^2 \cdot h^2 \cdot l \left(1 + \frac{2}{3} \cdot n \cdot \frac{h}{l}\right)} \right] \cdot dx \\
 &= - \frac{2E}{6 \cdot h^4 \cdot l \left(1 + \frac{2}{3} \cdot n \cdot \frac{h}{l}\right)} \cdot \left[\frac{3 \cdot h^4 \cdot h \cdot n}{4} + \frac{3 \cdot h^3 \cdot h \cdot l}{3} + \frac{3 \cdot l \cdot h^2 \cdot h^2}{2} + \frac{2 \cdot h^2 \cdot h^3 \cdot n}{2} - \frac{h^5 \cdot n}{5} \right] \\
 &= - \frac{2 \cdot E}{6 \cdot \left(1 + \frac{2}{3} \cdot n \cdot \frac{h}{l}\right)} \cdot \left[\frac{3 \cdot h \cdot n}{4 \cdot l} + 1 + \frac{3}{2} + \frac{h \cdot n}{l} - \frac{h \cdot n}{5 \cdot l} \right]
 \end{aligned}$$

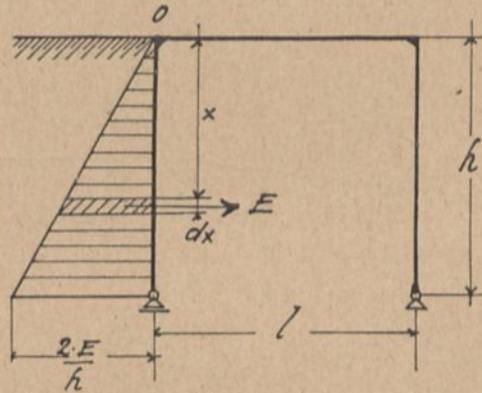


Abb. 139.

oder

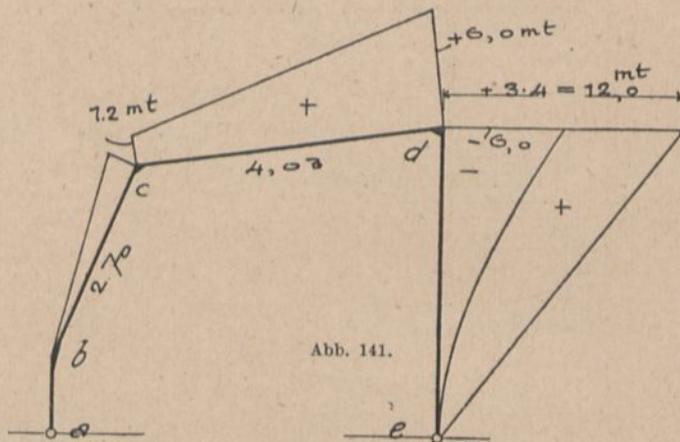
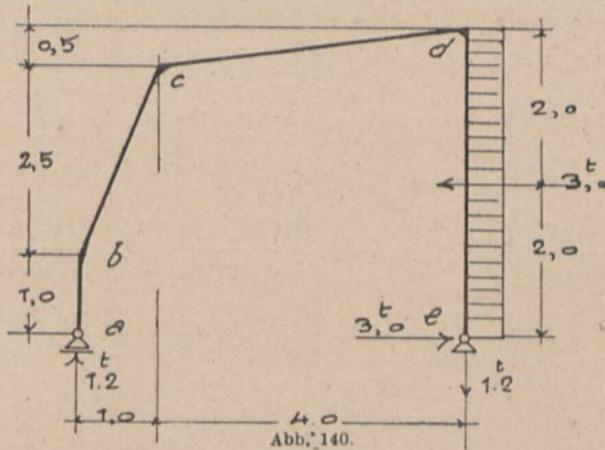
$$H = - \frac{2 \cdot E}{6 \cdot \left(1 + \frac{2}{3} \cdot n \cdot \frac{h}{l}\right)} \cdot \left[\frac{31}{20} \cdot \frac{h \cdot n}{l} + \frac{5}{2} \right] \cdot 1)$$

Beispiel 6. Der unsymmetrische Rahmen mit Winddruck.

Der in Beispiel 2 berechnete Dachrahmen soll nun für einen horizontalen Winddruck von 150 kg/m^2 untersucht werden. Die Binderentfernung betrage 5 m , somit der Gesamtwinddruck auf jede Seite $= 4,0 \cdot 5,0 \cdot 150 = 3000 \text{ kg}$.

1. Wind von rechts (Abb. 140). Es ist hierbei gleichgültig, welches Auflager als beweglich gewählt wird. Erwählt man dafür das linke, so ergeben sich die in Abb. 140 angegebenen Reaktionen und die in Abb. 141 dargestellten M_0 -Flächen.

1) Im Anschluß an diese allgemein gehaltenen Beispiele sei auf die Formelsammlung von Dr.-Ing. A. Kleinlogel „Rahmenformeln“ verwiesen, welche für einfache Rahmen aller Art gebrauchsfertige Schlußformeln für Lagerkräfte und Momente in den häufiger wiederkehrenden Belastungsfällen angibt.



Zählerglied:

Stab	v	F_0	f	$v \cdot F_0 \cdot f$
ab	1	0	0	0
bc	1	$+\frac{1}{2} \cdot 2,7 \cdot 1,2 = + 1,63$	$1,0 + 2,5 \cdot \frac{2}{3} = 2,67 \text{ m}$	$+ 4,32$
cd	1	$+ 1,2 \cdot 4,03 = + 4,85$	$3,5 + \frac{0,5}{2} = 3,75 \text{ ,,}$	$+ 18,2$
		$+\frac{1}{2} \cdot 4,03 \cdot 4,8 = + 9,70$	$3,5 + 0,5 \cdot \frac{2}{3} = 3,84 \text{ ,,}$	$+ 37,4$
de	1	$+\frac{1}{2} \cdot 12,0 \cdot 4,0 = +24,00$	$4,0 \cdot \frac{2}{3} = 2,67 \text{ ,,}$	$+ 64,0$
		$-\frac{1}{3} \cdot 4,0 \cdot 6,0 = - 8,00$	$4,0 \cdot \frac{3}{4} = 3,00 \text{ ,,}$	$- 24,0$
$\Sigma v \cdot F_0 \cdot f = +99,92$				

Das Nennerglied war nach Früherem 93,5, also

$$H = \frac{99,92}{93,5} = +1,07 t.$$

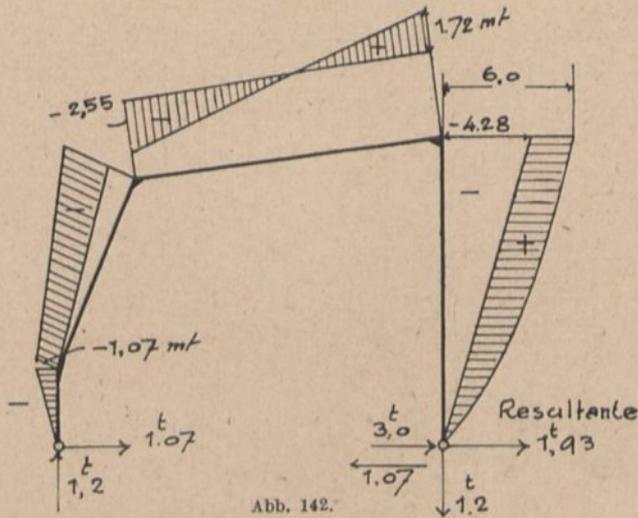


Abb. 142.

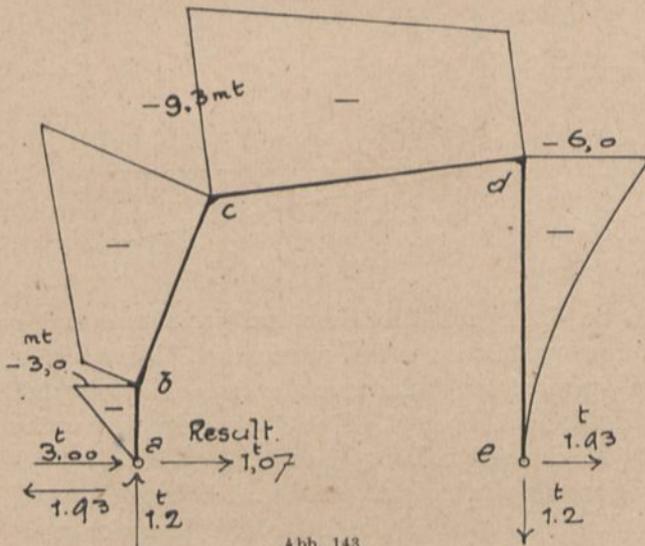


Abb. 143.

Abb. 142 stellt uns die wirklich auftretenden Momente und Auflagergrößen dar.

Nimmt man für dieselbe Belastung das rechte Lager als beweglich an, so bewirkt es keinerlei Veränderung in dem schließ-

lichen Ergebnis (Abb. 142), nur gewinnen wir hier für H den rechten Gegendruck ($-1,93t$); mit der in Abb. 143 dargestellten M_0 -Fläche ist $\sum v \cdot F_0 \cdot f = -181,0 \text{ tm}^3$ und $H = -\frac{181,0}{93,5} = -1,93t$; die Reaktionen von Abb. 142 und 143 stimmen überein.

2. Greift der Wind von links an, so können wir, ohne einen zu großen Fehler zu begehen, auf eine Zerlegung des Wind-

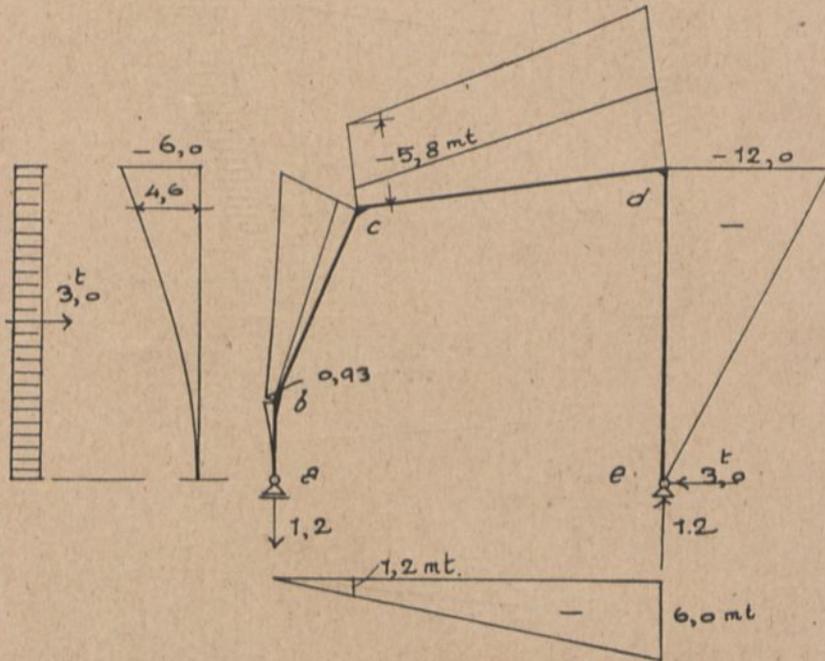


Abb. 144.

druckes in zu den Dachflächen normal gerichtete und parallele Komponenten praktischerweise verzichten. Wir arbeiten also mit einem wagerechten Winddruck w auf eine lotrechte Wand von der Firsthöhe Abb. 144. Der Gesamtdruck beträgt somit wieder (um bei demselben Beispiel zu bleiben) $W = 0,75 \cdot 4 = 3t$.

Machen wir das linke Lager wagerecht beweglich, so entstehen an den Auflagern A und B die lotrechten Reaktionen

$$\mp \cdot \frac{W \cdot c}{l} = \frac{3 \cdot 2,0}{5,0} = 1,2t.$$

und am festen Lager B die wagerechte Reaktion $W = 3t$.

Nehmen wir auch gleiche Trägheitsmomente an, so ändert sich nichts an dem eben vorher gewonnenen Nenner.

Wie aus der Abb. 144 ersichtlich, entstehen auf der sich bis zum Firstpunkt d erstreckenden Windseite negative Momente, 1) infolge $A \downarrow$ als Dreiecksfläche und 2) infolge w als Parabelfläche, die entsprechend ihrer Lage auf die zwei bzw. drei Stabstücke abzuwickeln wären, auf die sie einwirken, während auf dem rechten Stiel, da dieser vertikal ist, nur eine dreieckige Momentenfläche erzeugt wird infolge $W = 3 t$.

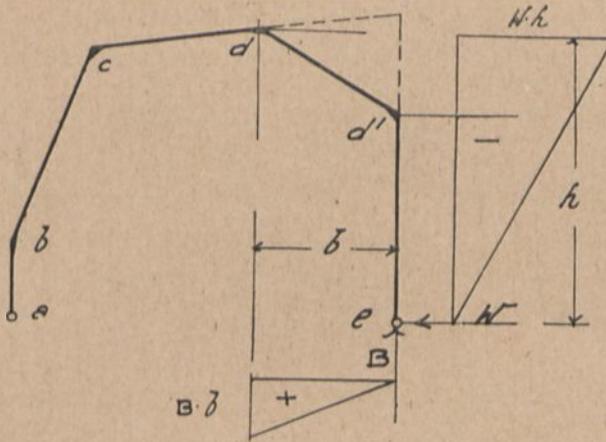


Abb. 145.

Verliefe dieser Stiel bis zum First d auch geknickt (Abb. 145), so erhielte der Stab dd' außer dem Einfluß von W auch noch den von $B \uparrow$.

Zur Bildung des Zählergliedes betrachten wir am einfachsten den Einfluß jeder Kraftwirkung, links und rechts vom Firstpunkt, getrennt.

Der Einfluß der Reaktionen an sich bietet dabei nichts Neues. Die Übertragung der linken, bis zum Firstpunkt in Betracht kommenden Parabelfläche auf die drei Stabstücke bietet auch keine Schwierigkeiten, ebenso nicht die Bestimmung der jeweils auf einem Stabstück ruhenden Teilfläche. Bekanntlich ist der Inhalt der schrägliegenden Flächen gleich dem der Vertikalprojektion multipliziert mit dem Verhältnis von wirklicher Stablänge zu seiner (Vertikal-)Projektion (Abb. 146).

Also

$$F_0 \text{ (auf } s) = F'_0 \cdot \frac{s}{s'}$$

Die Bestimmung des Schwerpunktes zu der direkt (durch Differenz zweier Parabelabschnitte) ausgerechneten Fläche F'_0 bzw. F_0 bereitet jedoch einige Umstände.

Man erhält das für jedes Stabstück entstehende $F_0 \cdot f$ einfacher durch direkte Auflösung des Integrals

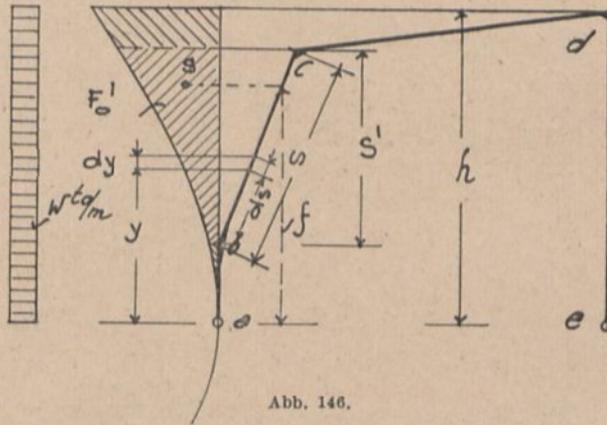


Abb. 146.

$\int M_0 \cdot y \cdot ds \cdot v$. Für das Stabstück bc ergibt sich mit allgemein

$$M_0 = \frac{w \cdot y^2}{2}$$

$$\int_{y=h_b}^{y=h_c} \frac{w \cdot y^2}{2} \cdot y \cdot ds \cdot v \text{ und mit } v=1 \text{ und } ds = dy \cdot \frac{s}{s'}$$

$$\int_{h_b}^{h_c} \frac{w \cdot y^2}{2} \cdot y \cdot dy \cdot \frac{s}{s'} = \frac{w}{2} \cdot \frac{s}{s'} \cdot \int_{h_b}^{h_c} y^3 \cdot dy = \frac{w}{2} \cdot \frac{s}{s'} \cdot \left(\frac{h_c^4}{4} - \frac{h_b^4}{4} \right)$$

$$\int_{h_b}^{h_c} M_0 \cdot y \cdot ds = \frac{s}{s'} \cdot \frac{w}{8} \cdot (h_c^4 - h_b^4).$$

Diese Formel gestattet für jeden Stab sofort die Bestimmung des Zählergliedes infolge der gleichmäßigen Last w ; bei Vertikalstäben, wie $a - b$, ist $\frac{s}{s'} = 1$.

Zum Schluß erfolgt die Addition der Einflüsse aller auf das Zählerglied einwirkenden Lasten algebraisch.

Beachte hierzu das später folgende Zahlenbeispiel für die seitliche Belastung eines Rahmens mit parabolisch gebogenem Riegel.

Bei der Dimensionierung ist für jeden Querschnitt das größte Moment festzustellen, so daß ein Vergleich zwischen der linksseitigen und rechtsseitigen Windbelastung anzustellen ist.

Kapitel XI.

Berechnung der Einflußliniengleichungen für den einfachen rechteckigen Rahmen ohne und mit Kragarmen.¹⁾

Berechnung der Einflußlinien für den Horizontalschub bei lotrechter Belastung.

(Als Vorstudium Anhang Einflußlinienlehre.)

Einflußlinien gewinnen wir bekanntlich, wenn wir eine Last $P = 1$ über den Träger wandern lassen, in jedem Punkt (vielleicht von $\frac{1}{10} l$ zu $\frac{1}{10} l$) die bestimmte statische Größe (hier den Schub)

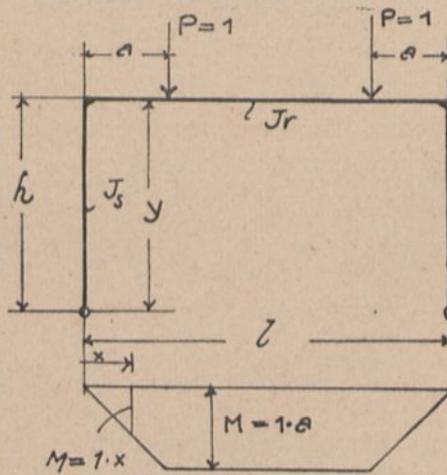


Abb. 147.

ausrechnen und als Ordinate unter der betreffenden Laststellung auftragen. Da sich der Schub bei mehreren Lasten stets als die Summe der Schübe der einzelnen Lasten für sich darstellen läßt, so nehmen wir zunächst zwei, und zwar symmetrische Lasten 1 an (Abb. 147).

¹⁾ Vgl. Müller-Breslau, „Die neueren Methoden“, 4. Aufl., S. 129 f.

Zählerglied:

$$Z = \int M_0 \cdot y \cdot ds \cdot v.$$

Ist das Trägheitsmoment des Riegels $J_r = \frac{1}{n} \cdot J_s$ und wählt man $J_m = J_r$, so ist für den Riegel $v = 1$, für die Stiele $v = \frac{1}{n}$. Da nur der Riegel für das Zählerglied in Betracht kommt, so haben wir mit $v = 1$ und mit $y = h$

$$\int M_0 \cdot y \cdot ds = 2 \left[\int_0^a 1 \cdot x \cdot h \cdot dx + \int_a^{\frac{l}{2}} 1 \cdot a \cdot h \cdot dx \right].$$

Die Multiplikation mit 2 hebt sich sofort weg, da das Resultat durch 2 zu dividieren ist. Daher

$$Z = h \int_0^a x \cdot dx + a \cdot h \int_a^{\frac{l}{2}} dx = \frac{h \cdot a^2}{2} + a \cdot h \cdot \frac{l}{2} - a^2 \cdot h$$

$$Z = \frac{a \cdot h \cdot l}{2} - \frac{h \cdot a^2}{2} = a \left(\frac{h \cdot l}{2} \right) - a^2 \left(\frac{h}{2} \right).$$

Dasselbe Resultat hätte sich auch sofort aus der gleichen Ableitung für den Rahmen mit bogenförmigem Riegel ergeben (Kapitel XII), wenn wir $f = 0$ setzen.

$$\begin{aligned} \text{Nenner } N &= \int y^2 \cdot ds \cdot v \\ &= 2 \cdot \int_0^h y^2 \cdot dy \cdot v + \int_0^l y^2 \cdot ds \cdot v \\ N &= 2 \cdot v \cdot \frac{h^3}{3} + h^2 \cdot l. \end{aligned}$$

Auch dieser Wert ergibt sich aus dem gleichen für den Rahmen mit gebogenem Riegel für $f = 0$. Also

$$H = \frac{Z}{N} = \frac{a \cdot \left(\frac{h \cdot l}{2} \right) - a^2 \cdot \left(\frac{h}{2} \right)}{2 \cdot v \cdot \frac{h^3}{3} + h^2 \cdot l}.$$

Der Ausdruck für die veränderliche Größe a zeigt, daß die Einflußlinie eine Parabel ist. Wir brauchen also nur die Mittelordinate zu berechnen und dann die bekannte Konstruktion anzuwenden. Wir erhalten diese für $a = 0,5 \cdot l$

(Abb. 148). Mit Zahlen ergibt sich für $l = 11,80$ m, $h = 5,12$ m, v für die Stiele $= \frac{1}{1,5}$ und $a = \frac{l}{2} = \frac{11,80}{2}$:

$$H_{0,5l} = \frac{\frac{11,8}{2} \left(\frac{5,12 \cdot 11,80}{2} \right) - \left(\frac{11,80}{2} \right)^2 \cdot \frac{5,12}{2}}{2 \cdot \frac{1}{1,5} \cdot \frac{5,12^3}{3} + 5,12^2 \cdot 11,80} = 0,242.$$

Der Inhalt der Fläche beträgt $F = 11,80 \cdot 0,242 \cdot \frac{2}{3} = +1,905$ m.

Die Bezeichnung ist m , weil die Ordinaten keine Benennung haben.

Der Horizontalschub für volle Belastung beträgt somit bei

$$p = 2 \text{ t/m} \quad H_p = +1,905 \cdot 2,0 = 3,81 \text{ t.}$$

(Bei den gleichen Abmessungen, aber gebogenem Riegel mit der Pfeilhöhe $f = 1,12$ m ergibt sich der Inhalt der Einflußfläche um etwas geringer zu $F = 1,78$ m; vgl. später Kapitel XII.)

Vergleichsweise erhalten wir nach der früher abgeleiteten Formel für gleichmäßige Last direkt

$$H_p = \frac{p \cdot l^2}{12 \cdot h \cdot \left(1 + \frac{2}{3} \cdot n \cdot \frac{h}{l} \right)} = \frac{2,0 \cdot 11,80^2}{12 \cdot 5,12 \cdot \left(1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1,5} \cdot \frac{5,12}{11,80} \right)} = 3,81 \text{ t.}$$

$\downarrow = v$

Einflußlinien für die Biegemomente.

Die Einflußlinie für den Horizontalschub (Abb. 148) kann dazu benutzt werden, Einflußlinien für die Biegemomente

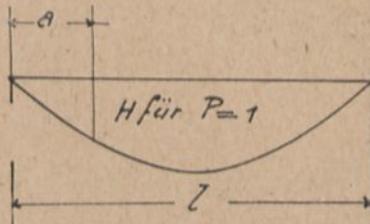


Abb. 148.

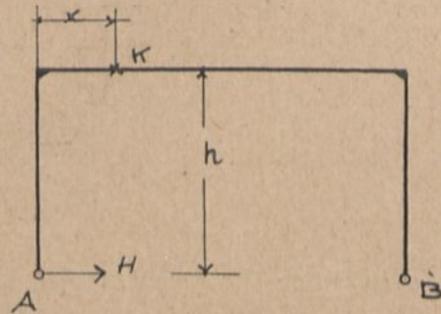


Abb. 149.

an beliebigen Punkten des Riegels zu konstruieren.

Für einen beliebigen Punkt K des Riegels (Abb. 149) ist

$$M_K = M_0 - H \cdot h.$$

Wir gelangen zu einer einfachen Konstruktion, wenn wir die ganze Gleichung durch h dividieren:

$$\frac{M_K}{h} = \frac{M_0}{h} - H$$

$$M_K = h \left(\frac{M_0}{h} - H \right).$$

M_0 ist das Moment des einfachen Balkens AB , für welches die Einflußfläche nach Abb. 150 Fig. a gewonnen werden würde

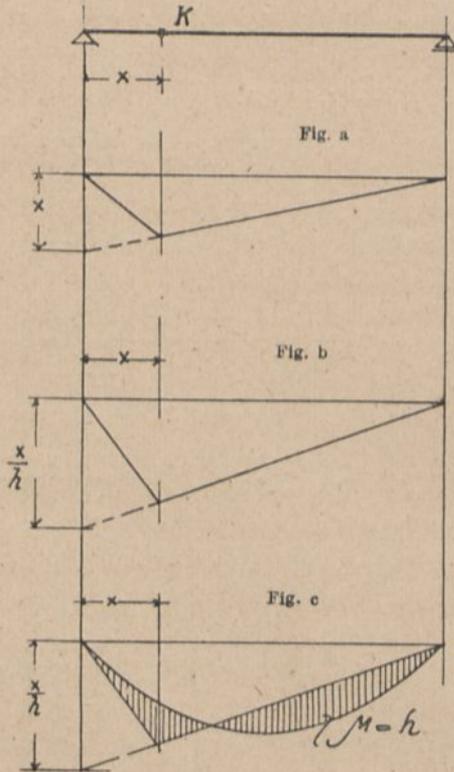


Abb. 150.

(in direkter Abhängigkeit von x). Durch Auftragen von $\frac{x}{h}$ gewinnen wir sofort die Einflußfläche für $\frac{M_0}{h}$ (Fig. b). Zu dieser haben wir dann die Einflußfläche für H algebraisch zu addieren, um die endgültige Einflußfläche, deren Multiplikator $\mu = h$ ist, zu erhalten (Fig. c).

Besonders bei Rahmenbrücken dürften solche für mehrere Punkte K sehr schnell konstruierbare Einflußlinien von Nutzen sein, da es sich dort um bewegliche Lasten handelt, weniger aber bei Dachkonstruktionen.

Bei Benutzung der Einflußflächen hüte man sich vor Fehlern in der Ausrechnung der Flächeninhalte der einzelnen positiven oder negativen Teile. Man werde sich darüber klar, was 1 cm^2 der auf der Zeichnung dargestellten Fläche auf Grund der angewendeten Längen- und Ordinatenmaßstäbe bedeutet; die berechneten Flächeninhalte wären dann mit der Last für 1 m zu multiplizieren, sofern eine gleichmäßige Belastung vorliegt.

Der rechteckige Zweigelenkrahmen mit Kragarmen.

Zunächst ist klar, daß die Kragarme an sich vollständig unabhängig vom eigentlichen Rahmen als einfache Kragträger berechenbar sind; daher liefern sie auch, weil sie unabhängig vom eigentlichen Rahmen sind, keinen Einfluß auf das Nennerglied. Für das Zählerglied kommen die Kragarme jedoch in Betracht, denn sie liefern ein Spannungsmoment, welches sich über den zu dem Rahmen gehörigen Riegel fortpflanzt und mit negativer Momentenfläche für das statisch bestimmte Hauptsystem, den einfachen Kragbalken, auch einen negativen Horizontalschub (nach außen) erzeugt (Abb. 151).

Zur Berechnung von Einflußordinaten für diesen negativen Horizontalschub belasten wir die Kragarme, deren Form und Richtung gleichgültig ist, mit zwei symmetrischen Lasten $P = 1$, so daß der für das Zählerglied in Frage kommende Riegel das negative Moment $M_0 = -1 \cdot a$ erhält. Also

$Z = \int M_0 \cdot y \cdot ds \cdot v$; mit der gleichen Annahme wie vor ($J_m = J_r$, also $v = 1$) wird bei Division durch 2

$$Z = -\frac{a}{2} \int_0^l y \cdot dx.$$

Das Integral bedeutet den Inhalt der vom Rahmen umschlossenen Fläche, also

$$Z = -\frac{a \cdot h \cdot l}{2}.$$

Somit wird mit dem gleichen Nenner wie vor

$$H = \frac{\frac{a \cdot h \cdot l}{2}}{\frac{2}{3} v \cdot h^3 + h^2 \cdot l}.$$

Diese Gleichung gestattet in sehr einfacher Weise die Konstruktion der Einflußlinie für die Kragarme. Sie stellt

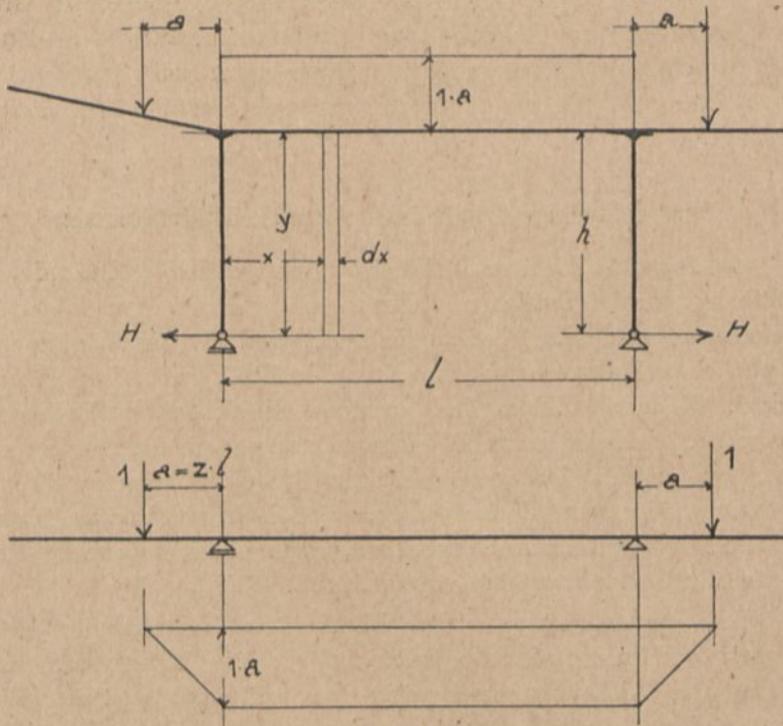


Abb. 151.

nämlich bezüglich des veränderlichen a eine gerade Linie dar die als tangentielle Verlängerung der mittleren Einflußlinie über die Auflager hinaus anzusehen ist.

Zum Beweise leiten wir den Zähler für H (Mittelteil) Seite 140 nach a ab (die Nenner sind gleich).

Allgemein:

$$\frac{dZ}{da} = \frac{h \cdot l}{2} - a \cdot h,$$

im speziellen für $a = 0$ (also am Auflagerpunkt)

$$\frac{dZ}{da} = \frac{h \cdot l}{2} = \operatorname{tg} \varphi$$

(Abb. 152): $\operatorname{tg} \varphi$ ist aber weiter nichts als der zu a gehörige Koeffizient des Zählers für das H der Kragarme. Also

$$H = -\frac{a \cdot \operatorname{tg} \varphi}{N}$$

(mit $\operatorname{tg} \varphi$ für $a = 0$).

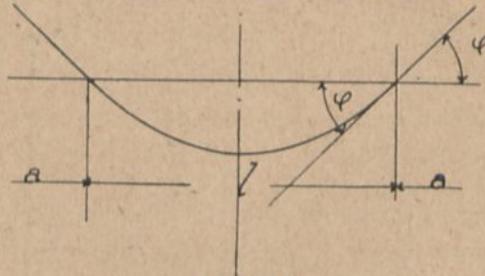


Abb. 152.

Da die Einflußlinien der Kragarme, wie wir gesehen haben, gerade Linien sind, so brauchen wir nur noch einen Punkt derselben in einem beliebigen Abstände a zu berechnen und wählen dazu praktischerweise auf jeder Seite je den größten Abstand a (ohne von der Gleichung mit $\operatorname{tg} \varphi$ Gebrauch zu machen) mit Benutzung der ersten Gleichung

$$H = -\frac{\frac{a \cdot h \cdot l}{2}}{\frac{2}{3} \cdot v \cdot h^3 + h^2 \cdot l}$$

Es erübrigt sich hierzu ein Beispiel, da für den gleichen Fall bei dem Rahmen mit gebogenem Riegel ein solches gegeben ist.

Kapitel XII.

Der Rahmen mit gebogenem (oder gebrochenem) Riegel ohne und mit Kragarmen.¹⁾

Die Ermittlung des Horizontalschubes für lotrechte Last mit Hilfe der gedeuteten Integrale.

Diese kann genau so erfolgen wie in einem der Beispiele des Kapitels X; nur haben wir den gebogenen Riegel dabei in eine Anzahl als gerade anzusehende Teilstücke zu zerlegen, wobei man

¹⁾ Ein Beispiel aus der Praxis bringt Deutsche Bauzeitung 1914, Mitteilungen Nr. 3 und 4: „Durchrechnung einer Rahmenkonstruktion.“

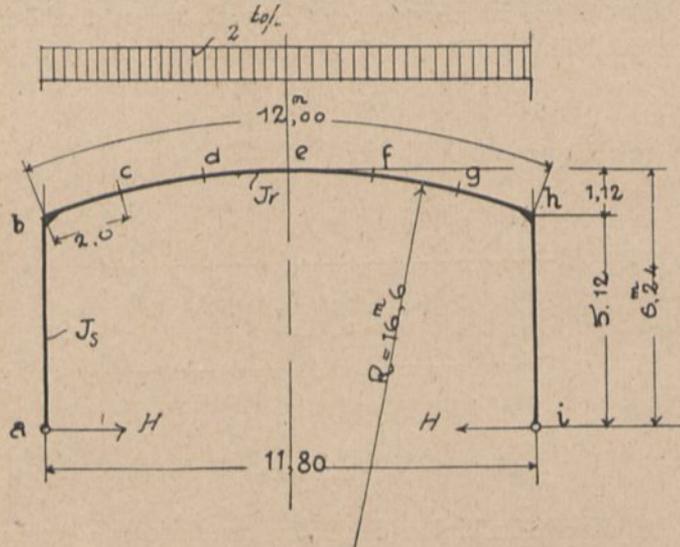


Abb. 153.

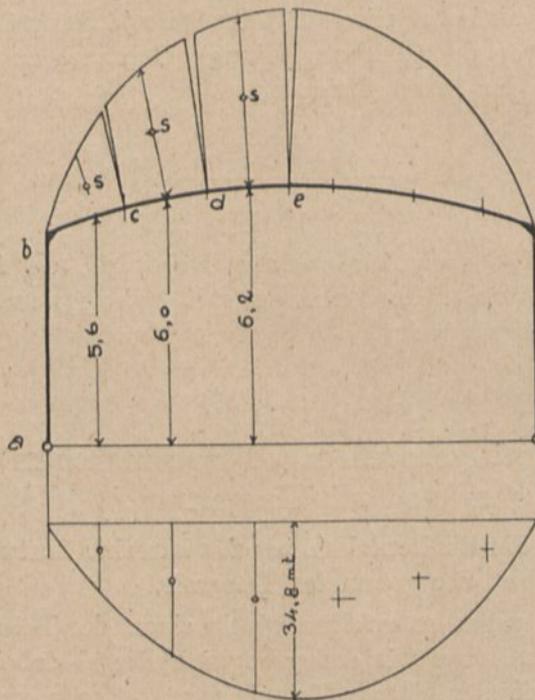


Abb. 154.

am besten die Teilstücke alle gleich lang macht (Abb. 153). Die Form des Bogens ist dabei gleichgültig; in der Regel liegt ein Kreisbogen vor, dessen Länge zwecks Zerlegung in eine Anzahl gleicher Stücke leicht berechenbar ist. Flache parabolische Bögen kann man zwecks Vermeidung der Rektifikation einer Parabel ebenfalls als Kreisbogen betrachten. Man kann auch die Teilstücklänge aus der Zeichnung herausmessen.

Nach Einteilung des Bogens lotet man die Teilpunkte herunter auf die für den einfachen Balken gezeichnete Momentenfläche und überträgt die dort getroffenen Momentordinaten auf die Bogenteilstücke (Abb. 154). Das Weitere, die Bildung des Nenners und die Berücksichtigung des Wechsels im Trägheitsmoment (auch innerhalb des Bogens), ist dann genau so wie früher.

Die Abb. 153 und 154 veranschaulichen das Gesagte für den Fall einer gleichmäßigen Belastung. Zur Vereinfachung kann dabei die zu einem Teilstück gehörige Fläche F_0 als Trapez berechnet und der Schwerpunkt desselben in der Mitte des Teilstückes angenommen werden; nur bei den beiden Endteilstücken ist der Schwerpunkt auf $\frac{2}{3}$ der Teilstücklänge von den Stielen aus anzunehmen. Damit sind die Abstände f zeichnerisch oder (bei geforderter größerer Genauigkeit) auch analytisch leicht bestimmbar.

Berechnung der Einflußliniengleichung des Horizontalschubes bei lotrechter Last.

Mit Hilfe des soeben beschriebenen Verfahrens kann man auch Einflußlinien für den Horizontalschub und anschließend daran Einflußlinien für das Biegemoment in irgendeinem Punkte konstruieren; man hat hierbei auch die Möglichkeit, einen Wechsel im Trägheitsmoment zu berücksichtigen.

Man teile hierzu den Bogen oder besser die Spannweite in eine Anzahl gleicher Stücke ein und belaste nacheinander zwei symmetrische Punkte mit je Last 1 (Abb. 155). Für jede angenommene Laststellung erhält man so ein bestimmtes Zählerglied, wobei man dasselbe nur für die Symmetriehälfte festzustellen braucht, da die Einflußlinie für nur eine wandernde Last 1 zu konstruieren ist; der Nenner bleibt immer gleich.

Die gewonnenen Werte H werden als Ordinaten unter den jeweiligen Laststellungen aufgetragen. Hat man die H -Linie, so können leicht mit Hilfe derselben die Einflußlinien für die Bie-

gungsmomente an beliebigen Punkten konstruiert werden. Vergleiche hierzu auch das Folgende.

Die Berechnung der Einflußlinie für den Horizontalschub ohne Berücksichtigung des im Bogen verän-

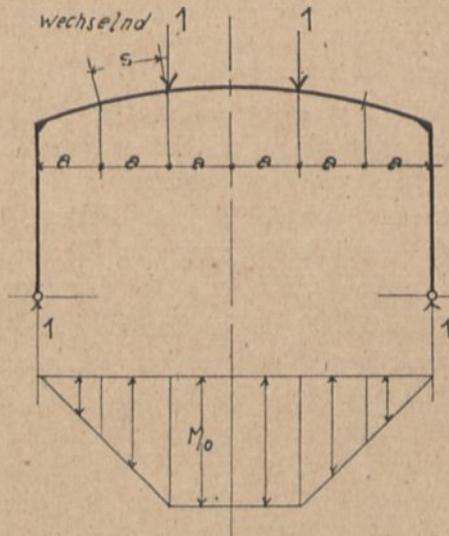


Abb. 155.

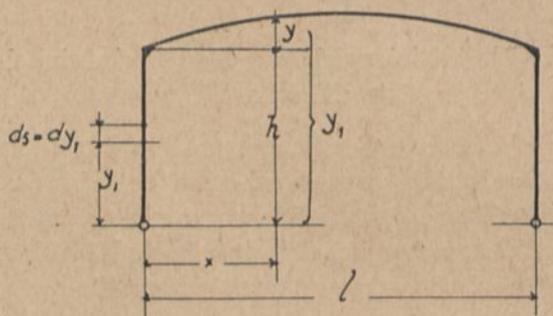


Abb. 156.

derlichen Trägheitsmomentes erfolgt am besten analytisch unter Zugrundelegung eines parabolischen Bogens, welcher für flache Kreisbogen stets substituiert werden kann. Es sei das Trägheitsmoment des Bogens durchweg $\frac{1}{n}$ -mal so groß als das der Stiele; wählen wir dann $J_m = J_b$, dann ist für den Bogen $v = 1$, so daß v aus dem Zählerglied verschwindet, für die Stiele $v = \frac{J_b}{J_s} = \frac{1}{n}$.

Das Nennerglied ist allgemein

$$N = \int y^2 \cdot ds \cdot v.$$

Mit den Bezeichnungen von Abb. 156 ergibt sich

$$N = \underbrace{\int_0^h y_1^2 \cdot dy_1 \cdot v}_{\text{Stiele}} + \underbrace{\int_0^l y_1^2 \cdot dx}_{\text{Riegel}},$$

wobei wir zur Vereinfachung bei dem Riegel $ds = dx$ gesetzt haben.

Das erste Integral liefert ohne weiteres für zwei Stiele $2 \cdot v \cdot \frac{h^3}{3}$.

Fügt man zu dem zweiten Integral den konstanten Faktor $\frac{1}{2}$ hinzu (so daß das Resultat später wieder mit 2 zu multiplizieren ist), schreibt also dafür

$$\int_0^l \underbrace{y_1 \cdot dx}_{df} \cdot \frac{y_1}{2},$$

so erscheint dieser Ausdruck in der angegebenen Anordnung sofort als das statische Moment der von der Rahmenachse umschlossenen Fläche bezogen auf die Gelenkachse, und es ergibt sich nach Abb. 157

$$\int_0^l y_1 \cdot dx \cdot \frac{y_1}{2} = \underbrace{\frac{2}{3} \cdot l \cdot f \cdot \left(h + \frac{2}{5} f\right)}_{\text{Parabelabschnitt}} + \underbrace{\frac{l \cdot h^2}{2}}_{\text{Rechteck}}.$$

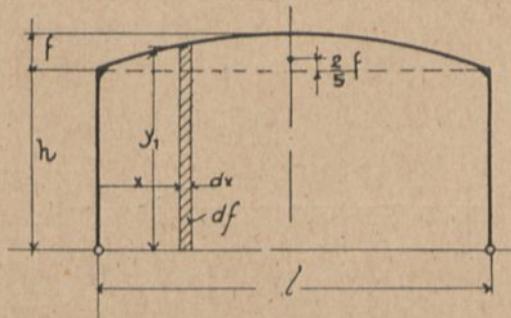


Abb. 157.

Somit beträgt der Nenner

$$N = 2 \cdot \left[\frac{2}{3} \cdot l \cdot f \cdot h + \frac{4}{15} \cdot l \cdot f^2 + \frac{l \cdot h^2}{2} + \frac{v \cdot h^3}{3} \right].$$

Entsprechend kann der Nenner für jede andere Form des Riegels bzw. des ganzen Rahmens leicht gebildet werden.

Zur Bildung des Zählergliedes für eine beliebig gestellte Last 1 auf dem Riegel arbeiten wir zunächst wieder mit zwei symmetrischen Lasten 1 (Abb. 158) und erhalten für zwei Symmetriehälften:

$$Z = \int M_0 \cdot y_1 \cdot dx = 2 \cdot \left[\int_0^a 1 \cdot x \cdot y_1 dx + \int_a^{\frac{l}{2}} 1 \cdot a \cdot y_1 \cdot dx \right]$$

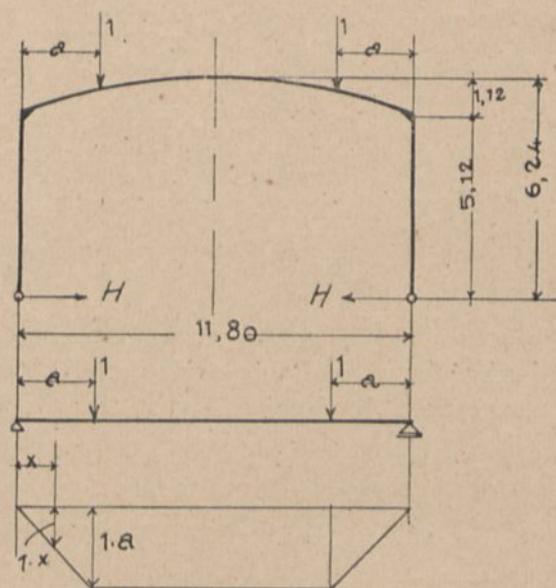


Abb. 158.

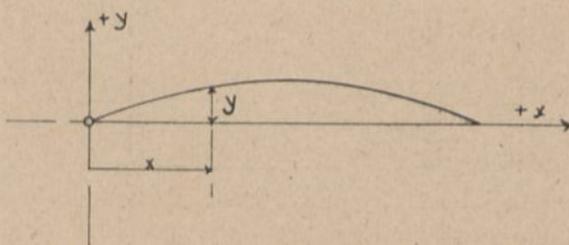


Abb. 159.

Die Multiplikation mit 2 hebt sich sofort weg, da wir ja das Resultat durch 2 zu dividieren haben. Für $y_1 = h + y$ haben wir die Gleichung der Parabel zu berücksichtigen (Abb. 159):

$$y = \frac{4 \cdot f}{l^2} \cdot (l \cdot x - x^2).$$

Damit wird

$$Z = \int_0^a x \left[h + \frac{4 \cdot f}{l^2} (l \cdot x - x^2) \right] dx + a \cdot \int_a^{0,5l} \left[h + \frac{4 \cdot f}{l^2} \cdot (l \cdot x - x^2) \right] dx$$

$$Z = \int_0^a x \cdot h \cdot dx + \int_0^a \frac{4 \cdot f}{l} \cdot x^2 \cdot dx - \int_0^a \frac{4 \cdot f}{l^2} \cdot x^3 \cdot dx$$

$$+ a \int_a^{0,5l} h \cdot dx + a \cdot \int_a^{0,5l} \frac{4 \cdot f}{l} \cdot x \cdot dx - a \cdot \int_a^{0,5l} \frac{4 \cdot f}{l^2} \cdot x^2 \cdot dx$$

$$Z = h \cdot \frac{a^2}{2} + \frac{4 \cdot f}{l} \cdot \frac{a^3}{3} - \frac{4 \cdot f}{l^2} \cdot \frac{a^4}{4} + a \cdot h \left(\frac{l}{2} - a \right)$$

$$+ \frac{a \cdot 4 \cdot f}{l} \cdot \left(\frac{l^2}{8} - \frac{a^2}{2} \right) - \frac{a \cdot 4 \cdot f}{l^2} \cdot \left(\frac{l^3}{24} - \frac{a^3}{3} \right)$$

$$= \frac{h \cdot a^2}{2} + \frac{4 \cdot f \cdot a^3}{3 \cdot l} - \frac{f \cdot a^4}{l^2} + \frac{a \cdot h \cdot l}{2} - a^2 \cdot h + \frac{a \cdot f \cdot l}{2}$$

$$- \frac{2 \cdot f \cdot a^3}{l} - \frac{f \cdot l \cdot a}{6} + \frac{4 \cdot f \cdot a^4}{3 \cdot l^2}$$

$$Z = -\frac{h \cdot a^2}{2} - \frac{2}{3} \cdot f \cdot \frac{a^3}{l} + \frac{f \cdot a^4}{3 \cdot l^2} + \frac{a \cdot f \cdot l}{3} + \frac{a \cdot h \cdot l}{2}$$

Nach Potenzen des veränderlichen a geordnet

$$Z = a \cdot \left(\frac{f \cdot l}{3} + \frac{h \cdot l}{2} \right) - a^2 \cdot \left(\frac{h}{2} \right) - a^3 \cdot \left(\frac{2 \cdot f}{3 \cdot l} \right) + a^4 \cdot \left(\frac{f}{3 \cdot l^2} \right)$$

Da es darauf ankommt, eine Gleichung zu erhalten, mit welcher man in kurzer Zeit möglichst viele Ordinaten der Einflußlinie berechnen kann, so führen wir noch ein für $a = z \cdot l$

$$Z = z \cdot \left(\frac{f \cdot l^2}{3} + \frac{h \cdot l^2}{2} \right) - z^2 \cdot \left(\frac{h \cdot l^2}{2} \right) - z^3 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot f \cdot l^2 \right) + z^4 \cdot \left(\frac{f \cdot l^2}{3} \right)$$

$$Z = \frac{f \cdot l^2}{3} \cdot (z + z^4 - 2 \cdot z^3) + \frac{h \cdot l^2}{2} (z - z^2)$$

Die vor den Klammern stehenden Ausdrücke sind für einen bestimmten Rahmen konstant, so daß die Einflußordinaten für mehrere Werte von z sehr schnell mit dieser Gleichung berechenbar sind, da ja auch der Nenner (wie stets) konstant bleibt.

So erhalten wir z. B. für den Rahmen Abb. 158

$$N = 2 \cdot \left[\frac{2}{3} \cdot 11,80 \cdot 1,12 \cdot 5,12 + \frac{4}{15} \cdot 11,80 \cdot 1,12^2 \right. \\ \left. + 11,8 \cdot \frac{5,12^2}{2} + \frac{5,12^3}{1,5 \cdot 3} \right] = \text{rd. } 466 \text{ m}^3.$$

$$Z = \frac{1,12 \cdot 11,8^2}{3} (z + z^4 - 2z^3) + \frac{5,12 \cdot 11,80^2}{2} (z - z^2)$$

$$= 52 \cdot (z + z^4 - 2z^3) + 356 \cdot (z - z^2).$$

Für mehrere Werte z erhält man also

z	Z	N	Ordinate $H = \frac{Z}{N}$
0,1	37,10	466	0,0795
0,2	66,65	466	0,1430
0,3	88,10	466	0,189
0,4	104,30	466	0,224
0,5	105,23	466	0,226

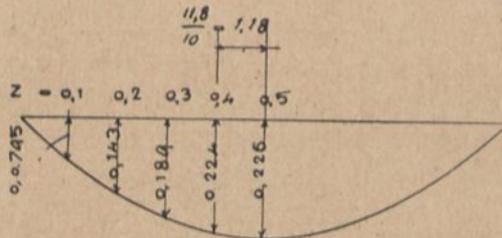


Abb. 160

Damit ergibt sich die in Abb. 160 dargestellte Einflußfläche. Der Flächeninhalt derselben berechnet sich nach der Simpson'schen Regel zu

$$F_h = 2 \cdot \frac{1,18}{3} \cdot \left(1 \cdot 0 + 4 \cdot 0,0795 + 2 \cdot 0,143 + 4 \cdot 0,189 + 2 \cdot 0,224 + 4 \cdot \frac{0,226}{2} \right) = 1,78 \text{ m.}$$

Bei Vollbelastung mit 2 t f. d. laufenden Meter beträgt mithin der Horizontalschub

$$H_p = 1,78 \text{ m} \cdot 2 \text{ t/m} = 3,56 \text{ t.}$$

Die Einflußlinie kann natürlich auch für ganz beliebige Lasten gebraucht werden; also für z. B. $P = 5 \text{ t}$ in $0,3 \text{ l}$ ist $H = 0,189 \cdot 5 = 0,945 \text{ t}$.

Konstruktion der Einflußlinien für Biegemomente.

Für die angegebenen Abmessungen seien nun noch die Einflußlinien für die Biegemomente in den Punkten 0,1, 0,3 und 0,5 l gezeichnet (Abb. 161). (Die Konstruktion vgl. Kapitel XI.)

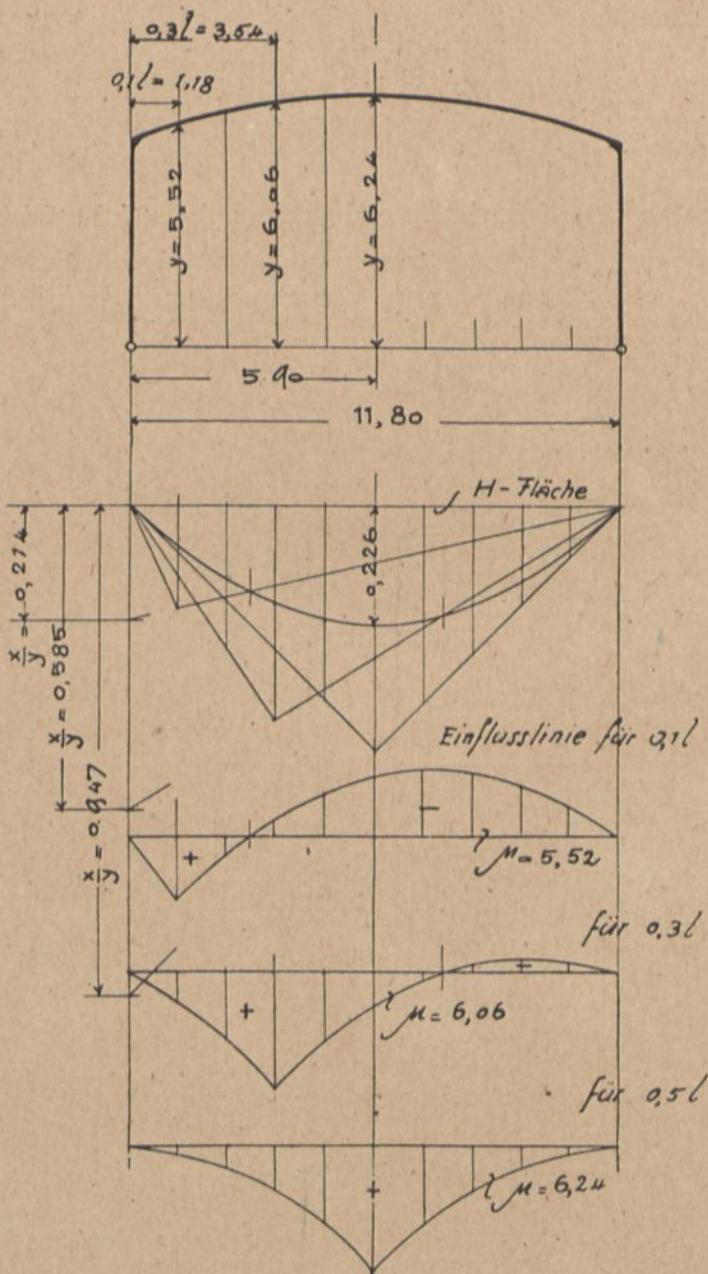


Abb. 161.

Die Zeichnung solcher Einflußlinien dürfte sich bei Dachbindern besonders dann empfehlen, wenn die Belastung durch einzelne Pfetten erfolgt und unter Trennung von Eigengewicht und Nutzlast die größten Momente gesucht werden. Besonderen Wert haben die Einflußlinien, wenn der Rahmen Kragarme besitzt (s. später).

Entwicklung einer Formel aus der allgemeinen Einflußliniengleichung.

Für den Fall einer totalen gleichmäßigen Belastung wird eine einfache Formel zur Bestimmung von H erwünscht sein. Man kann diese in einfacher Weise aus dem oben

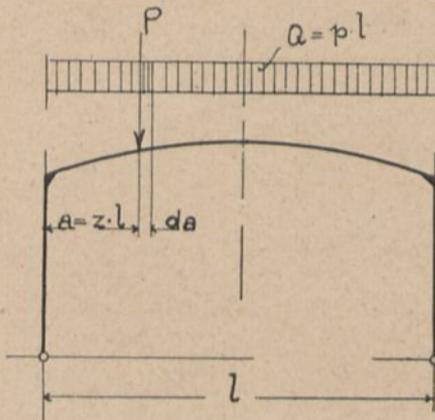


Abb. 162

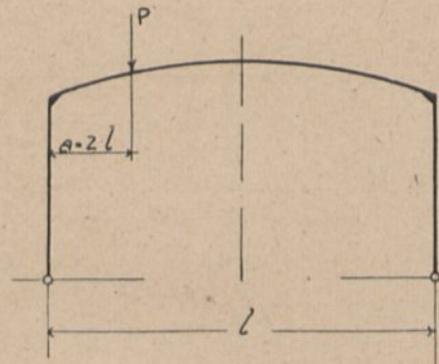


Abb. 163.

angegebenen Zähler gewinnen (der Nenner ist konstant), da dieser die Wirkung einer Last $P = 1$ darstellt.

Wir ersetzen P durch $p \cdot da$ (Abb. 162) und führen für $da = dz \cdot l$ ein, also

$$P = p \cdot dz \cdot l$$

oder

$$P = Q \cdot dz$$

Es ergibt sich nun durch Integration von $z = 0$ bis 1

$$\begin{aligned} Z &= \frac{Q \cdot f \cdot l^2}{3} \cdot \int_0^1 (z + z^4 - 2z^3) dz + \frac{Q \cdot h \cdot l^2}{2} \cdot \int_0^1 (z - z^2) dz \\ Z &= \frac{Q \cdot f \cdot l^2}{3} \cdot \left(\frac{1^2}{2} + \frac{1^5}{5} - 2 \cdot \frac{1^4}{4} \right) + \frac{Q \cdot h \cdot l^2}{2} \cdot \left(\frac{1^2}{2} - \frac{1^3}{3} \right) \\ &= \frac{Q \cdot f \cdot l^2}{3 \cdot 5} + \frac{Q \cdot h \cdot l^2}{2 \cdot 6} = Q \cdot l^2 \left(\frac{f}{15} + \frac{h}{12} \right) \end{aligned}$$

Also

$$H_Q = \frac{Q \cdot l^2 \cdot \left(\frac{f}{15} + \frac{h}{12} \right)}{2 \left[\frac{2}{3} \cdot l \cdot f \cdot h + \frac{4}{15} \cdot l \cdot f^2 + \frac{l \cdot h^2}{2} + \frac{v \cdot h^3}{3} \right]}$$

Mit unserem Nenner 466 und $Q = 2 \cdot 11,8 = 23,6$ t

$$H_Q = \frac{23,6 \cdot 11,80^2 \left(\frac{1,12}{15} + \frac{5,12}{12} \right)}{466} = 3,56 \text{ t.}$$

Das Resultat deckt sich mit dem oben gewonnenen.

Den Einfluß einer Einzellast P an irgendeiner Stelle des Bogens (Abb. 163) erhält man jederzeit, bei Bedarf auch ohne vorherige Konstruktion der Einflußlinie, aus

$$H_P = P \cdot \frac{Z}{N} = \frac{P \cdot \left[\frac{f \cdot l^2}{3} (z + z^4 - 2z^3) + \frac{h \cdot l^2}{2} (z - z^2) \right]}{N}$$

H_Q für Vollast oder für Eigengewicht kann mit H_P je nach Bedarf zusammengesetzt werden.

Ermittlung des Horizontalschubes bei Temperaturänderung.

Wir erhalten einfach

$$H_t = \frac{\varepsilon \cdot E \cdot J_b \cdot (\pm t) \sum s'}{N}$$

Mit $\sum s' = l = 11,80$ und beispielsweise $J_b = 0,008 \text{ m}^4$, das mit dem vollen Rechteckquerschnitt und mit Berücksichtigung der Eiseneinlagen zu berechnen ist, ferner mit $\pm t = 25^\circ \text{ C}$ wird

$$H_t = \frac{0,00001 \cdot 2100000 \cdot 0,008 (\pm 25) \cdot 11,8}{466} = \pm 0,106 \text{ t.}$$

E ist hierbei ebenso wie alle anderen Werte in t/m^2 einzuführen: $210000 \text{ kg/cm}^2 = 210000 \text{ t/m}^2$. Der Einfluß von H_t wäre also hier sehr gering; er ist besonders abhängig von der Größe des Trägheitsmomentes und nimmt bei kleiner werdendem Verhältnis von $\frac{h}{l}$ bedeutend zu, wird also in diesem Sinne für einen reinen Zweigelenkbogen (ohne Stiele) zu einem Größtwert¹⁾.

¹⁾ Vorschriften über die Berücksichtigung der Wärmeschwankungen und des Schwindens in § 15 der Bestimmungen vom 13. Januar 1916.

Einflußliniengleichungen für den bogenförmigen Rahmen mit Kragarmen (Abb. 164).

Allgemein gilt zunächst das im Kapitel XI über den rechteckigen Rahmen mit Kragarmen Gesagte.

Stellen wir das statisch bestimmte Hauptssystem her, und belasten wir zwecks Errechnung von Einflußlinien den so entstehenden Kragbalken wieder mit zwei symmetrischen Lasten 1

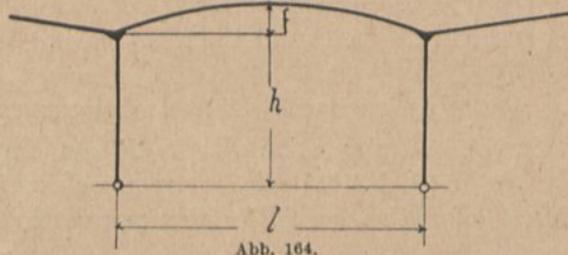


Abb. 164.

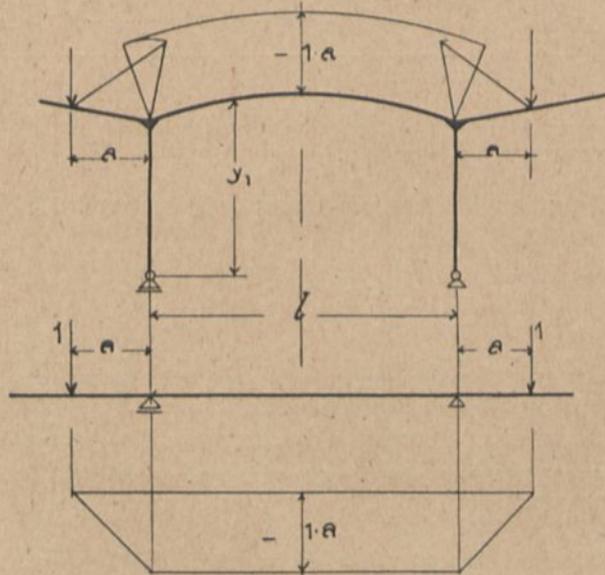


Abb. 165.

(Abb. 165), so erhält der dem Rahmen angehörige Teil dieses einfachen Kragbalkens, nämlich der gebogene Riegel, das gleichmäßige Moment $M_0 = -1 \cdot a = -a$.

Also $Z = \int M_0 \cdot y_1 \cdot ds \cdot v$; mit $ds = dx$ und $v = 1$ (vgl. obige Annahme, daß $J_m = J_r$) wird bei Division durch 2

$$Z = -\frac{a}{2} \cdot \int_a^l y_1 \cdot dx.$$

Das Integral bedeutet den Inhalt der vom Rahmen umschlossenen Fläche, also ist nach Abb. 166

$$Z = -\frac{a}{2} \cdot \left(h \cdot l + \frac{2}{3} \cdot l \cdot f \right)$$

und

$$H = \frac{Z}{N} = \frac{-a \cdot \left(h \cdot l + \frac{2}{3} \cdot l \cdot f \right) \cdot \frac{1}{2}}{2 \left[\frac{2}{3} \cdot l \cdot f \cdot h + \frac{4}{15} \cdot l \cdot f^2 + \frac{l \cdot h^2}{2} + \frac{v \cdot h^3}{3} \right]}$$

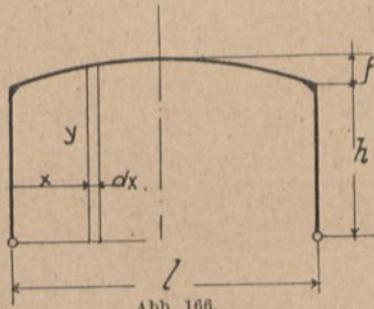


Abb. 166.

Diese Gleichung gestattet in sehr einfacher Weise die Konstruktion der Einflußlinie für die Kragarme. Sie stellt wieder, wie beim einfachen rechteckigen Rahmen, bezüglich des veränderlichen a eine gerade Linie dar, die als tangentielle Verlängerung der mittleren Einflußlinie über die Auflager hinaus anzusehen ist.

Zum Beweise leiten wir den Zähler für H (Mittelteil) in der Form

$$Z = a \left(\frac{fl}{3} + \frac{hl}{2} \right) - a^2 \left(\frac{h}{2} \right) - a^3 \left(\frac{2f}{3l} \right) + a^4 \left(\frac{f}{3l^2} \right)$$

nach a ab (da wir uns um den für beide H gleichen Nenner nicht zu kümmern brauchen) und erhalten allgemein

$$\frac{dZ}{da} = \frac{f \cdot l}{3} + \frac{h \cdot l}{2} - a \cdot h - a^2 \cdot \frac{2 \cdot f}{l} + \frac{4 \cdot a^3 \cdot f}{3 \cdot l^2}$$

im Speziellen für $a = 0$ (im Auflagerpunkt)

$$\frac{dZ}{da} = \frac{f \cdot l}{3} + \frac{h \cdot l}{2} = \operatorname{tg} \varphi \text{ (Abb. 167).}$$

$\operatorname{tg} \varphi$ ist aber weiter nichts als der zu a gehörige Koeffizient des Zählers für das H der Kragarme; nämlich

$$-a \left(h \cdot l + \frac{2}{3} \cdot l \cdot f \right) \cdot \frac{1}{2} = -a \cdot \left(\frac{h \cdot l}{2} + \frac{f \cdot l}{3} \right) = -a \cdot \operatorname{tg} \varphi.$$

Wir können also ganz allgemein schreiben: Die Einflußordinaten für die Kragarme berechnen sich nach der Gleichung

$$H = -\frac{a \cdot \operatorname{tg} \varphi \text{ für } a=0}{N}$$

Da die Einflußlinien, wie wir gesehen haben, gerade Linien sind, so brauchen wir nur noch einen Punkt derselben im beliebigen Abstände a zu berechnen und wählen dazu praktischerweise auf

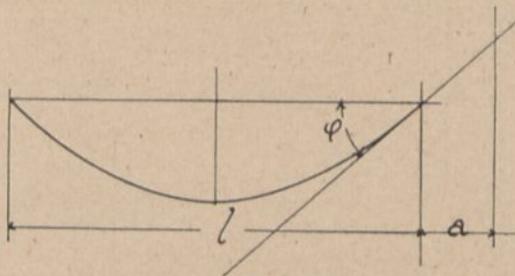


Abb. 167.

jeder Seite den größten Abstand a (ohne von der Gleichung mit $\operatorname{tg} \varphi$ Gebrauch zu machen) mit Benutzung der ersten Gleichung

$$H = -\frac{a \cdot \left(h l + \frac{2}{3} l f \right) \cdot \frac{1}{2}}{N}$$

Beispiel: Der oben schon behandelte Rahmen besitze links einen Kragarm von 3,50 m Länge, rechts einen solchen von 5,50 m Länge. Wie die Einflußlinie für den zwischen den Stielen liegenden Teil zu finden ist, wurde oben dargelegt. Die Einflußordinate für das Ende des rechten Kragarmes berechnet sich zu

$$H = -\frac{5,5 \cdot \left(5,12 \cdot 11,80 + \frac{2}{3} 11,8 \cdot 1,12 \right) \cdot \frac{1}{2}}{466} = -\frac{5,5 \cdot \frac{69,3}{2}}{466} = -0,408,$$

also für das Ende des linken Kragarmes

$$H = -0,408 \cdot \frac{3,5}{5,5} = -0,26.$$

Damit ist in Abb. 168 die vollständige Einflußlinie aufgetragen. Mit Hilfe derselben können die Einflußlinien für die Biegemomente in beliebigen Punkten K des bogenförmigen Rahmenteiltes konstruiert werden, was in Abb. 168 für die Punkte 0,1, 0,3 und 0,5 l durchgeführt ist.

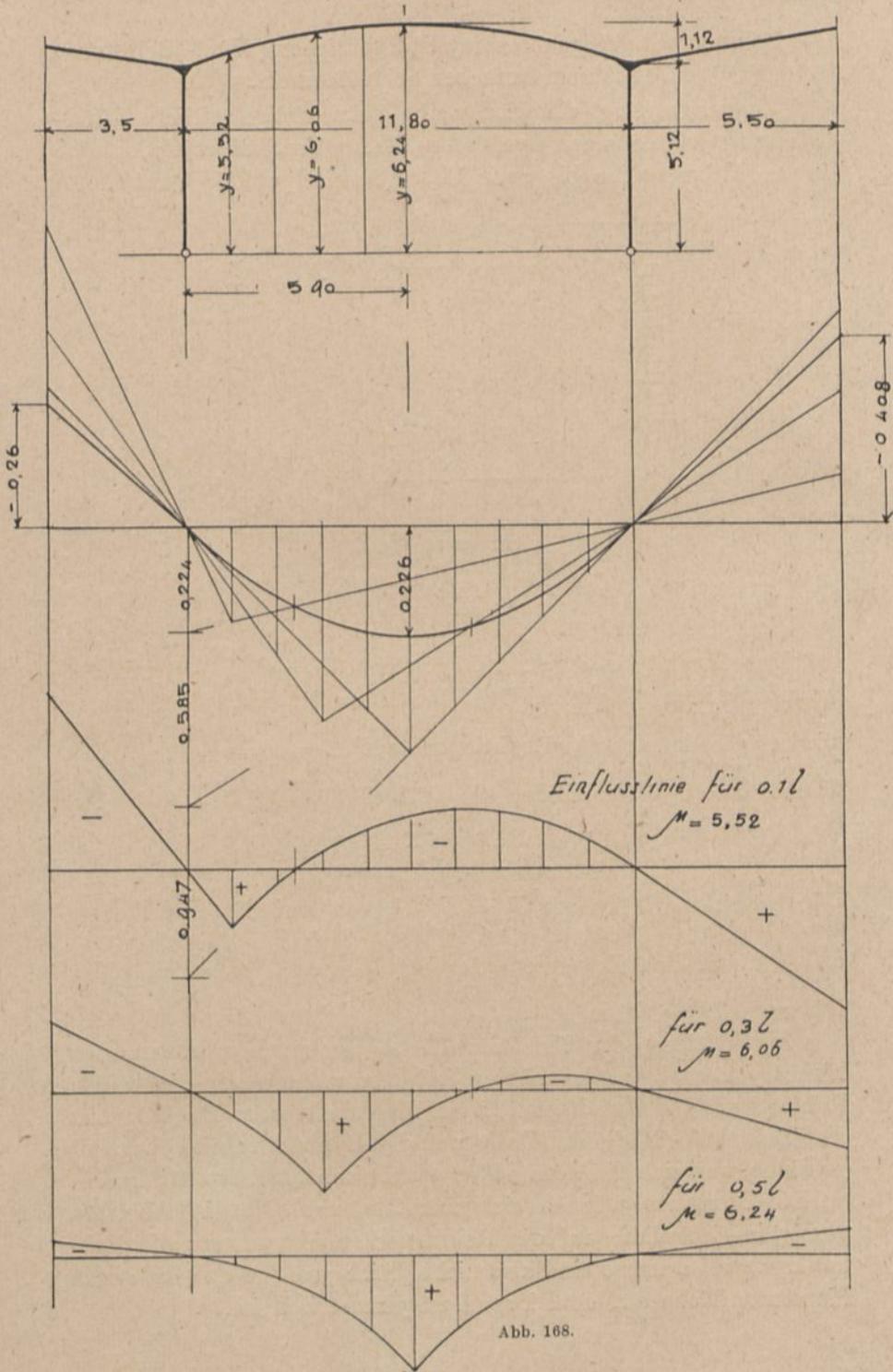


Abb. 168.

**Der Rahmen mit gebogenem Riegel bei seitlicher (Wind-)Belastung,
Bildung einfacher Schlußformeln.**

Zugrunde gelegt sei wieder eine gleichmäßige seitliche Windbelastung w auf einen laufenden Meter Vertikalprojektion der linken Rahmenseite bis zum First (Scheitelpunkt). (Abb. 169.)

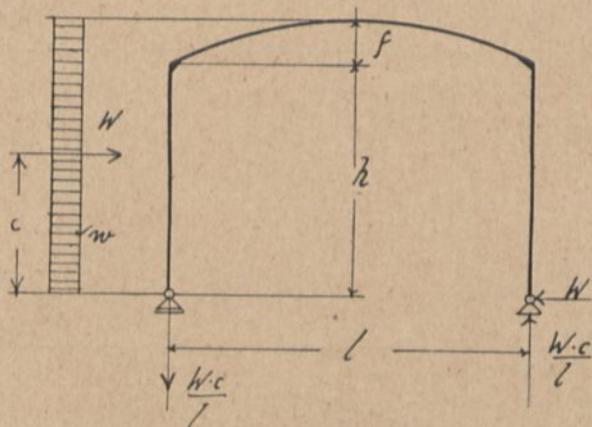


Abb. 169.

Der Gesamtwinddruck beträgt dann $W = w(h + f)$ mit der entsprechenden Gegenreaktion bei $B = W$; außerdem treten wieder die lotrechten Reaktionen auf $A = B = \pm \frac{W \cdot c}{l}$. Mit Zahlen $w = 0,75$ t/m Höhe, $W = 0,75(5,12 + 1,12) = 4,68$ t

$$A = B = \pm \frac{4,68 \cdot 3,12}{11,8} = \pm 1,24 \text{ t.}$$

Wir behalten wie früher $J_b = \frac{1}{1,5} \cdot J_s$, so daß für die Pfosten $v = \frac{1}{1,5}$, für den Bogen $v = 1$. Der Nenner ergab sich schon früher zu $N = 466 \text{ m}^3$.

Zur Bildung der Momentenfläche des statisch bestimmten Hauptsystems bzw. des Zählergliedes betrachten wir die beiden Rahmenteile links und rechts vom Firstpunkt oder Höchstpunkt des Rahmens (in diesem Falle auf der Symmetrieachse liegend) getrennt, weil sich die Momente so am einfachsten aufstellen lassen.

Die Momente würden sich ungefähr nach der in Abb. 170 gezeigten Schaulinie auf die Rahmenachse übertragen; die Eckmomente bei d und b sind also nicht gleich groß, so daß die ganze Momentenfläche auf dem Bogen unsymmetrisch ist.

Die beiden Stiele bereiten bei der Bildung des Zählergliedes keine Schwierigkeiten.

Für den Bogen müssen wir aber erst ein Polygon substituieren und dann Teil *b c* mit den linken Kräften, Teil *c d* mit den rechten Kräften untersuchen.

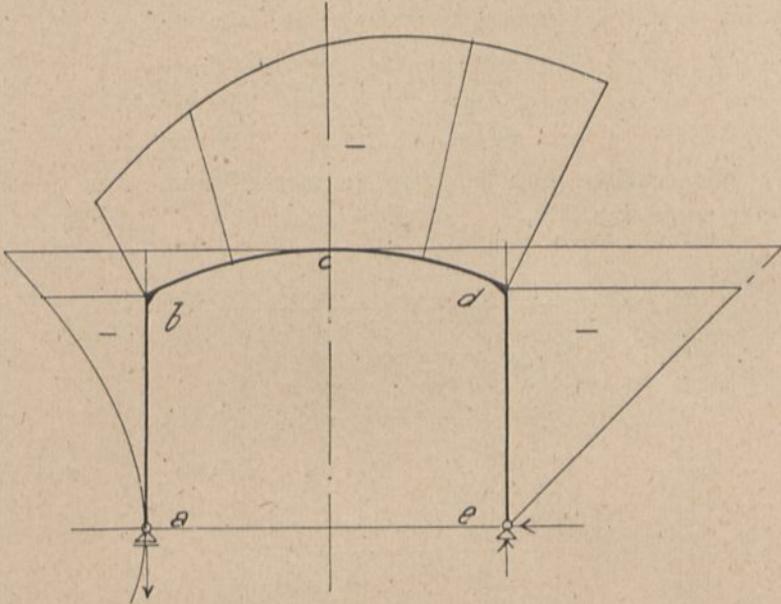


Abb. 170.

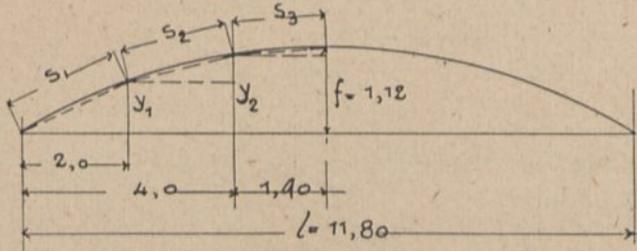


Abb. 171.

Wir teilen die halbe Spannweite in eine Anzahl (ev. gleich langer) Stücke und berechnen die zugehörigen Ordinaten. Es ergeben sich nach Abb. 171 allgemein

$$y = \frac{4f}{l^2} (l \cdot x - x^2)$$

mit

$$\frac{4f}{l^2} = \frac{4 \cdot 1,12}{11,80^2} = \text{rd. } 0,032$$

$$y_1 = 0,032 (11,8 \cdot 2,0 - 2,0^2) = 0,637$$

$$y_2 = 0,032 (11,8 \cdot 4,0 - 4,0^2) = 0,998.$$

Damit wird die Länge der einzelnen Teilstücke

$$s_1 = \sqrt{2,0^2 + 0,637^2} = \text{rd. } 2,10 \text{ m}$$

$$s_2 = \sqrt{2,0^2 + 0,361^2} = \text{rd. } 2,04 \text{ m}$$

$$s_3 = \sqrt{1,9^2 + 0,122^2} = 1,905 \text{ m}$$

Wir erhalten nun für den Rahmenteil links vom Scheitelpunkt nach Abb. 172,

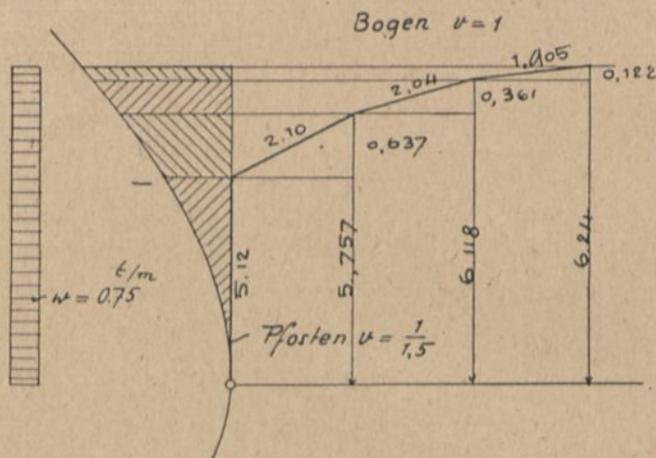


Abb. 172.

1. Infolge w mit Gebrauch der auf Seite 128 entwickelten Formel:

$$\frac{1}{1} \cdot \frac{0,75}{8} \cdot 5,12^4 \cdot \frac{1}{1,5} = 43,-$$

$$\frac{2,1}{0,637} \cdot \frac{0,75}{8} \cdot (5,757^4 - 5,12^4) = 128,-$$

$$\frac{2,04}{0,361} \cdot \frac{0,75}{8} \cdot (6,118^4 - 5,757^4) = \text{rd. } 159,-$$

$$\frac{1,905}{0,122} \cdot \frac{0,75}{8} \cdot (6,24^4 - 6,118^4) = \text{rd. } 169,-$$

$$\text{zusammen} = -499 \text{ tm}^3.$$

2. Infolge $A \downarrow = -1,24$. Eine einfache Lösung (außer der sonst möglichen durch Zerlegung in Rechtecke und Dreiecke) ergibt sich nach Abb. 173 wie folgt:

Mit $M_0 = A \cdot x$ ist $\int M_0 \cdot y \cdot ds \cdot v$ für $v = 1$ und $ds = \frac{s_1}{s} \cdot dx$

$$\int M_0 \cdot y \cdot ds = A \cdot \frac{s_1}{s} \cdot \int x \cdot y_1 dx.$$

Das Integral stellt offenbar, für jedes Teilstück gedeutet, das statische Moment der unter demselben liegenden Fläche

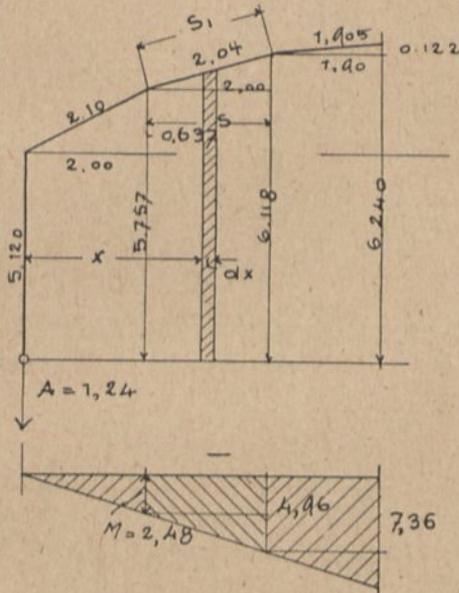


Abb. 173.

bezogen auf die Wirkungsgerade von A dar. So erhalten wir für Einfluß A

$$\begin{aligned} \int M_0 \cdot y \cdot ds &= -1,24 \cdot \left[\frac{2,10}{2,0} \cdot \left(5,12 \cdot 2,0 \cdot 1,0 + \frac{2,0 \cdot 0,637}{2} \cdot 1,33 \right) \right. \\ &\quad + \frac{2,04}{2,0} \cdot \left(5,757 \cdot 2,0 \cdot 3,0 + \frac{2,0 \cdot 0,361}{2} \cdot 3,33 \right) \\ &\quad \left. + \frac{1,905}{1,90} \cdot \left(6,118 \cdot 1,90 \cdot 4,95 + \frac{1,90 \cdot 0,122}{2} \cdot 5,27 \right) \right] \\ &= -1,24 \cdot [11,65 + 35,9 + 58,21] \\ &= -1,24 \cdot 105,66 = -\text{rd. } 131 \text{ tm}^3. \end{aligned}$$

Noch eine andere Lösung mit direkter Schlußformel ergibt sich bei flachen Parabelbögen mit $ds = dx$ ohne Zerlegung des Riegels für $v = 1$ wie folgt:

$$\begin{aligned} \int M_0 y ds \cdot v &= \int_0^{\frac{l}{2}} (-A) \cdot x(h + y) dx \\ &= -A \int_0^{\frac{l}{2}} x \left(h + \frac{4fx}{l} - \frac{4fx^2}{l^2} \right) dx \\ &= -A \left[\frac{hl^2}{8} + \frac{fl^2}{6} - \frac{fl^2}{16} \right] \\ \int M_0 y ds \cdot v &= -\frac{Al^2}{8} \left[h + \frac{5}{6}f \right]. \end{aligned}$$

In unserem Falle ist danach

$$Z = -\frac{1,24 \cdot 11,80^2}{8} \left(5,12 + \frac{5}{6} \cdot 1,12 \right) = -131 \text{ tm}^3.$$

Für den Rahmenteil rechts vom Scheitelpunkt erhalten wir:

1. Infolge $B \downarrow = 1,24$ offenbar wie vor, nur mit umgekehrtem Vorzeichen, also

$$\int M_0 \cdot y \cdot ds = +131 \text{ tm}^3,$$

so daß sich für diesen Fall (bei der vorhandenen Symmetrie) die Einflüsse der beiden lotrechten Reaktionen gegenseitig aufheben (aber nicht bei der Zeichnung der Momentenfläche).

2. Infolge $W = 4,68 \text{ t}$ ergibt sich allgemein nach Abb. 174

$$M_0 \cdot y_1 \cdot ds \cdot v \text{ mit } M_0 = W \cdot y_1 \text{ und } ds = dy_1 \cdot \frac{s_1}{s'_1}$$

$$\int M_0 \cdot y_1 \cdot ds \cdot v = W \cdot v \cdot \frac{s_1}{s'_1} \cdot \int y_1^2 \cdot dy_1.$$

Das Integral ist für jedes Stabstück leicht zu deuten.

Wir erhalten mit Zahlen

$$\begin{aligned} \int M_0 \cdot y_1 \cdot ds \cdot v &= -4,68 \cdot \left[\frac{1}{1,5} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{5,12^3}{3} + 1 \cdot \frac{2,10}{0,637} \cdot \left(\frac{5,757^3}{3} - \frac{5,12^3}{3} \right) \right. \\ &\quad \left. + 1 \cdot \frac{2,04}{0,361} \cdot \left(\frac{6,12^3}{3} - \frac{5,757^3}{3} \right) + 1 \cdot \frac{1,905}{0,122} \cdot \left(\frac{6,24^3}{3} - \frac{6,12^3}{3} \right) \right] \\ &= -4,68 [29,8 + 62,8 + 71,4 + 73] = -4,68 \cdot 237 = -1110 \text{ tm}^3. \end{aligned}$$

Auch für diesen Fall kann man zu einer **Schlubformel** gelangen ohne Zerlegung des Riegels, wenn ein flacher parabolischer Bogen vorliegt.

Es wird

$$Z = \int M_0 y_1 ds v \text{ mit } M_0 = W \cdot y_1 = W(h + y) \text{ und } ds = dx \text{ für } v = 1$$

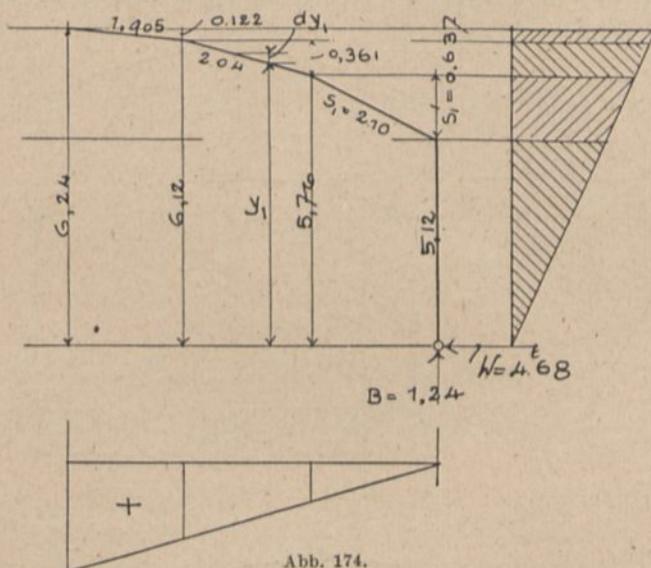


Abb. 174.

für den Riegel

$$\begin{aligned} Z &= W \int_0^{\frac{l}{2}} (h + y)^2 dx = W \left[h^2 \int_0^{\frac{l}{2}} dx + 2h \int_0^{\frac{l}{2}} y dx + \int_0^{\frac{l}{2}} y^2 dx \right] \\ &= W \left[h^2 \cdot \frac{l}{2} + \frac{2}{3} h f l + \frac{4}{15} f^2 \cdot l \right] \end{aligned}$$

für den Stiel

$$Z = W \cdot \frac{v \cdot h^3}{3};$$

also insgesamt

$$\int M_0 y_1 ds \cdot v = -W \left[\frac{h^2 l}{2} + \frac{2}{3} h f l + \frac{4}{15} l f^2 + \frac{v h^3}{3} \right];$$

also hier

$$\begin{aligned} &= -4,68 \left[\frac{5,12^2 \cdot 11,80}{2} + \frac{2}{3} 5,12 \cdot 1,12 \cdot 11,80 + \right. \\ &\quad \left. \frac{4}{15} \cdot 11,80 \cdot 1,12^2 + \frac{1}{1,5} \cdot \frac{5,12^3}{3} \right] \\ &= \text{rd. } -1092 \text{ tm}^3. \end{aligned}$$

NB.: Es sei bemerkt, daß den beiden hier gegebenen Schlußformeln eine gewisse Unkorrektheit insofern anhaftet, als für ds zur Vereinfachung dx gesetzt wurde. Der Fehler ist jedoch unbedeutend, wie das Beispiel zeigt; man könnte die Resultate korrigieren durch Multiplikation mit dem Verhältnis von abgewickelter Bogenlänge zur Projektion derselben.

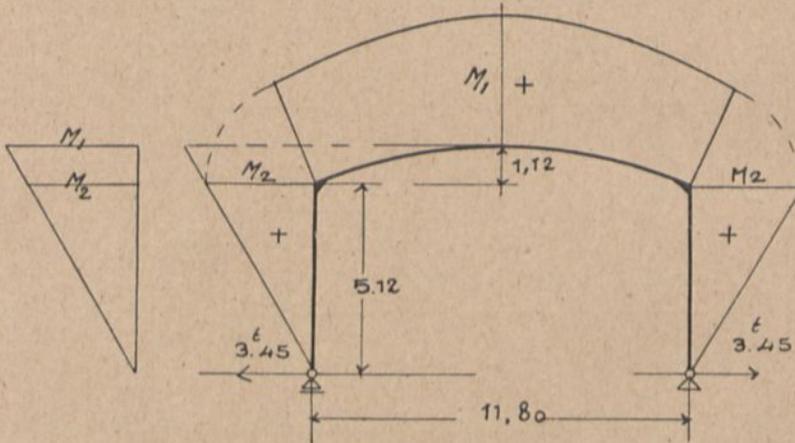


Abb. 175.

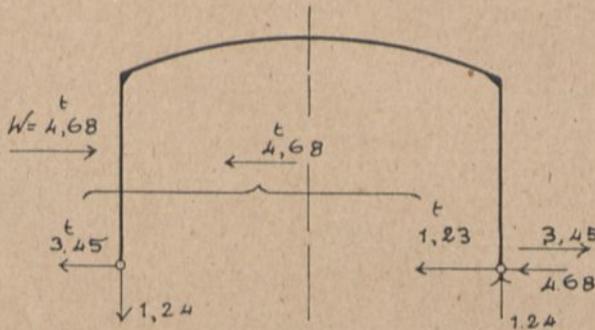


Abb. 176.

Der Zähler beträgt somit insgesamt

$$Z = -499 - 131 + 131 - 1110 = -1609 \text{ tm}^3 \quad \text{und}$$

$$H_w = \frac{Z}{N} = -\frac{1609}{466} = -3,45 \text{ t.}$$

Interessant ist, daß wir bei der Bildung des Zählergliedes für symmetrische Rahmen den Einfluß der beiden entgegengesetzten lotrechten Reaktionen nicht zu berücksichtigen brauchen, wenn wir die verschiedenen Einflüsse für jede

Symmetriehälfte gesondert berechnen. Dadurch entsteht eine wesentliche Abkürzung der Arbeit, von der man in den meisten Fällen Gebrauch machen können wird, da die meisten Rahmen symmetrisch sind.

Mit H_w ergibt sich die in Abb. 175 dargestellte Momentenfläche, welche zu der M_0 -Fläche, die mit Hilfe der Berechnung der Momente an einzelnen Punkten schnell aufgezeichnet werden kann, algebraisch zu addieren ist.

Die endgültigen Reaktionen zeigt Abb. 176, so daß das Lager vor dem Winde den größten Druck erhält.

Hat der Rahmen noch Kragarme, so behandle man ihn genau ebenso wie hier angegeben; die Kragarme ändern ja grundsätzlich nichts an der Lösung.

Kapitel XIII.

Der eigentliche Zweigelenbogen (Abb. 177).¹⁾

Die Ermittlung des Horizontalschubes mit Hilfe der gedeuteten Integrale.

Hierfür behalten die für den Bogen mit Stielen angegebenen Andeutungen volle Geltung. Die Zerlegung des Bogens in einzelne Stücke bietet dabei Gelegenheit, einen etwaigen Wechsel

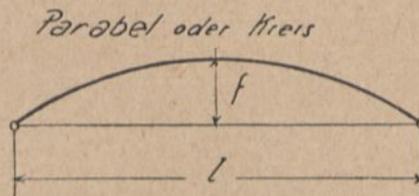


Abb. 177.

im Trägheitsmoment bequem zu berücksichtigen. Auch die Berechnung der Einflußlinie für den Horizontalschub mit Berücksichtigung eines nach den Auflagern hin zunehmenden Trägheitsmomentes kann in derselben Weise wie beim Bogen mit Stielen erfolgen.

Man pflegt indessen meist ein konstantes Trägheitsmoment anzunehmen, und da empfiehlt sich für alle Fälle der Belastung (ob ruhend oder beweglich) das nachfolgende sehr

¹⁾ Ein Beispiel aus der Praxis für die Verwendung des Zweigelenbogens als Brückenhauptträger bringt Monatsschrift *Armiertes Beton* 1915, Juniheft; dem Aufsatz sind auch die Armierungspläne beigelegt.

einfache Verfahren für die Gewinnung einzelner Einflußordinaten oder der ganzen Einflußlinie selbst.

Auf die Berücksichtigung der Normalkräfte, welche beim flachen Zweigelenkbogen einige Bedeutung haben, werde an dieser Stelle noch verzichtet (vgl. später Bogendächer).

Ableitung der Einflußliniengleichungen.

Wir können die grundlegenden Formeln in einfacher Weise aus denen für den Bogen mit Stielen herleiten, indem wir $h = 0$ setzen (Abb. 178).

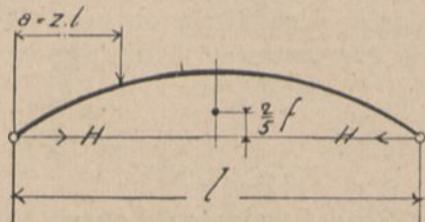


Abb. 178.

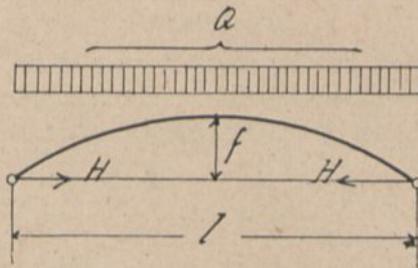


Abb. 179.

So wird der Nenner (vgl. S. 149)

$$N = \int_0^l y^2 \cdot ds \cdot v \quad (\text{mit } v = 1) = 2 \cdot \left[\frac{2}{3} \cdot l \cdot f \cdot \frac{2}{5} \cdot f \right]$$

$$N = \frac{8}{15} \cdot l \cdot f^2,$$

der Zähler (vgl. S. 151)

$$Z = \frac{f \cdot l^2}{3} (z + z^4 - 2z^3).$$

Also

$$H = \frac{\frac{f l^2}{3} \cdot (z + z^4 - 2z^3)}{\frac{8}{15} \cdot l \cdot f^2}.$$

Bei voller Belastung mit Q (Abb. 179) wird

$$Z = \frac{Q \cdot f \cdot l^2}{3 \cdot 5}; \quad \text{also}$$

$$H = \frac{Q \cdot f \cdot l^2}{15} \cdot \frac{15}{8 \cdot l \cdot f^2} = \frac{Q \cdot l}{8 \cdot f}.$$

Hat der Zweigelenbogen Kragarme, so gehe man nach S. 156 u. f. vor.

Kapitel XIV.

Der Zweigelenkrahmen mit Zuggurt und gebogenem oder gebrochenem Riegel.¹⁾

Zweigelenkrahmen mit Vertikalpfosten erhalten öfter noch eine besondere Verankerung des Riegels, namentlich wenn dieser bogenförmig ausgebildet ist. Der Anschluß der dazu erforderlichen

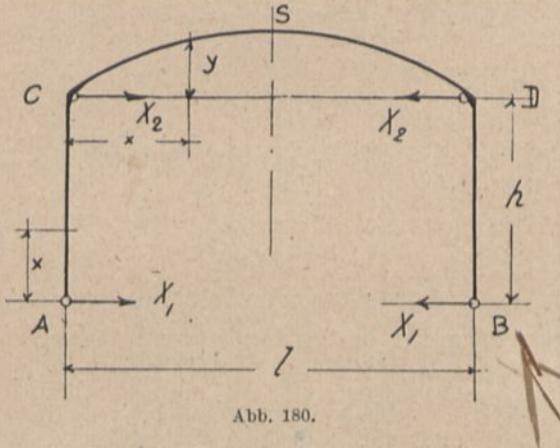


Abb. 180.

Zugstangen an die Pfosten kann in jedem Falle als gelenkig vorausgesetzt werden, gleich ob die Anker freiliegen oder einbetoniert sind. Ein solches System mit beliebig geformtem Riegel (Abb. 180) erhält durch die Zugstange noch eine innerliche statische Unbestimmtheit hinzu, so daß es zweifach statisch unbestimmt ist.

Werden die Auflager als unverschieblich angenommen, während die Punkte C und D entsprechend der elastischen Verlängerung der Zugstange vom Querschnitt F_0 und Elastizitätsmodul E_0 (für Eisen) um das Maß

$$\Delta l = \frac{X_2 \cdot l}{E_0 \cdot F_0}$$

¹⁾ Vgl. Handbuch für Eisenbetonbau. I. Aufl. Band IV, Teil I, S. 503.

ausweichen, so gelten bei Mitberücksichtigung der Normalkräfte folgende beiden Arbeitsgleichungen:

$$L' = \int \frac{M \cdot M' \cdot ds}{E \cdot J} + \int \frac{N \cdot N' \cdot ds}{E \cdot F} = 0$$

$$L'' = \int \frac{M \cdot M'' \cdot ds}{E \cdot J} + \int \frac{N \cdot N'' \cdot ds}{E \cdot F} = -\frac{X_2 \cdot l}{E_0 \cdot F_0}$$

Bei lotrechter Belastung beträgt das wahre Biegemoment in den Säulen $M = -X_1 \cdot x$

$$M' = -x$$

$$M'' = 0, \text{ d. h. } X_2 \text{ beeinflusst die Stiele nicht,}$$

in dem Riegel $M = M_0 - X_1(h + y) - X_2 \cdot y$

$$M' = -(h + y)$$

$$M'' = -y;$$

die wahre Längskraft

in den Säulen $N = -A$

$$N' = 0$$

$$N'' = 0,$$

in dem Riegel $N = -(X_1 + X_2)$ (angenähert)

$$N' = -1$$

$$N'' = -1.$$

Aufstellung der Integrale.

Wir betrachten am besten Säulen und Riegel getrennt und stellen die Einflüsse von L' und L'' auf dieselben einzeln fest.

I. Die Säulen.

Mit den oben angegebenen Werten ergibt sich

$$L' = \int_0^h \frac{(-X_1 \cdot x) \cdot (-x) \cdot dx}{E \cdot J_s} + \int \frac{(-A) \cdot 0 \cdot dx}{E \cdot F} = 0$$

Das erste Integral wäre zu nehmen für die beiden Pfosten AC und BD in den Grenzen von 0 bis h und ergibt, da beide gleich,

$$L' = +2 \cdot \frac{X_1 \cdot h^3}{3 E \cdot J_s} = 0.$$

Das zweite Integral ergibt Null. Ebenso ergibt für die Pfosten

$$L'' = 0,$$

da X_2 die Stiele im fertigen System nicht mehr beeinflussen kann (s. o.).

II. Der Riegel.

Mit den oben ermittelten einzelnen Werten wird

$$L' = \int \frac{[M_0 - X_1 \cdot (h + y) - X_2 \cdot y] \cdot [-(h + y)] \cdot ds}{E \cdot J}$$

$$+ \int \frac{-(X_1 + X_2) \cdot (-1) \cdot ds}{E \cdot F} = 0$$

$$L'' = \int \frac{[M_0 - X_1 \cdot (h + y) - X_2 \cdot y] \cdot (-y) \cdot ds}{E \cdot J}$$

$$+ \int \frac{-(X_1 + X_2) \cdot (-1) \cdot ds}{E \cdot F} = -\frac{X_2 \cdot l}{E_0 \cdot F_0}$$

Diese beiden Gleichungen mögen zunächst weiter aufgelöst werden

Wir erhalten

$$L' = -\int \frac{M_0 \cdot (h + y) \cdot ds}{E \cdot J} + X_1 \cdot \int \frac{(h + y)^2 \cdot ds}{E \cdot J}$$

$$+ X_2 \cdot \int \frac{(h + y) \cdot y \cdot ds}{E \cdot J} + X_1 \cdot \int \frac{ds}{E \cdot F} + X_2 \cdot \int \frac{ds}{E \cdot F} = 0.$$

$$L'' = -\int \frac{M_0 \cdot y \cdot ds}{E \cdot J} + X_1 \cdot \int \frac{(h + y) \cdot y \cdot ds}{E \cdot J} + X_2 \cdot \int \frac{y^2 \cdot ds}{E \cdot J}$$

$$+ X_1 \cdot \int \frac{ds}{E \cdot F} + X_2 \cdot \int \frac{ds}{E \cdot F} = -\frac{X_2 \cdot l}{E_0 \cdot F_0}$$

Deutung der Integrale.

Die noch zu deutenden Integrale beziehen sich also sämtlich auf den Bogen bzw den Riegel. Wir nehmen zur Vereinfachung an, daß außer E auch F und J konstant sind, können also diese Ausdrücke vor die Integralzeichen rücken und erhalten mit der weiteren Vereinfachung $ds = dx$

$$\int_0^l \frac{(h + y)^2 \cdot dx}{E \cdot J} = \frac{h^2 \cdot l}{E \cdot J} + \frac{2 \cdot h}{E \cdot J} \cdot \int_0^l y \cdot dx + \frac{1}{E \cdot J} \cdot \int_0^l y^2 \cdot dx.$$

$\int_0^l y \cdot dx$ bedeutet den Inhalt der Fläche $CSD = \mathfrak{Y}$ (Abb 180a).

$\int_0^l y^2 \cdot dx$ bedeutet 2mal das statische Moment der Fläche CSD in

bezug auf $CD = 2 \cdot \mathcal{E}$; also

$$\int_0^l \frac{(h+y)^2 \cdot dx}{E \cdot J} = \frac{1}{E \cdot J} \cdot (h^2 \cdot l + 2 \cdot h \cdot \mathfrak{F} + 2 \cdot \mathcal{E}).$$

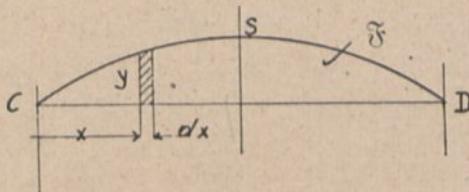


Abb. 180 a.

Ebenso einfach ergibt sich

$$\int_0^l \frac{(h+y) \cdot y \cdot dx}{E \cdot J} = \frac{1}{E \cdot J} \cdot (h \cdot \mathfrak{F} + 2 \cdot \mathcal{E})$$

$$\int_0^l \frac{ds}{E \cdot F} = \frac{l}{E \cdot F}$$

$$\int_0^l \frac{M_0 \cdot (h+y) \cdot dx}{E \cdot J} = \frac{1}{E \cdot J} \cdot \left[h \cdot \int_0^l M_0 \cdot dx + \int_0^l M_0 \cdot y \cdot dx \right].$$

Zusammenstellung der beiden Bestimmungsgleichungen
für X_1 und X_2 .

$$L' = \frac{2 \cdot X_1 \cdot h^3}{3 E \cdot J_s} - \frac{1}{E \cdot J} \left[h \cdot \int_0^l M_0 \cdot dx + \int_0^l M_0 \cdot y \cdot dx \right] + \frac{X_1}{E \cdot J} \cdot (h^2 \cdot l + 2 \cdot h \cdot \mathfrak{F} + 2 \cdot \mathcal{E}) + \frac{X_2}{E \cdot J} (h \cdot \mathfrak{F} + 2 \cdot \mathcal{E}) + \frac{X_1 \cdot l}{E \cdot F} + \frac{X_2 \cdot l}{E \cdot F} = 0$$

$$L'' = -\frac{1}{E \cdot J} \int_0^l M_0 \cdot y \cdot dx + \frac{X_1}{E \cdot J} \cdot (h \cdot \mathfrak{F} + 2 \cdot \mathcal{E}) + \frac{X_2}{E \cdot J} \cdot 2 \cdot \mathcal{E} + \frac{X_1 \cdot l}{E \cdot F} + \frac{X_2 \cdot l}{E \cdot F} = -\frac{X_2 \cdot l}{E_0 \cdot F_0}.$$

Multipliziert man diese Gleichungen mit $E \cdot J_s$ und ordnet die Glieder, so erhält man

$$L' = X_1 \cdot \left[\frac{2h^3}{3} + \frac{J_s}{J} (h^2 \cdot l + 2 \cdot h \cdot \mathfrak{F} + 2 \cdot \mathcal{E}) + \frac{l \cdot J_s}{F} \right]$$

$$\begin{aligned}
& + X_2 \cdot \left[\frac{J_s}{J} (h \cdot \mathfrak{F} + 2 \cdot \mathfrak{S}) + l \cdot \frac{J_s}{F} \right] \\
& - \frac{J_s}{J} \cdot \left[h \cdot \int_0^l M_0 \cdot dx + \int_0^l M_0 \cdot y \cdot dx \right] = 0. \\
L'' & = X_1 \cdot \left[\frac{J_s}{J} (h \cdot \mathfrak{F} + 2 \cdot \mathfrak{S}) + \frac{J_s}{F} \cdot l \right] \\
& + X_2 \cdot \left[\frac{J_s}{J} \cdot 2 \cdot \mathfrak{S} + \frac{J_s}{F} \cdot l + \frac{l \cdot E \cdot J_s}{E_0 \cdot F_0} \right] \\
& - \frac{J_s}{J} \int M_0 \cdot y \cdot dx = 0.
\end{aligned}$$

Diese Bestimmungsgleichungen lassen sich höchstens noch für einen bestimmten Fall der Rahmenform weiter vereinfachen. Alle Glieder, ausgenommen die mit M_0 , sind Formgrößen, also unabhängig von der Belastung. Für eine bestimmte Belastung des Riegels oder zur Bildung von Einflußlinien lassen sich die noch enthaltenen Integrale sehr leicht nach den früheren Verfahren auflösen.

Sämtliche Bezeichnungen außer h und J_s beziehen sich auf den Riegel (E_0 und F_0 auf die Zugstange).

Schlußformeln für parabolisch gebogenen Riegel.

Für einen Rahmen mit parabolischem (oder flachem kreisförmigen) Riegel lassen sich die beiden Bestimmungsgleichungen für eine Einzellast P (für Einflußlinien $P = 1$) im Abstände $a = z \cdot l$ (Abb 180b) noch wie folgt deuten.

Mit $\frac{J_s}{J} = v$ wird

$$\begin{aligned}
L' = 0 & = X_1 \cdot \left[\frac{2 \cdot h^3}{3} + v \left(h^2 \cdot l + \frac{4}{3} \cdot h \cdot l \cdot f + \frac{8}{15} \cdot l \cdot f^2 \right) + l \cdot \frac{J_s}{F} \right] \\
& + X_2 \cdot \left[v \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot h \cdot l \cdot f + \frac{8}{15} \cdot l \cdot f^2 \right) + l \cdot \frac{J_s}{F} \right] \\
& - v \cdot P \cdot \left[f \cdot \frac{l^2}{3} (z + z^4 - 2 \cdot z^3) + \frac{h \cdot l^2}{2} \cdot (z - z^3) \right] \\
L'' = 0 & = X_1 \cdot \left[v \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot h \cdot l \cdot f + \frac{8}{15} \cdot l \cdot f^2 \right) + \frac{J_s}{F} \cdot l \right] \\
& + X_2 \cdot \left[v \cdot \frac{8}{15} \cdot l \cdot f^2 + \frac{J_s}{F} \cdot l + \frac{l \cdot E \cdot J_s}{E_0 \cdot F_0} \right] \\
& - v \cdot P \cdot \left[\frac{f \cdot l^2}{3} \cdot (z + z^4 - 2 \cdot z^3) \right].
\end{aligned}$$

In diesen Gleichungen bedeuten die zu X gehörigen Klammerwerte die Formgrößen, die zu P gehörigen die Belastungsgrößen. Da die Formgrößen konstant sind, so ist es leicht, für verschiedene Werte von z durch Ein-

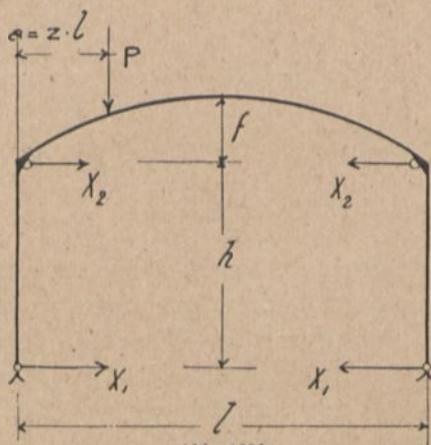


Abb. 180b.

setzung die Einflußlinien von X_1 und X_2 zu finden, welche dann für alle Belastungsfälle bequem angewandt werden können.

Bei seitlicher Belastung betrachte man die Zugstange als nicht vorhanden, so daß der Fall nach einem früher gegebenen Beispiel behandelt werden kann.

Kapitel XV.

Der Zweigelenrahmen mit ungleich hohen Kämpfergelenken sowie der einstufige Rahmen.

Für solche Systeme gelten sinngemäß genau dieselben Ableitungen wie beim Rahmen mit gleich hohen Kämpfern (Kapitel VII).

Die Ordinaten y beziehen sich hier auf den lotrechten Abstand irgendeines Punktes der Rahmenachse von der Verbindungsgeraden der Gelenke.

Momente (Abb. 181). Für irgendeinen Punkt ist

$$M_k = M_0 - \frac{X_a}{\cos \gamma} \cdot y \cdot \cos \gamma = M_0 - X_a \cdot y$$

$$M_a = \frac{\partial M_k}{\partial X_a} = -y.$$

Längskräfte. Nach Abb. 182 ist die obere Längskraft in K , wenn α wieder den Neigungswinkel der Rahmenachse gegen die Horizontale darstellt:

$$N_k = N_0 - \frac{X_a}{\cos \gamma} \cdot \cos(\alpha - \gamma)$$

$$N_a = \frac{\partial N_k}{\partial X_a} = - \frac{\cos(\alpha - \gamma)}{\cos \gamma}$$

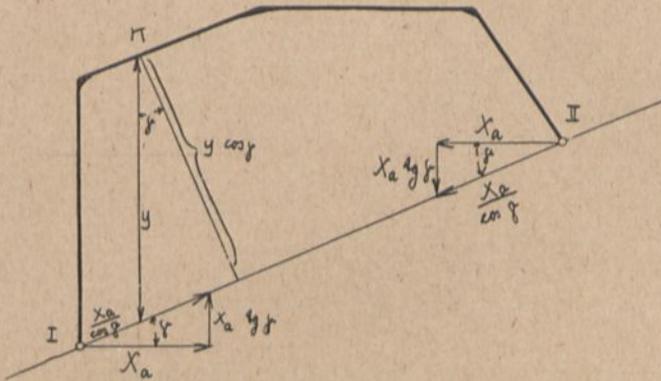


Abb. 181.

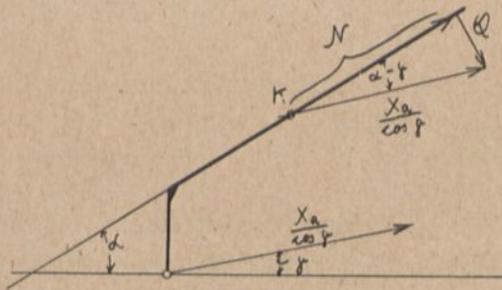


Abb. 182.

Querkräfte Q vernachlässigen wir.

Temperaturglied

$$N_a = - \frac{\cos(\alpha - \gamma)}{\cos \gamma}$$

Somit lautet unsere ganze Gleichung (vgl. Kap. VII)

$$X_a = \frac{\int M_0 \cdot y \cdot ds \frac{J_m}{J} + \int N_0 \frac{\cos(\alpha - \gamma)}{\cos \gamma} ds \frac{J_m}{F} + \varepsilon E J_m \int t \cdot \frac{\cos(\alpha - \gamma)}{\cos \gamma} ds - \Delta t E J_m}{\int y^2 ds \frac{J_m}{J} + \int \left[\frac{\cos(\alpha - \gamma)}{\cos \gamma} \right]^2 \cdot ds \frac{J_m}{F}}$$

und mit Weglassung des Einflusses der Normalkräfte entsprechend

$$X_a = \frac{\int M_0 \cdot y \cdot v \cdot ds + \varepsilon E \cdot J_m \int t \cdot \frac{\cos(\alpha - \gamma)}{\cos \gamma} \cdot ds - E \cdot J_m \cdot \Delta l}{\int y^2 \cdot v \cdot ds}.$$

Schließlich für die gewöhnlichen Fälle auch ausreichend

$$X_a = \frac{\int M_0 \cdot y \cdot v \cdot ds}{\int y^2 \cdot v \cdot ds},$$

welche Gleichung sich also nur soweit von der gleichlautenden Schlußformel in Kapitel VII unterscheidet, als die Ordinaten y sich auf die schiefe Gelenkachse beziehen.

Im übrigen besteht aber absolut kein Unterschied in der Bildung des Nenners gegenüber der in Kapitel IX vorgeführten Lösungsform.

Es ist auch hier

$$\int y^2 \cdot v \cdot ds = \frac{v \cdot s}{3} (H^2 + H \cdot h + h^2),$$

wobei sich H und h auf die Abstände der Endpunkte² der Stabstücke von der schrägen Gelenkachse beziehen¹⁾.

Ebenso ist

$$\int M_0 \cdot y \cdot ds \cdot v = v \cdot F_0 \cdot f,$$

wobei f wieder den Abstand des auf die Rahmenachse projizierten Schwerpunktes der M_0 -Fläche von der schrägen Gelenkachse bedeutet.

Schlußbemerkungen.

Wird in den Gleichungen bei Berücksichtigung der Normalkräfte Winkel $\gamma = 0$, so erhalten wir:

$$\frac{\cos(\alpha - 0)}{\cos 0} = \frac{\cos \alpha}{1} = \cos \alpha,$$

und der Fall ist zurückgeführt auf den Rahmen mit gleich hohen Kämpfergelenken.

Wird in den Gleichungen mit horizontalem Riegel Winkel $\alpha = 0$, so ist (Abb. 182a)

$$\frac{\cos(0 - \gamma)}{\cos \gamma} = - \frac{\cos \gamma}{\cos \gamma} = -1,$$

¹⁾ Vgl. „Höhere Mathematik“, Absatz 24.

d. h. es hat auf solche Stabstücke nur die Horizontalkomponente des schrägen Schubes $= X_a$ Einfluß, während die Vertikalkomponente $X_a \cdot \tan \gamma$ keine Normalkraft liefert (denn sie ist lediglich Querkraft, abgesehen von den Kräften im Hauptsystem).

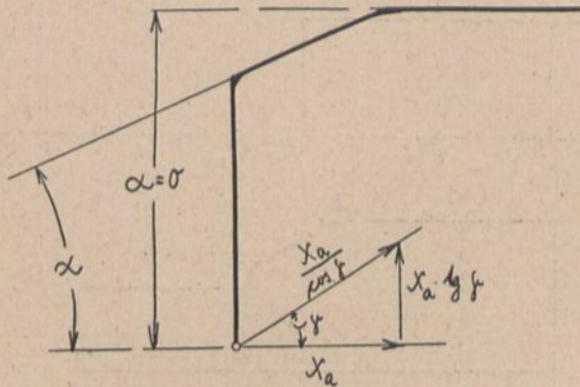


Abb. 182 a.

Einstielige Rahmen.

Hiermit kommen wir zu den Rahmen, die überhaupt nur einen lotrechten Stiel und einen durchweg wagerechten Riegel (eventuell mit Kragarm) besitzen. Rückt nämlich das Lager II höher derartig, daß man von einem Stiel dort nicht mehr sprechen kann, dann ergeben sich die sogenannten einstufigen Rahmen, für welche wir uns nähere Einzelheiten mit dem Hinweis auf den Aufsatz: „Beitrag zur Berechnung steifer Rahmenkonstruktionen“ in „Beton und Eisen“ 1913, Heft IV, ersparen können, der verschiedene Spezialfälle behandelt und dem Leser ohne weiteres verständlich sein wird.

Kapitel XVI.

Anwendbarkeit des Zweigelenrahmens.

Im Hochbau.

Der Zweigelenrahmen bietet in vielen Fällen das Mittel zur einfachen Berechnung von beliebig gestalteten Hallen- und Dachbindern. Für die praktische Lösung kommt es sehr darauf an, welche Annahmen man macht, wenn man sich aus der Projektzeichnung die Systemfiguren für die Berechnung entnimmt.

Man kann sich hier die Aufgabe sehr schwer gestalten, aber auch ohne große praktische Nachteile Erleichterungen in der Rechnung verschaffen¹⁾.

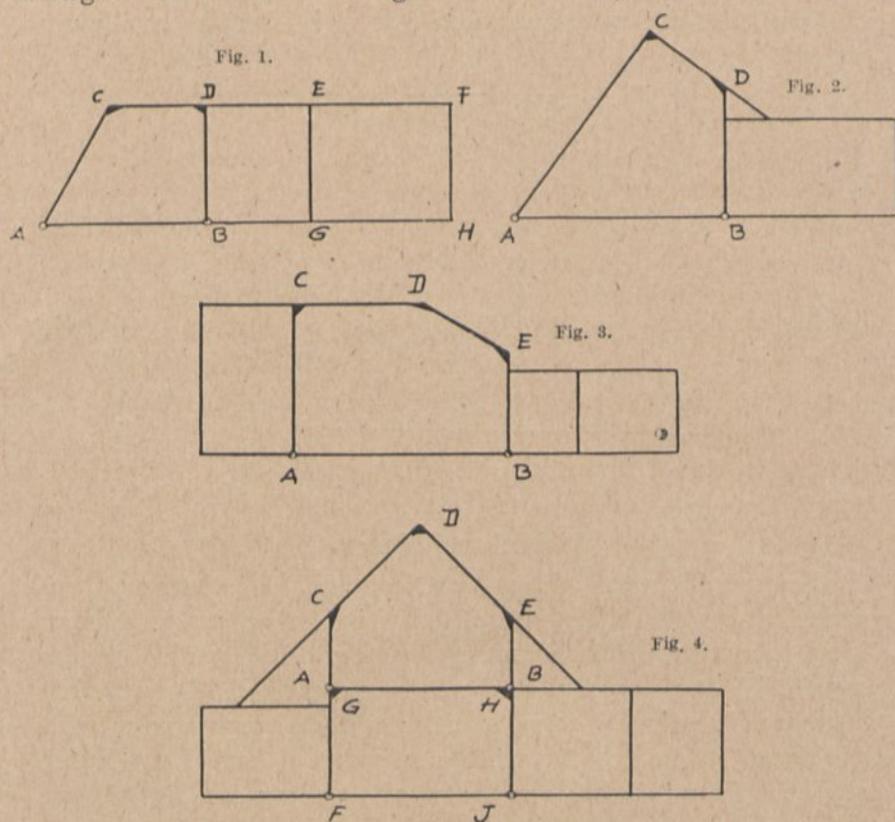


Abb. 183.

Fassen wir z. B. in Abb. 183 Fig. 1 das ganze System $AB CDEFGH$ als einen einzigen zusammenhängenden Rahmen auf, so erforderte dieser eine sehr zeitraubende und weitläufige Berechnung, zu der in der Praxis keine Zeit vorhanden ist. Wählen wir aber $ABCD$ als einfachen Zweigelenkrahmen, welcher die mittelbar und unmittelbar auf ihn entfallenden Eigengewichts-, Wind- und Schneelasten (insbesondere auch die horizontale Windkomponente, die als Einzellast von dem gelenkartig angeschlossenen geraden Binderbalken übertragen wird) aufnehmen hat, so vereinfacht sich die ganze Berechnung wesentlich.

¹⁾ Daß die Eigentümlichkeit der Schwindung des Eisenbetons eine gewisse Unterteilung eines größeren Bauwerks geradezu erfordert, ist im Kapitel XLIII näher dargelegt.

Natürlich hängt die Form des Binders (Rahmens) vor den Wahl des Grundsystems ab. Nimmt man den ganzen Rahmen als ein Stück an, so werden zum Schluß alle vier Pfosten ziemlich gleich stark werden und an den Punkten $CDEF$ werden mäßige Einspannungsquerschnitte auftreten. Geht man aber nach dem oben gemachten Vorschlag vor, so wird der Zweigelenkrahmen $ABCD$ als schwere Konstruktion augenfällig hervortreten, während die anliegenden Säulen und Balken als einfache leichte Konstruktionen erscheinen.

Als Zweigelenkrahmen hätten auch ebensogut der mittlere oder rechte Bauteil aufgefaßt werden können. Die Entscheidung hierüber hängt außer von statischen Gründen von der zu erzielenden Wirkung und den Raumverhältnissen ab. Jedenfalls müssen die gelenkigen Anschlüsse der Konstruktionen nach Möglichkeit verwirklicht werden durch Zusammenziehung der Eiseninlagen in die Querschnittmitte oder durch Unterbrechung derselben (Gelenke, Betonsteine, Bleizwischenlagen).

Erfordern es die Raumverhältnisse, daß der Pfosten BD in seinen Abmessungen möglichst beschränkt bleibt, so käme es zur Wahl eines anderen grundlegenden Systems, etwa des zweifach statisch unbestimmten Rahmens $ABGCDE$, wobei dann bei E eine steife Ecke anzunehmen wäre und zur Vereinfachung die Mittelstütze DB als Pendelstütze vorausgesetzt werden könnte.

Ein weiterer Schritt wäre der, daß man das Bauwerk der ganzen Breite nach als Rahmen auffaßt, die beiden Mittelstützen aber als Pendelstützen ausführt, wodurch, bei gelenkiger Auflagerung in A und H und steifen Ecken bei C und F , ein dreifach statisch unbestimmtes System entstehen würde.

Werden bei dieser Konstruktion die Pfosten AC und FH infolge der seitlichen Kräfte unerwünscht stark, so muß man zu ihrer Entlastung die Mittelstiele mit heranziehen, d. h. diese bei D und E einspannen, wobei dann alle oberen Knotenpunkte eingespannt, alle unteren gelenkig wären, also ein fünffach statisch unbestimmtes System entstanden sein würde. Wagerechte Reaktionen würden dann auch noch bei B und G auftreten. Die erleichternde Annahme von Fußgelenken kann man sich meist gestatten.

Bei den Rahmen Fig. 2 und 3 ist schon durch die sehr verschiedene Höhe der Pfosten das Herausheben einzelner Teile geboten. Es ergibt sich von selbst, daß man die Hallenteile $ABCD$ bzw. $ABCDE$ für sich als Zweigelenkrahmen berechnet.

Fig. 4 zeigt im Mittelteil zwei übereinanderliegende Zweigelenkrahmen, wobei der untere insbesondere auch die wagerechten Reaktionen des oberen aufzunehmen hat.

Im allgemeinen verfährt man bei der Berechnung am besten so, daß man für lotrechte Belastung durch Eigengewicht und Schnee und für wagerechte Belastung von links oder rechts je eine besondere Untersuchung durchführt und bei den einzelnen Querschnitten zum Schluß die ungünstigsten Zusammenstellungen macht. In der Querschnittsbemessung ist die balkenverbindende Platte mit zu berücksichtigen, sofern sie nicht gegenüber dem Rahmenquerschnitt zu schwach wird, was in der Regel bei Dachrahmen der Fall ist.

In den meisten Fällen hat man mit einem rechteckigen Querschnitt zu rechnen. In der Wahl des Verhältnisses der Trägheitsmomente zueinander genügt es bei gleichbleibender Breite, ohne Rücksicht auf die Eiseneinlagen das Verhältnis zwischen den dritten Potenzen der Querschnittshöhen zugrunde zu legen. Erlaubt man sich weniger Genauigkeit, so kann man überhaupt ein gleichbleibendes J annehmen¹⁾. Siehe ferner „Handbuch für Eisenbetonbau“, 2. Auflage, Band IV.

Im Brückenbau.

Wichtig sind noch einige Bemerkungen über den einfachen rechteckigen Rahmen als Brückenhauptträger. Es handelt sich bei der Berechnung solcher Rahmenbrücken zunächst darum, ob das grundlegende System als gelenkig oder eingespannt aufgelagert anzusehen ist (Abb. 184).

In der Regel liegt in der Art der beabsichtigten Ausführung weder der eine noch der andere Grenzfall bedingt vor, sondern ein Mittelding zwischen beiden. Während sich bei Dachbindern das eine oder andere System klarer zum Ausdruck bringen läßt, rechtfertigen die größeren Dimensionen der Pfosten von Rahmenbrücken ungleich schwerer die Annahme von Fußgelenken, ohne daß man andererseits mangels genügender Größe der Fundamente von völliger Einspannung sprechen könnte. Wird einer der beiden Grenzfälle durch konstruktive Maßnahmen nicht sicher gewährleistet, so wird man die statische Untersuchung für beide Grenz-

¹⁾ Bestimmungen vom 13. Jan. 16, § 16, Ziffer 1.

fälle ausführen müssen, um für jeden Querschnitt die Höchstbeanspruchung zu erhalten¹⁾).

Bei Dachbindern wird der Horizontalschub in der Regel durch die nächstliegende Decke aufgenommen werden können.

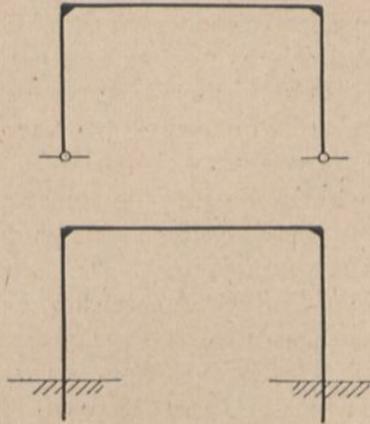


Abb. 184.

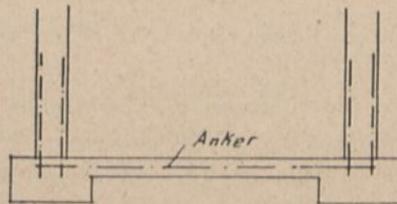


Abb. 185.

Bei Hallenbindern und Rahmenbrücken, die in direkter Verbindung mit dem Erdreich stehen, kann man den Fundamenten die Aufnahme des Schubes überlassen, sofern sie groß genug und gegen seitliche Verschiebung genügend gesichert sind; andernfalls müssen zwischen den Fundamenten einbetonierte Zuganker vorgesehen werden (Abb. 185).

¹⁾ Soweit die Durchbiegung des Riegels in der Mitte in Frage kommt, weist dem Gesagten gegenüber Dr.-Ing. Brandler für einen besonderen Fall nach, daß genannte statische Unklarheiten von sehr untergeordneter Bedeutung sind; auch die voutenförmige Aussteifung der Rahmenecken sowie eine fehlerhafte Annahme des Trägheitsmomentes der Pfosten soll danach für die Gestaltung der elastischen Linie des Balkens belanglos sein (Arm. Beton 1914, Heft 3, Belastungsprobe eines dreiseitigen Streifrahmens, S. 85, rechte Spalte).

Besonders dann, wenn auch ein unterer Abschluß erwünscht oder erforderlich ist (Durchlässe, Tunnelbauten, Kanäle), werden die beiden Pfostenreihen (oder durchlaufenden Seitenwände) durch eine vollständige Eisenbetonsohlplatte miteinander verbunden, so daß ringsum geschlossene Rahmen entstehen, die als sehr solide Konstruktionen anzusehen sind, weil sie als geschlossene Kasten durch Nachgiebigkeiten des Baugrundes nicht mehr beeinträchtigt werden können (vgl. später).

Konstruktive Grundlagen bei der Bemessung von Rahmenbrücken bleiben folgende:

Den Brückenbalken (Riegel) bemesse man nach dem größten auftretenden Biegemoment für den Fall, daß seitlicher Erddruck nicht vorhanden ist. Die Ecken zwischen Riegel und Pfosten erhalten ihre Größtmomente beim Vorhandensein von lotrechter und wagerechter Belastung zugleich.

Die Wirtschaftlichkeit einer Rahmenbrücke hängt vor allem von dem Einspannungsgrade ab. Je steifer die Pfosten gegenüber den Balken sind, d. h. je höher das Verhältnis von $\frac{J_g}{J_r}$ und je niedriger die Pfosten, um so wirkungsvoller

wird die beabsichtigte Ermäßigung des Balkenmomentes ausfallen. Das gilt beim Zweigelenkrahmen und in erhöhtem Maße auch beim eingespannten Rahmen. So stehen sich Wirtschaftlichkeit und Berechnungsgrundlagen einander widersprechend gegenüber; denn je stärker die Pfosten ausgeführt werden, um so weniger kann man noch von gelenkiger Auflagerung sprechen, und um so größer müssen bei Einspannung die Fundamente ausfallen (vgl. auch „Handbuch für Eisenbetonbau“, 2. Aufl., Bd. VI, Brückenbau, S. 232 u. f.).

Kapitel XVIa.

Entwurfsvorschläge und Feststellung der Rahmenachse.¹⁾

Der Entwurf eines Rahmenwerkes wird in der Regel so gehandhabt, daß man an Hand ähnlicher, bereits berechnet vorliegender Bauwerke — also nach der Erfahrung — den Rahmen aufzeichnet, die angenommenen Stärken auf Grund roher Berechnung nachprüft — besonders auch hinsichtlich zweckdienlicher

¹⁾ Das Kapitel bezieht sich auf die Rahmenberechnung im allgemeinen, soll also auch für die folgenden Abschnitte Gültigkeit besitzen.

Armierungsmöglichkeit —, und dann zur genauen Nachprüfung schreitet. Neuerdings sind zweckmäßige und bequem brauchbare Bemessungsverfahren entstanden, die meist auf eine Ermittlung der Eisenquerschnitte hinauslaufen, so daß man diese dann vorher nicht abzuschätzen braucht. Bei unpassender Größe der sich so als erforderlich erweisenden Eisenquerschnitte wären dann entsprechende Veränderungen an dem Querschnitt vorzunehmen. Der Nachprüfungsweg hat lange auch weitgehenden Ansprüchen genügt. Im übrigen wird hierzu auf Band I verwiesen.

Für die Ermittlung der äußeren Kräfte kann nach den Bestimmungen vom 13. Januar 1916 (§ 16, Ziffer 1) in der Regel unter Vernachlässigung der Eiseneinlagen mit unveränderlichem Trägheitsmoment gerechnet werden. In der Tat ist der Einfluß der Trägheitsmomente auf die Querschnittsbestimmung nicht groß, aber doch größer als der Einfluß der Normalkräfte in der Bestimmung der statisch unbestimmten Größen. Allgemein, kann man sagen, kann auch bei höheren Ansprüchen an den Genauigkeitsgrad mit konstantem J gerechnet werden, wenn es sich hinsichtlich der Veränderlichkeit der Querschnitte nur um Ausrundung oder Verstärkung der Rahmenecken handelt. Besteht aber ein beträchtlicher Unterschied zwischen den einzelnen Rahmenstäben selbst — etwa zwischen Stielen und Riegel —, so wirkt dieser Unterschied auf die statisch unbestimmten Größen merkbar ein, wenn auch nicht bei jeder Belastungsweise. So macht sich z. B. bei einem Doppelportal bei seitlicher Belastung — insbesondere bei solcher in Riegelhöhe — der Unterschied in den Trägheitsmomenten in den Endergebnissen nur sehr wenig bemerkbar in großem Gegensatz zu den Ergebnissen bei lotrechter Belastung. Bekanntlich handelt es sich bei dem Einfluß der Trägheitsmomente auf die statisch unbestimmten Größen nicht um ihre absoluten Werte, sondern um den Wechsel im Trägheitsmoment (vgl. S. 107); die Werte v unserer Formeln ermöglichen dabei durch kleine Umrechnungen Untersuchungen über den Einfluß des Wechsels im Trägheitsmoment, so daß der Verzicht auf die Berücksichtigung der Trägheitsmomente keine nennenswerte Zeitersparnis mit sich bringt. Auch im umgekehrten Falle, wo man durch Verstärkung eines Rahmenteiles (z. B. der Stiele) gegen den anderen (z. B. den Riegel) für diesen eine Herabsetzung des Biegemomentes erzielen will, bieten die Werte v dazu die erwünschte zweckdien-

liche Handhabe. Im allgemeinen sind bei Rechteckrahmen — insbesondere bei niedrigen — die Einflüsse des Wechsels im Trägheitsmoment größer als bei anderen Rahmenformen.

Bei keilförmigen Rahmenstielen wäre das Trägheitsmoment desjenigen Querschnitts des Stieles maßgebend, dessen Trägheitsmoment als das mittlere anzusehen ist; dieser Querschnitt liegt aber nicht in halber Höhe des Stieles, sondern etwa in $\frac{2}{3}$ der Höhe¹⁾.

Ein einfaches Verfahren zur Berücksichtigung des veränderlichen Trägheitsmomentes der Stützen bringt A. Straßner²⁾. Er führt dem Ergebnis nach die Berechnung von Rahmentragwerken mit Stützen von veränderlichem Trägheitsmoment zurück auf die Berechnung ebensolcher Konstruktionen von gleichbleibender Stärke.

Die Frage, welche Linie dann innerhalb der Rahmenleibungen als Systemachse zur Durchführung unserer Berechnung zu erwählen ist, ist letztthin verschieden beantwortet worden. Bisher legte man als Systemlinie die Schwerlinie der Vollquerschnitte, und zwar mit oder auch ohne Berücksichtigung des n -fachen Eisenquerschnitts, oder auch die Mittellinie zwischen den Leibungen zugrunde und befand sich damit nach dem Ergebnis der nachfolgenden Erläuterungen auch auf dem richtigen Wege. Sofern aber der Grundsatz, die Betonzugzone auszuschließen, den wir bei der Spannungsberechnung beobachten, auch bei der Feststellung der äußeren Kräfte zu Geltung zu bringen wäre, hätte die Systemachse durch die Schwerlagen der statisch wirksamen Querschnitte, d. h. durch die Schwerpunkte der Verbundquerschnitte aus Betondruckzone und n -fachem einseitigen oder beiderseitigen Eisenquerschnitt zu gehen³⁾. Damit wäre aber die Lage der Systemachse von den Spannungen abhängig, also von Werten, die von Querschnitt zu Querschnitt veränderlich sind. Es sind denn auch neuerdings Verfahren mit Zugrundelegung dieser sogenannten „statischen“ Achse für die Bestimmung von Rahmenquerschnitten vorgeschlagen worden. In diesen Arbeiten, die

¹⁾ Vgl. Äußerung von Prof. Domke in Beton und Eisen 1914, Heft 1, S. 21.

²⁾ Beton u. Eisen 1916, Heft 6, S. 80, auch Heft 7/8, S. 100.

³⁾ Bei exzentrischem Druck fällt dieser Schwerpunkt nicht wie bei reiner Biegung in die Nulllinie, sondern liegt oberhalb derselben in der Druckzone, bei exzentrischem Zug liegt er unterhalb der Druckzone; siehe Berechnung von s_0 Seite 114.

von den Herren B. Löser und Dr.-Ing. Kunze stammen, wird hervorgehoben, daß bei statisch unbestimmten Bauwerken, die nur unter Zugrundelegung einer bestimmten Achsenform berechnet werden können, nur die erwähnte „statische“ Achse als Systemlinie benutzt werden dürfe. Ich habe in einer Kritik¹⁾ dieser Arbeiten zunächst Betrachtungen über die Größe des Fehlers in der Spannungsermittlung angestellt, der gemacht wird, wenn an Stelle der „statischen“ Achse die Schwerachse des Vollquerschnitts oder die Mittellinie als Systemlinie zugrunde gelegt wird, und welche praktischen Einwände in allen Fällen gegen die Benutzung des neu vorgeschlagenen Berechnungsverfahrens vorzubringen sind. Die darauf mir entgegengebrachten Abweisungen²⁾ konnten mich bisher nur davon überzeugen, daß es einzelne besondere Fälle gibt, wo tatsächlich eine Berechnung auf Grund der „statischen“ Achse größere Spannungen ergibt bzw. stärkere Armierung erfordert als eine Berechnung auf Grund der Mittellinie oder Schwerachse des Vollquerschnitts. Es sind dies anscheinend — ein endgültiges Urteil will ich hier nicht aussprechen — solche Fälle, wo als Normaldruck nur die statisch unbestimmte Größe in Frage kommt (vorwiegend also die Riegel rechteckiger Rahmen, besonders bei niedriger Höhe und großer Spannweite); wo nur die Lasten den Normaldruck abgeben (in den vertikalen Rahmenteilen), scheint sich kein Unterschied in den Spannungsergebnissen nach dem einen oder anderen Verfahren feststellen zu lassen, und schräg liegende Rahmenteile ständen hinsichtlich der Beurteilung in der Richtung dann zwischen den beiden Grenzzuständen, sich je nach Neigung mehr dem einen oder dem anderen Einflusse unterstellend. Für einen Zweigelenkrahmen in der Form von Abb. 324 und zugehöriger Kraftlage und Momentenfläche fand ich überhaupt keine nennswerten Unterschiede in den Spannungsergebnissen, nachdem ich nach der Spannungsermittlung auf Grund der vorliegenden Achse die „statische“ Achse gesucht und dann die ganze Berechnung auf Grund dieser Achse wiederholt hatte. Die „statische“ Achse lag dabei in den Eckpunkten *C* und *D* 9 cm, in den Eckpunkten *E* 7 cm unterhalb der ersten Achse, für den Riegel nach entsprechendem Übergang durch die alte Achse (in der Nähe der Momentennullpunkte) dann größtenteils 7 cm

¹⁾ Armierter Beton 1919, Heft 1. „War die bisherige Bestimmung von Rahmenquerschnitten mit dem Mittenmoment wirklich falsch?“

²⁾ Arm. Beton 1919, Heft 6, S. 135.

oberhalb der ersten Achse¹⁾. Über Spannungserhöhungen in anderen Fällen siehe S. 114 (Rechteckrahmen) und S. 263 (Kastenrahmen).

Welche Berechtigung im übrigen die von Löser und Kunze vorgenommene Übertragung des Grundsatzes einer wirkungslosen Betonzugzone auf Berechnungen, die der Feststellung der äußeren Kräfte dienen, besitzt, erweisen in durchaus ablehnendem Sinne die Auseinandersetzungen der Herren Dr.-Ing. Gilbrin und Dr.-techn. Krebitz zu der vorliegenden Frage²⁾. Ich lasse die Ausführungen des Herrn Dr.-Ing. Gilbrin hier folgen und bemerke, daß Herr Dr.-techn. Krebitz die ausdrückliche Forderung aufstellt, als Systemlinie die durch die Schwerpunkte der Vollquerschnitte gehende Linie zugrunde zu legen, und daß er nur diese Linie als die richtige statische Achse anerkennt.

Die Bestimmung von Rahmenquerschnitten.

In „Armierter Beton“, Jahrg. 1919, Heft 1, S. 3 ff. bringt Herr H. Schlüter unter dem Titel „War die bisherige Bestimmung von Rahmenquerschnitten mit dem Mittenmoment wirklich falsch?“ eine Rechtfertigung der bisher bei der Bemessung von Eisenbetonquerschnitten gebräuchlichen Berechnungsweise, welche auf der von Mörsch abgeleiteten Gleichung dritten Grades beruht, gegenüber einem neuen, zuerst von Herrn Ingenieur Löser abgeleiteten und später von Herrn Dr.-Ing. Kunze weiter ausgebauten Berechnungsverfahren. Der Verfasser wies nach, daß es erstens praktisch unmöglich ist, die statische Achse eines Rahmen- oder Bogenträgers so aufzufassen, wie es die Verfechter des neuen Verfahrens tun, zweitens, daß bei Gebrauch der Mittellinie als statische Achse der etwa begangene Fehler in zulässigen Grenzen bleibt. Herr Schlüter gibt zu, daß das Lösersche Verfahren theoretisch richtig sei, und bestreitet lediglich seine Anwendbarkeit beim Entwurf. In folgenden Zeilen seien zur Klärung der vorliegenden Frage noch einige Punkte berührt, um gleichzeitig darzutun, daß das alte gebräuchliche Verfahren bei der Berechnung statisch unbestimmter Konstruktionen der anzustrebenden theoretischen Genauigkeit am nächsten kommt.

Bei der Berechnung eines Eisenbetontragwerkes, sei es ein

¹⁾ Gemeint sind mit den Zahlen die normalen Abstände von der alten Achse, nicht die lotrechten.

²⁾ Arm. Beton 1919, Hefte 4 und 7.

Rahmen- oder Bogenträger, ließen sich theoretisch drei Möglichkeiten für die Festlegung der statischen Achse in Erwägung ziehen: 1. Die Achse gedacht als Verbindungslinie der Schwerpunkte bzw. Mittelpunkte der homogen angenommenen Querschnitte, 2. als Verbindungslinie der Querschnittsschwerpunkte unter Berücksichtigung der Eiseneinlagen, 3. als Verbindungslinie der Schwerpunkte der bei Ausschluß der Betonzugspannungen noch wirksamen Querschnitte. Die Wahl der Mittellinie führt am raschesten zum Ziel, sie setzt das Bekanntsein der Querschnittsabmessungen voraus. Das zweite Verfahren erfordert außerdem die Kenntnis des Eisenquerschnitts. Man ist also zu Beginn der Rechnung zu Annahmen über die Querschnittsgrößen genötigt. Auch das dritte Verfahren verlangt solche Annahmen, ferner die Kenntnis der Lage der Nulllinie in den einzelnen Querschnitten. Abgesehen davon, daß diese mit jedem neuen Belastungsfall wechselt, woraus schon die Unbrauchbarkeit dieses Verfahrens hervorgeht, ist ihre Ermittlung im voraus auch angenähert nicht möglich. Es ist nicht richtig, die tatsächliche Lage der Nulllinie aus dem bekannten, die Zugzone des Betonquerschnitts vernachlässigenden Bemessungsverfahren herleiten zu wollen, um daraus weiter die statische Achse zu bestimmen. Denn, daß der Betonquerschnitt auf der Zugseite überall spannungslos sei, ist eine Annahme, welche lediglich deshalb Eingang in die Statik des Eisenbetonbaus gefunden hat, weil sie für die Bemessung der Eisenbetonquerschnitte bei erhöhter Sicherheit einfache Formeln liefert. Macht man aber einmal diese Voraussetzung (Spannungslosigkeit des Betons in der Zugzone) für die Ermittlung der statischen Achse, dann müßte man folgerichtig auch die entsprechenden Trägheitsmomente zugrunde legen, was natürlich nicht möglich ist.¹⁾

Aber abgesehen davon, würde man mit Größen rechnen, die den tatsächlichen Verhältnissen nicht mehr entsprechen, da man gleichsam überall da, wo wenn auch nur kleine Zugspannungen auftreten, bis zur Nulllinie verlaufende Risse annimmt. Man liefe sogar Gefahr, bei statisch unbestimmten Systemen gewisse Querschnitte zu günstig zu rechnen und insbesondere die Zusatzspannungen zu klein ermitteln. Herr Dr.-Ing. Kunze empfiehlt die Anwendung des neuen Verfahrens nur für Querschnitte, in denen Zugspannungen von mehr als 12 kg/cm^2 auftreten. Es gibt aber in allen Eisenbetontragwerken — manchmal größere — Strecken

¹⁾ Vgl. auch Seite 361 oben.

der Achse, wo in den Querschnitten die Betonzugspannung unter dieser Grenze bleibt.

Ein schwerwiegender Nachteil des neuen Verfahrens ist die Nichtanwendbarkeit des Superpositionsgesetzes und folglich auch der Einflußlinien. Ehe man diese unentbehrlich gewordenen Hilfsmittel der Statik aufgibt, wird man gern auf eine neue Theorie verzichten, wenn sie auch scheinbar genauere Ergebnisse verspricht. Nach wie vor wird man also bei der Berechnung statisch unbestimmter Systeme voll wirksame Betonquerschnitte annehmen müssen und dementsprechend die statische Achse wählen. Der Wirklichkeit am nächsten kommt das Verfahren, das die Verbindungslinie der Schwerpunkte der vollen Querschnitte einschließlich Berücksichtigung des Eisenquerschnitts als Achse annimmt. Wo mit Sicherheit Zugrisse zu erwarten sind, kann näherungsweise ein entsprechend vermindertes Trägheitsmoment in die Rechnung eingeführt werden, ohne daß es nötig wäre, an der betreffenden Stelle eine Ausbuchtung der Achse vorzunehmen. Man wird im Gegenteil oft genötigt sein, die bei der Eigenart des Eisenbetons sich ergebende unregelmäßige Linie der Achse auszugleichen und durch gerade oder einfach gekrümmte Linien zu ersetzen. Bei der Bemessung hat man dann nur nötig, die Lage des jeweils betrachteten Querschnitts zur Achse zu berücksichtigen, das heißt, man hat das Mittenmoment aus dem auf die Achse bezogenen Moment und der Normalkraft zu ermitteln. Werden die Abweichungen bei der Querschnittsbemessung gegenüber den gemachten Annahmen unzulässig groß, so ist die Rechnung mit den neuen Grundlagen zu wiederholen.

In den meisten Fällen der Praxis wird auch die Wahl der Mittellinie (ohne Berücksichtigung der Eiseneinlage) als Achse gerechtfertigt sein, da die Unterschiede gegenüber dem genaueren Verfahren mit Berücksichtigung der Eiseneinlage kaum ins Gewicht fallen. Bei unberichtigter Achse sind die erhaltenen Mittenmomente gleichzeitig auch die Achsenmomente — natürlich nicht im Sinne von Herrn Löser bezogen auf die Schwerachse des rechnermäßig ermittelten wirksamen Querschnitts, sondern auf die wagrechte Mittellinie des gesamten Betonquerschnitts. War die Achse durch Ausgleichung erhalten, so sind vor der Bemessung der Querschnitte die auf die Achse bezogenen Momente in die Mittenmomente zu verwandeln.

Dr.-Ing. Gilbrin.

Beliebig gelagerte einfache Rahmen.

Kapitel XVII.

Der einseitig gelenkige Stabzug oder Rahmen.

Durch feste Einspannung auf der einen Seite vermehren wir die Anzahl der zunächst unbekanntem Auflagergrößen gegenüber beiderseits gelenkiger Auflagerung von vier auf fünf; das System würde $5 - 3 =$ zweifach statisch unbestimmt (vgl. Abb. 104 mit dem Einspannungsmoment X_5).

Wir machen ein solches System einfach durch Wegnahme des gelenkigen Auflagers statisch bestimmt, wobei als statisch bestimmtes Hauptsystem ein einseitig eingespannter Träger entsteht, den wir gemäß unseren Betrachtungen S. 91 u. f. einmal unter dem Einfluß der vorliegenden Belastung, sodann unter dem Einfluß der statisch unbestimmten Größen zu betrachten haben (Abb. 104 a und b). Wir kamen S. 92 und 93 zu den Verschiebungsgleichungen

$$1. \delta_v = \int \frac{M_{av} \cdot M \cdot ds}{E \cdot J}$$

$$1. \delta_h = \int \frac{M_{ah} \cdot M \cdot ds}{E \cdot J}$$

und den Schlußgleichungen, wenn wir für die linken Seiten allgemeiner die Bezeichnungen L'_a und L'_b einführen und anstatt der Minuszeichen innerhalb der Klammern zum Ausdruck der erforderlichen algebraischen Addition allgemein Pluszeichen verwenden:

$$1. L'_a = \int \frac{M_a(M_0 + M_a \cdot X_a + M_b \cdot X_b) \cdot ds}{E \cdot J}$$

$$2. L'_b = \int \frac{M_b(M_0 + M_a \cdot X_a + M_b \cdot X_b) \cdot ds}{E \cdot J}$$

Bei Erweiterung der Gleichung mit $E \cdot J_m$ und $\frac{J_m}{J} = v$ für die rechte Seite (vgl. S. 106) erhalten wir ausmultipliziert:

$$1. L'_a \cdot E \cdot J_m = \int M_a \cdot M_0 \cdot v \cdot ds + \int M_a^2 \cdot X_a \cdot v \cdot ds + \int M_a \cdot M_b \cdot X_b \cdot v \cdot ds$$

$$2. L'_b \cdot E \cdot J_m = \int M_b \cdot M_0 \cdot v \cdot ds + \int M_b \cdot M_a \cdot X_a \cdot v \cdot ds + \int M_b^2 \cdot X_b \cdot v \cdot ds.$$

In diesen Gleichungen ist also M_a der Einfluß von $X_a = 1$ dem Sinne nach negativ¹⁾, und M_b der Einfluß von $X_b = 1$, dem Sinne nach positiv; und wir erhalten daher allgemein mit Einführung der entsprechenden Werte $M_a = -1 \cdot y = -y$ und $M_b = 1 \cdot x = x$ und Heraussetzung der konstanten Werte (Abb. 186)

$$1. L'_a \cdot E \cdot J_m = - \int y \cdot M_0 \cdot v \cdot ds + X_a \int y^2 \cdot v \cdot ds - X_b \int y \cdot x \cdot v \cdot ds$$

$$2. L'_b \cdot E \cdot J_m = + \int x \cdot M_0 \cdot v \cdot ds + X_a \int y \cdot x \cdot v \cdot ds + X_b \int x^2 \cdot v \cdot ds.$$

Die Momentenflächen entsprechen:

für X_a der Abb. 236 (S. 224)

für X_b der Abb. 237 (S. 224)

für lotrechte Last der Abb. 240 (S. 227)

für seitliche Last der Abb. 246 (S. 230).

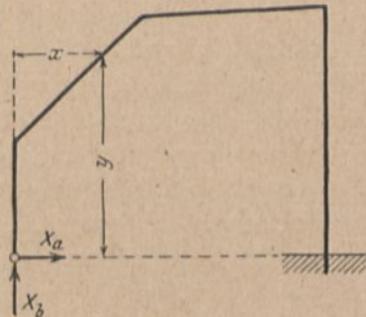


Abb. 186.

Den Herleitungen in Kapitel IX entsprechend ist geometrisch gedeutet

$\int y \cdot M_0 \cdot v \cdot ds = v \cdot F_0 \cdot f_y$, also gleich dem statischen Moment der auf die Rahmenachse projizierten $\frac{J_m}{J}$ -fachen M_0 -

Fläche bezogen auf die wagerechte Achse durch das Gelenk (dem Sinne nach negativ bei negativer M_0 -Fläche, so daß dann das erste Glied im ganzen wieder positiv wird);¹⁾

$\int x \cdot M_0 \cdot v \cdot ds = v \cdot F_0 \cdot f_x$, gleich dem statischen Moment derselben Fläche bezogen auf die lotrechte Achse durch das Gelenk (dem Sinne nach auch negativ, so daß das

¹⁾ Im allgemeinen ist es unnötig, die statisch unbestimmten Größen gleich mit ihrem richtigen Vorzeichen einzusetzen; man führt sie für die Rechnung einfacher durchweg als positiv ein, wonach sie sich von selbst mit den richtigen Vorzeichen ergeben wie alle Reaktionen.

erste Glied der zweiten Gleichung im ganzen negativ wird);

$\int y^2 \cdot ds \cdot v = v \cdot f_0 \cdot f_v$ das statische Moment der zu $X_a = 1$ gehörigen, auf die Rahmenachse projizierten $\frac{J_m}{J}$ -fachen Momentenfläche des Hauptsystems bezogen auf die wagerechte Gelenkachse oder gleich dem Trägheitsmoment des mit $ds \cdot v$ belastet gedachten Rahmenezuges bezogen auf die Wagerechte durch das Gelenk ($= v \cdot \frac{s}{3} (H^2 + H \cdot h + h^2)$);

$\int x^2 \cdot v \cdot ds = v \cdot f_0 \cdot f_x$ das statische Moment der zu $X_b = 1$ gehörigen, auf die Rahmenachse projizierten $\frac{J_m}{J}$ -fachen Momentenfläche bezogen auf die Lotrechte durch das Gelenk oder gleich dem Trägheitsmoment desselben Rahmenezuges bezogen auf die Lotrechte durch das Gelenk (ebenfalls $= \frac{v \cdot s}{3} (H^2 + H \cdot h + h^2)$ unter sinngemäßer Anwendung von H und h auf die wagerechten Abstände der einzelnen Stabeckpunkte von der Lotrechten durch das Gelenk);

$\int y \cdot x \cdot v \cdot ds = v \cdot f_0 \cdot f$, also sinngemäß mit $v \cdot F_0 : f$ das statische Moment der zu $X_a = 1$ gehörigen und auf die Rahmenachse projizierten $\frac{J_m}{J}$ -fachen Momentenfläche bezogen auf die Lotrechte durch das Gelenk oder das statische Moment der zu $X_b = 1$ gehörigen und auf die Rahmenachse projizierten $\frac{J_m}{J}$ -fachen Momentenfläche bezogen auf die Wagerechte durch das Gelenk.

Nach Einsetzung aller dieser Werte in die beiden obigen Gleichungen lassen sich die beiden statisch unbestimmten Größen X_a und X_b ohne weiteres aus denselben ermitteln.

Für ungleich hohe Lagerungspunkte gilt das in Kap XV Gesagte.

Anmerkung. Näher betrachtet sind die Glieder der rechten Seite von Gleichung 1. die statischen Mo-

mente der zu M_0 , X_a und X_b gehörigen, auf die Rahmenachse projizierten $\frac{J_m}{J}$ -fachen Momentenflächen des Hauptsystems bezogen auf die Wagerechte durch das Gelenk, ebenso die Glieder der rechten Seite von Gleichung 2. die statischen Momente der nämlichen Flächen, bezogen auf die Lotrechte durch das Gelenk.

Kapitel XVIII.

Der beiderseits eingespannte gerade Träger.

Zufolge Wegfalles des Horizontalschubes treten an jedem Auflager zwei Auflagergrößen auf, die lotrechten Drücke A , B und die Einspannungsmomente M_A und M_B (Abb. 187). Die

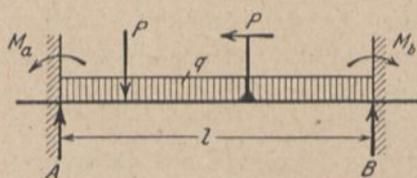


Abb. 187.

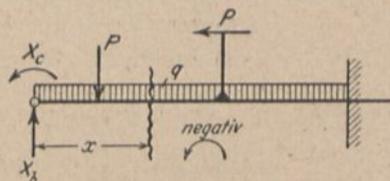


Abb. 188.

statische Bestimmtheit stellen wir einfach durch Wegnahme eines der Stützpunkte her und erhalten als statisch bestimmtes Hauptsystem den einfachen Kragträger Abb. 188, an dem außer der negative Momente hervorrufenden Belastung die statisch unbestimmten Größen $A = X_b$ und $M_A = X_c$ angreifen, zu deren Bestimmung uns die Gleichungen zur Verfügung stehen (mit $v = 1$):

1. $L_b \cdot E \cdot J = \int M_b \cdot M_0 \cdot ds + \int M_b^2 \cdot X_b \cdot ds + \int M_b \cdot M_c \cdot X_c \cdot ds$
2. $L_c \cdot E \cdot J = \int M_c \cdot M_0 \cdot ds + \int M_c \cdot M_b \cdot X_b \cdot ds + \int M_c^2 \cdot X_c \cdot ds$.

Der Drehsinn von X_c darf dabei beliebig sein; X_c ist eine Reaktion, genau wie X_b , deren Richtungssinn wie immer von der Belastungsart abhängig ist und sich daher durch die Rechnung ergibt. Hierbei bedeutet ein positives Ergebnis für X_c eine Bestätigung des angenommenen Drehsinnes, ein negatives eine Verneinung desselben. Dieser Grundsatz hat allgemeine Bedeutung.

Wir haben X_c negativ — also im Sinne der Belastung —

woraus

$$X_b = \frac{ql}{2}.$$

Mit Einsetzung von X_b in Gleichung 1.

$$0 = -\frac{ql^4}{8} + \frac{ql^4}{6} - X_c \cdot \frac{l^2}{2}$$

$$0 = \frac{ql^4}{24} - X_c \cdot \frac{l^2}{2},$$

woraus

$$X_c = \frac{ql^2}{12},$$

wobei das positive Ergebnis unsere Annahme, daß der Drehsinn für X_c negativ, wie in Abb. 188 angedeutet ist, bestätigt.

Die Einflüsse von M_0 und X_b am Freitragler ergeben als Momentenfläche eine Parabel mit positivem Sinn, der Einfluß von $X_c = -\frac{ql^2}{12}$ ein Rechteck (Abb. 189).

Kapitel XIX.

Der einerseits eingespannte, andererseits frei drehbar gelagerte gerade Träger.

Ein solcher entsteht durch Weglassung des Einspannungsmomentes auf einer Seite, z. B. X_c (Abb. 188).

Die statisch unbestimmte Größe ist nur noch X_b , und die Bestimmungsgleichung derselben lautet einfach

$$L_b \cdot E \cdot J = \int x \cdot M_0 \cdot ds + X_b \cdot \int x^2 \cdot ds.$$

Mehrstielige Gelenkrahmen mit Pendelstützen.

Die Berechnung solcher Rahmen in symmetrischer oder unsymmetrischer Anordnung der Pendelstützen (Abb. 190 u. 191) schließt sich eng dem im vorhergehenden Abschnitt gezeigten Ver-

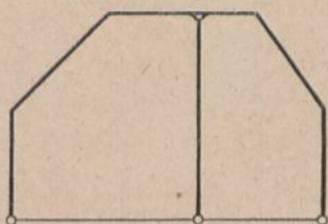


Abb. 190.

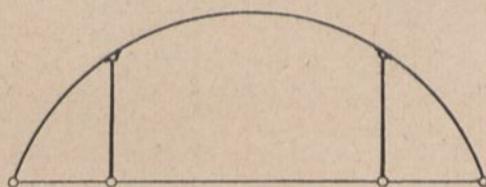


Abb. 191.

fahren an. Wir behandeln zunächst den Rahmen mit einer Pendelstütze.

Kapitel XX.

Rahmen mit einer Pendelstütze.

Durch Wegnahme der Pendelstütze und Verwandlung eines der beiden festen Auflagergelenke in ein Rollenlager erhalten wir das statisch bestimmte Hauptsystem, den einfachen Träger, den

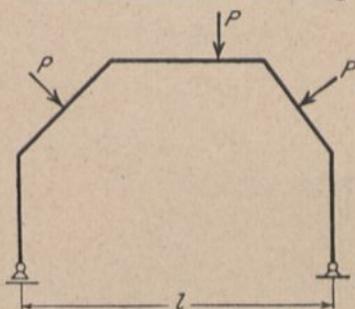


Abb. 192.

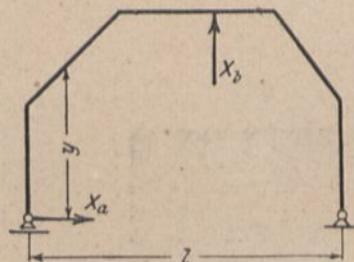


Abb. 193.

wir wie immer unter dem Einfluß der Belastung und der beiden statisch unbestimmten Größen X_a und X_b zu betrachten haben (Abb. 192 u. 193).

Die Bestimmungsgleichungen für X_a und X_b lauten wieder:

1. $L'_a \cdot E \cdot J_m = \int M_a \cdot M_0 \cdot v \cdot ds + X_a \int M_a^2 \cdot v \cdot ds + X_b \int M_a \cdot M_b \cdot v \cdot ds$
2. $L'_b \cdot E \cdot J_m = \int M_b \cdot M_0 \cdot v \cdot ds + X_a \int M_b \cdot M_a \cdot v \cdot ds + X_b \int M_b^2 \cdot v \cdot ds.$

In diesen Gleichungen ist M_a der Einfluß von $X_a = 1 = -1 \cdot y$ = $-y$ und M_b der Einfluß von $X_b = 1$, im Bereich der Strecke a also gleich $-1 \cdot \frac{b}{l} \cdot x$, im Bereich der Strecke b gleich $-1 \cdot \frac{a}{l} \cdot x$ (Abb. 194), soweit zunächst nur lotrechte Belastung in Frage

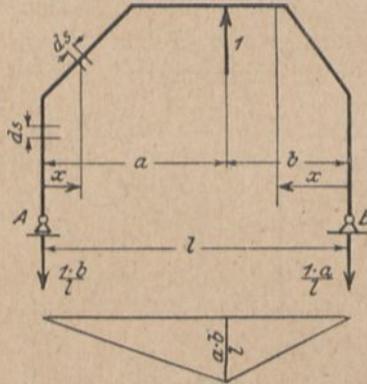


Abb. 194.

kommt; für seitliche Belastung kehrt sich das Vorzeichen dieser Werte um.¹⁾ Hiermit lauten unsere Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 1. \quad L'_a \cdot E \cdot J_m &= - \int_0^l y \cdot M_0 \cdot v \cdot ds + X_a \int_0^l y^2 \cdot v \cdot ds \\
 &\quad + X_b \cdot \left[\frac{b}{l} \int_0^a y \cdot x \cdot v \cdot ds + \frac{a}{l} \int_0^b y \cdot x \cdot v \cdot ds \right] \\
 2. \quad L'_b \cdot E \cdot J_m &= - \left[\frac{b}{l} \int_0^a x \cdot M_0 \cdot v \cdot ds + \frac{a}{l} \int_0^b x \cdot M_0 \cdot v \cdot ds \right] \\
 &\quad + X_a \cdot \left[\frac{b}{l} \int_0^a x \cdot y \cdot v \cdot ds + \frac{a}{l} \int_0^b y \cdot x \cdot v \cdot ds \right] \\
 &\quad + X_b \cdot \left[\frac{b^2}{l^2} \int_0^a x^2 \cdot v \cdot ds + \frac{a^2}{l^2} \int_0^b x^2 \cdot v \cdot ds \right].
 \end{aligned}$$

¹⁾ Beachte hierzu die Fußnote auf Seite 190.

Hierin bedeutet in Gleichung 1. genau wie im vorangehenden Abschnitt:

Glied I = $v \cdot F_0 \cdot f_y$ das statische Moment der auf die Rahmenachse projizierten $\frac{J_m}{J}$ -fachen Momentenfläche des Hauptsystems unter der äußeren Belastung bezogen auf die wagerechte Gelenkachse;

$\int y^2 \cdot v \cdot ds = v \cdot f_0 \cdot f_y$ das statische Moment der zu $X_a = 1$ gehörigen auf die Rahmenachse projizierten $\frac{J_m}{J}$ -fachen Momentenfläche bezogen auf die wagerechte Gelenkachse oder das Trägheitsmoment des mit $ds \cdot v$ belastet gedachten Rahmenezuges bezogen auf dieselbe Achse

$$= v \cdot \frac{s}{3} (H^2 + H \cdot h + h^2);$$

der Klammerwert zu $X_b = v \cdot f_0 \cdot f_y$ das statische Moment der zu $X_b = 1$ gehörigen, auf die Rahmenachse projizierten $\frac{J_m}{J}$ -fachen Momentenfläche bezogen ebenfalls auf diese Achse.

Ebenso bedeutet in Gleichung 2.:

Glied I = $v \cdot F_0 \cdot f_x$ das statische Moment der auf die Rahmenachse projizierten $\frac{J_m}{J}$ -fachen Momentenfläche des Hauptsystems unter der äußeren Belastung für den linken Teil bezogen auf die Lotrechte durch A, für den rechten Teil bezogen auf die Lotrechte durch B, multipliziert mit $\frac{a}{l}$ bzw. $\frac{b}{l}$;

der Klammerwert zu $X_a = v \cdot f_0 \cdot f_x$ das statische Moment der zu $X_a = 1$ gehörigen, auf die Rahmenachse projizierten $\frac{J_m}{J}$ -fachen Momentenfläche des Hauptsystems, für den linken Teil bezogen auf die Lotrechte durch A, für den rechten Teil bezogen auf die Lotrechte durch B, multipliziert mit $\frac{a}{l}$ bzw. $\frac{b}{l}$;

der Klammerwert zu $X_b =$ das statische Moment der zu $X_b = 1$

gehörigen, auf die Rahmenachse projizierten $\frac{J_m}{J}$ -fachen Momentenfläche des Hauptsystems, für den linken Teil bezogen auf die Lotrechte durch A , für den rechten Teil bezogen auf die Lotrechte durch B oder

$$= \frac{v \cdot s}{3} (H^2 + H \cdot h + h^2)$$

unter sinngemäßer Anwendung von H und h auf die wagerechten Abstände der einzelnen Rahmen-eckpunkte von der Lotrechten links durch A , rechts durch B , gleich dem Trägheitsmoment des linken Rahmensegels bezogen auf die Lotrechte durch A und des rechten Rahmensegels bezogen auf die Lotrechte durch B , multipliziert mit $\frac{b}{l}$ bzw. $\frac{a}{l}$.

Das in der Anmerkung zu Kapitel XVII Gesagte kommt also in bezug auf Gleichung 1. unverändert, in bezug auf Gleichung 2. sinn- gemäß für zwei Bezugsachsen (die Lotrechten durch A und B) zur Geltung¹⁾.

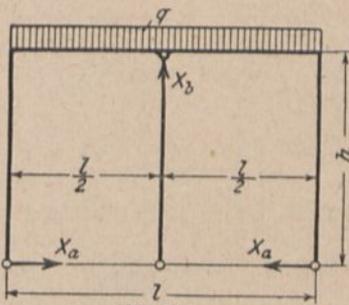


Abb. 195.

Anderenfalls wäre bei der Ausführung der Integrationen zu beachten, daß bei schräg laufenden Stabstücken das Ergebnis der Integration mit dem Längenverhältnis des Stabstückes zu seiner Projektion — für

die Glieder mit x mit der lotrechten, für die Glieder mit y mit der seitlichen — zu multiplizieren ist, weil ds in Richtung des Stabzuges zu verstehen ist (vgl. S. 121, Zeile 3 und S. 138, unten, auch Abb. 172 und 173 mit Text).

Beispiel: Bei symmetrischer Rahmenform und gleichmäßiger Belastung erhalten wir, wenn die Auflager unverschieblich angenommen werden und $v = 1$ gesetzt wird, mit $\frac{a}{l} = \frac{b}{l} = \frac{1}{2}$ (Abb. 195):

¹⁾ In bezug auf Gleichung 2. bringt Kapitel XXXVIII (Ziffer 2a und e) in Elastizitätsbedingung 5 eine allgemeinere und wesentlich einfachere Fassung, deren Benutzung daher gegenüber den hier vorliegenden Deutungsergebnissen vorzuziehen ist.

$$1. \quad 0 = -\frac{2}{3} \cdot \frac{ql^3}{8} \cdot h + X_a \left(\frac{h^3}{3} \cdot 2 + lh^2 \right) + X_b \left(\frac{l^2}{8} \cdot h \right)$$

$$2. \quad 0 = -\frac{2}{3} \cdot \frac{ql^3}{16} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{l}{2} + X_a \left(\frac{l^2}{8} \cdot h \right) + X_b \cdot \left(\frac{l^3}{48} \right)$$

oder

$$1. \quad \frac{ql^3 h}{12} = X_a \left(\frac{2}{3} h^3 + lh^2 \right) + X_b \cdot \frac{l^2}{8} \cdot h$$

$$2. \quad \frac{5ql^4}{384} = X_a \cdot \frac{l^2 h}{8} + X_b \cdot \frac{l^3}{48},$$

die sich dann noch weiter vereinfachen ließen.

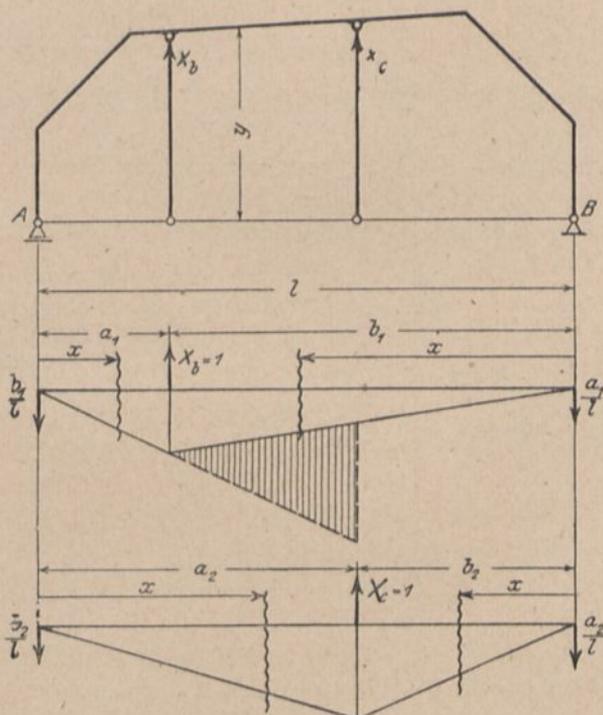


Abb. 196-198.

Kapitel XXI.

Rahmen mit zwei Pendelstützen¹⁾.

Für einen Rahmen mit zwei Pendelstützen (Abb. 196) erhalten wir:

¹⁾ Ein praktisches Beispiel für die Ausführung einer Brücke als Rahmen mit zwei Pendelstützen bringt Beton u. Eisen 1916, Heft II/III, S. 38.

1. $L'_a \cdot E \cdot J_m = \int M_a \cdot M_0 \cdot v \cdot ds + X_a \int M_a^2 \cdot v \cdot ds + X_b \int M_a \cdot M_b \cdot v \cdot ds + X_c \int M_a \cdot M_c \cdot v \cdot ds,$
2. $L'_b \cdot E \cdot J_m = \int M_b \cdot M_0 \cdot v \cdot ds + X_a \int M_b \cdot M_a \cdot v \cdot ds + X_b \int M_b^2 \cdot v \cdot ds + X_c \int M_b \cdot M_c \cdot v \cdot ds$
3. $L'_c \cdot E \cdot J_m = \int M_c \cdot M_0 \cdot v \cdot ds + X_a \int M_c \cdot M_a \cdot v \cdot ds + X_b \int M_c \cdot M_b \cdot v \cdot ds + X_c \int M_c^2 \cdot v \cdot ds.$

In diesen Gleichungen ist wieder M_a der Einfluß von $X_a = 1 = -1 \cdot y = -y$, M_b der Einfluß von $X_b = 1$, im Bereich der Strecke a_1 also gleich $-1 \cdot \frac{b_1}{l} \cdot x$, im Bereich der Strecke b_1 gleich $-1 \cdot \frac{a_1}{l} \cdot x$ (Abb. 197), M_c der Einfluß von $X_c = 1$ im Bereich der Strecke $a_2 = -1 \cdot \frac{b_2}{l} \cdot x$, im Bereich der Strecke b_2 gleich $-1 \cdot \frac{a_2}{l} \cdot x$ (Abb. 198), womit unsere Gleichungen lauten:

$$\begin{aligned}
 1. \quad L'_a \cdot E \cdot J_m &= - \int_0^l y \cdot M_0 \cdot v \cdot ds + X_a \int_0^l y^2 \cdot v \cdot ds + X_b \left[\frac{b_1}{l} \int_0^{a_1} y \cdot x \cdot v \cdot ds \right. \\
 &\quad \left. + \frac{a_1}{l} \int_0^{b_1} y \cdot x \cdot v \cdot ds \right] + X_c \left[\frac{b_2}{l} \int_0^{a_2} y \cdot x \cdot v \cdot ds + \frac{a_2}{l} \int_0^{b_2} y \cdot x \cdot v \cdot ds \right] \\
 2. \quad L'_b \cdot E \cdot J_m &= - \left[\frac{b_1}{l} \int_0^{a_1} x \cdot M_0 \cdot v \cdot ds + \frac{a_1}{l} \int_0^{b_1} x \cdot M_0 \cdot v \cdot ds \right] \\
 &\quad + X_a \left[\frac{b_1}{l} \int_0^{a_1} x \cdot y \cdot v \cdot ds + \frac{a_1}{l} \int_0^{b_1} x \cdot y \cdot v \cdot ds \right] \\
 &\quad + X_b \left[\frac{b_1^2}{l^2} \int_0^{a_1} x^2 \cdot v \cdot ds + \frac{a_1^2}{l^2} \int_0^{b_1} x^2 \cdot v \cdot ds \right] \\
 &\quad + X_c \left[\int_0^{a_2} \frac{b_1}{l} \cdot x \cdot \frac{b_2}{l} \cdot x \cdot v \cdot ds + \int_0^{b_2} \frac{a_2}{l} \cdot x \cdot \frac{a_1}{l} \cdot x \cdot v \cdot ds - \int_{a_1}^{a_2} \frac{b_2}{l} \cdot x \cdot \left(\frac{b_1 \cdot a_2}{l} - \frac{a_1 \cdot b_2}{l} \right) \frac{(x - a_1)}{(a_2 - a_1)} \cdot v \cdot ds \right]
 \end{aligned}$$

1) Beachte hierzu wieder die Fußnote auf Seite 190.

$$\begin{aligned}
3. \quad L'_c \cdot E \cdot J_m = & - \left[\frac{b_2}{l} \int_0^{a_2} x \cdot M_0 \cdot v \cdot ds + \frac{a_2}{l} \int_0^{b_2} x \cdot M_0 \cdot v \cdot ds \right] \\
& + X_a \left[\frac{b_2}{l} \int_0^{a_2} x \cdot y \cdot v \cdot ds + \frac{a_2}{l} \int_0^{b_2} x \cdot y \cdot v \cdot ds \right] \\
& + X_b \text{ [Klammerwert zu } X_c \text{ von Gleichung 2.]} \\
& + X_c \left[\frac{b_2^2}{l^2} \int_0^{a_2} x^2 \cdot v \cdot ds + \frac{a_2^2}{l^2} \int_0^{b_2} x^2 \cdot v \cdot ds \right].
\end{aligned}$$

Zur Ausführung des $\int M_b \cdot M_c$ ist das Dreieck für $X_b = 1$ durch Hinzufügung des in Abb. 197 gestrichelten Dreiecks ergänzt worden, wonach die Integration zunächst über a_2 und b_2 erfolgte, zum Schluß erfolgte der Abzug im Bereiche des Ergänzungsdreiecks durch das Integral über $a_2 - a_1$.

Die Deutung der Gleichungsglieder entspricht der im Kapitel XX. Das in der Anmerkung zu Kapitel XVII Gesagte kommt also wieder in bezug auf Gleichung 1. unverändert, in bezug auf Gleichung 2. sinngemäß für die linke und rechte Auflagervertikale mit Teilung der Flächen in den Wirkungsgraden von X_b , in bezug auf Gleichung 3. sinngemäß ebenfalls für die linke und rechte Auflagervertikale mit Teilung der Flächen in den Wirkungsgraden von X_c zur Geltung¹⁾.

Beispiel: Für den Rahmen mit geradem Querbalken und Stützen in den Drittelpunkten der Länge l erhalten wir hiernach bei gleichmäßiger Belastung mit q , wenn unverschiebliche Auflager angenommen werden und $v = 1$ ist:

$$1. \quad 0 = -\frac{2}{3} \frac{q l^2}{8} \cdot l \cdot h + X_a \left(\frac{2 h^3}{3} + l \cdot h^2 \right) + X_b \left(\frac{l^2}{9} \cdot h \right) + X_c \left(\frac{l^2}{9} \cdot h \right)$$

$$\begin{aligned}
2. \quad 0 = & - \left[\frac{2}{3} \left(\frac{q l}{2} \cdot \frac{l^3}{81} - \frac{q}{2} \cdot \frac{l^4}{324} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{q l}{2} \cdot \frac{8 l^3}{81} - \frac{q}{2} \cdot \frac{16 l^4}{324} \right) \right] \\
& + X_a \left(\frac{l^2}{9} \cdot h \right) + X_b \left[\frac{4}{9} \cdot \frac{l^3}{81} + \frac{1}{9} \cdot \frac{8 l^3}{81} \right] \\
& + X_c \left[\frac{2}{9} \cdot \frac{8}{81} \cdot l^3 + \frac{2}{9} \cdot \frac{l^3}{81} - l^3 \left(\frac{7}{243} - \frac{1}{54} \right) \right]
\end{aligned}$$

¹⁾ In bezug auf Gleichungen 2. und 3. beachte die Fußnote auf S. 198.

$$3. \quad 0 = -A + X_a \left(\frac{l^2}{9} \cdot h \right) + X_b \cdot B + X_c \left(\frac{1}{9} \cdot \frac{8l^3}{81} + \frac{4}{9} \cdot \frac{l^3}{81} \right)$$

oder

$$1. \quad \frac{q l^3 \cdot h}{12} = X_a \left(\frac{2h^3}{3} + l h^2 \right) + X_b \left(\frac{l^2}{9} \cdot h \right) + X_c \left(\frac{l^2}{9} \cdot h \right)$$

$$2. \quad \frac{22 q l^4}{1944} = X_a \left(\frac{l^2}{9} \cdot h \right) + X_b \left(\frac{8 l^3}{486} \right) + X_c \left(\frac{7 l^3}{486} \right)$$

$$3. \quad \frac{22 q l^4}{1944} = X_a \left(\frac{l^2}{9} \cdot h \right) + X_b \left(\frac{7 l^3}{486} \right) + X_c \left(\frac{8 l^3}{486} \right)$$

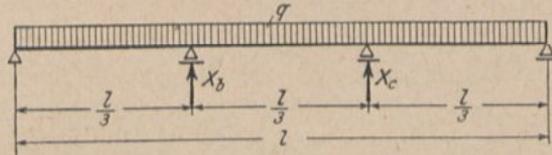


Abb. 199.

Mit $h = 0$ (Abb. 199) liefern Gleichung (2) und (3) die Stützendrücke X_b und X_c eines Trägers auf vier Stützen zu

$$X_b = X_c = \frac{11}{30} q l .$$

Mehrstielige Gelenkrahmen mit steif angeschlossenen Stützen.

Kapitel XXII.

Der Rahmen mit einer Zwischenstütze.

1. Berechnungsgang im allgemeinen.

Wir setzen einen beliebig gestalteten und beliebig belasteten, in drei feste Auflagergelenke endigenden Rahmen voraus, entwickeln unsere Gleichungen aber der Übersichtlichkeit wegen an einem einfachen rechteckigen System in der Erwartung, auch für diese Rahmengruppe ebenso einfache geometrische Beziehungen für die Gewinnung der statisch unbestimmten Größen aus den Bestimmungsgleichungen derselben herauslesen zu können, wie uns das für die Rahmen mit Pendelstützen in so einfacher Weise gelungen ist.

Gedachter Rahmen ist $3 \cdot 2 - 3 = 3$ -fach statisch unbestimmt (Abb. 200), X_a , X_b und C seien die unbestimmten Größen, das Hauptsystem der einfache Träger (Abb. 201).

Die Behandlung des Hauptsystems unter der gerade vorliegenden Belastung bietet keine Schwierigkeiten; es wären die Reaktionen auf das feste und bewegliche Lager zu ermitteln und die Momentenflächen auf die Rahmenachse aufzutragen; diese Momente mögen allgemein mit M_0 bezeichnet werden.

Wir betrachten nun nacheinander das Hauptsystem unter dem Einfluß der einzelnen statisch unbestimmten Größen und zeichnen für jeden Fall die zugehörige Momentenfläche ein (Abb. 202 bis 204).

Bei Zusammenlegung sämtlicher Momentenflächen erhalten wir in den einzelnen Stäben die Momente:

$$M_{y_1} = M_0 - X_a \cdot y_1$$

$$M_{x_1} = M_0 - C \cdot \frac{b}{l} \cdot x_1 - X_a \cdot h$$

$$M_{x_2} = M_0 - C \cdot \frac{a}{l} \cdot x_2 - (X_a + X_b) \cdot h$$

$$M_{y_2} = -X_b \cdot y_2$$

$$M_{y_3} = M_0 - (X_a + X_b) \cdot y_3.$$

Die Bestimmungsgleichungen für die statisch unbestimmten Größen lauten:

$$1. \quad L_a' \cdot E \cdot J_m = \int M_a \cdot M \cdot v \cdot ds$$

$$2. \quad L_b' \cdot E \cdot J_m = \int M_b \cdot M \cdot v \cdot ds$$

$$3. \quad L_c' \cdot E \cdot J_m = \int M_c \cdot M \cdot v \cdot ds.$$

Hierin ist sinngemäß:

M_a der Einfluß von $X_a = 1$, also $= -y_1$,

M_b der Einfluß von $X_b = 1$, also $= -y_2$,

M_c der Einfluß von $C = 1$, also $= -\frac{b}{l} \cdot x_1$ oder $-\frac{a}{l} \cdot x_2$ ¹⁾,

M das Gesamtmoment in jedem Querschnitt.

Gleichung 1. ergibt für die in Betracht kommenden Stäbe I, II–III und IV (in Stab V ist $M_a = 0!$) (Abb. 202a):

$$I = -\int_0^h y_1 (M_0 - X_a \cdot y_1) \cdot v \cdot ds$$

$$II-III = -\int_0^a y_1 \left(M_0 - C \cdot \frac{b}{l} \cdot x_1 - X_a \cdot h \right) \cdot v \cdot ds + -\int_0^b y_1 \left[M_0 - C \cdot \frac{a}{l} \cdot x_2 - (X_a + X_b) \cdot h \right] \cdot v \cdot ds$$

$$IV = -\int_0^h y_3 [M_0 - (X_a + X_b) \cdot y_3] \cdot v \cdot ds,$$

welche Ausdrücke zusammengenommen ohne weiteres als die algebraische Summe der statischen Momente der auf die Rahmenachse projizierten $\frac{J_m}{J}$ -fachen Momentenflächen aus sämtlichen Lasten des Außenrahmens bezogen auf die Verbindungslinie der zugehörigen Gelenke zu erkennen sind. L_a' wäre dem-

¹⁾ Beachte wieder die Fußnote auf Seite 190.

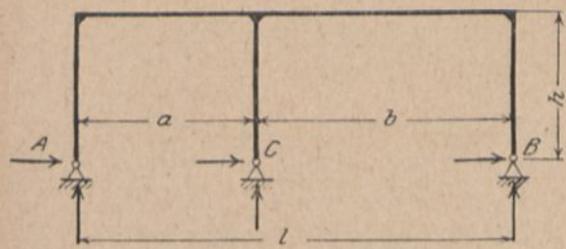


Abb. 200.

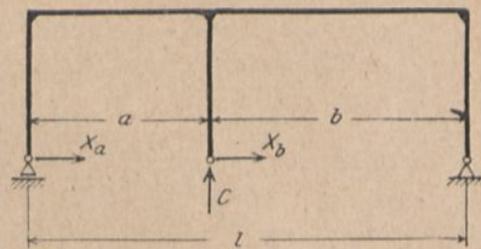


Abb. 201.

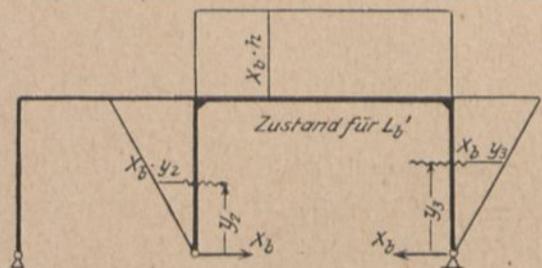


Abb. 202.

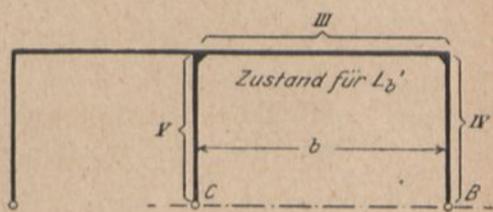


Abb. 202a.

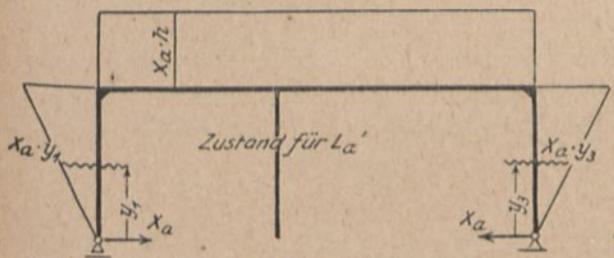


Abb. 203.

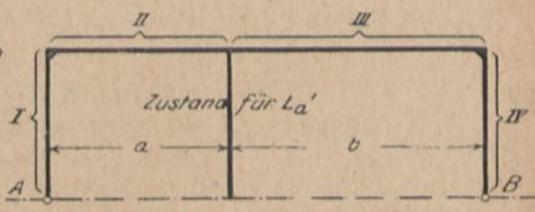


Abb. 203a.

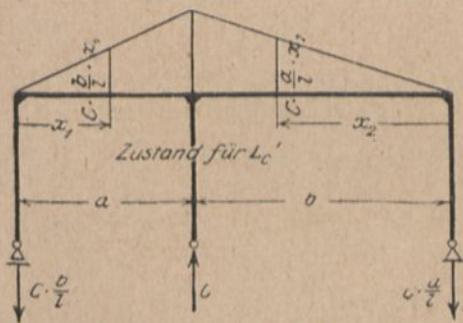


Abb. 204.

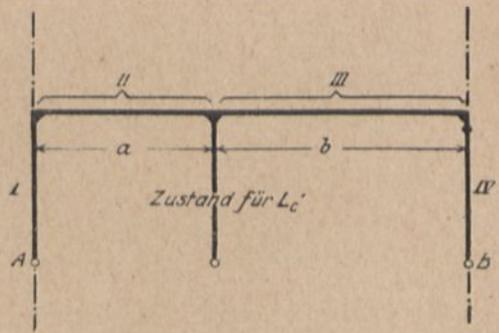


Abb. 204a.

nach die $E \cdot J_m$ -fache Verschiebung der Außenlager in Richtung ihrer Verbindungslinien gegeneinander oder gleich Null.

Gleichung 2. ergibt für die in Betracht kommenden Stäbe *V*, *III* und *IV* (für *I* und *II* ist $M_b = 0!$) (Abb. 203a):

$$V = - \int_0^h y_2 \cdot X_b \cdot y_2 \cdot v \cdot ds \quad (\text{für den Mittelstiel ist kein } M_0 \text{ vorhanden});$$

$$III = - \int_0^b y_2 \left[M_0 - C \cdot \frac{a}{l} \cdot x_2 - (X_a + X_x) \cdot h \right] \cdot v \cdot ds$$

$$IV = - \int_0^h y_3 \left[M_0 - (X_a + X_b) \cdot y_3 \right] \cdot v \cdot ds,$$

welche Ausdrücke zusammengenommen ohne weiteres als die algebraische Summe der statischen Momente der auf die Rahmenachse projizierten $\frac{J_m}{J}$ -fachen Momentenflächen aus sämtlichen Lasten auf dem Innenrahmen bezogen auf die Verbindungslinie der zugehörigen Gelenke zu erkennen sind. L_b' wäre demnach die $E \cdot J_m$ -fache Verschiebung des Mittellagers und des rechten Lagers gegeneinander oder gleich Null.

Gleichung 3. ergibt für die in Betracht kommenden Stäbe *II* und *III* (für *I*, *V* und *IV* ist $M_e = 0$) (Abb. 204a):

$$II = \frac{b}{l} \int_0^a x_1 \left(M_0 - C \cdot \frac{b}{l} \cdot x_1 - X_a \cdot h \right) \cdot v \cdot ds$$

$$III = \frac{a}{l} \int_0^b x_2 \left[M_0 + C \cdot \frac{a}{l} \cdot x_2 - (X_a + X_b) \cdot h \right] \cdot v \cdot ds,$$

wobei die Ausdrücke *II* und *III* ohne weiteres als die statischen Momente der auf die Riegelachse projizierten $\frac{J_m}{J}$ -fachen Momentenflächen aus sämtlichen Lasten, für die Öffnung a bezogen auf die Lotrechte durch das linke Außenlager und multipliziert mit dem zugehörigen Reaktionsverhältnis von $C = \frac{b}{l}$, für die Öffnung b bezogen auf die Lotrechte durch das rechte

Auflager und multipliziert mit dem Reaktionsverhältnis von $C = \frac{a}{l}$ zu erkennen sind¹⁾. L_e' wäre demnach gleich der Summe der Verschiebungen beider Felder in lotrechter Richtung, positiv bei Zusammendrückung der Stützen, negativ bei Nachgiebigkeit in der Lagerung oder gleich Null anzunehmen.

Es besteht keine Schwierigkeit darin, nach den zum Ausdruck gebrachten Elastizitätsbedingungen jeden beliebigen entsprechenden Rahmenfall zu behandeln. Sollte man sich dabei über das Vorzeichen der Momentenflächen oder den Richtungssinn der unbestimmten Größen nicht im klaren sein, so setze man alle Werte als positiv ein; es ergeben sich dann die einzelnen Größen von selbst mit dem richtigen Vorzeichen.

2. Beispiele.

Beispiel 1: Rechteckiger Gelenkrahmen bei Voraussetzung konstanten Trägheitsmomentes und unnachgiebiger Lagerung unter lotrechter Belastung von $1,0 \text{ t}^0/\text{m}$ (Abb. 205). Die zu bildenden statischen Momente bezeichnen wir mit \mathcal{E} .

1. Zustand für L_a' (Außenrahmen, Abb. 206—209).

$$\text{Belastung: (206)} \quad M_0 = \frac{1,0 \cdot 8,0^2}{8} = 8,0 \text{ mt}$$

$$F_0 = \frac{2}{3} \cdot 8,0 \cdot 8,0 = 42,67 \text{ tm}^2$$

$$\mathcal{E} = F_0 \cdot f_y = 42,67 \cdot 4,0 = 170,67 \text{ tm}^3$$

$$X_a = 1: (207) \quad \mathcal{E} = \int y^2 ds = 2 \cdot \frac{4,0^3}{3} + 8,0 \cdot 4,0^2 = 170,67 \text{ tm}^3$$

$$X_b = 1: (208) \quad \mathcal{E} = \int y^2 ds = 1 \cdot \frac{4,0^3}{3} + 5,0 \cdot 4,0^2 = 101,34 \text{ tm}^3$$

$$C = 1: (209) \quad F = 1,875 \cdot \frac{8,0}{2} = 7,5 \text{ tm}^2$$

$$\mathcal{E} = 7,5 \cdot 4,0 = 30 \text{ tm}^3.$$

¹⁾ In bezug auf diese Beziehungen bringt Kapitel XXXVIII (Ziffer 2b und e) in Elastizitätsbedingung 5 die schon in der Fußnote zu Seite 198 hervorgehobene Vereinfachung.

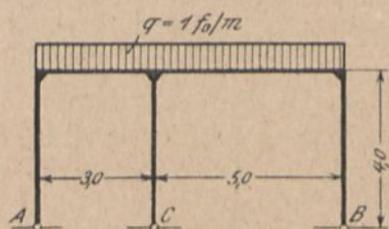


Abb. 205.

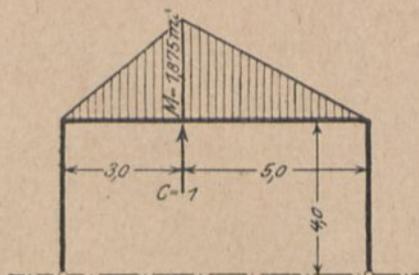


Abb. 209.

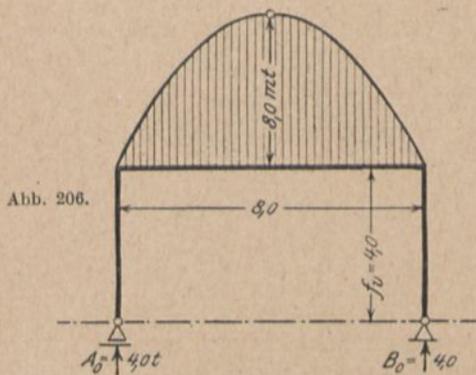


Abb. 206.

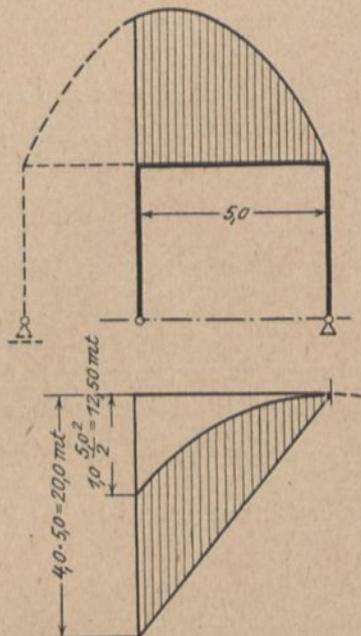


Abb. 210.

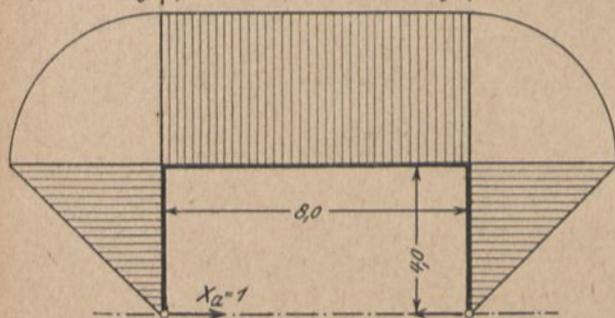


Abb. 207.

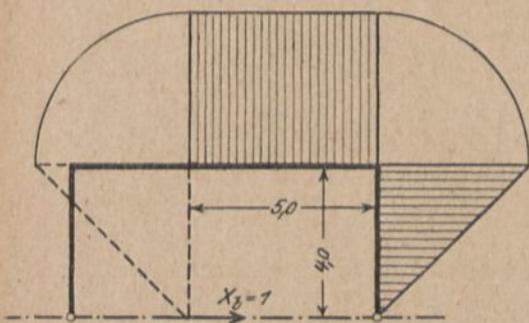


Abb. 208.

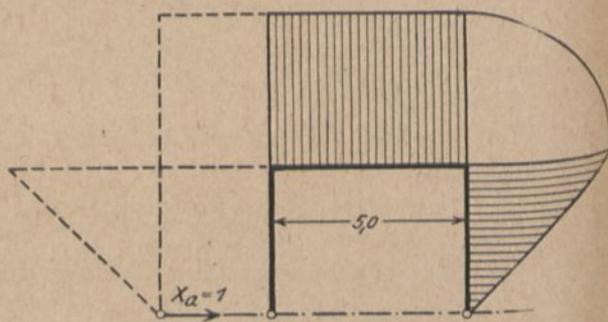


Abb. 211.

2. Zustand für L_b' (Innenrahmen, Abb. 210–213).

$$\text{Belastung: (210) } F_0 = \frac{20,0 \cdot 5,0}{2} - \frac{12,5 \cdot 5,0}{3} = 29,15 \text{ tm}^2$$

$$\mathcal{E} = 29,15 \cdot 4,0 = 116,6 \text{ tm}^3$$

$$X_a = 1: (211) \quad \mathcal{E} = \int y^2 ds = \frac{1 \cdot 4,0^3}{3} + 5,0 \cdot 4,0^2 = 101,34 \text{ tm}^3$$

$$X_b = 1: (212) \quad \mathcal{E} = \int y^2 ds = \frac{2 \cdot 4,0^3}{3} + 5,0 \cdot 4,0^2 = 122,67 \text{ tm}^3$$

$$C = 1: (213) \quad F = 1,875 \cdot \frac{5,0}{2} = 4,69 \text{ tm}^2$$

$$\mathcal{E} = 4,69 \cdot 4,0 = 18,75 \text{ tm}^3.$$

3. Zustand für L_c' (Riegel, Abb. 214–217).

$$\begin{aligned} \text{Belastung: (214) } \mathcal{E} &= \frac{5}{8} \left(\frac{12,0 \cdot 3,0}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3,0 - \frac{4,5 \cdot 3,0}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot 3,0 \right) \\ &\quad + \frac{3}{8} \left(\frac{20,0 \cdot 5,0}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 5,0 - \frac{12,5 \cdot 5,0}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot 5,0 \right) \\ &= 49,5 \text{ tm}^3 \end{aligned}$$

$$X_a = 1: (215) \quad \mathcal{E} = 4,0 \cdot 3,0 \cdot \frac{3,0}{2} \cdot \frac{5}{8} + 4,0 \cdot 5,0 \cdot \frac{5,0}{2} \cdot \frac{3}{8} = 30,0 \text{ tm}^3$$

$$X_b = 1: (216) \quad \mathcal{E} = 4,0 \cdot 5,0 \cdot \frac{5,0}{2} \cdot \frac{3}{8} = 18,75 \text{ tm}^3$$

$$\begin{aligned} C = 1: (217) \quad \mathcal{E} &= \frac{5}{8} \cdot 1,875 \cdot \frac{3,0}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{3}{8} \cdot 1,875 \cdot \frac{5,0}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 5,0 \\ &= 9,38 \text{ tm}^3. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

1. $0 = 170,67 + X_a \cdot 170,67 + X_b \cdot 101,34 + C \cdot 30,0$
2. $0 = 116,60 + X_a \cdot 101,34 + X_b \cdot 122,67 + C \cdot 18,15$
3. $0 = 49,50 + X_a \cdot 30,0 + X_b \cdot 18,75 + C \cdot 9,38.$

Hieraus

$$X_a = -0,101 \text{ t}^0$$

$$X_b = -0,158 \text{ t}^0$$

$$C = -4,54 \text{ t}^0,$$

wobei zum Ausdruck kommt, daß die unbestimmten Größen negative Momente erzeugen. Abb. 218 zeigt die endgültige Momentenfläche mit dem Gegendruck am festen Lager B gleich der Summe beider Schübe.

Hätten wir das feste Lager links angenommen (Abb. 219), so erhielten wir unter Beachtung, daß der Zustand für L_b' sich jetzt

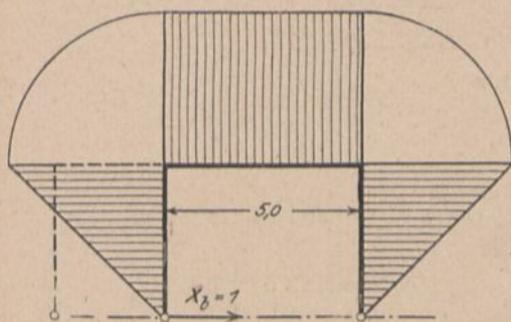


Abb. 212.

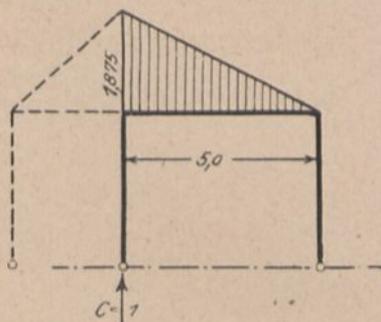


Abb. 213.

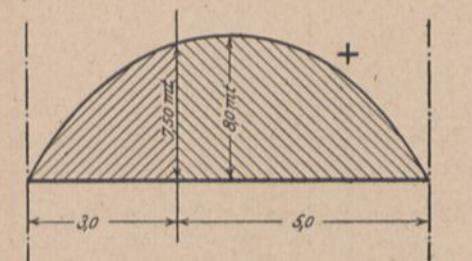


Abb. 212.

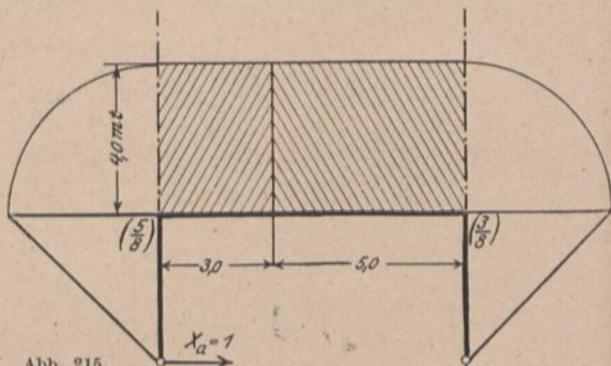


Abb. 215.

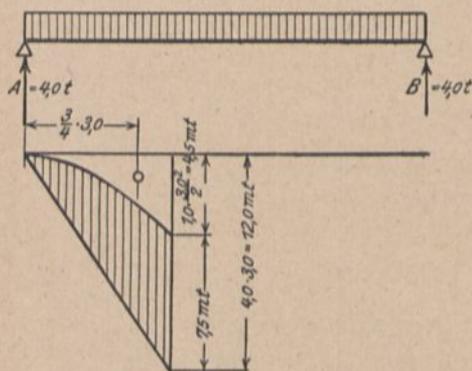


Abb. 216.

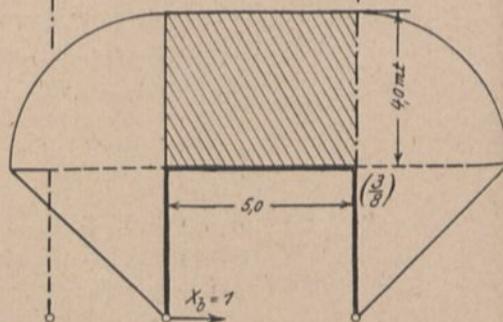


Abb. 217.

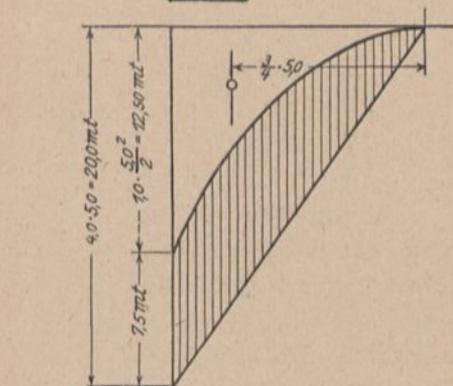
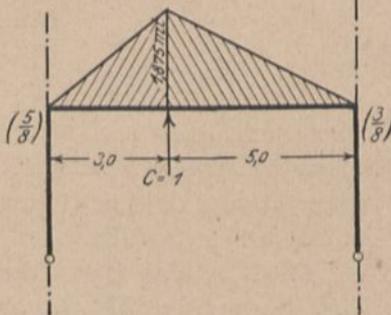


Abb. 214.

auf das linke Rahmenfeld (Abb. 220) bezieht:

$$X_a = -0,259 \text{ t}^0$$

$$X_b = +0,158 \text{ t}^0$$

$$C = -4,54 \text{ t}^0,$$

so daß X_b entgegengesetzt der Annahme bei dieser Lagerung positive Momente erzeugt, im ganzen aber genau dieselbe Kraft-

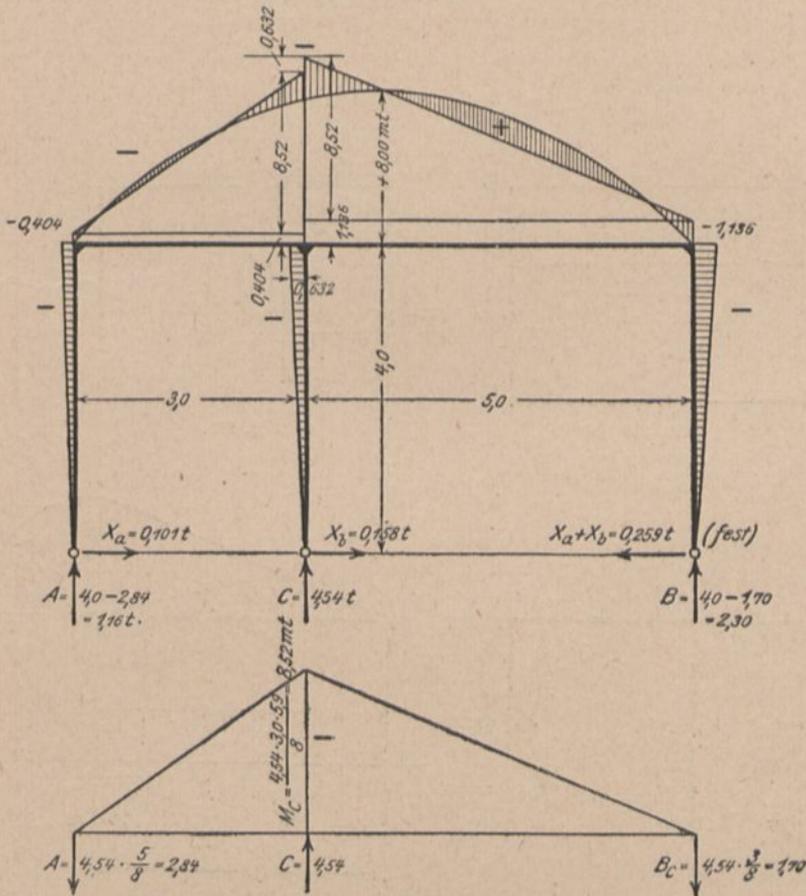


Abb. 218.

verteilung hervortritt (Abb. 221) wie zuvor, da der Gegendruck am gedachten festen Lager sich jetzt aus der Differenz beider Schübe ergibt.

Beispiel 2: Bei seitlicher Belastung — etwa durch eine Einzellast von $W = 2 \text{ t}^0$ in Riegelhöhe — erhalten wir für die drei zur M_0 -Fläche gehörigen Gleichungswerte an Hand von

Abb. 222, also Annahme des festen Lagers wieder in B , für Zustand

$$L'_a: \textcircled{C} = \frac{8,0 \cdot 8,0}{2} \cdot 4,0 + \frac{8,0 \cdot 4,0}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 4,0 = 170,67 \text{ tm}^3$$

$$L'_b: \textcircled{C} = \frac{3,0 + 8,0}{2} \cdot 5,0 \cdot 4,0 + \frac{8,0 \cdot 4,0}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 4,0 = 152,67 \text{ tm}^3$$

$$L'_c: \textcircled{C} = \frac{3,0 \cdot 3,0}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3,0 \cdot \frac{5}{8} + \frac{3,0 \cdot 5,0}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 5,0 \cdot \frac{3}{8} \\ + \frac{8,0 \cdot 5,0}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 5,0 \cdot \frac{3}{8} = 27,5 \text{ tm}^3$$

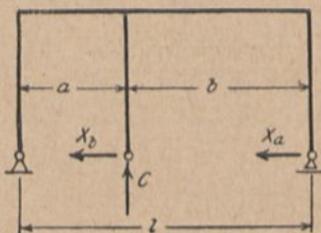


Abb. 219.

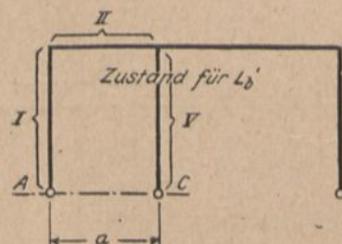


Abb. 220.

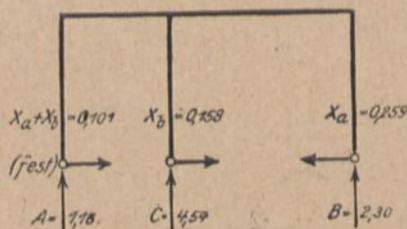


Abb. 221.

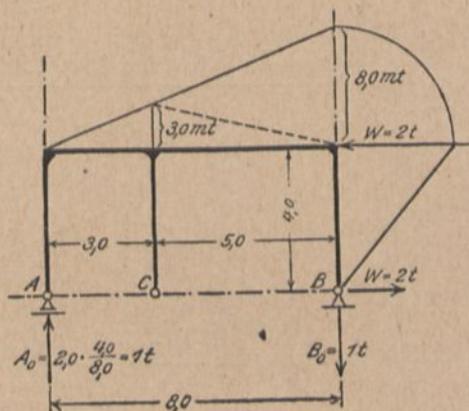


Abb. 222.

und damit die Bestimmungsgleichungen — die Beiwerte der statisch unbestimmten Größen bleiben bekanntlich als nur von der Form abhängig unverändert —:

1. $0 = 170,67 + X_a \cdot 170,67 + X_b \cdot 101,34 + C \cdot 30,0$
2. $0 = 152,67 + X_a \cdot 101,34 + X_b \cdot 122,67 + C \cdot 18,75$
3. $0 = 27,50 + X_a \cdot 30,0 + X_b \cdot 18,75 + C \cdot 9,38,$

woraus

$$X_a = -0,648 \text{ t}^0$$

$$X_b = -0,832 \text{ t}^0$$

$$C = +0,802 \text{ t}^0.$$

X_a und X_b erzeugen also an dem angenommenen Hauptsystem negative Momente, ebenso ihr Gegendruck am festen Lager B : $X_a + X_b = 1,48 \text{ t}^0$, der sich weiter mit der Reaktion von 2 t^0 zu dem X_a und X_b gleichgerichteten wagerechten Druck $0,52 \text{ t}^0$

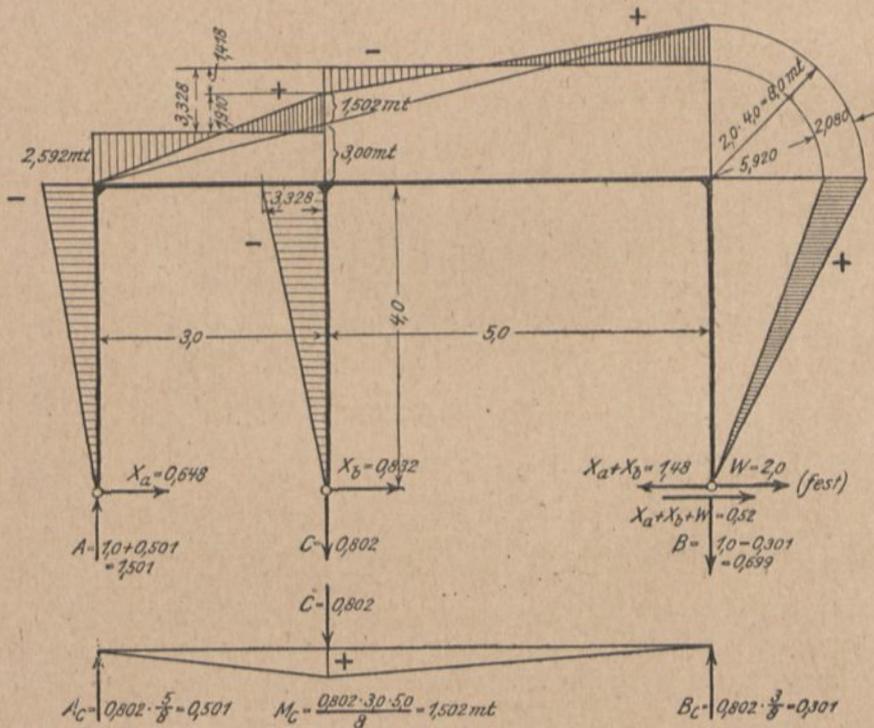


Abb. 223.

zusammensetzt, C erzeugt das positive Moment von $1,502 \text{ mt}$ über der Zwischenstütze, die sonach Zug erhält. Abb. 223 zeigt die endgültige Momentenfläche.

Kontrolle: Zur Kontrolle unserer Rechnung wenden wir die Elastizitätsbedingungen — genau wie vor für die einzelnen Flächen — auf die fertige Momentenfläche an. Haben wir richtig gerechnet, dann muß

1. die Summe der statischen Momente der Flächen auf dem Außenrahmen AB gleich Null sein,

2. die Summe der statischen Momente der Flächen auf dem Innenrahmen CB gleich Null sein,
- 3 die Summe der statischen Momente der Flächen auf dem Riegel, für den linken Teil bezogen auf die Lotrechte durch A und multipliziert mit $\frac{5}{8}$, für den rechten Teil bezogen auf die Lotrechte durch B und multipliziert mit $\frac{3}{8}$, gleich Null sein.

Wir erhalten

$$\begin{aligned} \text{zu 1.: } & (-2,592 + 2,080) \frac{4,0}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 4,0 + (-2,592 + 1,910) \frac{3,0}{2} \cdot 4,0 \\ & + (-1,418 + 2,080) \frac{5,0}{2} \cdot 4,0 = -6,82 + 6,62 = -0,20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{zu 2.: } & (-3,328 + 2,080) \frac{4,0}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 4,0 + (-1,418 + 2,080) \frac{5,0}{2} \cdot 4,0 \\ & = -6,66 + 6,62 = -0,04 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{zu 3.: } & \left(-2,592 \cdot \frac{3,0}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 3,0 + 1,910 \cdot \frac{3,0}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3,0 \right) \frac{5}{8} \\ & + \left(-1,418 \cdot \frac{5,0}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 5,0 + 2,080 \cdot \frac{5,0}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 5,0 \right) \frac{3}{8} \\ & = +1,15 - 1,18 = -0,03 \end{aligned}$$

und finden damit unsere Rechnung als richtig bestätigt, denn die Abweichungen von Null rühren nur von der Benutzung des Rechenschiebers in der ganzen Rechnung her und sind jedenfalls den gegenseitig sich aufhebenden Beträgen gegenüber unbedeutend. Gegebenenfalls wäre eine Verschiedenheit in den Querschnittsstärken durch Multiplikation der einzelnen Summenglieder mit den Werten $v = \frac{J_m}{J}$ für die einzelnen Rahmenstücke gebührend zu berücksichtigen; in unserem Falle war v durchweg $= 1$.

Kapitel XXIII.

Die Eckmomente als unbestimmte Größen.

1. Berechnungsgang im allgemeinen.

Soweit der charakteristische Verlauf der Momente von vornherein festgestellt werden kann — und bei beliebiger seitlicher Belastung ist das der Fall — erweist sich die Anwendung der Elastizitätsbedingungen auf die zugehörige Gesamtmomenten-

fläche¹⁾ als der einfachste Weg der Rahmenberechnung²⁾. Im Gegensatz zu dem bisherigen Berechnungswege gewinnen wir dann zuerst die Eckmomente, welche somit unsere unbekannt GröÙen darstellen, und bestimmen die AuflagergröÙen mittels derselben und mit Benutzung der Gleichgewichtsbedingungen hinterher.

Die Berücksichtigung einer Verschiedenheit in den Querschnittsstärken der einzelnen Stäbe unter sich erfolgt wie bisher einfach durch Multiplikation der Summanden unserer Bestimmungsgleichungen mit den Werten $v = \frac{J_m}{J}$ nach vorheriger Feststellung derselben für die einzelnen Rahmenstücke.

2. Anwendung.

Für den in Beispiel 2 Kapitel XXII behandelten Fall erhielten wir auf diese Weise nach Aufzeichnung der Momentenfläche (Abb. 224) mit $v = 1$ die Bestimmungsgleichungen:

$$1. \quad (-M_1 + M_4) \frac{4,0}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 4,0 + (-M_1 + M_2) \frac{3,0}{2} \cdot 4,0 \\ + (-M_3 + M_4) \frac{5,0}{2} \cdot 4,0 = 0$$

$$2. \quad [-(M_2 + M_3) + M_4] \frac{4,0}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 4,0 + (-M_3 + M_4) \frac{5,0}{2} \cdot 4,0 = 0$$

$$3. \quad \left(-M_1 \cdot \frac{3,0}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 3,0 + M_2 \cdot \frac{3,0}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3,0 \right) \frac{5}{8} \\ + \left(-M_3 \cdot \frac{5,0}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 5,0 + M_4 \cdot \frac{5,0}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 5,0 \right) \frac{3}{8} = 0$$

und als vierte Gleichung

$$4. \quad M_1 + M_2 + M_3 + M_4 = W \cdot h = 2,0 \cdot 4,0 = 8,0,$$

wobei alle Werte M als positiv einzusetzen sind.

¹⁾ An Stelle der in allen Fällen möglichen und in den vorangehenden Kapiteln gezeigten Anwendung auf die einzelnen Momentenflächen (von M_0, X_a, X_b u. s. f.).

²⁾ Das Verfahren schließt von vornherein eine Vernachlässigung des Einflusses der Normalkräfte und Querkräfte ein; derselbe wäre durch eine besondere Rechnung festzustellen, kommt aber bekanntlich wegen seiner geringen GröÙe in den weitaus meisten Fällen nicht zur Geltung. Berücksichtigung von Wärmeschwankungen wie bisher (vgl. S. 114, 121, 155 und Kap. XXIX).

Wir erhalten aus diesen Gleichungen für M_1 bis M_4 die in Beispiel 2 ermittelten Werte und finden anschließend

$$H_A = \frac{M_1}{h} = \frac{2,592}{4,0} = 0,648 \text{ t}^\circ$$

$$H_C = \frac{M_2 + M_3}{h} = \frac{3,328}{4,0} = 0,832 \text{ t}^\circ$$

$$H_B = \frac{M_4}{h} = \frac{2,080}{4,0} = 0,520 \text{ t}^\circ$$

$$\underline{\sum H = W = 2,000 \text{ t}^\circ.}$$

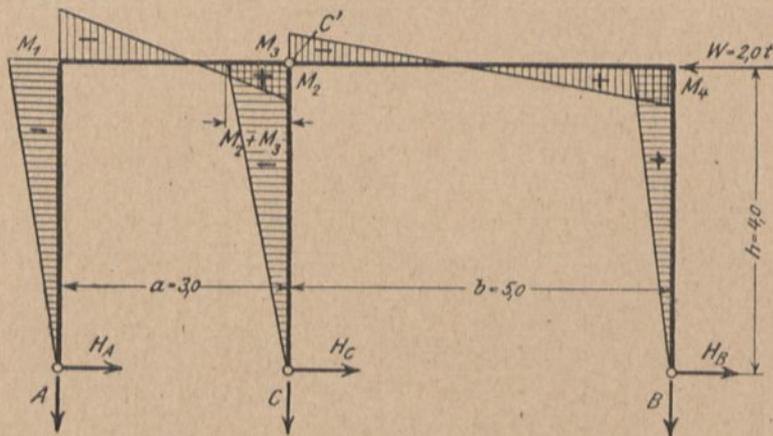


Abb. 224.

Nach $\sum M = 0$ ist dann für Drehpunkt C'

$$A \cdot a + H_A \cdot h = M_2$$

$$A \cdot 3,0 - 2,592 = +1,910$$

$$A = 1,501 \text{ t}^\circ$$

und

$$B \cdot b + H_B \cdot h = M_3$$

$$B \cdot 5,0 + 2,080 = -1,418$$

$$B = -0,699 \text{ t}^\circ.$$

Nach $\sum V = 0$ ist

$$A + C + B = 0$$

$$+1,501 + C - 0,699 = 0$$

$$C = -0,802 \text{ t}^\circ.$$

3. Darstellung der Einzelrahmen und Vorzeichen der Momentenflächen auf den Mittelstielen.

Bei der Aufstellung der Bestimmungsgleichungen für die vier unbekanntenen Größen hätten wir die Elastizitätsbedingung, die wir auf den Außenrahmen und den rechten Innenrahmen an-

gewendet haben, auch auf den linken Innenrahmen anwenden können und dadurch eine weitere Bestimmungsgleichung gewonnen, über die wir als Ersatz einer der übrigen oder als Ergänzung derselben nach Belieben verfügen können. Die Momentenfläche auf dem Mittelstiel haben wir in unserem Beispiel als negativ eingeführt, weil der Mittelstiel gemäß unserer Zerlegung dem rechten Innenrahmen zugeordnet war und er als linker Außenstiel eines rechts belasteten Rahmens außen — d. i. linksseitig — Zugspannungen erhalten müßte. Bei oben gedachter Zerlegung des Rahmens gehörte der Mittelstiel dem linken Innenrahmen an und erhielte als rechter Außenstiel desselben bei der vorliegenden Belastung innen — d. i. wieder linksseitig — Zugspannungen, so daß für diesen Rahmen die Momentenfläche infolge des Eckmomentes $M_2 + M_3$ als positiv anzusetzen wäre.

Wir erkennen, daß das Vorzeichen der Momentenfläche auf den Mittelstielen bei der Darstellung der Einzelrahmen immer dem Vorzeichen des Eckmomentes zu entsprechen hat, welches daselbst der dem Einzelrahmen zugehörige Riegel besitzt. Die Momentenfläche eines Mittelstieles gehört also beiden, nach links und rechts anschließenden Einzelrahmen an. Für mehr als dreistielige Rahmen folgt hieraus die Elastizitätsbedingung, daß die Summe der statischen Momente der Momentenflächen auch jeden Mittelfeldes für sich bezogen auf die Gelenkachse gleich der $E \cdot J_m$ -fachen Verschiebung der betreffenden Gelenkstellen oder gleich Null ist. Bei der Darstellung der Einzelrahmen aus einem oder mehreren Feldern eines mehrstieligen Rahmens bestehen also hinsichtlich der auf die Gelenkachse Bezug habenden Elastizitätsbedingung keinerlei Beschränkungen¹⁾.

Für das unter 1. behandelte Beispiel würde die gedachte weitere Elastizitätsbedingung also lauten:

$$5. \quad (-M_1 + M_2 + M_3) \frac{4,0}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 4,0 + (-M_1 + M_2) \frac{3,0}{2} \cdot 4,0 = 0.$$

¹⁾ Daß auch die auf die Auflagerlotrechten Bezug habende Elastizitätsbedingung für jeden aus zwei oder mehr Feldern eines mehrstieligen Rahmens darstellbaren Einzelrahmen Gültigkeit behält, ist bei der allgemeineren Fassung dieser Elastizitätsbedingung in Kapitel XXXVIII, Ziffer 2, S. 289 erwiesen.

Haben wir wie hier alle Eckmomente gleich mit ihrem zugehörigen Vorzeichen eingesetzt, so erhalten wir zahlenmäßig lauter positive Werte dafür. Führen wir alle Momente als positiv ein, so ergeben sich die zugehörigen Vorzeichen aus der Rechnung von selbst.

4. Symmetrische Fälle.

Für den Fall der Symmetrie — und zwar sowohl hinsichtlich der Form als der Querschnittsstärken — haben wir es nur noch mit zwei unbekanntem Eckmomenten zu tun,

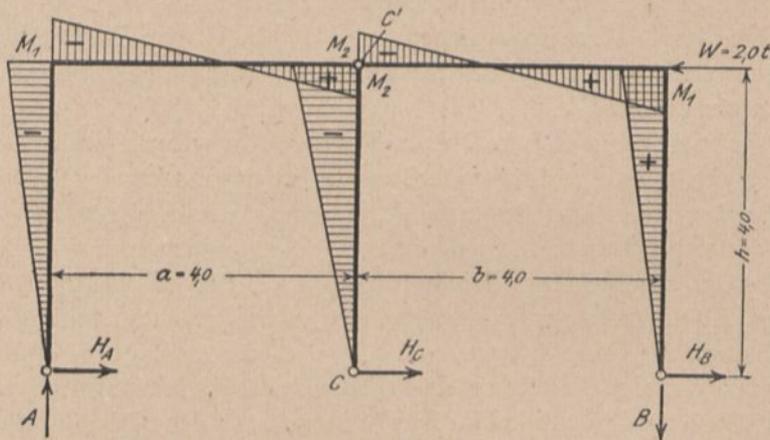


Abb. 225.

M_1 und M_2 (Abb. 225). Zu ihrer Bestimmung können wir außer der Gleichgewichtsbedingung $\sum M = 0$ in diesem Fall nur die zweite der im vorangehenden Beispiel verwendeten Elastizitätsbedingungen benutzen, welche sich auf einen der Innenrahmen bezog; für den Außenrahmen sowohl als für den Riegel führt die Anwendung der Elastizitätsbedingungen zu dem Ergebnis $0 = 0$, weil die Momentenflächen sich für diese Fälle gegenseitig aufheben. Wir erhalten für den Rahmen CB also

1. $(-2M_2 + M_1) \frac{4,0}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 4,0 + (-M_2 + M_1) \frac{4,0}{2} \cdot 4,0 = 0$
2. $2M_1 + 2M_2 = 2,0 \cdot 4,0 = 8,0$.

Hieraus $M_2 = 1,67$ mt, $M_1 = 2,33$ mt und damit

$$H_A = \frac{M_1}{h} = \frac{2,33}{4,0} = 0,583 \text{ t}^\circ$$

$$H_B = \text{ebenfalls} = 0,583 \text{ t}^\circ$$

$$H_C = \frac{2 M_2}{h} = \frac{2 \cdot 1,67}{4,0} = 0,834 \text{ t}^\circ$$

$$\underline{\sum H = W = 2,00 \text{ t}^\circ.}$$

Nach $\sum M = 0$ ist dann für Drehpunkt C'

$$A \cdot a + H_A \cdot h = M_2$$

$$A \cdot 4,0 + 2,33 = + 1,67$$

$$A = 1,0 \text{ t}^\circ$$

und daher
und

$$B = - 1,0 \text{ t}^\circ$$

$$C = 0.$$

Für den Rahmen AC erhielten wir genau dieselben Bestimmungsgleichungen, nur daß sich in Gleichung (1) alle Vorzeichen umkehrten; die Momentenfläche auf dem Mittelstiel wäre also für diesen Fall als positiv einzusetzen.

Kapitel XXIV.

Der Rahmen mit zwei Zwischenstützen.

1. Der Berechnungsgang im allgemeinen.

Die im vorangehenden Kapitel zum Ausdruck gebrachten Elastizitätsbedingungen lassen sich ohne weiteres in gehöriger

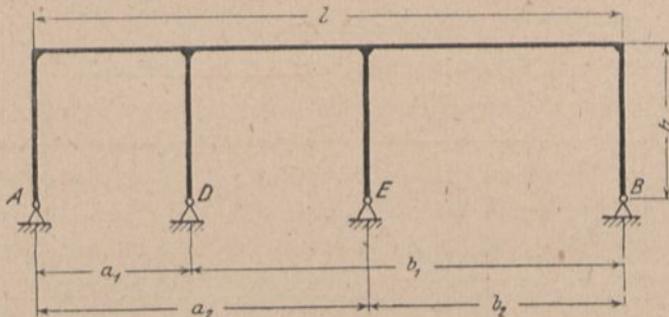


Abb. 226.

Erweiterung auch auf den Rahmen mit zwei fest angeschlossenen Zwischenstützen (Abb. 226 u. 227) verwenden. Das lehrt ein Blick auf die Figurenreihe 228—232, welche die entsprechenden Zerlegungen veranschaulicht.

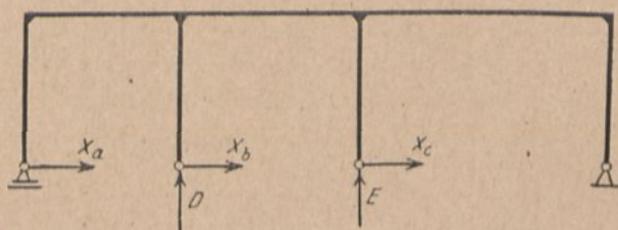


Abb. 227.

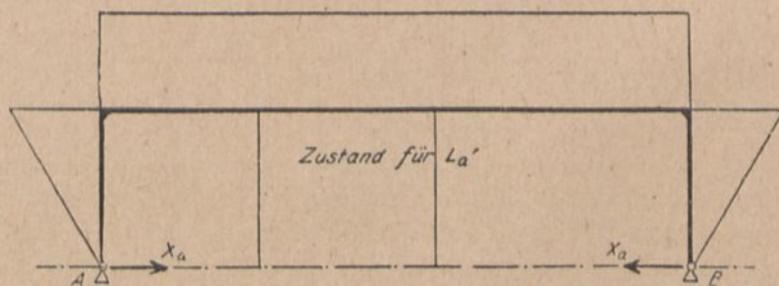


Abb. 228.

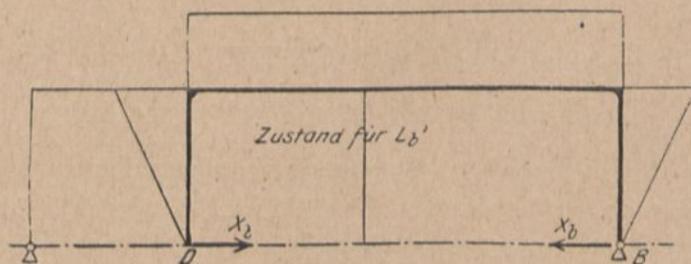


Abb. 229.

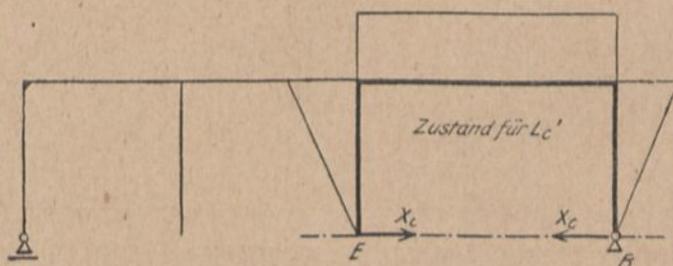


Abb. 230.

Das System wird fünffach statisch unbestimmt. Für die Bildung der rechten Seiten der fünf Bestimmungsgleichungen kommen die auf den jeweilig stark ausgezogenen Rahmenstücken ruhenden Momentenflächen aus sämtlichen Lasten in Frage, und

zwar für Gleichung (1) bis (3) bezogen auf AB , DB und EB ; für Gleichung (4) und (5) kommen wieder nur die auf dem Riegel ruhenden Momentenflächen aus sämtlichen Lasten in Ansatz, für a_1 und a_2 bezogen auf die Lotrechte durch A und multipliziert mit dem Reaktionsverhältnis $\frac{b_1}{l}$ und $\frac{b_2}{l}$, für b_1 und b_2 be-

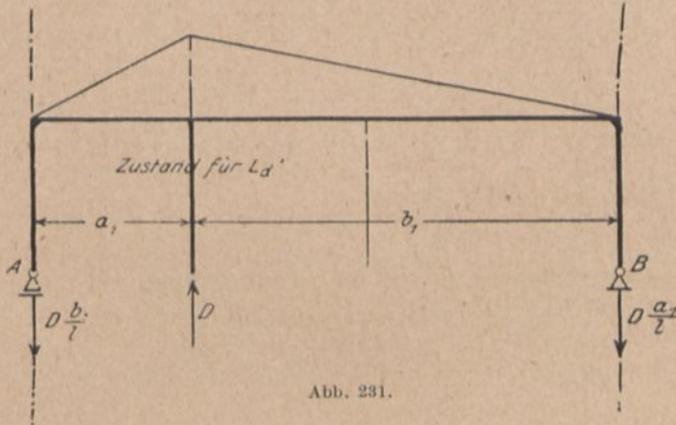


Abb. 231.

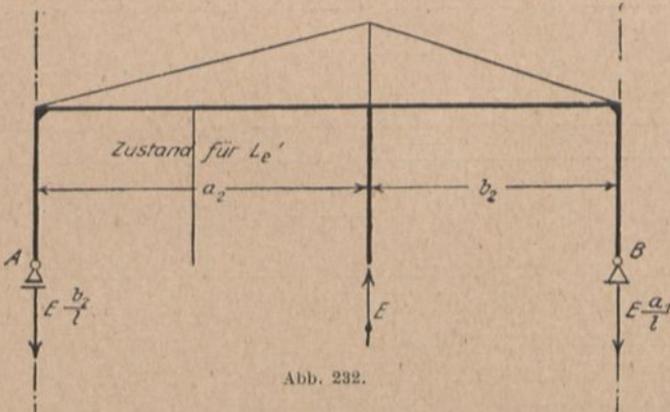


Abb. 232.

zogen auf die Lotrechte durch B und multipliziert mit $\frac{a_1}{l}$ und $\frac{a_2}{l}$).

Wir verweisen für die Anwendung auf die Beispiele im vorangegangenen Kapitel.

2. Die Eckmomente als unbestimmte Größen.

Behandeln wir einen symmetrischen Rahmen unter seitlicher Belastung nach dem unter Ziffer 2 des vorangegangenen Kapitels

¹⁾ Beachte hierzu die Fußnote Seite 207.

gezeigten Verfahren, so stehen uns zur Bestimmung der drei unbekanntenen Eckmomente M_1 , M_2 und M_3 die Gleichgewichtsbedingung $\sum M = 0$, also $(M_1 + M_2 + M_3) 2 = W \cdot h$ und zwei Elastizitätsbedingungen zur Verfügung. Diese sind (Abb. 233)

1. die Summe der statischen Momente der fertigen Momentenfläche auf dem Innenrahmen EB gleich Null und
2. die Summe der statischen Momente der Momentenflächen auf dem Riegel, für den Teil a bezogen auf die Lotrechte durch A und multipliziert mit $\frac{a+b}{l}$, für den Teil $a+b$ bezogen auf die Lotrechte durch B und multipliziert mit $\frac{a}{l}$, gleich Null¹⁾.

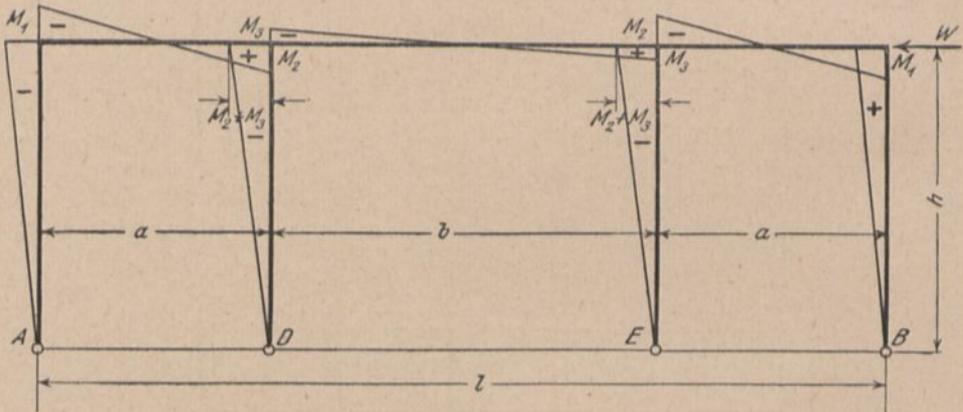


Abb. 233.

Die Anwendung der unter 1. genannten Elastizitätsbedingung auf den Außenrahmen AB führt wie unter Ziffer 4 Kap. XXIII gezeigt wieder zu dem Ergebnis $0 = 0$, weil die Momentenflächen sich für diesen Fall aufheben; für den Rahmen DB aber erhielten wir dasselbe Ergebnis wie für den Rahmen EB , weil die Momentenflächen auf den Mittelstielen gleich groß sind, das Hinzukommen des Mittelfeldes aber für den Riegel keinen Beitrag liefert, weil die diesem zugehörigen Momentenflächen sich gegenseitig aufheben.

Die Vorzeichen der Momentenflächen auf den Mittelstielen wären umzukehren, wenn wir an Stelle des rechten Rahmenfeldes EB das linke AD und an Stelle des Rahmens DB den Rahmen AE betrachten (Erklärungen Kapitel XXIII, Ziffer 3).

¹⁾ Beachte hierzu die Fußnote Seite 207.

Eingespannte einfache Rahmen.

Kapitel XXV.

Bestimmungsgleichungen der statisch unbestimmten Größen.

1. Berechnungsgang im allgemeinen.

Ein solcher Rahmen ist mit je drei unbekanntnen Größen an jedem Auflager (Abb. 234) $2 \cdot 3 - 3 =$ dreifach statisch unbestimmt. A , X und M_A seien die drei statisch unbestimmten Größen, das Hauptsystem der einfache rechts eingespannte Krag-

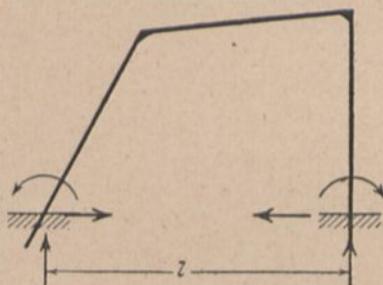


Abb. 234.

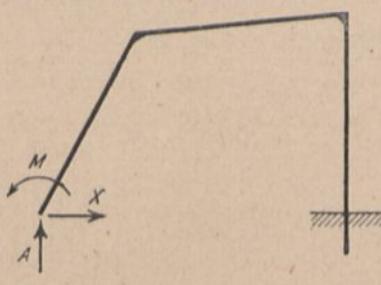


Abb. 235.

träger (Abb. 235). Die Behandlung des Hauptsystems unter der gerade vorliegenden Belastung und die Auftragung der zugehörigen M_0 -Momentenfläche auf die Achse des Freitragers erfordert keine weiteren Erklärungen.

Unter dem Einfluß der statisch unbestimmten Größen erhalten wir für das Hauptsystem die in Abb. 236—238 dargestellten drei Momentenflächen und am festen Lager die den unbestimmten Größen gleichen, aber entgegengesetzt gerichteten Reaktionen.

Bei Zusammenlegung sämtlicher Momentenflächen erhalten wir in einem beliebigen Punkte der Rahmenachse das Moment

$$M_m = M_0 - X \cdot y + A \cdot x - M_A.$$

Die Bestimmungsgleichungen der drei unbestimmten Größen lauten:

1. $L'_a \cdot E \cdot J_m = \int M_a \cdot M \cdot v \cdot ds$
2. $L'_b \cdot E \cdot J_m = \int M_b \cdot M \cdot v \cdot ds$
3. $L'_c \cdot E \cdot J_m = \int M_c \cdot M \cdot v \cdot ds.$

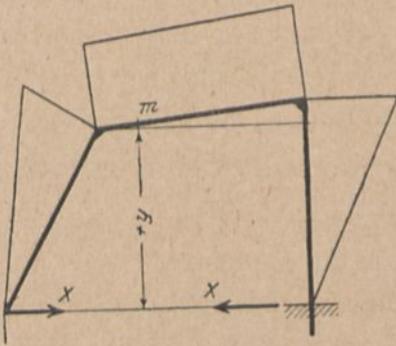


Abb. 236.

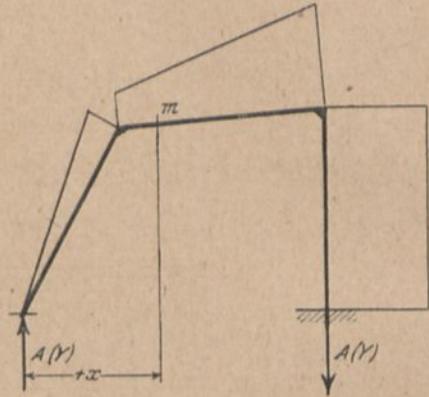


Abb. 237.

Hierin ist sinngemäß

- M_a der Einfluß von $X = 1$, also $= -y$,
 M_b der Einfluß von $A = 1$, also $= +x$,
 M_c der Einfluß von $M_A = 1$, also $= -1$

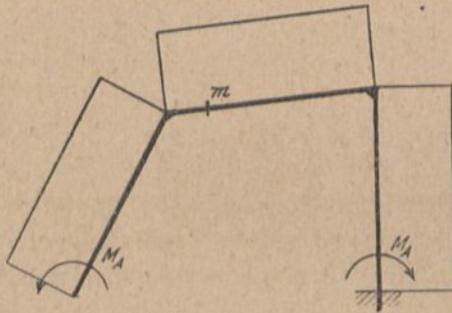


Abb. 238.

und M das Gesamtmoment in jedem Querschnitt.

Wir erhalten also:

1. $L'_a \cdot E \cdot J_m = - \int y \overbrace{(M_0 - X \cdot y + A \cdot x - M_A)}^M v \cdot ds$
2. $L'_b \cdot E \cdot J_m = - \int x \overbrace{(M_0 - X \cdot y + A \cdot x - M_A)}^M v \cdot ds$
3. $L'_c \cdot E \cdot J_m = - \int 1 \overbrace{(M_0 - X \cdot y + A \cdot x - M_A)}^M v \cdot ds$

und hätten in jeder Gleichung die Integration für die drei vorhandenen Rahmenseiten auszuführen.

Wir sehen aber wieder, daß die rechte Seite der ersten Gleichung die algebraische Summe der statischen Momente der auf die Rahmenachse projizierten $\frac{J_m}{J}$ -fachen Momentenflächen aus sämtlichen Kräften bezogen auf die Verbindungslinie der Auflager darstellt, die zweite Gleichung ebenso dieselbe algebraische Summe bezogen auf die Lotrechte durch das linke Auflager und die dritte Gleichung nur die algebraische Summe der Flächen selbst. L'_a erkennen wir als die $E \cdot J_m$ -fache Verschiebung der beiden Auflager gegeneinander, L'_b als die $E \cdot J_m$ -fache Verschiebung des linken Lagers gegen das rechte in lotrechter Richtung, L'_c als die $E \cdot J_m$ -fache Drehung der Rahmenachse um den linken Auflagerpunkt.

Bei völlig unnachgiebigen Lagern wären

$$L'_a = L'_b = L'_c = 0.$$

Ausmultipliziert erhalten wir:

1. $L'_a \cdot E \cdot J_m = -\int y \cdot M_0 \cdot v \cdot ds + X \int y^2 \cdot v \cdot ds - A \int y \cdot x \cdot v \cdot ds + M_A \int y \cdot v \cdot ds$
2. $L'_b \cdot E \cdot J_m = -\int x \cdot M_0 \cdot v \cdot ds - X \int x \cdot y \cdot v \cdot ds + A \int x^2 \cdot v \cdot ds - M_A \int x \cdot v \cdot ds$
3. $L'_c \cdot E \cdot J_m = -\int M_0 \cdot v \cdot ds + X \int y \cdot v \cdot ds - A \int x \cdot v \cdot ds + M_A \int v \cdot ds$

und erkennen dann weiter in den Integralausdrücken zu X
 in Gleichung 1.: das statische Moment der Momentenfläche zu $X = 1$ bezogen auf die Wagerechte,
 in Gleichung 2.: das statische Moment derselben Fläche bezogen auf die Lotrechte durch A ,
 in Gleichung 3.: den Inhalt derselben Fläche;
 ebenso erkennen wir in den Integralausdrücken zu A
 in Gleichung 1.: das statische Moment der zu $A = 1$ gehörigen Momentenfläche bezogen auf die Wagerechte,
 in Gleichung 2.: das statische Moment derselben Fläche bezogen auf die Lotrechte durch A ,
 in Gleichung 3.: den Inhalt derselben Fläche;

und schließlich erkennen wir in den Integralausdrücken zu M_A in Gleichung 1.: das statische Moment der zu $M_A = 1$ gehörigen Momentenfläche bezogen auf die Wagerechte, in Gleichung 2.: das statische Moment derselben Fläche bezogen auf die Lotrechte durch A , in Gleichung 3.: den Inhalt derselben Fläche.

Bezüglich Berücksichtigung der Trägheitsmomente wird auf die vorhergehenden Abschnitte verwiesen (z. B. Beliebig gelagerte Rahmen).

Nach diesen Angaben läßt sich jeder beliebige Rahmenfall solcher Art schnell untersuchen. Die Rahmenform kann die Rechnung nur mehr oder weniger verlängern, nicht aber erschweren. Der Biegungssinn der M_0 -Fläche ist negativ. Die Reaktionen am rechten Lager ergeben sich durch Zusammensetzung der Einflüsse von X , A und M_A mit den durch die Belastung in der Kragstelle hervorgerufenen Reaktionen. Sollte man sich über den Richtungssinn der unbestimmten Größen nicht im klaren sein, so führe man die zugehörigen Momentenflächen als positiv ein; es ergeben sich dann die einzelnen Größen von selbst mit dem richtigen Vorzeichen.

2. Der einfache Träger als Hauptssystem und lotrechte Belastung.

Wenn man bedenkt, daß man zur Bestimmung des Biegemomentes in beliebigem Querschnitt eines einfachen Trägers dort

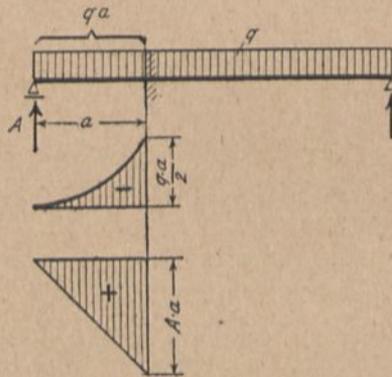


Abb. 239.

eine Einspannung annimmt und die algebraische Summe der Drehmomente aus dem Auflagerdruck und der Last wie für einen Freitträger bestimmt (Abb. 239 für den Fall einer Belastung mit q),

so erscheint der Ersatz der zum Kragträger gehörenden M_0 -Fläche (Abb. 240) und der A -Fläche (Abb. 237) durch die Momentenfläche des einfachen Trägers auf zwei Stützen von der Spannweite l insoweit möglich, als der Druck A im fertigen System dem Lagerdruck des einfachen Balkens entspricht. Beachten wir, daß X ohne Einfluß auf die Größe der lotrechten Reaktionen ist — wie beim Zweigelenrahmen —, die Einspannungsmomente — wie beim kontinuierlichen Träger — eine Veränderung der lotrechten Reaktionen gegenüber denen des einfachen Balkens

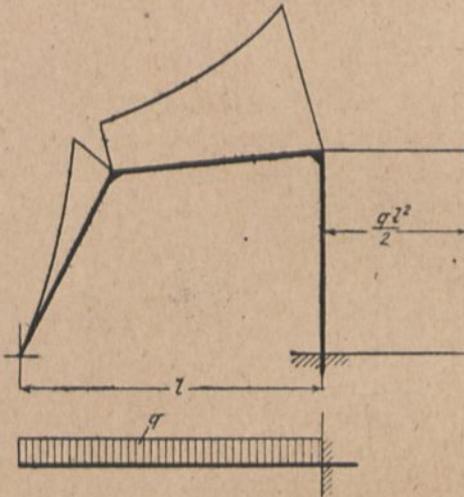


Abb. 240.

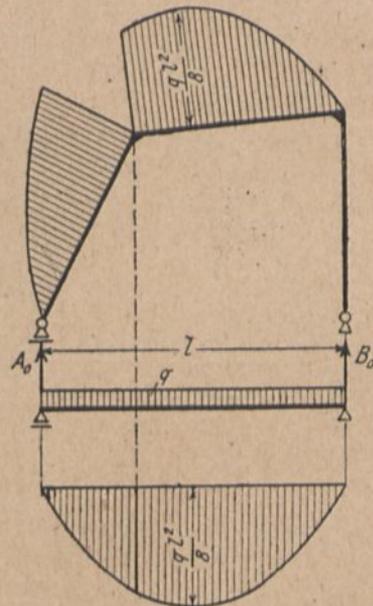


Abb. 241.

nicht erbringen, sobald sie beide gleich groß sind, so entspricht A tatsächlich dem Auflagerdruck des einfachen Balkens, sobald der Rahmen nach Form, Stärkeverhältnissen und Belastung in Symmetrie steht.

Setzen wir daher allgemein

$$A = A_0 + Y,$$

so können wir — soweit zunächst die M_0 -Fläche in Frage kommt — den einfachen Balken zugrunde legen (Abb. 241 für das Beispiel einer gleichmäßigen Belastung) und hätten dann in unseren oben wiedergegebenen Gleichungen für A immer nur Y

einzusetzen, weshalb dieser Buchstabe in Abb. 237 neben den Buchstaben A in Klammern gesetzt ist. Da im Falle der Symmetrie Y zu Null wird, vereinfachte sich dann die Rechnung entsprechend¹⁾. Auch wenn nicht Symmetrie vorliegt, also mit Y zu rechnen ist, bringt die Zugrundelegung des einfachen Balkens bei der Bildung der M_0 -Fläche Bequemlichkeiten in der Rechnung mit sich.

M_A und Y zusammengenommen erzeugen schließlich im fertigen System am rechten Auflager das Moment M_B (Abb. 242), so daß

$$M_A + Y \cdot l = M_B \quad \text{und} \quad M_A = M_B, \quad \text{wenn} \quad Y = 0.$$

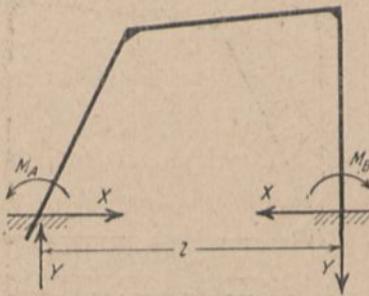


Abb. 242.

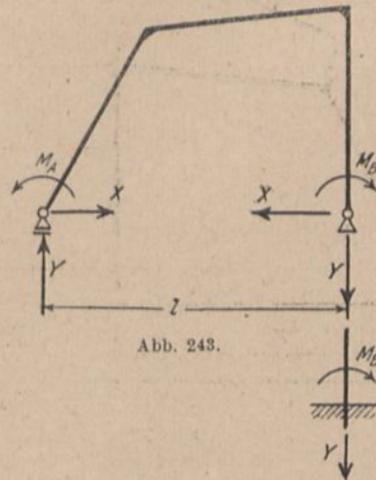


Abb. 243.

Sonach stehen M_A und Y am linken Auflager mit M_B und Y am rechten Auflager im Gleichgewicht. Mit dem entgegengesetzt gleichen Widerstande X an beiden Lagern stehen somit M_A , Y und X einerseits mit M_B , Y und X andererseits im Gleichgewicht, das sind für jedes Lager diejenigen Kräfte, die den Drücken A_0 und B_0 des einfachen Trägers hinzuzufügen sind, damit die wirkliche Stützung entsteht (Abb. 243); hinsichtlich der Wirksamkeit aber der zu unbestimmten Größen erwählten Zusatzkräfte am linken Lager M_A , Y und X ersetzen die Zusatzkräfte am rechten Lager die Einspannung, so zwar, daß — wie oben angegeben — $M_A + Y \cdot l = M_B$

¹⁾ D. h. als Unbekannte verblieben nur X und M_A .

und Y rechts dem angreifenden Y entgegengesetzt gerichtet ist; hinsichtlich der Wirksamkeit von X ist es gleichgültig, ob der Stabzug rechts drehbar oder eingespannt gelagert ist.

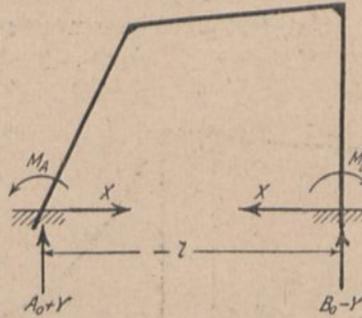


Abb. 244.

Sofern der einfache Träger als Hauptsystem zugrunde gelegt wurde, ist im fertigen System zu A_0 und B_0 das Y algebraisch zu addieren (Abb. 244).

3. Das Hauptsystem bei wagerechter Belastung.

Gegenüber nur lotrechter Belastung kommt in diesem Falle bei Zugrundelegung des einfachen Balkens als Hauptsystem zu

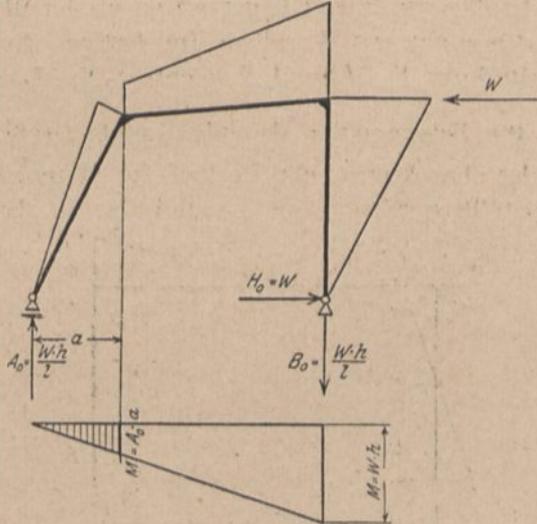


Abb. 245.

den Drücken A_0 und B_0 noch H_0 als Gegendruck gegen die gesamte wagerechte Last am festen Gelenk hinzu (Abb. 245). In

der Bestimmung der Ergänzungskräfte zur Herbeiführung der wirklichen Abstützung in den beiden Lagern wird dadurch keine Veränderung hervorgebracht. Unsere unbestimmten Größen am linken Auflager wären wieder M_A , Y und X und ihr Bestimmungsweg derselbe. Im fertigen System wären die Lagerkräfte links $A = A_0 + Y$, M_A und X , rechts $B = B_0 - Y$, M_B und $X - H_0$.

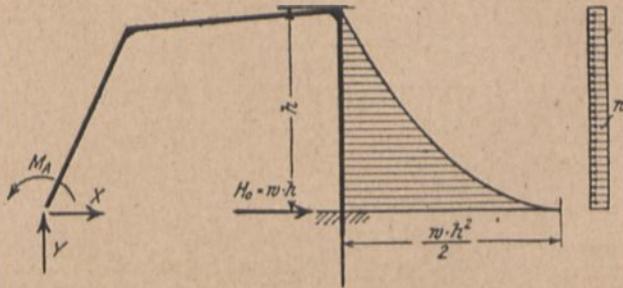


Abb. 246.

Einfacher gestaltet sich der Rechnungsgang bei wagerechter Belastung, wenn der Kragträger als Hauptssystem zugrunde gelegt wird, so zwar, daß die Einspannung auf der Lastseite besteht (Abb. 246). Die unbestimmten Größen am linken Lager wären wieder M_A , Y und X und ihr Bestimmungsweg derselbe. Im fertigen System wären die Lagerkräfte links Y , M_A und X , rechts $-Y$, M_B und $X - H_0$.

4. Die Eckmomente als unbestimmte Größen.

Soweit der charakteristische Verlauf der Momente von vornherein festgestellt werden kann — und das ist besonders bei

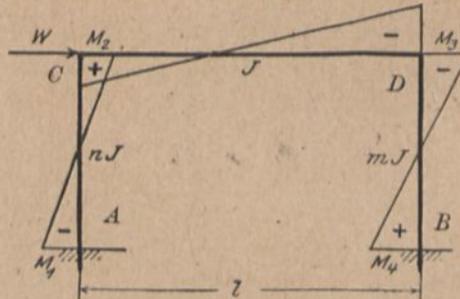


Abb. 247.

rechteckiger Rahmenform und seitlicher Belastung der Fall —, empfiehlt sich die Anwendung des in Kapitel XXIII dargelegten

Verfahrens auch für eingespannte Rahmen. Die zugehörigen Elastizitätsbedingungen sind schon im vorhergehenden Kapitel unter 1. zum Ausdruck gebracht. Für einen rechteckigen eingespannten Rahmen erhielten wir — mit den Trägheitsmomenten J , $n \cdot J$ und $m \cdot J$ — nach Abb. 247

1. Summe der statischen Momente der auf die Rahmenachse projizierten Momentenflächen bezogen auf die Linie AB

$$-\frac{M_1}{n} \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{3} + \frac{M_2}{n} \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot h + \frac{M_4}{m} \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{3} - \frac{M_3}{m} \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot h \\ + (+M_2 - M_3) \cdot \frac{l}{2} \cdot h = 0;$$

2. Summe der statischen Momente bezogen auf die Lotrechte durch A

$$+\frac{M_4 - M_3}{m} \cdot \frac{h}{2} \cdot l + M_2 \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{3} - M_3 \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot l = 0;$$

3. Summe der Momentenflächen selbst

$$-\frac{M_1 + M_2}{2 \cdot n} \cdot h + \frac{M_2 - M_3}{2} \cdot l + \frac{M_4 - M_3}{2 \cdot m} \cdot h = 0.$$

Hieraus und mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingung $\sum M = 0$ oder

$$4. \quad M_1 + M_2 + M_3 + M_4 = W \cdot h,$$

wobei alle Momente als positive Werte zu betrachten sind, können wir die unbekanntene Eckmomente bestimmen.

Wir sind nicht daran gebunden, die statischen Momente in bezug auf AB oder AC als Achsen aufzustellen; für den eingespannten oder in sich geschlossenen Rahmen kann jede beliebige Gerade als Bezugsachse für die statischen Momente erwählt werden, insbesondere also jede Gerade durch eine Rahmenseite. Der Beweis hierfür liegt in der Zulässigkeit beliebiger Lage des Angriffspunktes der statisch unbestimmten Größen, wovon im nächsten Kapitel die Rede ist.

Das gezeigte Verfahren gewinnt besondere Bedeutung für die Berechnung des mehrstieligen eingespannten Rahmens rechteckiger Form unter seitlicher Belastung.

Voneinander unabhängige Bestimmungsgleichungen für X , Y , Z und symmetrische Rahmen.

Eine wesentliche Vereinfachung des ganzen Rechnungsganges ist dadurch erzielbar, daß die drei statisch unbestimmten Größen unabhängig voneinander bestimmbar gemacht werden¹⁾. Das gelingt in der dargestellten Abstützungsform des Rahmens (Abb. 248) für $O = \text{Schwerpunkt}$ des mit $\frac{J_m}{J} \cdot ds$ belastet gedachten Rahmen-

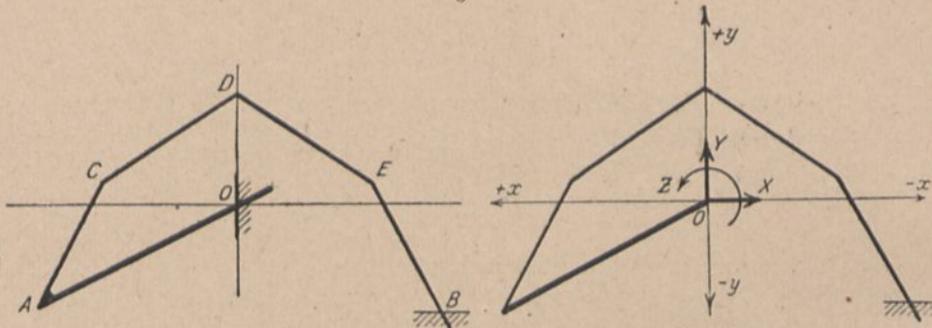


Abb. 248.

Abb. 249.

zuges $ACDEB$; der Rahmen ruhte dann in O und B , in O griffen drei unbestimmte Größen an X , Y und Z (Abb. 249) und AO müßte als unelastische Hilfsscheibe angesehen werden, die der Formänderung nicht unterliegt. Wenn die Koordinaten x und y nunmehr auf das durch O gelegte Hauptachsenkreuz bezogen werden, werden in den drei Bestimmungsgleichungen

$$L_a \cdot E \cdot J_m = \int y(M_0 - X \cdot y - Y \cdot x - Z) v \cdot ds$$

$$L_b \cdot E \cdot J_m = \int x(M_0 - X \cdot y - Y \cdot x - Z) v \cdot ds$$

$$L_c \cdot E \cdot J_m = \int 1(M_0 - X \cdot y - Y \cdot x - Z) v \cdot ds$$

die fett gedruckten Glieder zu Null, weil für den Schwerpunkt und das Hauptachsenkreuz

$\int y \cdot x \cdot v \cdot ds$ als das Zentrifugalmoment des Stabzuges,

$\int y \cdot v \cdot ds$ als das statische Moment des Stabzuges bezogen auf die x -Achse

und $\int x \cdot v \cdot ds$ als das statische Moment des Stabzuges bezogen auf die y -Achse

zu Null wird.

¹⁾ Müller-Breslau, „Neuere Methoden“, 4. Aufl., S. 123; Mörsch, „Berechnung von eingespannten Gewölben“, Schweizerische Bauzeitung 1906, Nr. 7 und 8 (auch wiedergegeben im Betonkalender).

Die drei Gleichungen lauteten dann aber

$$L'_a \cdot E \cdot J_m = \int y \cdot M_0 \cdot v \cdot ds - X \int y^2 \cdot v \cdot ds$$

$$L'_b \cdot E \cdot J_m = \int x \cdot M_0 \cdot v \cdot ds - Y \int x^2 \cdot v \cdot ds$$

$$L'_c \cdot E \cdot J_m = \int 1 \cdot M_0 \cdot v \cdot ds - Z \int 1 \cdot v \cdot ds$$

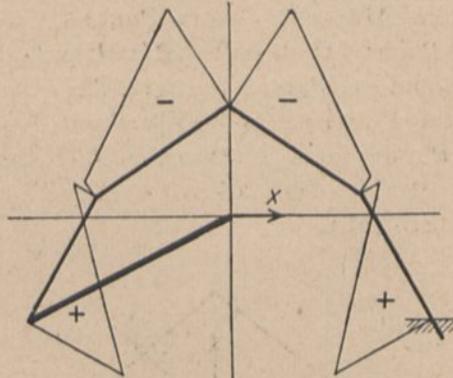


Abb. 250.

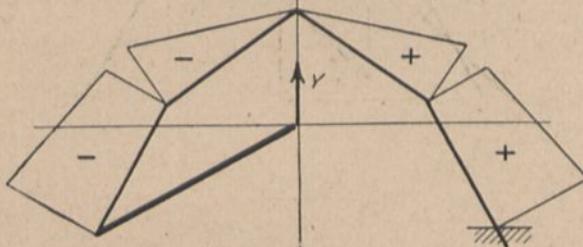


Abb. 251.

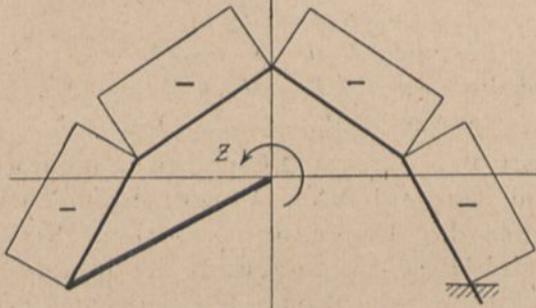


Abb. 252.

und gestatteten sonach ohne weiteres nacheinander die Ausrechnung von X , Y und Z . Die zugehörigen Momentenflächen sind in den Abb. 250 und 252 dargestellt.

Statisch haben, wie es erforderlich ist, die drei Ergänzungskräfte X , Y und Z am Punkt O dieselbe Wirkung auf den Rahmen wie die unter 2. im Ka-

pitel XXV genannten Ergänzungskräfte X , Y und M_A am Lagerpunkt A (Abb. 243), wenn die Gleichung zutrifft

$$M_A = X \cdot z - Y \cdot w + Z.$$

Ersetzen wir X , Y und M_A am Punkte A durch die Kämpferresultierende R im Abstände c vom Punkte A (Abb. 253) und bringen wir im Punkte O dasselbe R zweimal gleich und entgegengesetzt wirkend an, dann kann man die eine in O wirkende Kraft R in X und Y zerlegen, die andere mit dem tatsächlichen Kämpferdruck R zu einem Kräftepaar $R \cdot r$ zusammenfassen, womit wir in O die drei Größen X , Y und $R \cdot r = Z$ wirkend erhalten. Mit

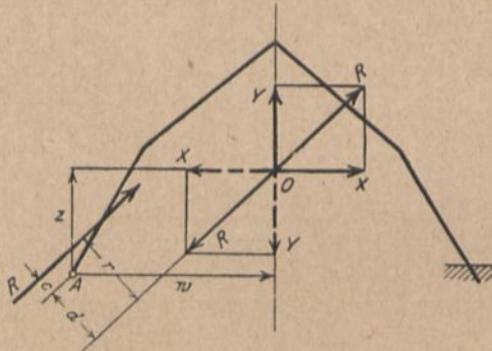


Abb. 253.

$$Z = R \cdot r = R(c + d),$$

$$R \cdot c = M_A$$

und $R \cdot d = Y \cdot w - X \cdot z$

erhalten wir $Z = M_A + Y \cdot w - X \cdot z,$

woraus $M_A = X \cdot z - Y \cdot w + Z.$

Ist somit bei diesem Lösungsweg gegenüber dem unter 2. im Kapitel XXV Vorgeführten hinsichtlich des Zustandes der Ergänzungskräfte nichts geändert, so gilt hinsichtlich des zugrunde zu legenden Hauptsystems dasselbe wie dort. Für lotrechte Belastung ist zweckmäßig der einfache in A und B gestützte Balken das Hauptsystem (Abb. 254), für seitliche Belastung der Kragträger (Abb. 255). Beim einfachen Balken sind die lotrechten Reaktionen im fertigen System wieder

$$A = A_0 + Y, \quad B = B_0 - Y,$$

beim Kragträger einfach Y und $-Y$.

Für einen beliebigen Punkt m (Abb. 256) der Rahmenachse ist mit Bezug auf das angegebene Achsenkreuz das Biegemoment

$$M_m = M_0 - X \cdot y - Y \cdot x + Z,$$

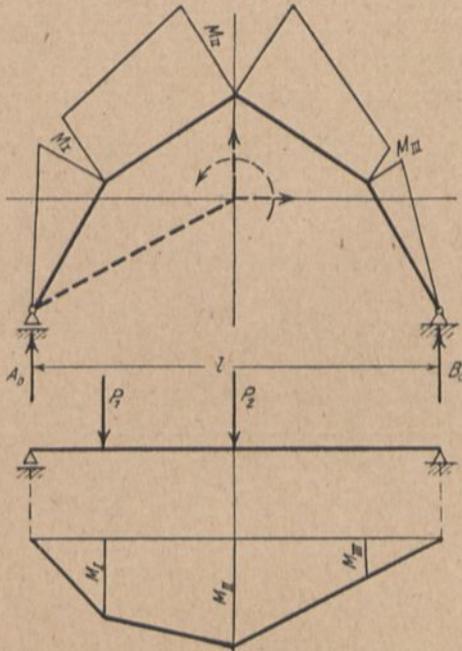


Abb. 254.

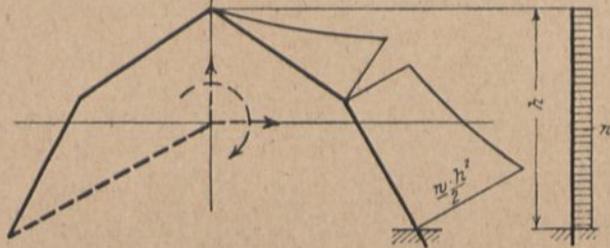


Abb. 255.

wobei ein Moment dann als positiv wirkend angesehen sein soll, wenn es den Teil $A m$ nach rechts gegen m verdreht¹⁾ und das positive Vorzeichen von Z algebraische Addition anzeigen soll.

¹⁾ Für den rechten Teil $B m$ wäre das Moment dann bekanntlich positiv einzusetzen, wenn es den Teil $B m$ nach links gegen m verdreht.

Die erste Gleichung besagt:

$L'_a \cdot E \cdot J_m =$ der algebraischen Summe der statischen Momente der auf die Rahmenachse projizierten $\frac{J_m}{J}$ -fachen Momentenflächen aus der

Belastung und X bezogen auf die x -Achse,

$L'_b \cdot E \cdot J_m =$ der algebraischen Summe der statischen Momente der auf die Rahmenachse projizierten $\frac{J_m}{J}$ -fachen Momentenflächen aus der

Belastung und Y bezogen auf die y -Achse,

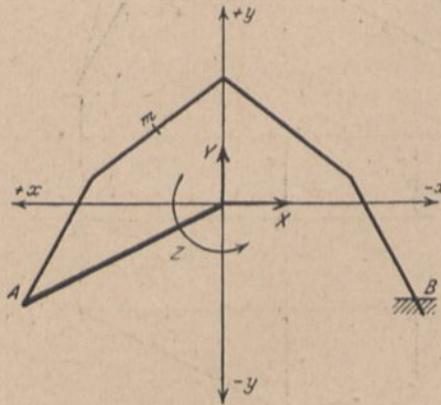


Abb. 256.

$L'_c \cdot E \cdot J_m =$ der algebraischen Summe der $\frac{J_m}{J}$ -fachen Momentenflächen aus der Belastung und Z selbst.

Für unverschiebliche und undrehbare Lagerung lauteten die Gleichungen:

$$X = \frac{\int M_0 \cdot y \cdot v \cdot ds}{\int y^2 \cdot v \cdot ds}$$

$$Y = \frac{\int M_0 \cdot x \cdot v \cdot ds}{\int x^2 \cdot v \cdot ds}$$

$$Z = \frac{\int M_0 \cdot v \cdot ds}{\int v \cdot ds}$$

$\int y^2 \cdot v \cdot ds$ ist das Trägheitsmoment des $\frac{J_m}{J}$ -fachen Stabzuges bezogen auf die x -Achse, $\int x^2 \cdot v \cdot ds$ das Trägheitsmoment

desselben bezogen auf die y -Achse¹⁾ und $\int v \cdot ds$ einfach die Länge des $\frac{J_m}{J}$ -fachen Stabzuges; bei symmetrischer Belastung wird Y gleich Null, weil dann $\int M_0 \cdot x \cdot v \cdot ds$ gleich dem statischen Moment einer Fläche bezogen auf ihre Schwerachse, also gleich Null wird.

Der Richtungssinn der statisch unbestimmten Größen kann aus den Bestimmungsgleichungen in vorliegender Form nicht entnommen werden, weil die Größen in Unabhängigkeit voneinander bestimmt wurden und das positive Ergebnis für alle drei nur eine Folge der willkürlichen Vorzeichensetzung in den Ausgangsgleichungen war.

Wie aus Abb. 250 ersichtlich, erzeugt X positive — d. h. außen Druck erzeugende — Momente unterhalb der x -Achse und an beiden Lagern, oberhalb der x -Achse negative Momente; das Moment Z bringt den ganzen Rahmen unter eine für alle Querschnitte gleich große Biegung (Abb. 252), die stets der aus der Belastung entgegengesetzt gerichtet ist, bei lotrechter Belastung also negativ (Abb. 254), bei seitlicher Belastung positiv sein muß (Abb. 255). Y wirkt — unsymmetrische Belastung vorausgesetzt — bei lotrechter Belastung nach oben oder unten, je nachdem der größere Belastungsteil links oder rechts der Mittelachse auftritt, erzeugt also Zusatzmomente, negativ auf der Lastseite, positiv auf der entgegengesetzten (Abb. 251); bei seitlicher Belastung wirkt Y positiv und erzeugt ein Zusatzmoment positiv auf der Lastseite, negativ auf der entgegengesetzten Seite.

Anmerkung: Besteht innerhalb der einzelnen Rahmenstäbe ein größerer Wechsel im Trägheitsmoment, so empfiehlt sich die Durchführung der Berechnung nach dem Verfahren von Professor Mörsch für eingespannte Gewölbe (Kap. XLV, III, S. 364; auch S. 354).

Kapitel XXVII.

Voneinander unabhängige Bestimmungsgleichungen für X , Y , Z und unsymmetrische Rahmen.

Bei fehlender Symmetrie in der Rahmenform — oder auch schon in den Stärkeverhältnissen — ist die x -Achse unter einem Winkel φ gegen die Wagerechte von dem Schwerpunkt O aus

¹⁾ Die Trägheitsmomente sind in derselben Weise berechenbar wie früher beim Zweigelenkrahmen, nur aus den Teilen beiderseits der jeweiligen Achse.

anzulegen (Abb. 257), der sich aus der Bedingung ergibt, daß $\int x \cdot y \cdot v \cdot ds$ — mit y bezogen auf die geneigte Achse — gleich Null wird. Da nach Abb. 258

$$y = \overline{mc} - \overline{bc} = y_1 \cdot \cos \varphi - x \cdot \sin \varphi,$$

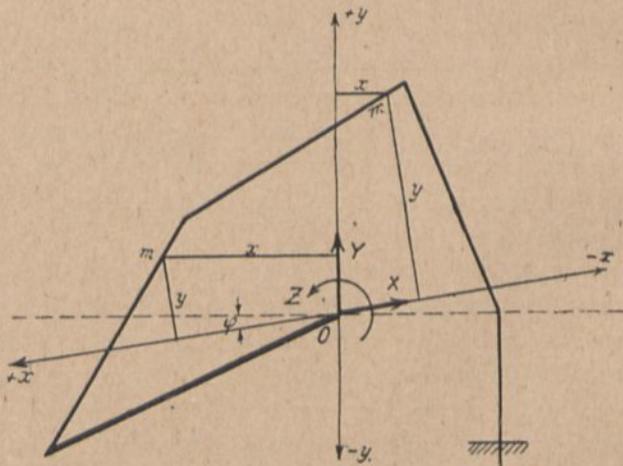


Abb. 257.

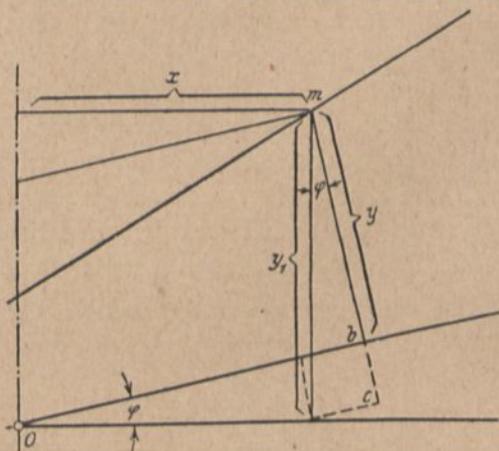


Abb. 258.

so erhalten wir die Bedingung

$$\cos \varphi \int x \cdot y_1 \cdot v \cdot ds - \sin \varphi \int x^2 \cdot v \cdot ds = 0,$$

woraus

$$\text{tang } \varphi = \frac{\int x \cdot y_1 \cdot v \cdot ds}{\int x^2 \cdot v \cdot ds}.$$

Der Nenner bedeutet das Trägheitsmoment des mit $v \cdot ds$ belastet gedachten Stabzuges bezogen auf die y -Achse und wird daher in bekannter Weise bestimmt.

Der Zähler bedeutet das statische Moment der $\frac{J}{J_m}$ -fachen, auf die Rahmenachse projizierten Momentenfläche zu einer gedachten Last 1 in der x -Achse, bezogen auf die y -Achse, denn für irgendein Ele-

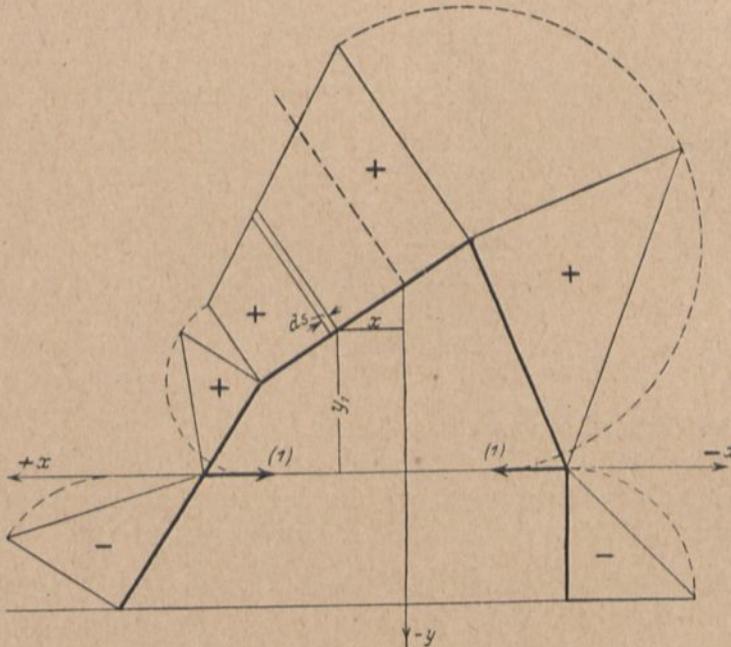


Abb. 259.

ment ds des Stabzuges ist dann $1 \cdot y_1 = y_1$ das Biegemoment und x der Abstand von der y -Achse (Abb. 259).

Nimmt man zur Berechnung des Zählers die y_1 -Flächen oberhalb der x -Achse als positiv, unterhalb als negativ, die Abstände x links der y -Achse als positiv, rechts als negativ an, so ist der Winkel φ vom Schwerpunkt aus linksseitig nach unten anzutragen, wenn der Zähler zu $\tan \varphi$ negativ wird. Die neue x -Achse steigt zur Wagerechten nach der Seite an, wo das statische Flächenelement überwiegt.

Bei stark wechselndem Trägheitsmoment empfiehlt sich zeichnerische Ermittlung der beiden Bruchglieder mittels Kraft-

und Seileck; das Verfahren ist beim gelenklosen Bogenbinder beschrieben (Seite 354 u. f.).

Für das Weitere unterscheidet sich die Berechnung des unsymmetrischen Rahmens nicht von der des symmetrischen Rahmens; die unbestimmte Größe X ist in der neuen x -Achse wirkend und die Koordinaten x und y sind senkrecht zu ihren Achsen anzunehmen.

Kapitel XXVIII.

Lösung mit Rücksicht auf Normalkräfte.

Die Arbeitsgleichungen lauten für diesen Fall (vgl. S. 100):

$$1. \quad L_a = \int \frac{M_a \cdot M \cdot ds}{E \cdot J} + \int \frac{N_a \cdot N \cdot ds}{E \cdot F}$$

$$2. \quad L_b = \int \frac{M_b \cdot M \cdot ds}{E \cdot J} + \int \frac{N_b \cdot N \cdot ds}{E \cdot F}$$

$$3. \quad L_c = \int \frac{M_c \cdot M \cdot ds}{E \cdot J}$$

Die Berücksichtigung des Einflusses der Normalkräfte auf die Größe der Unbestimmten erfolgt also durch Zusatzglieder zu den rechten Seiten der beiden ersten Gleichungen (Verschiebung in Richtung der x -Achse und der y -Achse).

Bei Multiplikation mit $E \cdot J_m$ und $\frac{J_m}{J} = v$ (vgl. S. 107) erhalten wir:

$$1. \quad L_a \cdot E \cdot J_m = \int M_a \cdot M \cdot v \cdot ds + \int \frac{N_a \cdot N \cdot J_m \cdot ds}{F}$$

$$2. \quad L_b \cdot E \cdot J_m = \int M_b \cdot M \cdot v \cdot ds + \int \frac{N_b \cdot N \cdot J_m \cdot ds}{F}$$

In diesen Gleichungen bezeichnet N_a den Einfluß von $X = 1$, N_b den Einfluß von $Y = 1$, N die in jedem Querschnitt tätige Normalkraft. Soweit X dafür in Frage kommt, ist

$$N = X \cdot \cos \alpha \quad (\text{Abb. 260});$$

zufolge Y ist

$$N = Y \cdot \sin \alpha;$$

zufolge der Querkraft Q aus der Belastung ist

$$N = Q \cdot \sin \alpha.$$

Wir erhalten damit:

$$1. \int \frac{N_a \cdot N \cdot J_m \cdot ds}{F} = \int \frac{N_a \cdot J_m}{F} (X \cdot \cos \alpha + Y \cdot \sin \alpha + Q \cdot \sin \alpha) ds$$

$$2. \int \frac{N_b \cdot N \cdot J_m \cdot ds}{F} = \int \frac{N_b \cdot J_m}{F} (X \cdot \cos \alpha + Y \cdot \sin \alpha + Q \cdot \sin \alpha) ds.$$

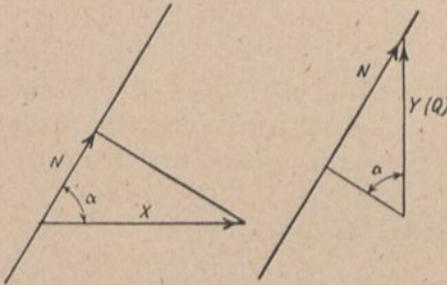


Abb. 260.

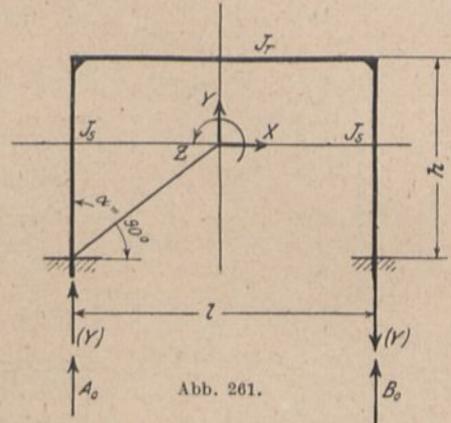


Abb. 261.

Ausmultipliziert erhalten wir

$$1. \int \frac{N_a \cdot N \cdot J_m \cdot ds}{F} = X \int \frac{N_a \cdot J_m \cdot \cos \alpha \cdot ds}{F} + Y \int \frac{N_a \cdot J_m \cdot \sin \alpha \cdot ds}{F} + \int \frac{N_a \cdot J_m \cdot Q \cdot \cos \alpha \cdot ds}{F}$$

$$2. \int \frac{N_b \cdot N \cdot J_m \cdot ds}{F} = X \int \frac{N_b \cdot J_m \cdot \cos \alpha \cdot ds}{F} + Y \int \frac{N_b \cdot J_m \cdot \sin \alpha \cdot ds}{F} + \int \frac{N_b \cdot J_m \cdot Q \cdot \sin \alpha \cdot ds}{F}.$$

Die Integrale wären für jeden Fall besonders auszurechnen. Für einen rechteckigen Rahmen (Abb. 261) erhalten wir zu Gleichung 1.:

$$\int \frac{N_a \cdot J_m \cdot \cos \alpha \cdot ds}{F}: \text{für die Stiele} = 0, \text{ da } \cos \alpha \text{ für } 90^\circ = 0, \\ \text{für den Riegel} = \frac{J_m \cdot l}{F_r}, \text{ da } \int_0^l \cos \alpha \cdot ds = l \\ \text{und } N_a = 1 \text{ ist.}$$

$$\int \frac{N_a \cdot J_m \cdot \sin \alpha \cdot ds}{F}: \text{für die Stiele} = 0, \text{ da } N_a = 0, \\ \text{für den Riegel} = 0, \text{ da } \sin \alpha \text{ für } 0^\circ = 0.$$

$$\int \frac{N_a \cdot J_m \cdot Q \cdot \cos \alpha \cdot ds}{F} : \text{für die Stiele} = 0, \text{ da } \cos \alpha \text{ für } 90^\circ = 0, \\ \text{auch } N_a = 0.$$

Zu Gleichung 2. erhalten wir:

$$\int \frac{N_b \cdot J_m \cdot \cos \alpha \cdot ds}{F} : \text{für die Stiele} = 0, \text{ da } \cos \alpha \text{ für } 90^\circ = 0, \\ \text{für den Riegel} = 0, \text{ da } N_b = 0.$$

$$\int \frac{N_b \cdot J_m \cdot \sin \alpha \cdot ds}{F} : \text{für den linken Stiel mit } N_b = +1 \text{ und } \sin \alpha \\ \text{für } 90^\circ = +1 \text{ (} Y \text{ nach oben) } \frac{J_m \cdot \tilde{h}}{F_s}, \\ \text{für den rechten Stiel mit } N_b = -1 \text{ und } \sin \alpha \\ \text{für } -90^\circ = -1 \text{ (} Y \text{ nach unten) ebenfalls} \\ \frac{J_m \cdot h}{F_s}, \\ \text{für den Riegel wieder} = 0.$$

$$\int \frac{N_b \cdot J_m \cdot Q \cdot \sin \alpha \cdot ds}{F} : \text{mit } Q \cdot \sin \alpha \text{ für den linken Stiel} = A_0, \text{ für} \\ \text{den rechten Stiel} = B_0 \text{ und } N_b = +1 \\ \text{bzw. } -1: \\ \frac{J_m \cdot A_0 \cdot h}{F_s} - \frac{J_m \cdot B_0 \cdot h}{F_s}; \\ \text{für den Riegel} = 0, \text{ da } N_b = 0.$$

Es wird also:

$$1. \int \frac{N_a \cdot N \cdot J_m \cdot ds}{F} = X \cdot \frac{J_m \cdot l}{F_r} \\ 2. \int \frac{N_b \cdot N \cdot J_m \cdot ds}{F} = Y \cdot \frac{J_m \cdot 2 \cdot h}{F_s} + J_m \cdot A_0 \cdot \frac{h}{F_s} - J_m \cdot B_0 \cdot \frac{h}{F_s} \\ = Y \cdot \frac{J_m \cdot 2 \cdot h}{F_s} + (A_0 - B_0) \cdot \frac{J_m \cdot h}{F_s}.$$

Da im linken Stiel der Normaldruck $A_0 + Y$, im rechten Stiel der Normaldruck $B_0 - Y$ herrscht, linksseitig mit dem Wert von $Y = +1$, rechtsseitig mit dem Wert $Y = -1$ zu multiplizieren ist, so erhielten wir den für Gleichung 2. ermittelten Ausdruck auch wie folgt:

$$J_m (A_0 + Y) \cdot \frac{h}{F_s} (+1) + J_m (B_0 - Y) \cdot \frac{h}{F_s} \cdot (-1) \\ = J_m (A_0 - B_0 + 2Y) \cdot \frac{h}{F_s}.$$

Die auf diese Weise ermittelten Zusatzglieder wären in die Gleichungen für L'_a und L'_b einzusetzen. Ihr Vorzeichen ist nega-

tiv, da die eintretenden elastischen Verkürzungen die Verschiebungen des Hauptsystems verkleinern. Die Normalkräfte wirken also im Sinne einer Verkleinerung der statisch unbestimmten Größen.

Für lotrechte Belastung wäre bei Symmetrie ($A_0 = B_0$) $\frac{J_m \cdot h}{F_s} = 0$, da $A_0 = B_0$; ebenso $Y \cdot \frac{J_m \cdot 2h}{F_s} = 0$, da $Y = 0$.

Für wagerechte Belastung kommt nur das Glied $Y \cdot \frac{J_m \cdot 2h}{F_s}$ zur Geltung, wenn, wie es angezeigt erscheint, der Kragträger für die M_0 -Fläche beibehalten ist.

Für die Praxis erübrigt sich die Berücksichtigung des Zusatzgliedes zu Gleichung 2.; das Zusatzglied zu Gleichung 1. aber ist gelegentlich — bei weitgespannten, insbesondere flachen Konstruktionen — zu beachten.

Für einen rechteckigen Rahmen lauteten die Bestimmungsgleichungen bei Mitberücksichtigung der Normalkräfte daher:

$$1. \quad L'_a \cdot E \cdot J_m = \int M_0 \cdot y \cdot v \cdot ds - X \int y^2 \cdot v \cdot ds - X \cdot \frac{J_m \cdot l}{F_r}$$

$$2. \quad L'_b \cdot E \cdot J_m = \int M_0 \cdot x \cdot v \cdot ds - Y \int x^2 \cdot v \cdot ds - Y \cdot \frac{J_m \cdot 2h}{F_s} - (A_0 - B_0) \cdot \frac{J_m \cdot h}{F_s}$$

Für unnachgiebige Lagerung mit $L'_a = L'_b = 0$:

$$X = \frac{\int M_0 \cdot y \cdot v \cdot ds}{\int y^2 \cdot v \cdot ds + \frac{J_m \cdot l}{F_r}}$$

$$Y = \frac{\int M_0 \cdot x \cdot v \cdot ds - (A_0 - B_0) \cdot \frac{J_m \cdot h}{F_s}}{\int x^2 \cdot v \cdot ds + \frac{J_m \cdot 2h}{F_s}}$$

Der Vollständigkeit halber fügen wir die außerhalb des Einflusses der Normalkräfte stehende dritte Gleichung — ebenfalls mit $L'_c = 0$ — hinzu:

$$Z = \frac{\int M_0 \cdot v \cdot ds}{\int v \cdot ds}$$

Angezeltheit einer Lösung mit Berücksichtigung der Normalkräfte.

Über die Frage, in welchen Fällen die Berechnung statisch unbestimmter Größen unter Einschuß der Längskräfte durchzuführen ist, läßt sich aus den Untersuchungen von Rueb¹⁾ eine Antwort geben.

Gegenüber der bisher allgemein üblichen Praxis, die Querkkräfte bei der Ermittlung der statisch unbestimmten Größen gänzlich unberücksichtigt zu lassen und den Einfluß der Längskräfte nur bei Rahmen und Bögen von flachem Stich zu berücksichtigen, lassen sich Ruebs Untersuchungen, angestellt an symmetrischen parabelförmigen Bögen und rechteckigen Rahmen mit konstantem Trägheitsmoment und gleichmäßiger Belastung für die Stichverhältnisse von $\frac{1}{4}$ bis $\frac{1}{10}$, wie folgt zusammenfassen:

1. Die Mitherücksichtigung der Längs- und Querkkräfte bei der Bestimmung der statisch unbestimmten Größen macht sich merkbar gemeinhin nur bei eingespannten Rahmen und Bögen geltend und führt dort zu einer Verminderung der Größe des Horizontalschubs.

2. Bei Bögen überwiegt bei den häufig vorkommenden Stichverhältnissen von $\frac{1}{5}$ bis $\frac{1}{10}$ der Einfluß der Längskräfte denjenigen der Querkkräfte und die Vernachlässigung der letzteren erscheint bei der üblichen analytischen Berechnungsweise gerechtfertigt; die Verminderung von H infolge der Längskräfte beträgt für die angegebenen Verhältnisse aber nur etwa 0,5 bis 4%.

3. Bei rechteckigen Rahmen überwiegt für die üblichen Stichverhältnisse von $\frac{1}{4}$ — $\frac{1}{10}$ der Einfluß der Querkkräfte den der Längskräfte; die Verminderung von H infolge der Querkkräfte beträgt für diese Verhältnisse ebenfalls nur etwa 0,5—4%.

Bei den seltener verwendeten Stichverhältnissen von $\frac{1}{8}$ ab bis $\frac{1}{10}$ überwiegt dagegen der Einfluß der Längskräfte den der Querkkräfte und die Verminderung von H infolge des Einflusses der Längskräfte beträgt etwa 9 bis 40%.

So findet Rueb in einem Beispiel mit dem Verhältnis $\frac{h}{l} = \frac{1}{5}$, in einem anderen mit dem Verhältnis $\frac{h}{l} = \frac{1}{10}$

$\frac{h}{l}$	H_0	H_L	H_Q	H_{LQ}
$\frac{1}{5}$	21,306 t	20,067 t	19,770 t	18,646 t
$\frac{1}{10}$	35,714	25,389	28,685	21,389

Das Überwiegen des Einflusses der Querkkräfte in der Herabminderung von H gegenüber dem Einfluß der Längskräfte für die üblicheren Verhältnisse $\frac{h}{l} = \frac{1}{5}$ bis $\frac{1}{4}$ ist demnach nur gering und wir erzielen, wenn wir uns bei solchen Rahmenkonstruktionen allgemein nicht die Mühe machen, beide in Rede stehenden Einflüsse mit zu berücksichtigen, mit der leicht einzuschließenden Rücksichtnahme auf die Längskräfte den gegebenenfalls gewünschten höheren Genauigkeitsgrad unserer Rechnung wenigstens annähernd.

Ein Vergleich der Ergebnisse für H bei $\frac{h}{l} = \frac{1}{10}$ erweist ebenso, daß wir uns in Fällen sehr niedriger Bauhöhe eines Rahmens bei Mitherücksichtigung der Längskräfte in dem für praktische Verhältnisse erwünschten Maße den genauen Ergebnissen von $H(H_{LQ})$ nähern.

Die Mitherücksichtigung des Einflusses der Querkkräfte steht für die Bedürfnisse der Praxis meistens in keinerlei Verhältnis zu der damit verbundenen Erschwerung der Rechnung.

¹⁾ Dr.-Ing. B. Rueb: „Der Einfluß der Längs- und Querkkräfte auf statisch unbestimmte Bogen- und Rahmentragwerke“.

Kapitel XXIX.

Berücksichtigung von Wärmeschwankungen.

Die betreffenden Zusatzglieder lauten nach S. 100:

$$1. L'_{at} = \int N_a \cdot \varepsilon \cdot t \cdot ds$$

$$2. L'_{bt} = \int N_b \cdot \varepsilon \cdot t \cdot ds.$$

Nur Gleichung 1. kommt hiervon für die Praxis zur Geltung, und wir erhalten nach S. 106 unten:

$$X_{at} = \frac{\varepsilon \cdot E \cdot J_m \int t \cdot \cos \alpha \cdot ds}{\int y^2 \cdot ds \cdot \frac{J_m}{J} + \int \cos^2 \alpha \cdot ds \cdot \frac{J_m}{F}}$$

Da $\int_0^l \cos \alpha \cdot ds$ die Grundrißlänge des Rahmens bedeutet, so erhalten wir bei Annahme gleicher Wärmezunahme oder -abnahme über die ganze Länge den Temperaturschub

$$X_{at} = \frac{\varepsilon \cdot E \cdot J_m \cdot l}{\int y^2 \cdot ds \cdot \frac{J_m}{J} + \frac{J_m \cdot l}{F}}$$

Es ist ersichtlich, daß die von einer Wärmeschwankung herührende Größe X in Unabhängigkeit von der übrigen Rechnung steht und daher für sich berücksichtigt werden kann. X_{at} ist negativ bei Wärmeabnahme, positiv bei Wärmezunahme.

Die Veränderung des Wärmezustandes braucht nicht für alle Stabteile eines Systems gleich groß zu sein, jedoch müßte sie sich nach dieser Rechnung gleichmäßig über das ganze Volumen des in Mitleidenschaft gezogenen Stabes erstrecken. Ungleichmäßige Wärmeveränderung (einseitige Bestrahlung durch die Sonne) wäre nach den Angaben auf S. 333 zu berücksichtigen.

Kapitel XXX.

Berechnung der Einflußliniengleichungen bei lotrechter Belastung.

Diese erfolgt in ganz ähnlicher Weise, wie für den Zweigelenkrahmen in Kapitel XI gezeigt wurde.

Wir gehen von den auf S. 236 erhaltenen einfachen Schlußgleichungen aus (mit $v = 1$):

$$X = \frac{\int M_0 \cdot y \cdot ds}{\int y^2 \cdot ds} = \frac{S_x}{T_x}$$

$$Y = \frac{\int M_0 \cdot x \cdot ds}{\int x^2 \cdot ds} = \frac{S_y}{T_y}$$

$$Z = - \frac{\int M_0 \cdot ds}{\int ds} = - \frac{S}{T}$$

Wir erhalten ohne weiteres nach S. 140 für den Zähler von X nach Abb. 262 mit der darunter gezeichneten Momentenfläche des einfachen Balkens auf zwei Stützen:

$$S_x = + a \left(\frac{ul}{2} \right) - a^2 \left(\frac{u}{2} \right).$$

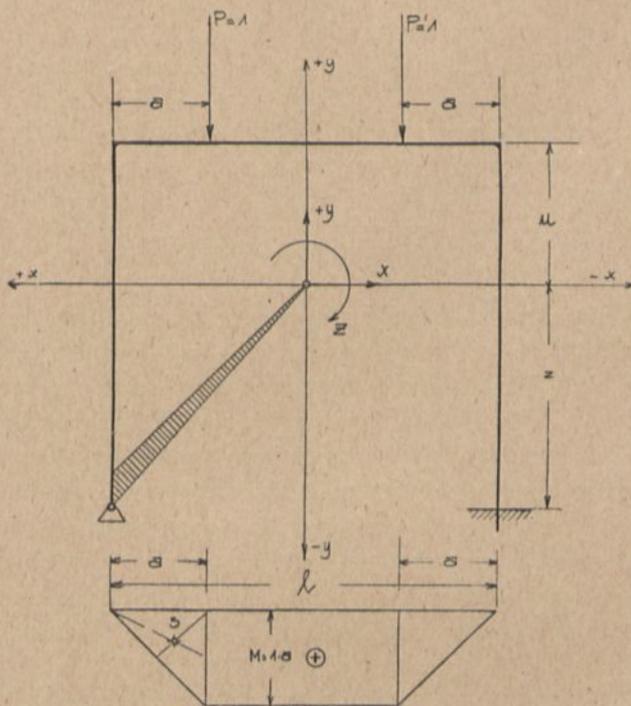


Abb. 262.

Neu müssen wir ableiten den Zähler von Y .

Während sich die Ordinaten für den Schub X genau analog dem Ergebnis beim Zweigelenkrahmen berechnen ließen (für zwei symmetrische Lasten 1), dürfen wir dieses Verfahren zur Bestimmung von Y nicht anwenden, da es sich hier um lotrechte Reaktionen handelt; wir arbeiten hier von Anfang an mit nur einer Last 1 und erhalten nach Abb. 263, solange die

Last links von der Mitte wandert, S_y als das statische Moment der Dreiecksfläche

$$\frac{1}{2} l \cdot \frac{a(l-a)}{l} = \frac{a(l-a)}{2}$$

bezogen auf die y -Achse zu

$$S_y = \frac{a(l-a)}{2} \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{l}{2} - a \right);$$

$$S_y = +a \left(\frac{l^2}{12} \right) + a^3 \left(\frac{1}{6} \right) - a^2 \left(\frac{l}{4} \right).$$

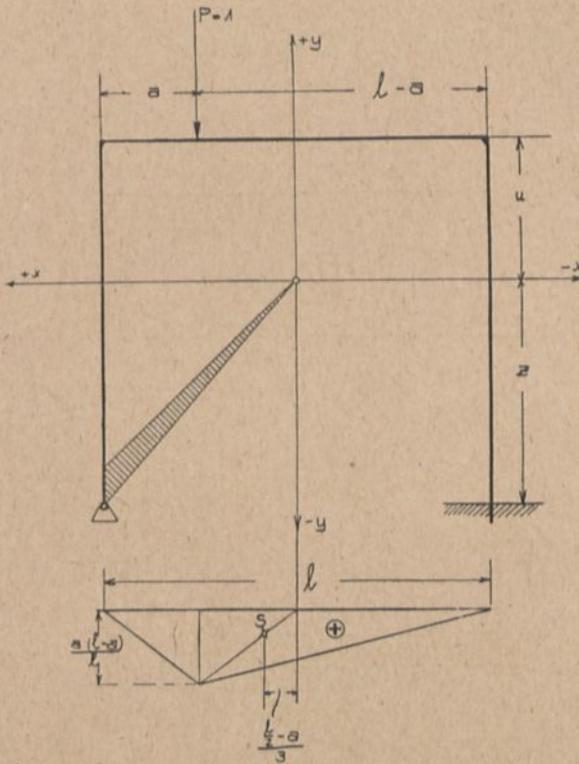


Abb. 263.

Solange die Last 1 rechts von der Mitte wandert, ist entsprechend:

$$S_y = +a^2 \left(\frac{l}{4} \right) - a \left(\frac{l^2}{12} \right) - a^3 \left(\frac{1}{6} \right).$$

Der Zähler von Z wird ohne weiteres nach Abb. 262

$$S = a \left(\frac{l}{2} \right) - a^2 \left(\frac{1}{2} \right).$$

Die zugehörigen Nenner werden in bekannter Weise gefunden (vgl. auch Kap. XXXII).

Nach den somit gewonnenen sehr einfachen Ordinaten-
gleichungen für beliebige Lastlagen lassen sich nun für die ver-
schiedensten Belastungsfälle fertige Schlußformeln aufstellen, wie
das in Kapitel XI schon gezeigt ist.

Kapitel XXXI.

Der eingespannte Rahmen mit Kragarmen.

Die Ableitung der Einflußliniengleichungen für eine auf den
Kragarmen wandernde Last erfolgt in ähnlicher Weise wie für
den Zweigelenrahmen mit Kragarmen (vgl. S. 143 und 156).

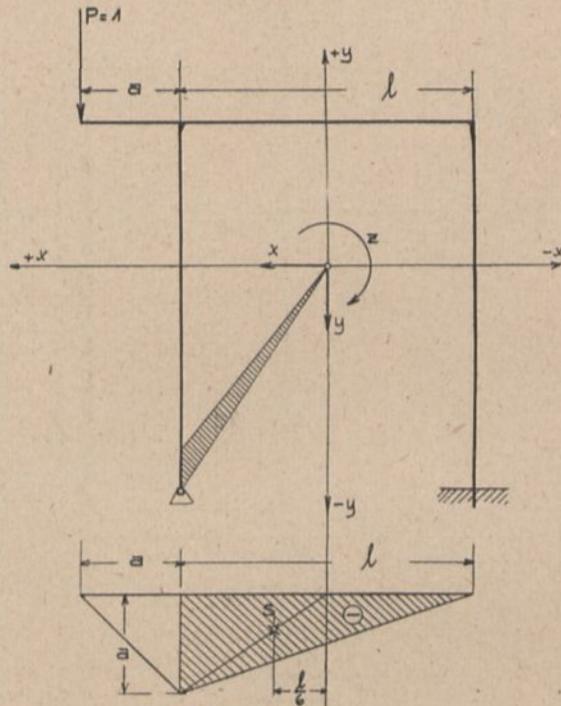


Abb. 264.

Demnach ist bei wagerechtem Riegel (vgl. Abb. 262)

$$S_x = -a \left(\frac{u \cdot l}{2} \right)$$

und S_y nach Abb. 264

$$S_y = -\frac{1}{2} l \cdot a \cdot \frac{l}{6}$$

$$S_y = -a \left(\frac{l^2}{12} \right)$$

und schließlich

$$S = -a \left(\frac{l}{2} \right).$$

Die Einflußlinien sind demnach bezüglich des veränderlichen a wieder gerade Linien, und insbesondere stellt sich die Einflußlinie für X wieder heraus als tangentielle geradlinige Verlängerung der Einflußlinie für X zwischen den Stielen.

Kapitel XXXII.

Beispiel der Berechnung eines Durchlasses bei völliger Einspannung der Seitenwände (Abb. 265)¹⁾.

Belastungsannahmen:

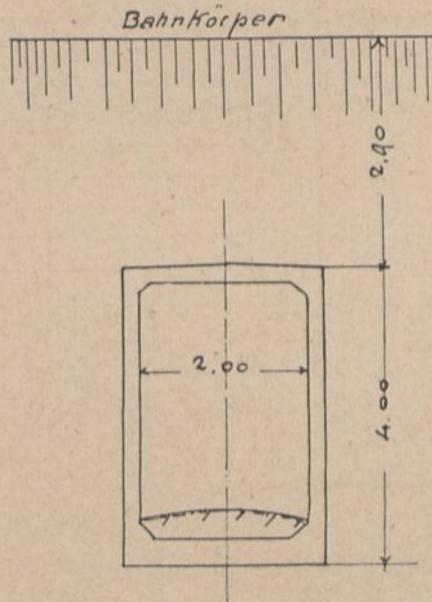


Abb. 265.

Für die obere Platte Erdschüttung und eine Nutzlast von 2400 kg/m^2 (Eisenbahnzüge); für die Seitenwände Erddruck und Nutzlast. Bei den Wänden werde eine einseitige Belastung nicht berücksichtigt. Der Böschungswinkel φ betrage 38° und das Ge-

¹⁾ Ein Aufsatz „Herstellung von Fernheizkanälen aus Eisenbeton“ (Arm. Beton 1917, Heft 12) bringt ganz ähnliche Beispiele und einen Armierungsplan. Durch die Ausführungsart ist völlige Einspannung nicht gewährleistet (vgl. Schlußabsatz Seite 258).

wicht der Erde $\gamma = 1600 \text{ kg/m}^3$. Die Seitenwände seien in der für diesen Zweck hinreichend stark zu konstruierenden Sohlplatte fest eingespannt.

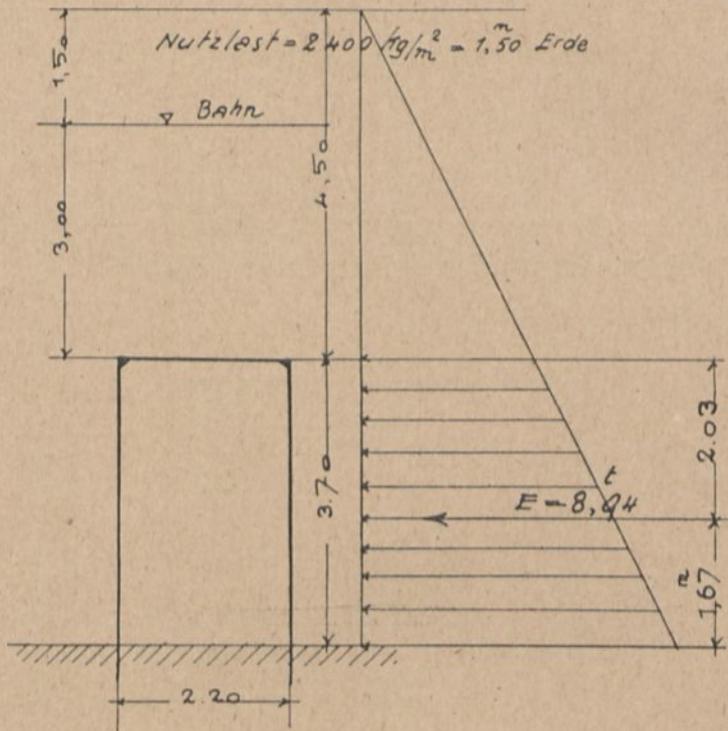


Abb. 266.

Belastungen: a) Decke:

Nutzlast	=	2400 kg/m ²
Erdschüttung $1600 \cdot 3,00$	=	4800 „
Platte $22 \cdot 24$	=	528 „
		<hr/>
		7728 kg/m ²

b) Seitenwände:

$$E = \frac{\gamma}{2} \cdot h^2 \cdot \tan^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi^\circ}{2} \right) = \frac{1,6}{2} \cdot 8,2^2 \cdot \tan^2 \left(45^\circ - \frac{38^\circ}{2} \right) = 12,80 \text{ t}$$

$$- 12,80 \cdot \left(\frac{4,5}{8,2} \right)^2 = 3,86 \text{ t}$$

$$\underline{\underline{E = 8,94 \text{ t}}}$$

Der Abstand x von unten bis zur Erddruckresultierenden beträgt somit

$$x = \frac{12,8 \cdot \frac{8,2}{3} - 3,86 \left(\frac{4,5}{3} + 3,70 \right)}{8,94} = 1,67 \text{ m (Abb. 266).}$$

M_0 -Systeme und statisch unbestimmte Größen.

a) Infolge lotrechter Belastung (Abb. 267).

$$A_0 = B_0 = 7728 \cdot \frac{2,2}{2} = 8500 \text{ kg}$$

$$M_0 = \frac{p \cdot l^2}{8} = \frac{7728 \cdot 2,2^2}{8} = 4675,44 \text{ kgm}$$

$$F_0 = \frac{2}{3} \cdot 4675,44 \cdot 2,2 = 6863,98 \text{ kgm}^2$$

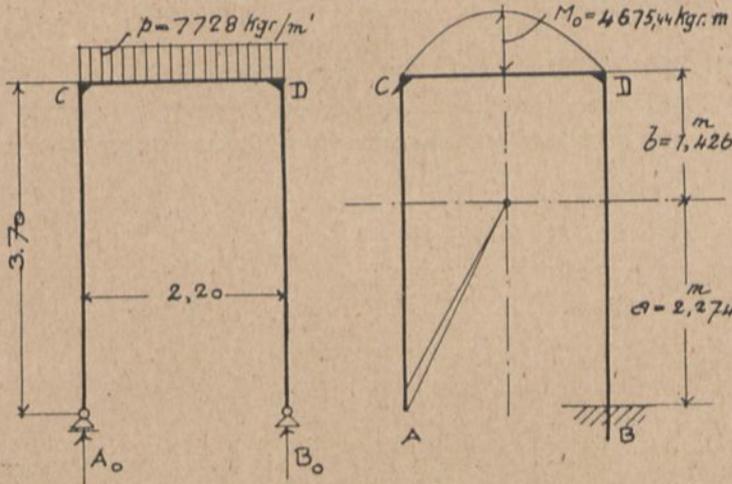


Abb. 267.

Lage der x -Achse

$$a = \frac{2 \cdot 3,70 \cdot 1,85 + 2,2 \cdot 3,70}{9,6} = 2,274 \text{ m}$$

$$b = 3,70 - 2,274 = 1,426 \text{ m (Abb. 267).}$$

Die y -Achse ist identisch mit der Mittelachse. Damit erhalten wir

$$S_x = F_0 \cdot f_x = 6863,98 \cdot 1,426 = 9810 \text{ kgm}^3$$

$$S_y = F_0 \cdot f_y = 0$$

$$T_x = \int y^2 \cdot ds = 2,2 \cdot 1,426^2 + \frac{2}{3} \cdot (2,274^3 + 1,426^3) = 14,25 \text{ m}^3,$$

oder auch nach der bekannten Formel $\sum v \cdot \frac{s}{3} \cdot (H^2 + H \cdot h + h^2)$

$$= \frac{1 \cdot 2,274}{3} \cdot 2,274^2 \cdot 2 + \frac{1,426}{3} \cdot 1,426^2 \cdot 2 + \frac{2,2}{3} \cdot 1,426^2 \cdot 3 = 14,25 \text{ m}^3.$$

$$T_y = \int x^2 \cdot ds = 3,7 \cdot 1,1^2 \cdot 2 + \frac{2,2^3}{12} = 9,85 \text{ m}^3$$

$$T = 2 \cdot 3,70 + 2,20 = 9,60 \text{ m}.$$

Demnach

$$X = \frac{S_x}{T_x} = \frac{9810}{14,25} = + 687 \text{ kg}$$

$$Y = \frac{S_y}{T_y} = 0$$

$$Z = -\frac{S}{T} = -\frac{6863,98}{9,6} = - 715 \text{ kgm}.$$

Mit den im Handbuch für Eisenbetonbau, Bd. IV, 1. Teil, S. 509 für diesen Spezialfall abgeleiteten Formeln lotrechter Belastung eines rechteckigen eingespannten Rahmens ergibt sich

$$X = \frac{g \cdot l^2}{8 \cdot s \cdot \left(1 + \frac{k}{2}\right)}, \text{ worin } k = \frac{s}{l}$$

$$X = \frac{7728 \cdot 2,2^2}{8 \cdot 3,7 \cdot \left(1 + \frac{3,7}{2 \cdot 2,2}\right)} = + 687 \text{ kg},$$

$Y = 0$ und

$$Z = -\frac{g \cdot l^2}{12 \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{s}{l}\right)} = -\frac{7728 \cdot 2,2^2}{12 \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{3,7}{2,2}\right)} = - 715 \text{ kgm}.$$

b) Infolge der seitlichen Belastung (Abb. 268). Der Erddruck wirke zunächst nur auf einer Seite. Am Schluß haben wir dann die Momente mit Rücksicht auf die Belastung von beiden Seiten festzustellen, also auf die erste Momentenfläche das Spiegelbild zu zeichnen.

Für das M_0 -System ist

$$A_0 = 0; B_0 = 8,94 \text{ t}; M_B = - 8,94 \cdot 1,67 = - 14 960 \text{ kgm}.$$

Zwecks Ermittlung der Momentenfläche und ihres Schwerpunktsabstandes von der x -Achse zerlegen wir uns die Trapezfläche und erhalten dann (Abb. 268):

Für das Rechteck

$$E_x = E \cdot \frac{x}{h}; \quad M_x = E \cdot \frac{x}{h} \cdot \frac{x}{2}$$

$$M_x \cdot dx = \frac{E \cdot x^2}{2 \cdot h} \cdot dx;$$

Momentenfläche

$$F_{01} = \frac{E}{2 \cdot h} \cdot \int_0^h x^2 \cdot dx = \frac{E \cdot h^2}{6}.$$

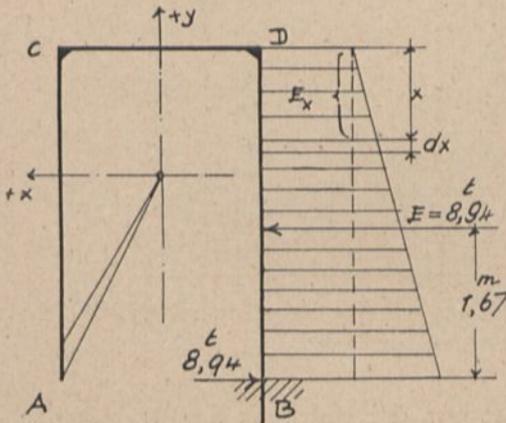


Abb. 268.

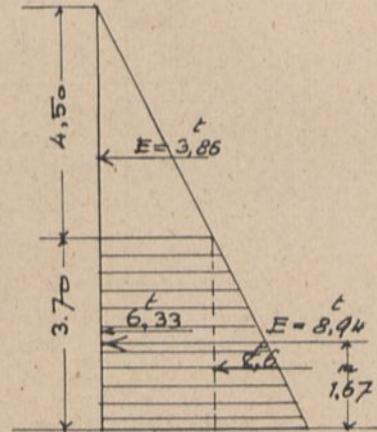


Abb. 269.

Ebenso für das Dreieck

$$E_x = E \cdot \frac{x^2}{h^2}; \quad M_x = \frac{E \cdot x^2}{h^2} \cdot \frac{x}{3}$$

$$M_x \cdot dx = \frac{E \cdot x^3}{3 \cdot h^2} \cdot dx;$$

Momentenfläche

$$F_{02} = \frac{E}{3 \cdot h^2} \cdot \int_0^h x^3 \cdot dx = \frac{E \cdot h^2}{12}.$$

Schwerpunktsabstände dieser Flächen von oben:

Für das Rechteck (Parabel): $\frac{3}{4}h$ (Abb. 270).

Für das Dreieck:

Statisches Moment der Fläche in bezug auf die Oberkante

$$\int_0^h \frac{E \cdot x^3}{3 \cdot h^2} \cdot dx \cdot x = \frac{E}{3 \cdot h^2} \cdot \int_0^h x^4 \cdot dx = \frac{E \cdot h^3}{15}.$$

Dieses muß sein = Fläche \times Schwerpunktsabstand a :

$$\frac{E \cdot h^3}{15} = a \cdot \frac{E \cdot h^2}{12}$$

woraus

$$a = \frac{12}{E \cdot h^2} \cdot \frac{E \cdot h^3}{15} = \frac{4}{5} \cdot h \quad (\text{Abb. 270}).$$

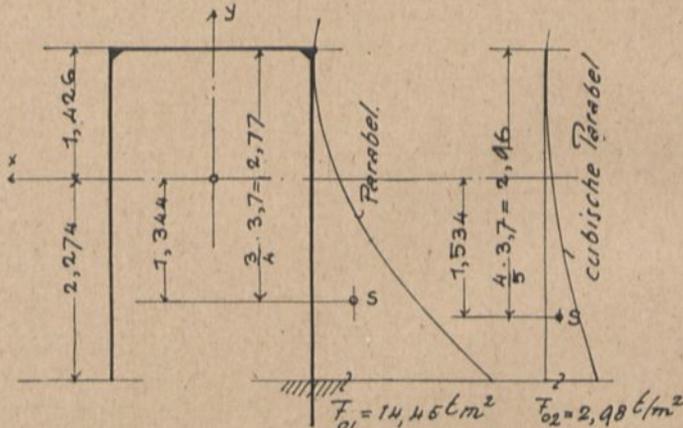


Abb. 270.

Nach Abb. 269 beträgt nun der Erddruck der Dreiecksfläche

$$E = 3,86 \cdot \frac{3,70^2}{4,50^2} = 2,61 \text{ t},$$

somit die durch ihn hervorgerufene Momentenfläche

$$F_{02} = \frac{E \cdot h^2}{12} = \frac{2,61 \cdot 3,7^2}{12} = 2,98 \text{ tm}^2.$$

Der Erddruck der Rechtecksfläche beträgt

$$E = 8,94 - 2,61 = 6,33 \text{ t}$$

und somit die Momentenfläche

$$F_{01} = \frac{E \cdot h^2}{6} = \frac{6,33 \cdot 3,7^2}{6} = 14,45 \text{ tm}^2.$$

Gesamtmomentenfläche:

$$F_0 = F_{01} + F_{02} = - (2,98 + 14,45) = - 17,43 \text{ tm}^2 = - 17340 \text{ kgm}^2.$$

Mit den in Abb. 270 eingetragenen Abständen f_x wird dann:

$$S_x = F_0 \cdot f_x = - 2,98 \cdot (- 1,534) - 14,45 \cdot (- 1,344) \\ = + 23,97 = 23970 \text{ kgm}^3$$

$$S_y = F_0 \cdot f_y = - 17,430 \cdot (- 1,1) = + 19,173 = + 19173 \text{ kgm}^3.$$

Resultate:

$$X = \frac{S_x}{T_x} = \frac{23\,970}{14,25} = + 1680 \text{ kg}$$

$$Y = \frac{S_y}{T_y} = \frac{19\,173}{9,85} = + 1950 \text{ kg}$$

$$Z = -\frac{S}{T} = -\frac{-17\,430}{9,6} = + 1820 \text{ kgm.}$$

Bestimmung der Momente. Die allgemeine, früher schon angegebene Grundgleichung für das Biegemoment an irgendeiner Stelle xy ist

$$M = M_0 - X \cdot y - Y \cdot x + Z.$$

Für lotrechte Belastung:

$$M_A = M_0 - X \cdot y - Y \cdot x + Z$$

$$= 0 - 687 \cdot (-2,274) - 0 + (-715) = + 845 \text{ kgm}^1)$$

oder laut spezieller Gleichung (vgl. Handbuch):

$$M_A = X \cdot z - Y \cdot \frac{l}{2} + Z$$

$$= 687 \cdot 2,274 - 0 + (-715) = + 845 \text{ kgm.}$$

$$M_B = M_A + Y \cdot l = 845 + 0 = + 845 \text{ kgm.}$$

$$M_C = M_0 - X \cdot u - Y \cdot \frac{l}{2} + Z$$

$$= 0 - 687 \cdot 1,426 - 0 + (-715) = - 1694,66 \text{ kgm.}$$

$$M_D = M_0 - X \cdot u - Y \cdot \frac{l}{2} + Z$$

$$= 0 - 687 \cdot 1,426 - 0 + (-715) = - 1694,66 \text{ kgm.}$$

Für wagerechte Belastung:

$$M_A = M_0 - X \cdot y - Y \cdot x + Z$$

$$= 0 - 1680 \cdot (-2,274) - 1950 \cdot 1,1 + 1820 = + 3500 \text{ kgm.}$$

$$M_B = M_0 - X \cdot z - Y \cdot \frac{l}{2} + Z$$

$$= -14960 - 1680 \cdot (-2,274) - 1950 \cdot (-1,1) + 1820$$

$$= -7200 \text{ kgm.}$$

Da nun gleichzeitig auf beiden Seiten der Erddruck wirkt, so sind die endgültigen Momente

$$M_A = M_B = + 3500 - 7200 = - 3700 \text{ kgm.}$$

¹⁾ Nach den S. 237, Zeile 12 u. f. zum Ausdruck gebrachten Grundsätzen über den Richtungssinn der Momente hätte man die hier beobachtete etwas umständliche Rücksichtnahme auf die Vorzeichen der Kräfte und Koordinaten nicht nötig gehabt und die Vorzeichen für die Produkte aus Kraft \times Hebelarm einfacher aus der Anschauung bestimmt.

Ferner ist

$$M_C = M_0 - X \cdot u - Y \cdot \frac{l}{2} + Z$$

$$= 0 - 1680 \cdot 1,426 - 1950 \cdot 1,1 + 1820 = -2720 \text{ kgm.}$$

$$M_D = M_0 - X \cdot u - Y \cdot \frac{l}{2} + Z$$

$$= 0 - 1680 \cdot 1,426 - 1950 \cdot (-1,1) + 1820 = +1560 \text{ kgm}$$

also

$$M_C = M_D = -2720 + 1560 = -1160 \text{ kgm.}$$

Es betragen somit die endgültigen Eckmomente, da die lotrechte und wagerechte Belastung gleichzeitig vorhanden ist:

$$M_A = M_B = -3700 + 845 = -2855 \text{ kgm,}$$

$$M_C = M_D = -1160 - 1694,66 = -2854,66 \text{ kgm.}$$

Auftragung der endgültigen Momentenfläche.

Hierbei müssen wir uns daran erinnern, daß in die Momente $M_A = M_B$ schon das M_0 -Moment der wagerechten Belastung einbezogen ist. Wir wollen deshalb für M_A und M_B das M_0 -Moment

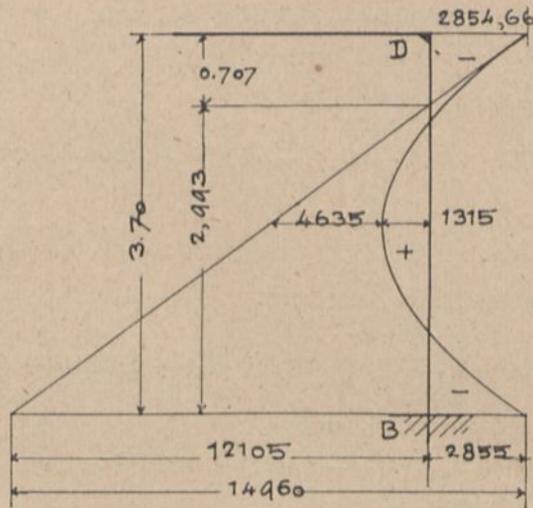


Abb. 271.

wieder zuzählen, um lediglich dasjenige Moment zu erhalten, welches von den unbestimmten Größen herrührt.

Dann wird

$$M_A = M_B = -2855 + 14960 = +12105 \text{ kgm.}$$

Die M_0 -Fläche mit dem Größtmoment von 14960 kgm an der Einspannstelle ist nun zu der Momentenfläche, herrührend von

den unbestimmten Größen, algebraisch zu addieren, d. h. wir haben die M_0 -Fläche an die schräge Linie (Abb. 271) anzutragen¹⁾. Die M_0 -Momentenflächen der Decken- und Bodenplatte sind gewöhnliche Parabelflächen.

Deckenplatte:

$$M_0 = \frac{7728 \cdot 2,2^2}{8} = 4675,44 \text{ kgm.}$$

Bodenplatte: Hierbei ist erst die Baugrundbelastung festzustellen.

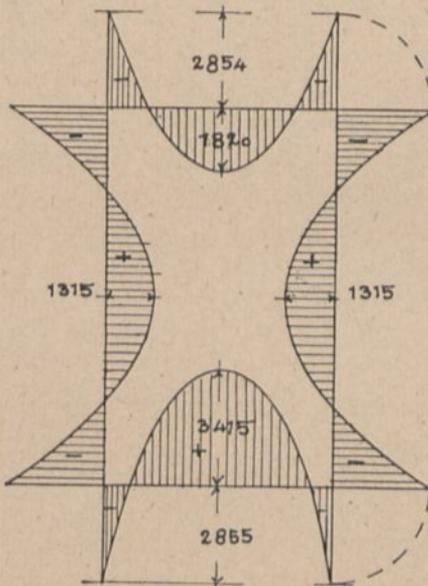


Abb. 272.

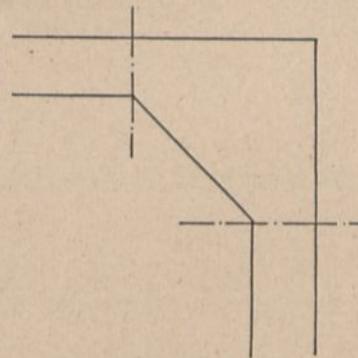


Abb. 273.

Das Gewicht der Deckenplatte, Wände, Aufschüttung und Nutzlast betrage f. d. lfd. m Durchlaß = 24000 kg. Dieses Gewicht beansprucht die Bodenplatte, welche dasselbe gleichmäßig auf den Baugrund übertragen soll, auf Biegung, wobei das Eigengewicht der Platte selbst für die Biegung herausfällt. Nehmen wir noch an, daß ein Wasserüberdruck von 0,50 m oberhalb der Bodenplatte, dem Grundwasserspiegel entsprechend, hinzukommt,

¹⁾ Oder man trägt von der Verbindungsgeraden der beiden negativen Eckmomente 2854,66 und 2855 die zu der trapezförmigen Belastung gehörige positive Momentenfläche des einfachen Balkens mit den Stützpunkten D und B ab, wofür hier auch angenähert eine Parabel gesetzt werden kann. Vgl. Anmerk. S. 36. unt.

so ergibt das noch $500 \cdot 2,44 = 1220$ kg; mithin Gesamtgewicht = 25 220 kg, wovon auf die Systembreite

$$25\,220 \cdot \frac{2,2}{2,44} = 22\,800 \text{ kg}$$

entfallen. Somit

$$M_0 = \frac{22\,800 \cdot 2,2}{8} = 6270 \text{ kgm.}$$

Diese M_0 -Momente, mit den Eckmomenten vereinigt, gibt als Schlußresultat Abb. 272.

Die Dimensionierung des Rahmens hat für exzentrischen Druck zu erfolgen. An den Ecken empfiehlt sich in der Regel eine gute Verstärkung. Berechnet werden in der Nähe derselben nur die beiden in Abb. 273 angegebenen Querschnitte.

Wir haben hier die starre Einspannung voraussetzenden Ableitungen des eingespannten Rahmens verwandt. Die Bedingung wird annähernd erfüllt, wenn das Trägheitsmoment der Bodenplatte im Verhältnis zu denen der Wände und Decke reichlich groß ist (genau genommen soll $J_u \infty$ sein).

Kapitel XXXIII.

Anwendbarkeit des eingespannten oder geschlossenen Rahmens.

Bei der in Abb. 274 dargestellten Konstruktion würde es verfehlt sein, als Träger der Stabilität die großen Hauptbinder zu

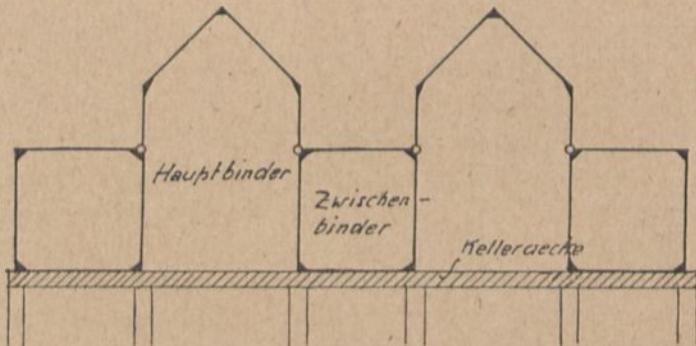


Abb. 274.

wählen derart, daß sie etwa in der Kellerdecke eingespannt und an den Stellen der jetzigen Gelenke nur durch Riegel ausgesteift

würden. Das Gebotene ist hier, die Zwischenbinder als eingespannte Rahmenträger und die hohen Dächer als Zweigelenkrahmen auszuführen. Durch diese Unterbrechung werden zu ungeschickte Abmessungen der Pfeiler und Dachbinder vermieden, die besonders ins Gewicht fallenden Windkräfte aber auf die in ihren Abmessungen verhältnismäßig kleinen rechteckigen Zwischenbinder übertragen, so daß die Stabilität des ganzen Gebäudes hauptsächlich auf deren Festigkeit und Steifigkeit beruht. Es leuchtet ein, daß es stets vorteilhaft sein muß, als Träger der Stabilität möglichst die kleinsten in einem Gebäude entwickelbaren Systeme zu wählen. Ein großer Vorteil ist ferner die Klarheit in der Berücksichtigung der Temperaturunterschiede, welche durch die Abtrennung des besonderen Temperatureinflüssen ausgesetzten Konstruktionsteils ermöglicht ist. Außerdem bietet die praktische Arbeitseinteilung, welche bei der Herstellung möglich ist, noch einen recht erheblichen Vorteil.

Wie schon im Kapitel XV hervorgehoben wurde, spielt in der Wirtschaftlichkeit eines eingespannten Rahmens der Einspannungsgrad eine wesentliche Rolle, so daß hier auf die dortigen Äußerungen noch einmal hingewiesen sein möge.

Der geschlossene Rahmen (Kastenrahmen).

Kapitel XXXIV.

Allgemeines.

Derartige Rahmen sind bereits in Kapitel II erwähnt worden (Abb. 33). Abb. 40 und 41 zeigen die Bildung des statisch bestimmten Hauptsystems und die Hervorhebung der statisch unbestimmten Größen. Der Querschnitt, wo wir durchschneiden, kann ganz beliebig gewählt werden; zweckmäßigerweise wird man aber den Querschnitt auf die Vertikalachse — in den unteren oder den oberen Riegel — verlegen.

Die drei statisch unbestimmten Größen bringen wir wieder durch eine starre Scheibe mit dem Schwerpunkt des ganzen Rahmens in Verbindung. Damit ist der Fall zurückgeführt auf die Berechnung des eingespannten Rahmens; die statisch unbestimmten Größen werden also genau nach denselben Lösungsformeln wie früher gefunden. Der ganze Unterschied besteht darin, daß der untere Riegel, sowohl in der Formgröße (dem Nenner) als auch in der Belastungsgröße (dem Zähler), mit zu berücksichtigen ist.

Im übrigen sind alle Betrachtungen vollständig sinngemäß mit denen beim vollständig eingespannten Rahmen auszuführen.

Kapitel XXXV.

Beispiel der Berechnung eines Kastenrahmens (Dachbinder in biegefesten Verbindung mit dem Deckenunterzug).¹⁾

Riegel und Pfosten bilden den Dachbinder, während der Fußrahmen der Decke als Unterzug dient.

¹⁾ Die Ausrechnung erfolgte nur mit dem Rechenschieber.

Die Monatsschrift „Armierter Beton“ 1919, Heft 5 S. 114 bringt einen Aufsatz über die Berechnung eines rechteckigen geschlossenen Rahmens unter verschiedenartiger lotrechter und seitlicher Belastung (gleichmäßig verteilt, Einzellast, Dreieckslast) mit Schlußformeln für die statisch unbestimmten Größen und Zahlenbeispielen.

Trägheitsmomente.

1. Riegel (Abb. 275)

durch Beton

$$J_b = \frac{0,50^4}{12} = 0,0521 \text{ m}^4$$

zufolge Eisen von 15 cm^2 beiderseitig

$$F = 15 \cdot 15 = 225 \text{ cm}^2$$

$$J_e = \frac{225}{10000} \cdot 2 \cdot 0,21^2 = 0,00198$$

zusammen $J = 0,00719 \text{ m}^4$

(Nach § 16, Ziffer 1, Absatz 2 der neuen Bestimmungen ist für solche Feststellungen $n = 10$ anzunehmen.)

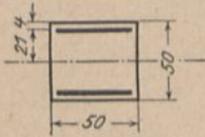


Abb. 275.

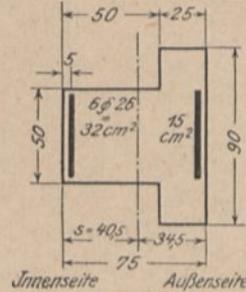


Abb. 276.

2. Pfosten (Abb. 276).

Lage der Schwerachse:

$$0,50 \cdot 0,75 = 0,375 \text{ m}^2 \cdot 0,375 \text{ m} = 0,1407 \text{ m}^3$$

$$0,40 \cdot 0,25 = 0,100 \text{ „} \cdot 0,625 \text{ „} = 0,0625 \text{ „}$$

$$32 \cdot 15 = 480 \text{ cm}^2 = 0,048 \text{ „} \cdot 0,050 \text{ „} = 0,0024 \text{ „}$$

$$15 \cdot 15 = 225 \text{ „} = 0,0225 \text{ „} \cdot 0,700 \text{ „} = 0,0158 \text{ „}$$

$$\frac{0,1407 \text{ m}^3}{0,5455 \text{ m}^2} \quad \frac{0,0625 \text{ „} + 0,0024 \text{ „} + 0,0158 \text{ „}}{0,2214 \text{ m}^3}$$

$$s = \frac{0,2214}{0,5455} = 0,405 \text{ m.}$$

Zufolge Beton

$$J_b = \frac{0,50}{3} (0,405^3 + 0,345^3) + \frac{0,40}{3} (0,345^3 - 0,095^3) = 0,02330 \text{ m}^4.$$

Zufolge Eisen

$$J_e \text{ mit } F = 32 \cdot 15 = 480 \text{ cm}^2, \text{ also } 0,048 \cdot 0,355^2 = 0,00605$$

$$+ 15 \cdot 15 = 225 \text{ cm}^2 \quad 0,0225 \cdot 0,295^2 = 0,00196$$

zusammen $0,0313 \text{ m}^4$.

3. Fußrahmen (Abb. 277).

Lage der Schwerachse:

$$\begin{array}{rcl}
 0,50 \cdot 0,85 & = & 0,425 \text{ m}^2 \cdot 0,425 \text{ m} = 0,2805 \text{ m}^3 \\
 1,90 \cdot 0,15 & = & 0,285 \text{ ,,} \cdot 0,775 \text{ ,,} = 0,2210 \text{ ,,} \\
 64 \cdot 15 = 960 \text{ cm}^2 & = & 0,096 \text{ ,,} \cdot 0,050 \text{ ,,} = 0,0048 \text{ ,,} \\
 \hline
 & & 0,806 \qquad \qquad \qquad 0,4063
 \end{array}$$

$$s = \frac{0,4063}{0,806} = \text{rd. } 0,50 \text{ m}$$

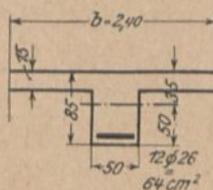


Abb. 277.

$$J_b = \frac{0,50}{3} (0,50^3 + 0,35^3) + \frac{1,90}{3} (0,35^3 - 0,20^3) = 0,0501 \text{ m}^4$$

$$J_e = 0,096 \cdot 0,45^2 = 0,0195$$

zusammen 0,0696 m⁴.

Wird für J_m das J des Deckenunterzuges zugrunde gelegt, so ist für diesen selbst

$$\frac{J_m}{J} = v = 1,$$

$$\text{für die Pfosten } v = \frac{0,0696}{0,0313} = 2,22,$$

$$\text{für den Riegel } v = \frac{0,0696}{0,00719} = 9,70.$$

Abstand der Schwerachse des Stabzuges von der Achse des Fußrahmens (Abb. 278)

$$s = \frac{6,85 \cdot \left(2,07 + \frac{2,73}{2}\right) \cdot 9,70 + 2,07 \cdot \frac{2,07}{2} \cdot 2,22}{6,85 \cdot 9,70 + 2,07 \cdot 2,22 + \frac{12,60}{2} \cdot 1} = 3,01 \text{ m.}$$

Damit ist auf die Achse bezogen:

$$\begin{aligned}
 T_s &= \frac{2}{3} [6,30 \cdot 3,01^3 \cdot 3 \cdot 1 + 2,07 \cdot (3,01^2 + 3,01 \cdot 0,94 + 0,94^2) \cdot 2,22 + 2,36 \cdot 0,94^2 \cdot 9,7 + 4,49 \cdot 1,79^2 \cdot 9,70] \\
 &= 260,0 \text{ m}^3.
 \end{aligned}$$

Bezogen auf die Schwerachse ist (Abb. 279)

$$f_x = \frac{5}{8} \cdot 2,73 - 0,94 = 0,77 \text{ m}$$

$$S_x = v \cdot F_0 \cdot f_x = (9,70 \cdot 187,5 \cdot 0,77) \cdot 2 = 2800 \text{ tm}^3$$

$$S_y = 0, \text{ da Symmetrie vorhanden ist}$$

$$S = (9,70 \cdot 187,5) \cdot 2 = 3640 \text{ tm}^2.$$

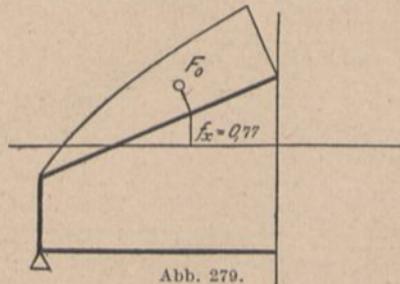


Abb. 279.

Daher ist
$$X = \frac{S_x}{T_x} = \frac{2800}{260} = 10,75 \text{ t.}$$

X ist den durch die Belastung hervorgerufenen Formveränderungen entgegengesetzt wirkend anzunehmen.

$$Y = 0$$

$$Z = \frac{3640}{154,8} = 23,50 \text{ mt.}$$

Z erzeugt stets Spannungen, die denen aus der Belastung entgegengesetzt gerichtet sind; es ist hier also als negativ einzusetzen.

Zufolge der statisch unbestimmten Größen X und Z ergeben sich folgende Eckmomente (Abb. 280):

$$M_I = 10,75 \cdot 3,01 - 23,5 = 8,90 \text{ mt}$$

$$M_{II} = 10,75 \cdot 0,94 - 23,5 = -13,40 \text{ mt}$$

$$M_{III} = -10,75 \cdot 1,79 - 23,5 = -42,75 \text{ mt.}$$

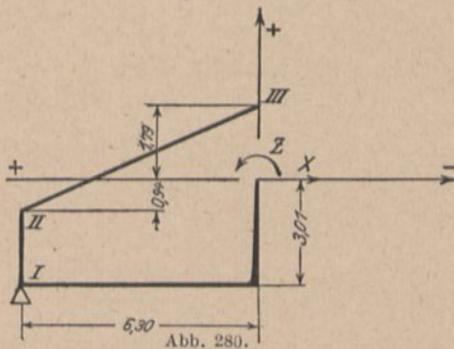


Abb. 280.

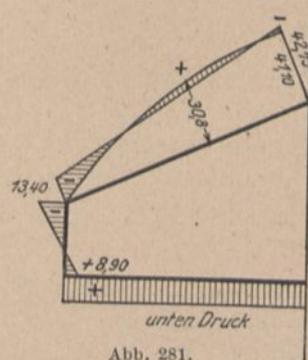


Abb. 281.

In Abb. 281 ist unter Hinzufügung der M_0 -Momentenfläche die vollständige Momentenfläche dargestellt.

2. Einfluß der Deckenlast.

Der Fußrahmen erhält die gleichmäßige Belastung von

$$\begin{array}{rcl} \text{Deckenplatte} & 0,93 \cdot 3,51 & = 3,27 \text{ t/m} \\ \text{Balkensteg} & 0,50 \cdot 0,70 \cdot 2,40 & = 0,84 \text{ ,,} \\ \hline & & 4,11 \text{ t/m} \end{array}$$

ohne Nutzlast

$$\begin{array}{l} 4,11 - 3,51 \cdot 0,50 = 2,35 \text{ t/m} \\ M_0 = \frac{4,11 \cdot 12,0 \cdot 12,6}{8} = 77,70 \text{ mt.} \end{array}$$

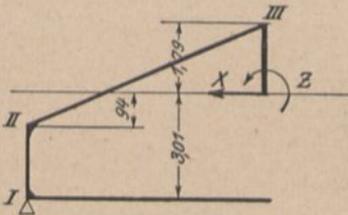


Abb. 282.

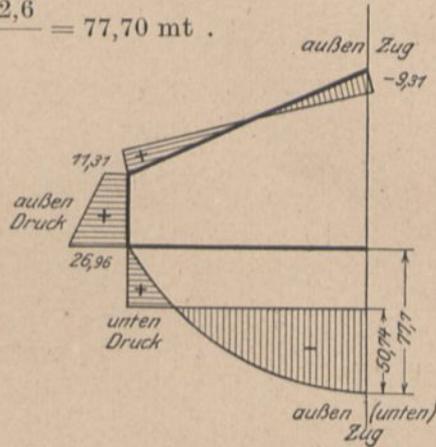


Abb. 283.

Dies Moment erzeugt außen am Rahmen, d. i. unten, Zugspannungen weshalb wir es als negativ wirkend anzunehmen haben.

$$F_0 = -\frac{2}{3} \cdot 12,60 \cdot 77,7 = -652 \text{ tm}^2$$

$$f_x = -3,01$$

$$S_x = v \cdot F_0 \cdot f_x = +1 \cdot 652 \cdot 3,01 = +1962 \text{ tm}^3$$

$$S_y = 0$$

$$S = 652 \text{ tm}^2,$$

daher

$$X = \frac{S_x}{T_x} = \frac{1962}{260} = 7,55 \text{ t}$$

$$Z = \frac{652}{154,8} = 4,21 \text{ mt.}$$

Beide Größen wieder entgegengesetzt der Belastungswirkung eingesetzt, ergeben sich folgende Eckmomente (Abb. 282):

$$M_I = (-7,55) \cdot (-3,01) + 4,21 = +26,96 \text{ mt}$$

$$M_{II} = (-7,55) \cdot (-0,94) + 4,21 = +11,31 \text{ ,,}$$

$$M_{III} = -7,55 \cdot 1,79 + 4,21 = +9,31 \text{ ,,}$$

In Abb. 283 ist unter Hinzufügung der M_0 -Momentenfläche die vollständige Momentenfläche dargestellt.

3. Bemessung.

a) Der Deckenunterzug erhält das größte Moment nach Belastungsfall 2 unter Berücksichtigung von Fall 1 für Binderlast ohne Schnee, daher

$$+ M_{\max} = 50,74 - 8,90 \cdot \frac{1,80}{2,07} = 43,00 \text{ mt};$$

der gleichzeitig aufzunehmende Zug zufolge der statisch unbestimmten Größen H beträgt

$$Z = 7,55 + 10,75 \cdot \frac{1,8}{2,07} = 16,90 \text{ t},$$

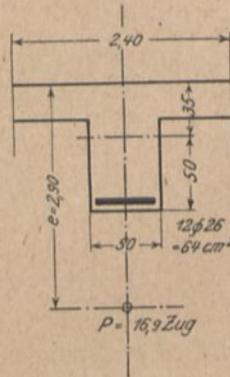


Abb. 284.

so daß ein Fall exzentrischen Zuges vorliegt mit der Exzentrizität

$$v = \frac{43,0}{16,90} = 2,55 \text{ m}$$

$$e = 2,55 + 0,35 = 2,90 \text{ m (Abb. 284)}$$

$$\frac{240}{6 \cdot 15 \cdot 64} \cdot x^3 - \frac{240 \cdot 290}{2 \cdot 15 \cdot 64,0} \cdot x^2 + (80 - 290) x = 80 (80 - 290)$$

$$x^3 - 870 x^2 - 5040 x = - 403 200,$$

daraus

$$x = 19 \text{ cm}$$

$$\sigma_b = \frac{16900 (19,0 - 290)}{\frac{240 \cdot 19^2}{3} + 15 \cdot 64 \cdot \frac{61^2}{19}} = 21,1 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_e = 21,1 \cdot 15 \cdot \frac{61}{19} = 1018 \text{ kg/cm}^2;$$

da die Plattenstärke nur 15 cm beträgt, wird die obere Randspannung um wenig höher ausfallen als 21,1 kg/cm².

Kontrolle:

$$D_b + Z = Z_e$$

$$D_b = \frac{21,1}{2} \cdot 240 \cdot 19 = 48\,200 \text{ kg}$$

$$Z = \frac{16\,900}{\text{zusammen } 65\,100}$$

$$Z_e = 1018 \cdot 64,0 = \text{rd. } 65\,100.$$

Schubbeanspruchung¹⁾.

Am Auflager ist

$$Q = 4,11 \cdot 6,30 = 25,90 \text{ t.}$$

Mit $z = 80 - \frac{19,0}{3} = 73,7 \text{ cm}$ ist dann ohne Rücksicht auf die Erhöhung des Querschnittes am Auflager²⁾

$$\tau_o = \frac{25\,900}{50 \cdot 737} = 7,02 \text{ kg/cm}^2$$

$$25,9 \cdot \frac{4,0}{70,2} = 14,76 \text{ t.}$$

Schubsicherungslänge

$$l' = \frac{25,9 - 14,76}{4,11} = 2,71 \text{ m.}$$

Es werden zunächst den Auflagern Doppelbügel von 8 mm Stärke in 10 cm Abstand verwendet, diese können eine Querkraft von

$$0,503 \cdot 4 \cdot 1,2 \frac{73,7}{20} = 8,9 \text{ t}$$

übertragen. Auf die erste Zugstrebe entfällt dann noch die Querkraft von

$$Q = 25,9 - 0,85 \cdot 4,11 - 8,9 = 13,5 \text{ t,}$$

so daß

$$Z = \frac{13,5}{\sqrt{2}} = 9,55 \text{ t}$$

und

$$\sigma_e = \frac{9550}{2 \cdot 5,31} = \text{rd. } 900 \text{ kg/cm}^2.$$

Die zweite Zugstrebe erhält denselben Querschnitt. Für die dritte Zugstrebe ist mit dem Abstand von rd. 2,35 m ($0,85 + 2 \cdot z$):

$$Q = 25,9 - 2,35 \cdot 4,11 = 16,3 \text{ t,}$$

¹⁾ Vgl. Schlüter, „Die Schubsicherung der Eisenbetonbalken durch abgebogene Hauptarmierung und Bügel“, Beispiele. S. Anz. a. Schluß d. Buches.

²⁾ Der Deckenunterzug hat an den Auflagern nach unten gehende konsolförmige Verstärkungen erhalten.

so daß

$$Q = 16,3 - 8,9 = 7,40 \text{ t}$$

durch die Zugstrebe aufzunehmen sind.

$$Z = \frac{7,40}{\sqrt{2}} = 5,23 \text{ t,}$$

genügt 1 Eisen 26 mm Durchm.

Das Eckmoment des Rahmens beträgt

$$8,90 + 26,96 = 35,86 \text{ mt.}$$

Bei der Höhe daselbst von 125 cm ist

$$r = \frac{125 - 6}{\sqrt{\frac{3586000}{50}}} = \frac{119}{268} = 0,443,$$

dem entspricht bei $\sigma_e = 1000$

$$\sigma_b = 34,0$$

$$f_e = 0,254 \cdot 268 \cdot 0,50 = 34,0 \text{ cm}^2.$$

Vorhanden 6 Eisen 26 mm Durchm. = $31,9 \text{ cm}^2$, so daß

$$\sigma_e = 1000 \cdot \frac{34,0}{31,9} = 1065 \text{ kg/cm}^2.$$

b) Die Pfosten.

Das größte Eckmoment beträgt (unten)

$$M = 26,96 + 8,90 = 35,86 \text{ mt.}$$

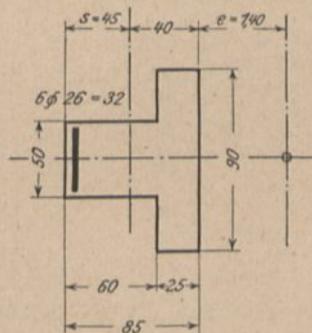


Abb. 285.

Beim Anschnitt des Pfostens am unteren Riegel ist $M = \text{rd. } 32,50 \text{ mt.}$

Die gleichzeitig auftretende Normalkraft beträgt 18 t.

An der Einspannungsstelle hat der Pfosten den in Abb. 285

dargestellten Querschnitt. Für diesen ist die Lage der Schwerachse bestimmt aus

$$0,50 \cdot 0,85 = 0,425 \text{ m}^2 \cdot 0,425 \text{ m} = 0,1806 \text{ m}^3$$

$$0,40 \cdot 0,25 = 0,100 \text{ ,,} \cdot 0,725 \text{ ,,} = 0,0725 \text{ ,,}$$

$$32 \cdot 15 = 480 = \frac{0,048 \text{ ,,}}{0,573} \cdot 0,05 \text{ ,,} = \frac{0,0024 \text{ ,,}}{0,2555}$$

$$s = \frac{0,2555}{0,573} = 0,466 = 0,45 \text{ m}$$

$$v = \frac{32,5}{18,0} = 1,80 \text{ m}$$

$$e = 1,80 - 0,40 = 1,40 \text{ m}$$

$$\frac{90}{6 \cdot 15 \cdot 32} x^3 + \frac{90 \cdot 1,40}{2 \cdot 15 \cdot 32} x^2 + 220 x = 80 \cdot 220$$

$$x^3 + 420 x^2 + 7040 x = 563000$$

daraus

$$x = 28,5 \text{ cm}$$

$$\sigma_b = \frac{18000 (28,5 + 140)}{\frac{90 \cdot 28,5^2}{3} + 15 \cdot 32 \cdot \frac{51,5^2}{28,5}} = 43,9 \text{ kg/qcm}$$

$$\sigma_e = 43,8 \cdot 15 \cdot \frac{51,5}{28,5} = 1185 \text{ kg/qcm.}$$

Kontrolle:

$$D_b - Z_e = N$$

$$D_b = \frac{43,9}{2} \cdot 90 \cdot 28,5 = 56300 \text{ kg}$$

$$Z_e = 1185 \cdot 32,0 = \frac{38000}{\text{Rest } 18300 \cong N}$$

Die Querkraft beträgt

$$Q = 10,75 + 7,55 = 18,30 \text{ t,}$$

die durch die Zugstreben völlig übertragen werden kann.

c) Riegel.

Das Eckmoment beträgt bei Vollbelastung des Deckenunterzuges und Dachbinderlast ohne Schnee

$$M = + 11,31 - 13,40 \cdot \frac{1,80}{2,07} = - 0,35 \text{ mt,}$$

im umgekehrten Fall

$$M = + 11,31 \cdot \frac{2,35}{4,11} - 13,40 = - 6,94 \text{ mt. u. s. f.}$$

Eingespannte mehrstielige Rahmen.

Kapitel XXXVI.

Der Rahmen mit Pendelzwischenstütze.

Das Hinzukommen der Pendelzwischenstütze erhöht den Grad der statischen Unbestimmtheit des in den Endauflagern fest eingespannten Rahmens um eine Stufe. Wir legen wieder

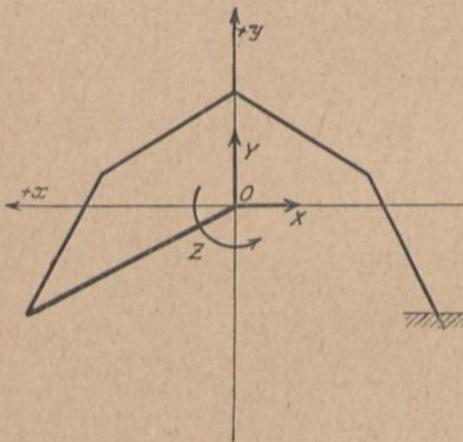


Abb. 286.

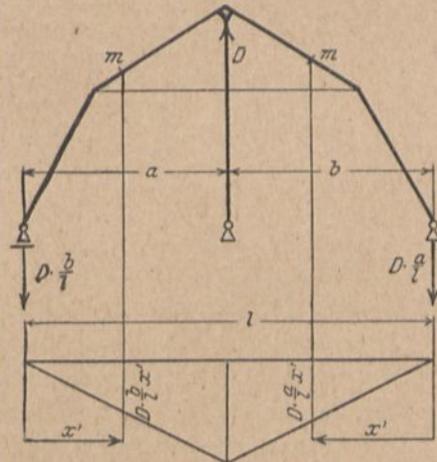


Abb. 287.

den einfachen Balken als Hauptssystem zugrunde¹⁾ und erhalten in Erweiterung des für den eingespannten Rahmen ohne Mittelstütze im Kapitel XXVI gezeigten Verfahrens somit außer den Größen X , Y und Z im Schwerpunkt O des Rahmens ohne Mittelstütze (Abb. 286) noch den unbestimmten Stützendruck D an Stelle der Mittelstütze und die zugehörige Momentenfläche (Abb. 287), in einem beliebigen Punkte m der Rahmenachse aber zusätzlich das Moment $D \cdot \frac{b}{l} \cdot x'$ oder $D \cdot \frac{a}{l} \cdot x'$. Bezeichnen wir diese Momente allgemein mit $D \cdot M_a$ und setzen sie zwecks

¹⁾ und zwar auch für wagerechte Belastung.

algebraischer Addition als positiv ein, so beträgt das Gesamtmoment in einem beliebigen Punkte der Rahmenachse

$$M_m = M_0 - X \cdot y - Y \cdot x + Z + D \cdot M_a$$

und wir erhalten an Hand der vier Bestimmungsgleichungen für X , Y , Z und D

$$1. \quad L'_a \cdot E \cdot J_m = \int M_a \cdot M \cdot v \cdot ds$$

$$2. \quad L'_b \cdot E \cdot J_m = \int M_b \cdot M \cdot v \cdot ds$$

$$3. \quad L'_c \cdot E \cdot J_m = \int M_c \cdot M \cdot v \cdot ds$$

$$4. \quad L'_d \cdot E \cdot J_m = \int M_d \cdot M \cdot v \cdot ds,$$

die Vorzeichen der den unbestimmten Größen entsprechenden Glieder allgemein als positiv setzend in Erweiterung der für den eingespannten Rahmen allein schon gefundenen und unter Klammern gesetzten Ausdrücke:

$$1. \quad L'_a \cdot E \cdot J_m = \overbrace{\int y \cdot M_0 \cdot v \cdot ds + X \int y^2 \cdot v \cdot ds} + D \int y \cdot M_a \cdot v \cdot ds$$

$$2. \quad L'_b \cdot E \cdot J_m = \overbrace{\int x \cdot M_0 \cdot v \cdot ds + Y \int x^2 \cdot v \cdot ds} + D \int x \cdot M_a \cdot v \cdot ds$$

$$3. \quad L'_c \cdot E \cdot J_m = \overbrace{\int 1 \cdot M_0 \cdot v \cdot ds + Z \int 1 \cdot v \cdot ds} + D \int 1 \cdot M_a \cdot v \cdot ds$$

$$4. \quad L'_d \cdot E \cdot J_m = \int M_a \cdot M_0 \cdot v \cdot ds + X \int M_a \cdot y \cdot v \cdot ds + Y \int M_a \cdot x \cdot v \cdot ds \\ + Z \int M_a \cdot 1 \cdot v \cdot ds + D \int M_a \cdot M_a \cdot v \cdot ds.$$

Diese Gleichungen ermöglichen ohne weiteres die Berechnung der statisch unbestimmten Größen X , Y , Z und D . Lösen wir Gleichung 1. nach X , Gleichung 2. nach Y , Gleichung 3. nach Z auf und setzen die Gleichungswerte für X , Y und Z in Gleichung 4. ein, so enthält diese nur noch die Unbekannte D , die somit zuerst gewonnen wird. Mit dem bekannten D erhalten wir dann anschließend aus den Gleichungen 1., 2. und 3. auch X , Y und Z ohne weiteres.

Bedeutete für den Rahmen ohne Mittelstütze die rechte Seite der Gleichung 1. die Summe der statischen Momente der auf die Rahmenachse projizierten $\frac{J_m}{J}$ -fachen Momentenflächen aus der Belastung und X bezogen auf die durch den Schwerpunkt O gelegte Abszissenachse, die rechte Seite von Gleichung 2. die Summe der statischen Momente der Belastung und Y bezogen auf die lotrechte Mittelachse, die rechte Seite der Gleichung 3. die Summe der Momentenflächen aus der Belastung und Z selbst, so erscheinen diese Beziehungen im vorliegenden Fall nur

erweitert durch die gleichen Beziehungen für die D -Fläche; die vierte Gleichung aber fordert, da $M_d = \frac{b}{l} \cdot x'$ oder $\frac{a}{l} \cdot x'$, weiter nichts als die Bildung der statischen Momente der Momentenflächen aus sämtlichen Größen bezogen auf die Auflagerlotrechten durch A und B , für den linken Teil multipliziert mit $\frac{b}{l}$, für den rechten Teil multipliziert mit $\frac{a}{l}$, wie wir das schon von den mehrstieligen Rahmen mit Pendelstützen her kennen¹⁾.

Wir bringen ein einfaches Beispiel, wonach die Behandlung jedes anderen Rahmenfalles dieser Art klar sein dürfte.

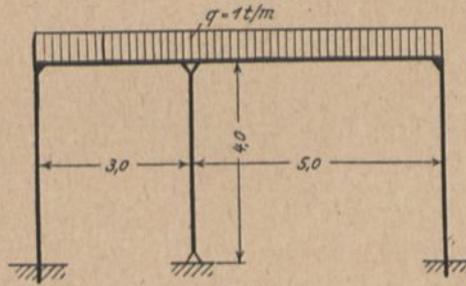


Abb. 288.

Beispiel: Rechteckiger eingespannter Rahmen mit Pendelstütze (Abb. 288) bei Voraussetzung konstanten Trägheitsmomentes und unnachgiebiger Lagerung.

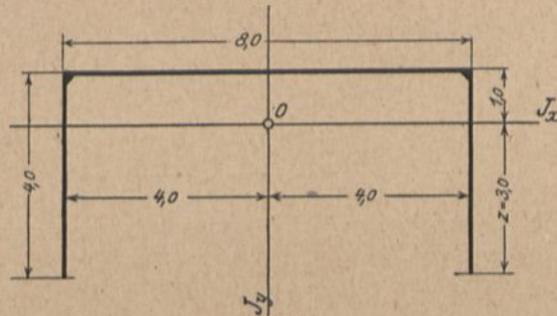


Abb. 289.

Wir erhalten für das Hauptsystem (Abb. 289)

$$z = \frac{2 \cdot 4,0 \cdot 2,0 + 8,0 \cdot 4,0}{2 \cdot 4,0 + 8,0} = 3,0 \text{ m}$$

¹⁾ Beachte auch hier die auf einfachere Fassung hindeutende Fußnote S. 207.

$$T_x = \int y^2 \cdot ds = \left(\frac{1^3}{3} + \frac{3^3}{3} \right) \cdot 2 + 8,0 \cdot 1,0^2 = 26,66 \text{ m}^3$$

$$T_y = \int x^2 \cdot ds = 4,0 \cdot 4,0^2 \cdot 2 + \frac{4,0^3}{3} \cdot 2 = 170,67 \text{ m}^3$$

$$T = \int ds = 2 \cdot 4,0 + 8,0 = 16,0 \text{ m}$$

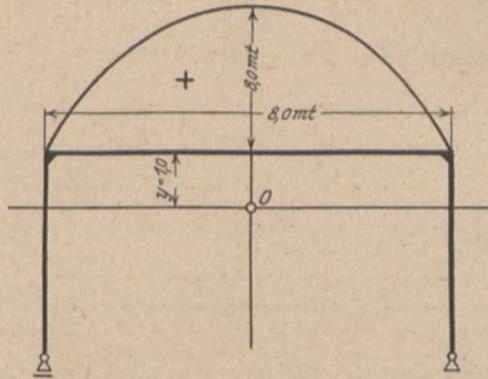


Abb. 290.

und für die Belastung (Abb. 290)

$$\int M_0 \cdot y \cdot ds = \frac{2}{3} \cdot 8,0 \cdot 8,0 \cdot 1,0 = 42,67 \text{ tm}^3$$

$$\int M_0 \cdot x \cdot ds = 0$$

$$\int M_0 \cdot ds = \frac{2}{3} \cdot 8,0 \cdot 8,0 = 42,67 \text{ tm}^2.$$

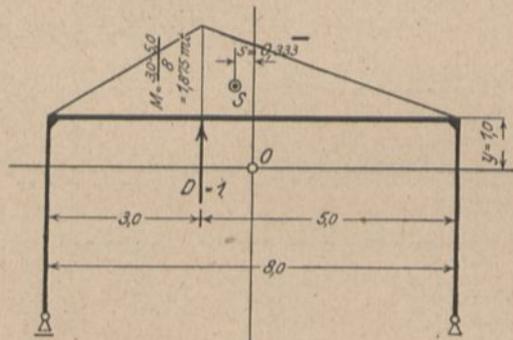


Abb. 291.

Für $D = 1$ wird (Abb. 291)

$$\int M_d \cdot ds = \frac{1,875 \cdot 8,0}{2} = 7,5 \text{ tm}^2$$

$$\int M_d \cdot y \cdot ds = 7,5 \cdot 1,0 = 7,5 \text{ tm}^3$$

$$\int M_d \cdot x \cdot ds = 7,5 \cdot 0,333 = 2,5 \text{ tm}^3.$$

Für Gleichung 4. wird insbesondere:

$$\int M_d \cdot M_0 \cdot ds = \frac{b}{l} \int_0^{3,0} x' \cdot M_0 \cdot ds + \frac{a}{l} \int_0^{5,0} x' \cdot M_0 \cdot ds \quad (\text{Abb. 214, Seite 210,}$$

vgl. auch gleiche Berechnung dazu)

$$\begin{aligned} &= \frac{5}{8} \left(\frac{12,0 \cdot 3,0}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3,0 - \frac{4,5 \cdot 3,0}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot 3,0 \right) \\ &+ \frac{3}{8} \left(\frac{20,0 \cdot 5,0}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 5,0 - \frac{12,5 \cdot 5,0}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot 5,0 \right) \\ &= 49,5 \text{ tm}^3 \end{aligned}$$

und nach Abb. 292

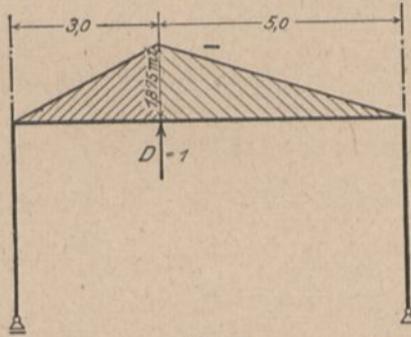


Abb. 292.

$$\begin{aligned} \int M_d \cdot M_d \cdot ds &= \frac{b}{l} \int_0^{3,0} x' \cdot \frac{b}{l} \cdot x' \cdot ds + \frac{a}{l} \int_0^{5,0} x' \cdot \frac{a}{l} \cdot x' \cdot ds \\ &= \frac{5}{8} \cdot 1,875 \cdot \frac{3,0}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3,0 + \frac{3}{8} \cdot 1,875 \cdot \frac{5,0}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 5,0 \\ &= 9,38 \text{ tm}^3 \quad (\text{vgl. gleicher Wert in Beispiel 1 Seite 209} \\ &\quad \text{und Abb. 217).} \end{aligned}$$

Wir können alle gefundenen Werte als positiv in die Rechnung einführen; T_x , T_y und T sind an sich positive Werte; $\int M_0 \cdot y \cdot ds$ und $\int M_0 \cdot ds$ wären negativ, wenn X und Z , deren Einheitswerte in y und 1 zum Ausdruck kommen, der Belastung entgegenwirkende Momente erzeugten, wie es ja auch der Fall ist, gegebenenfalls gilt für $\int M_0 \cdot x \cdot ds$ dasselbe; $\int M_d \cdot x \cdot ds$, $\int M_d \cdot y \cdot ds$, $\int M_d \cdot ds$ wären, da einerseits M_d negativ, x , y und 1 negativ, positive Werte; in Gleichung 4. wären alle durch Multiplikation von Werten der unbestimmten Größen untereinander

entstehenden Beträge (minus mal minus) positiv, das erste Glied negativ, da M_0 positiv, M_d negativ. Führen wir die unbestimmten Größen durchweg als positiv ein, so wären also alle Werte positiv; ein negatives Ergebnis für eine der statisch unbestimmten Größen besagte dann daß ihre Wirkung im Gegensatz zu der Annahme steht.

1. $0 = 42,67 + X \cdot 26,66 + D \cdot 7,50$
2. $0 = 0 + Y \cdot 170,67 + D \cdot 2,50$
3. $0 = 42,67 + Z \cdot 16,0 + D \cdot 7,50$
4. $0 = 49,5 + X \cdot 7,50 + Y \cdot 2,50 + Z \cdot 7,50 + D \cdot 9,38$.

Mit

1. $X = \frac{-42,67 - D \cdot 7,50}{26,66}$
2. $Y = \frac{-D \cdot 2,50}{170,67}$
3. $Z = \frac{-42,67 - D \cdot 7,50}{16,0}$ erhalten wir
4. $0 = 49,5 + \frac{-42,67 - D \cdot 7,50}{3,55} + \frac{-D \cdot 2,50}{68,25}$
 $+ \frac{-42,67 - D \cdot 7,50}{2,13} + D \cdot 9,38,$

$$0 = 17,43 + 3,61 D \text{ und}$$

$$D = -4,83 \text{ t.}$$

D erzeugt also negative Momente. Damit erhalten wir

$$X = \frac{-42,67 + 36,2}{26,66} = -0,243 \text{ t}$$

$$Y = \frac{+12,1}{170,67} = +0,071 \text{ t}$$

$$Z = \frac{-42,67 + 36,2}{16,0} = -0,405 \text{ mt.}$$

Die lotrechten Auflagerdrücke der Endauflager sind wieder:

$$A = A_0 + Y, \quad B = B_0 - Y.$$

Zum Schluß mag noch der Beweis erbracht werden, daß die Beiwerte zu X , Y , Z in Gleichung (4) tatsächlich den gleichlautenden Beiwerten zu D in den Gleichungen (1), (2) u. (3) entsprechen, wenn wir für jede Gleichung die ihr eigene geometrische Deutung beachten. Führen wir den Beweis durch für den Aus-

druck $\int M_d \cdot x \cdot ds$ (in Gleichung (2) Beiwert zu D , in Gleichung (4) Beiwert zu Y). In Gleichung 2. bedeutete $\int M_d \cdot x \cdot ds$ die Ausmultiplikation des zu jedem Längenelement ds gehörigen Flächenelementes $M_d \cdot ds$ (Abb. 293) mit dem zu $Y=1$ — auf welches sich die ganze Gleichung 2. bezieht und worauf x hindeutet — gehörigen Biegemomente (Abb. 294). Da das Moment zu $Y=1$ (x) dem Abstände des fraglichen Längen-

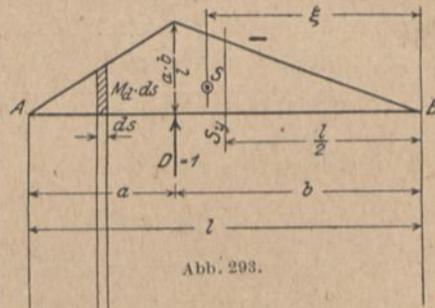


Abb. 293.

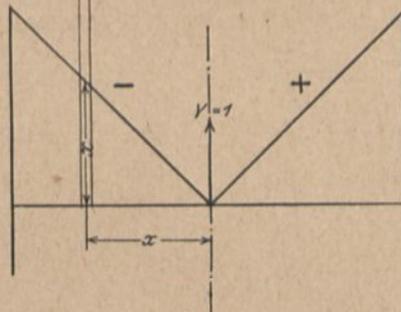


Abb. 294.

elementes von der Mittelachse gleichkommt, haben wir das Integral gedeutet als das statische Moment der zu $D=1$ gehörigen Momentenfläche bezogen auf die Mittelachse. Algebraisch ist dasselbe, wenn der Flächeninhalt des ganzen Dreiecks mit F , der Abstand seines Schwerpunktes von B mit ξ bezeichnet wird,

$$S_y = F \cdot \left(\xi - \frac{l}{2} \right).$$

Wir erhalten zunächst für ξ

$$\xi = \frac{\frac{ab}{l} \left[\frac{a}{2} \left(b + \frac{a}{3} \right) + \frac{b}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot b \right]}{\frac{ab}{l} \cdot \frac{l}{2}} = \frac{ab}{l} + \frac{a^2}{3l} + \frac{b^2 \cdot 2}{3l}$$

und damit

$$S_y = \frac{ab}{2} \left(\frac{ab}{l} + \frac{a^2}{3l} + \frac{b^2 \cdot 2}{3l} - \frac{l}{2} \right) \\ = \frac{a^2 b^2}{2l} + \frac{a^3 b}{6l} + \frac{a b^3}{3l} - \frac{a b l}{4}$$

In Gleichung 4. bedeutete $\int M_d \cdot x \cdot ds$ die Ausmultiplikation des zu jedem Längenelemente ds gehörigen Flächenelementes $M_b \cdot ds$ (Abb. 295) mit dem zugehörigen M_d , dem Werte von $D = 1$, auf welches sich die ganze Gleichung bezieht (Abb. 296). Da das Moment zu $D = 1$, wenn das Element zwischen A und D liegt, dem Abstände von A multipliziert mit $\frac{b}{l}$, wenn es zwischen D und B liegt, dem Abstände von B multipliziert mit $\frac{a}{l}$, gleichkommt, haben wir das Integral gedeutet als das statische Moment der zu $Y = 1$ gehörigen Momentenfläche für den linken Teil bezogen auf die Lotrechte durch A und multipliziert mit $\frac{b}{l}$, für den rechten Teil bezogen auf die Lotrechte durch B und multipliziert mit $\frac{a}{l}$. Algebraisch ist dasselbe für die Lotrechte durch A

$$S_A = \left[\left(b - \frac{l}{2} \right) \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{6} \right] \frac{b}{l} \\ = \frac{b^2 a^2}{2l} - \frac{a^2 b}{4} + \frac{b a^3}{6l},$$

für die Lotrechte durch B und zunächst für den Teil zwischen Stütze und y -Achse

$$S_B = \frac{\left(b - \frac{l}{2} \right)^2}{2} \left[\frac{l}{2} + \frac{2}{3} \left(b - \frac{l}{2} \right) \right] \frac{a}{l} \\ = \frac{b^3 a}{3l} + \frac{a l^2}{48} - \frac{a b^2}{4},$$

für den Teil zwischen y -Achse und B

$$S_B = - \frac{\left(\frac{l}{2} \right)^2}{2} \cdot \frac{l}{6} \cdot \frac{a}{l} = - \frac{a l^2}{48},$$

Der dreistielige Rahmen ohne Gelenke.

1. Berechnungsgang im allgemeinen.

Wir setzen einen beliebig gestalteten und beliebig belasteten, in drei Auflagern fest eingespannten Rahmen voraus, entwickeln unsere Gleichungen aber der Übersichtlichkeit wegen an einem einfachen rechteckigen System in der Erwartung, auch für diese Rahmengruppe die bisher überall gefundenen einfachen geometrischen Beziehungen für die Gewinnung der statisch unbestimmten Größen bestätigt zu finden.

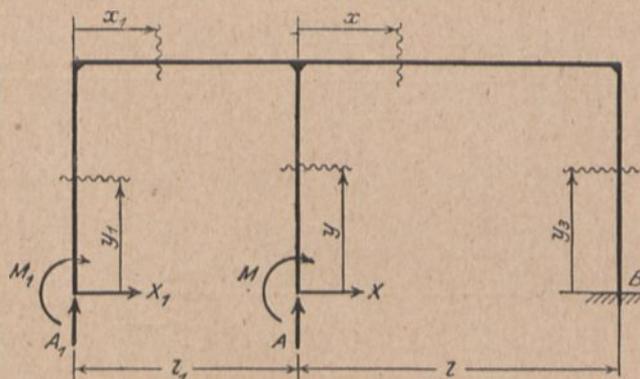


Abb. 297.

Gedachter Rahmen ist $3 \cdot 3 - 3 = 6$ -fach statisch unbestimmt (Abb. 297). A , X , M und A_1 , X_1 , M_1 seien die statisch unbestimmten Größen, das Hauptsystem der rechts eingespannte Kragträger (Abb. 297). Die Behandlung des Hauptsystems unter der gerade vorliegenden Belastung und die Auftragung der zugehörigen M_0 -Momentenfläche auf die Achse des Freitragers erfolgt in bekannter Weise. Unter dem Einfluß der statisch unbestimmten Größen erhalten wir für das Hauptsystem die in Abb. 298 dargestellten sechs Momentenflächen und am festen Lager die den unbestimmten Größen gleichen, aber entgegengesetzt gerichteten Reaktionen.

Bei Zusammenlegung sämtlicher Momentenflächen erhalten wir — alle Einflüsse algebraisch addierend — in den einzelnen Stäben (Abb. 297)

$$M_{y_1} = M_0 + X_1 \cdot y_1 + M_1$$

$$M_y = X \cdot y + M$$

$$M_{y_2} = M_0 + A_1(l_1 + l) + A \cdot l + (X_1 + X) \cdot y_3 + M_1 + M$$

$$M_{x_1} = M_0 + A_1 \cdot x_1 + X_1 \cdot h + M_1$$

$$M_x = M_0 + A_1(l_1 + x) + A \cdot x + (X_1 + X)h + M_1 + M.$$

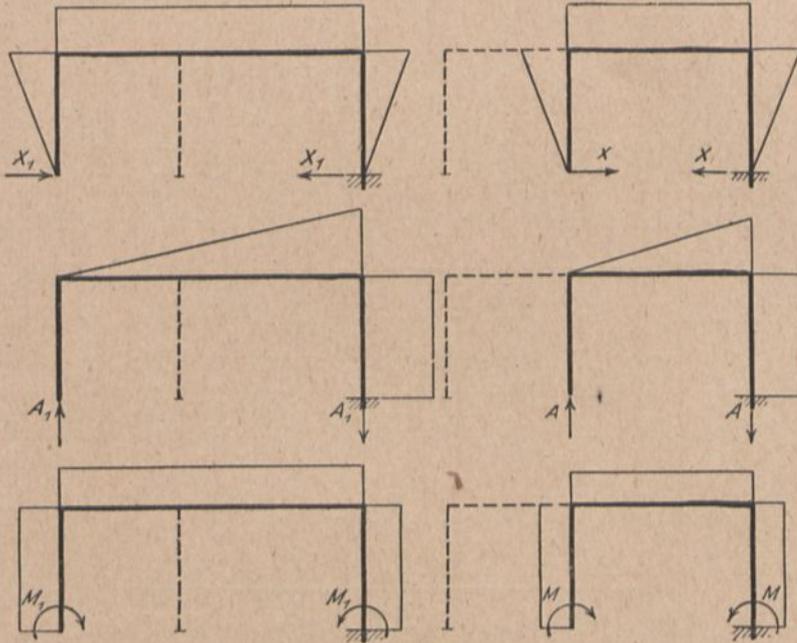


Abb. 298.

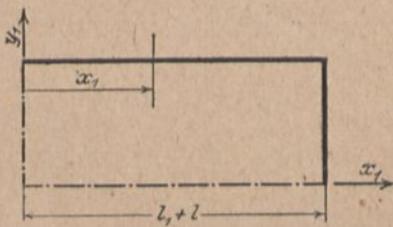


Abb. 300.

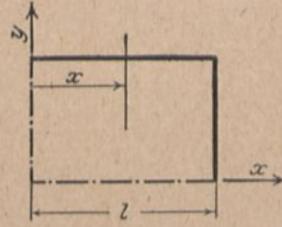


Abb. 299.

Mit Bezug auf die beiden Achsenkreuze x, y und x_1, y_1 (Abb. 299 u. 300) ist der Einfluß der Einheitswerte der statisch unbestimmten Größen für X, A und M : y, x und 1 , für X_1, A_1 und M_1 : y_1, x_1 und 1 .

wird in den Gleichungen 2. und 5. das statische Moment von M_y oder M_{y_1} Null.

Besteht hinsichtlich der Aufstellung der sechs Bestimmungsgleichungen hiernach keine Schwierigkeit mehr, so erfordert doch die Auflösung derselben eine erhebliche Rechenarbeit. Verlegen wir nach dem in Kapitel XXVI erläuterten Verfahren den Angriffspunkt der statisch unbestimmten Größen A_1 , X_1 und A , X in die Schwerpunkte O_1 und O der übereinander liegenden Rahmen, wobei die Momente zu Z_1 und Z werden, und beziehen wir die Wirkung der statisch unbestimmten Größen auf die durch O_1 und O gelegten Achsenkreuze (Abb. 301), dann entfällt in

	Gleichung 1.	der Einfluß von	A und	Z ,
	2.	„	„	X „ Z ,
	3.	„	„	X „ A ,
ebenso in	4.	„	„	A_1 „ Z_1 ,
	5.	„	„	X_1 „ Z_1 ,
	6.	„	„	X_1 „ A_1 .

Wir erhalten also für den Innenrahmen (Länge l) in Gleichung 1.: in bezug auf die x -Achse — in üblicher Weise zu bilden — das statische Moment der Momentenfläche von X (Abb. 302) und die Summe der statischen Momente der auf den Innenrahmen entfallenden Momentenflächenstücke aus der Belastung und den Größen X_1 , A_1 , Z_1 (auf Riegel und rechtem Stiel);

Gleichung 2.: in bezug auf die y -Achse das statische Moment der Momentenfläche von A (Abb. 303) und die Summe der statischen Momente derselben Flächenstücke;

Gleichung 3.: die Summe der Momentenfläche von Z (Abb. 304) und der vorgenannten Flächenstücke.

Für den Außenrahmen ($l_1 + l$) erhalten wir ebenso in Gleichung 4.: in bezug auf die x_1 -Achse das statische Moment der Momentenfläche von X_1 (Abb. 305), der Belastung und der Summe der statischen Momente der auf den Außenrahmen entfallenden Momentenflächenstücke aus den Größen X , A , Z (also mit Ausfall der Flächenstücke auf dem Mittelstiel);

Gleichung 5.: in bezug auf die y_1 -Achse das statische Moment der Momentenfläche von A_1 (Abb. 306), der Belastung und der Summe der statischen Momente derselben Flächenstücke;

Gleichung 6.: die Summe der Momentenfläche von Z_1 (Abb. 307), der Belastung und der vorgenannten Flächenstücke.

Lösen wir dann Gleichung 1. nach X , Gleichung 2. nach A , Gleichung 3. nach Z auf und setzen die Ergebnisse in die Gleichungen 4. bis 6. ein, so verbleiben als Unbekannte in denselben

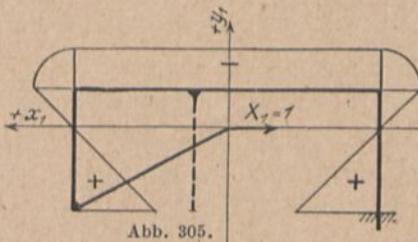


Abb. 305.

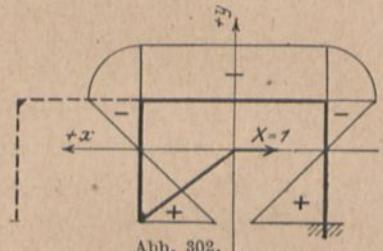


Abb. 302.

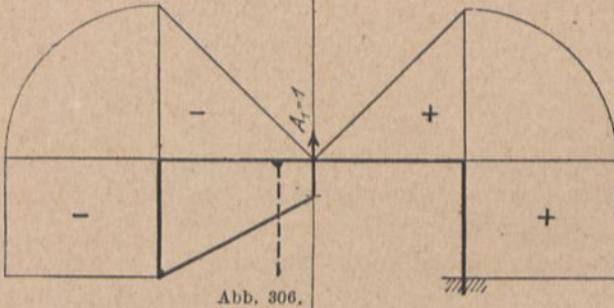


Abb. 306.

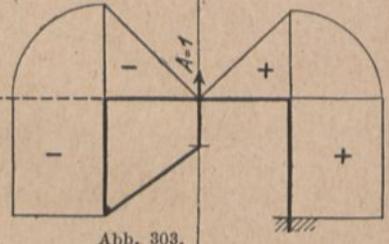


Abb. 303.

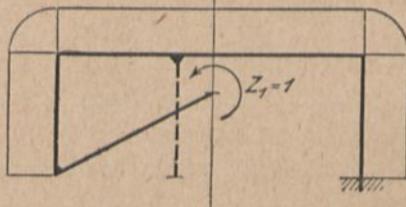


Abb. 307.

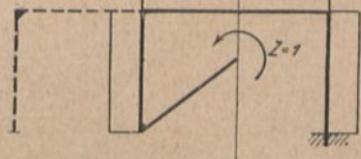


Abb. 304.

nur noch X_1 , A_1 , Z_1 und damit haben wir das System von sechs Gleichungen mit sechs Unbekannten zurückgeführt auf drei Gleichungen mit drei Unbekannten¹⁾.

Erst für einen vierstieligen eingespannten Rahmen erhalten wir nach diesem Verfahren ein System von $9 - 3 = 6$ Gleichungen mit sechs Unbekannten.

¹⁾ Das Ziel wird auch erreicht, wenn nur für einen der beiden Rahmen der Schwerpunkt zum Angriffspunkt der unbestimmten Größen gemacht würde; es treten aber dann in den Gleichungen für den Rahmen, wo die Unbestimmten am Auflager gelassen sind, zuerst je zwei Summenglieder mehr auf.

Für die Einheitswerte von X und A sowie X_1 und A_1 sind die zugehörigen statischen Momente der Momentenflächen gleich den Trägheitsmomenten der zugehörigen Stabzüge bezogen auf die entsprechenden Achsen; die statischen Momente der Momentenflächenstücke sind stabweise einzeln zu bestimmen.

Die Berücksichtigung eines Wechsels des Trägheitsmomentes innerhalb der einzelnen Stabstücke erfolgt zweckmäßig durch zeichnerische Ermittlung der statischen Momente, wie das für eingespannte Gewölbe S. 354 u. f. gezeigt ist.

Die Zusammenlegung aller Momentenflächen, wobei man zweckmäßig die Einflüsse von X , A und Z sowie X_1 , A_1 und Z_1 je für sich zusammenfaßt und sie dann mit der M_0 -Fläche vereinigt, ergibt die fertige Momentenfläche. Die zugehörigen Auflagerkräfte sind am linken Stiel

$$X_1, A_1 \text{ und } M_1 = X_1 \cdot z_1 - A_1 \cdot w_1 + Z_1,$$

am Mittelstiel

$$X, A \text{ und } M = X \cdot z - A \cdot w + Z;$$

am rechten Lager B ergeben sich die Auflagerkräfte durch Zusammensetzung aller am Freitträger tätigen Kräfte.

2. Die Eckmomente als unbestimmte Größen.

Die unter gewissen Voraussetzungen (vgl. Kap. XXIII, Ziff. 1) zweckmäßige Anwendung der unter 1. aufgeführten Elastizitätsbedingungen auf die Gesamtmomentenfläche hat, wie immer, so auch in diesem Fall den Vorteil einer schnellen Aufstellbarkeit der Bestimmungsgleichungen, ermöglicht aber die Herabsetzung der Anzahl derselben durch Elimination der Einflüsse einzelner Größen — wie unter 1. gezeigt — nicht mehr. Dagegen bietet die Anwendung der Elastizitätsbedingungen auf die Gesamtmomentenfläche eines jeden¹⁾ aus einem mehrstieligen System darstellbaren Einzelrahmens neben dem Gebrauch der Gleichgewichtsbedingungen $\sum H = 0$, $\sum V = 0$ und $\sum M = 0$ ein wertvolles Hilfsmittel für die Prüfung der Richtigkeit der auf anderem Wege voraufgegangenen Rechnung. Die Berechnung von Stockwerksrahmen bietet nach diesem Verfahren ersichtlicherweise keine Schwierigkeiten, da sich immer so viel Gleichungen nach den Elastizitätsbedingungen aufstellen lassen, als unbekannte Eckmomente vorhanden sind.

¹⁾ Vgl. Kapitel XXIII, Ziffer 3.

Allgemeinere Fassung der Elastizitätsbedingungen.¹⁾

Kapitel XXXVIII.

Wir haben bei den einzelnen Abschnitten nach Aufstellung der Arbeitsgleichungen alsbald von der grundlegend in Kapitel IX behandelten geometrischen Auslegung der Gleichungswerte Gebrauch gemacht und gelangten damit für alle behandelten Fälle zu übersichtlichen und in der Durchführung einfachen Berechnungswegen, die den üblichen Genauigkeitsgrad einschließen. Nachfolgend wollen wir den so gefundenen Elastizitätsbedingungen zwecks Vervollständigung unserer Übersicht allgemeinere Fassung geben und dann die unbeschränkte Bedeutung erkennen, welche sie für die Rahmenberechnung im allgemeinen besitzen, sodaß sie zweckmäßig in der Rahmenstatik an die Stelle gesetzt werden, welche beim Beginn unserer Rechnungen bisher die mathematischen Ausdrücke für durchzuführende Integrationen (auf den rechten Seiten der Bestimmungsgleichungen für die statisch unbestimmten Größen) eingenommen haben.

¹⁾ Ing. A. Kittinger weist in *Beton u. Eisen* 1914, Heft IV, S. 95 („Beitrag zur Berechnung starrer Systeme“) zuerst auf den Allgemeinwert der Elastizitätsbedingungen in dieser Fassung zur Ausführung von Richtigkeitsprüfungen und Aufstellung von Bestimmungsgleichungen für beliebige Rahmengebilde hin; es wird auch gezeigt, wie ein- und mehrteilige Systeme durch Gleichungen mit je einer Unbekannten berechnet werden können. Ing. Dr. W. Vieser bringt in der Zeitschrift „Der Brückenbau“ 1918, Heft 16 u. 17 („Berechnung statisch unbestimmter biegungssteifer Stabzüge mit besonderer Berücksichtigung von Rechnungskontrollen“) eine Gegenüberstellung der verschiedenen für Rahmengebilde gebräuchlichen und vorgeschlagenen Berechnungsverfahren, um ebenfalls auf die hervorragende Zweckmäßigkeit der Elastizitätsbedingungen in der allgemeineren Fassung zur Berechnung beliebiger Rahmengebilde hinzuweisen; angeschlossen sind ausführliche Beispiele über die Behandlung zwei- und mehrstieliger Rechteckrahmen unter seitlicher Belastung in Riegelhöhe mit Entwicklung von Koeffizienten für die Verteilung der Momente auf die Stiele, auch Stockwerksrahmen unter der gleichen Belastung.

1. Die vier aus beiderseitig gelenkiger, einseitig gelenkiger und beiderseitig eingespannter Lagerung eines einfachen Rahmens hervorgehenden Grundelastizitätsbedingungen.

a) Die Bestimmungsgleichung für die Größe X_a des Zweigelenkrahmens

$$- \Delta l \cdot E \cdot J_m = - \int M_0 \cdot y \cdot ds \cdot v + X_a \int y^2 \cdot ds \cdot v \quad (\text{vgl. S. 106})$$

besagt allgemein, daß die $E \cdot J_m$ -fache Auflagerverschiebung gleich sein soll der algebraischen Summe der statischen Momente der beiden in Frage kommenden, auf die Rahmenachse projizierten Momentenflächen des Hauptsystems (aus der Belastung und der statisch unbestimmten Größe) bezogen auf die Verbindungsgerade der Auflager. Allgemein erhalten wir also als Elastizitätsbedingung 1:

Für jeden in zwei gelenkige Auflager endigenden Stabzug ist die algebraische Summe der statischen Momente der auf die Rahmenachse projizierten $\frac{J_m}{J}$ -fachen Momentenflächen bezogen auf die Verbindungslinie der Gelenke gleich der $E \cdot J_m$ -fachen Verschiebung der Gelenkstellen in Richtung der Verbindungslinie oder bei Unnachgiebigkeit der Auflager gleich Null¹⁾.

Es bereitet keine Schwierigkeiten, für jeden beliebigen Belastungsfall eines Zweigelenkrahmens die M_0 -Fläche und die X_a -Fläche einzutragen und Elastizitätsbedingung 1 zum Ausgangspunkt der Rechnung zu machen.

b) Der in Kapitel XVII behandelte einseitig gelenkige Stabzug oder Rahmen führte in Auslegung der beiden Bestimmungsgleichungen für X_a und X_b

$$L'_a \cdot E \cdot J_m = - \int y \cdot M_0 \cdot v \cdot ds + X_a \int y^2 \cdot v \cdot ds - X_b \int y \cdot x \cdot v \cdot ds$$

$$L'_b \cdot E \cdot J_m = + \int x \cdot M_0 \cdot v \cdot ds - X_a \int y \cdot x \cdot v \cdot ds + X_b \int x^2 \cdot v \cdot ds$$

zu den Bedingungen, daß die $E \cdot J_m$ -fache wagerechte Auflagerverschiebung gleich sein soll der algebraischen Summe der statischen Momente der drei in Frage kommenden auf die Rahmen-

¹⁾ Bei Mitberücksichtigung des Einflusses der Normalkräfte oder der Wärmeschwankungen gleich der $E \cdot J_m$ -fachen Stablängenänderung in der Richtung derselben Verbindungslinie. Wir berücksichtigen den Einfluß der Normalkräfte nur bei flachen Konstruktionen (Gewölben; vgl. Seite 333); für die Rahmengebilde, für die wir die Berechnung nach dem hier vorgetragenen Verfahren empfehlen, kann der Einfluß der Normalkräfte auf die statisch unbestimmten Größen vernachlässigt werden; der Einfluß von Wärmeschwankungen läßt sich immer leicht zusätzlich berücksichtigen (vgl. Kapitel XXIX).

achse projizierten Momentenflächen (für die Belastung, die Größe X_a und die Größe X_b) bezogen auf wagerechte Verbindungsgerade der beiden Auflager und die lotrechte $E \cdot J_m$ -fache Auflagerverschiebung gleich sein soll derselben algebraischen Summe bezogen auf die Lotrechte durch das Gelenk. Allgemein erhalten wir daraus als

Elastizitätsbedingung 2:

Für jeden in ein festes und ein gelenkiges Auflager endigenden Stabzug ist die algebraische Summe der statischen Momente der auf die Rahmenachse projizierten $\frac{J_m}{J}$ -fachen Momentenflächen bezogen auf eine beliebige Gerade durch das gelenkige Lager gleich der $E \cdot J_m$ -fachen Verschiebung des Gelenkes in Richtung der betreffenden Geraden oder bei Unnachgiebigkeit des Gelenklagers gleich Null¹⁾.

Hierin kommt zum Ausdruck, daß uns grundsätzlich nichts an die Innehaltung wagerechter und lotrechter Richtung für die unbestimmten Größen bindet, wiewohl diese als die zweckmäßigsten angesehen werden müssen (vgl. Kapitel I, S. 1, Kapitel VI, S. 92, Z. 20).

c) Für einen fest eingespannten Rahmen erhielten wir in Auslegung der Bestimmungsgleichungen für die statisch unbestimmten Größen am Auflager X , A und M_A nach Kapitel XXV

$$1. \quad L'_a \cdot E \cdot J_m = - \int y (M_0 - X \cdot y + A \cdot x - M_A) \cdot v \cdot ds$$

$$2. \quad L'_b \cdot E \cdot J_m = \int x (M_0 - X \cdot y + A \cdot x - M_A) \cdot v \cdot ds$$

$$3. \quad L'_c \cdot E \cdot J_m = \int 1 (M_0 - X \cdot y + A \cdot x - M_A) \cdot v \cdot ds$$

die Bedingungen, daß

1. die algebraische Summe der statischen Momente der auf die Rahmenachse projizierten $\frac{J_m}{J}$ -fachen Momentenflächen aus sämtlichen Lasten bezogen auf die Verbindungslinie der Auflager gleich sein soll der $E \cdot J_m$ -fachen Verschiebung der Auflager gegeneinander oder gleich Null;
2. dieselbe algebraische Summe bezogen auf die Lotrechte durch A gleich sein soll der $E \cdot J_m$ -fachen Verschiebung des Lagers A gegen das andere Lager oder gleich Null;
3. die algebraische Summe der Flächen selbst gleich der $E \cdot J_m$ -fachen Drehung der Achse am Lager A oder gleich Null sein soll.

¹⁾ Bei Berücksichtigung des Einflusses der Normalkräfte oder der Wärmeschwankungen gleich der $E \cdot J_m$ -fachen Stablängenänderung in gleicher Richtung.

In Auslegung der Bestimmungsgleichungen für die Größen X , Y und Z im Schwerpunkt des mit $\frac{ds}{J}$ belastet gedachten Rahmenezuges erhielten wir in sinngemäßer Änderung der Arbeitswerte der linken Seiten dieselben Bedingungen.

Die aus Kapitel XXVI hervorgehende Zulässigkeit beliebiger Lage des Angriffspunktes der statisch unbestimmten Größen führt im Anschluß an diese Ergebnisse schließlich zu den weiteren Elastizitätsbedingungen:

Elastizitätsbedingung 3 (entsprechend Gleichung 1 u. 2):

Für jeden in völliger Einspannung endigenden Stabzug ist die algebraische Summe der statischen Momente der auf die Rahmenachse projizierten $\frac{J_m}{J}$ -fachen Momentenflächen bezogen auf eine beliebige Gerade gleich der $E \cdot J_m$ -fachen Verschiebung der Auflager gegeneinander in gleicher Richtung oder bei unachgiebiger Lagerung gleich Null¹⁾; für jeden in sich geschlossenen Rahmen gleich Null¹⁾.

Elastizitätsbedingung 4 (entsprechend Gleichung 3):

Für jeden in völliger Einspannung endigenden Stabzug ist die algebraische Summe der $\frac{J_m}{J}$ -fachen Momentenflächen gleich der $E \cdot J_m$ -fachen gegenseitigen Verdrehung der Tangenten an die Stabrichtungen in den Lagern oder bei gegen Drehung unachgiebiger Lagerung gleich Null; für den in sich geschlossenen Rahmen gleich Null.

2. Die Anwendung der Grundelastizitätsbedingungen bei mehrstieligen Rahmen und Elastizitätsbedingung 5.

a) Die Auslegung der Bestimmungsgleichungen für mehrstielige Gelenkrahmen mit Pendelstützen (Kapitel XX und XXI) unterscheidet sich grundsätzlich nicht von der unter 1. behandelten für einen einseitig gelenkigen Stabzug. Die Übereinstimmung wird klar, sobald wir uns den vorliegenden Rahmen jeweils aus zwei einseitig gelenkigen Rahmen zusammengesetzt denken (Abb. 308 u. 309). Diese Zusammensetzung ist so oft

¹⁾ Bei Mitberücksichtigung des Einflusses der Normalkräfte oder der Wärmeschwankungen gleich der $E \cdot J_m$ -fachen Längenänderung in gleicher Richtung.

möglich, als Mittelsäulen vorhanden sind. L'_a stellt sich dann dar als die Addition der Spannweitenveränderung beider Teile, so daß die statischen Momente der auf die Rahmenachse projizierten Momentenflächen in der ersten Gleichung für beide Teile auf die Verbindungslinie der Auflager AB zu beziehen sind.

L'_b und L'_c sind die Verschiebungen an den Angriffsstellen

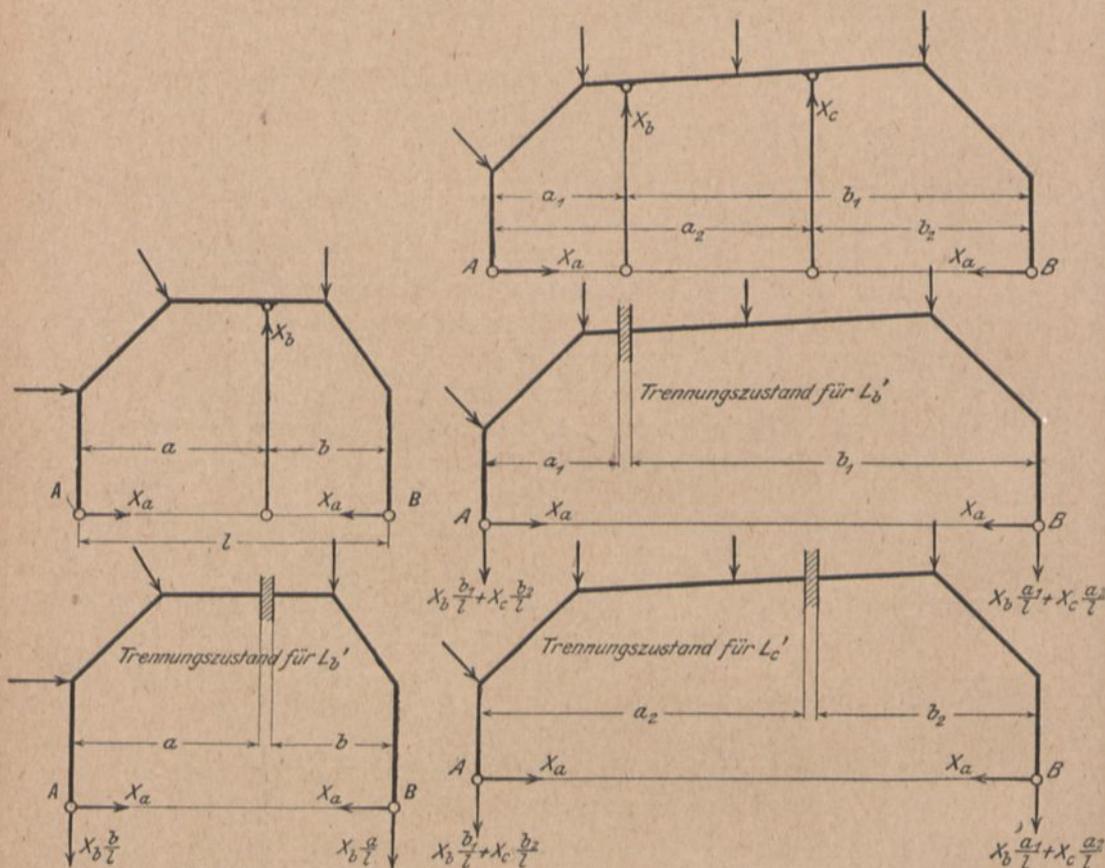


Abb. 308.

Abb. 309.

von X_b und X_c , die durch gewisse Nachgiebigkeit der Lagerstellen, auf denen die Säulen ruhen, und Verkürzung der Säulen durch Normalspannungen aus den lotrechten Drücken oder Wärmeschwankungen hervorgerufen gedacht sein können. Sie wären je gleich der Summe der Verschiebungen, die die beiden Teilstücke in sich in lotrechter Richtung erfahren. Diese wären mit den Reaktionen der Kräfte X_b und X_c oder deren Einheitswerte auf die Auflager A und B zu ermitteln. Entsprechend finden

wir auf den rechten Seiten der Gleichungen für L'_b und L'_c die algebraische Summe der statischen Momente der in Frage kommenden auf die Rahmenachse projizierten Momentenflächen (für die Belastung, die Größen X_a , X_b , gegebenenfalls auch X_c) für den linken Teil bezogen auf die Lotrechte durch A und multipliziert bei einer Mittelstütze mit $\frac{b}{l}$, bei zwei Mittelstützen für L'_b mit $\frac{b_1}{l}$, für L'_c mit $\frac{b_2}{l}$, für den rechten Teil bezogen auf die Lotrechte durch B und multipliziert bei einer Mittelstütze mit $\frac{a}{l}$, bei zwei Mittelstützen für L'_b mit $\frac{a_1}{l}$, für L'_c mit $\frac{a_2}{l}$.

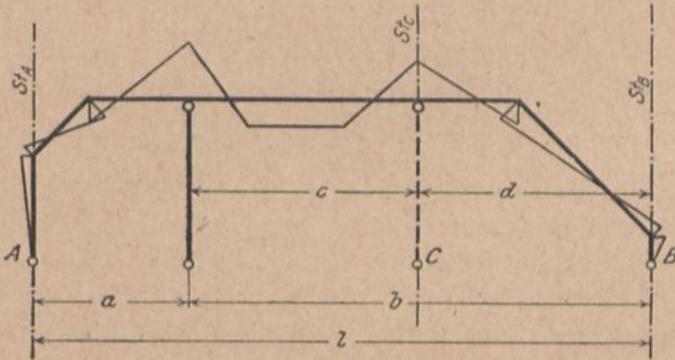


Abb. 310.

Wir erhalten also für diese Rahmengruppe außer der Gültigkeit der Elastizitätsbedingung 1 für den in den Endgelenken ruhenden Rahmen die zusätzliche Elastizitätsbedingung:

Für jede Zwischenstütze ist die Summe der statischen Momente der $\frac{J_m}{J}$ -fachen Momentenflächen auf den Rahmenteilen beiderseits der Stütze, für den linken Teil bezogen auf die Lotrechte durch das linke Endauflager, für den rechten Teil bezogen auf das rechte Endauflager und jeweils mit dem Reaktionsverhältnis der Stütze zu dem betreffenden Auflager multipliziert, gleich der $E \cdot J_m$ -fachen lotrechten Verschiebung der Gelenklager gegeneinander oder gleich Null¹⁾.

¹⁾ Bei Berücksichtigung des Einflusses der Normalkräfte oder der Wärmeschwankungen gleich der $E \cdot J_m$ -fachen Längenänderung in gleicher Richtung.

Bezeichnen wir gedachte statische Momente mit St_A und St_B , die Länge des Rahmenteils links mit a , rechts mit b (Abb. 310), setzen wir ferner unnachgiebige Lagerung voraus und lassen wir Normalkräfte unberücksichtigt wie bisher, so folgt aus dieser Elastizitätsbedingung die Beziehung:

$$St_A \cdot \frac{J_m}{J} \cdot \frac{b}{l} + St_B \cdot \frac{J_m}{J} \cdot \frac{a}{l} = 0$$

und hieraus bei Kürzung von l

$$\frac{St_A \cdot \frac{J_m}{J}}{a} = - \frac{St_B \cdot \frac{J_m}{J}}{b},$$

d. h., da $\frac{St_A}{a}$ und $\frac{St_B}{b}$ für die in den statischen Momenten enthaltene „Belastung“ die Auflagerdrücke einfacher Balken von der Länge a und b auf die Zwischenstütze sind, für die Belastung des Rahmens mit der $\frac{J_m}{J}$ -fachen Momentenfläche ist der rechte Auflagerdruck des als einfacher Balken anzusehenden Rahmenstückes a gleich dem negativen linken Auflagerdruck des als einfacher Balken anzusehenden Rahmenstückes b .

Diese Beziehung gilt auch zwischen a und c als Rahmenstücke. Legen wir nämlich an Stelle des einfachen Trägers von der ganzen Spannweite, für welchen als Hauptsystem wir die Beziehung abgeleitet haben, den einfachen Balken von der Spannweite nur $a + c$ als Hauptsystem zugrunde (Abb. 311), so erhalten wir bezüglich der Bestimmungsgleichung für $X_a = 1$ keine Veränderung (Abb. 312), für $X_c = 1$ im Endergebnis ebenfalls keine Veränderung, nämlich (Abb. 313)

$$St_A \cdot \frac{J_m}{J} \cdot \frac{d}{a+c} + St_B \cdot \frac{J_m}{J} = 0$$

also

$$\frac{St_A \cdot \frac{J_m}{J}}{a+c} = - \frac{St_B \cdot \frac{J_m}{J}}{d},$$

für $X_b = 1$ aber (Abb. 314)

$$St_A \cdot \frac{J_m}{J} \cdot \frac{c}{a+c} + St_B \cdot \frac{J_m}{J} \cdot \frac{a}{a+c} = 0$$

also

$$\frac{St_A \cdot \frac{J_m}{J}}{a} = - \frac{St_C \cdot \frac{J_m}{J}}{c}$$

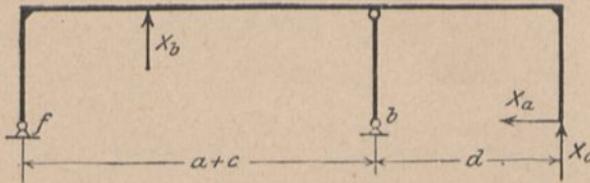


Abb. 311.

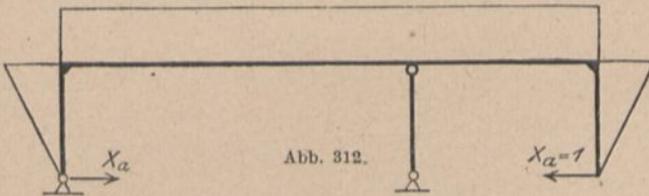


Abb. 312.

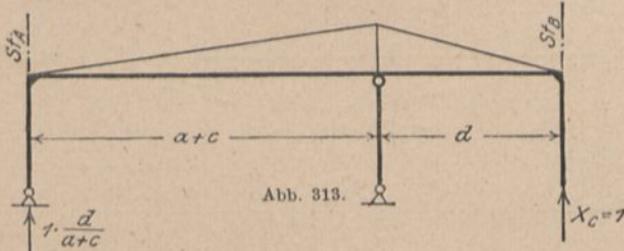


Abb. 313.

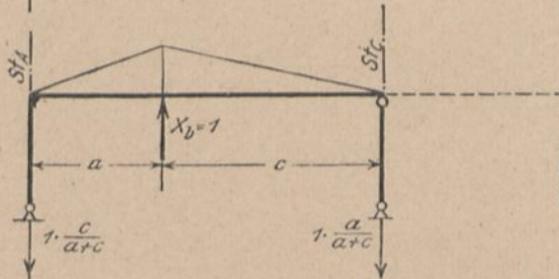


Abb. 314.

Die zusätzliche Elastizitätsbedingung lautet also einfacher:

Für die Belastung des Rahmens mit der $\frac{J_m}{J}$ -fachen Momentenfläche ist der rechte wie für einen einfachen Balken berechnete Auflagerdruck eines Rahmenfeldes

auf eine Zwischenstütze gleich dem ebenso berechneten negativen linken Auflagerdruck des anschließenden Rahmenfeldes.

Hinsichtlich der eintretenden Formänderungen bringt die behandelte Beziehung lediglich die Gleichheit zwischen den beiden Winkeln zum Ausdruck, welchen die Tangente an die elastische Linie über der Zwischenstütze mit der Rahmenachse beiderseitig der Stütze bildet. Bekanntlich ist (vgl. S. 30) nach Abb. 315

$$\delta = \frac{F \cdot \xi}{E \cdot J}, \quad \alpha = \frac{\delta}{l} = \frac{F \cdot \xi}{l \cdot E \cdot J},$$

d. h. der Verdrehungswinkel eines beliebig belasteten und beliebig geformten Stabes von der Stützlänge l gegen seine ursprüngliche

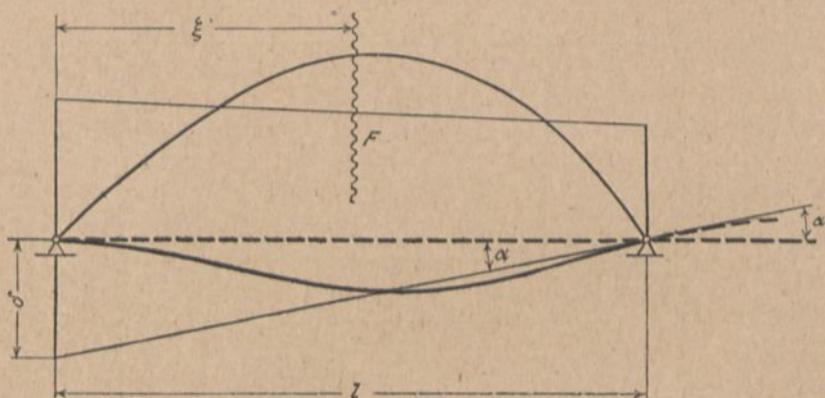


Abb. 315.

Lage am Auflager ist gleich dem Auflagerdruck des unter der $\frac{1}{E \cdot J}$ -fachen Momentenfläche als „Belastung“ stehenden einfach gelagert anzusehenden Trägers von der Länge l ; wir erhalten also in beiden Gleichungsseiten den $E \cdot J_m$ -fachen erwähnten Verdrehungswinkel.

b) Für mehrstielige Gelenkrahmen mit steif angeschlossenen Stützen erwies sich die Gültigkeit der Elastizitätsbedingung 1 sowohl für jedes einzelne Rahmenfeld als jeden durch Zusammensetzung zweier oder mehrerer Rahmenfelder darstellbaren einfachen Einzelrahmen (Kapitel XXIII, Ziffer 3). Die unter a) behandelte zusätzliche Elastizitätsbedingung erfüllt sich auch hier zwischen zwei benachbarten Rahmenfeldern (vgl. Figurenreihe 316–321).

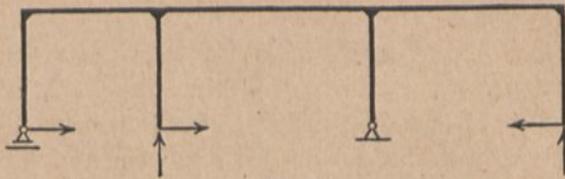


Abb. 316.

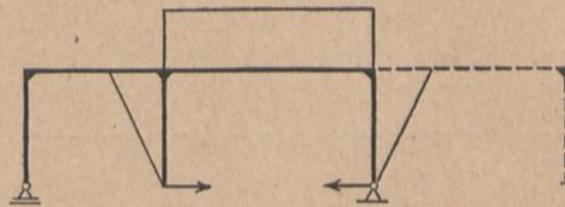


Abb. 317.

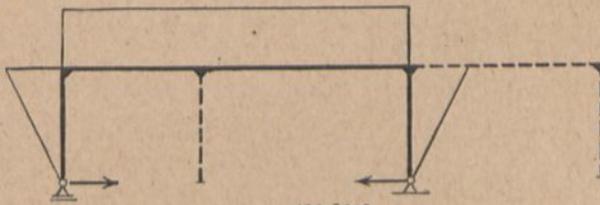


Abb. 318.

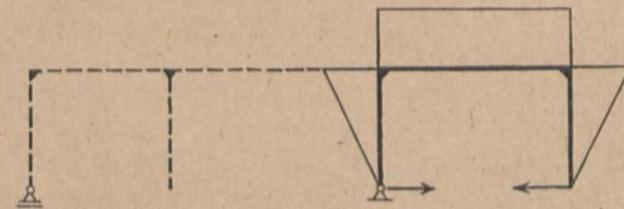


Abb. 319.

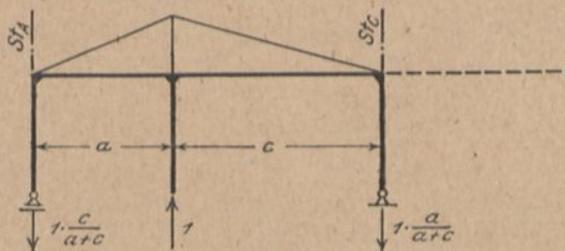


Abb. 320.

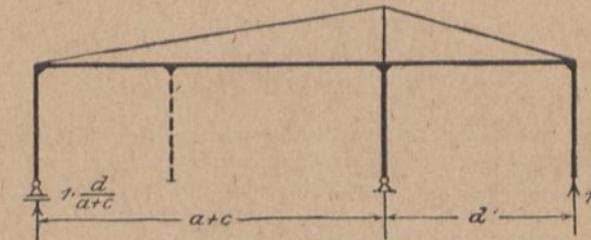


Abb. 321.

c) Für den in den Endlagern eingespannten Rahmen mit Pendelzwischenstützen erfüllten sich Elastizitätsbedingungen 3 und 4 für den in den Endlagern ruhenden Rahmen und die besprochene zusätzliche Elastizitätsbedingung für jede Zwischenstütze (Kapitel XXXVI). Bei geeigneter Zerlegung (etwa für den einfachen Träger AE als Hauptsystem (Abb. 322) erweist sich auch für diese Rahmengruppe die Gültigkeit der besprochenen Zusatz-Elastizitätsbedingung für benachbarte Felder. Für eine

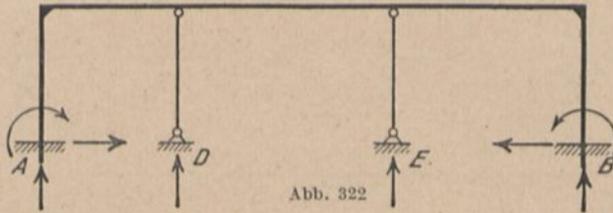


Abb. 322

durch die Auflager gelegte Gerade läuft Elastizitätsbedingung 3 auf Bedingung 1 hinaus.

d) Endlich erwiesen sich für den gelenklosen mehrstiegligen Rahmen die Elastizitätsbedingungen 3 und 4 als zutreffend sowohl für jedes einzelne Rahmenfeld als für jeden durch Zusammenlegung zweier oder mehrerer Rahmenfelder darstellbaren einfachen Einzelrahmen (Kap. XXIII, Ziffer 3 und Kap. XXXVII, Ziffer 2). Auch die zusätzliche Elastizitätsbedingung trifft zu.

e) Allgemeiner gefaßt lautet die zusätzliche Elastizitätsbedingung, bezeichnet als Elastizitätsbedingung 5:

Für jeden in drei Auflager endigenden Stabzug ist die Summe der Auflagerdrücke der $\frac{J^m}{J}$ -fachen Momentenflächen am Mittelaullager gleich Null¹⁾.

3. Die zwei Grundgleichungen der Elastizitätsbedingungen.

Die Elastizitätsbedingungen 1, 2, 3 und 5 beruhen auf ein- und derselben Formänderungsgleichung, nämlich

$$\delta = \int \frac{M_a \cdot M \cdot ds}{E \cdot J} \quad (\text{vgl. S. 79}).$$

¹⁾ Soweit bei dieser Ausdrucksweise eine auf dem Mittelstiel etwa vorhandene Momentenfläche mit eingeschlossen erscheint, ist zu beachten, daß diese beiden, im Mittelstiel zusammentreffenden Rahmenfeldern angehört und deshalb als zugleich positiv und negativ (Kap. XXIII, 3) keinen Beitrag für gedachten Auflagerdruck liefert.

Im Hinblick darauf, daß $\frac{M \cdot ds}{E \cdot J} = d(\Delta \varphi)$ (vgl. S. 77) den Formänderungswinkel des Elementes ds , M_a den Abstand desselben von der Bezugsachse darstellt, sind die rechten Seiten der Elastizitätsbedingungen dann deutlich als Ausdrücke für die Verschiebungen erkenntlich, die sich aus der Verdrehung aller Elemente ds auf der jeweiligen Bezugsachse ergeben.

Die Elastizitätsbedingung 4 entspricht der Grundgleichung

$$d(\Delta \varphi) = \frac{M \cdot ds}{E \cdot J} \quad \text{oder}$$

für den ganzen Stabzug der Gleichung

$$\int d(\Delta \varphi) = \Delta \varphi = \int \frac{M \cdot ds}{E \cdot J}.$$

Die fünf Elastizitätsbedingungen sind also aus zwei elementaren Formänderungsgleichungen, der für eine Verschiebung und der für eine Drehung, erwachsen.

4. Gebrauch der Elastizitätsbedingungen für Richtigkeitsprüfungen.

Abgesehen von der in den vorangehenden Abschnitten allenthalben gezeigten Verwendbarkeit der so betrachteten Elastizitätsbedingungen zur übersichtlichen Aufstellung der Bestimmungsgleichungen statisch unbestimmter Größen — es seien dies nun die Auflagergrößen selbst oder die Eckmomente (vgl. Kapitel XXIII und XXIV, Kapitel XXV, Ziffer 4, Kapitel XXXVII, Ziffer 2) — besteht der besondere Wert derselben in ihrer allgemeinen Brauchbarkeit zur Ausführung von Richtigkeitsprüfungen in Unabhängigkeit von dem gerade eingeschlagenen Berechnungswege. Hier handelt es sich um die Anwendung der Elastizitätsbedingungen gegebenenfalls gleich auf die vorliegende Gesamtmomentenfläche¹⁾; sie wird nach dem Grade der Übersichtlichkeit der Fläche mehr oder weniger leicht durchführbar sein, am leichtesten bei geradlinigem Verlauf derselben (vgl. Beispiel 2, Kapitel XXII). Die bekannten Gleichgewichtsbedingungen $\sum V = 0$, $\sum H = 0$, $\sum M = 0$ für die äußeren Kräfte ergeben für jede Anwendung der Elastizitätsbedingungen zweckdienliche Ergänzungsgleichungen.

¹⁾ Siehe auch Fußnote 1, S. 215.

Mehrstielige Rahmen unter Zugrundelegung statisch unbestimmter Hauptsysteme.

Kapitel XXXIX.

Der Zweigelenrahmen als Hauptsystem (Beispiel der
Berechnung eines Dachrahmens mit einer Pendelstütze).

Einleitung.

Das System Abb. 323 soll als Rahmen mit zwei Fußgelenken bei A und B und einer Pendelstütze bei C ausgebildet werden. Als statisch unbestimmte Größen werden der Horizontalschub X_a und der Druck auf die Pendelstütze X_b eingeführt. Die Reaktionen P_1 bis P_4 der Pfetten ergeben einschließlich Eigengewicht

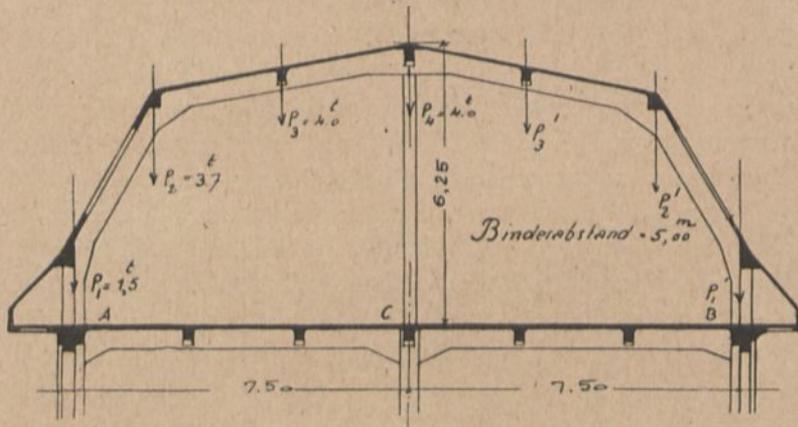
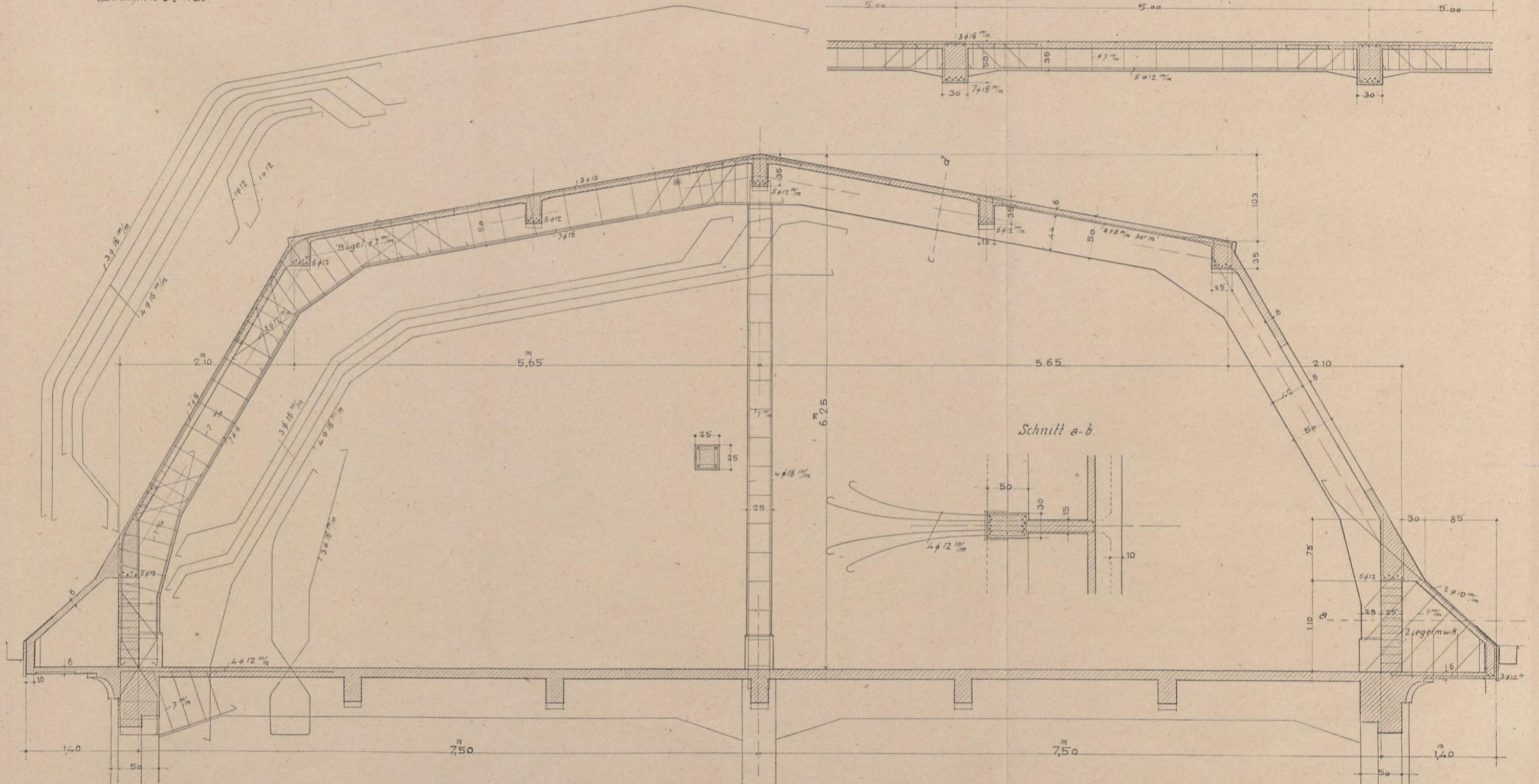


Abb. 323.

des Rahmens nach überschlägiger Berechnung die in Abb. 323 eingeschriebenen Größen. Die Lasten P_1 und P_4 beanspruchen nur die Stützen A , B und C auf Druck und kommen also für die Rahmenberechnung nicht in Frage, da die Normalkräfte unberücksichtigt bleiben sollen (wohlgemerkt für den Rahmen an sich).

Dreistieliger Dachrahmen in Eisenbeton
Detailplan M 1:20



Die Berechnung des Rahmens ist so ausgeführt, daß das zweifach unbestimmte System zunächst auf ein einfach unbestimmtes zurückgeführt und dieses dann zur Ermittlung von X_b als Hauptsystem angesehen wurde (sogenanntes Verfahren mit statisch unbestimmtem Hauptsystem).

Es mag hier gleich der eventuellen Meinung entgegengetreten werden, als könnte man beim Vorhandensein mehrerer statisch unbestimmter Größen eine nach der anderen ausrechnen. Das ist unmöglich, da in jeder einzelnen Bestimmungsgleichung alle unbestimmten Größen zugleich auftreten. Das hier angegebene Verfahren hat mit dieser irrtümlichen Auffassung nichts zu tun; es eignet sich eigentlich auch nur für den Rahmen mit einer Mittelstütze und soll lediglich einen derartigen Berechnungsgang veranschaulichen.

Die Berechnung erfolgt in folgenden drei Abschnitten:

1. Bestimmung von X_a infolge der Lasten P_2 und P_3 für den Rahmen ohne Mittelstütze und der Momente hierfür.
2. Ermittlung von X_b .
3. Berechnung der endgültigen Größe von X_a und der lotrechten Auflagerreaktionen A und B im fertig zweifach unbestimmten System.
4. Zum Schluß Aufstellung der endgültigen Momentenfläche.

Lotrechte Belastung.

1. Rahmen ohne Mittelstütze.

Allgemein

$$H = \frac{\sum F_0 \cdot f \cdot v}{\sum \left[\frac{v \cdot s}{3} \cdot (H^2 + H \cdot h + h^2) \right]}$$

wir wählen $J_r = J_s$, also v für alle Rahmenteile = 1.

Nennergröße:

Stab	v	s	H	h	H^2	h^2	$\overbrace{H^2 + H \cdot h + h^2}^{\varphi}$	$s \cdot \varphi$
AC	1	1,5	1,5	0	2,25	0	2,25	3,38
CE	1	4,0	5,0	1,5	25,0	2,25	34,75	139,00
EF	1	5,6	6,0	5,0	36,0	25,0	91,0	509,00
								651,38

$$\text{somit } N = \frac{2 \cdot 651,38}{3} = 434 \text{ m}^2.$$

Zählergröße:

Stab	v	F_0	f	$v \cdot F_0 \cdot f$
AC	1	0	0	
CE	1	$\frac{1}{2} \cdot 4,0 \cdot 15,4 = 30,8$	$1,5 + 3,5 \cdot \frac{2}{3} = 3,83$	118
EF	1	$15,4 \cdot 2,8 = 43,2$	5,25	226
		$26,4 \cdot 2,8 = 74,0$	5,75	425
		$\frac{11 \cdot 2,8}{2} = 15,4$	$5,00 + 0,50 \cdot \frac{2}{3} = 5,33$	82
				851

somit $\sum F_0 \cdot f \cdot v = 2 \cdot 851 = 1702 \text{ tm}^3$.

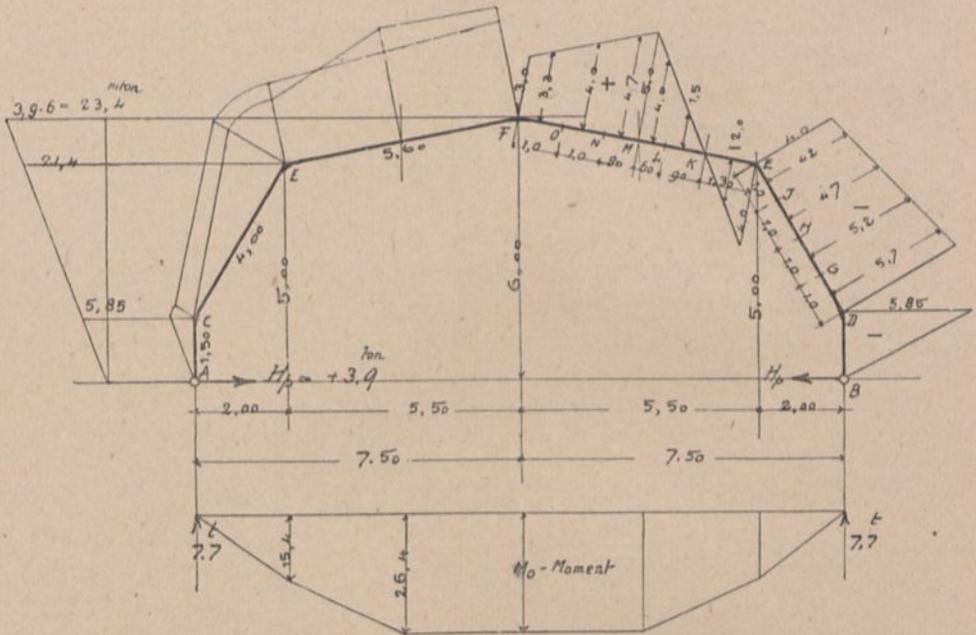


Abb. 324.

Demnach

$$H_p = X_a = \frac{1702}{434} = +3,9 \text{ t.}$$

$$A_0 = B_0 = 7,70 \text{ t.}$$

Abb. 324 veranschaulicht die resultierende Momentenfläche für die Vertikalbelastung ohne Mittelstütze.

2. Ermittlung des Stützdruckes X_b .

a) Bemerkungen über den Berechnungsgang.

Um die weitere Berechnung möglichst verständlich zu machen, sollen hier kurz die Gleichungen, mit welchen wir

bisher gearbeitet haben, wiederholt werden. Für das vorliegende, einfach unbestimmte System waren wir ausgegangen von der Grundgleichung:

$$0 = \int \frac{M_a \cdot M \cdot ds}{E \cdot J} = \int \frac{M_a \cdot (M_0 - M_a \cdot X_a) \cdot ds}{E \cdot J} \\ = \int \frac{M_a \cdot M_0 \cdot ds}{E \cdot J} - \int \frac{M_a^2 \cdot X_a \cdot ds}{E \cdot J},$$

woraus

$$X_a = \frac{\int \frac{M_a \cdot M_0 \cdot ds}{E \cdot J}}{\int \frac{M_a^2 \cdot ds}{E \cdot J}}$$

oder auch mit E und J konstant

$$X_a = \frac{\int M_a \cdot M_0 \cdot ds}{\int M_a^2 \cdot ds}.$$

Oder wir setzen von vornherein

$$M = M_0 - X_a \cdot y \quad \text{und} \quad M_a = -y \quad \left(\frac{dM}{dX_a} = -y \right)$$

und erhielten damit

$$0 = \int \frac{(-y) \cdot (M_0 - X_a \cdot y) \cdot ds}{E \cdot J} \\ 0 = - \int \frac{M_0 \cdot y \cdot ds}{E \cdot J} + \int \frac{X_a \cdot y^2 \cdot ds}{E \cdot J}.$$

Für konstantes E und multipliziert mit J_m , wobei $\frac{J_m}{J} = v$, erhielten wir:

$$0 \cdot E \cdot J_m = - \int v \cdot M_0 \cdot y \cdot ds + X_a \cdot \int v \cdot y^2 \cdot ds,$$

woraus

$$X_a = H = \frac{\int M_0 \cdot y \cdot ds \cdot v}{\int y^2 \cdot v \cdot ds} = \frac{\sum F_0 \cdot j \cdot v}{\sum \frac{v \cdot s}{3} \cdot (H^2 + H \cdot h + h^2)}.$$

Mit diesen Formeln haben wir bisher den Zweigelenkrahmen behandelt, und wir betrachten von nun ab die zuletzt gewonnene Momentenfläche als M_0 -Fläche. Somit erhalten wir wie vorher

$$0 = \int \frac{M_b \cdot M \cdot ds}{E \cdot J} = \int \frac{M_b \cdot (M_0 - M_b \cdot X_b) \cdot ds}{E \cdot J} \\ 0 = \int \frac{M_b \cdot M_0 \cdot ds}{E \cdot J} - X_b \cdot \int \frac{M_b^2 \cdot ds}{E \cdot J}$$

und daraus

$$X_b = \frac{\int \frac{M_b \cdot M_0 \cdot ds}{E \cdot J}}{\int \frac{M_b^2 \cdot ds}{E \cdot J}} \quad \text{oder auch} \quad = \frac{\int M_b \cdot M_0 \cdot ds}{\int M_b^2 \cdot ds}.$$

Die Integrale der letzten Formel müssen wir nun auswerten und zum Schluß bedenken, daß das wirkliche Moment

$$M = M_0 - M_b \cdot X_b$$

beträgt und daß auch die wirkliche Auflagerreaktion

$$A = A_0 - A_b \cdot X_b$$

und schließlich der wirkliche Schub

$$H = H_0 - H_b \cdot X_b$$

wird.

M_b , A_b und H_b beziehen sich in diesen Gleichungen auf den Zustand $X_b = -1$.

Der Nenner dürfte keine Schwierigkeiten bieten.

b) Belastung mit $X_b = -1$.

Wir belasten jetzt das System mit $X_b = -1$, wodurch $+$ -Momentenflächen entstehen, und in der Gleichung $M = M_0 - M_b \cdot X_b$ das zweite Glied auf der rechten Seite sich tatsächlich abzieht, was dem Sinne entspricht, daß die Momente infolge der Mittelstütze verringert werden.

Schreibt man die Gleichung $M = M_0 + M_b \cdot X_b$, so bedeutet das $+$ -Zeichen algebraisch eine Subtraktion, und wir müßten, um praktisch dasselbe Resultat zu erreichen, die Fläche für $X_b = +1$ zeichnen, was negative Momente ergeben würde.

Wir erhalten (Abb. 325):

$$A_b = B_b = \frac{1}{2}; \quad M_D = 0;$$

$$M_E = + \frac{1}{2} \cdot 2 = 1,0 \text{ mt};$$

$$M_F = + \frac{1}{2} \cdot 7,5 = 3,75 \text{ mt};$$

$$F_{0_1} = + \frac{1}{2} \cdot 4,0 \cdot 1,0 = 2 \text{ tm}^2;$$

$$F_{0_2} = + 1 \cdot 5,6 = 5,6 \text{ tm}^2;$$

$$F_{0_3} = + \frac{1}{2} \cdot 5,6 \cdot 2,75 = 7,7 \text{ tm}^2;$$

$$f_{01} = 1,50 + \frac{2}{3} \cdot 3,50 = 3,83 \text{ m};$$

$$f_{02} = 5,50 \text{ m}; \quad f_{03} = 5,0 + \frac{2}{3} \cdot 1 = 5,66 \text{ m}.$$

$$\sum F_0 \cdot f = 2 \cdot (2,0 \cdot 3,83 + 5,6 \cdot 5,5 + 7,7 \cdot 5,66) = 163,92 \text{ tm}^3,$$

somit

$$X'_a = \frac{163,92}{434} = + 0,378 \text{ t}.$$

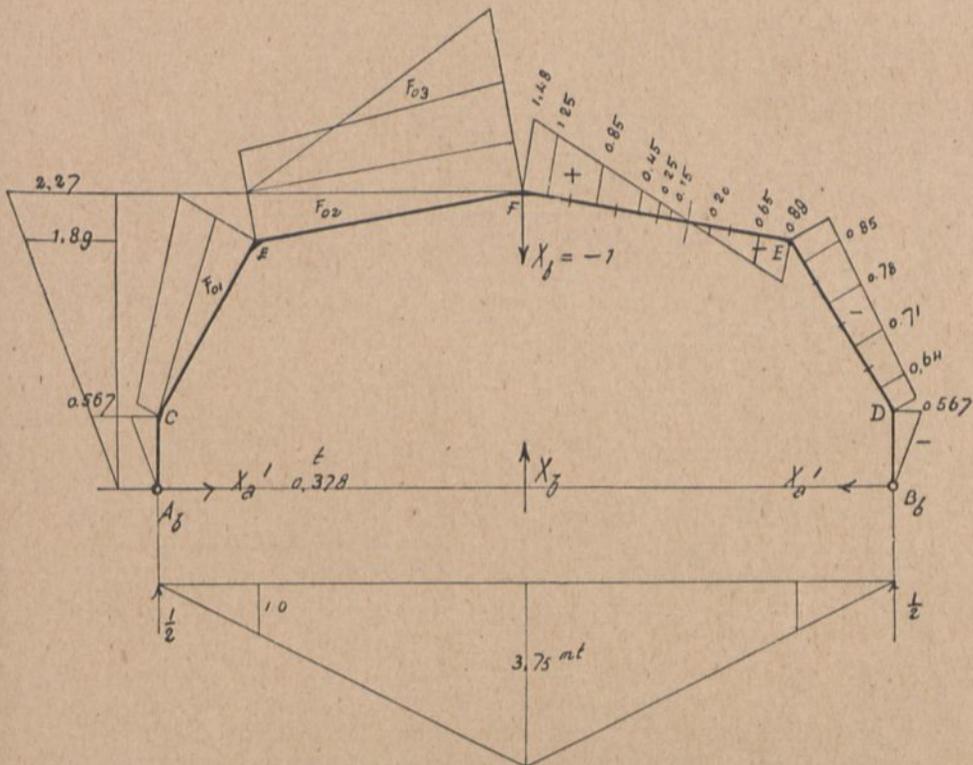


Abb. 325.

Infolge der Belastung $X_b = -1$ entstehen also die lotrechten Reaktionen $+\frac{1}{2}$ und der Horizontalschub $X'_a = +0,378 \text{ t}$, ferner die Momente

$$M_D = -0,378 \cdot 1,5 = -0,567 \text{ mt}$$

$$M_E = -0,378 \cdot 5,0 = -1,89 \text{ ,,}$$

$$M_F = -0,378 \cdot 6,0 = -2,27 \text{ ,,}$$

Die resultierende Momentenfläche für diesen Belastungszustand ist auf der rechten Seite des Stabzuges (Abb. 325) aufgetragen.

c) Auswertung der Bestimmungsgleichung.

Nach diesen zwei Schritten haben wir nun die oben gegebene Bestimmungsgleichung

$$X_b = \frac{\int M_0 \cdot M_b \cdot ds}{\int M_b^2 \cdot ds}$$

auszuwerten.

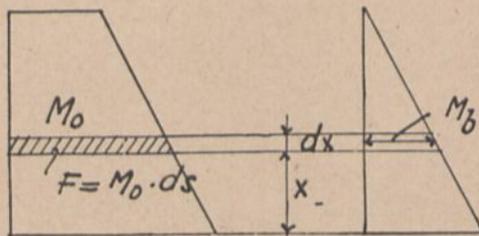


Abb. 326.

Die unter dem Integral stehenden Momente M_0 des statisch unbestimmten Hauptsystems und M_b desselben für die Belastung $X_b = -1$ haben wir in den vorhergehenden Schritten gewonnen. Der Zähler der Gleichung besagt nun, daß die Summe aus allen Produkten $M_0 \cdot M_b \cdot ds$ gebildet werden soll. Angenähert bedeutet das:

Es soll die Summe aller Produkte gebildet werden aus einerseits einem Flächenstreifen $M_0 \cdot ds$ und andererseits dem in demselben Flächenelement wirkenden M_b (Abb. 326). Diese Arbeit geschieht in der nachfolgenden Tabelle (S. 305) nach der Formel

$$X_b = \frac{\sum M_0 \cdot M_b \cdot \Delta x}{\sum M_b^2 \cdot \Delta x},$$

welche eine Annäherung zu der obigen Formel darstellt, und wobei man die zugehörigen Δx entsprechend der Einteilung nimmt, die wir in Abb. 324 durch die Buchstaben $F, O, N, M, L, K, E, J, H, G, D$ gekennzeichnet haben. Natürlich führt man überall dort, wo eine Integration keine Schwierigkeiten macht, diese durch.

Nach der Tabelle ergibt sich:

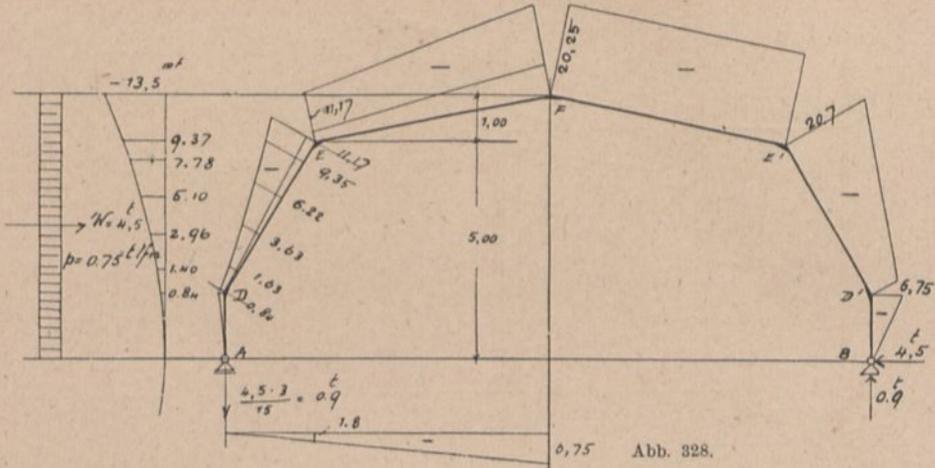
$$X_b = \frac{27,31}{5,445} = \text{rd. } 5,0 \text{ t.}$$

	Stab	s. in m	M_0	M_b	$\int M_0 \cdot M_b \cdot dx$	$\int M_b^2 \cdot dx$
Δ 1	BD	1,50	$M_x = -5,85 \cdot \frac{x}{1,5}$	$M_x = -0,567 \cdot \frac{x}{1,5}$	$+ \int_0^{1,5} \frac{5,85 \cdot x}{1,50} \cdot \frac{0,567 \cdot x}{1,50} \cdot dx$ $= + \frac{5,85 \cdot 0,567}{1,50^2} \cdot \int_0^{1,5} x^2 \cdot dx$ $= 1,475 \cdot \frac{1,5^3}{3} = + 1,66$	$+ \int_0^{1,5} \left(\frac{0,567}{1,5} \right)^2 \cdot x^2 \cdot dx$ $= + \frac{0,567^2}{1,5^2} \cdot \int_0^{1,5} x^2 \cdot dx$ $= 0,1425 \cdot \frac{1,5^3}{3} = + 0,161$
Δ 2	DG	1,0	-5,7	-0,64	$1 \cdot (-5,7) \cdot (-0,64) = + 3,65$	$1 \cdot (-0,64)^2 \dots = + 0,410$
Δ 3	GH	1,0	-5,2	-0,71	$1 \cdot (-5,2) \cdot (-0,71) = + 3,70$	$1 \cdot (-0,71)^2 \dots = + 0,505$
Δ 4	HJ	1,0	-4,7	-0,78	$1 \cdot (-4,7) \cdot (-0,78) = + 3,66$	$1 \cdot (-0,78)^2 \dots = + 0,608$
Δ 5	JE	1,0	-4,2	-0,85	$1 \cdot (-4,2) \cdot (-0,85) = + 3,57$	$1 \cdot (-0,85)^2 \dots = + 0,722$
Δ 6	EK	1,3	-2,0	-0,65	$1,3 \cdot (-2,0) \cdot (-0,65) = + 1,69$	$1,3 \cdot (-0,65)^2 \dots = + 0,548$
Δ 7	KL	0,90	+1,5	-0,20	$0,9 \cdot 1,5 \cdot (-0,20) = - 0,27$	$0,9 \cdot (-0,2)^2 \dots = + 0,036$
Δ 8	LM	0,60	+4,0	+0,15	$0,6 \cdot 4,0 \cdot 0,15 \dots = + 0,36$	$0,6 \cdot 0,15^2 \dots = + 0,013$
Δ 9	MN	0,80	+4,7	+0,45	$0,8 \cdot 4,7 \cdot 0,45 \dots = + 1,69$	$0,8 \cdot 0,45^2 \dots = + 0,162$
Δ 10	NO	1,0	+4,0	+0,85	$1,0 \cdot 4,0 \cdot 0,85 \dots = + 3,48$	$1,0 \cdot 0,85^2 \dots = + 0,720$
Δ 11	OF	1,0	+3,3	+1,25	$1,0 \cdot 3,3 \cdot 1,25 \dots = + 4,12$	$1,0 \cdot 1,25^2 \dots = + 1,560$
					$\int M_0 \cdot M_b \cdot dx = + 27,31$	$\int M_b^2 \cdot dx = + 5,445$

Wagerechte Belastung.

Wagerechter Winddruck von 150 kg/m^2 bei 5 m Binderentfernung. Abb. 328 stellt die M_0 -Fläche für den Rahmen ohne Mittelstütze dar.

Der Nenner bleibt wie vor $N = 434 \text{ m}^3$.



Bildung des Zählergliedes:

Stab			
AD	$-\frac{0,75}{8} \cdot (1,5^4 - 0,0^4) \cdot \frac{1,0}{1,0}$	$= -$	0,47
DE	$-\frac{0,75}{8} \cdot (5,0^4 - 1,5^4) \cdot \frac{4,0}{3,5}$	$= -$	66,40
EF	$-\frac{0,75}{8} \cdot (6,0^4 - 5,0^4) \cdot \frac{5,6}{1,0}$	$= -$	352,00
Stab			
DE	$-\frac{1,8 \cdot 4,0}{2} \cdot \left(1,5 + \frac{2}{3} \cdot 3,50\right)$	$= -$	13,75
EF	$-1,8 \cdot 5,6 \cdot 5,50$	$= -$	55,40
	$-\frac{(6,75 - 1,8) \cdot 5,6}{2} \cdot \left(5,0 + \frac{2}{3} \cdot 1,0\right)$	$= -$	78,20
FE'	$-\frac{(20,25 + 20,7)}{2} \cdot 5,6 \cdot 5,49$	$= -$	629,42
E'D'	$-6,75 \cdot 4,0 \cdot 3,25$	$= -$	87,70
	$-\frac{(20,7 - 6,75) \cdot 4,0}{2} \cdot \left(1,5 + \frac{2}{3} \cdot 3,5\right)$	$= -$	106,80
D'B	$-\frac{6,75 \cdot 1,5}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,5$	$= -$	5,07
		$\Sigma F_0 \cdot f \cdot v =$	$-1395,51 \text{ tm}^3$

Demnach

$$H_w = -\frac{1395,51}{434} = -3,22 \text{ t.}$$

Anmerkung. Weiter gerechnet wird mit dem Wert $H_w = -3,15 \text{ t}$, welchen zuerst eine Berechnung vermitteltst Rechenschieber ergeben hatte.

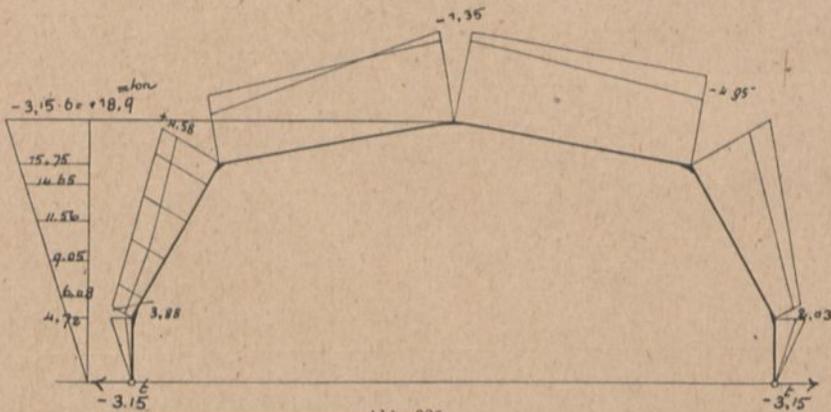


Abb. 329

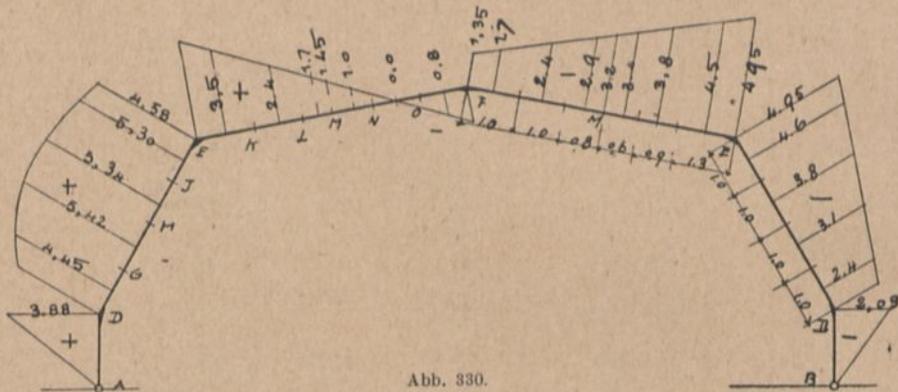


Abb. 330.

In Abb. 329 ist die hiermit erhaltene Momentenfläche mit der M_0 -Fläche kombiniert und in Abb. 330 in einem größeren Maßstab auf die Rahmenachse übertragen.

Diese Momentenfläche betrachten wir nun wieder als M_0 -Fläche zur Bestimmung von X_b nach der Gleichung

$$X_b = \frac{\int M_0 \cdot M_b \cdot ds}{\int M_b^2 \cdot ds}.$$

Linke Rahmenhälfte.

	Stab	s. in Metern	M_0	M_b	$fM_0 \cdot M_b \cdot dx$	$fM_b^2 \cdot dx$
$\Delta 1$	AD	1,5	$M_x = + 3,88 \cdot \frac{x}{1,5}$	$\frac{0,567 \cdot x}{1,5}$	$-\frac{3,88 \cdot 0,567}{1,5^2} \cdot \int_0^{1,5} x^2 \cdot dx$ $= -0,98 \cdot \frac{1,5^3}{3} \dots = -1,10$	wie vor
$\Delta 2$	DG	1,0	+ 4,45	- 0,64	$1,0 \cdot 4,45 \cdot (-0,64) \dots = -2,84$	
$\Delta 3$	GH	1,0	+ 5,42	- 0,71	$1,0 \cdot 5,42 \cdot (-0,71) \dots = -3,84$	
$\Delta 4$	HJ	1,0	+ 5,34	- 0,78	$1,0 \cdot 5,34 \cdot (-0,78) \dots = -4,17$	
$\Delta 5$	JE	1,0	+ 5,30	- 0,85	$1,0 \cdot 5,3 \cdot (-0,85) \dots = -4,50$	
$\Delta 6$	EK	1,3	+ 3,50	- 0,65	$1,3 \cdot 3,5 \cdot (-0,65) \dots = -2,95$	
$\Delta 7$	KL	0,9	+ 2,40	- 0,20	$0,9 \cdot 2,40 \cdot (-0,20) \dots = -0,43$	
$\Delta 8$	LM	0,6	+ 1,70	+ 0,15	$0,6 \cdot 1,70 \cdot 0,15 \dots = + 0,15$	
$\Delta 9$	MN	0,8	+ 1,0	+ 0,45	$0,8 \cdot 1,0 \cdot 0,45 \dots = + 0,36$	
$\Delta 10$	NO	1,0	$\pm 0,0$	+ 0,85	$1,0 \cdot (\pm 0,0) \cdot 0,85 \dots = \pm 0,00$	
$\Delta 11$	OF	1,0	- 0,8	+ 1,25	$1,0 \cdot (-0,8) \cdot 1,25 \dots = -1,00$	
					- 20,32	+ 5,445

Rechte Rahmenhälfte.

	Stab	s. in Metern	M_0	M_b	$\int M_0 \cdot M_b \cdot dx$	$\int M_b^2 \cdot dx$
$\Delta 1$	BD'	1,5	$M_x = -2,03 \cdot \frac{x}{1,5}$	$-\frac{0,567 \cdot x}{1,5}$	$+ \frac{2,03 \cdot 0,567}{1,5^2} \cdot \int_0^{1,5} x^2 \cdot dx$ $= + 0,51 \cdot \frac{1,5^3}{3} = + 0,57$	wie vor
$\Delta 2$	$D'G'$	1,0	-2,4	-0,64	$1,0 \cdot (-2,4) \cdot (-0,64) = + 1,53$	
$\Delta 3$	$G'H'$	1,0	-3,1	-0,71	$1,0 \cdot (-3,1) \cdot (-0,71) = + 2,20$	
$\Delta 4$	$H'J'$	1,0	-3,8	-0,78	$1,0 \cdot (-3,8) \cdot (-0,78) = + 2,96$	
$\Delta 5$	$J'E'$	1,0	-4,6	-0,85	$1,0 \cdot (-4,6) \cdot (-0,85) = + 3,91$	
$\Delta 6$	$E'K'$	1,3	-4,5	-0,65	$1,3 \cdot (-4,5) \cdot (-0,65) = + 3,80$	
$\Delta 7$	$K'L'$	0,9	-3,8	-0,20	$0,9 \cdot (-3,8) \cdot (-0,20) = + 0,68$	
$\Delta 8$	$L'M'$	0,6	-3,4	+0,15	$0,6 \cdot (-3,4) \cdot 0,15 = - 0,30$	
$\Delta 9$	$M'N'$	0,8	-2,9	+0,45	$0,8 \cdot (-2,9) \cdot 0,45 = - 1,04$	
$\Delta 10$	$N'O'$	1,0	-2,4	+0,85	$1,0 \cdot (-2,4) \cdot 0,85 = - 2,04$	
$\Delta 11$	$O'F$	1,0	-1,7	+1,25	$1,0 \cdot (-1,7) \cdot 1,25 = - 2,12$	
					+ 10,15	+ 5,445

Der Nenner wurde in der vorhergehenden Tabelle schon berechnet und ergab $+5,445$.

Bildung des Zählergliedes. (NB.: Man wird sich die Rechnung wesentlich abkürzen können, wenn man die Anzahl der Teilstücke geringer annimmt; allerdings leidet darunter die Genauigkeit.)

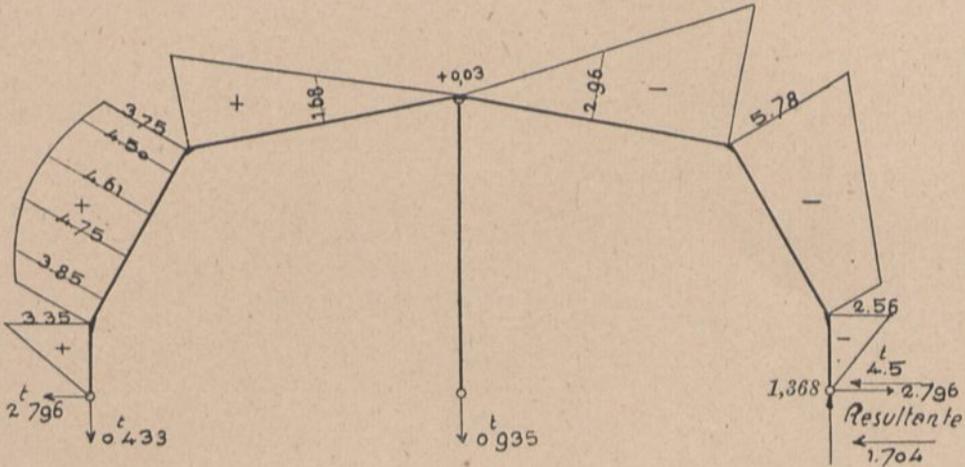


Abb. 331.

Die Berechnungen S. 309 und 310 liefern:

$$\int M_0 \cdot M_b \cdot dx = -20,32 + 10,15 = -10,17$$

$$\int M_b^2 \cdot dx = +5,445 + 5,445 = +10,890,$$

und wir erhalten für

$$X_{bw} = \frac{-10,17}{10,89} = -0,935 \text{ t.}$$

Hiermit ergeben sich folgende endgültigen Größen (Abb. 331):

$$X_{aw} = -3,15 - [0,378 \cdot (-0,935)] = -2,796 \text{ t}$$

$$X_{bw} = 4,50 - 2,796 = +1,704 \text{ t}$$

$$A_w = -0,90 - \frac{1}{2} \cdot (-0,935) = -0,433 \text{ t}$$

$$B_w = +0,90 - \frac{1}{2} \cdot (-0,935) = +1,368 \text{ t,}$$

so daß die rechte Reaktion $+1,368 \text{ t}$ der linken und mittleren mit $-0,433 - 0,935 = -1,368$ das Gleichgewicht hält.

$$\begin{aligned}
 M_D &= + 3,88 - (- 0,567) \cdot (- 0,935) = + 3,35 \text{ mt} \\
 M_{D'} &= - 2,03 - (- 0,567) \cdot (- 0,935) = - 2,56 \text{ ,,} \\
 M_E &= + 4,58 - (- 0,89) \cdot (- 0,935) = + 3,75 \text{ ,,} \\
 M_{E'} &= - 4,95 - (- 0,89) \cdot (- 0,935) = - 5,78 \text{ ,,} \\
 M_M &= + 1,45 - 0,25 \cdot (- 0,935) = + 1,68 \text{ ,,} \\
 M_{M'} &= - 3,2 - 0,25 \cdot (- 0,935) = - 2,96 \text{ ,,} \\
 M_F &= - 1,35 - 1,48 \cdot (- 0,935) = + 0,03 \text{ ,,} \\
 M_{DG} &= + 4,45 - (- 0,64) \cdot (- 0,935) = + 3,85 \text{ ,,} \\
 M_{GH} &= + 5,42 - (- 0,71) \cdot (- 0,935) = + 4,75 \text{ ,,} \\
 M_{HJ} &= + 5,34 - (- 0,78) \cdot (- 0,935) = + 4,61 \text{ ,,} \\
 M_{JE} &= + 5,30 - (- 0,85) \cdot (- 0,935) = + 4,50 \text{ ,,}
 \end{aligned}$$

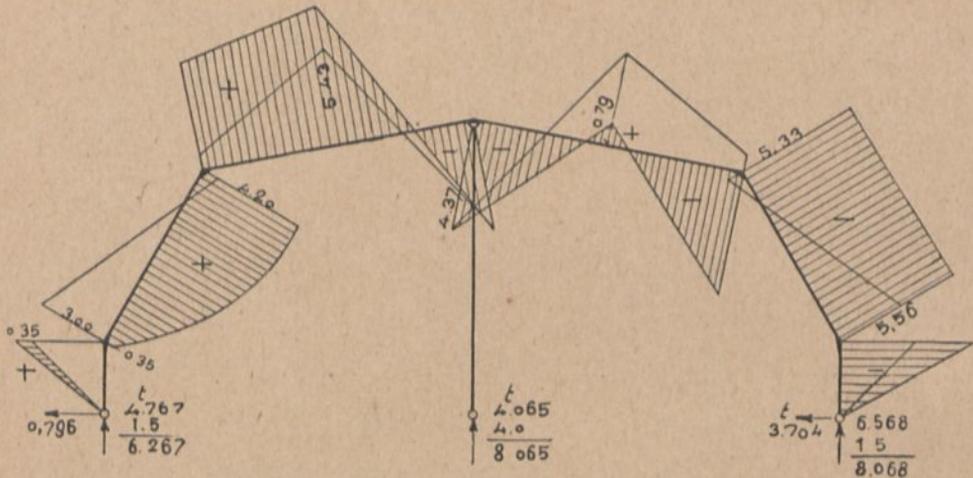


Abb. 332.

Die Richtigkeit der Rechnung wird erprobt durch eine Nachrechnung der Momente lediglich mit den Reaktionen und direkten Lasten; so wird z. B.:

$$\begin{aligned}
 M_E &= + 2,796 \cdot 5,0 - 0,433 \cdot 2,0 - 0,75 \cdot \frac{5,0^2}{2} \cong 3,75 \text{ tm} \\
 M_{E'} &= - 1,704 \cdot 5,0 + 1,368 \cdot 2,0 = - 5,78 \text{ mt} \\
 M_F \text{ (von rechts)} &= - 1,704 \cdot 5,0 + 1,368 \cdot 7,50 \cong + 0,03 \text{ mt.}
 \end{aligned}$$

In Abb. 331 sind diese Größen dargestellt und in Abb. 332 mit den durch die lotrechte Belastung hervorgerufenen zusammengestellt.

Bemessung.

a) Für den Riegel EF bzw. $E'F$ tritt das größte Biegemoment im Punkte M (unter der Einzellast) auf und beträgt

+ 5,43 mt. Um die in diesem Querschnitt auftretende Normalkraft zu erhalten, müssen wir alle vor diesem Schnitt wirkenden Kräfte in die Längs- und Querrichtung des betreffenden Stabes zerlegen (Längs- und Querkraft).

Wir erhalten:

durch die Reaktion A

$$4,767 \cdot \sin 10^\circ = 4,767 \cdot 0,1736 = + 0,825 \text{ t}$$

durch den Horizontalschub H

$$0,796 \cdot \cos 10^\circ = 0,796 \cdot 0,9848 = - 0,785 \text{ t}$$

durch die lotrechte Belastung P_2

$$3,75 \cdot \sin 10^\circ = 3,75 \cdot 0,1736 = - 0,650 \text{ t}$$

durch die wagerechte Belastung (Wind)

$$0,75 \cdot 5,5 \cdot \cos 10^\circ = 4,12 \cdot 0,9848 = + 4,060 \text{ t}$$

$$\text{somit Gesamtnormaldruck } N = + 3,450 \text{ t}$$

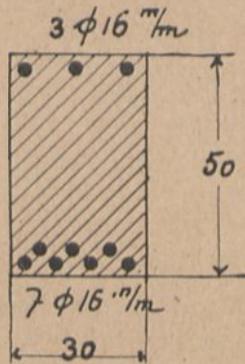


Abb. 333.

Exzentrizität in Bezug auf die Mittellinie als Achse¹⁾

$$p = \frac{M}{N} = \frac{5,43}{3,450} = 1,57 \text{ m.}$$

Da nun je nach Art der Belastung auch auf der Außenseite des Riegels Zug auftreten kann, so ist eine doppelte Armierung erforderlich. Zugrunde gelegt sei der in Abb. 333 gegebene Querschnitt mit 7 \odot 16 mm auf der Innen- und 3 \odot 16 mm auf der Außenseite.

¹⁾ Vgl. Kap. XVIa.

x berechnet sich nach der kubischen Gleichung¹⁾ zu rund 20,3 cm, somit

$$\sigma_b = \frac{3450}{\frac{30 \cdot 20,3}{2} + 15 \cdot 6,03 \cdot \frac{16,3}{20,3} - 15 \cdot 14,07 \cdot \frac{25,7}{20,3}} = 31,5 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_e = 15 \cdot 31,5 \cdot \frac{25,7}{20,3} = 600 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma'_e = 15 \cdot 31,5 \cdot \frac{16,3}{20,3} = 380 \text{ kg/cm}^2.$$

Kontrolle: $D_b + D_e - Z_e = N$

$$D_b = 31,5 \cdot \frac{20,3}{2} \cdot 30 = 9600 \text{ kg}$$

$$D_e = 380 \cdot 6,03 = 2290$$

zusammen 11890 kg

$$Z_e = 600 \cdot 14,07 = 8450$$

Rest 3440 kg

b) Für den Riegel DE bzw. $D'E'$ beträgt das größte Biegemoment $-5,56$ mt, und zwar direkt auf der Ecke. Nun werden aber in der Regel diese Ecken immer etwas verstärkt, weshalb wir hier den eigentlichen Riegelquerschnitt im Abstand von 80 bis 100 cm von der Ecke entfernt der Berechnung zugrunde legen; das Moment beträgt dort rund $-5,5$ mt.

Als Normaldruck für diesen Querschnitt ergibt sich:

durch die Reaktion B

$$6,568 \cdot \sin 60^\circ = 6,568 \cdot 0,866 = + 5,75 \text{ t}$$

durch den Horizontalschub H

$$3,704 \cdot \cos 60^\circ = 3,704 \cdot 0,5 = + 1,85 \text{ t}$$

Gesamt- $N = + 7,60 \text{ t}$

Exzentrizität

$$p = \frac{M}{N} = \frac{5,50}{7,60} = 0,725 \text{ m.}$$

Da das größte positive Biegemoment für diesen Riegel den Wert $+4,5$ mt erreicht, so wählen wir unter Beibehaltung

¹⁾ Schlüter, „Eisenbetonbau“, Säule und Balken, Anzeige am Schluß.

desselben Betonquerschnittes wie oben beide Eiseneinlagen gleich groß, also $fe = fe' = 7 \text{ } \ominus \text{ } 16 \text{ mm}$. x beträgt rund 20,2 cm, demnach

$$\sigma_b = \frac{7600}{\frac{30 \cdot 20,2}{2} + \frac{15 \cdot 14,07}{20,2} \cdot (40,4 - 50)} = 38 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_e = 15 \cdot 38 \cdot \frac{25,8}{20,2} = 730 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma'_e = 15 \cdot 38 \cdot \frac{16,2}{20,2} = 456 \text{ kg/cm}^2.$$

Kontrolle: $D_b = 38,0 \cdot \frac{20,2}{2} \cdot 30 = 11500 \text{ kg}$

$$D_e = 456 \cdot 14,07 = 6400$$

zusammen 17900 kg

$$Z_e = 730 \cdot 14,07 = 10300$$

Rest 7600 = N .

c) Für die Pfosten AD bzw. BD' beträgt das größte Biegemoment im Abstand von 50 cm vom Punkt D' etwa $-3,6 \text{ mt}$ und der Normaldruck $N = +8,068 \text{ t}$. Praktischerweise wählen wir denselben Querschnitt wie für den Riegel. Zum Schlusse wären dann noch die Schubsicherheit des Riegels zu prüfen¹⁾.

d) **Pendelstütze:** Der größte Druck beträgt 9,0 t, und zwar ohne Windbelastung (siehe Abb. 327). Als Querschnitt sei gewählt 25/25 cm und $4 \text{ } \ominus \text{ } 16 \text{ mm}$, $fe = 8,04 \text{ cm}^2$

$$\sigma_b = \frac{9000}{25 \cdot 25 + 15 \cdot 8,04} = 12 \text{ kg/cm}^2$$

$$J_{\text{erf.}} = \frac{s \cdot P \cdot l^2}{\pi^2 \cdot E} = \frac{10 \cdot 9000 \cdot 600^2}{10 \cdot 140\,000} = 23\,200 \text{ cm}^4$$

$$J_{\text{vorh.}} = \frac{25^4}{12} + 15 \cdot 8,04 \cdot 10^2 = 55\,550 \text{ cm}^4.$$

e) **Der Horizontalschub** wird durch die unter dem Rahmen befindlichen Deckenbalken aufgenommen und diese müssen daher eine entsprechend verstärkte Eiseneinlage erhalten. Empfehlenswert ist es auch, einige Eisen direkt in die Deckenplatte zu verlegen und diese strahlenförmig anzuordnen. Ein klares Bild über die Verteilung und Aufbiegungen der Eisen sowie über die einzelnen Details gibt Tafel I.

¹⁾ Alle mit dem Nachweis der Schubspannungen in Verbindung stehenden Fragen behandelt erschöpfend das Büchlein: „Die Schubsicherung der Eisenbetonbalken durch abgebogene Hauptarmierung und Bügel“ von H. Schlüter, Verlag Herm. Meusser, Anzeige am Schluß.

Der durchlaufende Träger als Hauptssystem (Ermittlung von Einflußlinien für den Zweigelenrahmen mit aufgelagerten Kragarmen).

Wir kommen in diesem Kapitel zu grundlegenden Betrachtungen über ein zur Berechnung statisch unbestimmter Steifrahmen- und Bogenstellungen sehr übersichtliches und einfaches Verfahren, bei welchem der durchlaufende Träger als statisch unbestimmtes Hauptssystem zugrunde gelegt wird. Ich stütze meine Ausführungen, die sich im übrigen unserer bisherigen Be-

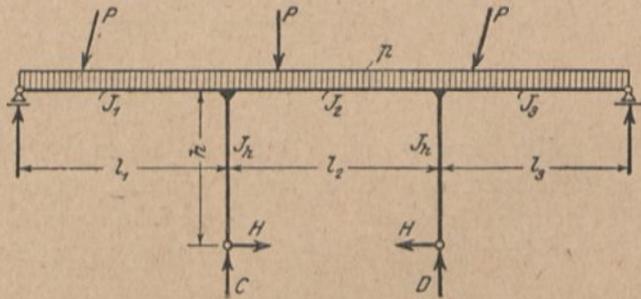


Abb. 334.

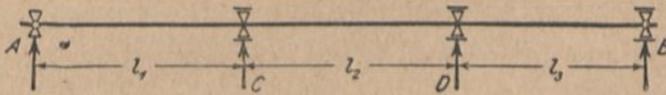


Abb. 335.

rechnungswise eng anschließen, auf die entsprechenden Veröffentlichungen von Dr.-Ing. Karl Arnstein (Beton u. Eisen 1912, Heft XIII, S. 300) und Wilh. Metzger (Beton u. Eisen 1913, Heft I, S. 20) und möchte damit zur verständnisvollen Benutzung der von Dr.-Ing. K. Arnstein in Beton u. Eisen 1913, Heft XI und XII vorgeführten einfachen Lösungswege für die Gewinnung von Einflußlinien statisch unbestimmter Steifrahmen- und Bogenstellungen über zwei, drei und vier Öffnungen, die besonders für den Brückenbau von Wert sind, beitragen¹⁾.

Das in Abb. 334 dargestellte System ist dreifach statisch unbestimmt. Legen wir den durchlaufenden Träger als Hauptsystem zugrunde (Abb. 335), was gestattet ist, sobald wir eins

¹⁾ Beachte Berichtigungen zu diesem Aufsatz in Beton u. Eisen 1916, Heft XIV/XV, S. 207.

der beiden Gelenklager der Stützen durch ein Rollenlager ersetzen, so haben wir es nur noch mit einer statisch unbestimmten Größe, nämlich dem Horizontalschub H an den Stützenfüßen zu tun, der seinerseits das Mittelfeld des durchlaufenden Trägers mit dem Momentenrechteck $M = H \cdot h$ belastet (Abb. 336), genau so als handle es sich zunächst um gleiche Belastung eines einfachen Trägers mit abhebbaren Endauflagern (Abb. 336). Wir hätten dann wie stets das gewählte Hauptsystem 1. unter dem Einfluß der Belastung P und p und 2. unter dem Einfluß der

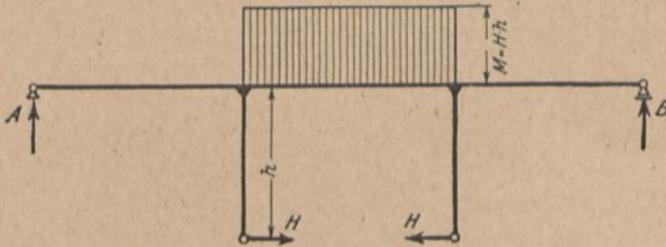


Abb. 336.

statisch unbestimmten Größe, in diesem Falle also unter dem Einfluß des von H herrührenden Momentenrechtecks zu betrachten, die zugehörigen Momente festzustellen und in Gleichung

$$L' = \int \frac{M_a \cdot M \cdot ds}{E \cdot J}$$

einzusetzen, wobei M_a wieder den Einfluß von $H = 1$, M das Gesamtmoment an jeder Stelle bezeichnet.

Die Berechnung durchlaufender Träger läuft auf die Ermittlung der Zusammenhangsmomente über den Stützpunkten hinaus (vgl. Seite 44 u. 90). Wir wollen hier auf die Bestimmung derselben, soweit die ursächliche Belastung P und p in Frage kommt, nicht weiter eingehen. Zufolge des von der statisch unbestimmten Größe herrührenden Momentenrechtecks als Belastung erhalten wir, wenn wir die durch $H = -1$ hervorgerufenen Zusammenhangsmomente über den beiden Stützen mit t_1 und t_2 bezeichnen, nach Clapeyron (Abb. 337)

$$1. \quad 2t_1 \cdot \left(\frac{l_1}{J_1} + \frac{l_2}{J_2} \right) + t_2 \cdot \frac{l_2}{J_2} = \frac{-6R_2}{J_2 \cdot l_2} = \frac{-6 \cdot h \cdot l_2^2}{J_2 \cdot l_2 \cdot 2} = \frac{-3 \cdot h \cdot l_2}{J_2}$$

$$2. \quad t_1 \cdot \frac{l_2}{J_2} + 2t_2 \cdot \left(\frac{l_2}{J_2} + \frac{l_3}{J_3} \right) = \frac{-6L_2}{J_2 \cdot l_2} = \frac{-6 \cdot h \cdot l_2^2}{J_2 \cdot l_2 \cdot 2} = \frac{-3 \cdot h \cdot l_2}{J_2}$$

Hierin sind R_2 und L_2 die statischen Momente des zu $H = -1$ gehörigen Momentenrechtecks über dem Mittelfelde bezogen auf die rechte bzw. die linke Auflagerlotrechte dieses Feldes. Wir erhalten aus den beiden Gleichungen

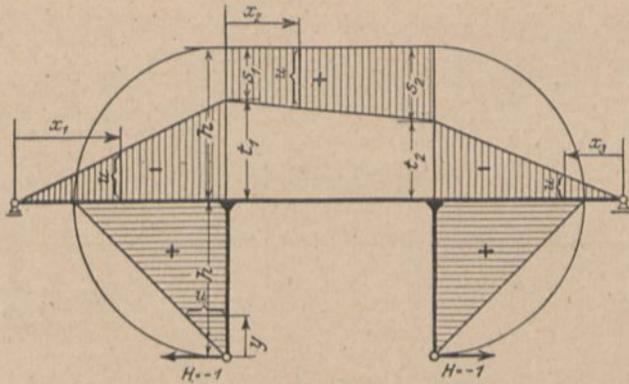


Abb. 337.

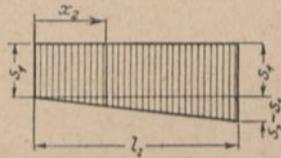


Abb. 338.

$$t_1 = \frac{3 \cdot h \cdot \frac{l_2}{J_2} \left(\frac{l_2}{J_2} + 2 \frac{l_3}{J_3} \right)}{\left(\frac{l_2}{J_2} \right)^2 - 4 \left(\frac{l_2}{J_2} + \frac{l_1}{J_1} \right) \left(\frac{l_2}{J_2} + \frac{l_3}{J_3} \right)} = \alpha \cdot h$$

$$t_2 = \frac{3 \cdot h \cdot \frac{l_2}{J_2} \left(\frac{l_2}{J_2} + 2 \frac{l_1}{J_1} \right)}{\left(\frac{l_2}{J_2} \right)^2 - 4 \left(\frac{l_2}{J_2} + \frac{l_1}{J_1} \right) \left(\frac{l_2}{J_2} + \frac{l_3}{J_3} \right)} = \beta \cdot h.$$

Abb. 337 zeigt die zur Belastung des Mittelfeldes durch das Momentenrechteck gehörige Momentenfläche des durchlaufenden Trägers. Ein Irrtum wäre es also anzunehmen, als stände nur das Mittelfeld unter dem Einfluß der statisch unbestimmten Größe H . Das System des durchlaufenden Trägers setzt voraus, daß Verschiebungen der Stützpunkte nach oben nicht stattfinden können (vgl. Seite 43); wenn daher am Balken über den Stützpunkten Momente angreifen, so müssen die Endfelder ebenso ausbiegen wie das Mittelfeld.

Die Momente M_a in unserer Hauptgleichung wären nunmehr (für $H = -1$)

$$\text{in } x_1 = -h \cdot \alpha \frac{x_1}{l_1},$$

$$\text{in } x_3 = -h \cdot \beta \frac{x_3}{l_3},$$

$$\text{in } x_2 = h - h \cdot \alpha \frac{l_2 - x_2}{l_2} - h \cdot \beta \cdot \frac{x_2}{l_2},$$

in den Stielen = y .

Bezeichnen wir nun mit η_1, η_2, η_3 die im statisch unbestimmten Hauptsystem durch die äußeren Kräfte allein an den Stellen x_1, x_2, x_3 der ersten, zweiten und dritten Öffnung hervorgerufenen Momente, so ergeben sich die endgültigen Momente

$$M = M_0 - M_a \cdot H \quad \text{zu}$$

$$M_1 = \eta_1 - H \cdot h \cdot \alpha \cdot \frac{x_1}{l_1},$$

$$M_3 = \eta_3 - H \cdot h \cdot \beta \cdot \frac{x_3}{l_3},$$

$$M_2 = \eta_2 + H \cdot h - H \cdot h \cdot \alpha \cdot \frac{l_2 - x_2}{l_2} - H \cdot h \cdot \beta \cdot \frac{x_2}{l_2}.$$

Aus der Hauptgleichung gewinnen wir bei Einsetzung dieser Werte und der Durchführung der Integration für alle fünf Stabteile einen Ausdruck für die statisch unbestimmte Größe H , der sich dann noch geometrisch deuten läßt.

Wir kommen indessen zu einer wesentlich einfacheren Lösung mit Hilfe der Einflußliniengleichung für den Horizontalschub. Wir haben bereits in den Kapiteln XI, XII und XIII, auch Kapitel XXX, S. 245 und XXXI die Berechnung von Gleichungen für die Ordinaten der Einflußlinien mit Hilfe einer wandernden Last 1 kennengelernt, verweisen aber für den vorliegenden Fall, besonders soweit derselbe eine Grundlage zur Behandlung schwierigerer Rahmen- und Bogenstellungen darstellen soll, auf den im Kapitel VI des zweiten Teiles dieses Buches¹⁾ besprochenen und aus dem in Kapitel IV desselben Teiles behandelten Maxwellschen Satze folgenden Grundsatz, daß die Biegelinie für die Größe $X = 1$ auch die Einflußlinie für die Größe X darstellt und die Durchbiegung am Angriffspunkt der Größe

¹⁾ 1. Auflage, über Neuerscheinung dieses Teils siehe Vorwort.

$X = 1$ selbst der zur Einflußlinie gehörige Reduktionsfaktor ist.

Demnach hätten wir einfach unser Gebilde mit $H = 1$ zu belasten, die zugehörigen Stützenmomente t_1 und t_2 mit Benutzung der oben entwickelten Gleichungen zu berechnen und zu der zugehörigen Momentenfläche des durchlaufenden Trägers (Abb. 337) als Belastungsfläche¹⁾ die Biegelinie rechnerisch oder zeichnerisch zu bestimmen²⁾; die Ordinaten derselben stellen dann unmittelbar für jede beliebige Last 1, multipliziert mit dem Reduktionsfaktor, den zugehörigen Horizontalschub H dar.

Wir erhalten also mit den Ordinaten der Biegelinie η und dem Reduktionsfaktor $\int u^2 \cdot \frac{ds}{J} = N^3$, (wobei wir die zu $H = 1$ gehörigen Momente mit u bezeichnen)

$$H = \frac{\sum P \cdot \eta}{N}$$

und

$$M = \mathfrak{M} - H \cdot u,$$

worin \mathfrak{M} das Moment aus dem Hauptfalle (hier der kontinuierliche Träger über drei Felder) darstellt.

Die Ordinaten der Einflußlinie η bestimmt man am einfachsten rechnerisch, wenn das Trägheitsmoment innerhalb der einzelnen Felder unveränderlich ist. Man findet für das Endfeld l_1

$$\begin{aligned} \eta &= \left(\frac{l_1 \cdot t_1}{2} \cdot \frac{1}{3} x - t_1 \cdot \frac{x}{l_1} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} \right) \frac{1}{N} \\ &= \frac{t_1 \cdot l_1^2}{6 \cdot N} \left[\frac{x}{l_1} - \left(\frac{x}{l_1} \right)^3 \right] \end{aligned}$$

¹⁾ Siehe Kapitel I des zweiten Teiles, 1. Auflage.

²⁾ Für die Konstruktion der Biegelinie oder — wenn man rechnerisch vorgehen will — Ausrechnung ihrer Ordinaten haben wir es nur noch mit drei einfachen Trägern von der Stützweite l_1, l_2, l_3 zu tun, da die Kontinuität schon in der Belastungsfläche berücksichtigt ist, für die wir die Biegelinie zeichnen oder berechnen.

³⁾ Der in Kapitel VI des zweiten Teiles (1. Auflage) mit δ_{aa} bezeichnete Reduktionsfaktor der Einflußlinie ist der uns wohlbekannte Nennerwert unserer aus der Hauptgleichung folgenden Bestimmungsgleichung für H :

$$H = \frac{\int M_0 \cdot y \cdot \frac{ds}{J}}{\int y^2 \cdot \frac{ds}{J}}$$

und der dort mit δ_{aa} oder δ_{am} für die Last 1 oder $\sum P \cdot \delta_{am}$ für mehrere Lasten P (vgl. Kapitel VIII des zweiten Teiles) bezeichnete Zählerwert gleichbedeutend mit dem Zählerwert unserer Gleichung für H .

für das Mittelfeld ebenso (vgl. Abb. 338)

$$\eta = \frac{1}{N} \left[\frac{s_1 \cdot l_2}{2} \cdot x - \frac{s_1 \cdot x^2}{2} + \frac{(s_2 - s_1) \cdot l_2}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot x - (s_2 - s_1) \cdot \frac{x}{l_2} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} \right]$$

$$= \frac{1}{N} \left[x \cdot \frac{l_2}{6} (2s_1 + s_2) - x^2 \cdot \frac{s_1}{2} + \frac{x^3}{6l_2} (s_1 - s_2) \right].$$

Die Beziehung für das Feld l_3 folgt aus jener für l_1 , wenn man t_1 durch t_2 , l_1 durch l_3 ersetzt.

Der Nenner N kann als doppeltes, auf die Stabachse bezogenes statisches Moment der zu $H = 1$ gehörigen Momentenfläche des kontinuierlichen Trägers bezogen auf seine eigene Achse sowie der Stiele auf die Gelenkachse ermittelt werden zu

$$N = \frac{1}{3} t_1^2 \frac{l_1}{J_1} + \frac{1}{3} t_2^2 \frac{l_3}{J_3} + \frac{1}{3} \frac{l_2}{J_2} (s_1^2 + s_2^2 + s_1 \cdot s_2) + \frac{2}{3} \frac{h^3}{J_h},$$

worin algebraisch addiert

$$s_1 = h + t_1$$

$$s_2 = h + t_2.$$

Das Moment u ist

im Ständer $u = y$

im Mittelfeld l_2 $u = s_1 \cdot \frac{l_2 - x}{l_2} + s_2 \cdot \frac{x}{l_2}$

im Felde l_1 $u = -t_1 \cdot \frac{x}{l_1}$

im Felde l_3 $u = -t_2 \cdot \frac{x}{l_3}$.

Beispiel:

$$l_1 = l_2 = l_3 = l$$

$$J_1 = J_2 = J_3 = J_h,$$

dann wird

$$t_1 = t_2 = t = -\frac{3}{5} h$$

$$s_1 = s_2 = s = +\frac{2}{5} h$$

$$N = 2h^2 \left(\frac{l}{5} + \frac{h}{3} \right)$$

die Ordinaten der Einflußlinie für H

im Endfeld $\eta = \frac{h}{10} \cdot \frac{l^2}{N} \left[\frac{x}{l} - \left(\frac{x}{l} \right)^3 \right]$

im Mittelfeld $\eta = \frac{h}{5N} (l \cdot x - x^2)$.

Die Einflußlinie zeigt dann etwa den in Abb. 339 dargestellten Verlauf und wird in bekannter Weise benutzt.

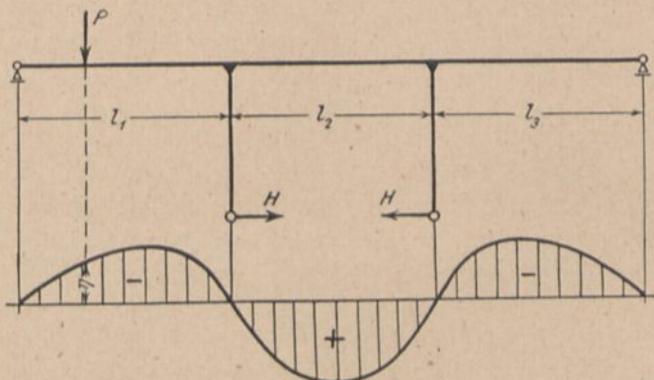


Abb. 339.

Dasselbe System mit Einspannung der Stützenfüße behandelt in anschaulicher Weise ein Aufsatz von Ing. Spiegel in der Zeitschrift „Der Brückenbau“, Heft 12, 1917, S. 91 u. f.

Kapitel XLI.

Konstruktive Einzelheiten zu den Abschnitten der mehrstieligen Rahmen.

Rahmen der in Kapitel XL behandelten Art sind hauptsächlich da in Anwendung zu bringen, wo es sich um Übertragung von Seitenkräften auf unterhalb des Balkens liegende Stützpunkte handelt, auch da, wo durch Rahmenwirkung die Verminderung der Biegemomente einer größeren Öffnung erzielt werden soll, also hauptsächlich im Brückenbau. Haben die Felder alle gleiche Länge und annähernd auch gleiche Belastung, dann wird die Verspannung der Säulen mit den Balken überhaupt zwecklos, sofern nicht Seitensteifigkeit verlangt wird; der Momentverlauf entspräche dem des durchlaufenden Trägers auf Pendelstützen. Bei mehrfeldrigen Tragsystemen genügt oft der steife Anschluß zweier Stützen, um die erforderliche Seitensteifigkeit des ganzen Systems zu erzielen.

Die biegeungsfeste Verbindung der Mittelsäulen mit dem Längsbalken erschwert naturgemäß die konstruktive Durchbildung des ganzen Systems. Je kleiner das Trägheitsmoment des Stützenquerschnittes im Verhältnis zu dem des Balkens ist, um so mehr

nähert sich die Konstruktion der Wirkung nach dem kontinuierlichen Träger auf Pendelstützen und der Balken erhält nur geringe, unter Umständen übersehbare Momente von den Stützen. Bei wachsendem Trägheitsmoment des Stützenquerschnittes tritt eine merkliche Beeinflussung der Balkenmomente ein und man erhöht durch zu steife Stützen oft in unnötiger Weise die Momente des Balkens über den Stützen¹⁾. Praktische Erwägungen werden meist die Frage der zweckmäßigsten Bauart nach dieser Richtung hin beantworten.

Bei mehrstieligen Dachkonstruktionen genügt die Verwendung von Pendelstützen meist schon aus dem Grunde, weil die Seitenkräfte schon in den Endauflagern der Rahmen übertragen werden. Dasselbe trifft für mehrstielige Hallenkonstruktionen zu und man wird dort auch nur dann steifen Anschluß der Mittelstützen herbeizuführen haben, wenn die seitliche Belastung so groß sein sollte, daß die beiden Endstützen für ihre Übertragung der Querschnittsbildung wegen nicht ausreichen.

¹⁾ Beachte hierzu die Fußnote auf Seite 90 und den zugehörigen Absatz am Schluß von Kapitel V.

Höhere Grade statischer Unbestimmtheit und ihr praktischer Wert.

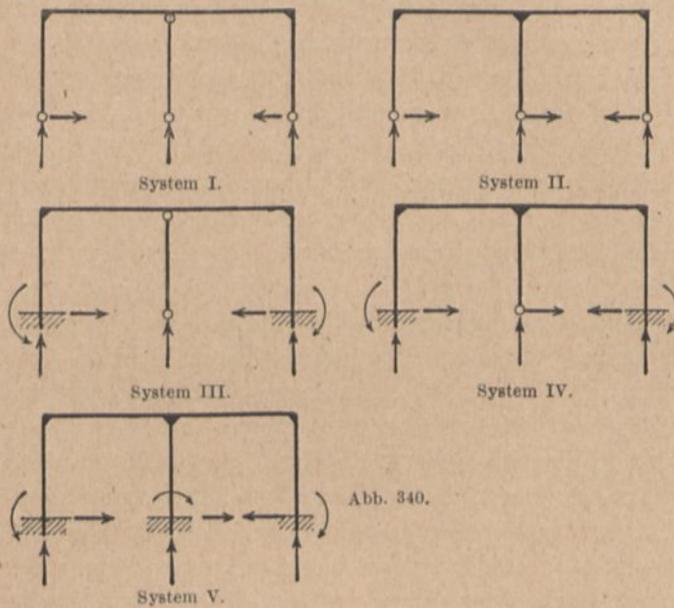
Kapitel XLII.

Der Einfluß höherer Grade statischer Unbestimmtheit auf die Stärkeverhältnisse.

In einem Aufsatz, überschrieben „Welchen Einfluß übt der Grad der statischen Unbestimmtheit eines Systems auf dessen Querschnittsbemessung aus?“¹⁾, zeigt Dipl.-Ing. Kaufmann an dem Beispiel eines dreistieligen Rahmens mit geradem Querbalken die Vorteile der Einspannung in Lagerung und Verbindung der einzelnen Rahmenstücke, soweit der Materialbedarf in Frage kommt. Es wird das Ergebnis erzielt, daß der Bedarf an Eisen für die in Abb. 340 dargestellten Systeme I bis V. sich verhält wie 100 : 90 : 94 : 86,5 : 86,5, während der Bedarf an Betonmaterial fast gleichbleibt (100 : 97,5 : 103 : 102 : 100); die Massen der Mittelstiele wurden hierbei als ohne wesentlichen Einfluß auf das Gesamtergebnis nicht berücksichtigt. Hiernach liefert der zweifach statisch unbestimmte Rahmen das ungünstigste, der fünf- und sechsfach statisch unbestimmte dagegen das günstigste Ergebnis, und zwar beträgt für den Eisenbetrag die höchste Gewichts Differenz etwa 14 %. Ganz richtig wird hinzugefügt, daß man die Ergebnisse einer für einen bestimmten Fall durchgeführten Untersuchung nicht ohne weiteres verallgemeinern darf. Der Gedanke, daß die bei dem Rahmen von geringsten Massen und von höherer statischer Unbestimmtheit erzielte Materialersparnis ganz oder teilweise durch höheren Arbeitslohn aufgehoben würde, veranlaßt den Verfasser nur zu einem Hinweis auf den monolithischen Charakter des Eisenbetons, der an sich schon die Ausbildung gelenkiger Anschlüsse erschwere. Demgegenüber ist aber zu be-

¹⁾ Beton u. Eisen 1915, Heft XVII/XVIII, S. 255.

merken, daß die Armierung an den Stellen der biegungsfesten Anschlüsse für den Konstrukteur sowohl wie in der Ausführung mehr Arbeit macht als bei gelenkigen oder gelenkähnlichen Anschlüssen.



Hinsichtlich der Belastungsart tritt der Vorteil höherer statischer Unbestimmtheit bei seitlicher Belastung stärker hervor als bei lotrechter; soweit nur Windbelastung vorliegt, erscheint eine besondere Rücksichtnahme hierauf nicht geboten.

Kapitel XLIII.

Das Erfordernis der Unterteilung größerer Rahmenwerke.

Von anderer Seite betrachtet liegen gewichtige Gründe für die Beschränkung des Grades der statischen Unbestimmtheit vor. Prof. Dr.-Ing. Saliger spricht sich hierüber in einem Aufsatz „Fugen und Gelenke im Eisenbetonbau“¹⁾ in sehr zu beherzigender Weise aus²⁾. Es wird zunächst auf die

¹⁾ Zeitschrift für Betonbau 1917, Heft 2 bis 6, auch Sonderdruck, Compaßverlag Wien IX/4.

²⁾ Nähere Einzelheiten über die zu berücksichtigenden charakteristischen Eigenschaften des Betons besprach Prof. Saliger in einem Vortrag, gehalten im Österreichischen Ingenieur- und Architekten-Verein, Bericht darüber in Deutsche Bauzeitung, Mitteilungen 1919, Nr. 7: „Ribbildung im Eisenbetonbau und ihre Beschränkung.“

durch Schwindung hervorgerufenen Eigenspannungen des Eisenbetons hingewiesen. Der Beton schwindet mit fortschreitender Erhärtung, verkürzt sich also, so daß in dem sich der Verkürzung widersetzen Eisen Druckspannungen, im Beton selbst Zugspannungen hervorgerufen werden. Die Verkürzungen durch Schwindung ($\alpha = 0,0002$ bis $0,0004$) entsprechen den Verkürzungen infolge Temperaturerniedrigungen von etwa 15 bis 35°C (vgl. Kapitel XLVI, Abschnitt III, Ziffer 5, S. 373, Z. 13 u. f.)¹⁾. Zum Vergleiche mit den bei Druckspannungen auftretenden Verkürzungen sei erwähnt, daß eine Schwindung, um $0,0002$ schon die gleiche Verkürzung hervorruft wie eine Druckspannung von 40 kg/cm^2 .

In reinen Druckgliedern würde durch diese Wirkung eine Entlastung des Betons und eine stärkere Heranziehung des Eisens, im ganzen also eine statisch günstige Wirkung hervorgerufen werden. In auf Biegung beanspruchten Bauteilen werden dagegen durch die Schwindung in der Zugzone zusätzliche Zugspannungen im Beton bei gleichzeitiger Entlastung der Eisen, in der Druckzone, wenn unbewehrt, zusätzliche Druckspannungen erzeugt werden. In der Zugzone muß also die Gefahr der Rißbildung wachsen. Wenn nur eine Seite des Querschnitts bewehrt ist, erfolgt dazu eine Krümmung des Tragteils nach der bewehrten Seite, genau wie bei einseitiger Erwärmung. Nur die Verwendung wenig schwindenden Zementes und Vermeidung unnötig fetter Mischungen erscheint als ein wirksames Gegenmittel gegen diese Eigenspannungen, wie denn überhaupt auf diese Erscheinungen im Eisenbetonbau mehr Gewicht gelegt werden sollte als auf die Erzielung außerordentlicher Festigkeiten.

¹⁾ Die neuen preußischen Bestimmungen vom 13. Jan. 1916 bringen Vorschriften über die Berücksichtigung des Schwindeinflusses in § 15, die Vorschriften über Bauten in armiertem Beton, aufgestellt von der schweizerischen Kommission des Armierten Beton am 30. April 1909 in Artikel 5. Beachte hierzu ferner die neue Verordnung betreffend Eisenbetonbauten auf den schweizerischen Bundesbahnen vom 26. Nov. 1915, Artikel 1, Ziffer d. Diese Verordnung ist in *Bet. u. Eisen* 1916, Heft II/III und IV/V näher besprochen. Bei den einzelnen deutschen Eisenbahnverwaltungen bestehen verschiedene Vorschriften über die Berücksichtigung der Wärmeschwankungen; Angaben darüber in *Arm. Beton* 1914, Heft Dezember, S. 398, rechte Spalte in dem Artikel: „Zweckmäßigkeit und Wirtschaftlichkeit des Eisenbetons bei den Bauten der Eisenbahnen“, (neuerdings unter demselben Titel herausgegeben in Buchform vom Verein Deutscher Eisenbahnverwaltungen im Verlage von C. W. Kreidel-Wiesbaden).

$$^2) \quad \varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{40}{200000}$$

Statisch unbestimmte Bauwerke unterliegen nun insbesondere den Nachteilen der Schwindung und der Wärmeänderung, weil sie sich nicht frei bewegen können; Auflagernachgiebigkeiten wären in gleichem Maße nachteilig. Die aus diesen Einflüssen entstehenden Kraftwirkungen sind aber keineswegs genau feststellbar und können — insbesondere bei Bauwerken, die dauernd den Einflüssen der Witterung ausgesetzt sind — solche Größe annehmen, daß einzelne Bauglieder praktisch unbrauchbare Abmessungen erhalten müßten.

Dieser Unsicherheitsgrad macht alle feineren Rechnungen trügerisch und führt dahin, der Einheitlichkeit der Eisenbetonbauwerke gewisse Grenzen zu setzen, die wagerechte Ausdehnung zu beschränken und den Grad der statischen Unbestimmtheit zu vermindern. Als Mittel dagegen führt Prof. Saliger Dehnfugen (Trennfugen, Bewegungsfugen, Arbeitsfugen) und Gelenke an und geht dann auf deren Verwendung des näheren ein. In Zusammenhang mit dem im Band I unter der Überschrift „Allgemeine Eigenschaften des Betons“ (Kapitel I) über die Schwinderscheinungen Gesagten sei auf die in der besprochenen Schrift vorgeschlagenen Lösungsarten zur Ausführung von Dehnfugen und Gleitlagern, auch Gerberbalken¹⁾ bei Bauwerken über 20 bis 40 m Baulänge verwiesen.

Bei rahmenartigen Bauwerken kommen Dehnfugen hauptsächlich für die Balken, Gelenke vornehmlich in Säulen und Bogenträgern zur zweckmäßigsten Verwendung.

Bei Anlage von Dehnfugen in Balken auf mehreren Stützen wird elastische Nachgiebigkeit der Stützen gefordert, damit diese nicht die Wirksamkeit der Dehnfugen verhindern. Wenn zu dem Zweck die Ausführung der Stützen als Federsäulen in der Längsrichtung des ganzen Bauwerkes empfohlen wird, die nur geringen oder jedenfalls nur den gerade nötigen Biegungswiderstand in der Längsrichtung bieten, so führt das ganz von selbst zu Voraussetzungen, die eine Herabsetzung des Grades der statischen Unbestimmtheit in der Rechnung gestatten. Bei Ausführung der Stützen 1 und 4 des in Abb. 341 dargestellten vierstieligen Rahmensystems z. B. als Federsäulen (schmaler Querschnitt in Richtung der

¹⁾ Beachte das darüber in Kapitel I Gesagte.

Länge) ist die Annahme gestattet, daß sämtliche Horizontalkräfte von den verhältnismäßig stärker auszubildenden Stützen 2 und 3 übertragen werden, wodurch der Grad der statischen Unbestimmtheit von $4 \cdot 3 - 3 = 9$ fach auf $2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 - 3 = 5$ fach herabgesetzt wird. In vollkommenster Weise würde diesen statischen Voraussetzungen allerdings erst durch Ausführung von Pendelsäulen an Stelle von Federsäulen entsprochen werden (Abb. 342);

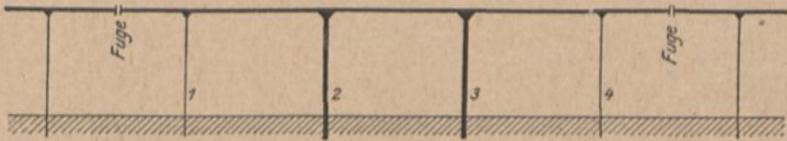


Abb. 341.

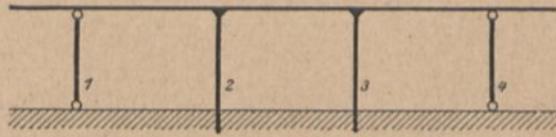


Abb. 342.

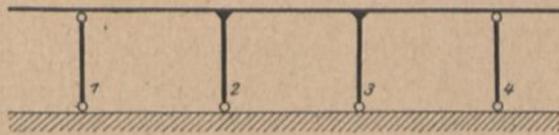


Abb. 343.

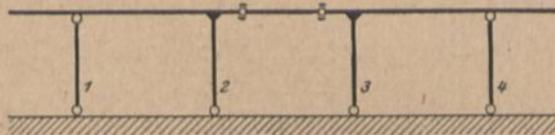


Abb. 344.

diese brauchten sich dann von den beiden mittleren Säulen den Stärkeverhältnissen nach nicht zu unterscheiden, was dem Gesamtbild förderlicher sein würde.

Eine weitere Herabsetzung des Grades der statischen Unbestimmtheit brächte gelenkige Ausbildung der Stützenfüße 2 und 3 (Abb. 343); es genügt dann meist immer noch die biegungsfeste Verbindung der Säulenköpfe 2 und 3 mit dem Balken, um die erforderliche Steifigkeit in der Längsrichtung des ganzen Tragwerkes zu erzielen. Bei Ausführung zweier Gelenklager (etwa Tangentialkipplager) im Balkenfelde zwischen den Säulen 2 und 3 würde schließlich im Bedarfsfalle die statische Unbestimmtheit

gänzlich aufgehoben werden können und dem System nach ein Gerberbalken entstehen (Abb. 344). Auf ein praktisches Beispiel dieser Art ist in der Fußnote 1 auf Seite 14 hingewiesen.

Bei niedrigen und vielleicht auch noch durch hohe Seitenbelastung in Anspruch genommenen Stützen, also Stützen mit stärkerem Querschnitt, wären die Fugen in verhältnismäßig größerer Anzahl vorzusehen, sodaß bei solchen Bauwerken die Herabsetzung des Grades der statischen Unbestimmtheit immer leicht erzielt werden kann:

Über die verschiedenen Möglichkeiten für die Unterteilung schwierigerer Rahmengebilde durch Gelenke ist schon in den Kapiteln XVI und XXXIII berichtet. Die dort behandelten Gesichtspunkte decken sich also mit den infolge der Schwinderscheinungen zu nehmenden Rücksichten. Mangelhafte Durcharbeitung eines Entwurfes in dieser Richtung fällt jedenfalls für den guten Bestand eines Bauwerkes viel schwerer ins Gewicht als ein Rechenfehler oder Irrtum in der Belastungsannahme, denen zum Ausgleich immer der Sicherheitsgrad in der Ausnutzung der Festigkeiten gegenübersteht.

Die besprochenen rein baulichen Anforderungen haben eine mehr oder weniger große Herabsetzung des Grades der statischen Unbestimmtheit zur Folge und kommen damit dem Streben nach einer Vereinfachung der Rechnung in dem erwünschten Maße entgegen. Gegenüber der in fast allen Fällen bestehenden großen Unsicherheit über die Größe der Nutzlast erscheinen jedenfalls allzu umständliche und peinliche Kräfte- und Spannungsermittlungen zwecklos. Leider werden sie aus formellen Gründen oft zu sehr in den Vordergrund gestellt und dabei die Rücksichten auf den guten Bestand des Bauwerkes übersehen.

Über die Ausbildung in Rede stehender Gelenke sind schon in Kapitel XVI Angaben gemacht und es wird im Zusammenhang damit noch auf die Abb. 13, 14 und 15 verwiesen¹⁾. Eine Gelenkausbildung nach Abb. 14 kann durch Verringerung der Betonberührungsflächen auf etwa ein Drittel der Breite und weniger noch vervollkommnet werden (Abb. 345). Betongelenksteine nach

¹⁾ Über die Spannungsverteilung, Berechnung und Wirkungsweise von Flächenlagern, Bleigelenken, Kipplagern und Wälz Gelenken — auch in ihrer Anwendung im Betonbau — siehe Dr.-Ing. A. Kollmar, Auflager und Gelenke.

Abb. 13 sind für gelenkig zu lagernde Säulen und Gewölbe ein vorzügliches Konstruktionsmittel. Die bauliche Durchbildung muß jedenfalls den rechnerischen Voraussetzungen so gut wie möglich entsprechen.

Unter Ziffer 5 des Abschnittes III Kapitel XLVI ist darauf hingewiesen, daß sich das Schwinden des Betons kurz nach dem Abbinden vollzieht; es wächst dann noch mit fortschreitender Erhärtung und erreicht gewisse Höchstwerte. Je schneller daher ein Bauwerk in einem Guß zur Ausführung gelangen wird, um so mehr werden sich die Einflüsse der Schwindung geltend machen. Würde ein Bauwerk während längerer Zeit in einzelnen Stücken zur Ausführung gebracht werden können, so wäre der Entstehung von Schwindspannungen vorgebeugt, da es sich immer nur um kurze Schwindlängen handelte und die Schwindung eigentlich erst im abgeschlossenen Bauteil zur Wirkung gelangen kann. Stückweise und langsame Herstellung widersprechen jedoch der ganzen

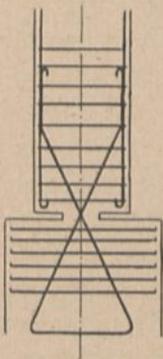


Abb. 345.

Eigenart des Eisenbetons; es wird sogar meist besonderer Wert auf schleunigste Herstellung gelegt werden und diese ist auch — soweit nicht allzu große Betonmassen für ein bestimmtes Bauwerk erforderlich sind wie im Brückenbau — im allgemeinen leicht erzielbar und bringt die Herstellung ganzer Bauteile in einem Stück mit sich. In der Regel werden bei Rahmenwerken zuerst die Säulen, Pfosten oder Stützen betoniert und dann in einem Zuge die Riegel, Balken oder Bögen. Diese Ausführungsweise bringt eine fast gleichzeitige Schwindung des oberen Rahmenabschlusses auf seine ganze Länge mit sich und muß zu erheblichen Schwindspannungen führen, wenn die lotrechten Bauglieder, mit welchen die Riegel in feste Verbindung gebracht werden, nicht nachgiebig genug gelagert sind, wie das bei fester Einspannung der Fall ist.

Zum Schluß sei auf die zahlreichen Ausführungsbeispiele, die Prof. Saliger seinen Ausführungen folgen läßt, nachdrücklichst verwiesen. Weitere Beispiele hierzu bringt „Beton u. Eisen“ 1916, Heft II/III, S. 26 (Rahmen eines Lokomotivschuppens von 21,0 m Spannweite mit Fußgelenken und Pendelsäule in der Mitte); Heft II/III, S. 38 (Rahmenbrücke von 85 m Spannweite mit Fußgelenken und zwei Pendelsäulen).

Daß bei der Unterteilung eines größeren Rahmenwerkes die

Gelenkstellen nicht an die Knotenpunkte des Systems gebunden zu sein brauchen, zeigt die Ausführungsart einer Eisenbahnwagenwerkstätte in Greifswald. Hier wurden in dem vorliegenden vier-schiffigen Hallenbau (Abb. 346) in der Querrichtung vier Fugen derart angeordnet, daß sowohl die Dachhaut als auch die Binder der beiden mittleren Felder in etwa $\frac{1}{4}$ bzw. $\frac{3}{4}$ der Spannweite durchschnitten werden. Auf diese Weise ergeben sich statisch zwei seitliche Steifrahmen mit einseitigen Kragarmen, ein mittlerer Stiel mit beiderseitigen Konsolen und zwei eingehängte frei aufliegende Träger. In der Längsrichtung der 103 m langen Halle

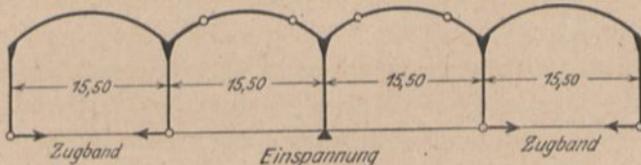


Abb. 346.

wurden zwei Fugen dadurch geschaffen, daß die Dachdecke unmittelbar vor dem Binder mittels einer Pappeinlage von diesem isoliert wurde und die Dachpfetten auf Konsolen, die von den Bindern auskragen, aufgelegt wurden. Besondere Veranlassung für diese Unterteilung war — abgesehen von der großen Ausdehnung des Bauwerkes — die Lage der Halle, welche sie den unmittelbaren Einflüssen der Rauchgase, des Windes und der Sonnenstrahlen aussetzte, alles Faktoren, die den Schwinderscheinungen Vorschub leisten. (Nähere Beschreibung Monatschrift Arm. Beton 1914, Heft 2, S. 57.)

Bogendächer¹⁾.

Kapitel XLIV.

Einleitung.

Das Kapitel hat hauptsächlich den Zweck, dem Leser den Zusammenhang des im Handbuch für Eisenbetonbau, Bd. IV, 1. Teil, 1. Aufl. gegebenen Abschnittes über Bogendächer mit den Ergebnissen der Abschnitte über Zweigelenkrahmen und eingespannte einfache Rahmen darzulegen. Es ist das Wichtigste hervorgehoben mit den notwendigen Ergänzungen (Mitberücksichtigung der Normalkräfte, einseitige Erwärmung, Zugstangen-

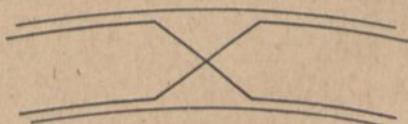


Abb. 347.

dehnung). Das Kapitel mag besonders dazu angetan sein, zu zeigen, daß man bei Bogendächern praktischerweise eine allzu genaue Berechnung entbehren kann.

Es handelt sich in der Regel um Bauwerke mit aufgenommenem Schub, da man den aufstrebenden Wänden keine Horizontalbelastung zumuten kann. Die Bögen sind mit ihren Auflagern entweder fest verbunden (bei ganzen Eisenbetonbauten) oder ruhen nur einfach auf den Wänden auf (Unterbau in Mauerwerk). Zu unterscheiden sind Zweigelenkbogen und eingespannte Bogen. Letztere kommen mehr bei ganzen Eisenbetonbauten in Betracht. Dreigelenkbogen werden für Dächer selten ausgeführt. Gegebenenfalls können die Gelenke in der Betonkonstruktion durch Einziehen der Eisen zum Ausdruck gebracht werden (Abb. 347).

Abgesehen von dem Gesagten:

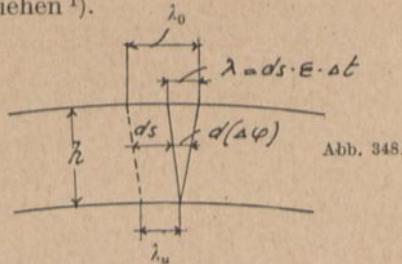
Einteilung in glatte Bogendächer mit steifen oder schlaffen Eiseneinlagen und in Rippenbogendächer.

¹⁾ Vgl. auch Müller-Breslau, Graphische Statik Band II, 2. Abteilung, S. 503.

A. Glatte Bogendächer.

Der flache Zweigelenbogen mit Zuggurt.

In Kapitel VII hatten wir Formeln für den Schub eines beliebig geformten Zweigelenkrahmens abgeleitet, und zwar unterschieden wir drei Schubanteile: infolge Belastung, Temperaturänderung und Lagerverschieblichkeit. Den Einfluß der Normal- und Querkräfte hatten wir im Laufe der Rechnung als unbedeutend vernachlässigt. Der Ausschluß der Normalkräfte bei der Bestimmung der statisch unbestimmten Größen wird nun aber bei Zweigelenkrahmen, die infolge Wegfallens der Stiele schließlich zu Zweigelenkbogen geworden sind, nicht mehr zulässig sein, wenn wir einen genaueren Nachweis liefern wollen. Wir müssen also die Normalkräfte wieder in die Grundgleichung einbeziehen¹⁾.



Als neues Glied unserer Arbeitsgleichung tritt noch die

Berücksichtigung ungleichmäßiger Erwärmung²⁾

des Gewölbes zwischen Ober- und Unterkante hinzu.

Es bedeute ds ein kleines Bogenelement (Abb. 348), welches unter dem Einfluß ungleichmäßiger Temperatur die obere Länge λ_0 und die untere Länge λ_u angenommen haben möge. Ist die obere Temperatur um Δt größer als die untere, so ergibt sich die Mehrverlängerung (oder Mehrverkürzung) der oberen Faser zu:

$$\lambda = ds \cdot \varepsilon \cdot \Delta t.$$

λ ruft also eine Veränderung der Winkelstellung der einzelnen Elemente zueinander hervor, und die Winkel betragen

$$d(\Delta\varphi) = \frac{ds \cdot \varepsilon \cdot \Delta t}{h}.$$

¹⁾ Nach dem im Absatz „Angezeigtheit der Berücksichtigung der Längskräfte“ (Seite 244) Dargelegten kommt diese Berücksichtigung praktisch erst bei eingespannten Gewölben in Betracht.

²⁾ Vorschriften über die Berücksichtigung der Wärmeunterschiede in § 15 der Bestimmungen vom 13. Jan. 1916.

Dieser Winkel $d(\Delta\varphi)$ bedeutet also die wirkliche äußere Veranlassung für das Zustandekommen einer weiteren Verdrehung des Querschnittes, genau so wie früher in der Ableitung für die Grundgleichung das im Stabe wirkende wirkliche Biegemoment wirksam gedacht war. Wir erhielten früher mit

$$d(\Delta\varphi) = \frac{M \cdot ds}{E \cdot J} : \int \frac{M_a \cdot M \cdot ds}{E \cdot J},$$

erhalten also sinngemäß für das Temperaturglied:

$$\int \frac{M_a \cdot \varepsilon \cdot \Delta t \cdot ds}{h}.$$

Es lautet nun die vollständige Gleichung:

$$L' = \int \frac{M_a \cdot M \cdot ds}{E \cdot J} + \int \frac{N_a \cdot N \cdot ds}{E \cdot F} + \int \frac{M_a \cdot \varepsilon \cdot \Delta t \cdot ds}{h} + \int N_a \cdot \varepsilon \cdot t \cdot ds$$

(vgl. Handbuch IV, 1. Teil, 1. Aufl., S. 426).

Hierin bedeutet:

L' = virtuelle Arbeit der Auflagerkraft, bei Verlängerung = negativ. Nach Früherem $L' = -1 \cdot \Delta l = -\Delta l$, d. h. die gedachte Kraft 1 durchläuft den wirklichen Weg entgegengesetzt zu ihrem Richtungssinn. Dieser Weg Δl entsteht nun bei Vorhandensein einer Zugstange: 1. durch die elastische Verlängerung derselben infolge der einwirkenden Kraft H , 2. infolge der Temperaturexpansion der Stange. Wir erhalten somit mit dem Zeiger 0 für die Werte der Zugstange

$$L' = -\Delta l = -\frac{H \cdot l}{E_0 \cdot F_0} - \varepsilon_0 \cdot t_0 \cdot l.$$

ε = Wärmeausdehnungszahl des Bogens.

t = Temperaturzunahme im Bogen.

Δt = Temperaturunterschied zwischen der oberen und unteren Faser des Bogens.

Nähere Erläuterung der im Handbuch IV gegebenen Gleichungen.

Aus der allgemeinen Arbeitsgleichung ergibt sich

$$H = \frac{\int \frac{M_0 \cdot y \cdot dx}{E \cdot J} - \varepsilon_0 \cdot t_0 \cdot l + \int \frac{\varepsilon \cdot \Delta t}{h} \cdot y \cdot dx + \int \varepsilon \cdot t \cdot dx}{\int \frac{y^2 \cdot dx}{E \cdot J} + \int \frac{dx}{E \cdot F} + \frac{l}{E_0 \cdot F_0}}$$

Es bedeuten die Nennergrößen:

5 = Einfluß der Form des Bogens,

6 = Einfluß der Normalkräfte,

7 = Einfluß der elastischen Nachgiebigkeit der Zugstange.

Während diese drei Nennergrößen bei genaueren Berechnungen stets zu berücksichtigen sind, können wir mit Hilfe derselben den Horizontalschub aus vier verschiedenen Anlässen darstellen, entsprechend den vier Zählergliedern:

1 = Einfluß der eigentlichen Belastung (statisch bestimmtes Hauptsystem, einfacher Balken),

2 = Einfluß einer Temperaturzu- oder -abnahme in der Zugstange,

3 = Einfluß ungleichmäßiger Erwärmung,

4 = Einfluß gleichmäßiger Erwärmung des Bogens.

Der aus der Belastung des Gewölbes allein sich ergebende Horizontalschub ist somit durch $\frac{\text{Zählerglied 1}}{\text{ganzen Nenner}}$ dargestellt.

Es ist nun für Bogendächer die Annahme eines konstanten E , F und J zulässig, und wir erhalten deshalb nach Herausheben von $E \cdot J$ im Zähler und Nenner und Kürzung dieses Faktors und ferner mit $\int dx = l$

$$H = \frac{\int M_0 \cdot y \cdot dx}{\int y^2 \cdot dx + \frac{J}{F} \cdot l + \frac{E \cdot J}{E_0 \cdot F_0} \cdot l}$$

a) für eine gleichmäßige Belastung g

(Abb. 349) ist das Moment an beliebiger Stelle des einfachen Balkens

$$M_x = \frac{g \cdot l}{2} \cdot x - \frac{g \cdot x^2}{2};$$

somit ergibt sich das Zählerglied zu

$$\int_0^l \left(\frac{g \cdot l}{2} \cdot x \right) \cdot y \cdot dx - \int_0^l \left(\frac{g \cdot x^2}{2} \right) \cdot y \cdot dx$$

oder

$$\frac{g \cdot l}{2} \cdot \underbrace{\int_0^l x \cdot y \cdot dx}_{\text{stat. Mom.}} - \frac{g}{2} \cdot \int_0^l x^2 \cdot y \cdot dx.$$

Wählt man nun noch die Bogenachse parabolisch nach der Gleichung $y = \frac{4 \cdot f}{l^2} \cdot (l \cdot x - x^2)$ (Abb. 350), so folgt

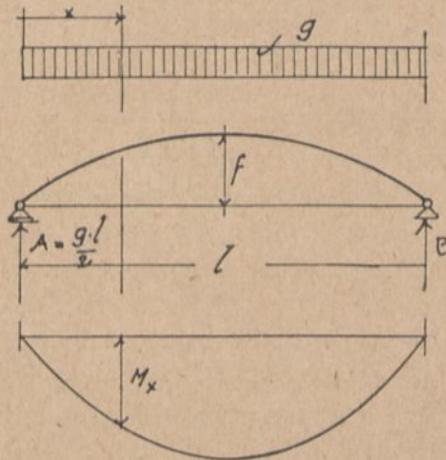


Abb. 349.

$$\begin{aligned} \int_0^l M_0 \cdot y \cdot dx &= \frac{g \cdot l}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot l \cdot f \cdot \frac{l}{2} - \frac{g}{2} \cdot \int_0^l x^2 \cdot \frac{4 \cdot f}{l^2} \cdot (l \cdot x) \cdot dx \\ &+ \frac{g}{2} \cdot \int_0^l x^2 \cdot \frac{4 \cdot f}{l^2} \cdot (x^2) \cdot dx \\ &= \frac{g \cdot l^3 \cdot f}{6} - \frac{g}{2} \cdot \frac{4 \cdot f}{l^2} \cdot l \cdot \frac{l^4}{4} + \frac{g}{2} \cdot \frac{4 \cdot f}{l^2} \cdot \frac{l^5}{5} \end{aligned}$$

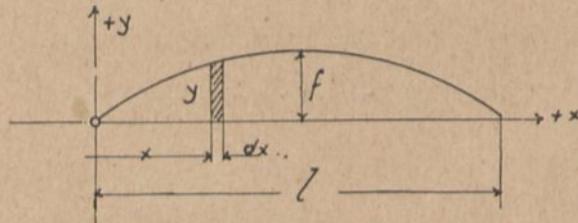


Abb. 350.

und mit dem Generalnenner 30

$$\int_0^l M_0 \cdot y \cdot dx = \frac{g \cdot f \cdot l^3}{15};$$

ebenso das erste Nennerglied

$$\int_0^l y^2 \cdot dx = 2 \cdot \mathfrak{C}$$

(vgl. Kapitel XIV), nach Abb. 350

$$= 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot l \cdot f \cdot \frac{2}{5} \cdot f = \frac{8}{15} \cdot l \cdot f^2$$

und so ergibt sich schließlich

$$H_g = \frac{\frac{g \cdot f \cdot l^3}{15}}{\frac{8}{15} \cdot l \cdot f^2 + \frac{J}{F} \cdot l + \frac{E \cdot J}{E_0 \cdot F_0} \cdot l}$$

und mit $E_0 : E = n$

$$H = \frac{g \cdot l^2}{8 \cdot f} \cdot \frac{1}{1 + \frac{15}{8 \cdot f^2} \cdot \frac{J}{F} \left(1 + \frac{F}{n \cdot F_0}\right)}$$

$$H_g = \frac{g \cdot l^2}{8 \cdot f} \cdot \lambda.$$

Wie im Handbuch gezeigt wird, liegt für die in der Regel vorkommenden Werte von l und f der Koeffizient λ ganz nahe bei 1, so daß

$$H_g = \frac{g \cdot l^2}{8 \cdot f}$$

(vgl. früher).

Das Biegemoment infolge gleichmäßiger Belastung (Abb. 351) ist allgemein

$$\begin{aligned} M_g &= \frac{g \cdot l}{2} \cdot x - \frac{g \cdot x^2}{2} - \frac{g \cdot l^2}{8 \cdot f} \cdot \lambda \cdot \overbrace{\frac{4 \cdot f}{l^2} \cdot (l \cdot x - x^2)}^y \\ &= \frac{g \cdot l}{2} \cdot x - \frac{g \cdot x^2}{2} - \frac{g}{2} \cdot \lambda \cdot (l \cdot x - x^2) \\ &= \frac{g}{2} \cdot (l \cdot x - x^2) - \frac{g}{2} \cdot (l \cdot x - x^2) \cdot \lambda \\ &= \frac{g}{2} \cdot (l \cdot x - x^2) \cdot (1 - \lambda). \end{aligned}$$

Bildet man den Differentialquotienten

$$\frac{dM_g}{dx} = \frac{g}{2} \cdot (1 - \lambda) \cdot (l - 2x)$$

und setzt diesen = 0, so folgt

$$l = 2x, \text{ also } x = \frac{l}{2},$$

d. h. das größte Moment liegt in der Mitte, was nach Früherem als bekannt vorauszusetzen war, und es beträgt:

$$\begin{aligned} M_g^s &= \frac{g}{2} \cdot \left(l \cdot \frac{l}{2} - \frac{l^2}{4} \right) \cdot (1 - \lambda) \\ &= \frac{g \cdot l^2}{8} \cdot (1 - \lambda), \end{aligned}$$

ist also an sich nahezu = 0, da $\lambda \cong 1$.

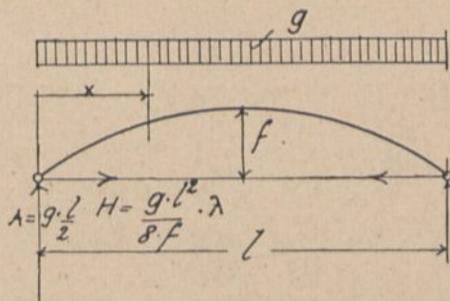


Abb. 351.

Im Bogenviertel beträgt das Moment — ebenso abgeleitet —

$$M_g = \frac{3}{32} \cdot g \cdot l^2 \cdot (1 - \lambda),$$

ist also noch etwas geringer als im Scheitel.

Man braucht demnach, wenn man λ überhaupt = 1 setzt, die Momente infolge Eigengewicht an keiner Stelle zu berücksichtigen und beachte nur

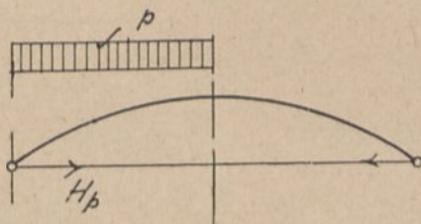


Abb. 352.

b) die halbseitige Belastung mit Nutzlast

(Abb. 352).

Diese liefert, wie leicht verständlich sein wird,

$$H_{\frac{p}{2}} = \frac{p \cdot l^2}{16 \cdot f} \cdot \lambda,$$

und es entsteht das größte bzw. das kleinste Biegemoment in $\frac{l}{4}$, was sich in derselben Weise wie vor leicht ableiten läßt.

Die Momente betragen auf der belasteten Seite

$$\max M_{\frac{p}{2}} = + \frac{4 - 3\lambda}{64} \cdot p \cdot l^2$$

und auf der unbelasteten Seite

$$\max M_{\frac{p}{2}} = - \frac{3\lambda - 2}{64} \cdot p \cdot l^2.$$

Da λ stets nur wenig kleiner als 1 ist, so kann man hierfür ohne weiteres schreiben

$$\max M_{\frac{p}{2}} = \infty \pm \frac{p \cdot l^2}{64}.$$

Das Scheitelmoment beträgt

$$M_{\frac{p}{2}}^s = + (1 - \lambda) \cdot \frac{p \cdot l^2}{16}.$$

Weitere Berücksichtigungen etwa halbseitiger oder ganzseitiger parabolischer Belastung infolge Stärkerwerden des Bogens nach den Auflagern zu siehe Handbuch.

e) Temperaturzunahme.

Im Bogen t und im Zuggurt t_0 Grad, ferner $\varepsilon = \varepsilon_0$.

Wie die erste allgemeine Gleichung für H zeigt, ist der Einfluß einer gleichmäßigen Temperaturzunahme im Bogen positiv für H , während der Einfluß einer gleichmäßigen Erwärmung der Zugstange um t_0 Grad negativ für H ist. Es erscheinen also diese beiden Einflüsse in entgegengesetzter Wirkung, und wir erhalten allgemein

$$H_{t-t_0} = \frac{\int_0^l \varepsilon \cdot t \cdot dx - \varepsilon_0 \cdot t_0 \cdot l}{\int \frac{y^2 \cdot dx}{E \cdot J} + \int \frac{dx}{E \cdot F} + \frac{l}{E_0 \cdot F_0}},$$

für $\varepsilon = \varepsilon_0$, und mit dem schon oben aufgelösten Nenner

$$H_{t-t_0} = \frac{\varepsilon \cdot l \cdot (t - t_0)}{\frac{8}{15} \frac{f^2 \cdot l}{E \cdot J} + \frac{l}{E \cdot F} + \frac{l}{E_0 \cdot F_0}}.$$

Nach weiterer Umformung erhält man schließlich

$$H_{t-t_0} = \lambda \cdot \frac{15}{8} \cdot \frac{E \cdot J}{f^2} \cdot \varepsilon \cdot (t - t_0).$$

Das größte Temperaturmoment tritt bei gleichmäßiger sowohl wie bei ungleichmäßiger Erwärmung im Scheitel auf.

Die weiteren Angaben darüber siehe Handbuch IV, S. 430.

Zum ganzen Kapitel vgl. noch besonders die Tabelle für den flachen Zweigelenkbogen, Handbuch IV, S. 431. Anschließend daran sind auch noch einige Angaben über den Zweigelenkbogen mit Zuggurt gemacht.

Die Einflußlinien für den Horizontalschub des Zweigelenkbogens¹⁾.

Die Ordinaten sind nach der Gleichung $H = \frac{3}{4} \cdot \frac{a \cdot b}{f \cdot l} \cdot \lambda \cdot 1$ zu berechnen, wobei $P = 1$ (Abb. 353),

$$\lambda \text{ wie früher} = \frac{1}{1 + \frac{15}{8 \cdot f^2} \cdot \frac{J}{F} \cdot \left(1 + \frac{F}{n \cdot F_0}\right)}.$$

Hat man nur wenige verschiedene Laststellungen P , so kann man auch die Zeichnung der Einflußlinie entbehren. Wird der Einfluß von λ vernachlässigt, so erhalten wir H ebenso groß wie für den Dreigelenkbogen.

Beispiel: Ein Wölbdach mit dem Binderquerschnitt Abb. 354 erhalte die in Abb. 355 angedeutete Belastung

$$F = 30 \cdot 40 + 10 \cdot 1,767 \cdot 15 = 1465 \text{ cm}^2$$

$$J = \frac{30 \cdot 40^3}{12} + 15 \cdot 17,67 \cdot 18^2 = 246000 \text{ cm}^4$$

$$\frac{J}{F} = \frac{246000}{1465} = 168 \text{ cm}^2.$$

Dann ist

$$\lambda = \frac{1}{1 + \frac{15}{8 \cdot 285^2} \cdot 168 \left(1 + \frac{1465}{15 \cdot 19,64}\right)} = \frac{1}{1,0232},$$

wobei eine Zugstange von 50 mm $\varnothing = 19,64 \text{ cm}^2$ Querschnitt gewählt wurde,

$$H = \frac{3}{4} \cdot \frac{a \cdot b}{f \cdot l} \cdot P \cdot \frac{1}{1,0232}$$

¹⁾ Nach Müller-Breslau, „Die neueren Methoden“, 4. Aufl., S. 191.

vereinfacht

$$H = P \cdot \frac{3 \cdot a \cdot (14 - a)}{4 \cdot 2,85 \cdot 14} \cdot \frac{1}{1,0232}$$

oder

$$H = \frac{P \cdot a \cdot (14 - a)}{54,3}$$

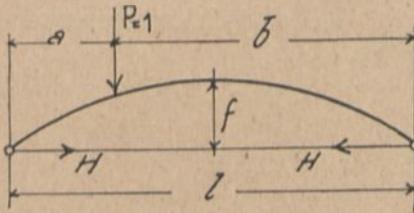


Abb. 353.

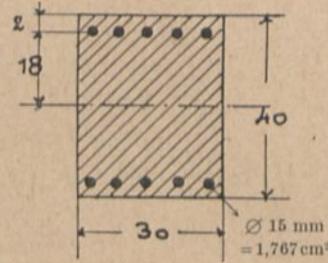


Abb. 354.

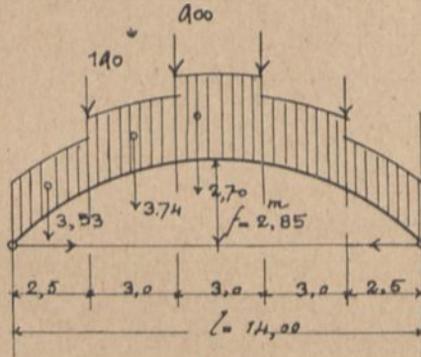


Abb. 355.

Wir erhalten somit

$$H = \frac{2}{54,3} \cdot (3530 \cdot 1,25 \cdot 12,75 + 190 \cdot 2,5 \cdot 11,5 + 3740 \cdot 4,0 \cdot 10,0 + 900 \cdot 5,5 \cdot 8,5 + 2700 \cdot 6,25 \cdot 7,75)$$

$$H = 14150 \text{ kg.}$$

Besonderen Vorteil bietet diese Rechnung bei unsymmetrischer Belastung. Mit Hilfe der H -Linie (für $P = 1$) können dann auch leicht die Einflußlinien für die Biegemomente in bestimmten Punkten der Achse konstruiert werden.

Zu beachten ist, wie wenig sich λ von 1 unterscheidet, so daß der einfache Berechnungsgang nach Kapitel XIII vollauf genügt hätte.

Der flache gelenklose Bogen.

Der flache gelenklose Bogen kann auch für Dachkonstruktionen nur als Grundsystem vorausgesetzt werden, wenn wirklich völlige Einspannung vorhanden ist. Bei größeren Spannweiten ist die Annahme einer Einspannung in den Traufbalken unrichtig, besonders wenn diese ihrerseits wieder weit gespannt sind, also einer Drehung unterliegen.

Die Bestimmungsgleichungen der drei statisch unbestimmten Größen.

Der gelenklose Bogen ist zunächst kein anderes statisches Gebilde als der früher behandelte eingespannte Rahmen (Kapitel XXV u. f.). Bei flachen Bogendächern sind aber in der allgemeinen Arbeitsgleichung, wie beim flachen Zweigelenkbogen schon gezeigt wurde, noch besonders die Normalkräfte, Nachgiebigkeit der Zugstange, gleichmäßige und ungleichmäßige Erwärmung des Gewölbes zu berücksichtigen. Die allgemeine Arbeitsgleichung lautet demnach genau so wie beim Zweigelenkrahmen:

$$L' = \int \frac{M_a \cdot M \cdot ds}{E \cdot J} + \int \frac{N_a \cdot N \cdot ds}{E \cdot F} + \int \frac{M_a \cdot \epsilon \Delta t \cdot ds}{h} + \int N_a \cdot \epsilon \cdot t \cdot ds.$$

Alles, was beim eingespannten Rahmen gesagt worden ist, hat hier dieselbe Gültigkeit. Wir haben nur neu die oben angedeuteten Einflüsse zu berücksichtigen, und es lautet damit die Arbeitsgleichung

$$L' = -X \cdot \frac{l}{E_0 \cdot F_0} - \epsilon_0 \cdot t_0 \cdot l = - \int \frac{M_0 \cdot y}{E \cdot J} \cdot ds + X \cdot \int \frac{y^2 \cdot ds}{E \cdot J} \\ + Y \cdot \int \frac{x \cdot y \cdot ds}{E \cdot J} - Z \cdot \int \frac{y \cdot ds}{E \cdot J} + X \cdot \int \frac{ds}{E \cdot F} - \int \epsilon \cdot t \cdot ds - \int \frac{\epsilon \cdot \Delta t}{h} \cdot y \cdot ds.$$

In gleicher Weise lassen sich die beiden noch fehlenden Gleichungen L'' und L''' anschreiben.

Bezeichnet 0 den Schwerpunkt des mit den Gewichten $\frac{1}{E \cdot J}$ belastet gedachten Bogens (Abb. 356), so werden nach Früherem die Glieder

$$\int \frac{x \cdot y \cdot ds}{E \cdot J}, \quad \int \frac{x \cdot ds}{E \cdot J}, \quad \int \frac{y \cdot ds}{E \cdot J}$$

wieder = 0, und wir erhalten unter der zulässigen Annahme (für Bogendächer) eines konstanten mittleren E und J ,

wodurch dann der Angriffspunkt der drei Kräfte identisch mit dem Schwerpunkt der Bogenachse wird, wie früher:

$$X = \frac{\int \frac{M_0 \cdot y \cdot ds}{E \cdot J} - \varepsilon_0 \cdot t_0 \cdot l + \int \varepsilon \cdot t \cdot ds}{\int \frac{y^2 \cdot ds}{E \cdot J} + \int \frac{ds}{E \cdot F} + \frac{l}{E_0 \cdot F_0}}$$

$$Y = \frac{\int \frac{M_0 \cdot x \cdot ds}{E \cdot J}}{\int \frac{x^2 \cdot ds}{E \cdot J}}$$

$$Z = - \frac{\int \frac{M_0 \cdot ds}{E \cdot J} + \int \frac{\varepsilon \cdot \Delta t \cdot ds}{h}}{\int \frac{ds}{E \cdot J}}$$

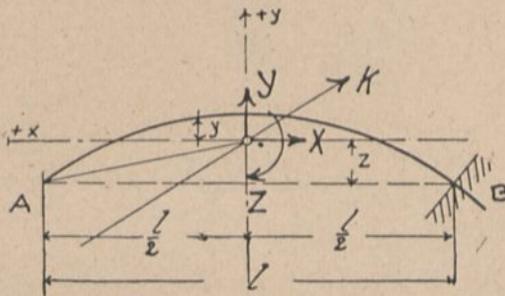


Abb. 356.

Wenn wir es nun zum Ausdruck bringen, daß E und J , F , t und Δt konstant sind, dann lauten diese Gleichungen:

$$X = \frac{\int M_0 \cdot y \cdot ds - E \cdot J \cdot \varepsilon_0 \cdot t_0 \cdot l + E \cdot J \cdot \varepsilon \cdot t \cdot \int ds}{\int y^2 \cdot ds + \frac{J}{F} \int ds + \frac{E \cdot J}{E_0 \cdot F_0} \cdot l}$$

$$Y = \frac{\int M_0 \cdot x \cdot ds}{\int x^2 \cdot ds}$$

$$Z = - \frac{\int M_0 \cdot ds + E \cdot J \cdot \Delta t \cdot \varepsilon \cdot \int \frac{ds}{h}}{\int ds}$$

Nähere Erläuterung der im Handbuch gegebenen Gleichungen.

Wir erhalten nun für eine parabolische Bogenachse genau genug (vgl. auch die betr. Angaben im Handbuch):

$$z = \frac{2}{3} \cdot f, \quad y = \frac{f}{3 \cdot l^2} \cdot (l^2 - 12 \cdot x^2), \quad ds = dx.$$

Hiermit sind die Nennergrößen

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} y^2 \cdot dx = \frac{4}{45} \cdot f^2 \cdot l, \quad \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} x^2 \cdot dx = \frac{l^3}{12}, \quad \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} dx = l.$$

a) Bei gleichmäßig verteilter halbseitiger Belastung

(betrifft also das erste Zählerglied) ist allgemein das Moment des statisch bestimmten Hauptsystems (des einfachen Balkens auf zwei Stützen) für die belastete Seite

$$M_0 = \frac{3 \cdot p \cdot l}{8} \cdot \left(\frac{l}{2} - x\right) - \frac{p}{2} \cdot \left(\frac{l}{2} - x\right)^2 = \frac{p}{8} \cdot \left(\frac{l^2}{2} + l \cdot x - 4x^2\right),$$

somit

$$\begin{aligned} \int_0^{+\frac{l}{2}} M_0 \cdot y \cdot dx &= \int_0^{+\frac{l}{2}} \frac{p}{8} \cdot \left(\frac{l^2}{2} + l \cdot x - 4x^2\right) \cdot \frac{f}{3 \cdot l^2} \cdot \left(l^2 - 12 \cdot x^2\right) \cdot dx \\ &= \int_0^{+\frac{l}{2}} \frac{f \cdot p \cdot l^2}{48} \cdot dx + \int_0^{+\frac{l}{2}} \frac{f \cdot p \cdot x \cdot l}{24} \cdot dx - \int_0^{+\frac{l}{2}} \frac{f \cdot p \cdot x^2}{6} \cdot dx \\ &\quad - \int_0^{+\frac{l}{2}} \frac{f \cdot p}{48} \cdot 12 \cdot x^2 \cdot dx - \int_0^{+\frac{l}{2}} \frac{f \cdot p \cdot x}{24 \cdot l} \cdot 12 \cdot x^2 \cdot dx + \int_0^{+\frac{l}{2}} \frac{f \cdot p \cdot x^2}{6 \cdot l^2} \cdot 12 \cdot x^2 \cdot dx \\ &= \frac{f \cdot p \cdot l^2}{48} \cdot \frac{l}{2} + \frac{f \cdot p \cdot l}{24} \cdot \frac{l^2}{8} - \frac{f \cdot p}{6} \cdot \frac{l^3}{24} - \frac{f \cdot p}{4} \cdot \frac{l^3}{24} - \frac{f \cdot p}{2 \cdot l} \cdot \frac{l^4}{64} \\ &\quad + \frac{f \cdot p \cdot 2}{l^2} \cdot \frac{l^5}{160} \end{aligned}$$

und mit dem Generalnenner 5760

$$\int_0^{+\frac{l}{2}} M_0 \cdot y \cdot dx = \frac{17 \cdot p \cdot f \cdot l^3}{24 \cdot 240}.$$

Für die unbelastete Seite ist

$$M_0 = \frac{p \cdot l}{8} \cdot \left(\frac{l}{2} + x\right) - 0$$

+, da x nach rechts = -

oder

$$M_0 = \frac{p \cdot l}{16} \cdot (l + 2x)$$

somit

$$\begin{aligned}
 \int_{-\frac{l}{2}}^0 M_0 \cdot y \cdot dx &= \int_{-\frac{l}{2}}^0 \left(\frac{p \cdot l^2}{16} + \frac{p \cdot l \cdot x}{8} \right) \cdot \frac{f}{3 \cdot l^2} \cdot (l^2 - 12 \cdot x^2) \cdot dx \\
 &= \int_{-\frac{l}{2}}^0 \frac{p \cdot f \cdot l^2}{48} \cdot dx + \int_{-\frac{l}{2}}^0 \frac{p \cdot x \cdot f \cdot l}{24} \cdot dx - \int_{-\frac{l}{2}}^0 \frac{p \cdot f}{48} \cdot 12 \cdot x^2 \cdot dx \\
 &\quad - \int_{-\frac{l}{2}}^0 \frac{p \cdot x \cdot f}{24 \cdot l} \cdot 12 \cdot x^2 \cdot dx \\
 &= \frac{p \cdot f \cdot l^2}{48} \cdot \frac{l}{2} - \frac{p \cdot f \cdot l}{24} \cdot \frac{l^2}{8} - \frac{p \cdot f}{4} \cdot \frac{l^3}{24} + \frac{p \cdot f}{2 \cdot l} \cdot \frac{l^4}{64}
 \end{aligned}$$

und mit dem Generalnenner 384

$$\int_{-\frac{l}{2}}^0 M_0 \cdot y \cdot dx = \frac{p \cdot f \cdot l^3}{8 \cdot 48}$$

Insgesamt also

$$\int_0^{\frac{l}{2}} M_0 \cdot y \cdot dx = \int_0^{\frac{l}{2}} M_0 \cdot y \cdot dx + \int_{-\frac{l}{2}}^0 M_0 \cdot y \cdot dx = \frac{p \cdot f \cdot l^3}{180}$$

Hiermit erhalten wir den Horizontalschub

$$\begin{aligned}
 X_{\frac{p}{2}} &= \frac{\frac{p \cdot f \cdot l^3}{180}}{\frac{4}{45} \cdot f^2 \cdot l + \frac{J}{F} \cdot l + \frac{E \cdot J}{E_0 \cdot F_0} \cdot l} \\
 &= \frac{p \cdot f \cdot l^2}{180 \left[\frac{4}{45} \cdot f^2 + \frac{J}{F} + \frac{E \cdot J}{E_0 \cdot F_0} \right]} \\
 &= \frac{p \cdot f \cdot l^2}{180 \cdot \frac{4 \cdot f^2}{45} \cdot \left[1 + \frac{J \cdot 45}{F \cdot 4 \cdot f^2} + \frac{E \cdot J}{E_0 \cdot F_0} \cdot \frac{45}{4 \cdot f^2} \right]} \\
 &= \frac{p \cdot l^2}{16 \cdot f \cdot \left[1 + \frac{45}{4 \cdot f^2} \cdot \frac{J}{F} \cdot \left(1 + \frac{E \cdot J}{E_0 \cdot F_0} \cdot \frac{F}{J} \right) \right]} \\
 &= \frac{p \cdot l^2}{16 \cdot f} \cdot \frac{1}{1 + \frac{45}{4 \cdot f^2} \cdot \frac{J}{F} \cdot \left(1 + \frac{F}{n \cdot F_0} \right)}
 \end{aligned}$$

$$X_{\frac{p}{2}} = \frac{p \cdot l^2}{16 \cdot f} \cdot \lambda_1.$$

Als Näherungswert ergibt sich nach Handbuch

$$\lambda_1 = 1 - \frac{9}{4} \cdot \frac{\left(\frac{2}{l} + 0,1\right)^2}{f}.$$

Dieser Wert beträgt für $f = 1,12$ und $l = 11,80$ m:

$$\lambda_1 = 1 - \frac{9}{4} \cdot \left(\frac{2}{11,8} + 0,1\right)^2 \cdot \frac{1}{1,12}$$

$$\lambda_1 = 1 - \text{rd. } 0,15 = 0,85.$$

Der Horizontalschub vermindert sich also beim eingespannten Bogen bei dieser Spannweite um etwa 15% gegenüber dem Zweigelenk- und Dreigelenkbogen.

Für Y erhalten wir:

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} M_0 \cdot x \cdot dx = \int_0^{+\frac{l}{2}} M_0 \cdot x \cdot dx + \int_{-\frac{l}{2}}^0 M_0 \cdot x \cdot dx$$

$$= \int_0^{+\frac{l}{2}} \frac{p}{8} \cdot \left(\frac{l^2}{2} + l \cdot x - 4x^2\right) \cdot x \cdot dx + \int_{-\frac{l}{2}}^0 \left(\frac{p \cdot l^2}{16} + \frac{p \cdot l \cdot x}{8}\right) \cdot x \cdot dx$$

$$= \frac{p \cdot l^2}{16} \cdot \frac{l^2}{8} + \frac{p \cdot l}{8} \cdot \frac{l^3}{24} - \frac{p}{2} \cdot \frac{l^4}{64} - \frac{p \cdot l^2}{16} \cdot \frac{l^2}{8} + \frac{p \cdot l}{8} \cdot \frac{l^3}{24}$$

$$= \frac{p \cdot l^4}{192} - \frac{p \cdot l^4}{384} = + \frac{p \cdot l^4}{384},$$

somit

$$Y_{\frac{p}{2}} = \frac{\frac{p \cdot l^4}{384}}{\frac{l^3}{12}} = \frac{p \cdot l}{32}.$$

Damit wird der linke auf der Lastseite liegende Auflagerdruck (Abb. 357)

$$A_{\frac{p}{2}} = \frac{p \cdot l}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{p \cdot l}{32} = \frac{13}{32} \cdot p \cdot l;$$

und infolgedessen als Rest

$$B_{\frac{p}{2}} = \frac{3}{32} \cdot p \cdot l.$$

Beim eingespannten Träger ergeben sich also die lotrechten Reaktionen wesentlich anders als beim einfachen Balken, bei gleichmäßiger Belastung über die ganze Länge kann aber eine Verschiebung der Lastverteilung durch die Einspannung nicht mehr eintreten.

In ähnlicher Weise gelangt man zu Z :

$$\begin{aligned} \int M_0 \cdot dx &= \int_0^{+\frac{l}{2}} \frac{p}{8} \cdot \left(\frac{l^2}{2} + l \cdot x - 4x^2 \right) \cdot dx + \int_{-\frac{l}{2}}^0 \frac{p \cdot l}{16} \cdot (l + 2x) \cdot dx \\ &= \frac{5 \cdot p \cdot l^3}{192} + \frac{p \cdot l^3}{64} = \frac{p \cdot l^3}{24} \\ Z_{\frac{p}{2}} &= - \frac{p \cdot l^2}{24}. \end{aligned}$$

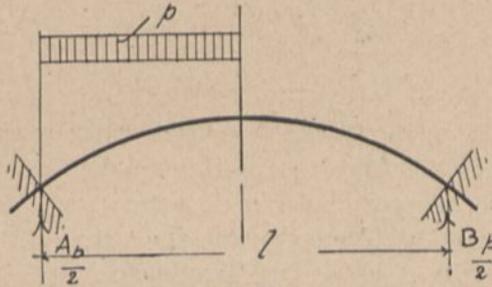


Abb. 357.

Das Einspannungsmoment auf der Lastseite ist

$$M_{\frac{p}{2}}^A = + X_{\frac{p}{2}} \cdot \frac{2}{3} \cdot f - Y_{\frac{p}{2}} \cdot \frac{l}{2} + Z_{\frac{p}{2}} = \frac{p \cdot l^2}{24} \cdot \left(\lambda_1 - \frac{11}{8} \right).$$

Das Einspannungsmoment bei B beträgt

$$M_{\frac{p}{2}}^B = + X_{\frac{p}{2}} \cdot \frac{2}{3} \cdot f + Y_{\frac{p}{2}} \cdot \frac{l}{2} + Z_{\frac{p}{2}} = \frac{p \cdot l^2}{24} \cdot \left(\lambda_1 - \frac{5}{8} \right).$$

Für $\lambda_1 = 1$, was, wie wir oben gesehen haben, allerdings nicht zutrifft, wäre:

$$M_{\frac{p}{2}}^A = - \frac{p \cdot l^2}{64} \quad \text{und} \quad M_{\frac{p}{2}}^B = + \frac{p \cdot l^2}{64}.$$

Setzt man in die allgemeinen Momentengleichungen die Werte für M_0 , X , Y und Z ein, so erhält man zunächst das größte

Moment auf der Lastseite bei $x = \frac{3}{16} \cdot l$ zu

$$\max M_{\frac{p}{2}} = \left(1 - \frac{37}{64} \cdot \lambda_1 \right) \cdot \frac{p \cdot l^2}{48},$$

das gibt für $\lambda_1 = 1$ (siehe oben)

$$\max M_{\frac{p}{2}} = \frac{9}{1024} \cdot p \cdot l^2$$

(vgl. die einfache Ermittlung im Handbuch). Ferner erhält man auf der unbelasteten Seite ebenso für $x = -\frac{3}{16} \cdot l$

$$\max M_{\frac{p}{2}} = \left(1 - \frac{37}{10} \cdot \lambda_1\right) \cdot \frac{5}{1536} \cdot p \cdot l^2;$$

für $\lambda_1 = 1$ ist

$$\max M_{\frac{p}{2}} = -\frac{9}{1024} \cdot p \cdot l^2.$$

Im Scheitel ($x = 0$ und $y = \frac{f}{3}$) beträgt das Moment

$$M_{\frac{p}{2}}^S = \frac{p \cdot l^2}{48} \cdot (1 - \lambda_1).$$

b) Für volle, gleichmäßig verteilte Belastung mit g (Abb. 358) siehe die Angaben im Handbuch.

(Einseitige oder parabolische Belastung vgl. Handbuch.)

Für gleichmäßige Temperaturzunahme sowie für Temperaturdifferenz siehe die Angaben im Handbuch.

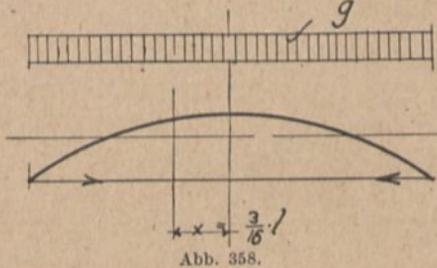


Abb. 358.

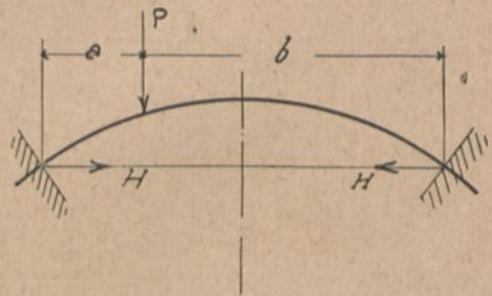


Abb. 359.

Einflußliniengleichungen.

Zur Bildung von Einflußlinien gebrauche man in bezug auf Abb. 359

$$H = \frac{15}{4} \cdot P \cdot \frac{a^2 \cdot b^2}{f \cdot l^3} \cdot \lambda_1$$

$$A = \frac{P \cdot (l + 2 \cdot a) \cdot b^2}{l^3}; \quad B = \frac{P \cdot (l + 2 \cdot b) \cdot a^2}{l^3}$$

$$M_A = \frac{P \cdot a \cdot b^2}{l^3} \cdot \left(l - \frac{5}{2} \cdot a \cdot \lambda_1 \right)$$

$$M_B = \frac{P \cdot a^2 \cdot b}{l^3} \left(l - \frac{5}{2} \cdot b \cdot \lambda_1 \right)$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{1 + \frac{45}{4f^2} \cdot \frac{J}{F} \cdot \left(1 + \frac{F}{n \cdot F_0} \right)}$$

Konstruktionseinzelheiten glatter Bogendächer.

Ausführung meistens als Zweigelenk- oder eingespannte Bögen. Der Grad der Einspannung hängt von der Bauart der Auflager ab. Vollständige Einspannung muß, wenn in Rechnung gestellt, auch genügend gewährleistet sein. An den Kämpfern können positive und negative Momente auftreten, so daß in der Regel dort zwei Eiseneinlagen nötig sind; dasselbe trifft zu im Bogenviertel. Nach dem Scheitel hin treten meistens aber nur positive Momente auf, so daß es genügt, die doppelte Eiseneinlage bis $\frac{l}{4}$ zu ziehen, und zwischen den Vierteln nur eine untere anzuordnen.

Die Querschnitte werden nach den größten Biegemomenten für exzentrischen Druck bemessen (durch den Horizontalschub). Über vorläufig dem Entwurf zugrundezulegende Größen siehe „Handbuch für Eisenbetonbau“ Bd. IV, 1. Aufl., Tabelle S. 442, an welche sich auch einige Angaben über Gewölbe mit steifen Eiseneinlagen anschließen, die ohne weiteres verständlich sind.

Bogendach mit höhergelegtem (überhöhtem) Zuggurt.

Architektonisch erscheint die freiliegende Zugstange oft unerwünscht, so daß man es vorzieht, eine reguläre Unterdecke in ihrer Ebene anzuordnen. Man gewinnt natürlich an Raum, wenn man den Zuggurt und damit die ganze Unterdecke zwischen höher im Gewölbe liegenden Punkten CD (Abb. 360) anordnet. Es hat dann keinen Wert mehr, den Bogen im ganzen noch als Zweigelenkbogen zu betrachten und etwa den bei A und B noch bestehenden Schub von den stützenden Wänden aufnehmen zu

lassen. Man betrachte dann den ganzen Bogen als einfachen Balken (also ein bewegliches Lager) und betrachte das System als einfach innerlich statisch unbestimmt. AC und BD werden dann lediglich Teilstücke des einfachen Balkens AB ,

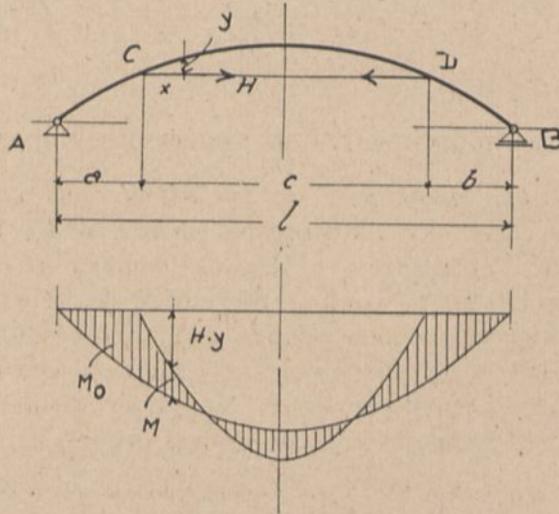


Abb. 360.

dessen Momentenfläche bei gleichmäßiger Belastung parabolisch geformt ist. Erst für den Teil CD gelten die nach den einleitenden Kapiteln ohne weiteres verständlichen Beziehungen.

$$M = M_0 - H \cdot y; \quad N = -H$$

$$M' = \frac{\delta M}{\delta H} = -y$$

$$N' = \frac{\delta N}{\delta H} = -1.$$

Damit ergibt sich bei Vernachlässigung des Temperatureinflusses:

$$H = \frac{\int_{x=0}^{x=c} M_0 \cdot y \cdot dx}{\int_{x=0}^{x=c} y^2 \cdot dx + \frac{J}{F} \cdot c \left(1 + \frac{E}{E_0} \cdot \frac{F}{F_0} \right)}$$

(siehe Handbuch).

Für größere Räume nicht mehr ausführbar, deshalb:

Bogendächer mit gesprengtem Zuggurt¹⁾.

Bei den einfachen Bogenformen mit geradem Zuggurt und zwei festen Auflagergelenken (Abb. 361) wurde empfohlen, die Zugstange reichlich zu bemessen, um eine seitliche Beanspruchung der stützenden Wände zu vermeiden; höhere Ausnutzung der Zugstange erforderte jedenfalls gewisse Bewegungsmöglichkeit zwischen Bogenaufleger und Wand (Gleitfugen). Die

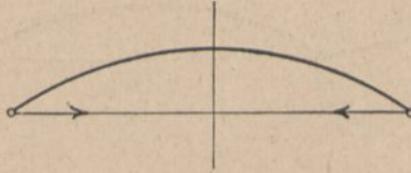


Abb. 361.

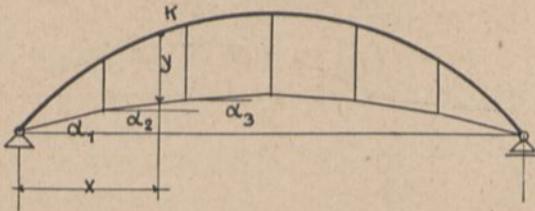


Abb. 362.

völlige Freilassung eines Auflagers durch Anbringung von Rollen od. dgl. gestattet dann höchste Ausnutzung der Verankerung und ungehinderte Durchbiegung des Binders; gleichzeitig geht das System dem Namen nach von einem einfach-äußerlich unbestimmten zu einem einfach innerlich unbestimmten über.

Im vorliegenden Fall (Abb. 362) dürfte mit einer größeren elastischen Durchsenkung und damit einer größeren seitlichen Bewegung von vornherein zu rechnen sein. Das Biegemoment an irgendeiner Stelle K ist

$$M = M_0 - H \cdot y.$$

Die Berechnung von H erfolgt ebenso wie bei überhöhtem Zuggurt. Die Zugkräfte in den Gurtgliedern sind

$$H \cdot \sec \alpha_1; \quad H \cdot \sec \alpha_2 \text{ usw.},$$

und jene in den Aufhängestäben

$$H \cdot (\tan \alpha_1 - \tan \alpha_2); \quad H \cdot (\tan \alpha_2 - \tan \alpha_3)$$

und $H \cdot 2 \tan \alpha_3$ (siehe Handbuch).

¹⁾ Praktisches Beispiel: Beton u. Eisen 1916, Heft I, S. 1.

Die Ausbildung der Zuggurte und Kämpfer siehe Handbuch.

Bogendach mit Kragarm (Abb. 363).

Dies wird am besten mit Hilfe des in Kapitel XII gegebenen Verfahrens (also mit Vernachlässigung der Normalkräfte) mit Einflußlinien berechnet, da es doch darauf ankommt, für mehrere

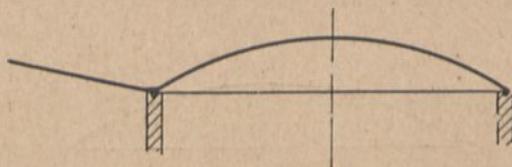


Abb. 363.

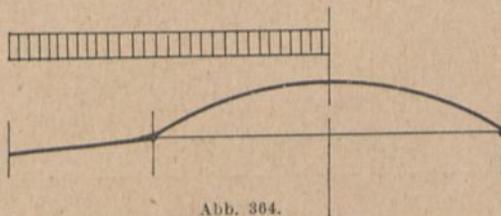


Abb. 364.

Punkte die möglichen positiven bzw. negativen Maximalmomente festzustellen, sofern eine gerechte Verteilung der Eiseneinlagen (je nach Einfluß des mehr oder weniger langen Kragarmes oder zweier Kragarme) erreicht werden soll. Für die Bemessung der Zugstange ist der Bogen voll zu belasten, während der Kragarm entlastet bleibt. Ferner ist der Belastungsfall Abb. 364 zu untersuchen. Die Zugstange bemesse man so stark, daß ihre elastische Dehnung vernachlässigt werden kann.

B. Bogenbinderdächer.

Allgemeines.

Ebenso wie bei zu weitgespannten einfachen Platten eine Plattenbalkendecke vorzuziehen ist, so wird bei weit gespannten Gewölben, wo unter Umständen größere Exzentrizitäten auftreten, besser ein Rippenbogensystem ausgeführt, wobei die Zugeisen in den Rippen vereinigt sind. Die Ausführung ist also bei größeren Nutzlasten und Spannweiten oder statisch ungünstigen Gewölbeformen angebracht.

Je nachdem ein solcher Bogenbinder durch positives oder negatives Biegemoment beansprucht wird, ist der statisch wirksame Querschnitt T-förmig oder einfach rechteckig. Die dünne Platte, welche zwischen den Bogenrippen verläuft, kann als durchlaufender oder als in den Bogenrippen eingespannter Träger betrachtet werden. Die Statik betreffend gilt dasselbe wie bei den glatten Bogendächern, nur erscheint hier die Berechnung als Dreigelenkbogen noch weniger gerechtfertigt. Bei Auflagerung auf Mauerwerk wird meist der Zweigelenkrahmen und bei kompletten Eisenbetonkonstruktionen der eingespannte Rahmen zugrunde gelegt.

Die statische Berechnung.

Soweit es sich um gleichmäßige Belastung und um parabolische oder kreisförmige Formen handelt, können alle vorher gegebenen Berechnungsmethoden gebraucht werden; besonders wichtig sind hier auch die Formeln zur Bildung von Einflußlinien, weil man mit ihnen die Einflüsse von den hier oft auftretenden Einzellasten bequem feststellen kann (beachte auch hier die einfachen Lösungen von Kapitel XIII).

Zur Berechnung von λ und λ_1 wird die Wahl eines bestimmten mittleren Querschnittes vor der Untersuchung vorgenommen werden müssen, wobei man nur den reinen Stegquerschnitt berücksichtigt (die für glatte Bogendächer angegebenen Näherungsformeln für λ und λ_1 können hier nicht gebraucht werden).

Weicht die Bogenachse von der Parabel oder dem flachen Kreis, für welche unsere Ableitungen gelten, ab, so muß man den Bogen in einzelne als gerade Stäbe anzusehende Stücke zerlegen und die Integrale durch Summierung analytisch oder graphisch bestimmen. Es kann hierbei die Veränderlichkeit des Querschnittes bequem berücksichtigt werden (vgl. Kapitel XII). E kann allgemein als konstant angenommen werden.

Der gelenklose Bogenbinder in zeichnerischer Behandlung.

Wir erhalten entsprechend unseren früheren Ableitungen (S. 343):

$$X = \frac{\int \frac{M_0 \cdot y \cdot ds}{J} - \varepsilon_0 \cdot E \cdot l \cdot t_0 + \varepsilon \cdot E \cdot t \cdot \int ds}{\int \frac{y^2 \cdot ds}{J} + \int \frac{ds}{F} + \frac{E \cdot l}{E_0 \cdot F_0}}$$

$$Y = \frac{\int \frac{M_0 \cdot x \cdot ds}{J}}{\int \frac{x^2 \cdot ds}{J}}$$

$$Z = - \frac{\int \frac{M_0 \cdot ds}{J} + \varepsilon \cdot E \cdot \Delta t \cdot \int \frac{ds}{h}}{\int \frac{ds}{J}}$$

Das zweite Zählerglied von X bezieht sich auf den Einfluß einer Zugstange, die erforderlich ist, wenn die Aufnahme des Schubes nicht durch Widerlager gewährleistet ist.

Die im Handbuch IV gegebene Auflösung dieser Gleichungen sei mit entsprechenden Erläuterungen hier wiedergegeben.

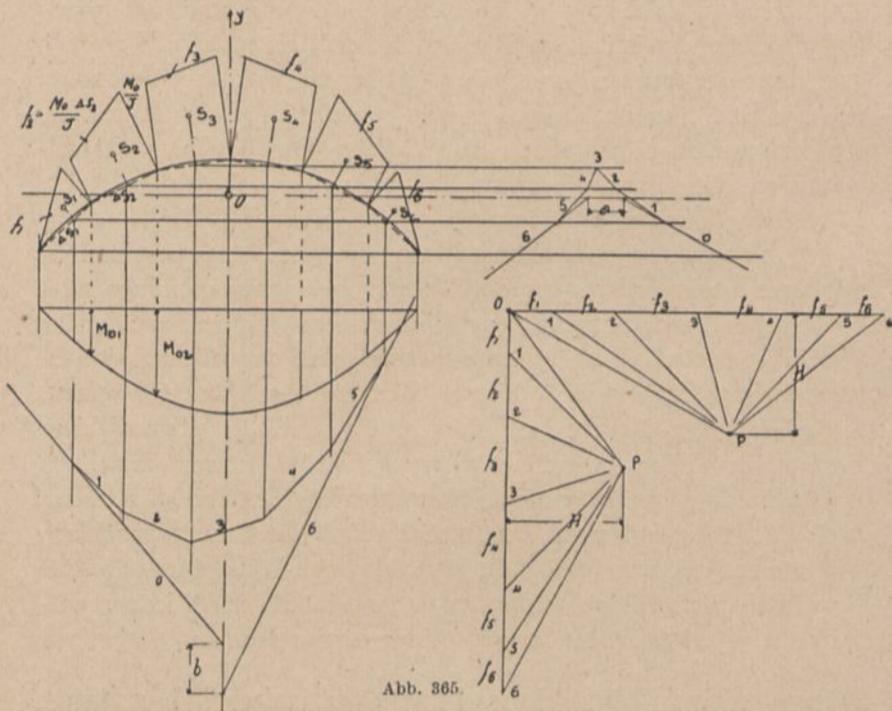


Abb. 365.

Zählerglieder.

Man zeichnet die für das statisch bestimmte Hauptsystem, den einfachen Balken, sich ergebende Momentenfläche (Abb. 365), teilt den Bogen in eine Anzahl geradlinige Stücke Δs und trägt in den Endpunkten derselben senkrecht zur Bogenachse die zu-

gehörigen $\frac{M_0}{J}$ auf. Die so entstehenden einzelnen Flächen $\frac{M_0 \cdot \Delta s}{J}$ seien mit f_1, f_2, f_3 usw. bezeichnet, und wir erhalten für

$$\int \frac{M_0 \cdot y \cdot ds}{J} = \sum \frac{\overbrace{M_0 \cdot \Delta s}^{f_1, f_2, \dots}}{J} \cdot y = \sum f \cdot y = S_x.$$

In den Endflächen entstehen Dreiecke, so daß die auf die Stabachse projizierten Schwerpunkte derselben auf zwei Drittel der Länge der unteren Stabstücke liegen. Bei allen mittleren Stäben kann man den Schwerpunkt in der Mitte der Stabstücke annehmen. Ebenso erhält man

$$\int \frac{M_0 \cdot x \cdot ds}{J} = \sum \frac{M_0 \cdot \Delta s}{J} \cdot x = \sum f \cdot x = S_y$$

$$\int \frac{M_0 \cdot ds}{J} = \sum \frac{M_0 \cdot \Delta s}{J} = \sum f = S.$$

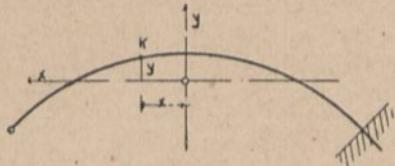


Abb. 366.

Bei diesen Größen ist zu beachten, daß die Koordinaten x und y sich auf den in Abb. 366 dargestellten Punkt beziehen, der als Schwerpunkt der mit $\frac{ds}{J}$ belastet gedachten Gewölbemittellinie leicht aufgefunden werden kann. S_x und S_y können in einfacher Weise graphisch mit Kraft- und Seileck bestimmt werden.

Diese Summenausdrücke lassen sich nämlich als statische Momente deuten. Wir können daher zu ihrer Bestimmung von dem Satz der graphischen Statik Gebrauch machen, daß die Summe der statischen Momente paralleler Kräfte ($f \cdot x$ lotrecht, $f \cdot y$ wagerecht) in bezug auf eine zu ihnen parallele Gerade (die vertikale Schwerachse bzw. die wagerechte Schwerachse) gleich ist dem zwischen die beiden letzten Seilpolygonseiten fallenden Stück (b bzw. a) der betreffenden Geraden multipliziert mit der Polweite (H)¹⁾.

¹⁾ Müller-Breslau, „Graphische Statik“ Bd. I, 1912, S. 24.

Es ist also

$$S_x = H \cdot a; \quad S_y = H \cdot b.$$

Nennerglieder.

Diese lassen sich in derselben Weise ausdrücken. Es bedeutet

$$\int \frac{y^2 \cdot ds}{J} = \sum \left(\frac{\Delta s}{J} \cdot y^2 \right) = \sum (t_x) = T_x =$$

Trägheitsmoment aller Bogenstrecken $\frac{\Delta s}{J}$ in bezug auf die x -Achse,

$$\int \frac{x^2 \cdot ds}{J} = \sum \left(\frac{\Delta s}{J} \cdot x^2 \right) = \sum (t_y) = T_y =$$

desgl. in bezug auf die y -Achse.

$\int ds = \sum \Delta s = s$ = Länge aller Stücke Δs zusammen. Die graphische Ermittlung dieser Größen ergibt sich ebenso wie vor; der oben erwähnte Satz aus der graphischen Statik läßt sich gleichwohl auch bei der Deutung von Trägheitsmomenten verwenden.

Ferner sei noch bezeichnet

$$\int \frac{ds}{F} = \sum \frac{\Delta s}{F} = s_1$$

$$\int \frac{ds}{h} = \sum \frac{\Delta s}{h} = s_2$$

$$\int \frac{ds}{J} = \sum \frac{\Delta s}{J} = s_3.$$

Schlußformeln.

Die Schlußgleichungen lauten nun, wenn man den linearen Wärmeausdehnungskoeffizienten des Betons ε gleich dem des Eisens ε_0 setzt,

$$X = \frac{S_x + \varepsilon \cdot E \cdot l(t - t_0)}{T_x + s_1 + \frac{E \cdot l}{E_0 \cdot F_0}}$$

$$Y = \frac{S_y}{T_y}$$

$$Z = - \frac{S + \varepsilon \cdot E \cdot s_2 \cdot \Delta t}{s_3}$$

Die hier vorgeführte Berechnung hat große Ähnlichkeit mit der im folgenden Kapitel XLVI eingehend besprochenen Behandlung größerer Brückengewölbe.

Der Zweigelenkbogen kann genau in derselben Weise, wenn es erforderlich sein sollte, behandelt werden.

Die wagerechte Belastung durch Wind wird bei genauen Berechnungen dann durchgeführt, wenn es sich um hohe gewölbte Dächer handelt. Vgl. weiteres darüber Handbuch¹⁾.

¹⁾ Beachte hierzu den Aufsatz: „Beitrag zur Berechnung der Bogendächer“ von Strassner in Deutsche Bauzeitung 1917, Mitteilungen Nr. 11 und 12.

Berechnung größerer eingespannter Brückengewölbe.

Kapitel XLV.

I. Einleitung und Voraussetzungen für die Berechnung.

Während für kleinere gelenklose Brückengewölbe, bis etwa zu 20 m Spannweite hin, das einfache Stützlinienverfahren eine hinreichende Grundlage für die Bemessung darstellt, müssen größere Eisenbetongewölbe (schon bis zu 100 m Spannweite ausgeführt) einer weitergehenden sehr sorgsamem Überprüfung unterzogen werden.

Von vornherein machen wir die Voraussetzung, daß der Baugrund unnachgiebig und auf beiden Gründungsseiten von gleicher Beschaffenheit ist, sodaß die unvermeidliche elastische Senkung keine Verschiebung der Widerlager gegeneinander zur Folge haben kann. Zum Teil wird ja die elastische Pressung schon beim Stampfen der Widerlager durch die mechanische Gewalt des Stampfens und durch das Gewicht der Betonmassen selbst vollzogen. Die endgültige elastische Zusammenpressung wird aber erst nach dem Ausrüsten des eigentlichen tragenden Gewölbes erreicht; gerade dieser Rest sollte also auf beiden Seiten gleich groß sein.

Weiter ist seitliche Unnachgiebigkeit des Baugrundes erforderlich. Je geringer die wagerechte Komponente der Endresultierenden, umso weniger wird allerdings auf seitliche Unnachgiebigkeit Bedacht zu nehmen sein. Schließlich soll ein Drehen der Widerlager ausgeschlossen sein.

Wir machen also die Voraussetzung völliger Starrheit derjenigen Körper, in welche sich das Gewölbe einspannen soll.

Selbstverständlich gestattet die Statik die Berücksichtigung unstarrer Auflager auch bei eingespannten Gewölben.

Denken wir an hohe Talbrücken mit schlanken Mittelpfeilern, die durch in sie eingespannte Gewölbe miteinander verbunden sind, so erscheint beim Herüberfahren eines Eisenbahnzuges eine Drehung der Pfeilerköpfe unvermeidlich, da die hohen Pfeiler bei einseitiger Belastung durch den Schubüberschuß die mit der auftretenden Biegung und Querbeanspruchung bewirkte seitliche Verdrängung notwendig erleiden müssen (lotrechte Nachgiebigkeit der Pfeilerfundamente selbst ausgeschlossen).

Während also bei einem Bauwerke nach Abb. 367 die Pfeilerelastizität unbedingt berücksichtigt werden muß, und der Kon-

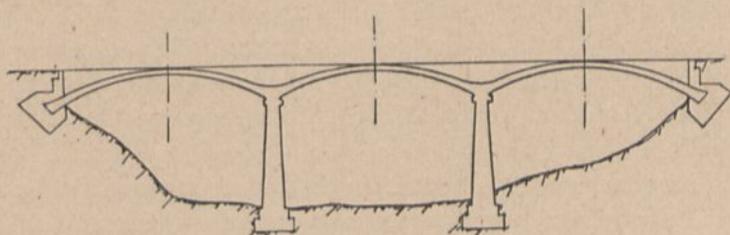


Abb. 367.

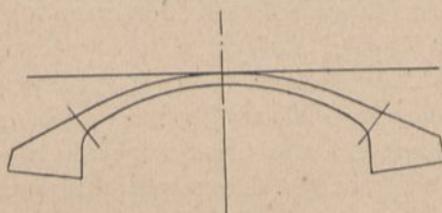


Abb. 368.

strukteur darauf angewiesen ist und imstande sein muß, eine derartige etwas komplizierte Berechnung durchzuführen, fehlen andererseits auch nicht die erforderlichen Voraussetzungen für diese Berechnung, da die elastische Nachgiebigkeit der Pfeiler nach der Formänderungslehre verhältnismäßig leicht berechenbar ist. Im Rahmen dieses Buches soll nicht auf derartige Fälle eingegangen werden. — Wollten wir bei gewöhnlichen, zwischen niedrigen Widerlagern verspannten Gewölben (Abb. 368) ein seitliches Nachgeben der Widerlager infolge Drehung derselben berücksichtigen, so könnte bei dem Fehlen elastisch nachgiebiger Konstruktionsteile zwischen Gewölbe und Gründung auch nur wieder die Nachgiebigkeit des Baugrundes als Veranlassung dazu gedacht werden, die, wie gesagt, keineswegs einwandfrei feststellbar ist. Da nun die Berücksichtigung einer Nachgiebig-

keit der Widerlager die Berechnung erschwert, und auch keine sicheren Grundlagen dafür vorhanden sind, ein Mißgriff hierin aber die ganze Berechnung völlig fragwürdig machen würde, so setzen wir absolute Starrheit der Widerlager voraus, wie das auch Prof. Mörsch, dessen Theorie wir hier vorführen wollen, in seiner Ableitung „Berechnung von eingespannten Gewölben“ getan hat.

Sind die angegebenen Voraussetzungen nicht erfüllt, so empfiehlt sich meist die Ausführung eines Dreigelenkbogens, der bekanntlich in keiner Weise durch die angegebenen Einflüsse beeinträchtigt werden kann. Es können hier nicht alle Gründe angegeben werden, welche für den Fall einwandfreier Beschaffenheit des Baugrundes das eingespannte Gewölbe oder den Dreigelenkbogen für angebracht erscheinen lassen.

Ein eingespanntes größeres Brückengewölbe bedarf jedenfalls einer sehr sorgsam Konstruktion und Ausführung. Es muß die Deformation durch die Normalkräfte und der Einfluß der Temperatur und Schwindung (namentlich bei freiliegenden Gewölben) festgestellt werden. Das Trägheitsmoment zeigt einen beständigen — oft recht erheblichen — Wechsel, ebenso auch die ständige Last, so daß, wenn auch die früher für einen eingespannten Rahmen abgeleiteten Grundgleichungen maßgebend bleiben, diese doch mit Berücksichtigung aller genannten Umstände wesentlich anderer Lösung bedürfen. Es ist noch folgendes im allgemeinen vor auszuschicken:

Versuche haben erwiesen, daß sich Beton als Wölbmaterial innerhalb der üblichen Beanspruchungen hinreichend elastisch verhält; wir können daher die Gesetze der Elastizitätslehre auch bei Gewölben zur vollen Anwendung bringen¹⁾. Wir dürfen auch von der großen Vereinfachung Gebrauch machen, die sich durch die Annahme eines konstanten Elastizitätsmoduls ergibt, weil innerhalb der üblichen Spannungsgrenzen Verhältnisgleichheit zwischen Spannung und Dehnung gesichert ist. Noch ein anderer Umstand bleibt zu beachten: Eisenbetongewölbe werden ja hauptsächlich dann ausgeführt, wenn große Exzentrizitäten und damit auch Zugspannungen vor auszusehen sind. Nun soll nach den Vorschriften die Mitwirkung des Betons

¹⁾ Vgl. Absatz f S. 57.

in der Zugzone ausgeschlossen werden (Stadium II), auch in Fällen exzentrischen Druckes, wie sie hier vorliegen. Bei solcher Berechnung ist das Trägheitsmoment von der jeweiligen Lage der Nulllinie direkt abhängig, doch stellt es sich als Unmöglichkeit heraus, den auf diese Weise eintretenden Wechsel des Trägheitsmomentes von vornherein zu berücksichtigen; schließlich ist es auch keine Notwendigkeit, denn — soweit nicht gerade erhebliche Exzentrizitäten vorliegen — ergibt die Spannungsberechnung nach Stadium I oder Stadium II (namentlich bei $n = 10$) wenig Unterschied¹⁾. Es wird daher bezüglich des Trägheitsmomentes stets mit dem vollen Eisenbetonquerschnitt gerechnet²⁾.

II. Entwurf.

Die weiter unten angegebenen Berechnungsverfahren für eingespannte Gewölbe sind ihrer Natur nach Nachprüfungsverfahren; es ist also wichtig, einiges über den Entwurf selbst zu sagen³⁾.

Die Brücke ist zunächst frei zu entwerfen, wobei ein gesundes statisches Gefühl von vornherein zwischen den einzelnen Möglichkeiten das Vorteilhafteste auszuwählen hat. Die Gewölbemittellinie soll dann mit der Stützl原因ie für Eigengewicht, d. h. für gesamte ständige Last einschließlich Aufbauten (durch die Mitten der Scheitel- und Kämpferfugen), zusammenfallen⁴⁾ im Gegensatz zu Dreigelenkbögen, wo die günstigste Bogenachse näherungsweise mit einer für das Eigengewicht + der halben gleichmäßig verteilten Verkehrslast gezeichneten Stützl原因ie zusammenfallen soll. Auf Grund der ersten Entwurfsskizze wird eine Gewichtsrechnung angefertigt und die Drucklinie gezeichnet. Die so gefundene Drucklinie wird dann als neue Bogenachse zugrunde gelegt und mit den

¹⁾ Vgl. auch hierüber den Abschnitt über exzentrischen Druck und über das Kernpunktverfahren in der Gewölberechnung in Schlüter: „Eisenbetonbau: Säule und Balken“, Verlag von Herm. Meuser, Berlin, Anzeige am Schluß.

²⁾ Vgl. hierzu auch Kap. XVI a.

³⁾ Für flache gelenklose Brückenbögen gibt A. Straßner in Beton u. Eisen 1914, Heft X, S. 219 ein Näherungsverfahren zur Querschnittsermittlung an. — Beachte auch: „Beitrag zur Bestimmung der Bogenform bei Wölbbrücken“ von R. Doorentz, Beton u. Eisen 1915, Heft XVI, S. 235.

⁴⁾ Deutsche Bauzeitung, Mitteilungen Nr. 12 1919 bringt einen Aufsatz von Dipl.-Ing. Kann: „Mathematische Ermittlung der Bogenform für nach der Eigengewichtsstützl原因ie geformte Gewölbe mit voller Auffüllung“.

verbesserten Gewichten eine zweite Drucklinie gezeichnet. In der Regel fällt schon jetzt Drucklinie und Bogenachse zusammen; wenn nicht annähernd, dann muß der Vorgang noch einmal wiederholt werden. Man kann die Bogenachse schließlich auch analytisch festlegen und mit Hilfe der verbesserten Gewichte die Ordinaten der Stützlinie (als Abstände von einer Wagerechten durch Scheitelmitte) genau einrechnen (vgl. Gmündertobelbrücke von Prof. Mörsch, Sonderabdruck der Schweizerischen Bauzeitung). Eine direkte mathematische Bestimmung der Mittellinie ist bei den meist angewendeten Sparräumen und Entlastungsbögen im Aufbau nicht möglich. Das zweite Seilpolygon liefert schon ziemlich genau die in den einzelnen Gewölbefugen auftretenden Drücke, so daß man damit imstande ist, (je nach dem zur Verfügung stehenden Material) die Querschnitte zu bestimmen. Gelenklose Bögen werden stets so entworfen, daß ihr Trägheitsmoment J vom Scheitel (J_s) gegen die Kämpfer (J_k) stetig zunimmt, so daß die Querschnitte möglichst entsprechend der Druckzunahme zunehmen und in allen Teilen des Gewölbes gleich hohe Spannungen auftreten. Im allgemeinen sind diese Bedingungen erfüllt, wenn die Vertikalprojektion aller Radialschnitte konstant bleibt. Dr.-Ing. Max Ritter gibt in seinem Buch¹⁾ ein Gesetz über die Querschnittszunahme in der Form

$$\frac{J_s}{J \cdot \cos \varphi} = 1 - (1 - n) \cdot \frac{(l_1 - x)^2}{l_1^2},$$

worin

$$n = \frac{J_s}{J_k \cdot \cos \varphi_k}$$

(Abb. 369), welches sich eng an die praktischen Verhältnisse anlehnt und beim Kreisbogen sogar genau mit der oben angegebenen allgemein gebräuchlichen Annahme deckt.

Die Annahme der Scheitelstärke als Ausgangspunkt der Bemessung erfolgt unter Zugrundelegung des aus dem verbesserten Seilpolygon gewonnenen Horizontalschubes mit entsprechender Erhöhung desselben für Verkehrslast und mit Berücksichtigung der zu erwartenden Materialfestigkeit, wobei man an einen Überschuß für die zu erwartende Biegung zu

¹⁾ „Beiträge zur Theorie und Berechnung der vollwandigen Bogenträger ohne Scheitелgelenk.“ Wilh. Ernst & Sohn, Berlin.

III. Die Berechnung nach Prof. Mörsch.

Es sei nun auf das von Prof. Mörsch¹⁾ gegebene grundlegende und bisher am meisten verbreitete Verfahren näher eingegangen²⁾.

Im großen und ganzen sind in der Berechnung folgende Abschnitte zu unterscheiden.

1. Berechnung der drei statisch unbestimmten Größen H , V und M , welche sich in nichts von den gleichnamigen Größen des in Kapitel XXV behandelten eingespannten Rahmens und des in Kapitel XLIV, Seite 353 u. f., erläuterten eingespannten Gewölbes als Dachkonstruktion unterscheiden. Die betreffenden Bestimmungsgleichungen lauten also nach Sonderabdruck Seite 2 (mit den Bezeichnungen von Prof. Mörsch, der für unseren bisherigen Buchstaben t den Buchstaben τ und für unser ε den Buchstaben α gebraucht):

$$X = H = \frac{\int \frac{M_0 \cdot y \cdot ds}{J} + E \cdot \alpha \cdot \tau \cdot l}{\int \frac{y^2 ds}{J} + \int \frac{ds}{F}}$$

wobei gegen die angezogene Stelle aus Kapitel XLIV der Einfluß der Zugstange herausfällt;

$$Y = V = \frac{\int \frac{M_0 ds}{J} \cdot x}{\int \frac{x^2 ds}{J}}$$

$$Z = M = - \frac{\int \frac{M_0 \cdot ds}{J}}{\int \frac{ds}{J}}$$

wobei gegen früher der Einfluß ungleichmäßiger Erwärmung zunächst weggelassen ist.

¹⁾ „Berechnung von eingespannten Gewölben“, Sonderabdruck der Schweizerischen Bauzeitung (auch auszugsweise wiedergegeben im Betonkalender). — Die Monatschrift *Arm. Beton* bringt in Heft 4, 1918 einen Aufsatz „Beobachtungen bei der statischen Untersuchung eines eingespannten Eisenbetongewölbes“ von Dr.-Ing. Künze, der auf die Zweckmäßigkeit des Verfahrens von Prof. Mörsch erneut hinweist.

²⁾ Dr. techn. Robert Schönhöfer gibt in seinem Buche „Statische Untersuchung von Bogen- und Wölbtragwerken“ auf denselben Voraussetzungen wie Mörsch neuerdings ein ebenfalls bequem anwendbares Verfahren, das den Lesern nach Studium dieses Kapitels ohne weiteres verständlich sein wird; es läßt sich auch auf Rahmen mit stark wechselndem Trägheitsmoment anwenden.

Zu den Darlegungen auf Seite 1 des Sonderabdruckes sei noch bemerkt, daß es sich auch hier wie bei allen früheren Berechnungen nicht um die tatsächliche Berücksichtigung einer Formänderung handelt, sondern lediglich um die Anwendung des Prinzips der virtuellen Verrückungen, wobei, wie wir wissen, die unbestimmten Größen mit Umgehung der Berechnung der Formänderungen gefunden werden. Der Kämpferquerschnitt wird — zur Wiederholung — in jeder Beziehung als starr vorausgesetzt.

2. Die Deutung der Integrale und danach die Aufstellung neuer Gleichungen für H , V und M , wonach für eine wandernde Last 1 sowohl die analytische als auch die graphische Berechnung der Einflußordinaten gezeigt wird mit Hilfe der sogenannten w -Gewichte, $dw = \frac{ds}{J}$ bzw. $w = \frac{s}{J}$. In diesem Abschnitt liegt der wesentliche Unterschied zu den früheren Berechnungen, insofern der ständige Wechsel des Trägheitsmomentes berücksichtigt wird¹⁾. Führt man nämlich in die oben angegebenen drei Bestimmungen für $\frac{ds}{J}$ die Bezeichnung dw ein (von Prof. Mörsch auf Seite 2 des Sonderabdruckes als elastisches Gewicht bezeichnet, womit man sich die Bogenachse belastet zu denken hat), so lauten sie

$$H = \frac{\int M_0 \cdot dw \cdot y + E \cdot \alpha \cdot \tau \cdot l}{\int dw \cdot y^2 + \int \frac{ds}{F}}$$

$$V = \frac{\int M_0 \cdot dw \cdot x}{\int dw \cdot x^2},$$

$$M = - \frac{\int M_0 \cdot dw}{\int dw}.$$

Zieht man endlich nicht die Differentiale dw , sondern endliche Teilstücke der Bogenachse in Betracht, setzt also anstatt dw

¹⁾ Vgl. das schon genannte Buch Dr.-Ing. Max Ritter, „Beiträge ...“, Seite 12 kürzeres Verfahren, wenn Gesetzmäßigkeit der Gewölbeform vorliegt.

die Gewichte $w = \frac{s}{J}$, wobei s ein solches Teilstück bedeutet, so ist bei vorläufiger Weglassung des Temperaturgliedes im Zähler von H :

$$H = \frac{\sum M_0 \cdot w \cdot y}{\sum w \cdot y \cdot y + \sum \frac{s}{F}} = \frac{\sum M_0 \cdot w_y}{\sum y \cdot w_y + \sum \frac{s}{F}},$$

$$V = \frac{\sum M_0 \cdot w \cdot x}{\sum w \cdot x \cdot x} = \frac{\sum M_0 \cdot w_x}{\sum x \cdot w_x},$$

$$M = - \frac{\sum M_0 \cdot w}{\sum w};$$

wobei also für $w \cdot y$ zur Abkürzung einfach w_y und für $w \cdot x$ einfach w_x gesetzt ist (vgl. Sonderabdruck S. 3).

Die weitere Deutung der so umgeformten Bestimmungsgleichungen und die daran anschließende Benutzung derselben zur zeichnerischen Ermittlung der Einflußlinien für H , V und M wird später in einem ausführlichen Beispiel gezeigt werden. Liegt danach H , V und M dann für einen bestimmten Belastungsfall fest, und bezeichnet M_0 das Moment für einen bestimmten Punkt (x, y) des Freitragers, so ist der wahre Wert seines Momentes für das dreifach statisch unbestimmte System gegeben durch die Gleichung

$$M_k = M_0 + M - H \cdot y_k - V \cdot x;$$

wobei auf die Vorzeichen von x und y zu achten ist.

3. Die Verwendung der gewonnenen Einflußlinien für H , V und M zur Bildung von Einflußlinien für Kernpunktmente nach der Gleichung

$$M_k = M_0 + M - H \cdot y_k - V \cdot x.$$

Über die Zweckmäßigkeit derartiger Einflußlinien (die bekanntlich für eine wandernde Last l zu berechnen sind) sei folgendes erwähnt:

Bei gewissen Bauwerken mit geringerer Verkehrslast kennt man die ungünstigsten Laststellungen, die im Scheitel, Kämpfer und in $\frac{l}{4}$ die größten Momente erzeugen, im voraus, und man kann sich deswegen die Berechnung der Einflußlinien für die Kernpunktmente ersparen und die ermittelten Einflußlinien für H , V und M direkt benutzen.

Bei größeren Bauwerken und verhältnismäßig auch größeren, sich über große Längen verteilenden Verkehrslasten (Eisenbahnbrücken) wird man aber zur Konstruktion der Einflußlinien für die Kernpunktmente schreiten müssen, um die maximalen Einflüsse der Verkehrslast etwas genauer zu erhalten, sich aber in der Regel auch auf einige Querschnitte dabei beschränken können.

Bei Gewölben, die durch Pfeiler belastet sind, wird man natürlich nur für die Querschnitte, wo die Pfeiler aufstehen, die Einflußlinien für die Kernpunktmente konstruieren und zum Schluß beachten, daß die Einflußlinien von Pfeiler zu Pfeiler geradlinig verlaufen¹⁾ (vgl. auch Abh. Mörsch, Seite 4 links).

Im folgenden Beispiel wird auch die Ausrechnung einer Einflußlinie für ein Kernpunktment gezeigt werden.

4. Die Berücksichtigung der Formänderung des Gewölbes, der wichtigste Abschnitt in der Abhandlung²⁾.

Wir haben die Bogenmittellinie mit der Drucklinie für Eigengewicht zusammenfallend vorausgesetzt, so daß theoretisch durch Eigengewicht nur reine Druckspannungen erzeugt werden müßten. Durch die erheblichen Normalkräfte (namentlich bei flachen Gewölben) tritt nun aber beim Ausrüsten des Gewölbes eine Verkürzung der Bogenachse ein, so daß diese sich nicht mehr mit der Drucklinie deckt und Biegungsspannungen hervorgerufen werden.

Die Drucklinie nimmt also innerhalb des Gewölbes infolge der Senkung desselben eine andere Lage an, da die Verkürzung der Bogenachse die Deckung der Mittellinie und der Stützlinie ausschließt. Es stellt sich nämlich eine sogenannte Minimalstützlinie ein, die im Kämpfer durch den unteren Drittelpunkt, im Scheitel durch den oberen Drittelpunkt verläuft. Es leuchtet ein, daß infolgedessen am Kämpfer, der an und für sich starr bleibt, eine Vermehrung der Druckspannungen an der inneren Leibung, im Scheitel eine solche an der äußeren Leibung eintritt.

Während sich die Senkung in keinem Falle ver-

¹⁾ Ableitung Anhang, Einflußlinienlehre, Absatz 7.

²⁾ Berichte über Gewölbe-Expansionsverfahren, das bei größeren Bauwerken der Entstehung von Nebenspannungen (durch die Bogenverkürzung, die Nachgiebigkeit des Lehrgerüsts und des Baugrundes sowie die Temperatureinflüsse) vorbeugen soll, in: Der Brückenbau 1913, Heft 24; Wege- und Wasserbau-Zeitschrift 1914, Nr. 8; Beton u. Eisen 1914, Heft 1; Deutsche Bauzeitung 1914, Nr. 18; desgl. 1916, Nr. 8 u. 9; Arm. Beton 1917, Heft 3 u. 4.

meiden läßt, wäre die dadurch hervorgerufene Differenz zwischen Bogenachse und Drucklinie dadurch abwendbar, daß in Scheitel- und Kämpfermitte provisorische Gelenke ausgeführt werden, welche nach der Setzung des Gewölbes und völliger Aufbringung der ständigen Last nach geraumer Zeit wieder zu vergießen wären. In diesem Falle dürften Biegungsspannungen infolge Eigengewicht völlig ausgeschlossen werden können. In der Tat gibt es eine derartige Ausführung, und zwar bei der Stubenrauchbrücke über die Spree zwischen Nieder- und Oberschöneweide (siehe Handbuch f. E., Bd. VI). Wenn auch derartige Gelenke sich entsprechend ihrer vorübergehenden Aufgabe konstruieren lassen, so bedeuten sie doch immerhin eine wesentliche Verteuerung des Bauwerkes, wie sie die bleibenden Gelenke in Stahl oder Beton bei förmlichen Dreigelenkbogenbrücken in erhöhtem Maße bewirken.

Man zieht es demgegenüber vor, von vornherein mit den durch das Eigengewicht allein schon hervorgerufenen recht erheblichen und unvermeidlichen Biegungsspannungen zu rechnen.

Selbstverständlich würde auch eine Überhöhung des Gewölbes gegenüber der beabsichtigten Form die Verschiebung zwischen Drucklinie und Bogenachse nicht verschwinden lassen, sondern höchstens zur Innehaltung einer genauen Höhenordinate des Gewölbescheitels dienen können. Es ist eine natürliche Erscheinung, daß sich bei dem freiwerdenden Gewölbe eine Minimalstützlinie einstellt. Wir finden damit die alte Stützlinientheorie bestätigt, wonach man ein Gewölbe als stabil betrachtet, wenn eine Minimalstützlinie für Vollbelastung (durch den oberen Drittelpunkt des Scheitels und durch die unteren Drittelpunkte der Kämpfer oder der Bruchfugen) möglich ist.

Der Abschnitt lehrt also, daß die im Schwerpunkt des Kämpferquerschnittes angreifenden Reaktionen H_s und V_s , welche der mit der Bogenmittellinie zusammenfallend gedachten Stützlinie für Eigengewicht entsprechen, nicht die richtigen Auflagerkräfte des eingespannten Bogens bei Eigengewicht sein können, denn wir zeichnen diese Stützlinie ja durch die Mitten der Kämpfer und Scheitelfugen, während sie sich in Wirklichkeit gegen diese verschiebt. Wir können aber gewiß die aus der Stützlinie für Eigengewicht gewinnbaren theoretisch überall gleich-

mäßigen Pressungen beibehalten, wenn wir die durch die Verschiebung der Stützlinie eintretenden Biegungsspannungen hierzu addieren. Diese Trennung ist auch in den ursächlichen Kräften durchzuführen: während H_e und V_e — in der Mitte der Kämpferfuge angreifend — oder deren Resultierende die Veranlassung für die überall gleichmäßigen Pressungen sind, werden im Schwerpunkt des Systems (der bekanntlich mit dem Auflager in starrer Verbindung gedacht ist) drei Ergänzungskräfte H_e , V_e und M_e wirkend gedacht, die als Ursache für die eintretenden Biegungsbeanspruchungen anzusehen sind (vgl. Abhandlung Mörsch, Seite 4). Prof. Mörsch zeigt, daß bei den gemachten Voraussetzungen V_e und M_e zu Null werden, so daß nur H_e als eigentliche Ursache der Biegungsspannungen auftritt, also ein Zusatzschub (der seinem Vorzeichen nach minus wird, vgl. später). Hieraus folgt ohne weiteres, daß wir die unter 2. und 3. erwähnten Einflußlinien nicht zur Berechnung des Einflusses des Eigengewichtes benutzen können; es würden sich damit die Biegemomente überall zu Null ergeben müssen, da ja die Einflußlinien sich lediglich auf die starr gedachte Form des Gewölbes beziehen und die Mittellinie des Gewölbes nach der Stützlinie für Eigengewicht geformt vorliegen soll. Die Eigengewichtsbeanspruchungen werden also nach der mit der Bogenmittellinie zusammenfallenden Stützlinie (reiner Druck) festzustellen und die infolge der zusätzlichen Kraft H_e auftretenden Biegungsspannungen besonders zu berechnen sein; schließlich sind Normalspannungen und Biegungsspannungen zu addieren.

Die unter 2. und 3. angezogenen Einflußlinien verbleiben also lediglich für die Berücksichtigung der Verkehrslasten, die gegenüber dem Eigengewicht eine weitere merkliche Verkürzung der Bogenachse unmöglich bewirken können, so daß die eingerechneten Einflußordinaten für diese volle Gültigkeit besitzen (abgesehen von der durch die Formänderung bei Verkehrslast gegenüber Eigengewicht neu hinzukommenden verhältnismäßig unbedeutenden Änderung der Koordinaten der Achsenelemente).

Der reguläre Berechnungsgang, namentlich größerer Wölbbrücken, wird demnach folgender sein:

Das Gewölbe wird nach dem Verlauf der Stützlinie für ständige

Last durch die Mitten der Scheitel- und Kämpferfugen geformt. Mit Hilfe der überall zentrischen Drucklinie wird dann die gleichmäßige Beanspruchung für die gesamte ständige Last nach der Gleichung

$$\sigma_0 = \sigma_u = \frac{P}{F}$$

berechnet.

Diese Berechnung liefert auch graphisch oder analytisch (siehe Gmündertobelbrücke) die Größe des Horizontalschubes H_s . Mit H_s wird dann der Ergänzungsschub H_e berechnet,

$$H_e = - \frac{H_s \cdot \int \frac{ds}{F}}{\int \frac{y^2 \cdot ds}{J} + \int \frac{ds \cdot \cos^2 \varphi}{F}}$$

wobei die einzelnen Integrale aus der Berechnung der statisch unbestimmten Größen H , V und M her schon bekannt sind (siehe die Ableitung von H_s , Abhandlung Mörsch, Seite 5).

Demnach

$$H_e = - \frac{H_s \cdot \sum \frac{s}{F}}{\sum w \cdot y^2 + \sum \frac{s}{F}}$$

Wir stehen hier das erstemal vor der Bestimmungsgleichung einer statisch unbestimmten Größe, die auf der rechten Seite eine (in diesem Falle mit Hilfe des Stützlinienverfahrens) vorausberechnete Kraft (H_s) als Faktor enthält. Die Gleichung ist eben aus der wirklichen Berücksichtigung der tatsächlich eintretenden Deformierung (Zusammenpressung des Gewölbes) entstanden. Da H_e negativ ist, so erzeugt es im Bogenteil unterhalb der x -Achse negative Biegemomente mit Druckspannungen an der inneren Leibung und Zugspannungen im Gewölberücken, im Bogenteil oberhalb der x -Achse dagegen Druckspannungen am Gewölberücken und Zugspannungen an der inneren Leibung (vgl. Abhandlung Mörsch, Seite 5). Durch H_e tritt also die beschriebene Verschiebung der Drucklinie ein, so zwar, daß sich die ursprüngliche Drucklinie mit der verbesserten auf der x -Achse schneidet; denn in dem Punkt der Gewölbeachse, welcher auf die x -Achse fällt, muß das Biegemoment infolge H_e zu Null werden.

Abgesehen von einer nach der oben angegebenen Weise möglichen genauen Berechnung von H_e gibt Schaechterle¹⁾ folgende Annäherungsformeln dafür an:

Für parabolische Gewölbeachse und $J \cdot \cos \varphi = J_s$ (Abb. 370) wird mit der Scheitelstärke ds und der Stichhöhe f

$$H_e = -\frac{15}{16} \left(\frac{ds}{f} \right)^2 \cdot H_s.$$

Liegt H_e fest, so berechnen sich die dadurch bedingten Randspannungen sehr einfach aus den Kernmomenten zu

$$\sigma_0 = + \frac{H_e \cdot y_{ku}}{w}, \quad \sigma_u = - \frac{H_e \cdot y_{ko}}{w};$$

(vgl. Abhandlung Mörsch, Seite 5), so daß aus Normal- und Biegungsspannungen zusammen die Gesamtspannungen

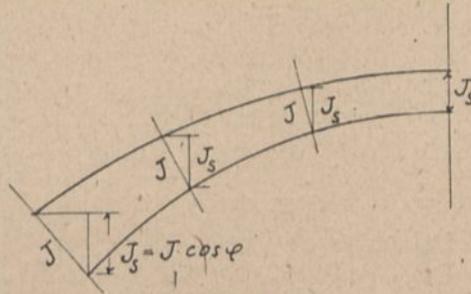


Abb. 370.

infolge ständiger Last feststellbar sind (siehe Abhandlung Mörsch, Tabelle Seite 5 mit dem nachfolgenden Absatz).

[Die provisorischen Gelenke können gegebenenfalls auch dazu benutzt werden, einen anfänglichen Spannungszustand zu erzeugen in der Weise, daß dadurch den später auftretenden Spannungen durch Nutzlast und Temperaturerniedrigung von vornherein entgegengearbeitet wird.]

Nach Schaechterle erhält man auch näherungsweise das

¹⁾ „Beiträge zur Theorie und Berechnung der elastischen Bogen, Bogenstellungen und mehrstieligen Rahmen.“ W. Ernst & Sohn.

²⁾ Berechnung der Randspannungen mit Hilfe der Kernpunktmomente, siehe das Kapitel: „Das Kernpunktverfahren in der Gewölbeberechnung“ in Schlüter: „Eisenbetonbau: Säule und Balken“. Verlag von Herm. Meüßer, Berlin, Anzeige am Schluß.

durch H_s hervorgerufene Biegemoment unter den gleichen Voraussetzungen wie vor im Scheitel zu

$$M = + \frac{5}{16} \cdot \frac{ds^2}{f} \cdot H_s,$$

im Kämpfer zu

$$M = - \frac{5}{8} \cdot \frac{ds^2}{f} \cdot H_s,$$

im Kämpfer also den doppelten Betrag des Scheitelmomentes.

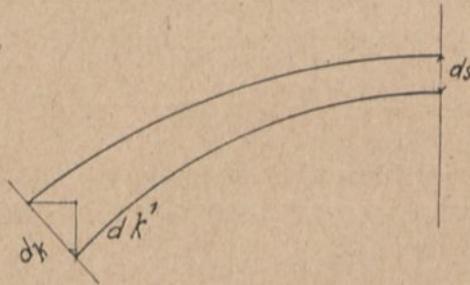


Abb. 371.

Die entsprechenden Spannungen folgen mit $H_s = \sigma_s \cdot F_s$ für den Scheitel aus

$$\sigma = \pm \frac{15}{8} \cdot \frac{ds}{f} \cdot \sigma_s$$

und für die Kämpfer aus

$$\sigma = \mp \frac{15}{4} \cdot \frac{dk'}{f} \cdot \sigma_s,$$

wobei dk' die Vertikalprojektion der Kämpferstärke bedeutet (Abb. 371). Zu diesen Spannungen wären also die Normalspannungen zu addieren.

Sind nunmehr die Spannungen infolge Eigengewicht festgelegt, so folgt mit Benutzung der Einflußlinien für H , V und M die Feststellung der durch Verkehrslast hervorgerufenen Biegemomente, schließlich die zugehörige Spannungsermittlung.

5. Berücksichtigung der Temperatur- und Schwindeinflüsse¹⁾.
(Vgl. hierzu die schweizerischen Vorschriften Artikel 5.)²⁾

¹⁾ Vorschriften darüber in den neuen deutschen Bestimmungen vom 13. Jan. 1916, § 15. — Beachte dazu: Aufsatz über „Wärmeeinfluß und Wärmebeobachtungen bei Betongewölben“ von Dr.-Ing. Schürch, Arm. Beton 1916, Heft 10, 11 u. 12.

²⁾ Beachte hierzu die neue Verordnung betreffend Eisenbetonbauten auf den schweizerischen Bundesbahnen vom 26. Nov. 1915, Art. 1, Ziffer d. Diese Verordnung ist in Beton u. Eisen 1916, Heft 2/3 und 4/5 näher besprochen.

Die einzige, durch gleichmäßige Temperatureinflüsse hervorgerufene, statisch unbekannte Größe ist — wie schon unter Abschnitt 4 in den Formeln gezeigt — der Horizontalschub. Der Temperaturschub ist also für sich

$$H = \frac{E \cdot a \cdot \tau \cdot l}{\int dw \cdot y^2 + \int \frac{ds}{F}} = \frac{E \cdot a \cdot \tau \cdot l}{\sum \frac{s}{J} \cdot y^2 + \sum \frac{s}{F}}$$

(vgl. Abhandlung Mörsch, Seite 6). (Bezüglich der von Prof. Mörsch weiter besprochenen ungleichmäßigen Erwärmung des Gewölbes und der damit zusammenhängenden Beanspruchungen sei auf den betreffenden Abschnitt des Sonderabdruckes Mörsch, Seite 6 verwiesen.)

Der lineare Wärmeausdehnungskoeffizient beträgt etwa $a = \varepsilon = 0,000012$.

Da das Schwinden dieselben Folgen zeitigt, wie eine Wärmeschwankung, so kann es durch die gleiche Rechnung berücksichtigt werden, die für Temperatur gilt. Das Schwindmaß beträgt 0,00025; es entspräche das einer Temperaturerniedrigung

von $t = \frac{0,00025}{0,000012} = 20 \text{ C}$. Es wäre aber nicht gerechtfertigt, das

Schwinden als Ursache für Biegungsspannungen mit einem so hohen Betrage zu berücksichtigen, weil es sich kurz nach dem Abbinden des Betons vollzieht und infolge der stückweisen Betonierung des Gewölbes (die mit Rücksicht auf möglichst gleichzeitige und allmähliche Belastung des Lehrgerüsts bei allen größeren Gewölben erfolgt) nur sehr wenig zur Wirkung gelangen kann. Man kann daher von der Berücksichtigung von Schwindspannungen absehen, wenn ein Gewölbe in einzelnen Lamellen betoniert wird.

Artikel 5 der schweizerischen Vorschriften bemerkt hierzu: „Bei Berücksichtigung dieser Einflüsse dürfen die zulässigen Spannungen für Temperatur allein um 20%, für Temperatur und Schwinden um 50% überschritten werden, wobei als äußerste Grenze die Eisenspannung von 1500 kg/cm² und die Betonspannung von 70 kg/cm² einzuhalten sind.“

Es verbleibt also nur die Berücksichtigung der Temperaturschwankungen. Allgemein können diese sich nur dann bemerkbar machen, wenn es sich um langandauernde Frost- oder Hitzeperioden (mittlere Monatstemperaturen) handelt. Denn nur dann

kann die zu einer Längenänderung erforderliche Umtemperierung des Gewölbes bis ins Innere hinein eintreten. Der Grad der Beeinflussung hängt natürlich auch mit von der Stärke des Gewölbes ab. Schwächere Gewölbe (Eisenbetongewölbe) werden schneller umtemperiert werden können als stärkere (Betongewölbe). Da ferner allgemein Bieugungsmomente um so eher zu Zugspannungen führen können, je geringer die gleichzeitig auftretenden Normalkräfte sind, so werden leicht gehaltene oben freie Eisenbetongewölbe bei Wärmeschwankungen bedeutend mehr auf Zug beansprucht werden können als gleich weit gespannte überschüttete Gewölbe, welche ohnehin gegen das Eindringen der Lufttemperatur besser geschützt sind. Ebenso verhält es sich mit der Wirkung der Verkehrslast bei leichten oder schweren Gewölben. Andererseits muß auch noch bedacht werden, daß der Einfluß der Verkehrslast um so mehr in die Wagschale fällt, je kleiner die Spannweite ist (je kleiner nämlich die Normalkräfte sind).

Im Verhältnis zu den durch die Verkehrslast hervorgerufenen Bieugungsspannungen werden also die Temperaturspannungen um so mehr bei der Bemessung berücksichtigt werden müssen, je kleiner die Spannweite und je leichter die Konstruktion gehalten ist.

Genau so wie die eintretende Verkürzung der Bogenachse bei abnehmendem Pfeilverhältnis ein Anwachsen des Zusatzschubes H_e mit sich bringt und damit auch größere Eigengewichtsbieugungsspannungen, genau so wird ferner auch der Einfluß der Temperatur bei flachen Gewölben stärker ins Gewicht fallen.

Die Bieugungsspannungen infolge des Eigengewichts und der Temperaturerniedrigung wurzeln eben beide in der gleichen Ursache, in der Verkürzung der Bogenachse; und mit einer Temperaturverminderung ist, wenn wir von Wärmeschwankungen sprechen, im wesentlichen zu rechnen, da die meisten Gewölbe in den Sommermonaten hergestellt werden.

Dr.-Ing. K. W. Schaechterle bemerkt in seinem oben angezogenen Buch über diesen Zusammenhang, daß die Verkürzung der Bogenachse infolge der Normalkräfte im großen Durchschnitt

$\frac{1}{10000}$ beträgt, und daß eine solche Verkürzung bei einer Temperaturerniedrigung um 10° C ebenfalls eintreten würde. Erfährt also das Gewölbe nach seiner Aufstellung eine Temperatur-

erhöhung um 10°C , so würden dadurch die durch Eigengewicht bedingten Biegungsspannungen wieder aufgehoben werden, und die Drucklinie deckte sich wieder mit der Bogenachse. Folgt dann noch eine Erhöhung um weitere 10°C , so erhalten wir das zugehörige Resultat an Biegungsspannungen, wenn wir die für die Verkürzung infolge Eigengewicht festgesetzten Biegungsspannungen bezüglich ihrer Wirkungslage im Querschnitt einfach umkehren.

Die Eigengewichtsbiegungsspannungen werden also, wenn die Aufstellungstemperatur bestehen bleibt, gleich nach dem Ausrüsten voll auftreten. Beträgt nun die Aufstellungstemperatur $+10^{\circ}\text{C}$, so werden sich die Biegungsspannungen infolge Eigengewicht gewissermaßen wieder wegheben, wenn die Temperatur nach dem Ausrüsten auf 20°C steigt und längere Zeit so anhält; sie würden jedoch eine Verdoppelung erfahren, wenn das Thermometer für längere Zeit bis auf 0° und eine Verdreifachung, wenn es bis auf -10°C herabginge usw. Wenn dann später im Sommer wieder 20°C Wärme erreicht werden, so würden alle Biegungsspannungen, abgesehen von der Verkehrslast, wieder gleich Null werden.

Nun können wir bei mitteldeutschem Klima im allgemeinen mit Maximaltemperaturen von $+25^{\circ}\text{C}$ und -15°C rechnen.

Ferner können wir, wenn nicht außerordentliche Verhältnisse die Herstellung des Gewölbes bei schon niedriger Frühlings- oder Herbsttemperatur erfordern, die Innentemperatur des Bauwerkes bei der Herstellung zu etwa $+10^{\circ}$ bis 15°C voraussetzen (allzu großen Wärmeeinflüssen bis etwa 25°C , muß ein frisch betoniertes Gewölbe sowieso durch Abdecken und Feuchthalten entzogen werden). Wir haben unter diesen Umständen dann nur außer den Eigengewichtseinflüssen noch mit einer Temperaturerniedrigung von $+10$ bis $-15 = 25^{\circ}\text{C}$ oder $+15$ bis $-15 = 30^{\circ}\text{C}$ zu rechnen.

Eine Temperaturerhöhung auf 20 bis 25°C können wir außer acht lassen, denn diese würde nur die Eigengewichtsbiegungsspannungen wieder aufheben.

Die Temperaturendeckungskoeffizienten bzw. Verkürzungskoeffizienten betragen

- für Beton etwa 0,000009,
- für Eisenbeton etwa 0,000012.

Die Elastizitätsmodule betragen

für Beton etwa 130—180 000 kg/cm²,

für Eisenbeton etwa 200—250 000 kg/cm² ¹⁾

(siehe Schaechterle).

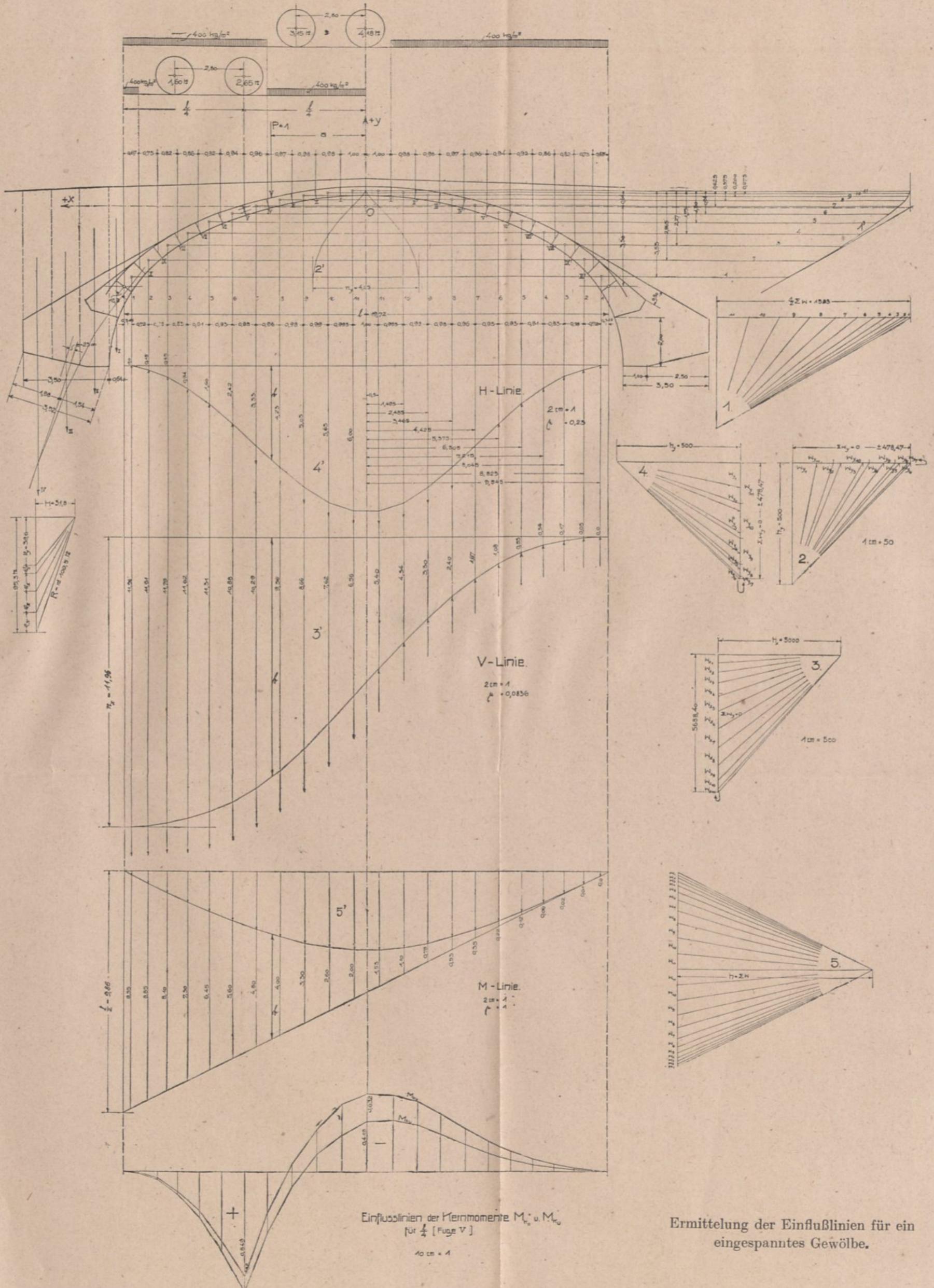
6. Allgemeine Schlußbemerkungen.

Nach diesen Erläuterungen dürften die Gesichtspunkte, die beim Gebrauch der Gewölbetheorie zu beobachten sind, klar gestellt sein. Im allgemeinen ist noch hinzuzufügen, daß, wenn es überhaupt angezeigt erscheint, Eisenbetonkonstruktionen nach Stadium I zu berechnen, dies bei eingespannten Gewölben in erster Linie gefordert werden kann. Wir haben im Rahmen unserer Betrachtung absolut starre Widerlager vorausgesetzt; ganz ausgeschlossen ist es jedoch wohl nie, daß, wenn auch nicht gerade eine lotrechte, so doch eine geringe wagerechte Nachgiebigkeit der Widerlager in Frage kommt; mindestens kann ein elastisches Ausweichen derselben vermutet werden. Dieses würde in demselben Sinne wie Eigengewicht, Temperaturerniedrigung und Schwinden wirken und die entsprechenden Zugspannungen unten am Scheitel und oben an den Kämpfern noch weiter erhöhen²⁾, so daß bei den immer vorzusetzenden ungünstigsten Verhältnissen die Beanspruchung der Zug-eisen sich so weit der Streckgrenze nähern könnte, daß Zugrisse im Beton auftreten. Man wird also die ungünstigst beanspruchten Querschnitte auch unter der Annahme nachprüfen müssen, daß der Beton an der Aufnahme der Zugkräfte voll beteiligt ist, wie es die „vorläufigen Bestimmungen für das Entwerfen und die Ausführung von Ingenieurbauten in Eisenbeton im Bezirke der Eisenbahndirektion Berlin“ (siehe Betonkalender) verlangen.

Nur bei weit gespannten bewehrten Brücken kann hin und wieder die Rücksicht auf Druckspannungen für die Bemessung der Querschnitte allein maßgebend sein. Man unterscheidet demnach Z-Gewölbe und D-Gewölbe. Was über die Eigenarten

¹⁾ Nach § 16, Ziffer 1 der Bestimmungen vom 13. Jan. 1916 ist $E = 210\,000 \text{ kg/cm}^2$ zu setzen.

²⁾ Deutsche Bauzeitung, Mitteilungen 1919, Nr. 5 bringt einen Aufsatz von Dr.-Ing. Gilbrin: „Faustformeln zur Berechnung der größten Zusatzmomente in statisch unbestimmten Bogenträgern“, der handliche Formeln zur Berücksichtigung der Störungsursachen (Schwinderscheinungen, Wärmeänderungen, Ausweichen der Widerlager, Verkürzung der Bogenachse durch die Normalspannungen) hinsichtlich der auftretenden Zusatzmomente enthält.



der nach dieser Unterscheidung möglichen Ausführungsformen zu sagen ist, möge im Schaechterle, S. 19 usw. nachgelesen werden.

Ein vollständiges Beispiel für die Durchführung der Berechnung einer eingespannten Bogenbrücke mit Berücksichtigung aller im Vorstehenden näher besprochenen Umstände hat uns Prof. Mörsch in der Beschreibung der „Gmündertobelbrücke bei Teufen im Kanton Appenzell“ gegeben (Sonderabdruck der Schweizerischen Bauzeitung), so daß wir dieselbe in jeder Beziehung als Muster hinstellen können. Da dort die analytische Einrechnung der Einflußlinien für die statisch unbestimmten Größen und auch die Momentenbestimmung mit Hilfe der besonders eingerechneten Einflußlinien für die Kernpunktmente erfolgt ist, so führen wir im folgenden noch ein anderes Beispiel vor, welches die namentlich für kleinere Bauwerke empfehlenswerte graphische Ermittlung der drei Einflußlinien für H , V und M und die direkte Benutzung derselben bei der Bestimmung der Momente zeigen soll.

Kapitel XLVI.

Vollständiges Beispiel der Berechnung einer gelenklosen Bogenbrücke mit graphischer Ermittlung der statisch unbestimmten Größen H , V und M und direkter Benutzung derselben zur Bestimmung der Momente¹⁾.

An Hand der Tafel II soll die genaue Nachprüfung der Spannungen einer gelenklosen Bogenbrücke von 21,0 m lichter Weite erläutert werden, deren hauptsächlichliche Abmessungen mehreren ähnlich ausgeführten, wegen ihrer Kleinheit von den ausführenden Firmen weniger genau berechneten Bauwerken einer Bahnstrecke entnommen sind. Die Belastung der Brücke besteht aus Überschüttung einschließlich Pflasterung von im Mittel $1,8 \text{ t/m}^3$; ferner beträgt das Gewicht

des Eisenbetons $2,4 \text{ t/m}^3$;

des Betons $2,2 \text{ t/m}^3$.

Die Verkehrsbelastung besteht aus einer 20 t-Dampfwalze und 400 kg/m^2 -Menschengedränge.

¹⁾ Ein weiteres Anwendungsbeispiel des Mörschschen Verfahrens bringt der in Fußnote 1 S. 364 angezogene Aufsatz von Dr.-Ing. Kunze, auch Deutsche Bauzeitung 1915, Mitteilungen, Nr. 16: „Berechnung der Bogentragrippen der Eisenbahnbrücke über die Saar bei Völklingen“.

1. Bestimmung der Gewölbeform.

Wir führen die ganze Berechnung für einen Streifen von 1 m Breite durch und legen zunächst nach der unter Abschnitt II besprochenen Weise die genaue Mittellinie des Gewölbes nach der Stützzlinie für ständige Last fest¹⁾. Da wir sowieso für die Ermittlung der statisch unbestimmten Größen später die Einteilung in eine Anzahl Teilstücke benötigen, so können wir die nämliche Einteilung in Lamellen auch gleich bei der jetzt zuerst vorzunehmenden Feststellung der Lamellenlasten benutzen. Wir wählen $2 \cdot 11 = 22$ gleiche Teile von der Länge $s = 1,00$ m (nötig ist es nicht, daß die Teile gleiche Länge haben).

Nachdem wir die Stützzlinie graphisch mit der Bogenmittellinie in Übereinstimmung gebracht haben, betragen die einzelnen Lamellengewichte:

Gewichtsstreifen für ständige Last.

$$G_1 = 1,0 \cdot 0,70 \cdot 2,4 + 0,67 \cdot 3,75 \cdot 1,8 = 5,6 \text{ t}$$

$$G_2 = 1,0 \cdot 0,64 \cdot 2,4 + 0,75 \cdot 2,65 \cdot 1,8 = 5,11$$

$$G_3 = 1,0 \cdot 0,59 \cdot 2,4 + 0,82 \cdot 2,15 \cdot 1,8 = 4,59$$

$$G_4 = 1,0 \cdot 0,53 \cdot 2,4 + 0,86 \cdot 1,70 \cdot 1,8 = 3,90$$

$$G_5 = 1,0 \cdot 0,49 \cdot 2,4 + 0,92 \cdot 1,35 \cdot 1,8 = 3,41$$

$$G_6 = 1,0 \cdot 0,44 \cdot 2,4 + 0,94 \cdot 1,05 \cdot 1,8 = 2,83$$

$$G_7 = 1,0 \cdot 0,40 \cdot 2,4 + 0,96 \cdot 0,80 \cdot 1,8 = 2,34$$

$$G_8 = 1,0 \cdot 0,38 \cdot 2,4 + 0,97 \cdot 0,60 \cdot 1,8 = 1,96$$

$$G_9 = 1,0 \cdot 0,36 \cdot 2,4 + 0,98 \cdot 0,45 \cdot 1,8 = 1,66$$

$$G_{10} = 1,0 \cdot 0,355 \cdot 2,4 + 0,99 \cdot 0,37 \cdot 1,8 = 1,51$$

$$G_{11} = 1,0 \cdot 0,35 \cdot 2,4 + 1,00 \cdot 0,35 \cdot 1,8 = 1,47$$

$$\frac{1}{2} \sum G = 34,38 \text{ t}$$

Die für den Entwurf nötigen mehreren Kräftepläne und Stützzlinien bis zur Gewinnung der definitiven Form und der definitive Kräfteplan sind auf Tafel II nicht wiedergegeben.

In den drei Querschnitten, welche wir hauptsächlich untersuchen wollen: im Scheitel, im Kämpfer und in $\frac{l}{4}$ (nur links) betragen nach dem Kräfteplan die zugehörigen Normaldrücke,

¹⁾ Mit dieser Grundlage weichen wir von der Nachprüfung der vorliegenden Gewölbe insofern ab, als es nicht feststeht, daß ihre Mittellinien nach den Stützzlinien für die ständige Last geformt worden sind. Es ist also leicht möglich, daß die nachfolgend berechneten Spannungen in Wirklichkeit wesentlich überschritten werden.

Querschnitte und gleichmäßigen Druckspannungen (wenn die Querschnitte aus der später folgenden Zusammenstellung entnommen werden):

	Normaldruck t	Querschnitt in m^2	Spannung $\cdot \frac{N}{F}$ in kg/cm^2
Scheitel	$H_s = 29,0$	0,359 054	8,1
Kämpfer	34,8	0,709 054	4,9
$\frac{l}{4}$ (Fuge V)	30,3	0,429 054	7,05

Diese Pressungen erscheinen uns zunächst recht niedrig; es mag ein weniger gutes Material verwendet worden sein. Zu beachten bleibt aber, daß bei kleineren Bauwerken die Einflüsse der Verkehrslasten mehr ins Gewicht fallen als bei größeren, so daß wir erst nach Feststellung der Gesamtspannungen ein Urteil über die ausgeführten Stärken abgeben können. Bei größeren Bauwerken pflegt man jedenfalls mit der Grundspannung höher hinaufzugehen (zu etwa $15 kg/cm^2$) und auch dafür zu sorgen, daß diese in allen Fugen möglichst gleich ausfällt.

Bevor wir nun H_s feststellen können, um damit die Eigengewichtsbiegungsspannungen festzulegen, müssen wir zunächst schreiten zur Konstruktion der

2. Einflußlinien der statisch unbestimmten Größen für H , V und M .

a) Festlegung des Achsenkreuzes.

Wir messen die mittleren Höhen der einzelnen Lamellen des Gewölbes heraus und bestimmen damit die Querschnitte, Trägheitsmomente und elastischen Gewichte $w = \frac{s}{J}$ in folgender Zusammenstellung (und zwar nur für eine Symmetriehälfte):

Das Gewölbe hat oben und unten durchweg je 10 Rundeisen 8 mm erhalten mit dem Querschnitt von je $5,03 cm^2$, zusammen also $10,06 cm^2$.

Mit $n = 10$ (nach den Bestimmungen der Eisenbahndirektion Berlin, siehe Betonkalender) beträgt der ideelle Querschnitt der Eiseneinlage in m^2 ausgedrückt

$$(10 - 1) \cdot 10,06 = 90,54 cm^2 = 0,009054 m^2.$$

Teilstück	Mittlere Höhe in m	Mittlerer Eisenbetonquerschnitt in m ²	Mittleres Trägheitsmoment m ⁴	Elastische Gewichte $w = \frac{s}{J}$
		$h \cdot b + (n - 1) \cdot (f_e + f'_e)$	$\frac{b \cdot h^3}{12} + (f_e + f'_e) \cdot (n - 1) \cdot \left(\frac{h}{2} - a\right)^2$	
1	0,70	0,709 054	0,029 539 66	34
2	0,64	0,649 054	0,022 633 28	44
3	0,59	0,599 054	0,017 774 95	56
4	0,53	0,539 054	0,012 927 93	77
5	0,49	0,499 054	0,010 242 30	98
6	0,44	0,449 054	0,007 442 95	134
7	0,40	0,409 054	0,005 610 61	179
8	0,38	0,389 054	0,004 819 16	208
9	0,36	0,369 054	0,004 105 52	244
10	0,355	0,364 054	0,003 938 80	254
11	0,35	0,359 054	0,003 776 63	265
				$\frac{1}{2} \sum w = 1593$

Hieran schließen wir die graphische Ermittlung des Schwerpunktes 0 der elastischen Gewichte w mit Hilfe des Kräfteplanes 1 und des zugehörigen Seilpolygons 1', was mit großer Genauigkeit auszuführen ist. In dem Kräfteplan 1 sind die einzelnen Gewichte w der Reihe nach aufgetragen worden. Nach Annahme

$$\begin{aligned}
 w_{y1} &= - 34 (3,55 - 0,64) = - 98,94 \\
 w_{y2} &= - 44 (2,865 - 0,64) = - 97,90 \\
 w_{y3} &= - 56 (2,27 - 0,64) = - 91,28 \\
 w_{y4} &= - 77 (1,75 - 0,64) = - 85,47 \\
 w_{y5} &= - 98 (1,30 - 0,64) = - 64,68 \\
 w_{y6} &= - 134 (0,94 - 0,64) = - 40,20 - 478,47 = \underline{\underline{\sum -}} \\
 w_{y7} &= 179 (0,64 - 0,625) = 2,685 \\
 w_{y8} &= 208 (0,64 - 0,375) = 55,120 \\
 w_{y9} &= 244 (0,64 - 0,200) = 107,36 \\
 w_{y10} &= 254 (0,64 - 0,075) = 143,51 \\
 w_{y11} &= 265 \cdot 0,64 = 169,60 + 478,47 = \underline{\underline{\sum +}}
 \end{aligned}$$

eines beliebigen Poles kann die Seillinie Fig. 1' gezeichnet werden. Die senkrechte Schwerachse fällt mit der y -Achse zusammen, da ein symmetrisches Gewölbe vorliegt.

Es folgt nun die Ermittlung der statischen Momente $w \cdot y = w_y$ gemäß den Anforderungen des Abschnittes III unter Nr. 2, was ohne weiteres graphisch ausführbar ist, aber wegen größerer Genauigkeit in vorstehender Zusammenstellung noch analytisch nachgeprüft wird.

Die Teilsummen entgegengesetzten Vorzeichens müssen gleichgroß sein.

b) Ermittlung der Nenner.

Nennergröße von H .

$$H = \frac{\sum M_0 \cdot w_y}{\sum y \cdot w_y + \sum \frac{s}{F}}$$

Das erste Nennerglied $\sum y \cdot w_y$ läßt sich darstellen als das statische Moment der w -Gewichte bezogen auf die x -Achse und wird gefunden mit Kraftpolygon 2 und Seilpolygon 2' (vgl. Mörsch, Seite 3, linke Spalte). Im Kraftpolygon 2 sind die einzelnen w_y -Gewichte dem Vorzeichen nach aufgetragen. Wir finden nun $\sum y \cdot w_y = n_y \cdot h_y$ aus Polygon 2 bzw. 2' zu $4,25 \cdot 500 = 2125$.

Das zweite Nennerglied $\sum \frac{s}{F}$ ergibt sich aus folgender Aufstellung:

$$\frac{s}{F_1} = 1,0 : 0,709054 = 1,413$$

$$\frac{s}{F_2} = 1,0 : 0,649054 = 1,541$$

$$\frac{s}{F_3} = 1,0 : 0,599054 = 1,669$$

$$\frac{s}{F_4} = 1,0 : 0,539054 = 1,855$$

$$\frac{s}{F_5} = 1,0 : 0,499054 = 2,044$$

$$\frac{s}{F_6} = 1,0 : 0,449054 = 2,227$$

$$\frac{s}{F_7} = 1,0 : 0,409054 = 2,445$$

$$\frac{s}{F_8} = 1,0 : 0,389054 = 2,570$$

$$\frac{s}{F_9} = 1,0 : 0,369054 = 2,710$$

$$\frac{s}{F_{10}} = 1,0 : 0,364054 = 2,747$$

$$\frac{s}{F_{11}} = 1,0 : 0,359054 = 2,785$$

$$\frac{1}{2} \sum \frac{s}{F} = 23,966$$

$$\sum \frac{s}{F} = 47,932$$

Die Nennergröße von

$$V = \frac{\sum M_0 \cdot w_x}{\sum x \cdot w_x}$$

wird genau in derselben Weise gebildet.

Also zunächst Bildung der statischen Momente $w \cdot x = w_x$

w_{x1}	=	$34 \cdot 9,545$	=	324,53
w_{x2}	=	$44 \cdot 8,825$	=	388,30
w_{x3}	=	$56 \cdot 8,045$	=	450,52
w_{x4}	=	$77 \cdot 7,215$	=	555,55
w_{x5}	=	$98 \cdot 6,305$	=	617,89
w_{x6}	=	$134 \cdot 5,375$	=	720,25
w_{x7}	=	$179 \cdot 4,425$	=	792,07
w_{x8}	=	$208 \cdot 3,465$	=	720,72
w_{x9}	=	$244 \cdot 2,485$	=	606,34
w_{x10}	=	$254 \cdot 1,495$	=	379,73
w_{x11}	=	$265 \cdot 0,500$	=	132,50
				5688,40

Hierzu ist Kraftpolygon 3 und Seilpolygon 3' gezeichnet. Mit Hilfe dieser Pläne erhalten wir $\sum x \cdot w_x = n_x \cdot h_x = 11,96 \cdot 5000 = 59800$ (siehe Tafel II).

Den Nenner der dritten Gleichung

$$M = - \frac{\sum M_0 \cdot w}{\sum w}$$

haben wir in der ersten Aufstellung schon bestimmt.

e) Ermittlung der Zähler und vollständige Einflußliniengleichungen für H , V und M .

Siehe zunächst die ohne weiteres verständliche Erklärung dazu mit der Angabe über die rechnerische Auflösung Abhandlung Mörsch (Seite 3, linke Spalte), wo auch die Erläuterung der graphischen Behandlung gegeben ist.

Für den Zähler von H oder für

$$\sum M_0 \cdot w_y = - \sum_a^l w_y (a - x)$$

ist das Kräftepolygon Fig. 4 mit derselben Polweite h_y wie in Fig. 2 gezeichnet worden, nur um 90° nach links gedreht.

Das zugehörige Seilpolygon ist Fig. 4'. Wir gewinnen nun-

mehr den Zähler durch die unter der Last P liegende Ordinate b multipliziert mit h_y ; es wird also nun H vollständig

$$H = \frac{b \cdot h_y}{n_y \cdot h_y + \sum \frac{s}{F}} = \frac{b}{n_y + \frac{1}{h_y} \cdot \sum \frac{s}{F}}.$$

In der letzten Form können wir das Seilpolygon 4' als **Einflußlinie des Horizontalschubes H** auffassen, so daß derselbe jedesmal gefunden wird durch Heraussuchen der Ordinate b und Division derselben durch ein und denselben Nenner.

In unserem Falle ist für den Nenner

$$\begin{aligned} n_y &= 4,250\,000 \\ \frac{1}{h_y} \cdot \sum \frac{s}{F} &= \frac{47,932}{500} = 0,095\,864 \end{aligned}$$

Demnach ist jetzt stets

$$H = \frac{b}{4,345\,864} = b \cdot \mu = b \cdot 0,23.$$

Zähler von V oder

$$\sum M_0 \cdot w_x = - \sum_a^{\frac{l}{2}} w_x (a - x).$$

Hierzu können wir das schon gezeichnete Kräftepolygon 3 und das Seilpolygon 3' benutzen und erhalten genau so wie vor

$$V = \frac{b \cdot h_x}{n_x \cdot h_x} = \frac{b}{n_x}.$$

Das Seilpolygon 3' ist also zugleich die **Einflußlinie für V** ; wir erhalten in unserem Falle für

$$V = \frac{b}{n_x} = \frac{b}{11,96} = b \cdot \mu = b \cdot 0,0836.$$

Zähler von M oder

$$- \sum M_0 \cdot w = + \sum_a^{\frac{l}{2}} w \cdot (a - x).$$

Dieser wird aus dem Kräftepolygon 5 und dem Seilpolygon 5' gewonnen. Machen wir $h = \sum w$, was dem Nenner entspricht, so ist

$$M = \frac{b \cdot \sum w}{\sum w} = b,$$

d. h. Seilpolygon 5' stellt uns die **Einflußlinie von M** dar, und zwar haben wir nur die Länge b unmittelbar herauszumessen.

Nachdem so die Einflußlinien für H , V und M gewonnen sind, können wir später damit die Einflüsse der Verkehrslast auf die Biegemomente feststellen.

3. Die Biegungsspannungen infolge Eigengewichtes.

Es ist

$$H_e = - \frac{H_e \cdot \sum \frac{s}{F}}{\sum w \cdot y^2 + \sum \frac{s}{F}} \quad (\text{vgl. III, 4})$$

$$= - \frac{29\,000 \cdot 47,93}{2125 + 47,93} = - 640 \text{ kg.}$$

H_e erzeugt, wie erläutert, im Bogenteil unterhalb der x -Achse Druckspannungen an der inneren Leibung und Zugspannungen an der oberen Leibung, im Bogenteil oberhalb der x -Achse Druckspannungen im Gewölberücken und Zugspannungen an der inneren Leibung. Es ist besser, sich bei der Bestimmung der Zusatzspannungen hierüber klar zu sein, als auf die Vorzeichen zu achten.

Anmerkung. Die Randspannungen infolge H_e ergaben sich vollständig nach den auf S. 371 angegebenen Gleichungen $\sigma_o = + \frac{H_e \cdot y_{ko}}{w}$, $\sigma_u = - \frac{H_e \cdot y_{ku}}{w}$; beziehen wir die Ordinaten y nicht auf Kernpunkte, sondern auf die Mittelpunkte der Querschnitte, so wären die Spannungen nach der Gleichung σ_o oder $\sigma_u = \frac{H_e}{F} \pm \frac{H_e \cdot y}{w}$ zu ermitteln. Wir haben hier der Einfachheit halber von der Feststellung der Kernweiten zunächst abgesehen und berechnen die Spannungen nach der letzten Gleichung mit Vernachlässigung der in diesem Falle sehr geringen Werte $\frac{H_e}{F}$.

Wir erhalten am Kämpfer mit $y = 330$ cm und

$$W = \frac{J}{a} = \frac{2\,953\,966}{35} = 84\,400 \text{ cm}^3$$

(70 cm Stärke)

die Biegungsspannungen für den homogenen Querschnitt zu

$$\sigma_o = \frac{H_e \cdot y}{W} = \frac{640 \cdot 330}{84\,400} = 2,5 \text{ kg/cm}^2 \text{ Zug,}$$

$$\sigma_u = \frac{H_e \cdot y}{W} = \frac{640 \cdot 330}{84\,400} = 2,5 \text{ kg/cm}^2 \text{ Druck;}$$

in $\frac{l}{4}$ mit $y = 11$ cm (unterhalb der x -Achse) und $W = \text{rd. } 31\,000 \text{ cm}^3$

(Stärke in Fuge V 42,0 cm)

$$\sigma_o \text{ bzw. } \sigma_u = \frac{640 \cdot 11}{31\,000} = 2,03 \text{ kg/cm}^2 \text{ Zug bzw. Druck;}$$

im Scheitel mit $y = 64$ cm, $W = \text{rd. } 21\,500$ cm³
(Stärke 35 cm),

$$\sigma_0 = \frac{640 \cdot 64}{21\,500} = 1,9 \text{ kg/cm}^2 \text{ Druck,}$$

$$\sigma_u = \frac{640 \cdot 64}{21\,500} = 1,9 \text{ kg/cm}^2 \text{ Zug.}$$

Die Gesamtspannung infolge Eigengewicht wird also:

	Kämpfer	$\frac{l}{4}$	Scheitel
σ_0	$4,9 - 2,5 = 2,4$	$7,05 - 0,23 = 6,82$	$8,1 + 1,9 = 10,0$
σ_u	$4,9 + 2,5 = 7,4$	$7,05 + 0,23 = 7,28$	$8,1 - 1,9 = 6,2$

und zwar durchweg Druck.

4. Die Biegungsspannungen infolge der Verkehrslasten¹⁾.

a) Einseitige Verkehrslast.

Dampfwalze mit Vorderrad in $\frac{l}{4}$, im übrigen auf der Gewölbehälfte Menschengedränge. Die Walzenlasten werden je auf zwei Lamellen verteilt, obgleich in Wirklichkeit eine weitere Verteilung eintritt.

Lamellenlasten.

Es betragen somit die Lamellenlasten auf der linken belasteten Seite:

$$G_1 \quad 0,67 \cdot 0,40 = 0,268 \text{ t}$$

$$G_2 \quad \dots \dots = 0 \quad \text{,,}$$

$$G_3 \quad \frac{1,60}{2} \dots = 0,80 \quad \text{,,}$$

$$G_4 \quad \frac{1,60}{2} \dots = 0,80 \quad \text{,,}$$

$$G_5 \quad \dots \dots = 0 \quad \text{,,}$$

$$G_6 \quad \frac{2,65}{2} \dots = 1,325 \text{ ,,}$$

$$G_7 \quad \frac{2,65}{2} \dots = 1,325 \text{ ,,}$$

$$G_8 \quad 0,97 \cdot 0,40 = 0,388 \text{ ,,}$$

$$G_9 \quad 0,98 \cdot 0,40 = 0,392 \text{ ,,}$$

$$G_{10} \quad 0,99 \cdot 0,40 = 0,395 \text{ ,,}$$

$$G_{11} \quad 1,00 \cdot 0,40 = 0,400 \text{ ,,}$$

$$\text{zusammen} = 6,093 \text{ rd. } 6,1 \text{ t.}$$

¹⁾ Ebenfalls mit Vernachlässigung der gegenüber dem Eigengewicht sehr geringen Normalspannungen gemäß der Anmerkung Seite 384.

Statisch unbestimmte Größen für diesen Belastungszustand.

$$H = 0,23[0,268 \cdot 0 + 0 \cdot 0,15 + 0,8 \cdot 0,45 + 0,8 \cdot 0,944 + 0 \cdot 1,60 \\ + 1,325 \cdot 2,42 + 1,325 \cdot 3,33 + 0,388 \cdot 4,23 + 0,392 \cdot 5,05 \\ + 0,395 \cdot 5,65 + 0,40 \cdot 6,0 + 0 + 0 + \dots] = 3,9 \text{ t};$$

$$V_L = 0,0836[0,268 \cdot 11,96 + 0 \cdot 11,91 + 0,8 \cdot 11,79 + 0,8 \cdot 11,62 \\ + 0 \cdot 11,31 + 1,325 \cdot 10,88 + 1,325 \cdot 10,29 + 0,388 \cdot 9,56 \\ + 0,392 \cdot 8,66 + 0,395 \cdot 7,62 + 0,40 \cdot 6,56 + 0 + 0 + \dots] \\ = 5,25 \text{ t};$$

$$V_R = 6,1 - 5,25 = 0,85 \text{ t};$$

$$M_L = 0,268 \cdot 9,55 + 0 \cdot 8,85 + 0,8 \cdot 8,10 + 0,8 \cdot 7,30 + 0 \cdot 6,45 \\ + 1,325 \cdot 5,60 + 1,325 \cdot 4,80 + 0,388 \cdot 4,00 + 0,392 \cdot 3,30 \\ + 0,395 \cdot 2,60 + 0,40 \cdot 2,0 + 0 + 0 + \dots = + 33,29 \text{ tm.}$$

Die Einflußlinie für M_R ist das Spiegelbild der M_L -Linie.

$$M_R = 0,40 \cdot 1,53 + 0,395 \cdot 1,10 + 0,392 \cdot 0,78 + 0,388 \cdot 0,53 \\ + 1,325 \cdot 0,35 + 1,325 \cdot 0,22 + 0 \cdot 0,124 + 0,8 \cdot 0,06 \\ + 0,8 \cdot 0,02 + 0 \cdot 0,01 + 0,268 \cdot 0 = 2,374 \text{ tm.}$$

Berechnung der Biegemomente und Spannungen.

Linker Kämpferquerschnitt.

$$x = + 9,86; \quad y = - 3,30;$$

$$M_{KL} = M_0 + M - H \cdot y - V \cdot x \\ = 0 + 33,29 + 3,9 \cdot 3,3 - 5,25 \cdot 9,86 = - 5,58 \text{ tm.}$$

Spannungen:

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{558000}{84400} = 6,6 \text{ kg/cm}^2,$$

und zwar als Zug oben, als Druck unten.

Rechter Kämpferquerschnitt.

$$M_{KR} = M_0 + M - H \cdot y - V \cdot x \\ = 0 + 2,374 + 3,9 \cdot 3,3 - 0,85 \cdot 9,86 = + 6,86 \text{ tm.}$$

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{686000}{84400} = 8,12 \text{ kg/cm}^2$$

(Zug unten, Druck oben).

Scheitel.

$$M = M_0 + M - H \cdot y - V \cdot x.$$

Hier haben wir erst das M_0 -Moment zu bestimmen.

$$M_0 = - (0,268 \cdot 9,545 + 0 + 0,8 \cdot 8,045 + 0,8 \cdot 7,215 + 0 \\ + 1,325 \cdot 5,375 + 1,325 \cdot 4,425 + 0,388 \cdot 3,465 + 0,39 \cdot 2,485 \\ + 0,395 \cdot 1,495 + 0,40 \cdot 0,5) = - 30,85 \text{ tm.}$$

$$H = 3,9 \text{ t}, \quad V_L = 5,25 \text{ t}, \quad M_L = + 33,29 \text{ tm.}$$

Dann wird mit $y = + 0,64$ und $x = 0$

$$M_s = - 30,85 + 33,29 - 3,9 \cdot 0,64 - 0 = - 0,06 \text{ tm};$$

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{6000}{21500} = 2,80 \text{ kg/cm}^2$$

(Zug oben, Druck unten).

Querschnitt in $\frac{l}{4}$ (links).

$$\begin{aligned} M_0 &= - [0,27 (9,545 - 4,93) + 0 (8,825 - 4,93) + 0,8 (8,405 - 4,93) \\ &\quad + 0,8 (7,25 - 4,93) + 0 (6,305 - 4,93) + 1,325 (5,375 - 4,93)] \\ &= - 6,16 \text{ tm.} \end{aligned}$$

$$H = 3,9 \text{ t}, \quad V_L = 5,25 \text{ t}, \quad M_L = 33,29 \text{ tm.}$$

Damit wird, mit $y = - 0,11$ und $x = + 4,93$:

$$M = - 6,16 + 33,29 + 3,9 \cdot 0,11 - 5,25 \cdot 4,93 = + 1,66 \text{ tm}$$

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{166000}{31000} = 5,35 \text{ kg/cm}^2$$

(oben Druck, unten Zug).

b) Volle Belastung.

Dampfwalze mit dem Vorderrad im Scheitel des Gewölbes, im übrigen über das ganze Gewölbe Verkehrslast von 400 kg/m^2 .

Lamellenlasten.

	Linke Hälfte:	Rechte Hälfte:
	$G_1 \quad 0,67 \cdot 0,40 = 0,268$	$G_{11} \text{ Walze} = 2,090$
	$G_2 \quad 0,75 \cdot 0,40 = 0,300$	$G_{10} \quad 0,98 \cdot 0,40 = 0,392$
	$G_3 \quad 0,82 \cdot 0,40 = 0,328$	$G_9 \quad 0,98 \cdot 0,40 = 0,392$
	$G_4 \quad 0,86 \cdot 0,40 = 0,344$	$G_8 \quad 0,97 \cdot 0,40 = 0,388$
	$G_5 \quad 0,92 \cdot 0,40 = 0,368$	$G_7 \quad 0,96 \cdot 0,40 = 0,384$
	$G_6 \quad 0,94 \cdot 0,40 = 0,376$	$G_6 \quad 0,94 \cdot 0,40 = 0,376$
	$G_7 \quad 0,96 \cdot 0,40 = 0,384$	$G_5 \quad 0,92 \cdot 0,40 = 0,368$
Walze	$G_8 \quad \frac{3,15}{2} \quad \cdot = 1,58$	$G_4 \quad 0,86 \cdot 0,40 = 0,344$
	$G_9 \quad \frac{3,15}{2} \quad \cdot = 1,58$	$G_3 \quad 0,82 \cdot 0,40 = 0,328$
	$G_{10} \quad \cdot \cdot \cdot \cdot = 0$	$G_2 \quad 0,75 \cdot 0,40 = 0,300$
	$G_{11} \quad \frac{4,18}{2} \quad \cdot = 2,09$	$G_1 \quad 0,67 \cdot 0,40 = 0,268$
	<hr/>	<hr/>
	7,618 t	5,630 t

Zusammen $7,618 + 5,630 = 13,248 \text{ t} = \text{rd. } 13,25 \text{ t.}$

Da wir also längere Strecken mit der gleichmäßigen Last von 0,4 t/m zu belasten haben, so dürfte es sich wohl empfehlen, von der im Anhang „Die Elemente der Einflußlinienlehre“ erklärten Lösung Gebrauch zu machen und — anstatt die kleinen Teilsummen zu bilden — den Flächeninhalt der Einflußfläche durch Substitution geradliniger Figuren zu ersetzen und mit der Last pro laufenden Meter zu multiplizieren.

Indessen sei hier zunächst davon abgesehen, damit der Gebrauch der Einflußlinien klar hervorgeht.

Statisch unbestimmte Größen für diesen Belastungszustand.

$$H = 0,23 [0,268 \cdot 2 \cdot 0 + 0,30 \cdot 2 \cdot 0,15 + 0,33 \cdot 2 \cdot 0,45 + 0,34 \cdot 2 \cdot 0,94 + 0,37 \cdot 2 \cdot 1,60 + 0,38 \cdot 2 \cdot 2,42 + 0,38 \cdot 2 \cdot 3,33 + (1,58 + 0,388) \cdot 4,23 + (1,58 + 0,39) \cdot 5,05 + (0 + 0,392) \cdot 5,65 + 2,09 \cdot 2 \cdot 6,0] = 0,23 \cdot 52,17 = 12 \text{ t};$$

$$V_L = 0,0836 [0,27 \cdot 11,96 + 0,30 \cdot 11,91 + 0,33 \cdot 11,79 + 0,34 \cdot 11,62 + 0,37 \cdot 11,31 + 0,38 \cdot 10,88 + 0,38 \cdot 10,29 + 1,58 \cdot 9,56 + 1,58 \cdot 8,66 + 0 + 2,09 \cdot 6,56 + 2,09 \cdot 5,4 + 0,40 \cdot 4,34 + 0,39 \cdot 3,30 + 0,39 \cdot 2,40 + 0,38 \cdot 1,67 + 0,376 \cdot 1,08 + 0,37 \cdot 0,65 + 0,34 \cdot 0,34 + 0,33 \cdot 0,17 + 0,3 \cdot 0,05 + 0,27 \cdot 0] = 0,0836 \cdot 86,093 = 7,3 \text{ t};$$

$$V_R = 13,25 - 7,30 = 5,95 \text{ t};$$

$$M_L = 0,27 \cdot 9,55 + 0,30 \cdot 8,85 + 0,33 \cdot 8,10 + 0,34 \cdot 7,30 + 0,37 \cdot 6,45 + 0,38 \cdot 5,60 + 0,38 \cdot 4,80 + 1,58 \cdot 4,0 + 1,58 \cdot 3,30 + 0 + 2,09 \cdot 2 + 2,09 \cdot 1,53 + 0,40 \cdot 1,10 + 0,39 \cdot 0,78 + 0,39 \cdot 0,53 + 0,38 \cdot 0,35 + 0,376 \cdot 0,22 + 0,37 \cdot 0,12 + 0,34 \cdot 0,06 + 0,33 \cdot 0,02 + 0,3 \cdot 0,01 + 0,27 \cdot 0 = + 36,87 \text{ tm};$$

$$M_R = 0,27 \cdot 9,55 + 0,30 \cdot 8,85 + 0,33 \cdot 8,10 + 0,34 \cdot 7,30 + 0,37 \cdot 6,45 + 0,38 \cdot 5,6 + 0,38 \cdot 4,80 + 0,39 \cdot 4,00 + 0,39 \cdot 3,30 + 0,40 \cdot 2,60 + 2,09 \cdot 2,0 + 2,09 \cdot 1,53 + 0 + 1,58 \cdot 0,78 + 1,58 \cdot 0,53 + 0,38 \cdot 0,35 + 0,38 \cdot 0,22 + 0,37 \cdot 0,12 + 0,34 \cdot 0,06 + 0,33 \cdot 0,02 + 0,30 \cdot 0,01 + 0,27 \cdot 0 = + 30,32 \text{ tm}.$$

Berechnung der Biegemomente und Spannungen.

Linker Kämpferquerschnitt.

$$M_{KL} = 0 + 36,87 + 12,0 \cdot 3,3 - 7,3 \cdot 9,86 = + 4,47 \text{ tm}.$$

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{447000}{84400} = 5,3 \text{ kg/cm}^2$$

(oben Druck, unten Zug).

Rechter Kämpferquerschnitt.

$$M = 0 + 30,32 + 12,0 \cdot 3,3 - 5,95 \cdot 9,86 = + 11,12 \text{ tm.}$$

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{1112000}{84400} = 13,2 \text{ kg/cm}^2$$

(oben Druck, unten Zug).

Scheitelquerschnitt.

$$x = 0, \quad y = + 0,64.$$

$$M_0 = - (0,27 \cdot 9,545 + 0,30 \cdot 8,825 + 0,33 \cdot 8,045 + 0,34 \cdot 7,215 \\ + 0,37 \cdot 6,305 + 0,38 \cdot 5,375 + 0,38 \cdot 4,425 + 1,58 \cdot 3,465 \\ + 1,58 \cdot 2,485 + 0 + 2,09 \cdot 0,5) = - 26,85 \text{ tm;}$$

$$M_L = 36,87, \quad H = 12 \text{ t}, \quad V_L = 7,3 \text{ t;}$$

$$M_s = - 26,85 + 36,87 - 12 \cdot 0,64 - 0 = + 2,32 \text{ tm;}$$

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{232000}{21500} = 10,8 \text{ kg/cm}^2$$

(oben Druck, unten Zug).

Querschnitt in $\frac{l}{4}$ (links).

$$x = \pm \frac{9,86}{2} = 4,93. \quad y = - 0,11.$$

$$M_0 = - [0,27 (9,545 - 4,93) + 0,30 (8,825 - 4,93) \\ + 0,33 (8,045 - 4,93) + 0,34 (7,25 - 4,93) \\ + 0,37 (6,305 - 4,93) + 0,38 (5,375 - 4,93)] = - 4,89 \text{ tm;}$$

$$M_L = - 4,89 + 36,87 + 12 \cdot 0,11 - 7,3 \cdot 4,93 = - 2,70 \text{ tm;}$$

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{270000}{31000} = 8,7 \text{ kg/cm}^2$$

(oben Zug, unten Druck).

5. Temperaturspannungen.

Infolge eines Temperaturunterschiedes von $\tau = \pm 30^\circ \text{ C}$ wird mit

$$\alpha = 0,000012 \quad \text{und} \quad E = 2000000 \text{ t/m}^2$$

$$H_\tau = \pm \frac{E \cdot \alpha \cdot \tau \cdot l}{\sum w \cdot y^2 + \sum \frac{s}{F}} = \\ = \pm \frac{2000000 \cdot 0,000012 \cdot 30 \cdot 19,72}{2145 + 47,93} = \pm 6,5 \text{ t.}$$

Die zugehörigen Spannungen ergeben sich genau so wie bei H_e zu

$$\begin{aligned} \text{am Kämpfer} &= \pm \frac{6500 \cdot 330}{84400} = \pm 25,4 \text{ kg/cm}^2 \\ \text{in } \frac{l}{4} &= \pm \frac{6500 \cdot 11}{31000} = \pm 2,3 \text{ kg/cm}^2 \\ \text{im Scheitel} &= \pm \frac{6500 \cdot 64}{21500} = \pm 19,3 \text{ kg/cm}^2. \end{aligned}$$

Die Temperatureinflüsse führen also bei Gewölben zu beträchtlichen Spannungen.

6. Zusammenstellung und Schlußbemerkungen.

	Linker Kämpfer	Rechter Kämpfer	Scheitel	$\frac{l}{4}$ (links)
Eigen- gewicht	$\sigma_0 = 2,4$ Druck	2,4 Druck	10,0 Druck	6,82 Druck
	$\sigma_u = 7,4$ Druck	7,4 Druck	6,2 Druck	7,28 Druck
Einseitige Last links	$\sigma_0 = 6,6$ Zug	8,12 Druck	0,28 Zug	5,35 Druck
	$\sigma_u = 6,6$ Druck	8,12 Zug	0,28 Druck	5,35 Zug
Volle Belastung	$\sigma_0 = 5,3$ Druck	13,2 Druck	10,8 Druck	8,70 Zug
	$\sigma_u = 5,3$ Zug	13,2 Zug	10,8 Zug	8,70 Druck
Temperatur	$\pm 25,4$	$\pm 25,4$	$\pm 19,3$	$\pm 2,3$

Mögliche Höchstspannungen:

$\sigma_0 = 33,10$ Druck	41,00 Druck	40,10 Druck	14,47 Druck
29,60 Zug	23,00 Zug	8,78 Zug	4,18 Zug
$\sigma_u = 39,40$ Druck	32,80 Druck	25,78 Druck	18,28 Druck
23,30 Zug	31,20 Zug	23,90 Zug	0,37 Zug

Selbstverständlich können die Spannungen, die für die linke Kämpferfuge ermittelt sind, auch in der rechten auftreten.

Die Höchstspannungen sind

41,0 kg/cm² Druck und
31,2 kg/cm² Zug.

Hinsichtlich der nach § 17, Ziffer 5, Absatz 3 zugelassenen Betonzugspannung erscheint daher das Gewölbe — insbesondere nach den Kämpfern hin — als zu schwach bemessen, zumal der Einfluß der Schwindung (nach § 15, Ziffer 2 etwa gleich dem Einfluß eines Wärmeabfalls von 15° C) noch unberücksichtigt geblieben ist.

Wir haben hier alle Spannungen für die homogenen Querschnitte berechnet; bei Ausschaltung der Zugzonen dürften die Druckspannungen sich im allgemeinen noch erhöhen.

Einflußordinaten der Kernmomente M_{ko} und M_{ku} für $\frac{l}{4}$ (Fuge V).

$x_{ko} = 4,955, \quad x_{ku} = 4,905, \quad y_{ko} = -0,06 \qquad y_{ku} = -0,20, \qquad M_k = M_0 + M - H \cdot y_k - V \cdot x_k$											
$P = 1$	$-H \cdot y_{ku}$	$-H \cdot y_{ko}$	H ($\mu = 0,23$)	M ($\mu = 1$)	M_{oko}	M_{oku}	V ($\mu = 0,0836$)	$-V \cdot x_{ko}$	$-V \cdot x_{ku}$	M_{ko}	M_{ku}
i. r. Kämpfer	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
in X'	+ 0,00345	+ 0,001035	0,075	0,005	—	—	0,025	-0,0104	-0,0102	-0,0044	-0,0017
IX'	+ 0,0138	+ 0,00414	0,300	0,015	—	—	0,110	-0,0456	-0,0450	-0,0265	-0,0222
VIII'	+ 0,0319	+ 0,00959	0,695	0,040	—	—	0,255	-0,1056	-0,104	-0,0560	-0,0321
VII'	+ 0,0585	+ 0,0175	1,270	0,090	—	—	0,495	-0,205	-0,203	-0,0975	-0,0545
VI'	+ 0,0925	+ 0,0277	2,010	0,170	—	—	0,865	-0,3585	-0,355	-0,1608	-0,0925
V'	+ 0,132	+ 0,0394	2,875	0,285	—	—	1,375	-0,570	-0,564	-0,2456	-0,147
IV'	+ 0,174	+ 0,0521	3,780	0,440	—	—	2,035	-0,842	-0,836	-0,3499	-0,222
III'	+ 0,213	+ 0,0640	4,640	0,655	—	—	2,850	-1,180	-1,170	-0,461	-0,302
II'	+ 0,246	+ 0,074	5,350	0,940	—	—	3,820	-1,590	-1,570	-0,576	-0,384
I'	+ 0,268	+ 0,0805	5,825	1,315	—	—	4,870	-2,020	-2,000	-0,624	-0,417
Scheitel	+ 0,276	+ 0,0830	6,00	1,765	—	—	5,980	-2,48	-2,460	-0,632	-0,419
I	+ 0,268	+ 0,0805	5,825	2,300	—	—	7,090	-2,93	-2,91	-0,55	-0,342
II	+ 0,246	+ 0,0740	5,350	2,950	—	—	8,140	-3,37	-3,34	-0,346	-0,144
III	+ 0,213	+ 0,0640	4,640	3,650	—	—	9,110	-3,77	-3,74	-0,056	-0,123
IV	+ 0,174	+ 0,0521	3,780	4,400	—	—	9,925	-4,11	-4,07	-0,342	-0,504
V	+ 0,132	+ 0,0394	2,875	5,200	—	—	10,585	-4,39	-4,35	+ 0,849	+ 0,982
VI	+ 0,0925	+ 0,0277	2,010	6,025	-0,915	-0,965	11,095	-4,60	-4,54	+ 0,538	+ 0,713
VII	+ 0,0585	+ 0,0175	1,270	6,875	-1,835	-1,885	11,470	-4,75	-4,70	+ 0,307	+ 0,349
VIII	+ 0,0319	+ 0,00959	0,695	7,70	-2,695	-2,745	11,705	-4,86	-4,81	+ 0,154	+ 0,177
IX	+ 0,0138	+ 0,00414	0,300	8,475	-3,515	-3,565	11,863	-4,92	-4,87	+ 0,044	+ 0,054
X	+ 0,00345	+ 0,001035	0,075	9,229	-4,265	-4,315	11,935	-4,94	-4,90	+ 0,025	+ 0,007
i. l. Kämpfer	0	0	0	9,86	-4,935	-4,985	11,960	-4,96	-4,91	rd. 0	rd. 0

Will man die Nachprüfung auch noch in dieser Weise durchführen, so wären für die einzelnen Belastungsfälle die zugehörigen Normalkräfte zu bestimmen und mit Hilfe der Momente die Exzentrizitäten aufzusuchen¹⁾.

Wendet man das Kernpunktverfahren bei der Bestimmung der Momente an, so wären alle Ordinaten einfach auf die Kernpunkte der betreffenden Gewölbequerschnitte zu beziehen (eventuell auch die Abszissen), anstatt, wie hier gezeigt, auf die Mittelpunkte derselben²⁾.

Schließlich kann man auch noch — anstatt mit den einzelnen Einflußlinien für H , V und M zu arbeiten — direkt benutzbare Einflußlinien für die Momente berechnen, und zwar auch entweder für die Mittelpunkte der Querschnitte oder für die Kernpunkte.

7. Einflußlinien für die Kernpunktmomente.

Die Gewinnung der Einflußordinaten für die Kernpunktmomente M_{k0} und M_{ku} in $\frac{l}{4}$ unseres Beispiels zeigt die Zahlen-
tafel (S. 391).

Die grundlegende Gleichung für die wandernde Last 1 lautet

$$M_k = M_0 + M - H \cdot y_k - V \cdot x_k.$$

Zu bemerken ist dabei, daß diese Aufstellung als Muster mit dem höchsten Grade der Genauigkeit ausgeführt ist, indem auch die radiale Lage der Kernpunkte bei den Abszissen berücksichtigt ist. In den meisten praktisch vorliegenden Fällen genügt es vollständig, die beiden Kernpunkte eines Querschnittes einfach vertikal übereinander liegend anzunehmen. Dadurch wird

$$x_{k0} = x_{ku}$$

und

$$M_{0k0} = M_{0ku};$$

ferner

$$V \cdot x_{k0} = V \cdot x_{ku},$$

und die Einrechnung der Ordinaten vereinfacht sich entsprechend.

¹⁾ Vgl. Näheres hierüber im Kapitel über exzentrischen Druck in Schlüter: „Eisenbetonbau: Säule und Balken“. Verlag von Herm. Meusser, Berlin.

²⁾ Vgl. Näheres darüber im Kapitel „Das Kernpunktverfahren in der Gewölberechnung“ in dem gleichen Buche.

A n h a n g.

Die Elemente der Einflußlinienlehre für vollwandige Konstruktionen.

Die Kenntnis der Einflußlinienlehre ist bei der Untersuchung von Bauwerken mit wandernden Lasten erforderlich.

Es ist eine Eigenart der Einflußlinien, daß sie ein anschauliches Bild über die Stellungen der Nutzlast angeben, welche in der einen oder anderen Hinsicht den ungünstigsten Einfluß ausüben; und darauf kommt es ja in der Berechnung immer an.

1. Einflußlinie für die Auflagerreaktion eines einfachen Balkens.

Der betrachtete Balken von der Länge l , selbst zunächst gewichtslos gedacht, möge von einer von B aus allmählich vor-

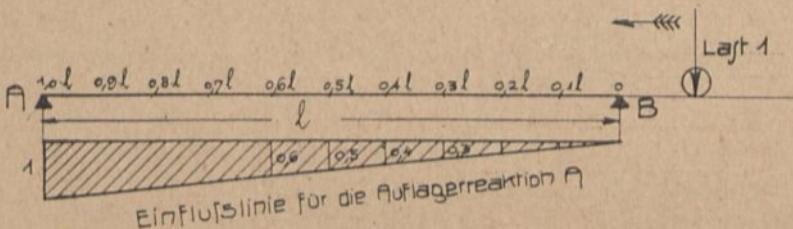


Abb. 372.

rückenden Last 1 (ohne Benennung) befahren werden. Zu jeder möglichen Stellung, die die Last 1 auf diese Weise auf dem Träger einnehmen kann, berechnen wir die zugehörige Reaktion A und tragen ihren Wert genau unterhalb der betreffenden Laststellung von einer Wagerechten aus ab (vgl. die nachfolgende Zusammenstellung und Abb. 372).

Die Verbindungslinie aller Endpunkte der so gewonnenen Ordinaten (in diesem Falle, wie leicht zu erkennen, eine Gerade) nennt man die

Steht Last 1 in	so ist $A =$
0,1 l	$1 \cdot \frac{0,1 l}{l} = 0,1$
0,2 l	$1 \cdot \frac{0,2 l}{l} = 0,2$
0,3 l	$1 \cdot \frac{0,3 l}{l} = 0,3$
.....
1,0 l	$1 \cdot \frac{1,0 l}{l} = 1$

Einflußlinie für die Auflagerreaktion A .

Für einen einfachen Balken gewinnt man also einfach dadurch die Einflußlinie für eine seiner Reaktionen, daß man unter dem Auflager die Ordinate 1 aufträgt (in irgendeinem Maßstabe) und von dort eine Gerade zum anderen Auflager zieht.

Umgekehrt wie die Linie gewonnen ist, kann sie nun benutzt werden: Befindet sich an irgendeiner Stelle des Balkens die Last 1, so erhält man das zugehörige A durch Multiplikation dieser Last 1 mit der darunter befindlichen Ordinate

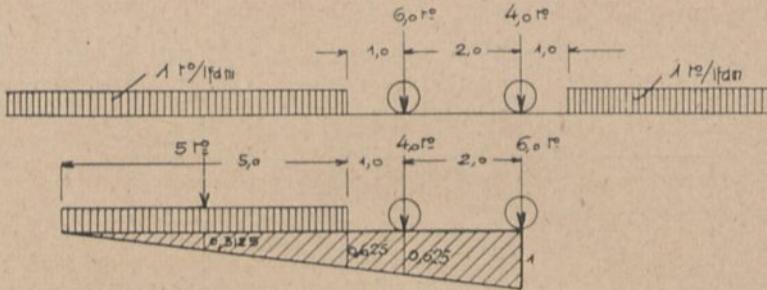


Abb. 373.

der Einflußlinie; sind anstatt Last 1 .. 3000 kg vorhanden, so ist die Ordinate mit 3000 kg zu multiplizieren, was ohne weiteres einleuchtet!

Beispiel: Gegeben ein Träger von 8 m Spannweite; es soll die größte Auflagerreaktion B für den dargestellten Lastenzug ermittelt werden (Abb. 373).

Da der Lastenzug in jeder Richtung fahren können soll, so tritt offenbar das größte B für die dargestellte Belastung der Einflußlinie ein, und es wird

$$\begin{aligned} B &= 6 \text{ t} \cdot 1 + 4 \text{ t} \cdot 0,75 + 5 \text{ t} \cdot 0,3125, \\ &= 6 \text{ t} + 3 \text{ t} + 1,5626 \text{ t}, \\ &= 10,5625 \text{ t}. \end{aligned}$$

2. Belastungsprinzip und Ordinatenmessung bei gleichmäßiger Last.

Das vorige Beispiel hat klar gezeigt, daß die größten Lasten immer dort aufzufahren sind, wo die größten Einflußordinaten vorhanden sind, ein Grundsatz, der dem wesent-

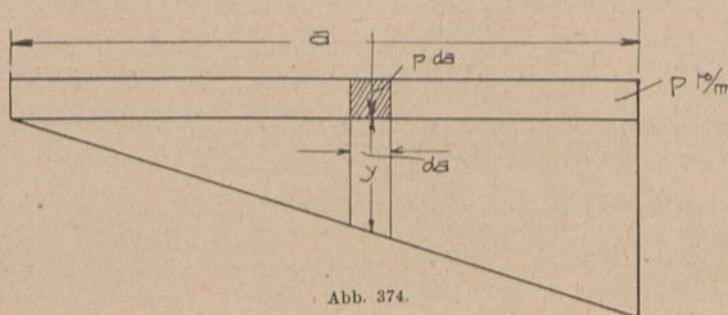


Abb. 374.

lichen Zweck aller Einflußlinien entspricht. Ferner können wir bei gleichmäßiger Last mit der Ordinate multiplizieren, die für die Resultierende in Frage kommen würde.

Oder wir berechnen den Inhalt der unter der gleichmäßigen Last befindlichen Einflußfläche und multiplizieren diesen mit der Last pro laufenden Meter.

Beweis (Abb. 374):

Der Einfluß eines Lastdifferentials von der Größe $p \text{ t/m} \cdot da$ ist $\overbrace{p \cdot da \cdot y}$.

Faßt man jetzt $da \cdot y$ zusammen, so bedeutet das den Flächeninhalt des kleinen betrachteten Streifens der Einflußfläche. Man erhält also den Einfluß der ganzen Last über die Länge a durch Multiplikation von $p \text{ t/m}$ mit dem Inhalt des ganzen Dreiecks; also wäre auch vorher richtig gewesen

$$1 \text{ t/m} \cdot \frac{5,0 \text{ m} \cdot 0,625}{2} = 1,56 \text{ t}.$$

(Man achte auf die Bezeichnungen: Längen = m , Ordinaten ohne Benennung.)

3. Einflußlinie für die Querkraft im Querschnitt K eines einfachen Balkens (Abb. 375).

Die Last 1 wandere wieder über die einzelnen Teilpunkte. Für jede Laststellung berechnen wir die Querkraft, welche dabei in K auftritt. Solange die Last 1 vom rechten Auflager bis K wandert, ist die

Querkraft im Querschnitt K stets gleich A , weil A die einzige Kraft links von K ist; von B bis K ist also die Einflußlinie der Querkraft gleichbedeutend mit der Einflußlinie für Reaktion A (A -Linie). Hat dagegen die Last 1

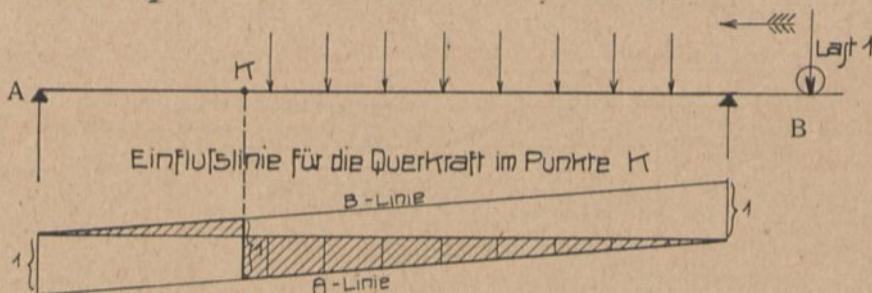


Abb. 375.

den Querschnitt K überschritten, so ist jetzt stets die Querkraft im Punkte $K = A - 1$, wodurch die gegebene Konstruktion erklärt ist. Der zwischen A und K liegende Teil der Querkraft-einflußlinie stellt sich heraus als der Anfang einer negativ aufgetragenen B -Linie.

Wir stehen hier also vor einer Einflußlinie, die einen positiven und einen negativen Teil hat: demnach kann die bewegliche Last entweder einen größten positiven oder einen größten negativen Betrag erreichen; unbewegliche feststehende Last (Eigengewicht) aber belastet beide Teile der Fläche stets gleichzeitig, so daß die Einflüsse für diese algebraisch zu addieren sind.

Beispiel: Gegeben ein Balken von 12 m Spannweite, auf demselben Querschnitt K , 4 m von A . Eigengewicht 2 t/m, bewegliche Last $p = 5$ t/m (Abb. 376).

Einfluß des Eigengewichtes auf K (vgl. Abb. 376 unten):

$$(+ 2,668 - 0,666) \cdot 2 \text{ t/m} = + 4 \text{ t.}$$

Positiver Einfluß von p auf K

$$+ 2,668 \cdot 5 = + 13,340 \text{ t.}$$

Negativer Einfluß von p^- auf K

$$- 0,666 \cdot 5 = - 3,330 \text{ t.}$$

Möglichkeiten: entweder $+ 4 \text{ t} + 13,34 = + 17,34 \text{ t}$,
 oder $+ 4 \text{ t} - 3,33 = + 0,67 \text{ t}$.

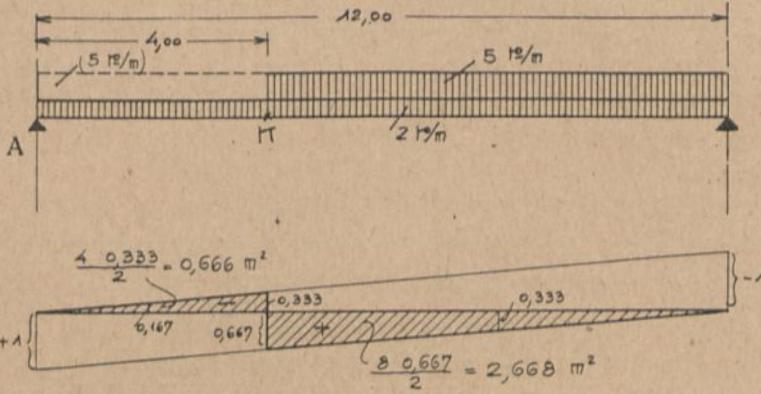


Abb. 376.

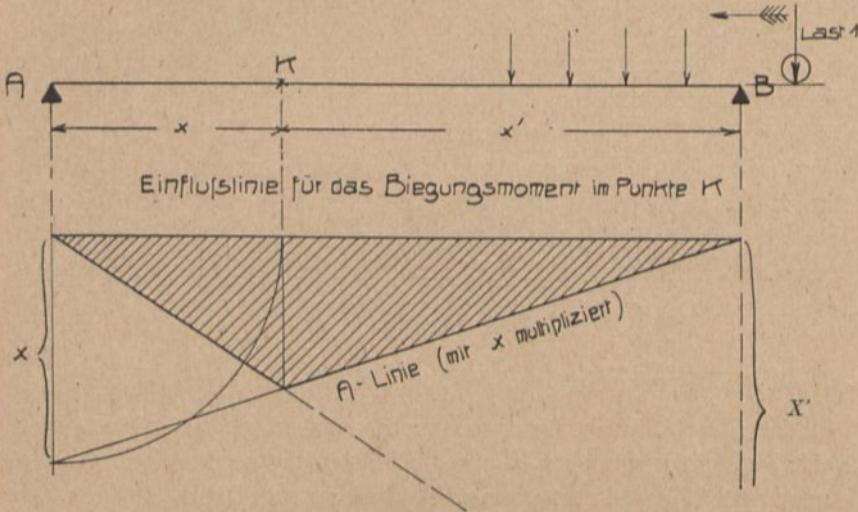


Abb. 377.

4. Einflußlinie für das Biegemoment im Querschnitt K eines einfachen Balkens ($x \text{ m}$ von A) (Abb. 377).

Solange die Last 1 zwischen B und K wandert, ist das zu jeder Stellung gehörige Moment im Querschnitt $K = A \cdot x$; wir erhalten also die diesem Teil zugehörige Einflußlinie durch Auftragen der mit x Meter multiplizierten A -Linie, d. h. wir tragen

die A -Linie nicht mit 1 auf, sondern mit x in Metern. Dadurch liegt die angedeutete Konstruktion fest. Solange die Last 1 zwischen A und K wandert, ist M_K stets gleich $B \cdot x'$, so daß derselbe Fall vorliegt wie vor. Beide Linien schneiden sich offenbar unter K , so daß man nur entweder x oder x' aufzutragen braucht. Die praktische Anwendung ist genau so wie unter 2 und 3. Die Einflüsse sind immer nur positiv, so daß sich die infolge Eigengewicht und die infolge beweglicher Last addieren. Belastet man die Fläche dann mit t , dann erhält man M in mt .

5. Beschränkung der Einflußlinien auf die Ermittlung von Maximalwerten an ganz bestimmten Stellen.

Wollte man für beliebig viele Querschnitte K das jeweils größte Moment finden, so müßte man ebensoviele Einflußflächen dazu zeichnen. Unter allen diesen unzähligen Einflußflächen wird eine einzige sein, die das absolut größte Moment liefert. Diese Stelle können wir ohne weiteres nicht auffinden; sie liegt durchaus nicht in der Mitte. Mit Hilfe der Differentialrechnung ergibt sich hierfür folgendes Gesetz: „Der Querschnitt K , für welchen das absolut größte Moment eintreten kann, liegt (bei beschränkter Lastanzahl) unter der größten Einzellast, wenn diese und die Resultierende aller zur Zeit auf dem Balken befindlichen Lasten symmetrisch zur Balkenmitte stehen.“ (Ableitung siehe Höhere Mathematik, Absatz M; Gebrauch siehe Kapitel I, Statisch bestimmte Bauwerke.)

6. Geltungsbereich und Charakteristik der Einflußlinien.

Die Einflußlinien einer bestimmten statischen Größe (einer Reaktion, einer Querkraft, eines Biegemomentes) gelten also immer nur für einen ganz bestimmten Querschnitt.

Das Schaubild einer Einflußfläche veranschaulicht also nicht einen für alle Querschnitte eines Trägers gültigen Zustand (wie das etwa eine Querkraftfläche tut), sondern bezieht sich nur auf einen einzigen Querschnitt des Trägers, darum auch alle bei einer Einflußfläche vorgenommenen Belastungen nur in Hinsicht auf diesen einen Querschnitt erfolgen, wobei die Form der Einflußlinie von selbst auf die vorzunehmende ungünstigste Belastung hinweist.

Sämtliche Einflußlinien werden mit der wandernden „Last 1“ konstruiert, auch — wie in dem vorliegenden Buch gezeigt wird — bei statisch unbestimmten Systemen. Die Einflußlinien können positive oder negative Teile haben, wodurch angezeigt ist, daß die betreffende statische Größe einen größten positiven und einen größten negativen Wert erreichen kann, je nachdem „nur positiv oder nur negativ“ belastet wird. Eigengewicht belastet jedoch stets durchgängig die ganze Fläche.

7. Indirekte Belastung.

Erfolgt die Belastung nicht direkt, sondern indirekt, was am besten durch Abb. 378 versinnbildlicht werden kann, und handelt es sich um die Konstruktion der Einflußlinie für einen zwischen

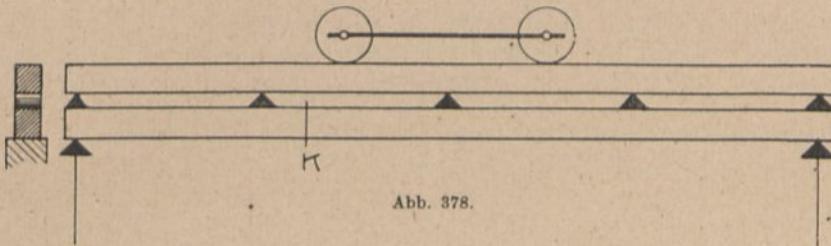


Abb. 378.

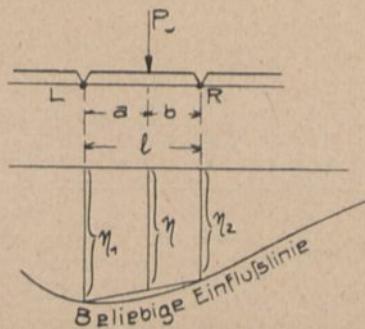


Abb. 379.

zwei Zwischenstützen liegenden Querschnitt K , so kann das dann zu beachtende Gesetz wie folgt gefunden werden.

Gegeben sei eine ganz beliebige (fertig konstruierte) Einflußlinie (Abb. 379). Die Frage lautet: Mit welcher Ordinate η ist der Einfluß der Last P festzustellen? Anstatt des direkten Einflusses von P stellen wir den der beiden Reaktionen L und R fest.

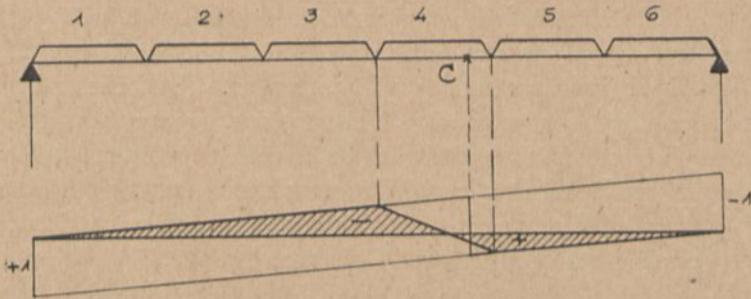


Abb. 380.

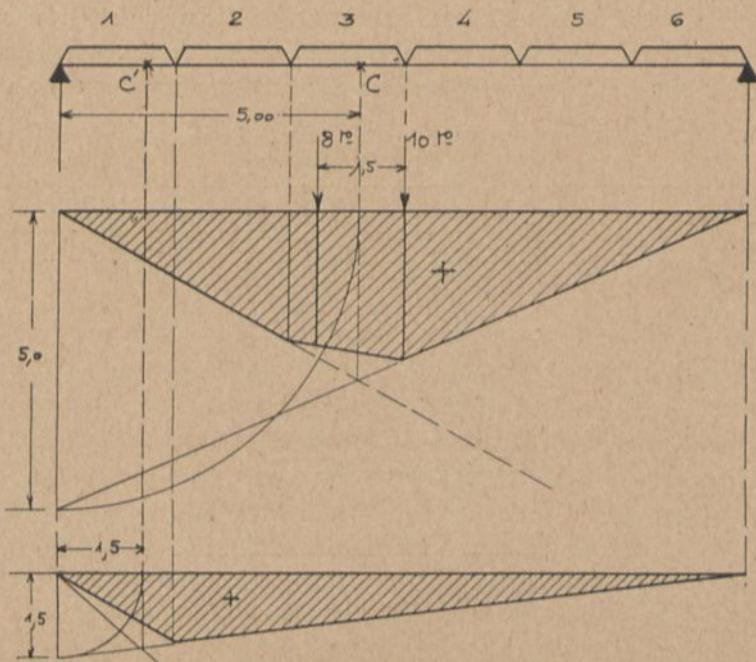


Abb. 381.

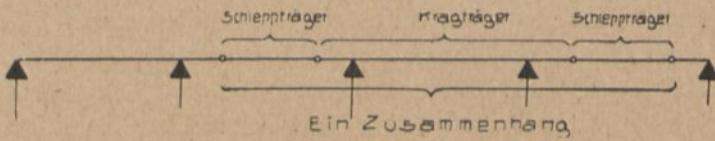


Abb. 382.

Dieser ist:

$$\frac{P \cdot b}{l} \eta_1 + \frac{P \cdot a}{l} \eta_2 = P \left[\frac{b}{l} \cdot \eta_1 + \frac{a}{l} \cdot \eta_2 = P \cdot \eta \right]$$

Das sich ergebende Gesetz lautet also: Zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Punkten mittelbarer Belastung ist die Einflußlinie eine Gerade. Dieses Gesetz gilt ganz allgemein, die Einflußlinie sei gebogen oder gebrochen unter dem Zwischenfeld l . Einflußlinien in Kurvenform liegen in der Regel bei statisch unbestimmten Systemen vor.

Beispiele. Die Querkrafteinflußfläche für Punkt C (Abb. 380) gilt, wie ein Blick auf die Figur lehrt, nicht für den Punkt C , sondern für alle im vierten Felde liegenden Querschnitte.

Die Einflußfläche für das Bieugungsmoment im Punkt C (bzw. C') des Trägers (Abb. 381); sie gilt nur für Punkt C (bzw. Punkt C').

Die beiden Beispiele zeigen, daß die betreffenden Einflußlinien zunächst genau so gewonnen werden, als wäre der Träger nicht indirekt belastet, hinterher erfolgt die Korrektur.

8. Einflußlinien für den Gerberbalken (Abb. 382).

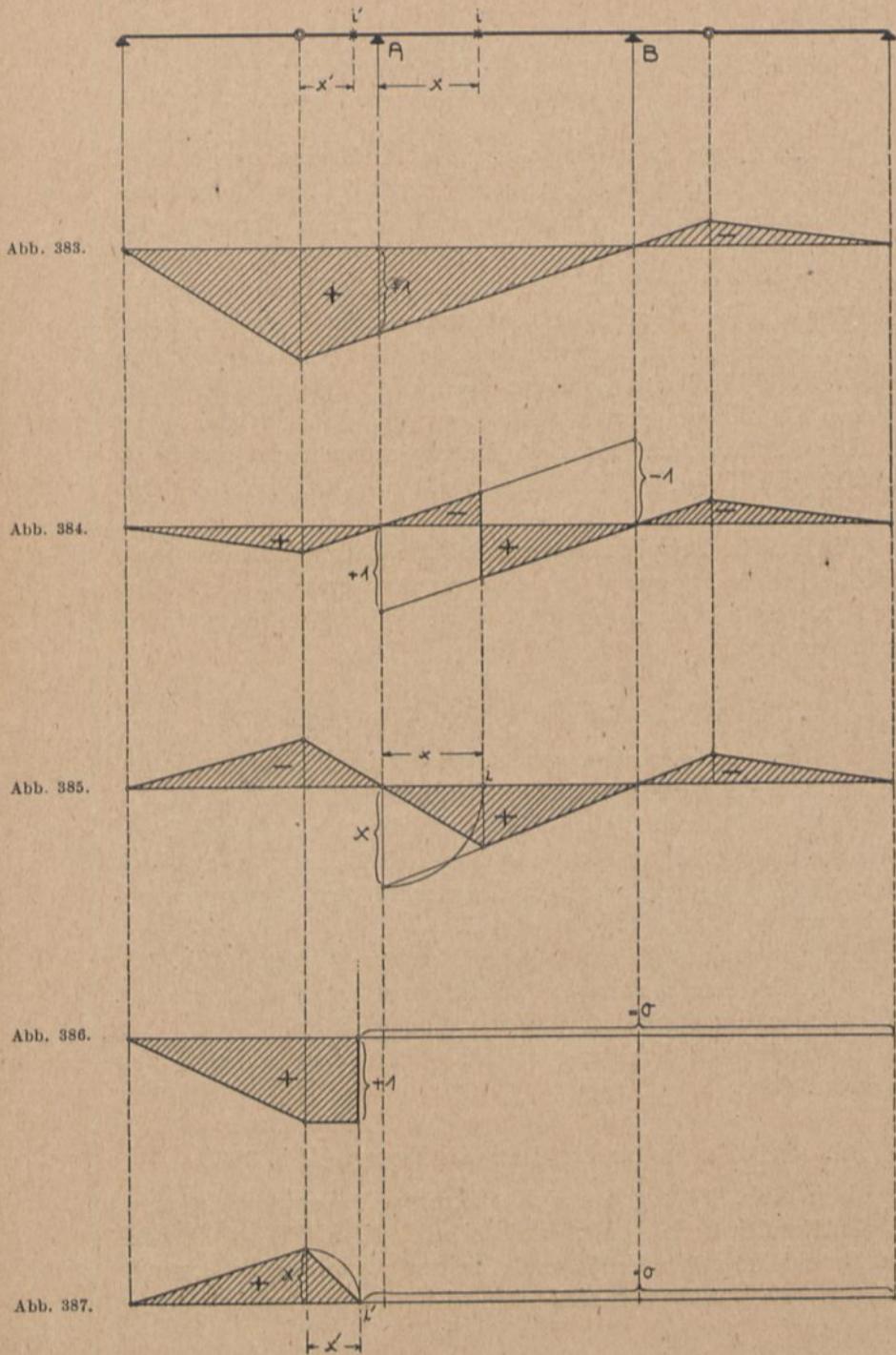
Für den Schleppträger genau entsprechend dem einfachen Balken. Beim Kragträger für den Teil zwischen den Stützen AB (Abb. 383, 384 und 385) zunächst ebenfalls genau so wie beim einfachen Balken, doch sind die Einflußlinien zum Schluß über die Auflager A und B hinaus in der angegebenen Weise zu verlängern.

Für irgendeinen Punkt (i') des Kragarmes geben Abb. 386 und 387 die ohne weiteres verständlichen Konstruktionen der Einflußlinien der Querkraft und des Momentes an.

Bei indirekter Belastung verfähre nach dem unter 7 abgeleiteten Gesetz.

9. Einflußlinien für den Dreigelenkbogen (Abb. 388).

Nach Abb. 388 ergeben sich offenbar die Gesamtreaktionen (K_i als Resultierende von A und H und K_r als Resultierende von B und H) nach Größe und Richtung aus der Bedingung daß der unbelastete Schenkel sich nicht gegen den belasteten drehen darf.



Für irgendeinen Drehpunkt, z. B. B , besteht ferner die Gleichgewichtsbedingung: Summe aller Momente = 0,

$$\text{also } A \cdot l = P \cdot b$$

$$A = \frac{P \cdot b}{l}$$

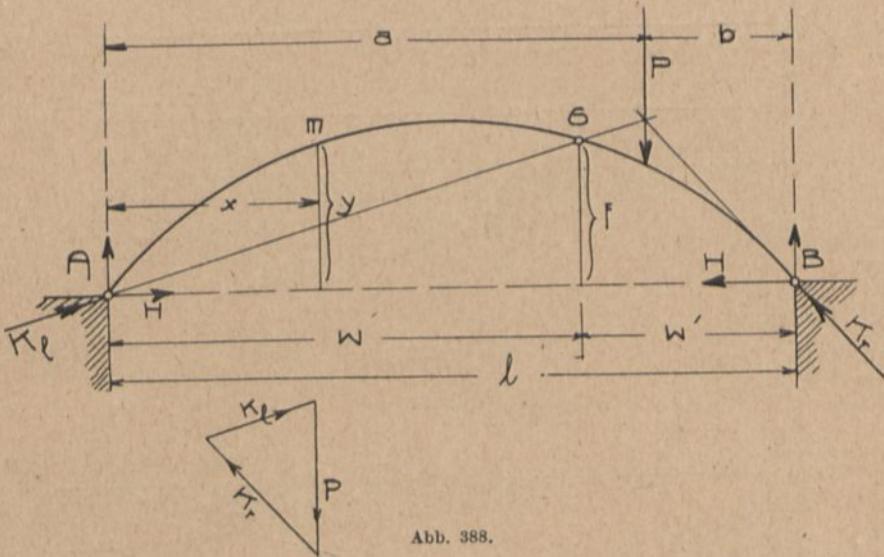


Abb. 388.

Einflußlinie für die Reaktion A

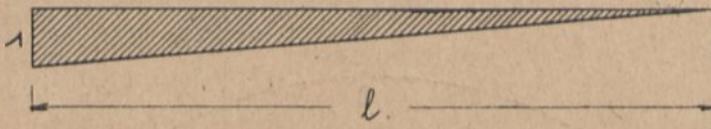


Abb. 389.

Die vertikalen Auflagerreaktionen bestimmen sich also genau so wie beim einfachen Balken (Abb. 389).

Die Einflußlinie für den Horizontalschub ergibt sich aus der Bedingung, daß das Moment im Gelenkpunkt $G = 0$ sein muß, also $B \cdot w' - P \cdot p - H \cdot f = 0$ (Abb. 388, p aus Abb. 390).

$$M_g$$

Die beiden ersten Glieder (M_g) entsprechen aber (für sich genommen) dem Moment im Querschnitt G eines einfachen Balkens AB (Abb. 390), für welches bekanntlich durch Auftragen von w' nach Abb. 391 die Einflußlinie gewonnen wird.

Nun ist $H = \frac{M_g}{f}$, so daß die Einflußlinie für H nach Abb. 392 durch Auftragung von $\frac{w'}{f}$ gewonnen wird.

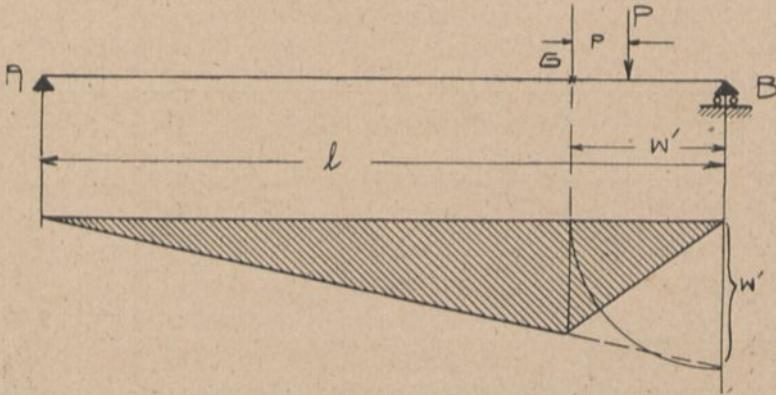


Abb. 390 und 391.

Einflußlinie für H

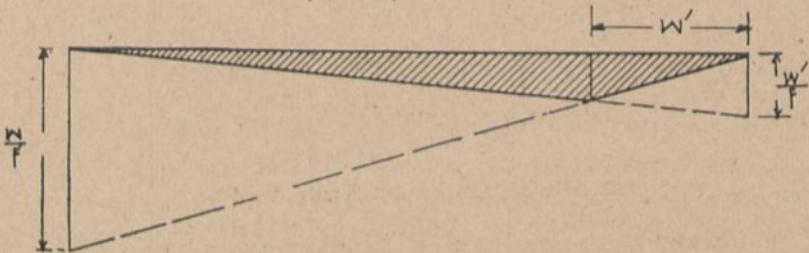


Abb. 392.

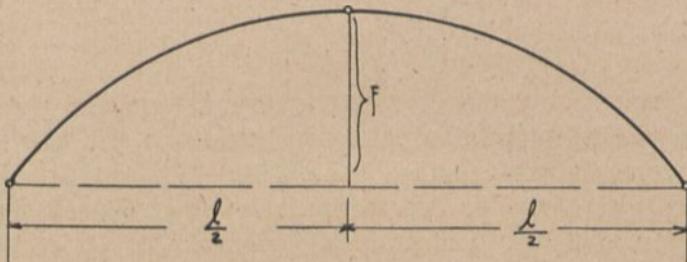


Abb. 393.

Spezialfall: Ist $w = w' = \frac{l}{2}$, so ergeben sich die maßgebenden Endordinaten zu $\frac{w}{f} = \frac{w'}{f} = \frac{l}{2f}$ und die Mittelordinate zu $\frac{l}{4}$ (Abb. 393 und 394).

Die Einflußlinie für das Moment an beliebiger Stelle.
Allgemein ergibt sich für Querschnitt m (Abb. 388)

$$M_m = A \cdot x - H \cdot y$$

oder

$$\frac{M_m}{y} = \frac{A \cdot x}{y} - H.$$

Einflußlinie für H

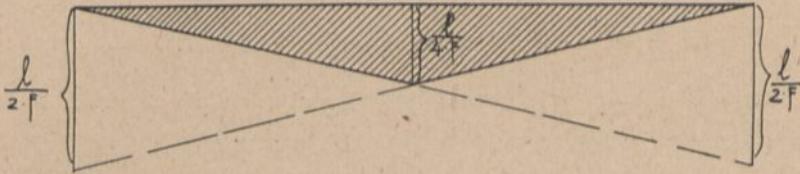


Abb. 394.

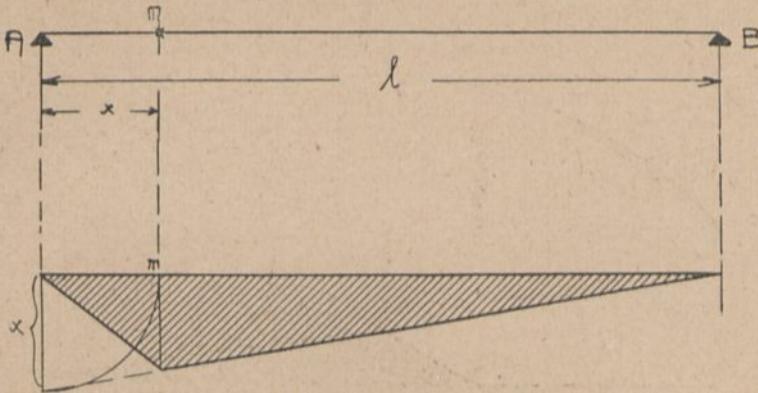


Abb. 395 und 396.

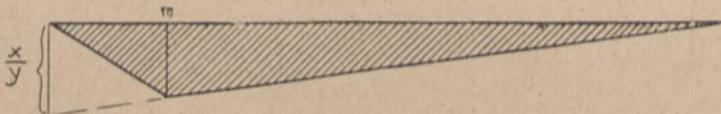


Abb. 397.

$A \cdot x$ ist aber (abgesehen von weiteren Lasten zwischen A und m) das Moment des einfachen Balkens AB (Abb. 395), für welches die Einflußlinie nach Abb. 396 gewonnen wird.

Da für $A \cdot x$ die Division durch y gefordert wird, so geschieht das einfach durch Auftragen von $\frac{x}{y}$ (Abb. 397).

Die Einflußlinie für $\frac{M_m}{y}$ wird nun gefunden, wenn zu Abb. 397 die H -Fläche gemäß ihrem negativen Vorzeichen algebraisch addiert wird (Abb. 398).

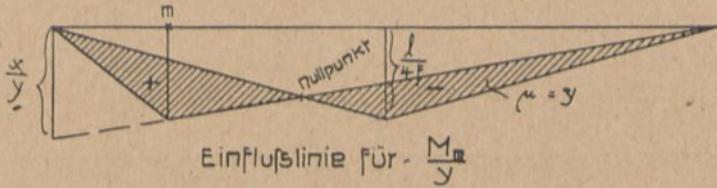


Abb. 398.

Haben wir mit Hilfe dieser Einflußfläche, welche wieder einen positiven und einen negativen Teil hat, irgendein M_m berechnet, so ist das Resultat noch mit y zu multiplizieren, daher Erweiterungsfaktor $\mu = y$.

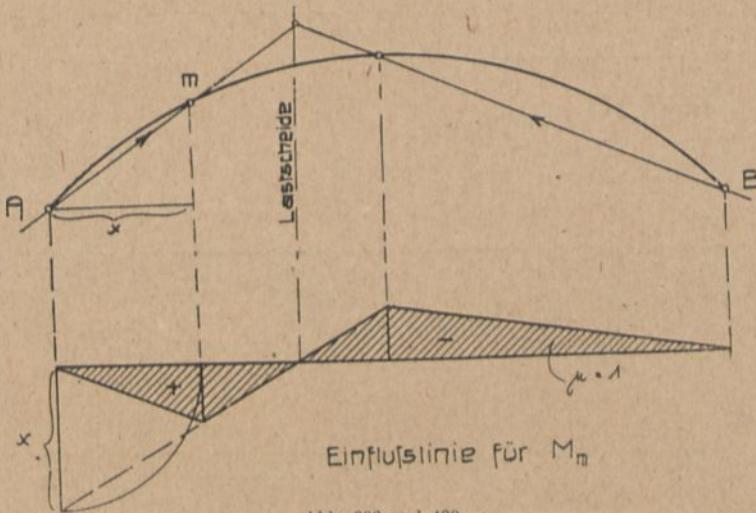


Abb. 399 und 400.

Bei statisch unbestimmten Systemen (Zweigelenkrahmen) ist die H -Fläche eine Kurve.

NB.: Zu bemerken ist noch, daß beim Dreigelenkbogen der Nullpunkt der Fläche Abb. 398 genau unter der „Lastscheide“ liegt, die nach Abb. 399 gewonnen wird. Die Einflußlinie Abb. 398 wird daher einfacher und schneller nach Abb. 400 gefunden, wobei man zweckmäßigerweise auch gleich x aufträgt anstatt $\frac{x}{y}$,

damit die Multiplikation der Ergebnisse mit y wegfällt, also $\mu = 1$ wird (wodurch allerdings mehr Platz für die Einflußlinien erforderlich ist).

Daß der Nullpunkt tatsächlich unter dem mit Lastscheide bezeichneten Kreuzungspunkt liegt, folgt einfach aus der Tatsache, daß eine dort wirkende Last kein Moment mehr im Querschnitt m erzeugen kann. Das Gewölbe verhält sich — wie wir nun erkennen werden — zwischen A und Lastscheide wie ein einfacher Balken („stellvertretender“ Balken).

Die Querkrafteinflußfläche eines Dreigelenkbogens sei hier wegen ihrer geringeren praktischen Bedeutung nicht erörtert.

VERLAG VON HERMANN MEUSSER, BERLIN W 57

Alle Fragen, die mit der Berechnung und Bauart der Eisenbetonbalken in der Nähe der Auflager zusammenhängen, beantwortet erschöpfend:

Schlüter,
Die Schubsicherung der Eisenbetonbalken durch abgebogene Hauptarmierung und Bügel

Nach Vorschrift der neuen Bestimmungen vom 13. Januar 1916

In Pappband M. 3.50

Geheftet M. 2.65

Inhaltsverzeichnis

Einleitung. — Kapitel 1. Spannungsverlauf und Armierung (Normalspannungen, Schubspannungen, Hauptspannungen, Haftspannungen). — Kapitel 2. Bauart und Berechnung der Schubsicherung. I. Die Anordnung der Armierung. 1. Die wichtigeren Formen der Armierung. 2. Statischer Wert der abgebogenen Eisen und der Bügel für die Schubsicherung. 3. Entwurf des Strebesystems. 4. Obere Verankerung der abgebogenen Eisen. 5. Lage der ersten Zugstrebe. 6. Lage der Zugstreben zur Balkenachse. 7. Form der Abbiegung. II. Die Bemessung der Armierung. 1. Feststellung der Strebenkräfte nach der Fachwerkslehre. 2. Feststellung der Strebenkräfte aus den Schubspannungsdiagrammen; Zahlenbeispiel dazu. 3. Größe der Strebenkräfte. 4. Zulässige Beanspruchung der Zugeisen. 5. Ergänzung der Zugstreben durch Bügel; Zahlenbeispiel dazu. 6. Überholte Berechnungsweise der Bügel. — Kapitel 3. Die statische Aufgabe der Bügel im mittleren Balkenteil. — Kapitel 4. Die praktische Aufgabe der Bügel. — Kapitel 5. Winke für den Entwurf einfacher und kontinuierlicher Balken. — Kapitel 6. Der Nachweis der Haftspannungen und der Einfluß der Haken. 1. Beschränkung des Haftspannungsnachweises auf stärkere Eisen. 2. Der Haftspannungsnachweis mit halber Querkraft. 3. Bedeutung der zulässigen Beanspruchung als Mittelwert. 4. Spannungsverteilung vor der Ribbildung. — Kapitel 7. Zahlenbeispiele. — Kapitel 8. Die Notwendigkeit des Ausschlusses der Mitwirkung des Betons in der Zugaufnahme durch abgebogene Eisen und Bügel.

In der Nachlieferung (Preis M. —.80)

Ergänzung zu Kapitel 2, II, Ziffer 5: Das Zusammenwirken von Zugstreben und Bügeln und einheitliche Berechnungsformeln.

Ergänzung zu Kapitel 2, II, Ziffer 2: Fehler bei der Feststellung der Streben aus den Schubspannungsdiagrammen.

Urteile der Fachpresse über:

Schlüter, Schubsicherung der Eisenbetonbalken usw.

Beton und Eisen 1917, Heft XVII/XVIII, Textbeilage S. 4:

Der Verfasser gibt eine vortreffliche Zusammenstellung des derzeitigen Standes unseres Wissens, indem er auf Grund der deutschen Vorschriften von 1916 die übrigen Quellen zusammenfaßt und so als ein geschlossenes System für die Behandlung dieser Frage hinstellt. Daß diese Frage noch keine abgeschlossene ist, steht außer Zweifel. Die Tragfähigkeit eines Balkens mit einwandfreiem Ober- und Untergurt kann nicht ausgenutzt werden, wenn der Steg zu Verschiebungen Anlaß gibt. Um diese zu verhindern, ist jedenfalls die in diesem Buch gemachte Voraussetzung einer fachwerkartigen Ausbildung der Schubbewehrung nach den Gesichtspunkten der Hauptspannungen ein richtiger Weg. Ich vermisse nur die Hervorhebung der Wichtigkeit des Umstandes, daß dieser rechnermäßigen Voraussetzung durch die Ausbildung des Biegeplanes und der Bügel auch tatsächlich entsprochen wird, und wie das zu geschehen hat. Wir müssen trachten, uns von Faustregeln unabhängig zu machen, oder doch neben diesen ihre wissenschaftliche Begründung zu erforschen. Zur Beantwortung dieser Frage ist m. E. der Versuchsweg noch nicht genügend ausgenutzt worden.

Das für diese hier so vortrefflich zusammengestellte Frage bestehende Interesse ist gekennzeichnet durch die Arbeiten von Dr. Brunkhorst und die Veröffentlichung der Versuche mit Balken aus umschnürtem Gußeisen in den letzten Heften dieser Zeitschrift. Es finden sich dort kennzeichnende Bilder von Balken, die ausschließlich durch einen unzureichenden Steg zerstört worden sind. Vorsicht ist also bei der Schubsicherung gewiß geboten, und die Bestimmungen der deutschen Vorschrift und die Ausführungen der Bücher sind durchaus zweckentsprechend. Andererseits ist es jedoch möglich, durch besondere Einrichtung einen für die Schubkräfte äußerst widerstandsfähigen Steg zu erhalten, und gerade die berechtigten Einschränkungen der Vorschrift mußten dazu führen, diese Anordnungen auf ihre Verlässlichkeit zu erproben, um zu wissen, was man in außerordentlichen Fällen zu tun hat, um die Verbindung der beiden Gurte sicherzustellen. F. v. E.

Deutsche Bauzeitung, Mitteilungen 1917, Nr. 24:

Die neuen deutschen Bestimmungen, die bekanntlich wesentlich stärkere Bewehrungen gegen die aus den Schubspannungen stammenden Beanspruchungen ergeben als die früher gültigen, stellen für dieses wichtige Gebiet nur allgemeine Gesichtspunkte auf. Verfasser hat es sich daher zur Aufgabe gestellt, „neben der Klarstellung und Begründung der seit längerem erkannten, aber jetzt erst zur allgemeinen Gültigkeit erhobenen Berechnungsweise der Schub- und Haftspannungen feste Grundsätze für den Bau der Schubsicherungen in einer für die Allgemeinheit möglichst eindeutigen Form aus dem reich vorhandenen wissenschaftlichen Material zu gewinnen und derselben auch die Wahl der Ausführungsart und die Berechnung selbst zu erleichtern“. Das ist ihm in seiner kleinen Schrift wohl gelungen.

(Folgt Inhaltsangabe; dann:)

Die kleine Schrift geht demnach auf alle wesentlichen Fragen ein und gibt zu ihnen in knappster Form sichere und bestimmte Antworten. Das Werkchen kann daher zur Einführung in diese Aufgaben bestens empfohlen werden. Fr. E.

Der Bautechniker 1917, Nr. 42, S. 335:

Dieses Büchlein soll die Möglichkeit bieten, den neuen preußischen Eisenbeton-Bestimmungen vom Jahre 1916, soweit sie die Aufnahme der Schubspannungen betreffen, gerecht zu werden. Dieser Absicht ist, das sei sofort anerkannt, glänzend entsprochen. Das Büchlein bietet jedem Eisenbetonfachmann nicht nur ein übersichtliches Bild über die Forderungen der Vorschrift, ihrer Grundlagen und ihres Wollens, sondern enthält auch eine gründliche und wertvolle Auseinandersetzung der Art und Wirkungsweise der auftretenden Kräfte und ihrer Aufnahme durch die Eiseneinlagen. Der Verfasser geht für die Berechnung von dem einfachen oder mehrfachen Strebenfachwerk aus, was gewiß den modernsten Anschauungen entspricht, wengleich sie für die Berechnung der Stabaufbiegungen nicht unbedingt erforderlich ist. Bekanntlich fordern auch die amtlichen österreichischen Vorschriften vom Jahre 1911 die Aufnahme von mindestens 60% der gesamten Schub- und Hauptzugkräfte, wenn die errechneten Schubspannungen die zulässigen Werte überschreiten. Es ist deshalb merkwürdig, schon des öfteren sehen zu müssen, wie die reichsdeutschen Verfasser immer wieder auf schweizerische Vorschriften hinweisen, die österreichischen aber nicht genügender Beachtung wert finden. Und doch dürfte der Leserkreis für reichsdeutsche Werke in Österreich dem in der Schweiz nicht nachstehen. Wenn wir also eine derartige Nichtbeachtung als Lücke empfinden, so hoffen wir doch, daß sich auch dieser Umstand mit der Zeit bessern wird. Das Büchlein Schlüters erschöpft die aufgeworfenen Fragen vollends, und jeder im Eisenbetonbau arbeitende Techniker wird gut tun, es zu studieren und seine Lehren anzuwenden, auch dann, wenn er nicht von den preußischen Bestimmungen abhängig ist. Dr.-Ing. Heß.

Tonindustrie-Zeitung 1917, Nr. 79, S. 543:

Die Schrift stellt die alte und neue Berechnungsweise der Schubsicherungen gegenüber und behandelt in kurzen, klar gefaßten Abschnitten in allgemeinverständlicher Form unter Angabe der Berechnungsgrundlagen die wichtigsten Fragen der Schubsicherung von Eisenbetonbalken auf Grund der neuen Bestimmungen und der bisher bekannt gewordenen Versuchsergebnisse. Sie ist daher besonders für den Anfänger und denjenigen, der sich über den derzeitigen Stand der Versuchsergebnisse einen kurzen Überblick verschaffen will, als willkommenes Hilfsmittel zu betrachten. Die beigegebenen Berechnungsgrundlagen und Beispiele erleichtern das Verständnis des Stoffes bedeutend, desgleichen erleichtern die Winke für den Entwurf die Umsetzung des aufgenommenen Stoffes in die Praxis.

Bezüglich der Bestimmung des Anteiles der Schubkraft, welche von den Bügeln bzw. den Zugstreben aufgenommen wird, ist jedoch der Willkürlichkeit der Verteilung eine Grenze zu ziehen, da die Beteiligung beider Teile an der Aufnahme der Schubkräfte eine ganz bestimmte ist. Bei Annahme gleicher Hauptspannungen in Zugstrebe und Bügel, wie in den bezüglichen Beispielen getan, ist dem annähernd und für praktische Verhältnisse genügend scharf Genüge geleistet.

Guter Druck, deutliche Abbildungen und Handlichkeit sind ein Vorzug der Schrift.

Mitteilungen über Gegenstände des Art- und Geniewesens, Wien 1918:

(Inhaltsangabe; dann:) Der Verfasser, dessen Name in der Eisenbetonliteratur bereits einen guten Ruf genießt, hat seine Aufgabe voll erfüllt, und wird die außerordentlich klar und überzeugend geschriebene Abhandlung geeignet sein, in Zukunft konstruktive Fehler hinsichtlich der Schubsicherung auch in weitesten Kreisen zu vermeiden. Besonders beherzigenswert sind die Worte, die der großen und nicht immer entsprechend gewürdigten Rolle der schrägen Stabaufbiegungen zukommen. Sie sind in allererster Linie für die Schubsicherung heranzuziehen, während die Bügel nur im Falle, als die Stabbiegungen hierzu nicht ausreichen, mit in Rechnung gestellt werden können. Das vorliegende Heft erscheint daher jedem Konstrukteur des Eisenbetonbaues als steter Begleiter bei seinen Entwürfen unentbehrlich und wird auch in Österreich, dessen Eisenbetonvorschrift wohl in manchen Punkten von den preußischen Bestimmungen abweicht, schon wegen der vielen praktischen Winke willkommen sein. Sch.

Technik und Betrieb (Wochenbeilage zum süddeutschen Industrieblatt) 1917, Nr. 30:

Diese kurzgefaßte Abhandlung über die Schubsicherung der Eisenbetonbalken durch abgebogene Hauptarmierung und Bügel bedeutet eine weitere Bereicherung der einschlägigen Eisenbetonbauliteratur.

(Folgt Inhaltsangabe; dann:)

Schlüters Ausführungen zeichnen sich vornehmlich durch die Klarheit der Sprache und durch leichtverständliche Übersichtlichkeit aus, so daß dieses Werkchen vom Anfänger als wertvolle Einführung in dieses Gebiet und vom Eisenbetonfachmann als willkommenes Nachschlagewerkchen gleichermaßen geschätzt werden wird. Schlüters vorangegangene Veröffentlichungen haben bei den Fachleuten eine zu gute Aufnahme gefunden, als daß es notwendig wäre, das vorliegende, 63 Seiten enthaltende Werkchen noch besonders zu empfehlen. * Rgbstr. Dr. Sp.

Der Brückenbau 1917, Nr. 12, S. 97:

Die in den neuen preußischen Eisenbeton-Bestimmungen vom 13. Januar 1916 nur in Form von Grundsätzen zum Ausdruck gebrachten Vorschriften dürften der Allgemeinheit nicht ohne weiteres klar sein. Daher war das Ziel des Verfassers, mit der vorliegenden Abhandlung über diesen Gegenstand und durch eine Gegenüberstellung der alten und neuen Berechnungsweise „neben der Klarstellung und Begründung der seit längerem als richtig erkannten, aber jetzt erst zu allgemeiner Gültigkeit erhobenen Berechnungsweise der Schub- und Haftspannungen feste Grundsätze für den Bau der Schubsicherungen in einer für die Allgemeinheit möglichst eindeutigen Form aus dem reich vorhandenen wissenschaftlichen Material zu gewinnen und derselben auch die Wahl der Ausführungsart und die Berechnung selbst zu erleichtern“. Das Buch dürfte allen Fachgenossen wertvollste Dienste leisten und sich viele Freunde erwerben; es sei allen, die sich mit den neuen Eisenbeton-Bestimmungen vertraut machen wollen, angelegentlichst empfohlen. S.

Zeitschrift des österr. Ingenieur- und Architektenvereins 1917, Nr. 42:

In den neuen preußischen Eisenbeton-Bestimmungen vom 13. Jänner 1916 ist die schon lange erwartete Änderung der Vorschriften über den Nachweis der Schub- und Haftspannungen erfolgt. Infolge dieser neuen Vorschriften ergeben sich wesentlich stärkere Armierungen gegen Schubbeanspruchungen, als früher gefordert wurden. Diese Vorschriften haben die Form von Grundsätzen, ohne die Berechnungsweise unmittelbar festzulegen. Ihre richtige Anwendung in der Rechnung und ihre praktische Verwertung erfordert eine tiefer gehende Kenntnis der ihnen zugrunde liegenden Versuchsergebnisse, besonders hinsichtlich des Wertes der Haupteisen und Bügel für die Schubsicherung. Infolgedessen ist es gewiß sehr verdienstlich, daß es der Verfasser, dem wir schon mehrere sehr klare und brauchbare Arbeiten auf dem Gebiete der Statik der Eisenbetonbauten verdanken, unternommen hat, die seit längerem als richtig erkannte, aber jetzt erst zu allgemeiner Gültigkeit erhobene Berechnungsweise der Schub- und Haftspannungen klarzulegen und zu begründen, sowie feste Grundsätze für die Ausführungsart der Schubsicherungen aus dem reichen Versuchsmaterial zu gewinnen. Hierdurch ist dem Konstrukteur die Wahl der Ausführungsart und die Berechnung wesentlich erleichtert. In 2 Zahlenbeispielen sucht der Verfasser den Vorgang bei der Berechnung der Schubsicherungen im Zusammenhange zu veranschaulichen. Aus der Gegenüberstellung der alten und neuen Berechnungsweise sind die Fortschritte auf diesem Gebiete klar ersichtlich. π.

Österr. Wochenschrift f. d. öffentlichen Baudienst, XXIII. Jahrgang, 1917, S. 312:

Die neuen preußischen Bestimmungen über Eisenbeton vom Jahre 1916, welche seither auch fast in allen deutschen Bundesstaaten eingeführt worden sind, enthalten unter anderem auch neue, wesentlich von den früher gültigen abweichende Festsetzungen über die Ermittlung der Schub- und Haftspannungen, aus denen sich bekanntlich stärkere Bewehrungen gegen Schub als bis dahin ergeben. Bei der Kürze der betreffenden, in ziemlich allgemeiner Form ausgesprochenen Vorschriften ist eine eingehendere Darstellung des hiernach einzuhaltenden Rechnungsvorganges und der zweckmäßigen baulichen Anordnung der zur Sicherung des Verbandes dienenden Schrägeisen und Bügel als zeitgemäß zu bezeichnen. Dieses Ziel strebt der Verfasser des vorliegenden Heftes an, indem er auf Grund der Vorschriften und unter Beachtung der einschlägigen Versuchsergebnisse feste Grundsätze für die Gestaltung der Schubsicherung aufstellt; er behandelt der Reihe nach die Anordnung und Bemessung der Schubbewehrung, die statische und praktische Aufgabe der Bügel, dann den Nachweis der Haftspannungen und den Einfluß der Haken. Die Ausführungen des Verfassers sind unter Beratung mit bekannten Fachmännern des Eisenbetons (Mörsch und Koenen) entstanden; an mehreren Beispielen wird ihre praktische Benützung erläutert. Für Berechnungen nach den neuen preußischen Bestimmungen ist das Büchlein wohl als ein vortreffliches Hilfsmittel zu bezeichnen; aber auch alle, die überhaupt mit dem Entwurf von Eisenbetontragwerken zu tun haben, werden in demselben eine Reihe von schätzenswerten Anregungen und Winken für die zweckmäßige Ausbildung solcher Tragwerke betreffs ihrer Schubbewehrung finden. C. H.



In neuer Bearbeitung erscheint demnächst:

Schlüter,
Band I:
Eisenbetonbau
Säule und Balken

Eine ausführliche Darlegung der grundlegenden Rechnungsarten des praktischen Eisenbetonbaues

Das Buch läßt — dem Zwecke einer gründlichen Einführung in die Eisenbetonstatik dienend — alles zunächst Entbehrliche beiseite und zeigt, wie man durch Kenntnis weniger, unwandelbarer Gesetze bald zur Selbständigkeit und Sicherheit in der Behandlung der verschiedensten Aufgaben gelangen kann.

Die Beispiele sind so dargestellt, wie es der Entwurfsarbeit des Ingenieurs entspricht, d. h. es werden die praktischen Gesichtspunkte, die der Konstrukteur bei der Wahl der Ausführungsart im Auge behalten muß und die erst zur Anwendung des einen oder anderen Rechnungsverfahrens bestimmen, mit angegeben. Zweckdienliche Anwendung der dem Verbundbau eigenen mannigfachen Bauarten ist somit unmittelbar neben die Einführung in die mathematisch-statischen Verhältnisse gesetzt.

Das Buch ist eine von der Fachpresse allgemein als vorzüglich anerkannte Vorbereitung für die Praxis.

H. Schlüter,
Die höhere Mathematik als
gemeinverständliches
Rechnungsmittel

In Pappband M. 2.80

Geheftet M. 1.80

Enthält:

die dem Band II Eisenbetonbau, Rahmen und Gewölbe in I. Auflage im Anhang beigegebenen „Elemente der höheren Mathematik für den Bedarf des Statikers“ und vermittelt diejenigen Grundkenntnisse der höheren Mathematik, die zum Studium des vorliegenden Bandes vorausgesetzt werden.

* * *

Die Gemeinverständlichkeit liegt in der gegebenen praktischen Darstellung des Stoffes, die sich nur an das Vorstellungsvermögen wendet und die weitgreifende mathematische Herleitung ausschließt.

Das Buch kann jeder lesen und sich zunutze machen, der die niedere Mathematik versteht.

Das Buch beweist daher, daß ein Ersatz der Infinitesimalrechnung durch die schwerfälligen und zeitraubenden Rechnungsgänge mit den Mitteln der elementaren Mathematik überflüssig ist.

Der Inhalt des Buches genügt für das Verständnis höherer Rechnung in der Technik (Statik, Maschinenbau, Elektrotechnik, Geodäsie).

Nebenstehend Inhaltsverzeichnis!

Inhaltsverzeichnis

- A. Erklärung des Zuwachsbegriffes, Bildung des Differentialquotienten, Bildung des Integrals.
1. Beispiel eines Quadrates.
 2. Beispiel eines Würfels.
 3. Wiederholung (Differentiation).
 4. Wiederholung (Integration).
 5. Konstante Faktoren.
 6. Konstante Summanden bei der Differentiation.
 7. Konstante Glieder bei der Integration.
- B. Bestimmte und unbestimmte Integrale.
8. Allgemeine Erläuterungen.
 9. Erklärung der Integrationsgrenzen.
- C. Differentiation oder Integration einer algebraischen Summe von Potenzen.
- 10.
- D. Partielle Differentiation.
- 11.
- E. Höhere Differentialquotienten.
- 12.
- F. Die einzelnen Differentiations- und Integrationsarten.
13. Einleitende Bemerkungen.
 14. Differentiation von \sqrt{x} .
 15. Differentiation von $\frac{1}{x}$.
 16. Differentiation von $3 \cdot x^4 - \frac{5}{x^2} + \sqrt[6]{x^6}$.
 17. Zusammenstellung der wichtigsten Differentiations- und Integrationsarten.
- G. Differentiation, wenn die unabhängige Veränderliche in mehreren Grundformen, aber nicht zugleich in mehreren Faktoren auftritt.
18. Falsche Lösung eines Beispiels.
 19. Richtige Lösung und weitere Beispiele.
- H. Differentiation eines Produktes, dessen Faktoren Grundformen der Veränderlichen enthalten.
- 20.
- I. Differentiation eines Bruches, dessen Zähler und Nenner Grundformen der Veränderlichen enthalten.
- 21.
- K. Die zeichnerische Darstellung von Gleichungen (Funktionen), Differentialquotienten und Integralausdrücken.
22. Bildliche Darstellung einer beliebigen Gleichung.
 23. Gleichung eines Biegemomentes.
 24. Lage des größten Momentes bei einem Träger mit Dreieckslast.
 25. Inhalt von Momentenflächen.

- L. Theorie der Maxima und Minima.
26. Allgemeine Beziehungen der Kurvenformen zu den praktischen Verhältnissen.
27. Anwendungen.
- M. Vergleich zwischen Elementarrechnung und Anwendung höherer Mathematik.
28. Elementare Betrachtungen zur Auffindung der Lage des größten Momentes bei einer über einen Träger wandernden Lastgruppe.
29. Dieselbe Aufgabe mit Hilfe der Differentialrechnung.
- N. Anwendung der Integralrechnung zur Bestimmung der Trägheitsmomente von Flächen und Stabzügen.
30. Trägheitsmoment eines Rechteckes bezogen auf eine Seitenkante.
31. Trägheitsmoment eines Rechteckes bezogen auf seine Schwerachsen.
32. Trägheitsmoment eines Stabes bezogen auf eine Normale durch seinen Fußpunkt.
33. Trägheitsmoment eines schief liegenden Stabes bezogen auf seine wagerechte Schwerachse.
34. Trägheitsmoment eines schief liegenden Stabes bezogen auf eine beliebige zu seiner wagerechten Schwerachse parallele Achse.

Fachwissenschaftlich-praktische BERATUNG

und Begutachtung in allen Fragen des Beton- und Eisenbetonbaues / Anfertigung und Prüfung von statischen Berechnungen / Aufstellung von einschlägigen Entwürfen und Kostenanschlägen, insbesondere auch für Instandsetzung rißhafter oder sonstwie gefährdeter Beton- und Eisenbetonbauwerke

nach bewährten Verfahren

Untersuchung von Bauunfällen u. dgl.

durch den Verfasser

Berlin-Friedenau, Sponholzstraße 53/54, Port. III, 1

Fernruf: Amt Uhland 2312



BIBLIOTEKA GŁÓWNA

354285L/1

