

na prawach rękopisu

Instytut Organizacji i Zarządzania
Politechnika Wroclawska
Raport serii PRE nr 7

**Problem synchronizacji
interwałowej w miejskiej
komunikacji publicznej**
(rozprawa doktorska)

Rafał Sroka

Promotor:
prof. dr hab. inż. Jacek Mercik

słowa kluczowe:

- komunikacja miejska
- synchronizacja interwałowa
- optymalizacja

Wrocław 2005

SPIS TREŚCI

WSTĘP	4
1. PRZEDSTAWIENIE PROBLEMU SYNCHRONIZACJI INTERWAŁOWEJ (PSI)	9
1.1. RÓWNOMIERNOŚĆ KURSOWANIA CZYLI WYRÓWNYWANIE INTERWAŁÓW CZASOWYCH	9
1.2. WSPÓLNE FRAGMENTY TRAS. WIĄZKI LINII. GRUPY PASAŻERÓW	10
1.3. PRZYPADEK SZCZEGÓLNY – RÓWNE TAKTY KURSOWANIA	12
1.4. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU SYNCHRONIZACJI INTERWAŁOWEJ	14
1.5. PROBLEM DOSTOSOWANIA CZĘSTOTLIWOŚCI KURSOWANIA DO ZAPOTRZEBOWANIA NA PRZEWOZY. PORY DNIA	14
1.6. ROZMIARY PROBLEMÓW WYSTĘPUJĄCYCH W PRAKTYCE	15
1.7. MIARA RÓWNOMIERNOŚCI KURSOWANIA	15
1.8. DEFINICJE POJĘĆ WYSTĘPUJĄCYCH W PRACY	16
2. WYZNACZENIE MIARY NIERÓWNOMIERNOŚCI KURSOWANIA POJAZDÓW	19
2.1. WPROWADZENIE	19
2.2. ILOŚCIOWA OCENA NIERÓWNOMIERNOŚCI KURSOWANIA	19
2.3. POSTULATY, JAKIE POWINNA SPEŁNIAĆ MIARA RÓWNOMIERNOŚCI	20
2.4. PRZEGLĄD INNYCH PRAC DOTYCZĄCYCH PROBLEMU SYNCHRONIZACJI	20
2.5. PRÓBA UOGÓLNIENIA PRZEDSTAWIONYCH MIAR RÓWNOMIERNOŚCI	26
2.6. NATURALNE CHARAKTERYSTYKI UKŁADU KOMUNIKACYJNEGO	28
2.7. SUMARYCZNY CZAS OCZEKIWANIA NA POJAZD JAKO MIARA RÓWNOMIERNOŚCI	28
3. OBLICZENIE SUMARYCZNEGO CZASU OCZEKIWANIA PASAŻERÓW NA POJAZD	29
3.1. WPROWADZENIE	29
3.2. SUMARYCZNY CZAS OCZEKIWANIA PASAŻERÓW NA PRZYSTANKU CZEKAJĄCYCH NA JEDEN POJAZD	30
3.2.1. Model deterministycznego i ciągłego napływu pasażerów	31
3.2.2. Model losowego i dyskretnego procesu napływu pasażerów	33
3.2.3. Wnioski z twierdzeń 3.1, 3.2, 3.3 i 3.4	42
3.3. OBLICZENIE SUMARYCZNEGO CZASU OCZEKIWANIA PASAŻERÓW DLA CIĄGU POJAZDÓW	43
3.4. OBLICZENIE SUMARYCZNEGO CZASU OCZEKIWANIA PASAŻERÓW NA WSZYSTKICH PRZYSTANKACH TEJ SAMEJ LINII. ZAGREGOWANA INTENSYWNOŚĆ NAPŁYWU PASAŻERÓW	44
3.5. OBLICZENIE SUMARYCZNEGO CZASU OCZEKIWANIA PASAŻERÓW NA WSZYSTKICH PRZYSTANKACH TEJ SAMEJ WIĄZKI	46
3.6. OBLICZENIE SUMARYCZNEGO CZASU OCZEKIWANIA PASAŻERÓW NA WSZYSTKICH PRZYSTANKACH CAŁEGO UKŁADU KOMUNIKACYJNEGO	48
3.7. ZWIĄZEK MIĘDZY SUMARYCZNYM CZASEM OCZEKIWANIA A RÓWNOMIERNOŚCIĄ KURSOWANIA	48
3.8. ZWIĄZEK MIĘDZY INTENSYWNOŚCIĄ NAPŁYWU PASAŻERÓW A CZĘSTOTLIWOŚCIĄ KURSOWANIA	49
3.8.1. Formuła przybliżona rozwiązania minimalizującego sumaryczny czas oczekiwania	49
3.9. WNIOSKI Z ROZDZIAŁU 3	56

4. MODELE PROBLEMU SYNCHRONIZACJI INTERWAŁOWEJ	57
4.1. SYSTEMATYKA MODELI PROBLEMU SYNCHRONIZACJI INTERWAŁOWEJ	57
4.2. MODEL JEDNEJ LINII	60
4.3. MODEL OGÓLNY	61
4.4. MODEL ZE STAŁYM I JEDNAKOWYM DLA WSZYSTKICH LINII TAKTEM KURSOWANIA	65
4.4.1. <i>Częstkowa funkcja strat</i>	65
4.4.2. <i>Dobór parametru istotność wiązki</i>	67
4.4.3. <i>Definicja funkcji strat</i>	67
4.4.4. <i>Ograniczenie dolne funkcji strat</i>	67
4.4.5. <i>Przykłady zastosowania modelu ze stałym i jednakowym taktem</i>	68
5. ALGORYTM POSZUKIWANIA MINIMUM FUNKCJI CELU (FC)	76
5.1. ZASTOSOWANY ALGORYTM	76
5.2. ZŁOŻONOŚĆ OBLICZENIOWA	76
5.3. WYMAGANIA SPRZĘTOWE I CZAS OBLICZEŃ	77
ZAKOŃCZENIE	78
ANEKS	80
MODUŁ SYNCH3	BŁĄD! NIE ZDEFINIOWANO ZAKŁADKI.
MODUŁ SYNCH5	BŁĄD! NIE ZDEFINIOWANO ZAKŁADKI.
BIBLIOGRAFIA	81

Wstęp

Współczesne miasta przeżywają trudności komunikacyjne. Wzrost liczby mieszkańców, zamożności społeczeństw i dostępności samochodów spowodował lawinowy wzrost liczby indywidualnych środków transportu. Aglomeracje miejskie są paraliżowane przez korki. Z kolei możliwości rozbudowy infrastruktury ulic (szczególnie w starych miastach) są ograniczone, a ponadto rozbudowa ta jest bardzo kosztowna.

Wyjściem z sytuacji jest częściowa rezygnacja z indywidualnych środków transportu i wzrost roli komunikacji zbiorowej [Worońko 1999]. Aby jednak komunikacja zbiorowa mogła konkurować z indywidualnymi środkami transportu należy zadbać o odpowiedni poziom komfortu podróży. Zagadnienie to ma wiele aspektów. Szczegółowy przegląd kryteriów oceny funkcjonowania komunikacji zbiorowej oraz niedogodności związanych z korzystaniem z komunikacji zbiorowej zawiera praca [Rudnicki 1999].

Usuwanie tych niedogodności oczywiście zwiększa skłonność podróżnych do korzystania z komunikacji zbiorowej. Jednak koszty usuwania wymienianych przez pasażerów niedogodności są różne [Dźwigoń W. 2002]. Rozwiązania takie jak rozbudowa ulic czy sieci torowisk, zwiększanie częstotliwości kursowania pojazdów są oczywiście skuteczne, lecz wymagają znacznych nakładów finansowych.

Zdecydowanie mniej kosztowne jest usuwanie tych niedogodności poprzez poprawę organizacji ruchu komunikacji zbiorowej. Można tak projektować obsługę ruchu, aby przy niezmiętej wielkości taboru minimalizować czas oczekiwania pasażerów na przystankach. Długi czas oczekiwania na przystankach jest bowiem jedną z najczęściej wymienianych przez pasażerów niedogodności [Rudnicki 1999].

Jednym z istotnych aspektów poprawy organizacji komunikacji zbiorowej jest synchronizacja kursowania pojazdów. Wyróżniamy dwa rodzaje synchronizacji: synchronizację przesiadkową [Ceder 1991, Woronko 1997] i interwałową [Daduna 1993, Hołubiec 1996, Rekuć 1995, Reymond 1987, Sroka 1998 i 2002]. Synchronizacja przesiadkowa polega na takim ustaleniu momentów startów pojazdów z ich przystanków początkowych aby zminimalizować czas oczekiwania pasażerów w punktach przesiadkowych. Z kolei synchronizacja interwałowa ma na celu wyrównanie odstępów

czasowych między pojazdami różnych linii na wspólnych odcinkach tras. Zwiększenie równomierności kursowania ma na celu:

- zmniejszenie niewygód pasażerów (czasu oczekiwania na pojazd i nierównomiernego zapełnienia pojazdów).
- unikanie problemów technicznych, na przykład powstających wtedy, gdy zbyt wiele pojazdów w krótkim czasie podjeżdża na ten sam przystanek, pętlę, lub skrzyżowanie.

Dalej w pracy mówiąc o synchronizacji będziemy mieli na myśli synchronizację interwałową.

Problem synchronizacji był podejmowany w literaturze [Daduna 1993, Hołubiec 1996, Rekuć 1995, Reymond 1987, Sroka 1998 i 2002, Voss 1922, Wolf 1987] jednak najczęściej wymieniany jest on tylko jako jeden z aspektów optymalizacji komunikacji miejskiej. Brakuje pozycji traktujących problem głębiej i dających wskazówki do rozwiązania problemu w praktyce. Autor tej pracy nie spotkał się z opublikowaną propozycją rozwiązania problemu synchronizacji. Być może brak takich publikacji wynika z faktu, iż rozwiązania problemu synchronizacji posiadają wartość handlową i dlatego nie są publikowane.

Tematem tej pracy jest problem wyrównywania odstępów czasowych (interwałów) między kolejnymi pojazdami komunikacji miejskiej odjeżdżającymi z przystanku. W literaturze problem ten nosi nazwę problemu synchronizacji interwałowej (PSI) w miejskiej komunikacji publicznej.

Celem niniejszej pracy jest:

- rozwiązanie problemu optymalizacyjnego synchronizacji interwałowej w miejskiej komunikacji publicznej

Dla osiągnięcia tego celu:

- stworzono miarę nierównomierności kursowania pojazdów,
- stworzono matematyczny model problemu:
 - opisano przestrzeń decyzyjną,
 - skonstruowano funkcję celu (funkcję strat),
 - zdefiniowano ograniczenia i założenia poszczególnych modeli
- opracowano algorytmy poszukujące dla tych modeli rozwiązań bliskich optymalnemu.

Praca składa się ze wstępu, 5 rozdziałów i zakończenia.

We wstępie krótko przedstawiono tematykę pracy i zaprezentowano zawartości poszczególnych rozdziałów.

W rozdziale pierwszym przedstawiono problem synchronizacji interwałowej jako element organizacji ruchu miejskiej komunikacji publicznej:

- Wprowadzono pojęcie równomierności kursowania i taktu linii.
- Wprowadzono pojęcie wiązki linii i wskazano celowość równomiernego kursowania pojazdów na wspólnym fragmencie tras.
- Sformułowano problem synchronizacji interwałowej.
- Wskazano potrzebę stworzenia miary równomierności kursowania.
- Zdefiniowano pojęcia używane w pracy.

W rozdziale drugim wyznaczono miarę równomierności kursowania pojazdów:

- Wskazano brak naturalnej miary równomierności kursowania.
- Sformułowano postulaty, jakie taka miara powinna spełniać.
- Dokonano przeglądu literatury dotyczącej synchronizacji.
- Dokonano próby uogólnienia opisywanych w literaturze miar równomierności.
- Dokonano przeglądu naturalnych charakterystyk układu komunikacyjnego.
- Wskazano sumaryczny czas oczekiwania pasażerów na przystankach jako miarę równomierności kursowania pojazdów (uzasadnienie tego wyboru pozostawiono w rozdziale 3).

W rozdziale trzecim obliczono sumaryczny czas oczekiwania pasażerów na ciąg pojazdów komunikacji miejskiej:

- Sformułowano założenia, przy których będzie liczony sumaryczny czas oczekiwania pasażerów.
- Wprowadzono pojęcie intensywności napływu pasażerów.
- Wyznaczono funkcję oceniającą sumaryczny czas oczekiwania pasażerów na jeden pojazd na jednym przystanku.

- Wyznaczono sumaryczny czas oczekiwania pasażerów na ciąg pojazdów na jednym przystanku.
- Wyznaczono sumaryczny czas oczekiwania pasażerów na ciąg pojazdów jednej linii na wszystkich przystankach tej linii. Wprowadzono pojęcie zagregowanej intensywności napływu pasażerów.
- Wyznaczono sumaryczny czas oczekiwania dla wszystkich pasażerów wiązki.
- Wyznaczono sumaryczny czas oczekiwania dla wszystkich pasażerów w całym układzie komunikacyjnym.
- Wskazano związek między sumarycznym czasem oczekiwania a równomiernością kursowania
- Uzasadniono, że sumaryczny czas oczekiwania pasażerów może być kryterium oceny nierównomierności kursowania.
- Wyznaczono funkcję obliczającą wartość sumarycznego czasu oczekiwania w całym układzie komunikacyjnym w zależności od momentów startów pojazdów. Funkcja ta będzie użyta jako funkcja strat w modelach problemu synchronizacji.
- Przedstawiono model jednej linii. Jest to model pomocniczy, na przykładzie którego zaprezentowano własności przyjętej miary nierównomierności kursowania.
- Wyznaczono przybliżoną zależność między częstotliwością kursowania pojazdów w rozwiązaniu optymalnym a intensywnością napływu pasażerów
- Wykazano, że rozkłady optymalne względem tej miary mają własność równomiernego kursowania, oraz dostosowują częstotliwość kursowania do intensywności napływu pasażerów.

W rozdziale czwartym sformułowano modele problemu synchronizacji:

- Wskazano zmienne decyzyjne i funkcję celu modelu.
- Dokonano klasyfikacji modeli problemu synchronizacji interwałowej ze względu na przyjęte ograniczenia:
 1. Model ogólny, w którym jest pełna dowolność momentów odjazdów.
 2. Modele ze stałym taktom kursowania.
 3. Modele z podziałem doby na pory dnia.
- Wskazano na związek między danymi dotyczącymi układu komunikacji zbiorowej a parametrami modelu.

- Sformułowano poszczególne modele i dla niektórych z nich przeprowadzono symulację poszukiwania rozwiązania optymalnego.

W rozdziale piątym przedstawiono opracowany algorytm poszukiwania rozwiązań optymalnych w modelach zaprezentowanych w rozdziale czwartym.

W zakończeniu podsumowano wyniki osiągnięte w pracy:

- sformułowanie problemu synchronizacji interwałowej,
- sformułowanie postulatów, jakie powinna spełniać miara równomierności kursowania,
- obliczenie probabilistycznych charakterystyk sumarycznego czasu oczekiwania pasażerów na przystankach przy założeniu modelu stochastycznego procesu Poissona dla procesu napływu pasażerów na przystanki,
- skonstruowanie modelu problemu synchronizacji,
- opracowanie algorytmów poszukujących rozwiązań bliskich optymalnemu w dwu przedstawionych modelach.

Aneks pracy zawiera algorytm poszukiwania minimów zaproponowanej funkcji strat:

- Przedstawiono zastosowany algorytm poszukiwania minimów i oszacowano jego złożoność obliczeniową.
- Załączono wydruk programu komputerowego napisanego w środowisku DELPHI, użytego do przeprowadzenia symulacji

1. Przedstawienie problemu synchronizacji interwałowej (PSI)

1.1. Równomierność kursowania czyli wyrównywanie interwałów czasowych

Pożądaną cechą rozkładu jazdy pojazdów komunikacji publicznej jest równomierność kursowania. O **równomiernym kursowaniu** pojazdów z pewnego zbioru mówimy wtedy, gdy interwały czasowe między momentami odjazdów tych pojazdów są równe. Oczywiście łatwo jest zapewnić równomierne kursowanie pojazdów jednej linii. W tym celu wystarczy ustalić w równych odstępach momenty odjazdów z pętli startowej. Ponieważ zakładamy, że dla wszystkich pojazdów czasy przejazdu danego odcinka trasy są takie same, więc na każdym przystanku interwały czasowe między momentami odjazdów pojazdów jednej linii będą takie same jak na pętli startowej tej linii. Stały interwał czasowy między momentami odjazdów pojazdów danej linii nazywamy taktem tej linii.

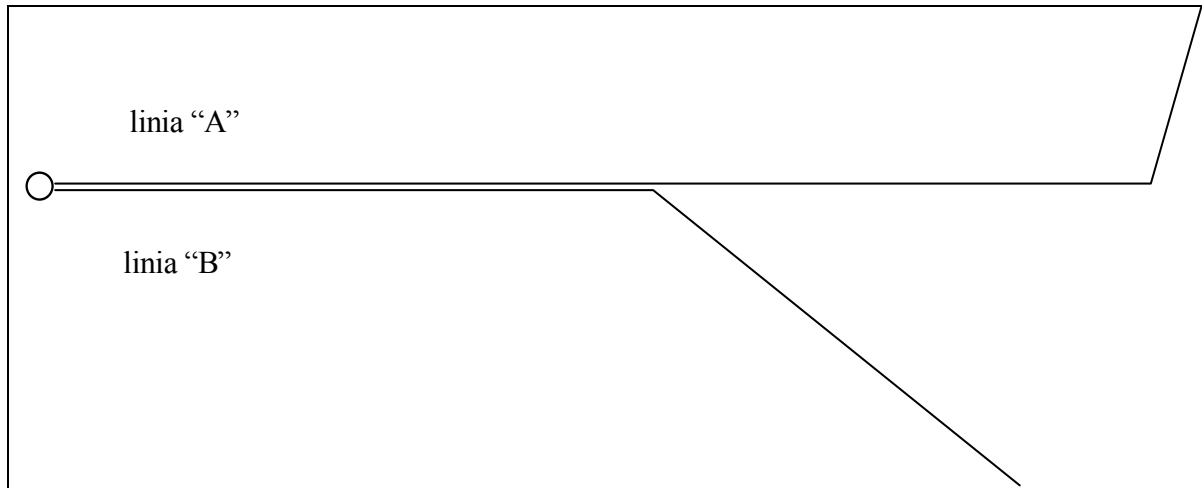
Przykładem takiego równomiernego kursowania jest linia tramwajowa nr 9 we Wrocławiu. Poniżej mamy fragment jej rozkładu jazdy (między godziną 8 a 17):

8	5	20	35	40Z	50
9	5	20	35	50	
10	5	20	35	50	
11	5	20	35	50	
12	5	17	29	41	53
13	5	17	29	41	53
14	5	17	29	41	53
15	5	17	29	41	53
16	5	17	29	41	53

Widzimy tu, że w godzinach od 8 do 12 pojazdy kursują z taktem 15 minut, a w godzinach od 12 do 17 z taktem 12 minut.

1.2. Wspólne fragmenty tras. Wiązki linii. Grupy pasażerów

W miejskiej komunikacji publicznej często zdarza się, że co najmniej dwie linie mają wspólny odcinek tras (w tej pracy mówimy, że takie linie tworzą wiązkę, patrz definicja wiązki - p. 1.8). Rozważmy przykład dwóch linii A i B, które mają wspólny fragment tras (rys. 1.2.1).



Rys. 1.2.1. Schemat dwu linii ze wspólnym fragmentem tras (opracowanie własne)

Pasażerów możemy wówczas podzielić na 3 grupy:

- mogących dojechać do celu tylko linią A,
- mogących dojechać do celu tylko linią B,
- podróżujących na wspólnym odcinku, więc mogących dojechać do celu linią A lub B.

Nazwijmy te grupy pasażerów odpowiednio: grupa A, grupa B i grupa AB.

Pasażerom z trzeciej grupy AB nie robi różnicy, czy podróżują pojazdem linii A czy B. Dla ich wygody pojazdy linii A lub B powinny kursować równomiernie. Dlatego zachodzi potrzeba takiego ustalenia momentów startów pojazdów linii A i B z odpowiednich pętli, aby zapewnić równomierne kursowanie pojazdów dla wszystkich trzech grup pasażerów. Nie zawsze jest to możliwe, co ilustruje poniższy przykład.

Przykład 1.2.1

Dla ustalenia uwagi rozważmy pierwszy wspólny przystanek na wspólnej części tras linii A i B (w tej pracy taki przystanek nazywamy węzłem wiązki, patrz p. 1.8). Załóżmy, że momenty odjazdów pojazdów linii A i B liczymy w minutach względem pewnej umownej chwili 0. Załóżmy, że pojazdy linii A kursują z taktom 15 minut, a pojazdy linii B z taktom 10

minut. Załóżmy, że pierwszy pojazd linii A odjeżdża w chwili 0 a pierwszy pojazd linii B w chwili 2. Momenty odjazdów kolejnych pojazdów układają się w ciąg:

- dla pasażerów z grupy A (pierwszy pojazd w chwili 0 i dalej co 15 min.):
 - 0, 15, 30, 45, 60, itd.
- dla pasażerów z grupy B (pierwszy pojazd w chwili 2 i dalej co 10 min.):
 - 2, 12, 22, 32, 42, 52, 62, itd.
- dla pasażerów z grupy AB (uporządkowane momenty odjazdów linii A lub B):
 - 0, 2, 12, 15, 22, 30, 32, 42, 45, 52, 60, 62, itd.

Widzimy tu, że dla pasażerów dwu pierwszych grup pojazdy kursują równomiernie. Interwały między kolejnymi odjazdami układają się w ciąg: 15, 15, 15, 15, dla pierwszej grupy i 10, 10, 10, 10, 10, dla drugiej grupy.

Ale dla grupy AB momenty odjazdów pojazdów nie są rozłożone równomiernie. Interwały między kolejnymi odjazdami układają się w ciąg:

2, 10, 3, 7, 8, 2, 10, 3, 7, 8, 2, itd.

Nie są więc nawet w przybliżeniu równe – pojazdy kursują bardzo nierównomiernie.

Można osiągnąć równomierne kursowanie dla pasażerów grupy AB zmieniając momenty odjazdów pojazdów linii A i B. Przyjmijmy następujące momenty odjazdów:

- dla linii A:
 - 0, 18, 30, 48, 60, itd.
- dla linii B:
 - 6, 12, 24, 36, 42, 54, 66, itd.

Dla pasażerów grupy AB momenty odjazdów ułożą się w ciąg:

• 0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, itd.

Będą zatem rozłożone idealnie co 6 minut. Ale w tej sytuacji nie mamy równomierności kursowania pojazdów dla linii A i B. Widzimy więc, że możliwe jest osiągnięcie idealnej równomierności dla każdej z grup pasażerów z osobna, ale nie jest możliwe osiągnięcie idealnej równomierności dla wszystkich trzech grup pasażerów równocześnie.

Jak widać na powyższym przykładzie, w niektórych układach nie jest możliwe osiągnięcie idealnej równomierności kursowania dla wszystkich grup pasażerów. Wtedy konieczne jest poszukiwanie rozwiązania, w którym osiągnięty byłby jakiś kompromis między sprzecznymi interesami różnych grup pasażerów.

Można zauważyć, że w powyższym przykładzie trudność synchronizacji wynikała z faktu, że linie A i B wykonywały różną liczbę kursów na godzinę. Linia A wykonywała 4 kursy, a linia B – 6 kursów. Gdyby obie linie miały jednakową, stałą w czasie częstotliwość kursowania, to można by na wspólnym odcinku „przeplatać” na przemian kursy linii A i B. W ten sposób osiągnięto by idealną równomierność kursowania dla wszystkich grup pasażerów.

1.3. Przypadek szczególny – równe takty kursowania

Ważnym przypadkiem szczególnym problemu synchronizacji interwałowej jest sytuacja, gdy wszystkie linie kursują z jednakową częstotliwością (na przykład we Wrocławiu, w szczycie wszystkie tramwaje kursują co 12 minut). W takim przypadku nie musimy dbać o równomierność kursowania dla pojazdów danej linii, gdyż jest ona zapewniona z założenia. Pozostaje zapewnić równomierne kursowanie dla grup pasażerów korzystających z kilku linii na wspólnym odcinku (czyli dla wiązek linii).

Jako przykład można podać wrocławskie linie tramwajowe 8, 15 i 22. Linie te mają wspólną pętlę startową i na odcinku 11 przystanków wspólną trasę, a więc tworzą wiązkę.



Rys. 1.3.1. Fragment planu komunikacji tramwajowej Wrocławia

(źródło: ZDiK Wrocław)

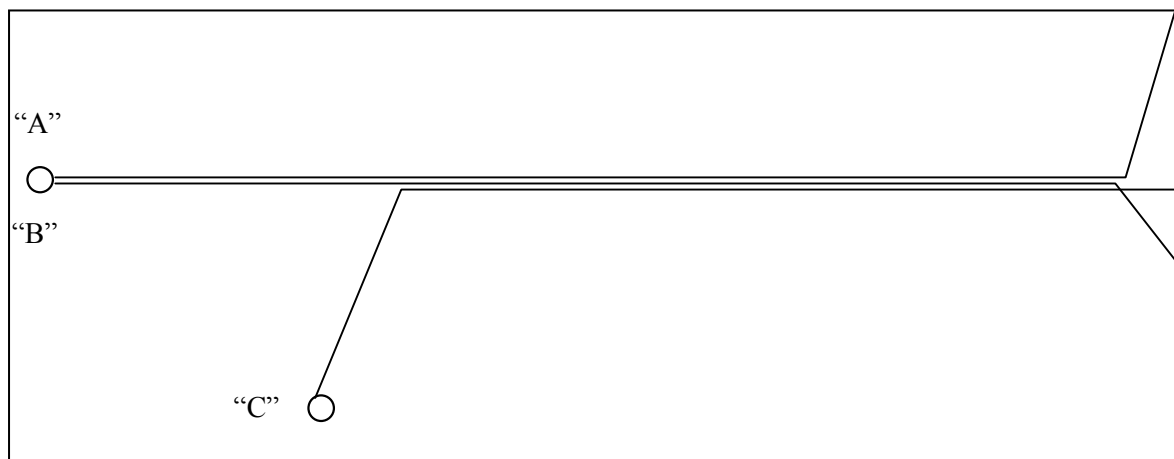
Momenty odjazdu z pętli to:

- dla linii 8: 10 (i dalej co 12 min.: 22, 34, 46, 58, itd.)
- dla linii 15: 6 (i dalej co 12 min.: 18, 30, 42, 54, itd.)
- dla linii 22: 2 (i dalej co 12 min.: 14, 26, 38, 50, itd.)

Jak widać co 4 minuty z pętli odjeżdżają pojazdy kolejno linii 22, 15 i 8. Interwały między momentami odjazdów układają się w ciąg 4-4-4 (i dalej cyklicznie tak samo – wynika to z założenia o wspólnym takcie). Możemy powiedzieć, że w tej wiązce osiągnięto pełną synchronizację.

Oczywiście każdą wiązkę można idealnie zsynchronizować. Wystarczy ustalić momenty odjazdów z pętli poszczególnych linii tej wiązki tak, aby na węźle wiązki uzyskać równe interwały między momentami odjazdów.

Sytuacja komplikuje się, gdy część linii wchodzi w skład wielu wiązek. Wtedy ustalając momenty odjazdu danej linii tak, aby zsynchronizować jakąś wiązkę możemy pogorszyć synchronizację innej wiązki, w skład której wchodzi ta linia. Ilustruje to poniższy przykład (rys. 1.3.2) układu, w którym pełna synchronizacja nie jest możliwa:



Rys. 1.3.2. Schemat trzech linii ze wspólnymi fragmentami tras (opracowanie własne)

Przykład 1.3.1

W układzie przedstawionym na rys. 1.3.2 mamy trzy linie, które nazwiemy A, B i C. Załóżmy, że linie A i B startują ze wspólnej pętli i jadą pewien odcinek tą samą trasą. Natomiast linia C startuje z innej pętli i jedzie pewien odcinek tą samą trasą co linie A i B. Tak więc w układzie tym mamy dwie wiązki: wiązka AB, tworzona przez linie A i B oraz wiązka ABC tworzona przez linie A, B i C. Załóżmy, że wspólny takt wynosi 12 minut.

Aby idealnie zsynchronizować wiązkę AB trzeba momenty startów linii A i B przesunąć o pół taktu, czyli o 6 minut. Natomiast aby idealnie zsynchronizować wiązkę ABC trzeba momenty startów linii A, B i C ustalić w odstępach 4 min. Te dwa cele są oczywiście sprzeczne.

Podsumowując, opisywany tu problem polega na ustaleniu pewnej zależności czasowej między momentami odjazdów pojazdów różnych linii, czyli na synchronizacji linii. A ponieważ zagadnienie dotyczy odstępów czasowych czyli interwałów, dlatego problem ten nosi nazwę **problemu synchronizacji interwałowej (PSI)**.

1.4. Sformułowanie problemu synchronizacji interwałowej

Z przedstawionych wcześniej rozważań wynika, że problem synchronizacji interwałowej polega na takim ustaleniu momentów odjazdów pojazdów wszystkich linii z odpowiednich pętli, aby zapewnić równomierne kursowanie dla wszystkich grup pasażerów.

1.5. Problem dostosowania częstotliwości kursowania do zapotrzebowania na przewozy. Pory dnia

Oprócz opisanego powyżej problemu wyrównywania interwałów trzeba jeszcze rozwiązać problem dostosowywania częstotliwości kursowania do zapotrzebowania na przewozy. Oczywiście wraz ze wzrostem zapotrzebowania na przewozy powinna rosnać częstotliwość kursowania. Problem optymalnej zależności między tymi wielkościami zostanie rozważony w dalszej części tej pracy. Zapotrzebowanie na przewozy zmienia się znacznie w czasie dnia i możemy przyjąć, że zmienia się w sposób płynny. Tak samo powinna się zmieniać w czasie dnia częstotliwość kursowania. Z drugiej jednak strony chcielibyśmy osiągnąć równomierność kursowania, czyli stałe interwały między kolejnymi pojazdami. Te dwa cele są oczywiście sprzeczne i potrzebny jest pewien kompromis, który je pogodzi.

W praktyce dzieli się dzień na kilka kilkugodzinnych pór i w tych kilkugodzinnych przedziałach czasowych wymaga się stałej częstotliwości kursowania.

Przykład:

We Wrocławiu, w miejskiej komunikacji publicznej przyjęto podział dnia na sześć pór:

pora 1 – od 4:00 do 6:00	częstotliwość kursowania 20 min.
pora 2 – od 6:00 do 8:00	częstotliwość kursowania 12 min.
pora 3 – od 8:00 do 13:30	częstotliwość kursowania 15 min.
pora 4 – od 13:30 do 17:00	częstotliwość kursowania 12 min.
pora 5 – od 17:00 do 20:00	częstotliwość kursowania 15 min.
pora 6 – od 20:00 do 22:20	częstotliwość kursowania 20 min.

Oprócz synchronizacji rozkładów jazdy w poszczególnych porach dnia, trudności nastęrcza także usuwanie nieregularności na stykach pór. Rozkłady jazdy zoptymalizowane dla każdej pory dnia z osobna często „nie pasują” do siebie na stykach pór.

W pracy rozważymy dwa modele, będące konsekwencją takich założeń:

- w pierwszym pozwalamy, aby częstotliwość kursowania zmieniała się w sposób płynny, dostosowując się do zapotrzebowania na przewozy,
- w drugim postulujemy podział dnia na pory i w każdej z nich wymagamy stałej częstotliwości kursowania.

1.6. Rozmiary problemów występujących w praktyce

W praktyce mamy do czynienia z układami kilkudziesięciu linii, z których wiele wchodzi w skład więcej niż jednej wiązki. W takich układach praktycznie nigdy nie jest możliwa idealna synchronizacja wszystkich wiązek. Bez zastosowania wspomaganie komputerowego poszukiwanie rozwiązań zbliżonych do idealnego jest procesem żmudnym, czasochłonnym, wymagającym od planisty sporego doświadczenia i prowadzonym często metodą prób i błędów. Wskazane jest stworzenie narzędzia komputerowego wspomaganie układania rozkładów jazdy pod kątem synchronizacji interwałowej.

1.7. Miara równomierności kursowania

Jak wspomniano powyżej, w układach komunikacyjnych występujących w praktyce zwykle nie jest możliwe znalezienie rozwiązania idealnego. W takiej sytuacji za rozwiązanie problemu należy uznać znalezienie rozwiązania najlepszego z pośród tych, które można osiągnąć. Rodzi to problem porównywania rozwiązań nieidealnych. Konieczne jest zatem stworzenie miary równomierności kursowania, dzięki której możliwa będzie ilościowa ocena rozwiązania - układu momentów startów pod kątem równomierności. W oparciu o taką miarę możliwe będzie stworzenie funkcji celu w modelu problemu synchronizacji. Wyznaczenie miary równomierności kursowania jest przedmiotem kolejnego rozdziału.

1.8. Definicje pojęć występujących w pracy

Pojęcia używane do opisu sieci komunikacyjnej

POJAZD

Pojazd – pojazd miejskiej komunikacji publicznej, środek transportu pasażerów.

PRZYSTANEK

Przystanek to miejsce, gdzie pasażerowie mają możliwość wsiadania/wysiadania do/z pojazdów.

POŁĄCZENIE

Połączenie definiujemy jako parę uporządkowaną przystanków. Mówimy, że istnieje połączenie między przystankami „A” i „B” jeśli pojazdy kursują od przystanku „A” bezpośrednio do przystanku „B”.

PRZEJAZD

Przejazd jest jednym połączeniem, lub ciągiem kilku kolejnych połączeń. Najczęściej przejazd składa się z jednego połączenia, ale np. w przypadku linii pospiesznych, gdy pojazd nie zatrzymuje się na niektórych przystankach, przejazd składa się z kilku kolejnych połączeń.

LINIA

Przez **linię** rozumiemy ciąg kolejnych przejazdów. Należy zaznaczyć, że w pracy słowo linia rozumiemy inaczej niż w języku potocznym. W języku potocznym przez linię rozumie się trasę i poruszające się nią pojazdy w obu kierunkach. W pracy przez linię rozumiemy ciąg przejazdów odpowiadający trasie w jedną stronę. Najczęściej jednej linii w znaczeniu potocznym odpowiadają dwie linie (w sensie stosowanym w tej pracy) biegnące w przeciwnych kierunkach. Rodzi to problem nazewnictwa. Aby ułatwić identyfikację linii w pracy liniom nadaje się nazwy składające się z nazwy linii w znaczeniu potocznymi i litery oznaczającej kierunek (N – północ, S – południe, W – zachód, E – wschód, P – prawo, L – lewo), np.: 10E – linia „10” w kierunku wschodnim, 0P – linia okrężna „0” okrążająca centrum w prawo.

PĘTLA

Pętla danej linii nazywamy przystanek na początku trasy tej linii. Innymi słowy, pętla to pierwszy przystanek pierwszego połączenia pierwszego przejazdu tej linii.

INTENSYWNOŚĆ NAPŁYWU PASAŻERÓW

Przez **intensywność napływu pasażerów (INP)** na przystanek w chwili t rozumiemy średnią lub oczekiwaną ilość pasażerów przypadającą na jednostkę czasu w małym przedziale czasowym $(t, t+dt)$. W pracy intensywność napływu pasażerów oznaczamy przez $\alpha(t)$ i podajemy w pasażerach na minutę. Gdy INP jest stała piszemy tylko α .

Pojęcia używane do opisu problemu synchronizacji w sieci komunikacyjnej

WIĄZKA

O kilku liniach będziemy mówili, że na pewnym odcinku tworzą **wiązkę**, jeśli pojazdy tych linii kursują na tym odcinku wspólną trasą. Jeśli kilka linii tworzy wiązkę, to pasażerowie podróżujący tylko wspólną częścią tras tych linii mogą wybrać dowolną z tych linii. Dlatego zachodzi potrzeba zsynchronizowania tych linii tak, aby interwały między pojazdami kolejnych linii wiązki były takie same. Wprowadźmy notację dla opisu odstępów czasowych między pojazdami linii tworzących wiązkę: dla wiązki składającej się z n linii rozkład odstępów czasowych między pojazdami tych linii opisywać będziemy podając n liczb pooddzielanych myślnikami. Na przykład: zapis 3-4-5 oznacza, że w wiązce składającej się z trzech linii pojazdy drugiej linii przyjeżdżają na przystanki 3 minuty po pojazdach pierwszej linii, pojazdy trzeciej linii przyjeżdżają na przystanki 4 minuty po pojazdach drugiej linii i pojazdy pierwszej linii przyjeżdżają na przystanki 5 minut po pojazdach trzeciej linii (czyli takt tych linii wynosi $3+4+5=12$ minut). W idealnie zsynchronizowanej wiązce wszystkie odstępów czasowe między pojazdami kolejnych linii są równe (np. 3-3-3-3 – oznacza cztery linie i pojazdy odjeżdżające co trzy minuty).

WĘZEL WIĄZKI

Węzelem wiązki nazywamy pierwszy wspólny przystanek linii tworzących wiązkę. Interwały między momentami odjazdów pojazdów linii tworzących wiązkę są

jednakowe na wszystkich przystankach wspólnego odcinka tras (wynika to z założenia o stałych w czasie i jednakowych dla wszystkich linii czasach przejazdu między danymi punktami trasy). Dla ustalenia uwagi interwały te będziemy zawsze rozważać na węźle wiązki

SYNCHRONIZACJA WIĄZKI

Przez **zsynchronizowanie** linii tworzących wiązkę rozumiemy takie ustalenie momentów startów pojazdów tych linii z odpowiednich pętli aby zapewnić możliwie najbardziej równomierne kursowanie na wspólnym odcinku tras tych linii.

PORA DNIA

Ze względu na zapotrzebowanie na przewozy dobę dzieli się na **pory**. Dla każdej pory ustala się odpowiednią do zapotrzebowania częstotliwość kursowania pojazdów. Przykładowy podział doby na pory: szczyt poranny ($6^{00} - 8^{00}$) i popołudniowy ($13^{30} - 17^{00}$) - częstotliwość kursowania 12 min.; pory międzyszczytowe ($8^{00} - 13^{30}$, $17^{00} - 20^{00}$) - częstotliwość kursowania 15 min. i pora o najmniejszym zapotrzebowaniu na przewozy ($20^{00} - 22^{20}$) - częstotliwość kursowania 20 minut.

TAKT

Przez takt rozumiemy stały w czasie pory dnia interwał między momentami odjazdów kolejnych pojazdów. Typowe takty to: 10, 12, 15, 20, 30 i 60 minut. (Takt jest często dzielnikiem 60. Dzięki temu rozkłady jazdy zyskują powtarzalność: w każdej godzinie minuty odjazdów są takie same. Taki rozkład jazdy jest dla pasażera łatwiejszy do zapamiętania.)

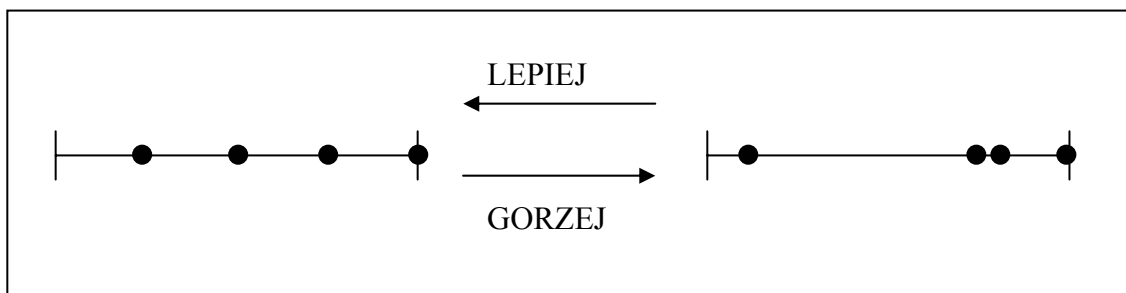
2. Wyznaczenie miary nierównomierności kursowania pojazdów

2.1. Wprowadzenie

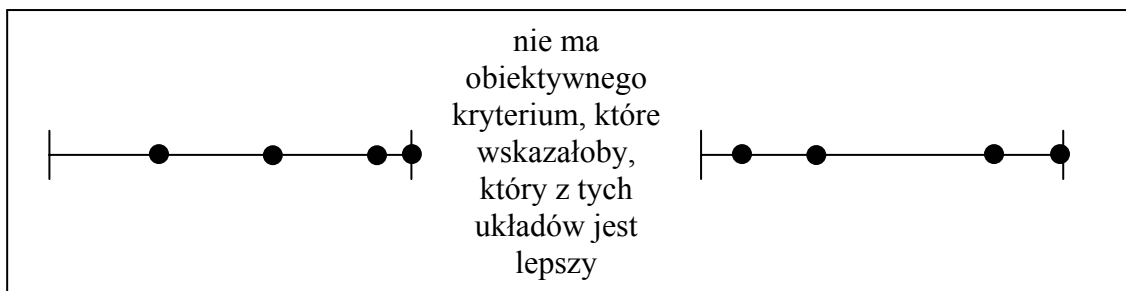
W rozdziale drugim wyznaczmy miarę nierównomierności kursowania pojazdów. Sformułowane zostaną postulaty, jakie taka miara powinna spełniać. Przedstawione zostanie kilka różnych miar i wybrana zostanie jedna do dalszych rozważań. Jest to kluczowy wynik tej pracy, gdyż miara ta będzie podstawą do stworzenia funkcji celu w modelu problemu synchronizacji interwałowej.

2.2. Ilościowa ocena nierównomierności kursowania

Nie istnieje żadna naturalna miara równomierności (czy też równoważnie – nierównomierności) kursowania. „Równomierność” nie jest pojęciem ścisłym. Łatwo jest rozróżnić układ idealnie równomierny do nierównomiernego (patrz rys. 2.2.1) ale nie ma naturalnych kryteriów, które pozwalałyby nam rozróżniać „stopień równomierności” układów nierównomiernych (patrz rys. 2.2.2).



Rys. 2.2.1. Równomierne i nierównomierne rozłożenie punktów na odcinku (opracowanie własne)



Rys. 2.2.2. Dwa nierównomierne układy punktów (opracowanie własne)

Aby takie kryterium stworzyć, konieczna jest ilościowa ocena układu momentów odjazdów pojazdów pod kątem ich nierównomierności. Innymi słowy konieczne jest wyznaczenie funkcji, której argumentami będą momenty odjazdów pojazdów a wartością – ocena nierównomierności kursowania pojazdów.

2.3. Postulaty, jakie powinna spełniać miara równomierności

Zanim rozpoczniemy poszukiwania miary równomierności kursowania pojazdów sformułujemy postulaty, jakie taka miara powinna spełniać. Możemy postawić dwa naturalne postulaty, jakie powinna spełniać miara równomierności:

1. Miara powinna oceniać jako najlepszy układ idealnie równomierny.
2. W przypadku dwu układów różniących się tylko jednym punktem miara powinna ocenić jako lepszy ten, w którym ten punkt leży bliżej środka odcinka złożonego z dwu sąsiednich punktów.

Te dwa postulaty powinna spełniać każda miara równomierności rozłożenia punktów na odcinku. Oprócz nich postawimy dwa kolejne postulaty, jakie powinna spełniać miara równomierności kursowania pojazdów komunikacji miejskiej:

3. Miara powinna zawierać czynnik odpowiadający istotności mierzonego fragmentu układu.
4. W układzie momentów odjazdów zoptymalizowanym pod kątem tej miary częstotliwość kursowania pojazdów powinna być dostosowana do zmiennego zapotrzebowania na przewozy.

2.4. Przegląd innych prac dotyczących problemu synchronizacji

Poszukiwanie miary równomierności zaczniemy od przeglądu innych prac dotyczących problemu synchronizacji.

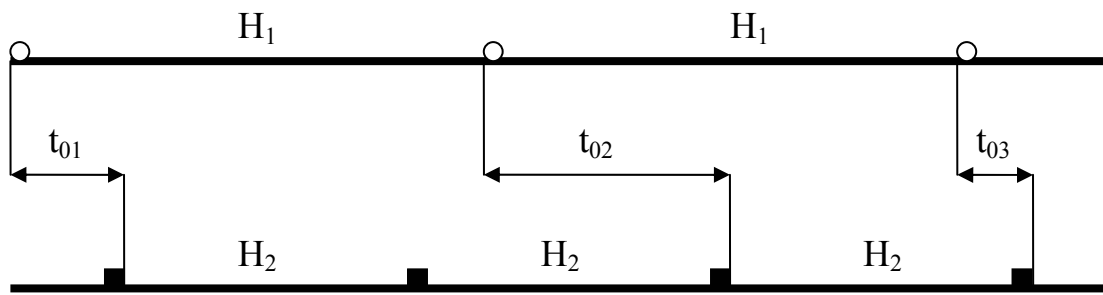
Adamski [1993] w swojej pracy rozpatruje problem synchronizacji kilku linii posiadających jeden wspólny fragment trasy przy następujących założeniach:

- intensywność napływu pasażerów na przystanki jest wysoka,
- częstotliwość kursowania pojazdów jest wysoka lub średnia,
- pasażerowie przybywają na przystanki losowo i niezależnie od pojazdów komunikacji miejskiej,

- pojemność pojazdów jest wystarczająca,
- częstotliwość dla kursowania różnych linii może być różna, ale dla danej linii jest ustalona (przynajmniej w pewnym horyzoncie czasowym, w którym rozpatrywany jest problem synchronizacji),

Rozważane są dwie linie o częstotliwościach kursowania $H_1 = n_1 \cdot r$ i $H_2 = n_2 \cdot r$, gdzie $r \in \mathbf{R}$ jest liczbą rzeczywistą dodatnią a n_1 i n_2 są liczbami naturalnymi względnie pierwszymi, różnymi od jedynki. Bez straty ogólności można założyć, że $H_1 > H_2$.

Przez t_{0i} oznaczamy odstęp czasowy między odjazdem i -tego pojazdu pierwszej linii, a odjazdem następującego po nim pojazdu drugiej linii.



Rys. 2.4.1. Różnice momentów odjazdów t_{0i} . źródło: [Adamski, 1993]

Oczywiście, wartość t_{01} wyznacza kolejne wartości t_{02} , t_{03} , t_{04} , itd. [Adamski, 1993] podaje następującą formułę rekurencyjną:

$$t_{0i+1} = t_{0i} - H_1 - H_2 \cdot \text{int}\{(t_{0i} - H_1) / H_2\}$$

Ciąg $\{t_{0i}\}$ przebiega cyklicznie wartości zbioru n_2 -elementowego:

$$\{t_{01} + i \cdot r : i = 0, 1, \dots, (n_2 - 1)\}, \text{ gdzie } t_{01} \in [0, r)$$

Autor podaje funkcję celu:

$$S(t_{01}) = \sum_{i=0}^{n_2-1} \{(t_{01} + i \cdot r)^2 + [H_2 - (t_{01} + i \cdot r)]^2\}$$

Powyższa suma po uwzględnieniu zależności:

$$H_2 = n_2 \cdot r$$

upraszcza się do postaci:

$$\frac{n_2 \cdot (2n_2^2 \cdot r^2 + r^2 - 6r \cdot t_{01} + 6t_{01}^2)}{3}$$

skąd otrzymujemy, że funkcja celu minimalizuje się dla wartości $t_{0l} = r/2$.

Autor nie podaje modelu analitycznego dla ilości linii większej niż dwie, zaznaczając, że w takim przypadku modele analityczne są skomplikowane i sugerowane jest poszukiwanie rozwiązań metodami numerycznymi.

Tak postawiony problem można wykorzystać wtedy, gdy konieczne jest zsynchronizowanie kilku linii na jednym tylko wspólnym fragmencie tras (tylko jednej wiązki). W praktyce jednak występuje potrzeba synchronizacji wielu linii na wielu wspólnych fragmentach tras. Ponieważ jedna linia może mieć na poszczególnych fragmentach swojej trasy wspólne odcinki z wieloma różnymi liniami, dlatego nie jest możliwe niezależne rozwiązywanie problemu synchronizacji na wszystkich fragmentach trasy tej linii. Poprawa synchronizacji linii z pewnymi liniami na jednym odcinku może prowadzić do pogorszenia synchronizacji tej linii z innymi liniami na innym odcinku trasy. Dlatego model przedstawiony w tej pracy nie może być bezpośrednio zastosowany w praktyce do rozwiązania problemu synchronizacji wszystkich linii w układzie komunikacyjnym.

W pracy [Daduna, Voß, 1993] przedstawiono bardzo ogólny model problemu synchronizacji. W istocie jest on tak ogólny, że wykorzystanie go w praktyce w takiej postaci, w jakiej został przedstawiony byłoby trudne.

Dane są zbiory $L = \{1, 2, 3, \dots, m\}$ – zbiór numerów linii i $D = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ – zbiór możliwych momentów odjazdu. Rozważane są binarne zmienne decyzyjne:

$$x_{i,h} = \begin{cases} 1 & \text{jeśli linii nr } i \in L \text{ jest przyporządkowany moment startu } h \in D \\ 0 & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases}$$

Oczywiście zmienne te muszą spełniać ograniczenia:

$$\sum_{h=1}^n x_{ih} = 1 \quad i \in L$$

$$x_{i,h} \in \{0, 1\}$$

W modelu tym rozważana jest następująca funkcja strat:

$$Z(\bar{x}) = \sum_{i=1}^m \sum_{h=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n c_{ihjk} \cdot x_{ih} \cdot x_{jk}$$

Autorzy nie podają jednak wyraźnych wskazówek co do tego, jak należy skonstruować macierz kosztów c_{ihjk} . Wydaje się, że współczynnik c_{ihjk} powinien być zadany wzorem, jako

funkcja parametrów i, h, j, k . W przeciwnym razie, aby zastosować ten model do rozwiązania problemu synchronizacji należałoby wyznaczyć macierz c_{ihjk} , czyli należałoby wyznaczyć „stratę” dla każdego układu zmiennych decyzyjnych.

Ponadto model ten nie pozwala na synchronizację więcej niż dwu linii na wspólnym fragmencie trasy, a w praktyce występują układy nawet siedmiu linii tworzących wiązkę.

L. Rekuć w swojej pracy doktorskiej [1995] rozpatruje problem synchronizacji wielu linii posiadających wspólne fragmenty tras. W pracy przyjmowane są następujące założenia:

- dane problemu synchronizacji interwałowej (czasy przejazdu, częstotliwości kursowania) są ustalone i znane,
- częstotliwość dla kursowania różnych linii może być różna, ale dla linii i takt kursowania t_i jest ustalony (przynajmniej w pewnym horyzoncie czasowym, na którym rozpatrywany jest problem synchronizacji),
- t_i jest wielokrotnością t_j jeśli $t_i > t_j$

Za zmienne decyzyjne x_i przyjmowane są momenty odjazdów pojazdów z ich pętli startowych. Przyjmuje się, że czas jest mierzony w minutach. Zmienna x_i może przyjmować wartości ze zbioru $\{1, \dots, t_i\}$.

Moment pojawienia się pojazdu na węźle obliczany jest według wzoru:

$$\theta_i = x_i + Cz_i$$

gdzie:

- x_i - moment pojawienia się pojazdu linii i na węźle wiązki,
- Cz_i - czas dojazdu pojazdu linii i z pętli startowej do węzła.

Rozpatrywana jest następująca miara nierównomierności kursowania pojazdów jednej wiązki:

$$Z = \sum_{i=1}^{n-1} \left| \theta_{i+1} - \theta_i - \frac{T}{n} \right| + \left| \theta_n - (T + \theta_1) - \frac{T}{n} \right|$$

gdzie:

- Z - nierównomierność danej wiązki,
- n - liczba linii w wiązce,
- T - długość taktu,
- θ_i - moment pojawienia się i -tego kolejnego pojazdu na węźle wiązki.

Miara nierównomierności jest sumą odchyłeń długości odstępu między pojazdami od długości optymalnej dla tej wiązki.

Miara ta osiąga wartość minimalną dla układu pojazdów kursujących idealnie równomiernie, tzn. wtedy, gdy odstępy czasowe między kolejnymi pojazdami wynoszą T/n :

$$|\theta_{i+1} - \theta_i| = \frac{T}{n}$$

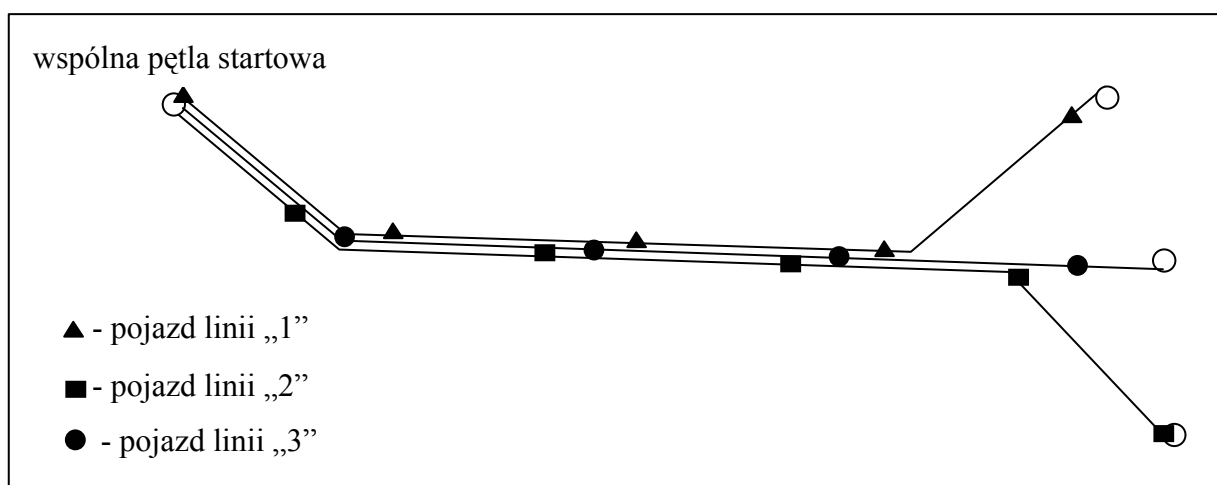
Oczywiście wartością minimalną tej miary jest 0 . Oznacza to, że miara ta spełnia pierwszy ze stawianych przez nas postulatów. Jednak, jak pokażemy niżej, nie spełnia drugiego postulat.

Przedstawiona powyżej miara nierównomierności posiada następującą wadę: przyjmuje jednakowe wartości dla układów różniących się równomiernością kursowania (wbrew drugiemu postulatowi). Przyczyną tego jest fakt, że miara ta, jako funkcja x_i jest funkcją kawałkami liniową i na pewnych zbiorach jest funkcją stałą jednej lub kilku swoich zmiennych.

Wykażemy to na przykładzie.

Przykład 2.2.1.

Rozważmy wiązkę składającą się z trzech linii startujących ze wspólnej pętli. Nazwijmy te linie „1”, „2” i „3”. Ponieważ linie startują ze wspólnej pętli, zatem momenty dojazdu na węzeł są równe momentom wyruszeń z pętli. Niech takt kursowania wynosi 15 minut dla każdej linii. Oznacza to, że optymalne odstępy między momentami wyruszeń kolejnych pojazdów z pętli wynoszą $15/3 = 5$ minut.

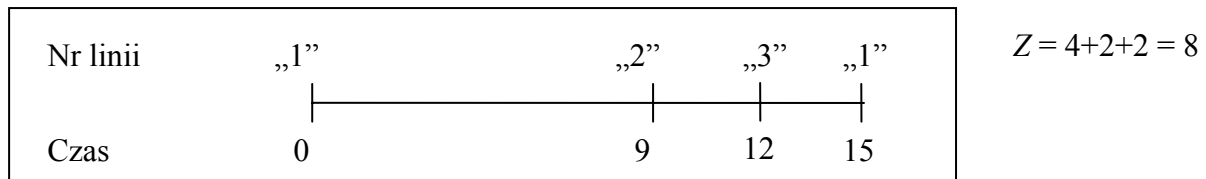


Rys. 2.4.2. Wiązka trzech linii (oprac. własne)

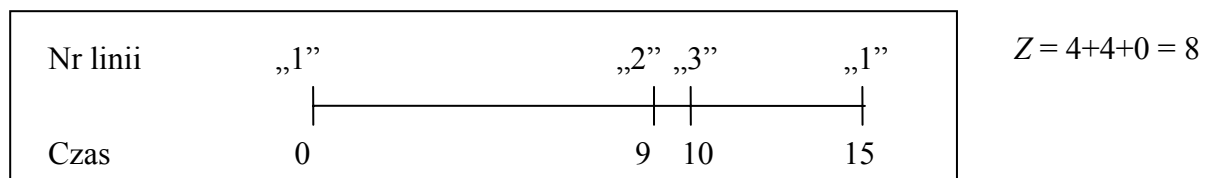
Przyjmijmy, że pojazd linii „1” wyrusza z pętli w chwili 0 a pojazd linii „2” w chwili 9. Ponieważ odstęp czasowy między pojazdami linii „1” i „2” wynosi aż 9 minut (wobec

wymaganych 5 minut), więc już na tej podstawie możemy powiedzieć, że wiązka ta jest słabo zsynchronizowana. Niemniej jednak pozostaje jeszcze do ustalenia moment startu linii „3” i w zależności od tego wiązka jako całość może być lepiej lub gorzej zsynchronizowana. Załóżmy, że pojazd linii „3” wyrusza po pojeździe linii „2” i przed kolejnym pojazdem linii „1”, czyli między chwilą 9 a 15.

Optymalny moment startu pojazdu linii „3”:



Nieoptymalny moment startu pojazdu linii „3”:



Oczywiście najlepiej byłoby, gdyby moment startu pojazdu linii „3” leżał na środku odcinka [9,15] czyli w chwili 12. Gorzej jest, jeśli nie przyjmuje on wartości 12 lecz inną z odcinka [9,15]. Sprawdźmy, jak zmienia się miara nierównomierności dla tej wiązki w zależności od tego, czy moment startu pojazdu linii „3” ustalimy na 10, 11 czy 12 minut.

Przyjmijmy oznaczenia:

x_i - moment startu pojazdu linii o numerze i

Mamy:

$$T = 15$$

$$n = 3$$

$$T/n = 5$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 9$$

$$9 < x_3 < 15$$

$$Z = \left| x_2 - x_1 - \frac{T}{n} \right| + \left| x_3 - x_2 - \frac{T}{n} \right| + \left| x_3 - (T + x_1) - \frac{T}{n} \right|$$

$$Z = \left| 9 - 0 - 5 \right| + \left| x_3 - 9 - 5 \right| + \left| x_3 - (15 + 0) - 5 \right|$$

$$Z = 4 + |x_3 - 9 - 5| + |15 - x_3 - 5|$$

$$Z = 4 + |x_3 - 14| + |10 - x_3|$$

i jeśli spełniony jest warunek :

$$10 \leq x_3 \leq 14$$

mamy:

$$Z = 4 + 14 - x_3 + x_3 - 10 = 8$$

Tak więc przedstawiona miara nierównomierności przyjmuje tą samą wartość 8 dla wartości $x_3 = 10$ jak i dla wartości $x_3 = 12$. Tymczasem wartość $x_3 = 12$ odpowiada wiązce lepiej zsynchronizowanej, gdyż wtedy momenty odjazdów pojazdów linii „3” znajdują się na środku odcinka czasowego między odjazdami pojazdów linii „1” i „2”. Natomiast dla wartości $x_3 = 10$ pojazdy linii „3” kursują tylko jedną minutę po pojazdach linii „2”. Dlatego wartość miary nierównomierności kursowania powinna być dla $x_3 = 12$ mniejsza, a dla $x_3 = 10$ - większa. Miara Z tej własności nie posiada.

Należy podkreślić, że w większości przypadków miara Z dobrze rozróżnia układy pod kątem synchronizacji. Przykłady, dla których miara Z nie minimalizuje się dla rozwiązań odpowiadających optymalnej synchronizacji trzeba konstruować nieco sztucznie. Jednak takie zbiory danych mogą wystąpić w praktyce. Pamiętajmy, że gdy istnieją alternatywne rozwiązania optymalne, algorytmy poszukujące minimum funkcji (np. algorytm simpleks) podają najczęściej rozwiązania z brzegu zbioru, a nie z jego wnętrza. W przypadku problemu synchronizacji rozwiązania leżące na brzegu zbioru są gorsze od tych z wnętrza zbioru (tak jak w powyższym przykładzie).

2.5. Próba uogólnienia przedstawionych miar równomierności

Można dokonać próby uogólnienia przedstawionych powyżej miar równomierności. Można zauważyć, że miara stosowana przez L. Rekuć jest naturalną próbą wyjścia naprzeciw pierwszemu z postawionych przez nas postulatów. Skoro jako najlepsze mają być ocenione układy równomierne, to można rozważać wyrażenia:

$$|\theta_{i+1} - \theta_i| - \frac{T}{n} \tag{2.5.1}$$

gdzie $i=1, 2, \dots, n$; zaś $\theta_{n+1} = \theta_1 + T$

mierzące odstępstwo kolejnych interwałów od interwału idealnego.

Dla układu idealnego te odstępstwa są równe 0. Dla układu nieidealnego są dodatnie lub ujemne. W oparciu o to spostrzeżenie można konstruować różne miary równomierności. Jeśli po prostu zsumujemy te odstępstwa, to otrzymamy wartość 0, gdyż odstępstwa dodatnie i ujemne skompensują się wzajemnie. Jeśli policzymy sumę modułów tych odstępstw:

$$Z = \sum_{i=1}^n \left| |\theta_{i+1} - \theta_i| - \frac{T}{n} \right| \quad (2.5.2)$$

to otrzymamy miarę stosowaną przez L. Rekuć. Jeśli policzymy sumę kwadratów tych odstępstw:

$$Z = \sum_{i=1}^n \left(|\theta_{i+1} - \theta_i| - \frac{T}{n} \right)^2 \quad (2.5.3)$$

to otrzymamy miarę, która, jak można wykazać, jest pewną liniową transformacją miary stosowanej przez A. Adamskiego.

Można dokonać uogólnienia powyższych wzorów i zapisać miarę równomierności w postaci:

$$Z = \sum_{i=1}^n \left| |\theta_{i+1} - \theta_i| - \frac{T}{n} \right|^p \quad (2.5.4)$$

gdzie $p > 0$

Oczywiście wszystkie takie miary spełniają postulat nr 1, gdyż dla układu równomiernego wyrażenie $|\theta_{i+1} - \theta_i| - \frac{T}{n}$ a więc i cała miara przyjmują wartość 0.

Badając, czy te miary spełniają postulat nr 2, można wykazać, że:

- dla $0 < p < 1$ miary postulatu nr 2 nie spełniają. W układach, w których nie jest możliwe osiągnięcie idealnej równomierności dla wszystkich wiązek, optymalizacja układu pod kątem takiej miary prowadziła do skupiania nierównomierności na jednej wiązce. Z matematycznego punktu widzenia wynika to z faktu, że funkcja $f(x) = x^p$ jest dla $0 < p < 1$ funkcją wklęsłą.
- dla $p = 1$ otrzymujemy miarę stosowaną przez L. Rekuć. Jak już wykazano miara ta postulatu nr 2 nie spełnia.

- dla $p > 1$ miara postulat 2 spełnia. Spośród badanych wartości najlepsze rezultaty osiągnano dla wartości $p=2$. Dla $p=2$ miara jest również wygodna w obliczeniach numerycznych, gdyż jej pochodna jest funkcją kawałkami liniową.

Oczywiście powyższe miary nie spełniają postulatów nr 3 i 4 gdyż nie uwzględniają w ogóle wartości intensywności napływu pasażerów na przystanki.

2.6. Naturalne charakterystyki układu komunikacyjnego

Rozpatrywane powyżej miary są po prostu pewnymi wyrażeniami arytmetycznymi zależnymi od momentów startów. Autor poszukiwał również miary równomierności wśród naturalnych charakterystyk układu komunikacyjnego. Przebadano: średnie odstęp między pojazdami, maksymalne odstęp między pojazdami, maksymalny czas oczekiwania itp.

Wreszcie, przebadano sumaryczny czas oczekiwania pasażerów na przystankach. Okazało się, że przy założeniu stałej w czasie intensywności napływu pasażerów (INP) na przystanki sumaryczny czas oczekiwania traktowany jako miara równomierności kursowania spełnia postulaty nr 1 i 2 (patrz podrozdział 3.7). Natomiast przy założeniu zmiennej w czasie INP sumaryczny czas oczekiwania jest minimalny dla układów, w których częstotliwość kursowania dostosowana jest do INP, czyli sumaryczny czas oczekiwania spełnia postulat nr 4 (zależność ta została rozważona w podrozdziale 3.8). Sumaryczny czas oczekiwania pasażerów na pojazd w naturalny sposób spełnia postulat nr 3, gdyż waga przypisana danej linii/wiązce jest po prostu równa ilości pasażerów, którzy korzystają z tej linii/wiązki.

2.7. Sumaryczny czas oczekiwania na pojazd jako miara równomierności

Wobec przedstawionych powyżej argumentów za miarę równomierności kursowania przyjęto w tej pracy sumaryczny czas oczekiwania pasażerów na pojazd.

W rozdziale 3 przedstawiono szczegółowo wyliczenie sumarycznego czasu oczekiwania pasażerów.

Natomiast w rozdziale 4 zastosowano przyjętą miarę nierównomierności do stworzenia kilku modeli problemu synchronizacji interwałowej.

3. Obliczenie sumarycznego czasu oczekiwania pasażerów na pojazd

3.1. Wprowadzenie

W rozdziale trzecim obliczymy sumaryczny czas oczekiwania pasażerów na pojazd (SCOP). Wielkość tę obliczymy jako funkcję momentów odjazdów pojazdów z pętli. Za parametry przyjmujemy:

- układ przystanków na linii,
- czasy przejazdu między przystankami,
- intensywności napływu pasażerów na przystanki, wyrażone w pasażerach na minutę i zadane jako funkcje czasu.

Momenty odjazdów pojazdów z przystanków uważane są za nielosowe.

Rozważone zostaną dwa modele procesu napływu pasażerów na przystanek:

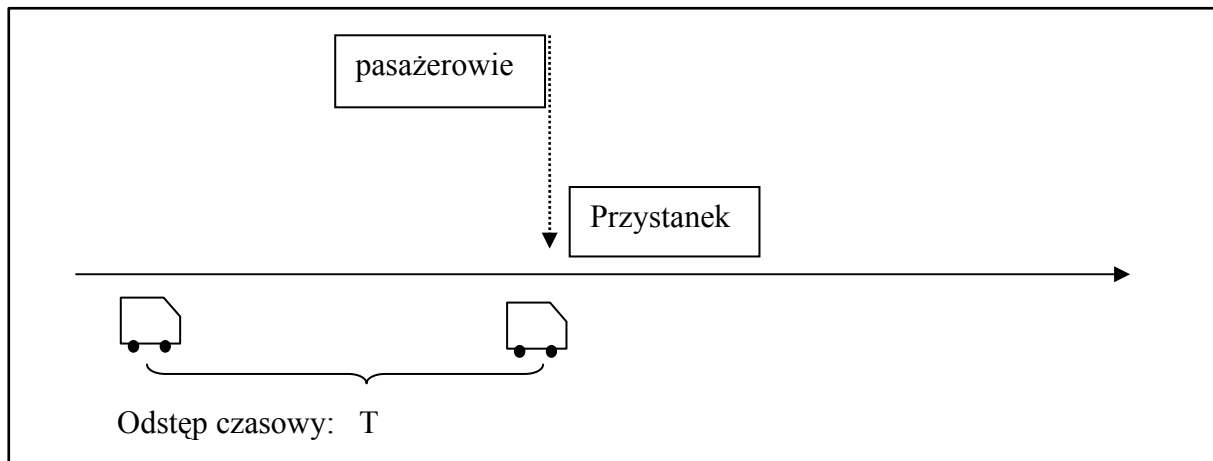
- uproszczony – deterministyczny i niedyskretny. W tym modelu zostanie wyznaczony sumaryczny czas oczekiwania pasażerów.
- model uwzględniający losowy i dyskretny charakter tego procesu. W tym modelu SCOP jest zmienną losową. Zostaną wyznaczone probabilistyczne charakterystyki SCOP: wartość oczekiwana, wariancja i współczynnik zmienności tej zmiennej losowej.

Na podstawie wyników osiągniętych dla tych dwu modeli zostanie zaproponowane wyrażenie oceniające sumaryczny czas oczekiwania pasażerów na jeden pojazd, oraz obliczone:

- sumaryczny czas oczekiwania pasażerów na przystanku dla ciągu pojazdów,
- sumaryczny czas oczekiwania pasażerów na wszystkich przystankach jednej linii, dla ciągu pojazdów,
- sumaryczny czas oczekiwania pasażerów dla jednej wiązki,
- sumaryczny czas oczekiwania pasażerów dla całego układu komunikacyjnego.

3.2. Sumaryczny czas oczekiwania pasażerów na przystanku czekających na jeden pojazd

Zakładamy, że w chwili 0 z przystanku odjechał pojazd zabierając wszystkich pasażerów, a następny pojazd przyjedzie w chwili T . Obliczymy sumaryczny czas oczekiwania pasażerów, którzy przybędą na przystanek w przedziale czasowym $(0, T)$.



Rys. 3.2.1. Pasażerowie oczekujący na jeden pojazd (oprac. własne)

Oznaczmy intensywność napływu pasażerów na przystanek przez $\alpha(t)$. Jeśli intensywność będzie stała będziemy pisać po prostu α . Intensywność wyraża średnią ilość pasażerów przybywających w ciągu minuty.

W celu wyrażenia w sposób ilościowy sumarycznego czasu oczekiwania pasażerów na przystanku konieczne jest przyjęcie jakiegoś modelu opisującego proces przybywania pasażerów na przystanek. Rozważymy tu dwa modele tego procesu:

1. W pierwszym modelu przyjmujemy, że napływ pasażerów jest procesem ciągłym, nielosowym. Konsekwencją przyjęcia takiego założenia jest znaczne uproszczenie sposobu opisu rzeczywistości. Zaletą przyjęcia uproszczonego modelu jest ułatwienie przeprowadzenia rachunków. Otrzymany w tym modelu sumaryczny czas oczekiwania pasażerów na pojazd jest wielkością nielosową.
2. W drugim modelu przyjmujemy, że napływ pasażerów jest procesem stochastycznym o przyrostach jednostkowych, niezależnych. Taki model jest bliższy rzeczywistości, gdyż oddaje dyskretny i losowy charakter procesu. Wymaga on jednak zastosowania bardziej zaawansowanych narzędzi matematycznych. W tym modelu sumaryczny czas

oczekiwania pasażerów na pojazd jest zmienną losową. Obliczymy wartość oczekiwaną, odchylenie standardowe i współczynnik zmienności tej zmiennej.

W każdym z dwu powyższych modeli rozważymy dwa przypadki:

- szczególny przypadek stałej w czasie intensywności napływu pasażerów,
- ogólniejszy przypadek zmiennej w czasie intensywności napływu pasażerów.

3.2.1. Model deterministycznego i ciągłego napływu pasażerów

W tym modelu przyjmujemy, że napływ pasażerów jest procesem deterministycznym i ciągłym.

3.2.1.1. Model deterministycznego i ciągłego napływu pasażerów ze stałą w czasie intensywnością napływu pasażerów

Dla analizowanego modelu prawdziwe jest przedstawione poniżej twierdzenie.

Twierdzenie 3.1

Załóżmy, że pasażerowie przybywają na przystanek w sposób ciągły ze stałą intensywnością α pasażerów na minutę.

Ich sumaryczny czas oczekiwania na pojazd wynosi

$$\frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot T^2 . \quad (3.2.1.1)$$

Dowód tw. 3.1

Aby obliczyć straty czasowe pasażerów, którzy przybędą na przystanek w przedziale czasu $[0, T]$ podzielimy ten przedział na przedziały o zanedbywalnie małej długości dt . Rozważmy przedział $[t, t + dt]$, gdzie dt jest małe. W tym przedziale czasowym na przystanek przybędzie $\alpha \cdot dt$ pasażerów. Będą oni czekać na pojazd $T - t$ minut zatem ich straty czasowe wynoszą

$$\alpha \cdot dt \cdot (T - t) \quad (3.2.1.2)$$

Straty czasowe pasażerów w przedziale czasu $[0, T]$ otrzymamy sumując wyrażenia (3.2.1.2) po wszystkich przedziałach postaci $[t, t + dt]$, przechodząc z dt do zera i zastępując sumę całką:

$$\int_0^T \alpha \cdot (T - t) dt \quad (3.2.1.3)$$

Po obliczeniu całki otrzymujemy:

$$\int_0^T \alpha (T - t) dt = \alpha \cdot [tT - \frac{1}{2}t^2]_0^T = \frac{1}{2} \alpha T^2 \quad (3.2.1.4)$$

co kończy dowód.

3.2.1.2. Model deterministycznego i ciągłego napływu pasażerów ze zmienną w czasie intensywnością napływu pasażerów

W tym modelu zakładamy, że intensywność napływu pasażerów na przystanek może się zmieniać w czasie. Funkcję intensywności napływu pasażerów na przystanek oznaczamy przez $\alpha(t)$.

Dla analizowanego modelu prawdziwe jest przedstawione poniżej twierdzenie.

Twierdzenie 3.2

Załóżmy, że pasażerowie przybywają na przystanek w sposób ciągły ze zmienną intensywnością $\alpha(t)$ pasażerów na minutę.

Ich sumaryczny czas oczekiwania na pojazd wynosi:

$$\int_0^T (T - t) \cdot \alpha(t) dt \quad (3.2.1.5)$$

Dowód tw. 3.2

Dowód przeprowadzamy analogicznie jak w twierdzeniu 3.1. Aby obliczyć straty czasowe pasażerów, którzy przybędą na przystanek w przedziale czasu $[0, T]$ dzielimy ten przedział na przedziały o zanedbywalnie małej długości dt . Rozważmy przedział $[t, t + dt]$, gdzie dt jest małe. W tym przedziale czasowym na przystanek przybędzie $\alpha(t) \cdot dt$ pasażerów. Będą oni czekać na pojazd $T-t$ minut zatem ich straty czasowe wynoszą

$$\alpha(t) \cdot dt \cdot (T-t) \quad (3.2.1.6)$$

Wynik otrzymamy sumując powyższe wyrażenia po wszystkich przedziałach postaci $[t, t + dt]$, przechodząc z dt do zera i zastępując sumę całką. W wyniku tego otrzymujemy wyrażenie:

$$\int_0^T \alpha(t) \cdot (T-t) dt \quad (3.2.1.7)$$

co kończy dowód.

3.2.2. Model losowego i dyskretnego procesu napływu pasażerów

W tym modelu przyjmujemy, że napływ pasażerów jest procesem stochastycznym o przyrostach jednostkowych, niezależnych [Rudnicki 1999].

W takim modelu wielkości takie jak: momenty przybycia poszczególnych pasażerów na przystanek, odstępy czasowe między momentami przybycia pasażerów i ilość pasażerów przybyłych na przystanek w pewnym przedziale czasowym nie są wielkościami deterministycznymi lecz zmiennymi losowymi. W szczególności sumaryczny czas oczekiwania pasażerów na przystanku jest zmienną losową. W celu określenia sumarycznego czasu oczekiwania pasażerów obliczymy wartość oczekiwaną tej zmiennej losowej. Dla oszacowania na ile dokładnie wartość przeciętna oddaje wartości samej zmiennej, obliczymy także jej odchylenie standardowe i współczynnik zmienności.

W przypadku stałej intensywności napływu pasażerów, do modelowania procesu napływu pasażerów użyjemy stochastycznego procesu Poissona [Billingsley 1987, Rolski 1999]. W przypadku zmiennej intensywności napływu użyjemy procesu stochastycznego, który jest pewną funkcją procesu Poissona. Ten ostatni nosi czasem nazwę niejednorodnego procesu Poissona.

W obu przypadkach korzystać będziemy z następującej własności procesu Poissona [Daryl 1988, Kingman 2002, Rolski 1999]:

Lemat 3.2

Założenia:

Niech $N(t)$ oznacza proces Poissona o intensywności α .

Niech X_1, X_2, \dots oznaczają momenty skoków procesu $N(t)$.

Niech T będzie liczbą rzeczywistą dodatnią.

Niech k będzie liczbą całkowitą dodatnią.

Teza:

Wektor (X_1, X_2, \dots, X_k) ma pod warunkiem $N(T)=k$ rozkład statystyki porządkowej k -wymiarowego wektora losowego (U_1, U_2, \dots, U_k) , gdzie U_1, U_2, \dots, U_k są pewnymi niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie jednostajnym na odcinku $(0, T)$. W szczególności oznacza to, że wektor (X_1, X_2, \dots, X_k) jest permutacją wektora

$$(U_1, U_2, \dots, U_k) \text{ oraz: } \sum_{i=1}^k X_i = \sum_{i=1}^k U_i$$

Wniosek pierwszy z lematu 3.2

Warunkowa wartość oczekiwana sumy zmiennych X_1, X_2, \dots, X_k pod warunkiem $N(T)=k$ wynosi $\frac{1}{2} k \cdot T$.

$$E\left(\sum_{i=1}^{N(T)} X_i \mid N(T)=k\right) = E\left(\sum_{i=1}^k U_i\right) = \sum_{i=1}^k E(U_i) = k \cdot \frac{1}{2} T = \frac{1}{2} \cdot k \cdot T \quad (3.2.2.1)$$

co było do okazania.

Wniosek drugi z lematu 3.2

Warunkowa wariancja sumy zmiennych X_1, X_2, \dots, X_k pod warunkiem $N(T)=k$ wynosi $\frac{1}{12} k T^2$.

$$D^2\left(\sum_{i=1}^{N(T)} X_i \mid N(T)=k\right) = D^2\left(\sum_{i=1}^k U_i\right) = \sum_{i=1}^k D^2(U_i) = k \cdot D^2(U_i) = k \cdot \frac{1}{12} T^2 \quad (3.2.2.2)$$

co było do okazania.

3.2.2.1. Model losowego i dyskretnego procesu napływu pasażerów ze stałą w czasie intensywnością

Twierdzenie 3.3

Założmy, że pasażerowie przybywają na przystanek zgodnie ze stochastycznym procesem Poissona o intensywności α .

Ich sumaryczny czas oczekiwania na pojazd jest zmienną losową której:

- wartość oczekiwana wynosi:

$$\frac{1}{2} \cdot T^2 \cdot \alpha \quad (3.2.2.3)$$

- odchylenie standardowe wynosi

$$\sqrt{\frac{1}{3} \cdot T^3 \cdot \alpha} \quad (3.2.2.4)$$

- współczynnik zmienności wynosi

$$\sqrt{\frac{4}{3T\alpha}} \quad (3.2.2.5)$$

Dowód tw. 3.3

Rozważmy stochastyczny proces Poissona o intensywności α . Niech $N(T)$ oznacza liczbę pasażerów przybyłych na przystanek do chwili T . Zmienna losowa $N(T)$ ma rozkład Poissona z parametrem αT . Niech $X_1, X_2, \dots, X_{N(T)}$ oznaczają momenty, w których przybywają na przystanek kolejni pasażerowie. Niech X oznacza sumaryczny czas oczekiwania tych pasażerów na pojazd (czyli od chwili przybycia do chwili T).

Mamy:

$$X = \sum_{i=1}^{N(T)} (T - X_i) \quad (3.2.2.6)$$

Tak rozumiany sumaryczny czas oczekiwania pasażerów na pojazd jest zmienną losową. Obliczmy jej wartość oczekiwaną.

Ze wzoru na wartość oczekiwaną całkowitą mamy:

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} P(N(T)=k) \cdot E(X / N(T)=k) \quad (3.2.2.7)$$

Rozważmy wyrażenie $E(X / N(T)=k)$

Wektor (X_1, X_2, \dots, X_k) pod warunkiem $N(T)=k$ ma rozkład statystyki pozycyjnej k -wymiarowego wektora niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie jednostajnym na odcinku $[0, T]$. Oznacza to, że:

$$\begin{aligned} E(X / N(T)=k) &= E\left(\sum_{i=1}^{N(T)} (T - X_i) / N(T)=k\right) = \\ &= E\left(k \cdot T - \sum_{i=1}^{N(T)} X_i / N(T)=k\right) = k \cdot T - E\left(\sum_{i=1}^{N(T)} X_i / N(T)=k\right) \end{aligned} \quad (3.2.2.8)$$

tu korzystamy z wniosku pierwszego do Lematu 3.2 i mamy dalej:

$$E(X / N(T)=k) = k \cdot T - k \cdot \frac{1}{2} \cdot T = \frac{1}{2} \cdot k \cdot T$$

Czyli

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} P(N(T)=k) \cdot E(X / N(T)=k) = \sum_{k=0}^{\infty} P(N(T)=k) \cdot k \cdot \frac{1}{2} \cdot T = \frac{1}{2} \cdot T \cdot \sum_{k=0}^{\infty} P(N(T)=k) \cdot k$$

suma w powyższym wyrażeniu to wartość oczekiwana zmiennej $N(T)$, która ma rozkład Poissona z parametrem αT , a więc suma ta jest równa αT , zatem

$$E(X) = \frac{1}{2} \cdot T \cdot E(N(T)) = \frac{1}{2} \cdot T \cdot \alpha T = \frac{1}{2} \cdot \alpha T^2 \quad (3.2.2.9)$$

co kończy dowód pierwszej części twierdzenia.

Aby obliczyć wariancję zmiennej X (sumarycznego czasu oczekiwania) zauważmy, że rozkład zmiennej X jest mieszanką jej rozkładów warunkowych:

$$X | N(T)=k$$

z wagami:

$$p_k = P(N(T)=k)$$

Skorzystamy z następującego wzoru:

$$D^2(X) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \cdot \left(D^2(X | N(T)=k) + (E(X) - E(X | N(T)=k))^2 \right) \quad (3.2.2.10)$$

Jak pokazano powyżej $E(X | N(T)=k) = \frac{1}{2} kT$

Obliczmy $D^2(X | N(T)=k)$.

$$D^2(X | N(T)=k) = D^2\left(\sum_{i=1}^{N(T)} (T-X_i) | N(T)=k\right) = D^2\left(\sum_{i=1}^{N(T)} (-X_i) | N(T)=k\right) = D^2\left(\sum_{i=1}^{N(T)} X_i | N(T)=k\right)$$

a to na podstawie wniosku drugiego do Lematu 3.2 wynosi:

$$D^2(X | N(T)=k) = \frac{1}{12} k T^2 \quad (3.2.2.11)$$

Podstawiając do wzoru (3.2.2.10) wartości (3.2.2.11), (3.2.2.9) i (3.2.2.8) mamy:

$$D^2(X) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \cdot \left(\frac{1}{12} k T^2 + \left(\frac{1}{2} \alpha T^2 - \frac{1}{2} k T \right)^2 \right) = \frac{1}{12} T^2 \sum_{k=0}^{\infty} p_k \cdot k + \left(\frac{1}{2} T \right)^2 \sum_{k=0}^{\infty} p_k \cdot (\alpha T - k)^2 \quad (3.2.2.12)$$

sumy w powyższym wyrażeniu to odpowiednio wartość oczekiwana i wariancja zmiennej $N(T)$, która ma rozkład Poissona z parametrem αT , a więc obie te sumy są równe αT

$$D^2(X) = \frac{1}{12} T^2 \alpha T + \frac{1}{4} T^2 \alpha T = \frac{1}{3} \alpha T^3 \quad (3.2.2.13)$$

co kończy dowód drugiej części twierdzenia.

Współczynnik zmienności otrzymujemy dzieląc odchylenie standardowe przez wartość oczekiwaną:

$$v = \frac{\sqrt{\frac{1}{3} \cdot T^3 \cdot \alpha}}{\frac{1}{2} \cdot T^2 \cdot \alpha} = \sqrt{\frac{4}{3T\alpha}} \quad (3.2.2.14)$$

co kończy dowód trzeciej części twierdzenia.

Jak widzimy, współczynnik zmienności sumarycznego czasu oczekiwania zależy wyłącznie od wyrażenia αT , czyli od średniej liczby pasażerów, która przychodzi na przystanek do chwili T . Oto wartości współczynnika v dla kilku przykładowych wartości αT :

αT	v
10	36,5%
20	25,8%
50	16,3%
100	11,5%
200	8,2%
500	5,2%
1000	3,7%

Jak widzimy, gdy średnia ilość pasażerów jest rzędu 100, 1000 lub więcej współczynnik zmienności zmiennej X jest rzędu kilku procent. Ponieważ współczynnik zmienności jest mały, więc możemy do oszacowania wartości zmiennej losowej X użyć wartości oczekiwanej zmiennej X .

3.2.2.2. Model losowego i dyskretnego procesu napływu pasażerów ze zmienną w czasie intensywnością

Aby modelować proces napływu pasażerów przy założeniu zmieniającej się w czasie intensywności, możemy posłużyć się procesem stochastycznym $Q(t)$, który jest pewną funkcją procesu Poissona. Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$(0, T)$ – rozpatrywany przedział czasowy,

$\alpha(t)$ – intensywność napływu pasażerów w chwili t , $t \in (0, T)$, $\alpha(t) > 0$. $\alpha(t)$ oznacza średnią liczbę pasażerów na minutę w chwili t .

$A(t) = \int_0^t \alpha(x) dx$, $t \in (0, T)$. $A(t)$ oznacza średnią liczbę pasażerów przybyłych na

przystanek od chwili 0 do chwili t .

$\beta(t) = \alpha(T-t)$ – funkcja pomocnicza,

f_α - funkcja gęstości rozkładu zadana wzorem: $f_\alpha(t) = \frac{\alpha(t)}{A(T)}$, gdzie $t \in (0, T)$,

f_β - funkcja gęstości rozkładu zadana wzorem: $f_\beta(t) = \frac{\beta(t)}{A(T)}$, gdzie $t \in (0, T)$,

KOMENTARZ: jeśli założymy, że pasażer przychodzi na przystanek w pewnym losowym momencie $t \in (0, T)$, przy czym prawdopodobieństwo przybycia w chwili t jest proporcjonalne do $\alpha(t)$, to jego moment przybycia jest zmienną losową o rozkładzie f_α , a jego czas oczekiwania na pojazd jest zmienną losową o rozkładzie f_β . Ponieważ $\beta(t) = \alpha(T-t)$ więc $f_\beta(t) = f_\alpha(T-t)$ i zachodzą oczywiste związki:

$$E(f_\alpha) = T - E(f_\beta)$$

$$D^2(f_\alpha) = D^2(f_\beta)$$

v_β - współczynnik zmienności rozkładu f_β ,

$N(t)$ – proces Poissona o intensywności I ,

X_1, X_2, \dots – miejsca skoków procesu $N(t)$:

$$X_i = \inf \{ t : N(t) \geq i \}$$

$Q(t) = N(A(t))$, $Q(t)$ jest procesem stochastycznym, którego intensywność w chwili t wynosi $\alpha(t)$ (inaczej mówiąc $Q(t)$ jest niejednorodnym procesem Poissona o intensywności $\alpha(t)$),

Y_1, Y_2, \dots – miejsca skoków procesu $Q(t)$:

$$Y_i = \inf \{ t : Q(t) \geq i \}$$

$$\text{zauważmy że: } Y_i = A^{-1}(X_i)$$

dowód:

$$Y_i = \inf \{ t : Q(t) \geq i \} = \inf \{ t : N(A(t)) \geq i \}$$

ponieważ $A(t)$ jest funkcją ściśle rosnącą więc możemy użyć podstawienia

$x = A(t)$, $t = A^{-1}(x)$ i otrzymujemy:

$$\begin{aligned} Y_i &= \inf \{ t : N(A(t)) \geq i \} = \inf \{ A^{-1}(x) : N(x) \geq i \} = \\ &= A^{-1}(\inf \{ x : N(x) \geq i \}) = A^{-1}(X_i) \end{aligned}$$

co było do okazania.

Użyjemy procesu $Q(t)$ jako modelu procesu napływu pasażerów na przystanek przy założeniu zmieniającej się w czasie intensywności napływu pasażerów. $Q(T)$ oznacza liczbę

pasażerów przybyłych na przystanek do chwili T . Zmienna losowa $Q(T)$ ma rozkład Poissona z parametrem $A(T)$. Zmienne $Y_1, Y_2, \dots, Y_{N(T)}$ oznaczają momenty przybyć na przystanek kolejnych pasażerów.

Niech X oznacza sumaryczny czas oczekiwania tych pasażerów na pojazd (od chwili przybycia do chwili T).

Mamy:

$$X = \sum_{i=1}^{Q(T)} (T - Y_i) \quad (3.2.2.15)$$

Podobnie jak w dowodzie tw. 3.3 pomocne będzie rozpatrzenie warunkowego rozkładu sumy $\sum_{i=1}^{Q(T)} (T - Y_i)$ pod warunkiem $Q(T)=k$. Uwzględniając $Q(t)=N(A(t))$ i korzystając z Lematu 3.2 mamy:

$$\sum_{i=1}^{Q(T)} [(T - Y_i) \mid Q(T)=k] = \sum_{i=1}^k [(T - A^{-1}(X_i)) \mid N(A(T))=k] = \sum_{i=1}^k (T - A^{-1}(U_i)) \quad (3.2.2.16)$$

gdzie U_1, U_2, \dots, U_k są pewnymi niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie jednostajnym na odcinku $(0, A(T))$. Stąd dalej mamy:

$$E(X \mid Q(T)=k) = E\left(\sum_{i=1}^k (T - A^{-1}(U_i))\right) = k E(T - A^{-1}(U_i)) \quad (3.2.2.17)$$

ze wzoru na rozkład funkcji zmiennej losowej mamy, że $A^{-1}(U_i)$ jest zmienną losową o funkcji gęstości f_α . Natomiast $T - A^{-1}(U_i)$ jest zmienną losową o funkcji gęstości f_β .

stąd:

$$E(T - A^{-1}(U_i)) = E(f_\beta). \quad (3.2.2.18)$$

Ostatecznie otrzymujemy:

$$E(X \mid Q(T)=k) = k E(f_\beta) \quad (3.2.2.19)$$

Podobnie obliczamy warunkową wariancję X :

$$\begin{aligned} D^2(X \mid Q(T)=k) &= D^2\left(\sum_{i=1}^{Q(T)} (T - Y_i) \mid Q(T)=k\right) = D^2\left(\sum_{i=1}^k (T - A^{-1}(X_i)) \mid N(A(T))=k\right) = \\ &= D^2\left(\sum_{i=1}^k (T - A^{-1}(U_i))\right) = k D^2(T - A^{-1}(U_i)) = k D^2(f_\beta) \end{aligned} \quad (3.2.2.20)$$

Możemy teraz obliczyć parametry rozkładu zmiennej X :

Twierdzenie 3.4

Jeśli założymy, że pasażerowie przybywają na przystanek zgodnie z opisanym powyżej procesem stochastycznym $Q(t)$, to ich sumaryczny czas oczekiwania na pojazd jest zmienną losową X , której:

- wartość oczekiwana wynosi

$$\int_0^T \alpha(t) \cdot (T - t) dt \quad (3.2.2.21)$$

- wariancja wynosi

$$A(T) \cdot (D^2(f_\beta) + E(f_\beta)^2) \quad (3.2.2.22)$$

- współczynnik zmienności wynosi

$$\sqrt{\frac{1}{A(T)}} \cdot \sqrt{1 + \nu_\beta^2} \quad (3.2.2.23)$$

Dowód

Mamy:

$$X = \sum_{i=1}^{Q(T)} (T - Y_i) \quad (3.2.2.24)$$

Ze wzoru na wartość oczekiwaną całkowitą mamy:

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} P(Q(T)=k) \cdot E(X | Q(T)=k) \quad (3.2.2.25)$$

Jak pokazano wcześniej:

$$E(X | Q(T)=k) = k E(f_\beta) \quad (3.2.2.26)$$

zaś $Q(T)$ ma rozkład Poissona z parametrem $A(T)$.

Czyli

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{\infty} P(Q(T)=k) k E(f_\beta) = E(f_\beta) \sum_{k=0}^{\infty} P(Q(T)=k) k = E(f_\beta) E(Q(T)) = \\ &= E(f_\beta) A(T) = \int_0^T \alpha(t) \cdot (T - t) dt \end{aligned} \quad (3.2.2.27)$$

co kończy dowód pierwszej części twierdzenia.

Wariancję zmiennej X obliczamy podobnie jak poprzednio, korzystając z faktu, że rozkład tej zmiennej jest mieszkanką rozkładów warunkowych:

$$X | Q(T)=k$$

z wagami:

$$p_k = P(Q(T)=k)$$

Ponownie skorzystamy ze wzoru (3.2.2.10):

$$D^2(X) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \cdot (D^2(X | Q(T) = k) + (E(X) - E(X | Q(T) = k))^2)$$

Podstawiając do tego wzoru wyrażenia (3.2.2.18) oraz (3.2.2.20) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} D^2(X) &= \sum_{k=0}^{\infty} p_k \cdot (k \cdot D^2(f_\beta) + (A(T) E(f_\beta) - k E(f_\beta))^2) = \\ &= D^2(f_\beta) \sum_{k=0}^{\infty} p_k \cdot k + E(f_\beta)^2 \sum_{k=0}^{\infty} p_k \cdot (A(T) - k)^2 \end{aligned} \quad (3.2.2.28)$$

powyższe sumy to odpowiednio wartość oczekiwana i wariancja rozkładu Poissona z parametrem $A(T)$, a więc obie są równe $A(T)$. A zatem:

$$D^2(X) = A(T) \cdot (D^2(f_\beta) + E(f_\beta)^2) \quad (3.2.2.29)$$

co kończy dowód drugiej części twierdzenia.

Współczynnik zmienności otrzymujemy dzieląc odchylenie standardowe przez wartość oczekiwaną:

$$v = \frac{\sqrt{A(T) \cdot (D^2(f_\beta) + E(f_\beta)^2)}}{A(T) \cdot E(f_\beta)} = \sqrt{\frac{1}{A(T)}} \cdot \sqrt{\frac{D^2(f_\beta) + E(f_\beta)^2}{E(f_\beta)^2}} = \sqrt{\frac{1}{A(T)}} \cdot \sqrt{1 + v_\beta^2} \quad (3.2.2.30)$$

co kończy dowód trzeciej części twierdzenia.

Podobnie jak w przypadku stałej intensywności napływu pasażerów chcielibyśmy oszacować współczynnik zmienności zmiennej X po to, żeby wiedzieć, czy możemy używać wartości $E(X)$ do oszacowania sumarycznego czasu oczekiwania. Jak widzimy, współczynnik zmienności sumarycznego czasu oczekiwania zależy od dwu czynników:

- $A(T)$, czyli od średniej liczby pasażerów, którzy przychodzą na przystanek do chwili T ,
- v_β , czyli współczynnika zmienności rozkładu f_β

v_β zależy od kształtu krzywej $\alpha(t)$ i w ogólności nie można podać ograniczenia na jego wartość. Można jednak oszacować wartość v_β jeśli funkcja $\alpha(t)$ spełnia pewne dodatkowe warunki. Jeśli funkcja $\alpha(t)$ jest na przedziale $(0, T)$ stała, to $v_\beta^2 = 1/3$ i wartości v są takie same jak w poprzednim modelu. A jeśli założymy, że funkcja $\alpha(t)$ jest na przedziale $(0, T)$ liniowa i jej wartość na tym przedziale nie rośnie lub nie spada ponad trzykrotnie, to wartości v_β różnią się od tych z poprzedniego modelu nie więcej niż o 18%.

Oznacza to, że podobnie jak poprzednio współczynnik zmienności zmiennej X nie jest duży i możemy używać $E(X)$ do oszacowania sumarycznego czasu oczekiwania.

3.2.3. Wnioski z twierdzeń 3.1, 3.2, 3.3 i 3.4

Zauważmy, że twierdzenie 3.1 jest szczególnym przypadkiem twierdzenia 3.2. Wystarczy podstawić za funkcję $\alpha(t)$ wartość stałą α . Analogicznie twierdzenie 3.3 jest szczególnym przypadkiem twierdzenia 3.4.

Oczywiście wyniki otrzymane w twierdzeniach 3.2 i 3.4 po podstawieniu za funkcję $\alpha(t)$ wartości stałej α zgadzają się z wynikami twierdzeń 3.1 i 3.3 odpowiednio.

Zauważmy również, że otrzymane w twierdzeniach 3.3 i 3.4 średnie czasy oczekiwania (obliczone dla modelu losowego i dyskretnego procesu napływu pasażerów) zgadzają się z otrzymanymi w twierdzeniach 3.1 i 3.2 czasami oczekiwania (otrzymanymi dla modelu deterministycznego i ciągłego).

Dlatego w dalszej części tej pracy do oceny sumarycznego czasu oczekiwania pasażerów na jeden pojazd będziemy stosować wyrażenia:

- dla zmiennej w czasie intensywności napływu pasażerów:

$$\int_0^T \alpha(t) \cdot (T-t) dt$$

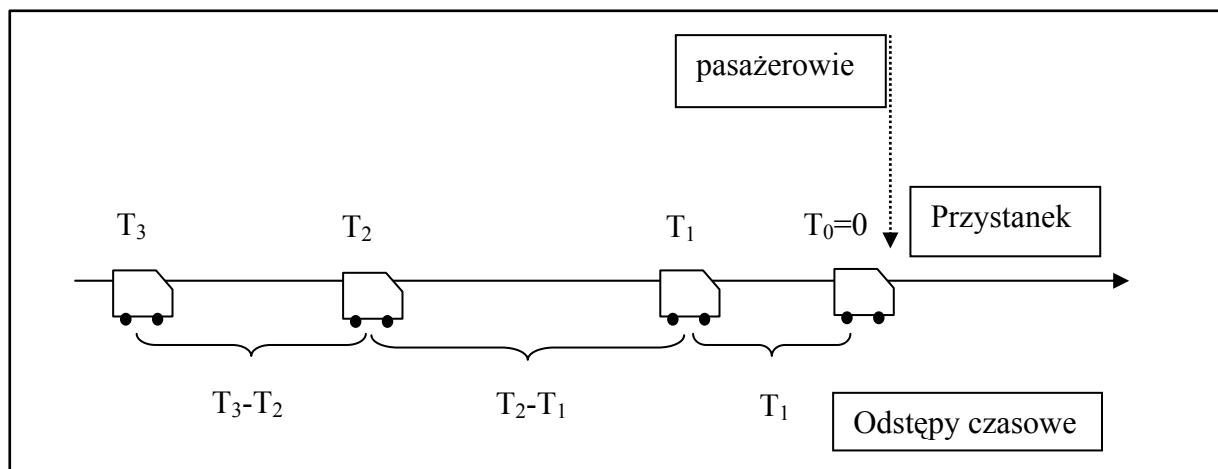
- dla stałej INP:

$$1/2 \cdot \alpha \cdot T^2$$

3.3. Obliczenie sumarycznego czasu oczekiwania pasażerów dla ciągu pojazdów.

Zajmiemy się teraz wyznaczeniem sumarycznego czasu oczekiwania pasażerów w dłuższym horyzoncie czasowym, gdzie na przystanek ma przyjechać nie jeden, ale ciąg pojazdów. Rozważmy w jaki sposób sumaryczny czas oczekiwania zależy od momentów odjazdów pojazdów z przystanku.

Rozważmy przedstawioną na rysunku sytuację:



Rys. 3.3.1. Pasażerowie oczekujący na ciąg pojazdów (opracowanie własne)

Pasażerowie przybywają na przystanek zgodnie z założeniami przyjętymi w podrozdziale 3.2, pierwszy pojazd podjeżdża w chwili początkowej $T_0=0$ a pozostałe pojazdy kolejno w chwilach T_1, T_2, \dots, T_n .

Oznaczmy $T_n=T$ – koniec rozważanego horyzontu czasowego.

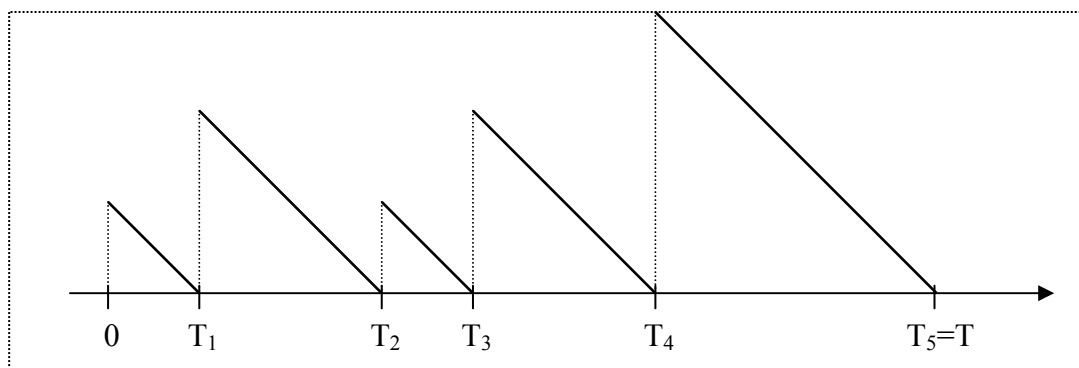
Wprowadźmy funkcję $W(t; T_1, T_2, \dots, T_n)$, określającą czas oczekiwania na najbliższy pojazd pasażera, który przybył na przystanek w chwili t :

$$W(t; T_1, T_2, \dots, T_n) = \min_{T_i \geq t} (T_i - t) \quad (3.3.1)$$

zauważmy, że:

$$W(t; T_1, T_2, \dots, T_n) = (T_i - t) \quad \text{dla } t \in (T_{i-1}, T_i) \quad (3.3.2)$$

Wykres przykładowej funkcji $W(t)$ przy ustalonych wartościach T_1, T_2, \dots, T_n przedstawiono na rysunku 3.3.2.



Rys. 3.3.2. Wykres przykładowej funkcji $W(t)$ (opracowanie własne)

Sumaryczny czas oczekiwania pasażerów na przystanku od chwili $T_0=0$ do chwili $T_n=T$ otrzymamy sumując sumaryczne czasy oczekiwania pasażerów w przedziałach czasowych (T_{i-1}, T_i) :

$$\begin{aligned}
 SCOP &= \sum_{i=1}^n \int_{T_{i-1}}^{T_i} \alpha(t) \cdot (T_i - t) dt = \int_0^{T_1} \alpha(t) \cdot (T_1 - t) dt + \int_{T_1}^{T_2} \alpha(t) \cdot (T_2 - t) dt + \dots + \int_{T_{n-1}}^{T_n} \alpha(t) \cdot (T_n - t) dt = \\
 &= \int_0^T \alpha(t) \cdot W(t, T_1, T_2, \dots, T_n) dt \quad (3.3.3)
 \end{aligned}$$

Zauważmy, że w przypadku $\alpha(t) = \alpha = const.$ powyższe wyrażenie upraszcza się do:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \alpha \sum_{i=1}^n (T_i - T_{i-1})^2 &= \frac{1}{2} \alpha T_1^2 + \frac{1}{2} \alpha (T_2 - T_1)^2 + \frac{1}{2} \alpha (T_3 - T_2)^2 + \dots + \frac{1}{2} \alpha (T_n - T_{n-1})^2 = \\
 &= \frac{1}{2} \alpha (T_1^2 + (T_2 - T_1)^2 + (T_3 - T_2)^2 + \dots + (T_n - T_{n-1})^2) \quad (3.3.4)
 \end{aligned}$$

Z wyniku tego skorzystamy w podrozdziale 3.7 oraz w podrozdziale 4.4.1.

3.4. Obliczenie sumarycznego czasu oczekiwania pasażerów na wszystkich przystankach tej samej linii. Zagregowana intensywność napływu pasażerów.

W poprzednim podrozdziale obliczyliśmy sumaryczny czas oczekiwania pasażerów napływających na jeden przystanek danej linii. Poniżej obliczymy zagregowaną funkcję $SCOP$ dla wszystkich przystanków tej samej linii.

Niech k oznacza ilość przystanków danej linii.

Oznaczmy kolejne przystanki rozważanej linii przez P_0, P_1, \dots, P_{k-1} .

Niech s_i ($i = 0, 1, \dots, k-1$) oznacza czas przejazdu od przystanku P_0 do P_i . Zakładamy, że czasy przejazdu s_i są w rozważanym przedziale czasowym jednakowe dla wszystkich pojazdów.

Niech $(0, T)$ będzie rozważanym przedziałem czasowym dla przystanku P_0 . Ponieważ na pozostałych przystankach pojazdy pojawiają się z opóźnieniem s_i , więc dla przystanku P_i rozważanym przedziałem czasowym będzie przedział $(s_i, T + s_i)$.

Niech $\alpha_i(t)$ ($i = 0, 1, \dots, k-1; t \in (s_i, T + s_i)$) oznacza funkcję intensywności napływu pasażerów na przystanek P_i .

Niech $T_0=0, T_1, T_2, \dots, T_n=T$ oznaczają momenty odjazdu pojazdów z przystanku P_0 . Wtedy momenty odjazdów pojazdów z przystanku P_i wynoszą $T_0+s_i, T_1+s_i, T_2+s_i, \dots, T_n+s_i$.

Sumaryczny czas oczekiwania pasażerów przybywających na przystanek nr i wynosi:

$$SCOP_i = \int_{s_i}^{T+s_i} \alpha_i(t) \cdot W(t, T_1+s_i, T_2+s_i, \dots, T_n+s_i) dt \quad (3.4.1)$$

po podstawieniu $x=t-s_i$ otrzymujemy:

$$SCOP_i = \int_0^T \alpha_i(x+s_i) \cdot W(x+s_i, T_1+s_i, T_2+s_i, \dots, T_n+s_i) dx \quad (3.4.2)$$

zauważmy teraz, że:

$$W(t+c; T_1+c, T_2+c, \dots, T_n+c) = W(t; T_1, T_2, \dots, T_n) \text{ dla dowolnej stałej } c.$$

zatem:

$$SCOP_i = \int_0^T \alpha_i(x+s_i) \cdot W(x, T_1, T_2, \dots, T_n) dx \quad (3.4.3)$$

$SCOP$ na wszystkich przystankach otrzymamy sumując powyższe wyrażenie dla $i = 0, 1, \dots, k-1$:

$$SCOP = \sum_{i=0}^{k-1} \int_0^T \alpha_i(x+s_i) \cdot W(x, T_1, T_2, \dots, T_n) dx = \quad (3.4.4)$$

$$= \int_0^T \left(\sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i(x+s_i) \right) \cdot W(x, T_1, T_2, \dots, T_n) dx \quad (3.4.5)$$

i oznaczając:

$$\alpha(t) = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i(t + s_i) \quad , \text{gdzie } t \in (0, T) \quad (3.4.6)$$

otrzymujemy:

$$SCOP = \int_0^T \alpha(t) \cdot W(t, T_1, T_2, \dots, T_n) dt \quad (3.4.7)$$

Funkcję $\alpha(t)$ zadaną wzorem (3.4.6) nazwiemy zagregowaną funkcją intensywności napływu pasażerów na przystanki.

3.5. Obliczenie sumarycznego czasu oczekiwania pasażerów na wszystkich przystankach tej samej wiązki.

Aby obliczyć sumaryczny czas oczekiwania pasażerów dla wiązki linii wystarczy zauważyć, że wiązkę linii na wspólnym fragmencie tras linii możemy traktować jak trasę jednej linii zastępczej, dla której węzeł wiązki jest pętlą startową, a zbiorem kursów jest suma zbiorów kursów poszczególnych linii. Momentami odjazdów poszczególnych kursów tej linii zastępczej są momenty odjazdów kursów linii wiązki powiększone o czasy przejazdu od pętli tych linii do węzła wiązki. Obliczymy sumaryczny czas oczekiwania pasażerów na pojazd tej linii zastępczej.

W tym celu musimy wyznaczyć:

- uporządkowany rosnąco zbiór momentów odjazdów pojazdów wiązki z węzła wiązki
- zagregowaną funkcję intensywności napływu pasażerów dla tej wiązki

Niech llw oznacza liczbę linii wiązki.

Niech $N = \{n_1, n_2, \dots, n_{llw}\}$ oznacza zbiór numerów linii wiązki.

Niech lk_i , dla $i \in \{1, 2, \dots, llw\}$ oznacza liczbę kursów linii n_i

Niech c_i , dla $i \in \{1, 2, \dots, llw\}$ oznacza czas przejazdu pojazdów linii n_i od pętli startowej do węzła wiązki

Niech T_{ij} , dla $i \in \{1, 2, \dots, llw\}, j \in \{1, 2, \dots, lk_i\}$ oznacza moment odjazdu j -tego kursu linii n_i z pętli startowej tej linii.

Niech lkw oznacza liczbę kursów wiązki. Oczywiście mamy:

$$lkw = \sum_{i=1}^{lw} lk_i \quad (3.5.1)$$

Oznaczmy przez:

$$M_i = \bigcup_{j=1}^{lk_i} \{T_{i,j} + c_i\} \quad (3.5.2)$$

zbiór momentów odjazdów kursów linii n_i z węzła wiązki.

Wtedy:

$$M = \bigcup_{i=1}^{lw} M_i \quad (3.5.3)$$

Będzie zbiorem momentów odjazdów wszystkich kursów wszystkich linii wiązki z węzła wiązki. Innymi słowy będzie to zbiór momentów odjazdów wszystkich kursów linii zastępczej z węzła wiązki.

Zagregowaną intensywność napływu pasażerów wiązki wyznaczamy analogicznie jak w poprzednim podrozdziale (dla pojedynczej linii).

Niech k oznacza ilość przystanków na trasie wiązki.

Oznaczmy kolejne przystanki rozważanej wiązki przez P_0, P_1, \dots, P_{k-1} . Niech P_0 oznacza węzeł wiązki.

Niech s_i ($i = 0, 1, \dots, k-1$) oznacza czas przejazdu od węzła wiązki do przystanku P_i . Zakładamy, że czasy przejazdu s_i są w rozważanym przedziale czasowym jednakowe dla wszystkich pojazdów.

Niech $(0, T)$ będzie rozważanym przedziałem czasowym na węźle wiązki. Ponieważ na pozostałych przystankach pojazdy pojawiają się z opóźnieniem s_i , więc na przystanku P_i rozważanym przedziałem czasowym będzie $(s_i, T + s_i)$.

Niech $\alpha_i(t)$ ($i = 0, 1, \dots, k-1; t \in (s_i, T + s_i)$) oznacza funkcję intensywności napływu pasażerów wiązki na przystanek P_i . (patrz rozdział 1.2)

Zagregowana intensywność napływu pasażerów na przystanki dana jest wzorem:

$$\alpha(t) = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i(t + s_i) \quad , \text{gdzie } t \in (0, T) \quad (3.5.4)$$

Sumaryczny czas oczekiwania pasażerów na pojazd wiązki wynosi:

$$SCOW = \int_0^T \alpha(t) \cdot W(t, X) dt, \quad \text{gdzie } W(t, X) = \min_{T \in X \wedge T \geq t} (T - t) \quad (3.5.5)$$

Tak wyrażony sumaryczny czas oczekiwania pasażerów na pojazd wiązki jest funkcją momentów odjazdów kursów linii wiązki z ich pętli startowych.

UWAGA: pojedynczą linię możemy traktować jak wiązkę składającą się z jednej linii. Dzięki tej konwencji możliwe będzie ujednoczenie wzoru na sumaryczny czas oczekiwania w całym układzie komunikacyjnym.

3.6. Obliczenie sumarycznego czasu oczekiwania pasażerów na wszystkich przystankach całego układu komunikacyjnego.

Sumaryczny czas oczekiwania pasażerów w całym układzie komunikacyjnym (SCO) otrzymujemy sumując sumaryczne czasy oczekiwania po wszystkich wiązkach.

$$SCO = \sum_{i=1}^{lw} SCOW_i \quad (3.6.1)$$

gdzie $SCOW_i$ jest sumarycznym czasem oczekiwania pasażerów na pojazd wiązki i .

3.7. Związek między sumarycznym czasem oczekiwania a równomiernością kursowania

Poniżej wykażemy, że sumaryczny czas oczekiwania spełnia postulaty stawiane mierze równomierności kursowania.

W rozdziale 3.3 wykazano, że w przypadku stałej intensywności napływu pasażerów czas oczekiwania jest proporcjonalny do sumy kwadratów odstępów czasowych między momentami odjazdów pojazdów na przystanku. Można pokazać, że dla $T_n = T = const$ wyrażenie:

$$T_1^2 + (T_2 - T_1)^2 + (T_3 - T_2)^2 + \dots + (T_n - T_{n-1})^2 \quad (3.7.1)$$

osiąga minimum dla $T_k - T_{k-1} = T/n$ (matematyczny dowód tego faktu jest prosty i pominiemy go). A zatem minimalna wartość wyrażenia (3.7.1) wynosi:

$$\frac{1}{2} \alpha \cdot n \cdot (T/n)^2 = \frac{1}{2} \alpha \cdot T^2/n \quad (3.7.2)$$

Wartość ta osiągana jest wtedy, gdy $T_k - T_{k-1} = T/n$, czyli wtedy, gdy długości interwałów czasowych między kolejnymi pojazdami są równe. Świadczy to o tym, że sumaryczny czas oczekiwania pasażerów na przystanku spełnia pierwszy postulat stawiany mierze równomierności kursowania pojazdów (patrz podrozdział 2.3).

Postulat drugi również jest spełniony. Wynika to z faktu, że suma kwadratów dwu składników o ustalonej sumie jest najmniejsza wtedy, gdy oba te składniki są równe.

3.8. Związek między intensywnością napływu pasażerów a częstotliwością kursowania

W tym podrozdziale zbadamy zależność między częstotliwością kursowania pojazdów w rozwiązaniu minimalizującym sumaryczny czas oczekiwania pasażerów a intensywnością napływu pasażerów na przystanki. Wykażemy, że częstotliwość kursowania powinna być w przybliżeniu proporcjonalna do pierwiastka z funkcji $\alpha(t)$.

Będziemy szukać minimum sumarycznego czasu oczekiwania pasażerów jako funkcji momentów odjazdów pojazdów jednej linii, przy założeniu zmiennej wartości funkcji intensywności napływu pasażerów $\alpha(t)$. Zakładamy, że na przedziale $(0, T)$ rozważana linia wykonuje n kursów. Funkcja $\alpha(t)$ jest dana jako parametr modelu. Problem polega na wyznaczeniu wektora momentów odjazdów $(T_0, T_1, T_2, \dots, T_n)$ przy czym $T_0=0$, $T_{i-1} < T_i$ i $T_n=T$ tak, aby osiągnąć minimum sumarycznego czasu oczekiwania pasażerów. Następnie zbadamy zależność ciągu długości interwałów $T_i - T_{i-1}$ w osiągniętym rozwiązaniu optymalnym od funkcji $\alpha(t)$. Oczywiście, ponieważ funkcja $\alpha(t)$ może na przedziale $(T_i - T_{i-1})$ zmieniać wartość, więc ta zależność może być jedynie przybliżona. Podamy formułę przybliżoną na rozwiązanie optymalne w zależności od funkcji $\alpha(t)$. Następnie, na kilku przykładach porównamy rozwiązania osiągnięte z formuły przybliżonej i metodą numeryczną.

Analityczne wyznaczenie minimum *SCOP* jest trudne gdy $\alpha(t)$ nie jest funkcją stałą. Można jednak wyznaczać szukane minimum metodą numeryczną lub podać formułę przybliżoną.

3.8.1. Formuła przybliżona rozwiązania minimalizującego sumaryczny czas oczekiwania.

Rozważmy najpierw pewien przypadek szczególny. Załóżmy, że przedział $[0, T]$ jest podzielony na m przedziałów, na których $\alpha(t)$ jest funkcją stałą. Oznaczmy te przedziały $[X_{i-1}, X_i)$ dla $i=1, 2, \dots, m$. Zakładamy $X_0=0$, $X_{i-1} < X_i$ oraz $X_m=T$. Mamy:

$$\alpha(t) = \alpha_i \text{ dla } t \in [X_{i-1}, X_i) \quad (3.8.1)$$

Założmy, że liczba kursów n jest znacznie większa niż m .

Niech n_i oznacza liczbę kursów w przedziale $[X_{i-1}, X_i)$. Mamy:

$$\sum_{i=1}^m n_i = n \quad (3.8.2)$$

Aby minimalizować $SCOP$ na każdym przedziale $[X_{i-1}, X_i)$ odstęp między kursami w obrębie tego przedziału powinny być stałe. Niech t_i oznacza odstęp czasowy między kursami na odcinku $[X_{i-1}, X_i)$. Mamy:

$$t_i = \frac{X_i - X_{i-1}}{n_i} \quad (3.8.3)$$

oraz:

$$t_i \cdot n_i = X_i - X_{i-1} \quad (3.8.4)$$

Niech f_i oznacza częstotliwość kursowania na przedziale $[X_{i-1}, X_i)$. Mamy:

$$f_i = \frac{1}{t_i} = \frac{n_i}{X_i - X_{i-1}} \quad (3.8.5)$$

oraz:

$$n_i = f_i \cdot (X_i - X_{i-1}) \quad (3.8.6)$$

Wtedy:

$$SCOP(T_1, T_2, \dots, T_n) = \sum_{i=1}^m \frac{1}{2} n_i \cdot \alpha_i \cdot t_i^2 = \sum_{i=1}^m \frac{1}{2} (n_i \cdot t_i) \cdot \alpha_i \cdot t_i = \sum_{i=1}^m \frac{1}{2} \cdot (X_i - X_{i-1}) \cdot \alpha_i \cdot \frac{1}{f_i} \quad (3.8.7)$$

zaś warunek (3.8.2) przybiera postać:

$$\sum_{i=1}^m f_i \cdot (X_i - X_{i-1}) = n \quad (3.8.8)$$

W ten sposób funkcja $SCOP(T_1, T_2, \dots, T_n)$ została przedstawiona jako funkcja częstotliwości kursowania na poszczególnych odcinkach. Znajdziemy wartości f_i , dla których funkcja $SCOP(f_1, f_2, \dots, f_n)$ osiąga wartość minimalną.

Aby znaleźć minimum wyrażenia (3.8.7) pod warunkiem (3.8.8) skorzystamy z tw. Lagrange.

Tw. Lagrange:

Jeśli funkcja $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ osiąga minimum na zbiorze wyznaczonym przez warunek $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = c$ to:

$$\nabla f = \nabla g \cdot \lambda$$

gdzie $\nabla f, \nabla g$ oznacza gradient (czyli wektor pierwszych pochodnych) odpowiednio funkcji f i g , a λ jest pewną stałą rzeczywistą.

Stosując to twierdzenie do wyrażen (3.8.7) i (3.8.8) podstawiamy:

$$f(f_1, f_2, \dots, f_m) = \sum_{i=1}^m \frac{1}{2} \cdot (X_i - X_{i-1}) \cdot \alpha_i \cdot \frac{1}{f_i} \quad (3.8.9)$$

$$g(f_1, f_2, \dots, f_m) = \sum_{i=1}^m f_i \cdot (X_i - X_{i-1}) = n \quad (3.8.10)$$

Stosowanie tw. Lagrange jest tu pewnym uproszczeniem, gdyż zmienne f_1, f_2, \dots, f_m nie mogą przyjmować każdej wartości rzeczywistej, a jedynie wartości możliwe do osiągnięcia za pomocą formuły

$$f_i = \frac{1}{t_i} = \frac{n_i}{X_i - X_{i-1}}$$

Mimo to obliczymy minimum $SCOP$ tak, jak gdybyśmy mieli pełną swobodę w wyborze zmiennych f_1, f_2, \dots, f_m .

Obliczamy gradienty funkcji f i g :

$$\nabla f = \left(\frac{1}{2} \cdot (X_i - X_{i-1}) \cdot \alpha_i \cdot \frac{-1}{f_i^2} \right)_{i=1}^m \quad (3.8.11)$$

$$\nabla g = (X_i - X_{i-1})_{i=1}^m \quad (3.8.12)$$

gdzie symbol $(z_i)_{i=1}^m$ oznacza m -elementowy wektor o współrzędnych z_i .

Stosując tw. Lagrangea mamy dla $i=1, 2, \dots, m$:

$$\frac{1}{2} \cdot (X_i - X_{i-1}) \cdot \alpha_i \cdot \frac{-1}{f_i^2} = \lambda \cdot (X_i - X_{i-1}) \quad (3.8.13)$$

stąd, dla pewnej stałej c :

$$f_i = \sqrt{\alpha_i} \cdot c \quad (3.8.14)$$

Oznacza to, że minimum sumarycznego czasu oczekiwania jest osiągnięte, gdy na każdym z przedziałów $[X_{i-1}, X_i)$ częstotliwość kursowania jest proporcjonalna do pierwiastka z intensywności napływu pasażerów.

Obliczmy stałą c z warunku (3.8.8):

$$n = \sum_{i=1}^m f_i \cdot (X_i - X_{i-1}) = \sum_{i=1}^m \sqrt{\alpha_i} \cdot c \cdot (X_i - X_{i-1}) = \quad (3.8.15)$$

stąd:

$$c = \frac{n}{\sum_{i=1}^m \sqrt{\alpha_i} \cdot (X_i - X_{i-1})} \quad (3.8.16)$$

Ostatecznie:

$$f_i = \sqrt{\alpha_i} \cdot \frac{n}{\sum_{i=1}^m \sqrt{\alpha_i} \cdot (X_i - X_{i-1})} \quad (3.8.17)$$

i równoważnie:

$$t_i = \frac{1}{f_i} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_i}} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m \sqrt{\alpha_i} \cdot (X_i - X_{i-1}) \quad (3.8.18)$$

Zauważmy, że:

$$\sum_{i=1}^m \sqrt{\alpha_i} \cdot (X_i - X_{i-1}) = \int_0^T \sqrt{\alpha(t)} dt \quad (3.8.19)$$

i ostatecznie możemy napisać:

$$t_i = \frac{1}{\sqrt{\alpha_i}} \cdot \frac{1}{n} \int_0^T \sqrt{\alpha(t)} dt \quad (3.8.20)$$

Ostatni wynik sugeruje, że odstępy czasowe między kolejnymi pojazdami powinny być odwrotnie proporcjonalne do pierwiastka z intensywności napływu pasażerów. Oczywiście jeśli $\alpha(t)$ nie jest funkcją stałą, to nie można mówić o takiej proporcjonalności w ścisłym tego słowa znaczeniu, gdyż odstępy czasowe dotyczą całych odcinków, a funkcja $\alpha(t)$ może w obrębie takiego odcinka zmieniać wartość.

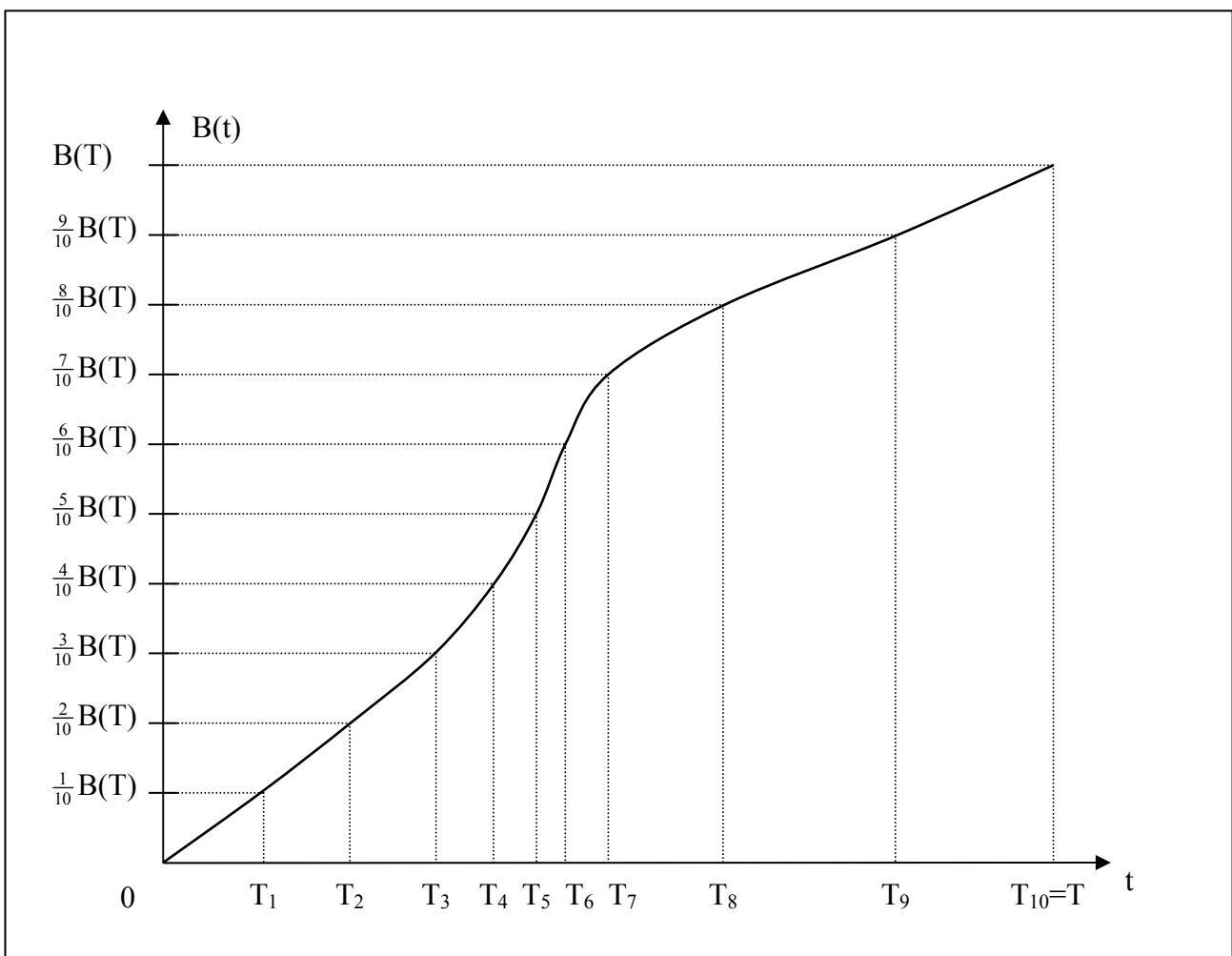
W oparciu o powyższe spostrzeżenie wyznaczono formułę przybliżoną na wartości T_i :

$$T_i = B^{-1}\left(\frac{i}{n} \cdot B(T)\right), i=1, 2, \dots, n \quad (3.8.21)$$

gdzie funkcja B zadana jest wzorem:

$$B(t) = \int_0^t \sqrt{\alpha(x)} dx \quad (3.8.22)$$

Przy tak wyznaczonych wartościach T_i odstępy $(T_i - T_{i-1})$ są w przybliżeniu odwrotnie proporcjonalne do pierwiastka z $\alpha(t)$. Zależność tę pokazujemy na rys. 3.8.1.



Rys. 3.8.1. Przykładowa funkcja $B(t)$ i wartości T_i z formuły przybliżonej (oprac. własne)

Rozważmy przedział (T_{i-1}, T_i) . Średni przyrost funkcji $B(t)$ na tym przedziale jest równy pochodnej tej funkcji w pewnym punkcie s_i tego przedziału. Mamy więc:

$$\frac{\frac{1}{n}B(T)}{T_i - T_{i-1}} = B'(s_i) = \sqrt{\alpha(s_i)} \quad (3.8.23)$$

stąd:

$$(T_i - T_{i-1}) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(s_i)}} \cdot \frac{1}{n}B(T) \quad (3.8.24)$$

co jest wynikiem zgodnym z (3.8.20)

Należy podkreślić, że wartości wyznaczone przez formułę (3.8.21) nie są w ogólnym przypadku wartościami minimalizującymi sumaryczny czas oczekiwania. Jednak badania empiryczne wykazały dużą zgodność wyników osiąganych powyższą formułą i metodami numerycznymi.

Przykład 1.

Gdy funkcja $\alpha(t)$ jest stała rozwiązaniem minimalizującym sumaryczny czas oczekiwania pasażerów jest równomierne rozłożenie momentów odjazdów na odcinku $(0, T)$. Rozwiązania osiągnięte przy pomocy formuły przybliżonej i metodą numeryczną są zgodne z tym rozwiązaniem optymalnym.

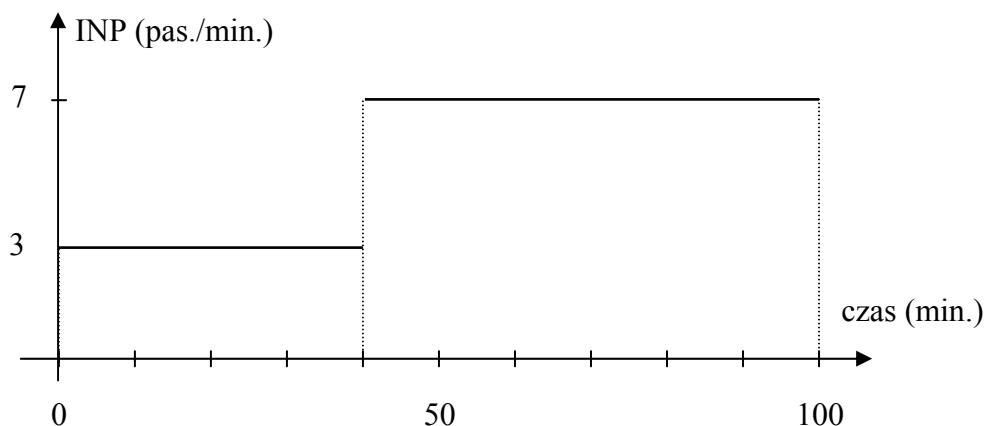
Przykład 2.

Rozważmy przykład, gdy funkcja $\alpha(t)$ jest kawałkami stała. Poniżej zamieszczamy wykres funkcji $\alpha(t)$ i znalezione rozwiązania: numerycznie i z formuły przybliżonej

$$T=100,$$

$$n=20,$$

$$\alpha(t) = \begin{cases} 3 & \text{dla } t \in [0,40] \\ 7 & \text{dla } t \in (40,100] \end{cases}$$



Rys. 3.8.2. Wykres funkcji $\alpha(t)$. (oprac. własne)

Poniższa tabela prezentuje wartości momentów odjazdów i interwałów dla rozwiązania minimalizującego sumaryczny czas oczekiwania, wyznaczonego formułą przybliżoną i znalezionej numerycznie.

Tabela 3.8.1. Porównanie rozwiązania przybliżonego i numerycznego (oprac. własne)

L.P.	Formuła przybliżona		Rozwiązanie numeryczne	
	Odjazdy T_i	interwały $T_i - T_{i-1}$	Odjazdy T_i	interwały $T_i - T_{i-1}$
1	6,58	6,58	6,15	6,15
2	13,17	6,58	12,30	6,15
3	19,75	6,58	18,45	6,15
4	26,33	6,58	24,60	6,15
5	32,91	6,58	30,75	6,15
6	39,50	6,58	36,90	6,15
7	43,98	4,48	43,05	6,15
8	48,29	4,31	47,43	4,38
9	52,60	4,31	51,81	4,38
10	56,91	4,31	56,19	4,38
11	61,22	4,31	60,58	4,38
12	65,53	4,31	64,96	4,38
13	69,83	4,31	69,34	4,38
14	74,14	4,31	73,72	4,38
15	78,45	4,31	78,10	4,38
16	82,76	4,31	82,48	4,38
17	87,07	4,31	86,86	4,38
18	91,38	4,31	91,24	4,38
19	95,69	4,31	95,62	4,38
20	100,00	4,31	100,00	4,38
	FC=1296,73		FC=1288,93	

Jak widać rozwiązanie optymalne uzyskane drogą numeryczną niewiele się różni od tego uzyskanego z formuły przybliżonej.

Zauważmy, że minimalizując funkcję *SCOP* osiągamy jednocześnie dwa cele:

- równomierność kursowania,
- dostosowanie częstotliwości kursowania do intensywności napływu pasażerów.

3.9. Wnioski z rozdziału 3

Wniosek pierwszy:

Do oceny sumarycznego czasu oczekiwania pasażerów na przystankach linii/wiązki używać będziemy wzoru:

$$\int_0^T \alpha(t) \cdot W(t, T_1, T_2, \dots, T_n) dt \quad (3.9.1)$$

gdzie $\alpha(t)$ jest zagregowaną funkcją intensywności pasażerów na przystanki linii/wiązki.

Wniosek drugi:

Sumaryczny czas oczekiwania pasażerów spełnia postulaty stawiane mierze równomierności kursowania.

4. Modele problemu synchronizacji interwałowej

4.1. Systematyka modeli problemu synchronizacji interwałowej

W rozdziale czwartym rozważymy różne modele problemu synchronizacji interwałowej (PSI). Modele te możemy podzielić na grupy zależnie od przyjętych założeń i ograniczeń.

Cechy wspólne tych modeli to:

- We wszystkich rozpatrywanych modelach problemu synchronizacji interwałowej dążymy do wyrównania interwałów między kolejnymi pojazdami.
- za funkcję celu przyjmujemy miarę nierównomierności kursowania wskazaną w rozdziale drugim, czyli sumaryczny czas oczekiwania pasażerów w całym układzie komunikacyjnym.
- za zmienne decyzyjne przyjmujemy momenty odjazdów pojazdów wszystkich linii z ich pętli startowych. Należy zaznaczyć, że większości linii rozumianych w potocznym tego słowa znaczeniu odpowiadać u nas będą dwie linie jadące w przeciwnych kierunkach. Jest tak dlatego, że dla każdego z tych dwu kierunków mamy swobodę ustalenia momentów startów. Zmienne te muszą spełniać naturalne ograniczenia, tzn.: zawierać się w pewnym przyjętym przedziale czasowym $(0, T)$ i dla danej linii być uporządkowane rosnąco. Zauważmy, że momenty odjazdów dla pojazdów wiązki na wspólnym odcinku tras nie są już zmiennymi niezależnymi, lecz są wartościami wynikającymi ze zmiennych decyzyjnych i czasów dojazdów poszczególnych linii do węzła wiązki.

Różne modele otrzymujemy zależnie od przyjętych ograniczeń nakładanych na zmienne decyzyjne.

Rozpatrzmy przedstawione poniżej trzy modele:

1. Model ogólny, z dowolnym interwałem kursowania.

W tym modelu zakładamy pełną swobodę wyboru zmiennych decyzyjnych. Oznacza to, że nie jest wymagany stały takt kursowania dla poszczególnych linii. Model ten ma następujące wady:

- w takim modelu w rozwiązaniach optymalnych rozkład kursów dla linii jest nierównomierny. Jest tak dlatego, że dla osiągnięcia równomierności kursowania na

wiązce linii konieczne jest „popsucie” równomierności kursowania dla linii. W praktyce jednak nierównomierne kursowanie dla linii rodzi wiele problemów np. z przydziałem brygad poszczególnym kursom.

- model taki wymaga ogromnej ilości danych wejściowych. Konieczne jest podanie intensywności napływu pasażerów jako funkcji czasu, z rozbiciem na wszystkie grupy pasażerów podróżujących pojazdami tej samej wiązki lub linii. W praktyce takich danych nie gromadzi się.
- model taki jest również bardzo trudny obliczeniowo.
- ilość zmiennych decyzyjnych takiego modelu równa się ilości wszystkich kursów na wszystkich liniach. Ponieważ dla jednej linii mamy ok. 30-80 kursów dziennie a liczba linii to ok. 60 więc liczba niezależnych zmiennych decyzyjnych w takim modelu wynosi kilka tysięcy.
- bardzo skomplikowana jest również funkcja celu. Jej obliczenie wymaga obliczania skomplikowanych całek iloczynu funkcji INP i funkcji liniowej. Ponadto można wykazać na przykładach, że taka funkcja ma ogromną ilość minimów lokalnych, co utrudnia poszukiwanie minimum globalnego. Autor tej pracy nie zna efektywnego algorytmu (poza prostymi przykładami) poszukiwania rozwiązania optymalnego w tym modelu.

Z powyższych powodów autor widzi ograniczone możliwości zastosowania takiego modelu w praktyce.

2. Model ze stałym dla danej linii interwałem kursowania.

Przyjęcie stałego w czasie taktu kursowania T dla linii powoduje znaczne uproszczenie modelu:

- po pierwsze, redukcji ulega liczba zmiennych decyzyjnych. Zamiast konieczności ustalania momentów startów wszystkich pojazdów danej linii w tym modelu trzeba ustalić moment startu jedynie pierwszego kursu X_0 . Momenty startów pozostałych kursów tworzą ciąg arytmetyczny: $X_i = X_0 + i \cdot T$, co wynika z założenia o stałym takcie. Dzięki temu dla każdej linii jest jedna zmienna decyzyjna niezależna zamiast kilkudziesięciu.
- po drugie, przy założeniu stałego taktu praktycznie nie ma sensu zakładać zmienną w czasie intensywność napływu pasażerów. Zakładanie niestalej funkcji INP skutkuje dostosowaniem taktu kursowania do wartości funkcji INP, a w tym modelu

z założenia takt ma być niezmienny w czasie. Praktycznie takie same rozwiązania optymalne osiągniemy przyjmując za funkcję INP średnią wartość INP. Jak pokazano w rozdziale 3 przyjęcie stałej funkcji INP znacznie upraszcza postać funkcji celu – zamiast całek występują kwadraty odstępów czasowych. To znacznie ułatwia obliczenia i poszukiwanie rozwiązania optymalnego. Ponadto zmniejszeniu ulega ilość parametrów modelu, gdyż zamiast funkcji INP wystarczy podać średnią wartość INP.

- po trzecie, przy założeniu stałego taktu nie trzeba dbać o równomierność kursowania dla poszczególnych linii, gdyż ta jest zapewniona wprost z tego założenia. Dzięki temu składnik funkcji celu odpowiadający sumarycznemu czasowi oczekiwania pasażerów chcących korzystać z pojazdów pojedynczych linii (a nie wiązek) jest funkcją stałą zmiennych decyzyjnych. Dlatego składnik ten nie ma wpływu na poszukiwanie rozwiązania optymalnego i jako taki może być w funkcji celu pominięty.

Wyróżniamy dwa modele ze stałym taktem kursowania:

- z jednakowym dla wszystkich linii taktem
- z niejednakowym dla różnych linii taktem

Gdy takt kursowania T jest jednakowy dla wszystkich linii funkcja celu ulega dalszemu uproszczeniu. Ponieważ w tym przypadku sumaryczny czas oczekiwania pasażerów jest jednakowy na każdym odcinku postaci $(c, c+T)$, więc sumaryczny czas oczekiwania jest iloczynem liczby taktów w rozpatrywanym przedziale czasowym i sumarycznego czasu oczekiwania na odcinku $(0, T)$.

Taki przypadek kursowania ze stałym taktem jednakowym dla wszystkich linii występuje w komunikacji tramwajowej miasta Wrocławia. Autor zebrał dane wejściowe dla tego modelu i przeprowadził symulację rozwiązań. Wyniki tej symulacji przedstawiono w podrozdziale 4.4.

Gdy takty kursowania różnych linii nie są jednakowe model jest bardziej skomplikowany. Synchronizacja wiązki składającej się z kilku linii kursujących z różnymi taktami jest trudna lub wręcz niemożliwa. Zależy to od wartości najmniejszego wspólnego dzielnika (NWD) długości taktów poszczególnych linii. Gdy wartość ta jest mała

synchronizacja nie ma sensu, gdyż wartość funkcji celu jest mało zależna od zmiennych decyzyjnych. Przypadek ten badał A.Adamski (1993).

3. Model z rozbiem na pory dnia

Można również rozważać modele pośrednie między modelem ogólnym, w którym jest pełna swoboda wyboru momentów odjazdów, a modelami ze stałym taktem. W modelach takich zakłada się, że doba podzielona jest na kilka pór dnia. Zakładamy, że obrębie danej pory takt kursowania ma być ustalony, dostosowany do zapotrzebowania na przewozy w tej porze dnia. W modelach takich dokonuje się synchronizacji każdej pory dnia z osobna, a następnie łączy się otrzymane rozkłady jazdy w rozkład całodobowy. Jednak wtedy występują nieregularności w kursowaniu poszczególnych linii na stykach pór. Rozwiązanie takiego problemu wymaga uwzględnienia specyfiki konkretnego przypadku i ma charakter inżynierski. Z tego względu nie będziemy tutaj zajmować się szczegółowo tym przypadkiem.

4.2. Model jednej linii

Model jednej linii jest modelem pomocniczym. Nie jest to model problemu synchronizacji, gdyż synchronizacja dotyczy kilku linii. Model ten posłuży nam jedynie do zaprezentowania własności przyjętej miary równomierności.

Rozważmy jedną linię oraz przystanki znajdujące się na jej trasie. Załóżmy, że pasażerowie przybywają na te przystanki ze zmiennymi w czasie intensywnościami.

Niech k oznacza liczbę przystanków na trasie tej linii. Oznaczmy przystanek o numerze i przez P_i . Niech $\alpha_i(t)$ oznacza funkcję intensywności napływu pasażerów na przystanek P_i . Niech s_i oznacza czas przejazdu od pętli startowej do przystanku P_i .

Załóżmy, że w przedziale czasowym $[0, T]$ z pętli ma wyruszyć n pojazdów. Zakładamy, że ostatni pojazd ma wyruszyć w chwili T . Należy tak ustalić momenty startów tych n pojazdów z pętli, aby zminimalizować sumaryczny czas oczekiwania pasażerów na przystankach.

W tym celu definiujemy:

– Zmienne decyzyjne:

Niech T_i oznacza moment startu pojazdu nr i z pętli. Zakładamy, że $T_i \in (0, T)$, $T_n = T$ oraz $T_{i+1} > T_i$.

– Funkcja celu:

Za wartość funkcji celu (FC) przyjmujemy sumaryczny czas oczekiwania pasażerów na przystankach. FC będzie minimalizowana. Zgodnie z wynikami osiągniętymi w podrozdziale 3.4 wartość FC wyliczamy ze wzoru:

$$FC(T_1, T_2, \dots, T_n) = \int_0^T \alpha(t) \cdot W(t, T_1, T_2, \dots, T_n) dt \quad (4.2.1)$$

gdzie: $\alpha(t) = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i(t + s_i)$ to zagregowana funkcja INP,

zaś: $W(t; T_1, T_2, \dots, T_n) = \min_{T_i \geq t} (T_i - t)$

Własności minimum FC .

Niech (T_1, T_2, \dots, T_n) oznacza wektor wartości, dla którego funkcja FC osiąga minimum. Jak wykazano w podrozdziale 3.8, gdy intensywność napływu pasażerów jest stała interwały $T_{i+1} - T_i$ są równe, czyli pojazdy kursują równomiernie. Natomiast gdy $\alpha(t)$ nie jest stała, wtedy interwały $T_{i+1} - T_i$ są w przybliżeniu odwrotnie proporcjonalne do pierwiastka z $\alpha(t)$.

4.3. Model ogólny

Przyjmijmy następujące parametry modelu:

ll – liczba linii

lw – liczba wiązek (przyjmujemy konwencję, że linie traktujemy również jako wiązki)

lkl_i – liczba kursów linii i

Zmienne decyzyjne:

$T_{i,j}$, gdzie $i \in \{1, 2, \dots, ll\}$, $j \in \{1, 2, \dots, lkl_i\}$ – moment odjazdu z odpowiedniej pętli startowej j -tego kursu linii nr i

Zakładamy, że wszystkie momenty odjazdów mieszczą się w przedziale $[0, T]$ oraz, że dla danej linii są uporządkowane rosnąco:

$$0 \leq T_{i,j} \leq T, \quad \text{gdzie } i \in \{1, 2, \dots, ll\}, j \in \{1, 2, \dots, lkl_i\}$$

$$T_{i,j} < T_{i,k} \text{ dla } j < k, \quad \text{gdzie } i \in \{1, 2, \dots, ll\}, j, k \in \{1, 2, \dots, lkl_i\}$$

$$T_{i,j} = T, \quad \text{gdzie } i \in \{1, 2, \dots, ll\}, j = lkl_i$$

Oznaczmy sumaryczny czas oczekiwania pasażerów wiązki i przez

$$SCOW_i = \int_0^T \alpha_i(t) \cdot W(t, X_i) dt \quad (4.3.1)$$

gdzie:

$\alpha_i(t)$ – zagregowana intensywność napływu pasażerów wiązki i ,

X_i – zbiór momentów odjazdów kursów wiązki i z węzła tej wiązki.

Funkcją celu jest sumaryczny czas oczekiwania pasażerów w całym układzie komunikacyjnym (patrz podrozdział 3.6).

$$SCO = \sum_{i=1}^{lw} SCOW_i \quad (4.3.2)$$

Przykład 4.3.1

Rozważmy dwie linie A i B, startujące ze wspólnej pętli i posiadające wspólny fragment tras. Przeanalizujemy związek między parametrem intensywności napływu pasażerów (INP) poszczególnych linii/wiązek a równomiernością kursowania poszczególnych linii/wiązek w otrzymanym rozwiązaniu optymalnym. W tym celu rozważymy trzy warianty zestawu funkcji INP .

Przyjmujemy następujące parametry modelu:

- liczba linii: $ll=2$
- liczba wiązek (wiązka linii A i B – nazwijmy ją wiązka AB oraz wiązki sztuczne składające się z pojedynczych linii A i B): $lw=3$
- liczby linii w wiązках: $llw_1=2; llw_2=1; llw_3=1$

Ponieważ linie te mają wspólną pętlę startową, więc we wszystkich trzech wiązках czas dojazdu od pętli startowej do węzła wiązki wynosi 0.

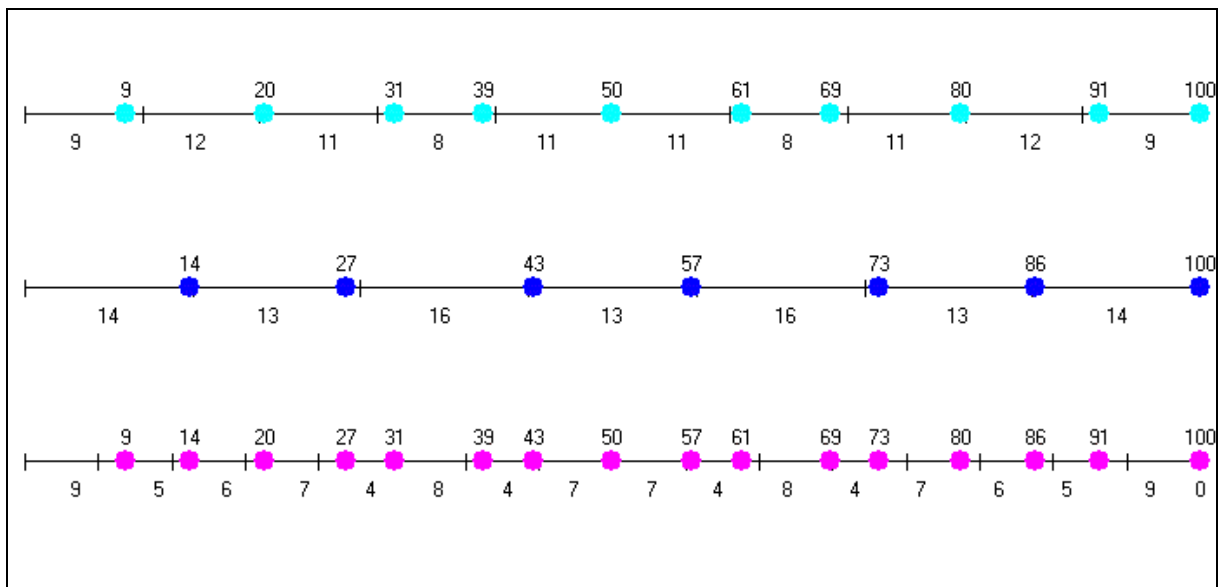
Założmy, że rozpatrywanym przedziałem czasowym jest przedział $[0,100]$. Niech linia A wykonuje 10 kursów a linia B – 7 kursów: $lkl_1=10; lkl_2=7$

Symulację rozwiązań przeprowadzono programem „Synchronizacja5” (patrz aneks).

Wariant 1

Niech zagregowane intensywności napływu pasażerów będą funkcjami stałymi i wynoszą odpowiednio: $\alpha_1(t)=4$; $\alpha_2(t)=4$; $\alpha_3(t)=4$. Odpowiada to sytuacji, gdy jednakowo ważne jest uzyskanie równomierności kursowania zarówno dla linii A i B jak i dla wiązki AB.

Rysunek 4.3.1 przedstawia znalezione metodą numeryczną rozwiązanie optymalne. Na rysunku widoczne są trzy osie czasu na odcinku $[0,100]$. Pierwsza oś odpowiada linii A, druga linii B, a trzecia wiązce AB. Na każdej osi zaznaczono kropkami momenty odjazdów pojazdów. Nad kropkami napisane są momenty odjazdów zaokrąglone do pełnych minut. Pod osiami, na środku odcinków między kolejnymi momentami odjazdów napisane są długości interwałów między kolejnymi pojazdami (także zaokrąglone do pełnych minut). Poprzeczne kreski na osiach odpowiadają równomiernemu rozłożeniu momentów odjazdów.

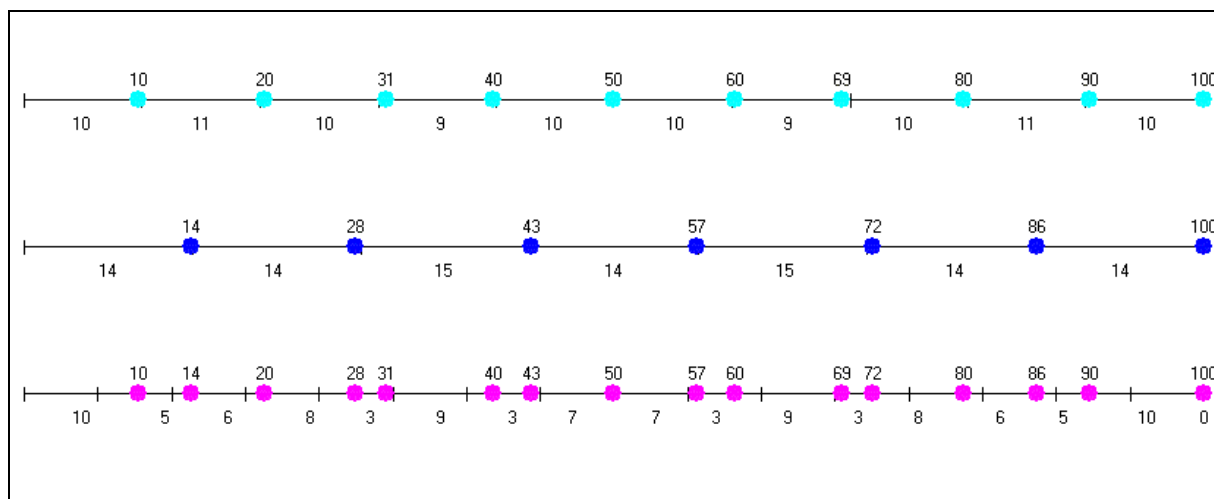


Rys. 4.3.1. Wyniki symulacji w wariantcie 1 (opracowanie własne)

Na rys. 4.3.1 widzimy, że w rozwiązaniu optymalnym ani dla linii A i B, ani dla wiązki AB nie osiągnięto pełnej równomierności kursowania. Przyjęcie jednakowych wartości INP dla linii A, B i dla wiązki AB zaowocowało rozłożeniem nierównomierności na wszystkie trzy grupy pasażerów.

Wariant 2

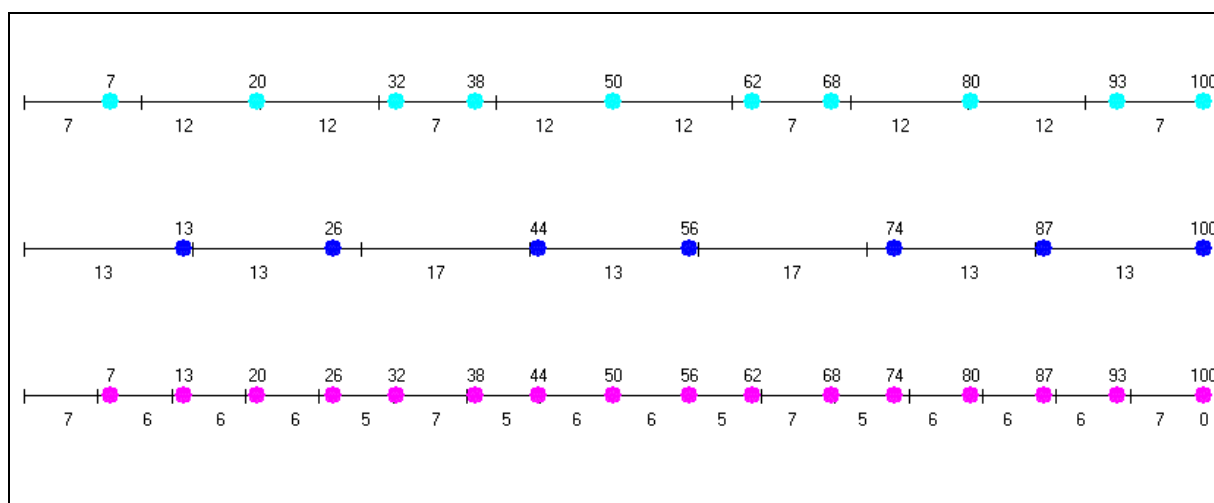
Jeśli przyjmiemy wysokie wartości INP dla linii A i B, a niską dla wiązki AB: $\alpha_1(t)=4$; $\alpha_2(t)=4$; $\alpha_3(t)=1$ to w rozwiązaniu optymalnym bardziej równomiernie rozłożone będą momenty odjazdów linii A i B, natomiast kursy wiązki AB rozłożone będą nierównomiernie. Ilustruje to rysunek 4.3.2.



Rys. 4.3.2. Wyniki symulacji w wariancie 2 (opracowanie własne)

Wariant 3

Jeśli przyjmiemy niskie wartości INP dla linii A i B, a wysoką dla wiązki AB: $\alpha_1(t)=1$; $\alpha_2(t)=1$; $\alpha_3(t)=4$ to w rozwiązaniu optymalnym bardziej równomiernie rozłożone będą momenty odjazdów wiązki AB, natomiast kursy linii A i B rozłożone będą nierównomiernie. Ilustruje to rysunek 4.3.3.



Rys. 4.3.3. Wyniki symulacji w wariancie 3 (opracowanie własne)

Powyższy przykład pokazuje również, że w rozwiązaniu minimalizującym sumaryczny czas oczekiwania występują nieregularności na każdej linii. Rodzi to wiele problemów: brak akceptacji pasażerów dla takiego rozwiązania, trudności z przydzieleniem załóg do linii. Dlatego takich rozkładów jazdy nie stosuje się w praktyce.

4.4. Model ze stałym i jednakowym dla wszystkich linii taktom kursowania

Założenie stałego w czasie i jednakowego dla wszystkich linii taktu kursowania T powoduje znaczne uproszczenia modelu. W tym przypadku wystarczy przyjąć jedną zmienną decyzyjną dla każdej linii. Natomiast za funkcję celu wystarczy przyjąć sumaryczny czas oczekiwania pasażerów na odcinku $[0, T)$.

Oznaczmy:

ll - liczba linii,

lw - liczba wiązek,

T - długość taktu w minutach,

Zmienne decyzyjne:

$X_i \in [0, T)$ ($i \in \{1, 2, \dots, ll\}$) - moment startu z pętli pojazdu linii o numerze i .

UWAGA: Ponieważ zakładamy, że czasy przejazdów między przystankami są znane i stałe, moment wyruszenia pojazdu z pętli wyznacza momenty odjazdów pojazdu z wszystkich przystanków linii. Natomiast z założenia stałego taktu kursowania wynika, że moment wyruszenia pojazdu z pętli wyznacza momenty wyruszenia z tej pętli innych pojazdów tej samej linii. Warunek $X_i \in [0, T)$ wynika z założenia o stałym taktie. Skoro zakładamy, że pojazdy wyruszają z pętli co T minut, wystarczy podać moment startu jednego z tych pojazdów modulo T .

4.4.1. Częstkowa funkcja strat

Dla każdej wiązki określimy cząstkową funkcję strat, mierzącą nierównomierność kursowania pojazdów dla tej wiązki (tzn. "jak źle" jest zsynchronizowana dana wiązka). Funkcja strat zostanie później zdefiniowana jako suma cząstkowych funkcji strat.

Dla wiązki o numerze k ($k \in \{1, 2, \dots, lw\}$) określamy:

llW_k – liczba linii tworzących wiązkę k ,

$N_{k,1}, N_{k,2}, \dots, N_{k,llW_k}$ – numery linii tworzących wiązkę k ,

$C_{k,1}, C_{k,2}, \dots, C_{k,llW_k}$ – czasy dojazdu dla każdej spośród linii wiązki k , z odpowiednich pętli do węzła wiązki k . Innymi słowy $C_{k,i}$ oznacza czas dojazdu pojazdu linii $N_{k,i}$ z pętli tej linii do węzła wiązki k ,

IW_k – istotność wiązki k

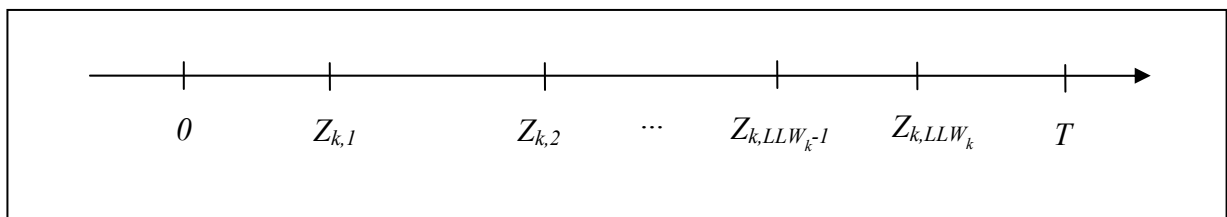
Wprowadźmy zmienne pomocnicze $Y_{k,i}$ i $Z_{k,i}$ ($i=1, 2, \dots, LLW_k$), zdefiniowane następująco:

$$Y_{k,i} = (X_{N_{k,i}} + C_{k,i}) \text{ MOD } T \quad (4.4.1)$$

$Y_{k,i}$ oznacza moment (modulo T) odjazdu pojazdu linii $N_{k,i}$ z węzła wiązki k .

Natomiast $Z_{k,i}$ będą uporządkowanymi rosnąco wartościami zmiennych $Y_{k,i}$ ($i=1, 2, \dots, LLW_k$). $Z_{k,i}$ oznaczają kolejne momenty odjazdów pojazdów linii wiązki k z węzła tej wiązki.

Zauważmy, że $Y_{k,i} \in [0, T)$ oraz $Z_{k,i} \in [0, T)$.



Rys. 4.4.1. Momenty odjazdów pojazdów linii wiązki k z węzła tej wiązki modulo takt
(oprac. własne)

W idealnie zsynchronizowanej wiązce wartości $Z_{k,i}$ ($i=1, 2, \dots, LLW_k$) rozkładają się równomiernie na odcinku $[0, T)$

Cząstkową funkcję strat definiujemy następująco :

$$CZFS_k = IW_k \cdot [(T + Z_{k,1} - Z_{k,LLW_k})^2 + (Z_{k,1} - Z_{k,2})^2 + (Z_{k,2} - Z_{k,3})^2 + \dots + (Z_{k,LLW_k-1} - Z_{k,LLW_k})^2] \quad (4.4.2)$$

Wzór ten nawiązuje do wzoru (3.3.4). $CZFS_k$ wyraża sumaryczne straty czasowe pasażerów przybyłych na przystanki wiązki k i oczekujących na pojazd wiązki k , w przedziale czasowym jednego taktu.

Tak zdefiniowana cząstkowa funkcja strat przyjmuje wartość minimalną, gdy kolejne wartości $Z_{k,i}$ ($i=1, 2, \dots, LLW$) różnią się o T/LLW_k . Odpowiada to sytuacji, gdy pojazdy kolejnych linii tworzących wiązkę k podjeżdżają na przystanki w równych odstępach czasowych. Wartość minimalna $CZFS_k$ wynosi:

$$\min CZFS_k = IW_k \cdot LLW_k \cdot (T/LLW_k)^2 = IW_k \cdot T^2 / LLW_k \quad (4.4.3)$$

4.4.2. Dobór parametru istotności wiązki

Jeśli chcemy aby funkcja strat była równa sumarycznym stratom czasowym pasażerów oczekujących na pojazd wiązki k , to zgodnie ze wzorem (3.3.4) za wartość parametru IW_k powinniśmy przyjąć $\frac{1}{2} \cdot \alpha$, gdzie α jest sumaryczną intensywnością napływu na przystanki pasażerów, którzy chcą podróżować jednym z pojazdów wiązki k . Jednakże, jeśli organizator przewozów uzna, że synchronizacja pewnej wiązki jest z jakiegoś powodu ważniejsza, to może on ustalić inną (większą) wartość parametru IW_k .

4.4.3. Definicja funkcji strat

Funkcję strat definiujemy następująco :

$$FS = \sum_{j=1}^{lw} CZFS_j \quad (4.4.4)$$

Tak zdefiniowana funkcja strat wyraża sumaryczną nierównomierność kursowania pojazdów we wszystkich wiązkach układu komunikacyjnego.

Rozwiązanie problemu synchronizacji interwałowej sprowadza się do takiego doboru wartości zmiennych decyzyjnych, dla których wyrażenie (4.4.4) przyjmuje wartość minimalną.

4.4.4. Ograniczenie dolne funkcji strat

Dzięki znajomości wartości minimalnych cząstkowych funkcji strat (4.4.3) można obliczyć ograniczenie dolne wartości funkcji strat. Oznaczmy tą wartość przez $ogdFS$. Ograniczenie to jest równe sumie wartości minimalnych cząstkowych funkcji strat:

$$ogdFS = \sum_{j=1}^{lw} \min CZFS_j \quad (4.4.5)$$

Jeśli istnieje taki układ zmiennych decyzyjnych, dla którego osiągnięta jest pełna synchronizacja wszystkich wiązek, to powyższe ograniczenie jest osiągalne. Zwykle jednak tak nie jest i minimalna wartość funkcji strat jest większa od wyrażenia (4.4.5). Wtedy ograniczenie dolne (4.4.5) możemy traktować jako punkt odniesienia: możemy sprawdzać o ile (procentowo) osiągnięte wartości minimalne funkcji strat przekroczyły $ogdFS$.

4.4.5. Przykłady zastosowania modelu ze stałym i jednakowym taktem

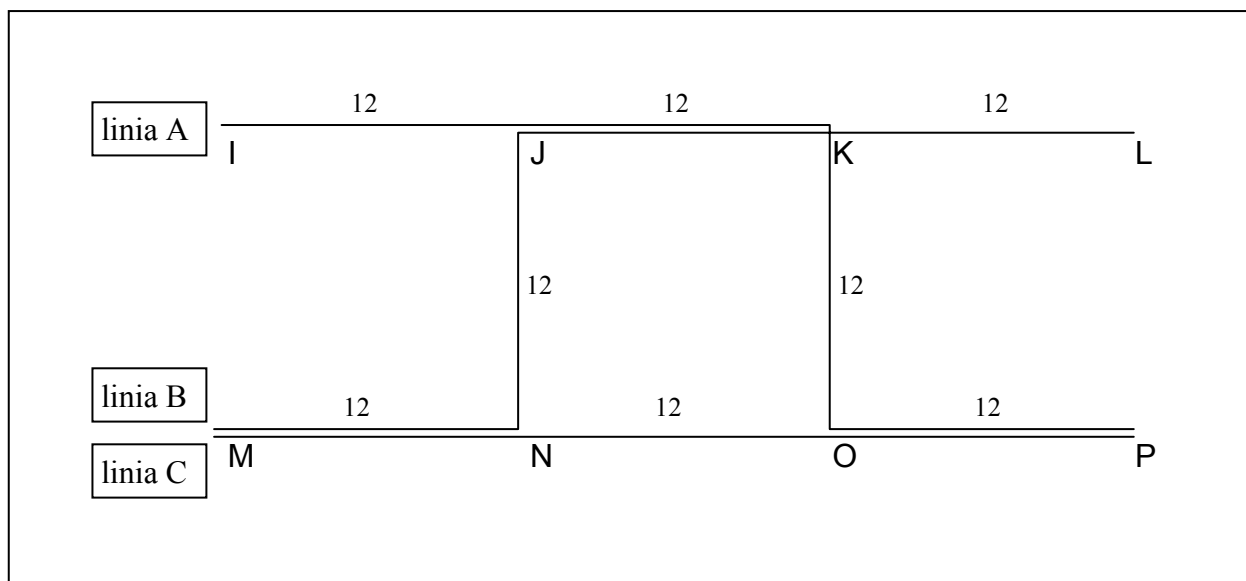
Poniżej rozpatrzemy dwa przykłady problemu synchronizacji przy założeniu stałego i jednakowego dla wszystkich linii taktu kursowania. Pierwszy przykład jest przykładem abstrakcyjnym. Wykażemy na nim istnienie układów, dla których nie jest możliwe osiągnięcie dolnego ograniczenia funkcji strat. Drugi wariant tego przykładu pokazuje, że czasem wystarczy zmiana wartości tylko jednego parametru (w tym przypadku: taktu), żeby było możliwe znalezienie rozwiązania idealnego. Drugi przykład jest przykładem z życia wziętym. Jest to przykład przeprowadzenia synchronizacji dla pory szczytowej dziennej komunikacji tramwajowej miasta Wrocławia.

Przykład 4.4.1a

Rozważmy sieć przedstawioną na rys. 4.4.2. Sieć tę tworzą punkty: I, J, K, L, M, N, O, P i łuki: IJ, JK, KL, JN, KO, MN, NO i OP. Czasy przejazdu są dla wszystkich wymienionych łuków takie same i wynoszą 12 minut. Niech dane będą trzy linie, o nazwach A, B i C, których trasy przebiegu to odpowiednio: linii A – trasa IJKOP, linii B – trasa MNJKL, linii C – trasa MNOP. W tej sieci możemy wyróżnić wiązki:

- wiązka AB, składająca się z linii A i B, które mają wspólną część tras na odcinku JK, węzłem tej wiązki jest punkt J, a czasy dojazdu do węzła wynoszą odpowiednio 12 i 24,
- wiązka AC, składająca się z linii A i C, które mają wspólną część tras na odcinku OP, węzłem tej wiązki jest punkt O, a czasy dojazdu do węzła wynoszą odpowiednio 36 i 24,
- wiązka BC, składająca się z linii B i C, które mają wspólną część tras na odcinku MN, węzłem tej wiązki jest punkt M, a czasy dojazdu do węzła wynoszą odpowiednio 0 i 0.

Założmy, że takt wynosi 12 minut, a istotności wszystkich wiązek są takie same i wynoszą 10.



Rys. 4.4.2. Sieć komunikacyjna z przykładu 4.4.1a i 4.4.1b (oprac. własne)

Na podstawie powyższych danych przygotowano zestaw danych do programu „Synchronizacja3”, którym przeprowadzono symulację rozwiązań. Otrzymano następujący zestaw danych (znaleźć go można na załączonej płycie CD, w pliku „Przykład 1a.txt” w katalogu „synch3”):

Takt=12

1 [AB; 2 A B 12 24 10]

2 [AC; 2 A C 36 24 10]

3 [BC; 2 B C 0 0 10]

W kolejnych liniach znajdują się:

nr wiązki [nazwa wiązki; liczba linii w wiązce, nazwy linii, czasy dojazdu, istotność wiązki]

Przykładowo zapis „1 [AB; 2 A B 12 24 10]” oznacza, że pierwsza wiązka nazywa się AB, w jej skład wchodzi dwie linie, nazywają się one A i B, ich czasy dojazdu do węzła wiązki wynoszą odpowiednio 12 i 24, zaś istotność tej wiązki wynosi 10.

Dla powyższego zestawu danych przeprowadzono symulację wyników. Po przeprowadzeniu 1000-krotnego poszukiwania minimum lokalnego otrzymano poniższe rozwiązanie. Dla każdej linii podano moment odjazdu z pętli startowej modulo 12.

A:0; B:4; C:8;

Oznacza to, że linia A powinna startować z pętli w chwili 0, linia B – w chwili 4, a linia C – w chwili 8.

Dla otrzymanego rozwiązania układy odjazdów kolejnych pojazdów z węzłów wiązek przedstawiono poniżej. W kolejnych wierszach znajdują się: nazwa wiązki, nazwy linii, momenty ich odjazdów z węzła (modulo takt), układ interwałów, istotność wiązki. Za nawiasem znajduje się porównanie cząstkowej funkcji strat (4.4.2) z jej minimum (4.4.3).

(AB; A,B ; 0:4 ; 4-8 ; 10) 800/720: +11,11%

(AC; A,C ; 0:8 ; 8-4 ; 10) 800/720: +11,11%

(BC; B,C ; 4:8 ; 4-8 ; 10) 800/720: +11,11%

Wartość funkcji strat (4.4.4) dla tego rozwiązania wynosi 2400 i jest o 11% większa od ograniczenia dolnego o wartości 2160, wyliczonego ze wzoru (4.4.5). Oznacza to, że w tym przykładzie nie znaleziono rozwiązania, w którym wszystkie wiązki byłyby idealnie zsynchronizowane. W istocie, w tym przykładzie nie jest możliwe znalezienie takiego rozwiązania. Gdyby bowiem wiązka AB miała być idealnie zsynchronizowana, to moment startu linii B musiałby być przesunięty względem momentu startu linii A o 6 minut. Podobnie, gdyby wiązka AC miała być idealnie zsynchronizowana, to moment startu linii C musiałby być przesunięty względem momentu startu linii A także o 6 minut. Ale wtedy linie B i C startowałyby ze swojej wspólnej pętli w tym samym momencie (modulo takt), co oznaczałoby najgorszą z możliwych synchronizację wiązki BC. Znaleziona wartość 2400 jest najlepszą spośród możliwych do osiągnięcia.

Przykład 4.4.1b

Rozważmy tą samą sieć, ten sam układ linii i ten sam zestaw parametrów wiązek co w przykładzie 4.4.1a z wyjątkiem wartości taktu, którą przyjmujemy równą 16.

Oznacza to przyjęcie następującego zestawu danych (znaleźć go można na załączonej płycie CD, w pliku „Przykład 1b.txt” w katalogu „synch3”):

Takt=16

1 [AB; 2 A B 12 24 10]

2 [AC; 2 A C 36 24 10]

3 [BC; 2 B C 0 0 10]

Dla powyższego zestawu danych przeprowadzono symulację wyników. Po przeprowadzeniu 1000-krotnego poszukiwania minimum lokalnego otrzymano poniższe rozwiązanie. Dla każdej linii podano moment odjazdu z pętli startowej modulo 16.

A:0; B:12; C:4;

Oznacza to, że linia A powinna startować z pętli w chwili 0, linia B – w chwili 12, a linia C – w chwili 4.

Dla otrzymanego rozwiązania układy odjazdów kolejnych pojazdów z węzłów wiązek przedstawiono poniżej.

(AB; B,A ; 4:12 ; 8-8 ; 10) 1280/1280: +0%

(AC; A,C ; 4:12 ; 8-8 ; 10) 1280/1280: +0%

(BC; C,B ; 4:12 ; 8-8 ; 10) 1280/1280: +0%

Wartość funkcji strat (4.4.4) dla tego rozwiązania wynosi 3840 i jest równa ograniczeniu dolnemu funkcji strat (4.4.5). Oznacza to, że w tym przykładzie było możliwe znalezienie rozwiązania, w którym wszystkie wiązki są idealnie zsynchronizowane.

Porównanie przykładów 4.4.1a i 4.4.1b pokazuje, że istnienie rozwiązania idealnego (takiego, w którym wszystkie wiązki są idealnie zsynchronizowane) zależy nie tylko od układu sieci komunikacyjnej (przebiegu linii i czasów przejazdu) ale także od długości taktu.

Przykład 4.4.2 – pora szczytowa dziennej komunikacji tramwajowej Wrocławia

Przykładem praktycznego zastosowania modelu ze stałym i jednakowym taktem może być dzienna komunikacja tramwajowa miasta Wrocławia (rys. 4.4.3). We Wrocławiu doba podzielona jest na kilka pór. W obrębie każdej pory dnia wszystkie linie tramwajowe kursują ze stałym i jednakowym taktem. Do tego przykładu wybrano porę szczytową, w której takt wynosi 12 minut.

W rozważanym układzie wyróżniono 37 linii, którym nadano nazwy składające się z oryginalnych nazw występujących w komunikacji wrocławskiej, z dodatkiem litery oznaczającej kierunek jazdy. Przykładowo linia 10 jadąca w kierunku zachodnim otrzymała nazwę „10W” a jadąca w kierunku wschodnim – „10E”. Linie kursujące w kierunku północ – południe otrzymały przyrostki literowe „N” i „S”. Linia okrężnej „0” odpowiadają w modelu linie „0P” i „0L” (okrążające centrum odpowiednio w prawo lub w lewo).

Wyróżniono 31 wiązek linii. Wiązki wyróżniono tam, gdzie kilka linii jedzie wspólnym fragmentem tras więcej niż 4 przystanki. Wiązkom nadano nazwy odpowiadające przybliżonemu rejonowi miasta, w którym występuje wspólny fragment tras.

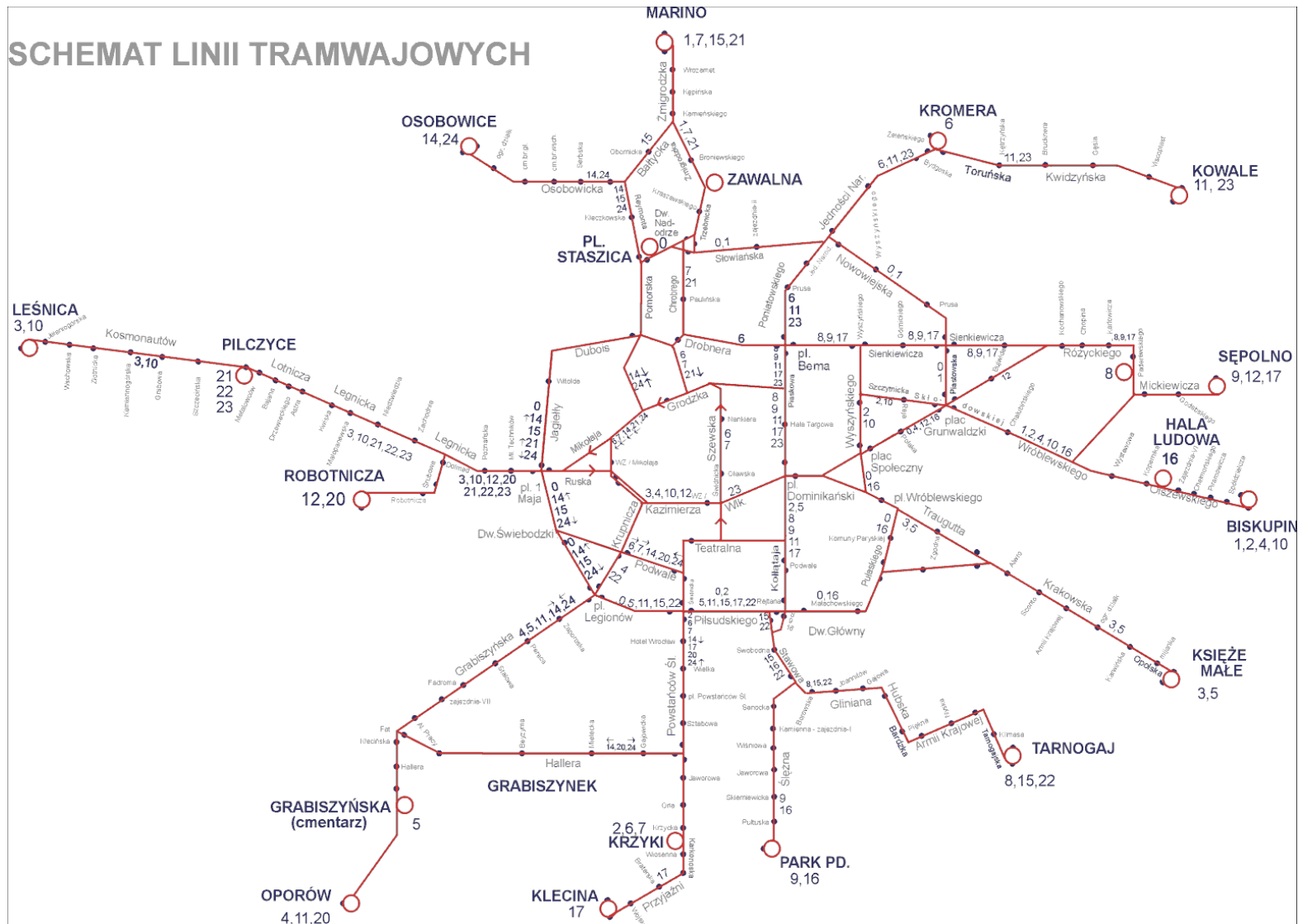
Dla każdej wiązki określono:

- linie wchodzące w skład wiązki,
- ich czasy dojazdu od pętli startowej do węzła wiązki,
- istotność wiązki,

Otrzymano poniższy zestaw danych (znaleźć go można na załączonej płycie CD, w pliku „Dane Wrocław.txt” w katalogu „synch3”):

takt=12

- 1 [3 i 10 na wschod; 2 3E 10E 0 0 100]
- 2 [3 i 10 na zachod; 2 3W 10W 14 18 100]
- 3 [Kosmon wsch; 5 3E 10E 21E 22E 23E 14 14 2 2 2 100]
- 4 [Kosmon zach; 5 3W 10W 21W 22W 23W 35 39 33 37 33 100]
- 5 [14 i 24 Osobowice; 2 14S 24S 0 0 50]
- 6 [14 i 24 Pl.Staszica; 2 14S 24S 53 54 25]
- 7 [Marino; 4 1S 7S 15S 21W 0 0 0 0 75]
- 8 [Kamieńskiego; 4 1N 7N 15N 21E 26 29 26 31 75]
- 9 [Kromera południe; 3 6S 11S 23W 0 0 0 75]
- 10 [Kromera północ; 3 6N 11N 23E 31 33 35 75]
- 11 [Sępolno; 2 9W 17W 0 0 75]
- 12 [Eureka; 2 9E 17E 15 22 75]
- 13 [Biskupin; 4 1N 2W 4W 10W 0 0 0 0 80]
- 14 [Kliniki; 4 1S 2E 4E 10E 21 27 27 45 80]
- 15 [Księżę małe; 2 3W 5W 0 0 40]
- 16 [Pl.Zgody; 2 3E 5E 40 26 40]
- 17 [Park pld.; 2 9E 22W 0 0 30]
- 18 [Dworzec PKS; 2 9W 22E 23 28 30]
- 19 [Orla; 4 2E 6N 7N 17E 2 2 2 9 40]



Rys. 4.4.3. Schemat dziennych linii tramwajowych Wrocławia (źródło: Zarząd dróg i komunikacji miasta Wrocławia).

20[Orla; 4 2W 6S 7S 17W 33 29 30 32 40]
 21[Rondo; 6 2E 6N 7N 17E 20N 24S 7 7 7 14 15 39 80]
 22[Rondo; 6 2W 6S 7S 14S 17W 20S 28 24 25 23 27 19 80]
 23[Oporów; 3 4E 11N 20N 0 0 0 25]
 24[Oporów; 3 4W 11S 20S 35 33 34 25]
 25[Hutmen; 4 4E 5E 11N 14S 5 4 5 35 100]
 26[Grabiszyńska; 4 4W 5W 11S 24S 24 25 22 21 100]
 27[Orląt Lwowskich; 3 14S 15N 0P 45 12 30 30]
 28[Pomorska; 3 15S 24S 0L 11 11 2 30]
 29[Robotnicza; 2 12E 20S 0 0 25]
 30[Dw. N/O; 2 0P 1S 2 9 50]
 31[Piastowska; 2 0L 1N 28 12 50]

Dla powyższego zestawu danych przeprowadzono symulację wyników. Po przeprowadzeniu 500000-krotnego poszukiwania minimum lokalnego otrzymano poniższe rozwiązanie. Dla każdej linii podano moment odjazdu z pętli startowej modulo takt.

0P:0; 0L:4; 1S:11; 1N:3; 2W:9; 2E:1; 3E:10; 3W:3; 4W:1; 4E:8; 5W:9; 5E:4; 6S:10;
 6N:4; 7S:6; 7N:10; 9W:6; 9E:2; 10E:4; 10W:5; 11S:6; 11N:6; 12E:4; 14S:5; 15S:3;
 15N:10; 17W:12; 17E:1; 20N:3; 20S:10; 21E:1; 21W:8; 22E:6; 22W:9; 23E:8; 23W:3;
 24S:10;

Dla otrzymanego rozwiązania układy odjazdów kolejnych pojazdów z węzłów wiązek przedstawiono poniżej.

1. (3 i 10 na wschod; 10E,3E ; 4:10 ; 6-6 ; 100) 7200/7200: +0%
2. (3 i 10 na zachod; 3W,10W ; 5:11 ; 6-6 ; 100) 7200/7200: +0%
3. (Kosmon wsch; 3E,21E,10E,22E,23E ; 0:3:6:8:10 ; 3-3-2-2-2 ; 100) 3000/3000: +0%
4. (Kosmon zach; 23W,3W,21W,10W,22W ; 0:2:5:8:10 ; 2-3-3-2-2 ; 100) 3000/3000: +0%
5. (14 i 24 Osobowice; 14S,24S ; 5:10 ; 5-7 ; 50) 3700/3600: +2,778%
6. (14 i 24 Pl.Staszica; 24S,14S ; 4:10 ; 6-6 ; 25) 1800/1800: +0%
7. (Marino; 15S,7S,21W,1S ; 3:6:8:11 ; 3-2-3-4 ; 75) 2850/2700: +5,556%
8. (Kamieńskiego; 15N,7N,1N,21E ; 0:3:5:8 ; 3-2-3-4 ; 75) 2850/2700: +5,556%

9. (Kromera południe; 23W,11S,6S ; 3:6:10 ; 3-4-5 ; 75) 3750/3600: +4,167%
10. (Kromera północ; 11N,23E,6N ; 3:7:11 ; 4-4-4 ; 75) 3600/3600: +0%
11. (Sępolno; 17W,9W ; 0:6 ; 6-6 ; 75) 5400/5400: +0%
12. (Eureka; 9E,17E ; 5:11 ; 6-6 ; 75) 5400/5400: +0%
13. (Biskupin; 4W,1N,10W,2W ; 1:3:5:9 ; 2-2-4-4 ; 80) 3200/2880: +11,11%
14. (Kliniki; 10E,2E,1S,4E ; 1:4:8:11 ; 3-4-3-2 ; 80) 3040/2880: +5,556%
15. (Księżę małe; 3W,5W ; 3:9 ; 6-6 ; 40) 2880/2880: +0%
16. (Pl.Zgody; 3E,5E ; 2:6 ; 4-8 ; 40) 3200/2880: +11,11%
17. (Park pld.; 9E,22W ; 2:9 ; 7-5 ; 30) 2220/2160: +2,778%
18. (Dworzec PKS; 9W,22E ; 5:10 ; 5-7 ; 30) 2220/2160: +2,778%
19. (Orla; 7N,2E,6N,17E ; 0:3:6:10 ; 3-3-4-2 ; 40) 1520/1440: +5,556%
20. (Orla; 7S,6S,2W,17W ; 0:3:6:8 ; 3-3-2-4 ; 40) 1520/1440: +5,556%
21. (Rondo; 24S,17E,7N,20N,2E,6N ; 1:3:5:6:8:11 ; 2-2-1-2-3-2 ; 80) 2080/1920: +8,333%
22. (Rondo; 2W,17W,14S,20S,7S,6S ; 1:3:4:5:7:10 ; 2-1-1-2-3-3 ; 80) 2240/1920: +16,67%
23. (Oporów; 20N,11N,4E ; 3:6:8 ; 3-2-7 ; 25) 1550/1200: +29,17%
24. (Oporów; 4W,11S,20S ; 0:3:8 ; 3-5-4 ; 25) 1250/1200: +4,167%
25. (Hutmen; 4E,14S,5E,11N ; 1:4:8:11 ; 3-4-3-2 ; 100) 3800/3600: +5,556%
26. (Grabiszynska; 4W,11S,24S,5W ; 1:4:7:10 ; 3-3-3-3 ; 100) 3600/3600: +0%
27. (Orląt Lwowskich; 14S,0P,15N ; 2:6:10 ; 4-4-4 ; 30) 1440/1440: +0%
28. (Pomorska; 15S,0L,24S ; 2:6:9 ; 4-3-5 ; 30) 1500/1440: +4,167%
29. (Robotnicza; 12E,20S ; 4:10 ; 6-6 ; 25) 1800/1800: +0%
30. (Dw. N/O; 0P,1S ; 2:8 ; 6-6 ; 50) 3600/3600: +0%
31. (Piastowska; 1N,0L ; 3:8 ; 5-7 ; 50) 3700/3600: +2,778%

Otrzymano wartość funkcji strat równą 96110, to jest 3,1% więcej od ograniczenia dolnego wynoszącego 93240.

Zauważmy, że dla prawie wszystkich wiązek (z wyjątkiem wiązek nr 16 i 23) udało się osiągnąć idealną lub prawie idealną synchronizację (czyli taką, dla której interwały między pojazdami różnią się od idealnych interwałów o najwyżej minutę).

5. Algorytm poszukiwania minimum funkcji celu (FC)

5.1. Zastosowany algorytm

Ze względu na skomplikowaną postać funkcji celu autor nie widzi możliwości analitycznego poszukiwania minimum tej funkcji.

W wyniku badań empirycznych stwierdzono, że FC ma dużą ilość minimów lokalnych. Dlatego zastosowanie metody gradientu [Bazaraa, 1982] nie prowadzi do znalezienia minimum globalnego. Wobec tego, zastosowano połączenie metody Monte-Carlo z metodą gradientu. Algorytm poszukiwania minimum globalnego polega na wielokrotnym losowaniu rozwiązania początkowego, następnie iteracyjnie rozwiązanie to jest poprawiane metodą gradientu, aż do osiągnięcia minimum lokalnego. Znalezione minima lokalne są zapisywane na liście. Po wykonaniu z góry zadanej liczby iteracji spośród znalezionych minimów wybierane jest najlepsze znalezione rozwiązanie. Najlepsze znalezione minimum lokalne uważane jest za rozwiązanie problemu.

Przedstawiony algorytm jest algorytmem heurystycznym, więc może się zdarzyć, że nie znajdzie on rozwiązania optymalnego, lecz pewne rozwiązanie suboptymalne.

5.2. Złożoność obliczeniowa

Najważniejszymi parametrami, od których zależy złożoność obliczeniowa algorytmu przyjętego do rozwiązania modelu 4.4 są:

- l - liczba linii,
- lw - liczba wiązek,
- llw – liczba linii tworzących wiązkę (średnio),

Znalezienie jednego minimum lokalnego funkcji zadanej wzorem (4.4.4) wymaga następujących operacji:

- obliczenia pochodnych pierwszego i drugiego rzędu funkcji celu
złożoność obliczeniowa tej operacji to $2 \cdot l + l^2 + lw \cdot (4 \cdot llw + \frac{1}{2} \cdot llw^2)$
- wykonania zmiany wartości zmiennych decyzyjnych
złożoność obliczeniowa tej operacji to $l^2 + 3 \cdot l$

W sumie wykonanie jednego kroku algorytmu wymaga:

$$5 \cdot ll + 2 \cdot ll^2 + lw \cdot (4 \cdot llw + \frac{1}{2} \cdot llw^2) \text{ operacji}$$

Ponieważ średnia liczba linii tworzących wiązkę jest ograniczona (nawet w największych układach komunikacyjnych w skład jednej wiązki wchodzi tylko kilka linii) i zwykle jest rzędu od 3 do 5, więc złożoność obliczeniowa algorytmu zależy głównie do liczby linii i liczby wiązek. Ostatecznie możemy stwierdzić, że złożoność obliczeniowa jednego kroku algorytmu wynosi około:

$$5 \cdot ll + 2 \cdot ll^2 + 20 \cdot lw \text{ operacji}$$

Stwierdzamy zatem, że przyjęty algorytm ma złożoność wielomianową.

5.3. Wymagania sprzętowe i czas obliczeń

Zastosowany w pracy algorytm zaimplementowano w środowisku Delphi 3.0, pracującym w systemie Windows 2000. Opracowana aplikacja, o nazwie „Synchronizacja3” została uruchomiona na komputerze wyposażonym w procesor Celeron 600MHz. Na tym komputerze osiągnięto szybkość symulacji od 16 do 40 iteracji (minimów lokalnych) na sekundę. Dzięki temu możliwe było znajdowanie zadowalających rozwiązań problemu (o wartości większej o 3-4% od ograniczenia dolnego) już w czasie kilkadziesiąt minut. Dalsze prowadzenie symulacji nie przynosiło znaczącej poprawy jakości rozwiązania (po dodatkowym dniu obliczeń uzyskiwano poprawę o maksymalnie 1%).

Zakończenie

W pracy opisano problem synchronizacji interwałowej w miejskiej komunikacji publicznej. Zaproponowano kryterium oceny układu komunikacyjnego pod kątem synchronizacji, które umożliwia wyrażenie tej oceny w sposób ilościowy. Dzięki temu możliwe było stworzenie funkcji celu w modelu zagadnienia.

Obliczono sumaryczny czas oczekiwania pasażerów na jeden pojazd na jednym przystanku przy założeniu, że pasażerowie napływają na przystanki zgodnie ze stochastycznym procesem Poissona. Przy tym założeniu sumaryczny czas oczekiwania jest zmienną losową. Obliczono probabilistyczne charakterystyki tej zmiennej losowej. Wartość oczekiwaną sumarycznego czasu oczekiwania pasażerów na ciąg pojazdów w całym układzie komunikacyjnym przyjęto za miarę równomierności kursowania. Miara ta stała się podstawą do stworzenia funkcji celu w modelu zagadnienia.

Stworzono matematyczny model zagadnienia, w którym za zmienne decyzyjne przyjęto momenty odjazdów pojazdów z pętli startowych, a za funkcję celu przyjęto zaproponowaną miarę równomierności. Wskazano, że zależnie od przyjętych ograniczeń, możliwe jest rozpatrywanie różnych wariantów tego modelu.

Przedstawiono dwa wybrane warianty modelu:

- model ogólny, w którym jest pełna dowolność dobierania momentów odjazdów
- model ze stałym taktem kursowania

Stwierdzono też możliwość budowy innych modeli, dostosowanych do specyfiki konkretnego układu komunikacyjnego.

Dla modelu ogólnego przedstawiono symulację rozwiązania optymalnego dla kilku zestawów parametrów.

Dla modelu ze stałym i jednakowym taktem kursowania przedstawiono wyniki symulacji dla sieci tramwajowej Wrocławia w porze szczytowej.

Skrótowno opisano zastosowany algorytm poszukiwania minimów funkcji celu. Oszacowano złożoność obliczeniową algorytmu i przedstawiono czas obliczeń dla przebadanego przykładu rzeczywistego (przykład 4.4.2).

Wyniki pracy mogą znaleźć zastosowanie w praktyce. Jednak, z uwagi na specyfikę każdego układu komunikacyjnego, należy każdorazowo dostosowywać teoretyczne modele przedstawione w pracy do potrzeb konkretnego przypadku. Możliwa jest także integracja przedstawionego modelu z modelami uwzględniającymi inne aspekty organizacji ruchu

miejskiej komunikacji publicznej, jak na przykład synchronizacja przesiadkowa, problemy przydziału załóg do kursów i inne problemy wynikające ze specyfiki danego układu komunikacyjnego.

Aneks

Poniżej znajdują się wydruki programów, które posłużyły do przeprowadzenia symulacji rozwiązania optymalnego w modelach przedstawionych w rozdziale 4.3 i 4.4. Programy te napisano w środowisku Delphi 3.0. Uruchamialne wersje obu programów można znaleźć na załączonej płycie CD a także na stronie autora: www.ioz.pwr.wroc.pl, sekcja „Pracownicy/Rafał Sroka”.

W celu uzyskania opisanych wyżej programów proszę o kontakt z autorem:

dr Rafał Sroka

Instytut Organizacji i Zarządzania, ul. Smoluchowskiego 25, 50-372 Wrocław

rafal.sroka@pwr.wroc.pl

BIBLIOGRAFIA

1. Adamski A. (1993), „Transfer Optimization in Public Transport” Materiały z konferencji „Computer-Aided Transit Scheduling” Lisbona, Portugalia, s. 23-38.
2. Bazaraa M.S., Shetty C.M. (1982), „Nonlinear Programming – Theory and Algorithms”, Moskwa, Mir.
3. Billingsley P. (1987), „Prawdopodobieństwo i miara”, Warszawa, PWN.
4. Ceder A., Golany B. (1991), “Maximal Synchronization in Planning Bus Timetables”. Research Report 91-169, Transportation Research Institute, Technion – Israel Institute of Technology.
5. Daduna J.R., Voß S. (1993), „Practical Experiences in Schedule Synchronization” Materiały z konferencji „Computer-Aided Transit Scheduling” Lisbona, Portugalia, s. 39-55.
6. Daley D.J., Vere-Jones D. (1988), “An introduction to the theory of point processes”, New York, Springer-Verlag.
7. Dźwigoń W. (2002), „Koszty i korzyści poprawy parametrów obsługi w komunikacji miejskiej na przykładzie częstotliwości”, artykuł w pracy zbiorowej „Badania procesów przewozowych wspomagające zarządzanie transportem zbiorowym w miastach”, Kraków.
8. Hołubiec J., Rekuć L. (1996), „Computer Aided Control of Public Transport System Design. Materiały pokonferencyjne trzeciego międzynarodowego sympozjum „Methods and Models in Automation and Robotics” Polska. Wydawnictwo Uczelniane Politechniki Szczecińskiej, Międzyzdroje.
9. Kingman J. F. C. (2002), „Procesy Poissona”, Warszawa, PWN.
10. Klemm W.D., Stemme W. 1987, „Schedule Synchronization for Public Transit Networks” Materiały z konferencji „Fourth International Workshop on Computer-Aided Transit Scheduling” Hamburg, Niemcy, s. 327-335.
11. Kwan R.S.K. (1987), „Co-ordination of Joint Headways” Materiały z konferencji „Fourth International Workshop on Computer-Aided Transit Scheduling” Hamburg, Niemcy, s. 304-314.
12. Rekuć L. (1995), „Komputerowe wspomaganie podejmowania decyzji w organizacji ruchu miejskiej komunikacji publicznej” (rozprawa doktorska) Politechnika Wroclawska, Wrocław.

13. Rolski T., Schmidli H., Schmidt V., Teugels J. (1999), "Stochastic process for insurance and finances", Chichester, John Wiley&Sons.
14. Rudnicki A. (1999), „Jakość komunikacji miejskiej” Kraków.
15. Sroka R. (1998), „Komputerowe rozwiązanie problemu synchronizacji w miejskiej komunikacji publicznej”, materiały z konferencji „Metody i zastosowania badań operacyjnych”, Wydawnictwo Uczelniane Akademii Ekonomicznej w Katowicach.
16. Sroka R. (2002), „Problem synchronizacji interwałowej w miejskiej komunikacji publicznej”, materiały z konferencji „Współczesne metody zarządzania”, Łowicz.
17. Voss S. (1992), "Network Design Formulation in Schedule Synchronization", In: "Computer-Aided Transit Scheduling", Berlin-Heidelberg, s. 137-152.
18. Woronko A. (1997), „Komunikacja zbiorowa we Wrocławiu w aspekcie synchronizacji linii autobusowych”, rękopis, Wrocław.
19. Woronko A. (1999), "Informatyczny system wspomaganie zarządzania komunikacją miejską w Zarządzie Dróg i Komunikacji we Wrocławiu", rękopis, Wrocław.