

Magdalena Sipa

Akademia Ekonomiczna we Wrocławiu

**WYBRANE METODY WYCENY PROGRAMU
EMERYTALNEGO O ZDEFINIOWANYM ŚWIADCZENIU
– MODELOWANIE WYSOKOŚCI SKŁADKI
I AMORTYZACJA DEFICYTU**

1. Wstęp

Wycena programu emerytalnego polega na obliczeniu wysokości zgromadzonego kapitału oraz rezerwy matematycznej na dany moment. Na podstawie uzyskanych wyników ustala się wysokość składki obowiązującą do momentu kolejnej wyceny. W niniejszym artykule wycena PE została przeprowadzona w przypadku stałej składki przez cały okres ubezpieczenia oraz w przypadku korekty wysokości składki przy każdej wycenie PE. Rozpatrzono trzy sposoby amortyzacji deficytu lub nadwyżki finansowej. Autorka pokazała, w jaki sposób wyznaczać poziom składek tak, aby w momencie zakończenia działalności PE dla danej kohorty uzyskać równowagę aktuarialną. W każdym momencie stażu ubezpieczeniowego porównano wysokość zgromadzonego kapitału z rezerwą matematyczną, potrzebną na pokrycie świadczeń. Zaproponowano trzy metody amortyzacji deficytu (nadwyżki finansowej): minimalizację nadwyżki finansowej, minimalizację wartości bezwzględnej deficytu finansowego oraz amortyzację rentą życiową okresową.

2. Wycena PE w przypadku stałej składki

Ogromny wpływ na wyniki symulacji ma prawdopodobieństwo śmierci obliczone z wykorzystaniem danych o śmiertelności mężczyzn w Polsce w 2004 r. [3]. Prawdopodobieństwo przejścia na emeryturę, rentę oraz wycofania się z uczestnictwa w PE obliczono ze wzoru [5]:

$$p^{jk}(x) = \begin{cases} \frac{l^{jk}(x)}{l^j(x)}, & \text{dla } k \neq j \\ \frac{l^j(x+1)}{l^j(x)}, & \text{dla } k = j \end{cases} \quad (1)$$

na podstawie danych z prac [1; 3].

W symulacjach przyjęto następujące założenia:

- stopa inflacji wynosi 0% (można przyjąć, że obliczane wielkości są aktualne obecnie),
- stopa procentowa wynosi 4% i jest równa stopie dyskontowej,
- stała liczba uczestników w PE to 10 000 osób (liczebność nowej kohorty jest równa liczbie osób odchodzących z PE w minionym roku),
- wiek początkowy uczestników PE to 30 lat (uzależnione od dostępnych danych),
- początkowe wynagrodzenie wynosi 1000 zł miesięcznie (12 000 zł rocznie),
- funkcja indeksująca płace została ustalona na poziomie 1,03 rocznie¹,
- funkcja indeksująca świadczenie jest stała i wynosi 1,02 rocznie,
- obliczenia wysokości wypłaty jednorazowej dokonano za pomocą renty życiowej $\ddot{a}_{x:k}$, gdzie:

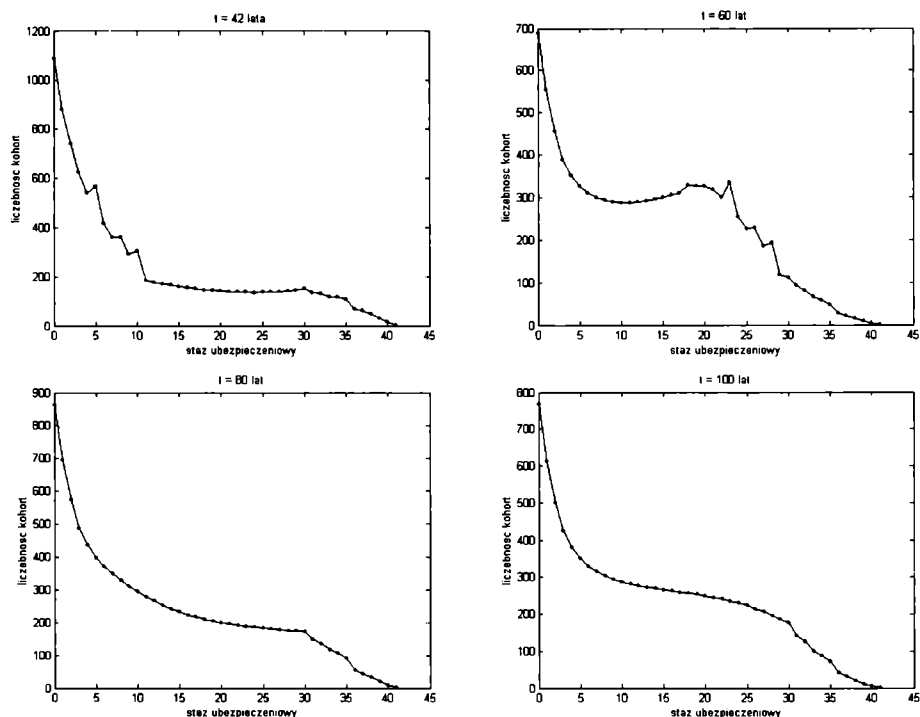
$$k = \min(101 - x, 35). \quad (2)$$

Renta ta jest liczona przy prawdopodobieństwie dożycia przez uczestnika w wieku x wieku $x + k$. Ustalono granicę na poziomie 35 lat, ponieważ w przeciwnym wypadku, np. w przypadku osoby odchodzącej z PE w wieku 40 lat, otrzymywanoby bardzo wysokie świadczenie i pobieranie tego świadczenia byłoby bardziej korzystne niż aktywność zawodowa.

Wycenę aktuarialną przeprowadza się, wykorzystując m.in. znajomość liczby aktywnych uczestników w dowolnej chwili t (przyjęto czas dyskretny). Liczebności poszczególnych kohort w czasie wyznacza się na podstawie wzorów zawartych w [5]. Rysunek 1 ilustruje obliczenia w przypadku czterech przyczyn odejścia z PE (rezygnacja z uczestnictwa, śmierć, inwalidztwo i osiągnięcie wieku emerytalnego).

Liczba aktywnych uczestników w każdej chwili t jest stosunkowo stabilna. Jest to argument przemawiający za wypracowaniem odpowiedniego modelu dla programu emerytalnego ze zdefiniowanym świadczeniem. Oznacza także, że jeśli udałoby się ustalić charakteryzującą się małą zmiennością wysokość składki, przy której PE byłby zbilansowany i stabilny, to byłby to wynik wykorzystywany później przez lata.

¹ Przewidywany średnioroczny wzrost płac w sferze budżetowej na rok 2005 wynosi 3% [7]. Do obliczania wysokości przyszłej emerytury stosuje się również realny wzrost płac w wysokości 3% rocznie [6]. Natomiast w USA wzrost płac przyjmuje się na poziomie 6% rocznie [1].



Rys. 1. Liczebność kohort w zależności od wieku programu i stażu ubezpieczeniowego
Źródło: obliczenia własne.

Należy także ustalić wysokość świadczenia, jakie w chwili t dostanie ubezpieczony, odchodząc z PE z określonej przyczyny. Początkowa wysokość świadczenia w zależności od stażu pracy została obliczona w [4]. Wysokość świadczenia w postaci wypłaty jednorazowej można uzależnić od przyczyny odejścia z PE. Przyjęto następujące założenia:

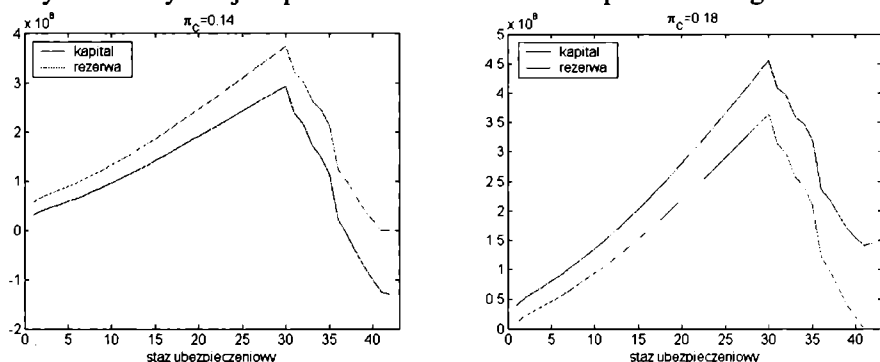
- $B^r(x, t) =$ świadczenie emerytalne w wieku x w chwili t ,
- $B^d(x, t) = 75 \% B^r(x, t)$,
- $B^w(x, t) = 60 \% B^r(x, t)$,
- $B^i(x, t) = 75 \% B^r(x, t)$.

Wartości te są zgodne z danymi ZUS [8], gdyż przeciętna renta inwalidzka wynosi 75% emerytury, a renta rodzinna zaś – od 85-95%. Jednak, aby śmierć nie była dla rodziny ubezpieczonego bardziej „atrakcyjna” niż jego przejście na rentę, ustalono renty rodzinna i inwalidzką na jednakowym poziomie. W przypadku rezygnacji ubezpieczonego z uczestnictwa w PE wypłata powinna przybrać postać transferu kapitału do nowego PE.

W przypadku analizowania wybranej kohorty w celu zachowania równowagi aktuarialnej należy porównywać wysokość zgromadzonego kapitału w chwili t z

wysokością rezerwy matematycznej na ten moment dla określonej grupy ubezpieczonych. Rezerwę matematyczną liczone metodą prospektywną jako różnicę wartości aktuarialnej przyszłych świadczeń i wartości aktuarialnej przyszłych składek, podobnie do [2].

Rysunek 2 ilustruje uzyskane wyniki dla wysokości zgromadzonego kapitału i rezerwy matematycznej na przełomie 40 lat stażu ubezpieczeniowego.



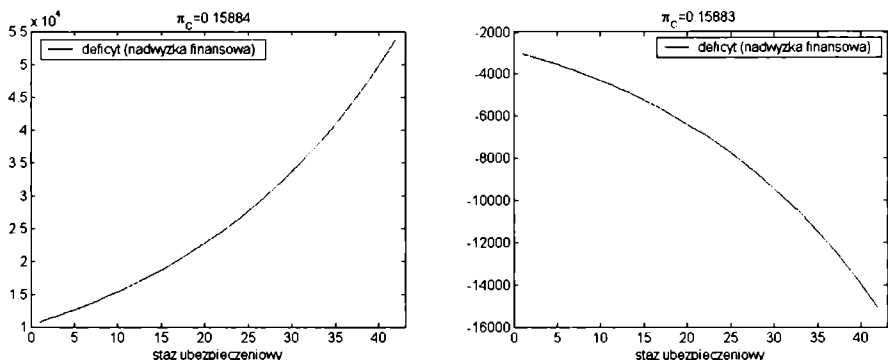
Rys. 2. Wartość zgromadzonego kapitału i wysokość rezerwy dla wybranej kohorty w przypadku składki wysokości 14% i 18% wynagrodzenia

Źródło: obliczenia własne.

W przypadku analizowania kohorty stała składka w wysokości 18% wynagrodzenia powoduje nadwyżkę kapitałową przez cały okres ubezpieczenia – kapitał przewyższa wysokość koniecznej rezerwy. Sugerowałoby to obniżenie wysokości składek. Z kolei dla składki w wysokości 14% wynagrodzenia rezerwa przewyższa kapitał i powoduje deficyt finansowy przez cały okres ubezpieczenia². Należy także zwrócić uwagę, że na rys. 2 wartości kapitału i rezerwy są rzędu 10^8 , dlatego deficyt lub nadwyżka wydają się niewielkie. W rzeczywistości są one rzędu 10^7 , zatem amortyzacja ich jest konieczna.

Analizowany program w przypadku stałej składki jest bardzo wrażliwy na jej wysokość. Ustalając składkę procentową z dokładnością do trzech miejsc po przecinku, stwierdzono, że przy składce 15,883% kapitał pokrywa się z rezerwą. Podobnie jest przy składce 15,884%. Jednak w pierwszym przypadku składka generuje deficyt finansowy, podczas gdy składka o 0,001% wyższa – nadwyżkę finansową (rys. 3).

² Zakłada się ponadto, że założenia przyjęte do wyceny programu, np. wartości prawdopodobieństwa przejścia, realizowane są w przyszłości.



Rys. 3. Wysokość deficytu (nadwyżki finansowej) dla wybranej kohorty przy składce 15,884% i 15,883%
Źródło: obliczenia własne.

Obliczając wartości netto, program emerytalny o zdefiniowanym świadczeniu można odpowiednio zbilansować. Problem pojawia się w przypadku wartości brutto, gdyż wówczas należy określić np. takie wielkości, jak narzut na składkę lub koszty administracyjne.

3. Metody amortyzacji deficytu – przykład

Minimalizacja nadwyżki finansowej

W celu amortyzacji deficytu (nadwyżki finansowej) zaproponowano trzy sposoby postępowania w przypadku zaistnienia różnic między wartością kapitału a wysokością rezerwy. Zostały one opisane w kolejnych podpunktach. Jako pierwszą zastosowano minimalizację nadwyżki finansowej. Jest to działanie o tyle bezpieczne, że ubezpieczyciel nie podejmuje ryzyka uzyskania deficytu. Ponieważ przy ustalonej stałej wysokości składki program emerytalny jest stabilny (deficyt lub nadwyżka finansowa „pogłębiają się”), postanowiono wprowadzić sześć zakłóceń w wysokości składki, spowodowanych np. błędnymi obliczeniami (błąd oprogramowania, błąd aktuarusza itp.). Ustalono następujące zdarzenia:

- $t = 3$ – składka o 10 zł/osobę za niska,
- $t = 7$ – składka o 20 zł/osobę za niska,
- $t = 11$ – składka o 20 zł/osobę za wysoka,
- $t = 19$ – składka o 1 zł/osobę za wysoka,
- $t = 27$ – składka o 2 zł/osobę za niska,
- $t = 33$ – składka o 20 zł/osobę za wysoka.

Poniżej zamieszczono przykładowe obliczenia.

$t = 0$.

Przyjmując składkę równą $\pi_c^1(0) = 15,885\%$, uzyskano $K^1(0) = 19\,062\,000,00$ zł i rezerwę matematyczną $V^1(0) = 19\,049\,552,39$ zł. Zatem wystąpiła nadwyżka w

wysokości $U^1(0) = 12\,447,61$ zł. Sugerowałoby to obniżenie wysokości składki na $\pi_c^2(0) = 15,884\%$. Jednak wówczas wystąpiłby deficyt finansowy $U^2(0) = -833,06$ zł, a ponieważ metoda przyjmuje najniższą nadwyżkę, więc pozostaje składka z pierwszego wariantu³.

$t = 3$ – pierwsze zakłócenie.

Z obliczeń wynika, że powinna zostać przyjęta składka w wysokości $\pi_c^1(3) = 15,884\%$, powodującą nadwyżkę równą $U^1(3) = 412,76$ zł. Jednak składka została ustalona na poziomie $15,808\%$. Wobec tego deficyt w chwili $t = 3$ wyniósł $U(3) = -888\,442,01$ zł. Deficyt ten powoduje w roku $t = 4$ podwyższenie składki do wysokości $\pi_c^1(4) = 15,890\%$ i wystąpienie nadwyżki $U^1(4) = 111\,99,03$ zł, która w kolejnych latach powinna zostać zamortyzowana.

Minimalizacja wartości bezwzględnej deficytu lub nadwyżki finansowej

W przypadku minimalizacji nadwyżki finansowej w wielu momentach wyceny uzyskuje się wysoką nadwyżkę, podczas gdy obniżenie składki o $0,001\%$ powodowałoby niewielki deficyt, teoretycznie łatwiejszy do zamortyzowania. Dlatego drugą proponowaną metodą jest minimalizacja wartości bezwzględnej deficytu (nadwyżki finansowej). Jeśli w roku t deficyt będzie niższy od nadwyżki co do wartości bezwzględnej, to ustalana jest wysokość składki powodująca deficyt. Poniżej zamieszczono przykładowe obliczenia.

$t = 0$.

Przyjmując składkę równą $\pi_c^1(0) = 15,885\%$, uzyskano nadwyżkę w wysokości $U^1(0) = 12\,447,61$ zł. Z kolei przy składce $\pi_c^2(0) = 15,884\%$ otrzymano deficyt finansowy $U^2(0) = -833,06$ zł. W celu ustalenia wysokości składki zakład ubezpieczeń wybiera mniejszą wartość do zamortyzowania, czyli w tym przypadku $U^2(0)$. Podejmuje w ten sposób ryzyko posiadania niewystarczających środków finansowych na pokrycie należnych świadczeń.

$t = 3$ – pierwsze zakłócenie.

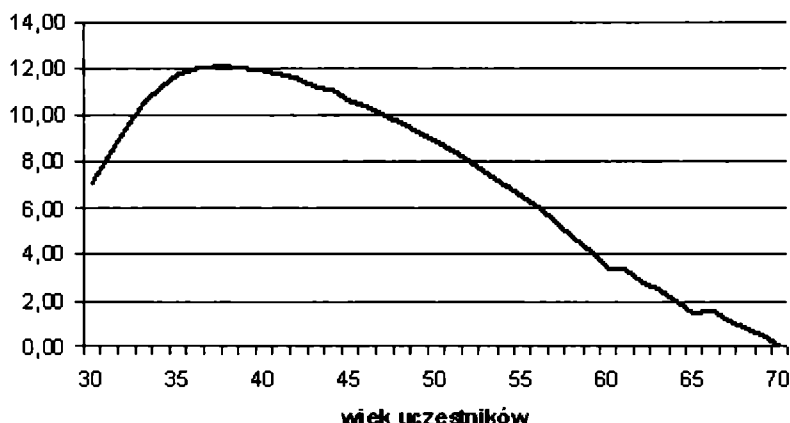
Z obliczeń wynika, że powinna zostać przyjęta składka w wysokości $\pi_c^2(3) = 15,884\%$, powodująca deficyt $U^2(3) = -937,08$ zł. Jednak w wyniku błędu składka wynosiła $15,808\%$, wobec czego deficyt finansowy wzrósł do $U(3) = -886\,791,84$ zł. Następnie deficyt ten został pomniejszony przez podwyższenie składki od $t = 4$ do $\pi_c^2(4) = 15,889\%$ wynagrodzenia w chwili t .

Amortyzacja za pomocą renty życiowej okresowej

Trzecią metodą wyznaczania wysokości składki emerytalnej jest amortyzacja nadwyżki (ewentualnie deficytu) za pomocą renty życiowej $(x, -x)$ -letniej płatnej

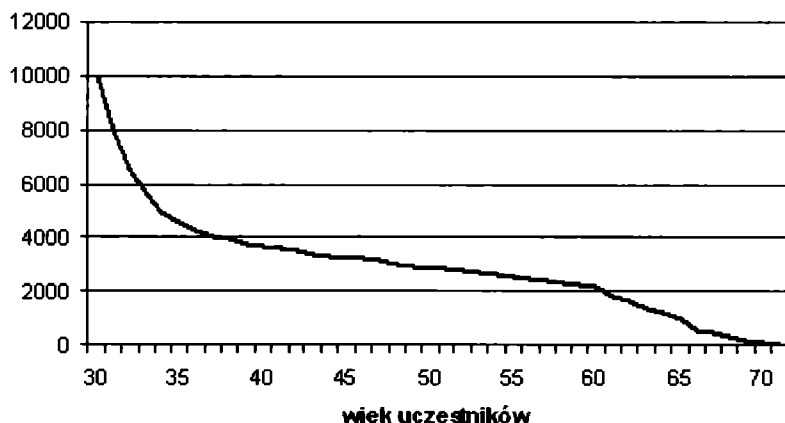
³ Ustalona wysokość składki w chwili t , w obliczeniu rezerwy obowiązuje do końca stażu ubezpieczeniowego.

z dołu. W obliczeniach za maksymalny wiek emerytalny przyjęto 70 lat. Wartości renty $a_{\overline{x:x_0-x}|}$ zilustrowano na rys. 4.



Rys. 4. Renta życiowa $(70 - x)$ -letniej dla uczestnika w wieku x
Źródło: obliczenia własne.

Ze względu na duże, ale malejące wartości prawdopodobieństwa odejścia z PE w początkowych latach uczestnictwa wartość tej renty rośnie, następnie – ze względu na skracający się okres jej płatności – maleje. Proponowany sposób amortyzacji zależy także od liczby aktywnych uczestników w kohorcie w każdym kolejnym roku jej stażu ubezpieczeniowego. Liczebność kohorty została zilustrowana na rys. 5.



Rys. 5. Liczba aktywnych uczestników w kohorcie w zależności od wieku
Źródło: obliczenia własne

Zauważa się gwałtowny spadek liczby aktywnych uczestników w początkowych latach funkcjonowania PE. Później również obserwuje się spadek, ale jest on już umiarkowany.

Metoda amortyzacji deficytu (nadwyżki finansowej) za pomocą renty życiowej zostanie zobrazowana przykładowymi obliczeniami.

$t = 0$.

Ustalono składkę taką jak w metodzie minimalizacji nadwyżki finansowej, czyli $\pi_c(0) = 15,885\%$ wynagrodzenia $S(0) = 12\,000$ zł w pierwszym roku, co daje składkę w wysokości 1 906,20 zł. Powstała nadwyżka finansowa w wysokości $U(0) = 12\,447,61$ zł. Nadwyżkę tę należy amortyzować w następujący sposób:

$$\Delta\pi_c(t+1) = \frac{U(t)}{l(t) a_{\overline{x:t}, -s|}}. \quad (3)$$

Zatem w pierwszym roku mamy:

$$\Delta\pi_c(1) = \frac{U(0)}{l(0) a_{\overline{30:40}|}} = \frac{12\,447,61}{7,05 \cdot 10\,000} = 0,18 \text{ zł}.$$

Oznacza to, że składki zaplanowane na następne lata zostaną pomniejszone o wartość 0,18 zł. Wobec tego składka na początku drugiego roku wyniesie:

$$\pi(1) = 15,885\% \cdot 12\,000 \cdot 1,03 - 0,18 = 1\,963,21 \text{ zł},$$

gdzie $1,03'$ – przyjęta funkcja skalująca wynagrodzenie (we wzorze powyżej $t = 1$).

$t = 3$ – pierwsze zakłócenie.

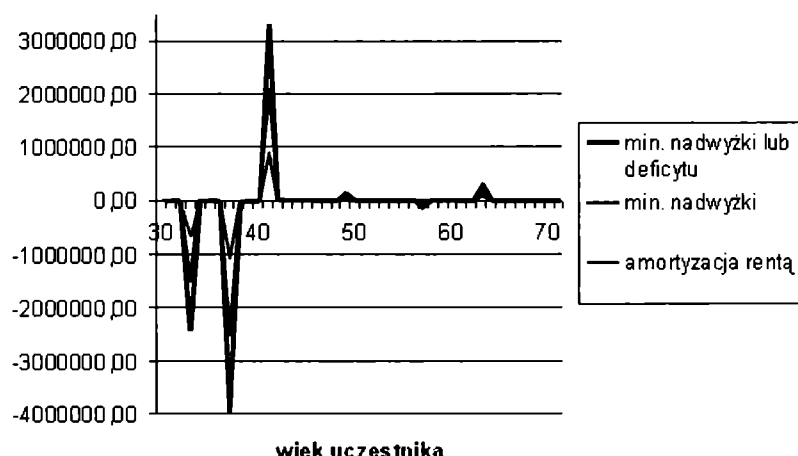
Składka na początku czwartego roku miała wynosić 2 082,79 zł. Jednak na skutek błędu została wpłacona składka w wysokości 2 072,79 zł za każdego uczestnika PE. Spowodowało to wystąpienie deficytu w wysokości -639 117,02 zł. W związku z tym na początku piątego roku zostanie wpłacona składka w wysokości:

$$\pi_c(4) = 15,885\% \cdot 12\,000 \cdot 1,03^4 - 0,18 - \frac{-639\,117,02}{10,53 \cdot 5\,541} = 2\,156,23 \text{ zł},$$

gdzie: $\Delta\pi_c(2) = \Delta\pi_c(3) = 0$. Każda składka ustalona na rok $t \geq 4$ zostanie powiększona o kwotę 10,95 zł.

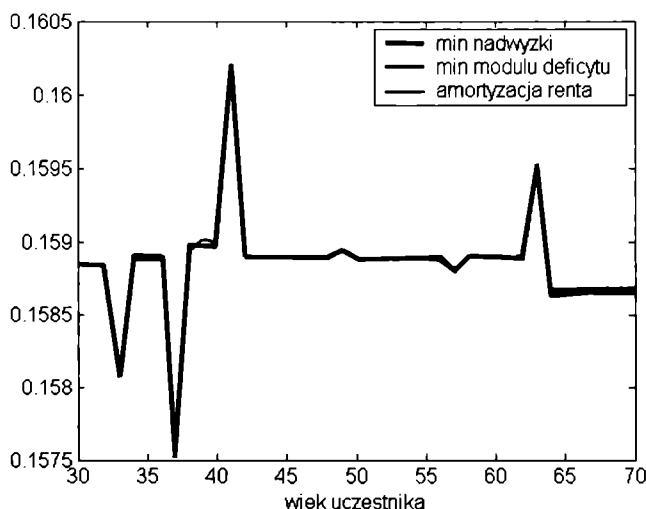
4. Metody amortyzacji deficytu – porównanie

W celu porównania opisanych metod zebrano uzyskane wyniki dotyczące wysokości deficytu i nadwyżki finansowej w każdym momencie stażu ubezpieczeniowego i zamieszczono je na rys. 6.



Rys. 6. Wysokość deficytu (nadwyżki finansowej) – porównanie metod
Źródło: obliczenia własne.

W przypadku zaproponowanych metod deficyt (nadwyżka finansowa) kształtuje się podobnie w czasie trwania stażu ubezpieczeniowego. Jednak metoda amortyzacji za pomocą renty życiowej generuje najniższe wartości różnicy między kapitałem i rezerwą matematyczną, szczególnie w przypadku $t = 3, 7, 11$ (najbardziej znaczących zakłóceń). Oznacza to, że tą metodą otrzymuje się najlepsze wyniki. Z kolei metoda minimum wartości bezwzględnej deficytu wykazuje największe skoki w punktach zakłóceń.



Rys. 7. Wysokość składek – porównanie metod
Źródło: obliczenia własne.

W razie zmienności procentowej składki metody dają zbliżone wyniki. W przypadku wystąpienia nadwyżki finansowej większy skok składki odnotowano w metodzie amortyzacji rentą, natomiast większe spadki w przypadku: deficytu finansowego miały dwie pierwsze metody.

5. Zakończenie

Na podstawie przeanalizowanych metod wyceny programu emerytalnego ze zdefiniowanym świadczeniem stwierdzono, że w obliczając wartość netto (bez uwzględnienia narzutów na składkę, kosztów administracyjnych itp.), można używać równowagę aktuarialną w programie emerytalnym o zdefiniowanym świadczeniu. Wobec tego możliwe jest zgromadzenie kapitału wystarczającego na pokrycie wypłaty nabytych świadczeń. Należy jednak podkreślić, że już w przypadku ustalania składki netto konieczne jest wykorzystanie jak najdokładniejszej bazy informacji demograficznych, gospodarczych i społecznych dla danego kraju. Wskazana jest również natychmiastowa reakcja w razie wystąpienia deficytu lub nadwyżki finansowej.

Literatura

- [1] Bowers N.L., Gerber H.U., Hickman J.C., Jones D.A., Nesbit C.J., *Actuarial Mathematics*, Illinois, The Society of Actuaries, Itasca 1986.
- [2] Daykin C.D., Pentikäinen T., Personen M., *Practical Risk Theory for Actuaries*, Chapman and Hall, London 1996.
- [3] Rocznik Statystyczny 2005, GUS, Warszawa 2005.
- [4] Sipa M., *Początkowa wysokość świadczenia dla uczestników programu emerytalnego*, [w:] *Inwestycje finansowe i ubezpieczenia – tendencje światowe a polski rynek*, W. Ronka-Chmielowiec, K. Jajuga (red.), Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej nr 1088, tom 2, s. 218-226, AE, Wrocław 2005.
- [5] Sipa M., *Wyznaczanie prawdopodobieństwa zmiany stanu w programie emerytalnym o zdefiniowanym świadczeniu*, Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej, Ekonometria 16 (w druku).
- [6] www.epolisa.republika.pl/archiwum/gazeta032002.htm.
- [7] www.wp.mil.pl/auths/293/files/41ee26dab4b93_budzet_budzet_2005.ppt.
- [8] www.zus.pl.

SELECTED METHODS OF VALUATING DEFINED BENEFIT PENSION PLANS – MODELING THE CONTRIBUTION AND DEFICIT AMORTIZATION

Summary

The valuation of pension plans depends on the calculation of the aggregated capital amount and the mathematical provision at a given moment. On the basis of the obtained results, the contribution amount is established and this amount is applied until the next valuation. The pension plan valuation was conducted on the basis of the constant contribution amount for the whole participation period as well as of the contribution amount correction at every valuation moment. Three methods of deficit amortization and financial surplus were discussed. The author presented the way in which the contribution amount is to be established in order to attain the actuarial balance for the pension plan participation at the final moment. The amount of the aggregated capital was compared with the mathematical provision necessary to cover the benefits at every moment of insurance security. Three methods of deficit amortization (financial surplus) were suggested.