

Beata Stolorz

Uniwersytet Szczeciński

PRAWDOPODOBIENSTWO WARUNKOWE REALIZACJI EUROPEJSKIEJ OPCJI KUPNA

1. Wstęp

Celem pracy jest próba odpowiedzi na pytanie, jak duże jest ryzyko inwestycji pieniędzy w opcje na akcje. Miara tego ryzyka będzie funkcja określająca prawdopodobieństwo zdarzenia, że opcja kupna zostanie zrealizowana.

Głównym problemem przy tego typu zagadnieniach jest prawidłowe oszacowanie przyszłej ceny instrumentu bazowego. Śledząc wysokość stóp zwrotu z instrumentu bazowego można prognozować ich rozkład, lecz nigdy nie będziemy mieć pewności, że ich zachowanie nie zmieni się w czasie, szczególnie, gdy termin wygaśnięcia opcji jest odległy. W związku z tym interesujące jest to, czy można znaleźć jakieś elementy wspólne dla dowolnego rozkładu cen instrumentu bazowego, które sprawią, że będzie można określić prawdopodobieństwo realizacji opcji w każdym przypadku.

2. Prawdopodobieństwo realizacji opcji dla dowolnego rozkładu cen

Założmy, że kupujemy europejską opcję kupna akcji, której cena rynkowa w dniu zakupu opcji wynosi S . Niech S_t oznacza cenę akcji w chwili t , a S_w – cenę wykonania opcji. Dokonajmy analizy sposobu kształtowania się prawdopodobieństwa zdarzenia A , że opcja zostanie zrealizowana w chwili t tzn. że: $S_t \geq S_w$. Wówczas $P(A) = P(S_t \geq S_w)$.

Ponieważ cena akcji zmienia się w czasie t , to mamy:

$$P(t) = P(S_t \geq S_w). \quad (1)$$

Cena akcji S_t jest zmienną losową. Załóżmy, że jest to ciągła zmienna losowa. Możemy więc zapisać:

$$P(t) = 1 - P(S_t < S_w), \quad (2)$$

co po przekształceniach daje:

$$P(t) = 1 - F(S_w), \quad (3)$$

gdzie F jest dystrybuantą rozkładu zmiennej losowej S_t .

Dokonajmy teraz pewnego ograniczenia. Załóżmy, że stopa zwrotu z akcji jest ograniczona z góry wartością r_1 , a z dołu wartością r_2 , gdzie r_1 i r_2 są rocznymi stopami zwrotu liczonymi przy zastosowaniu kapitalizacji ciągłej [2, s. 41-42]. Niech ceny rynkowe instrumentu bazowego mają rozkład o dystrybuancie $y = F(x)$. Rozważmy przypadek, w którym $r_2 \leq 0 \leq r_1$. Niech t_k oznacza termin wygaśnięcia opcji. Przy przyjętych założeniach cena akcji dla czasu $t \in \langle 0, t_k \rangle$ może przyjmować wartości z obszaru ograniczonego krzywymi (rys. 1):

$$y = Se^{r_1 t} \quad (4)$$

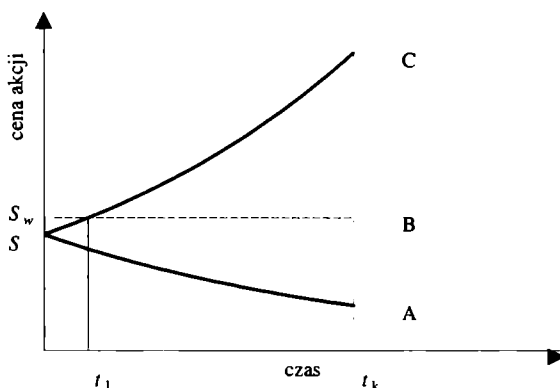
oraz

$$y = Se^{r_2 t}, \quad (5)$$

gdzie: t – czas upływający od momentu zakupu opcji wyrażony w latach,

r_1 – maksymalna roczna stopa zwrotu,

r_2 – minimalna roczna stopa zwrotu.



Rys. 1. Obszar możliwych cen rynkowych akcji o cenie rynkowej S w dniu zakupu opcji i o czasie wygaśnięcia opcji równym t_k dla $r_2 \leq 0 \leq r_1$ i $S \leq S_w < Se^{r_1 t_k}$.

Źródło: opracowanie własne.

Przy założeniu, że czas wykonania opcji jest nieskończenie długi, czyli t_k dąży do nieskończoności, oraz w zależności od wzajemnego położenia krzywych (4) i (5) względem prostej danej równaniem $y = S_w$, należy rozważyć dwa przypadki.

1. Jeżeli $S \leq S_w < Se^{r_1 t_k}$, to prawdopodobieństwo zdarzenia B , że opcja zostanie zrealizowana w czasie t_k , możemy obliczyć następująco:

$$P(B) = \frac{CB}{CA}. \quad (6)$$

Jeżeli t_k dąży do nieskończoności, to prawdopodobieństwo zdarzenia, że opcja zostanie zrealizowana, można przedstawić jako funkcję $\hat{P}$ zmiennej t w sposób następujący:

$$\hat{P}(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \in \langle 0, t_1 \rangle \\ \frac{F(Se^{r_1 t}) - F(S_w)}{F(Se^{r_1 t}) - F(Se^{r_2 t})} & \text{dla } t \in (t_1, \infty) \end{cases}, \quad (7)$$

gdzie:

$$t_1 = \frac{\ln \frac{S_w}{S}}{r_1}. \quad (8)$$

2. Jeżeli $Se^{r_2 t_k} < S_w < S$, to prosta o równaniu $y = S_w$ przecina jedynie krzywą o równaniu $y = Se^{r_2 t}$. Funkcja $\hat{P}$ przyjmuje wówczas postać:

$$\hat{P}(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t \in \langle 0, t_1 \rangle \\ \frac{F(Se^{r_1 t}) - F(S_w)}{F(Se^{r_1 t}) - F(Se^{r_2 t})} & \text{dla } t \in (t_1, \infty) \end{cases}, \quad (9)$$

gdzie:

$$t_1 = \frac{\ln \frac{S_w}{S}}{r_2}. \quad (10)$$

Gdy wybieramy stopy procentowe niczym nie ograniczone, czyli r_1 dąży do $+\infty$ oraz r_2 dąży do $-\infty$, to t_1 dąży do 0. Wówczas funkcja prawdopodobieństwa realizacji opcji kupna przyjmuje postać:

$$\hat{P}(t) = 1 - F(S_w). \quad (11)$$

W tym przypadku postać funkcji realizacji opcji pokrywa się ze wzorem (3).

3. Prawdopodobieństwo warunkowe realizacji opcji

Ograniczenie, jakim jest założenie, że $r \in \langle r_2, r_1 \rangle$, jest warunkiem nałożonym na stopę zwrotu. Można sformułować następujące twierdzenie:

Twierdzenie

Niech A oznacza zdarzenie, że opcja zostanie zrealizowana w chwili t , a B niech będzie zdarzeniem, że cena instrumentu bazowego $S_t \in (Se^{r_2 t}, Se^{r_1 t})$, przy czym $r_2 \leq 0 \leq r_1$. Wówczas prawdziwa jest zależność:

$$P(A \setminus B) = \hat{P}(t). \quad (12)$$

Dowód:

$$\begin{aligned} P(A \setminus B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(S_t \geq S_w \wedge Se^{r_2 t} < S_t < Se^{r_1 t})}{P(Se^{r_2 t} < S_t < Se^{r_1 t})} = \\ &= \begin{cases} 1 & \text{dla } S_w \leq Se^{r_2 t} \\ 0 & \text{dla } S_w \geq Se^{r_1 t} \\ \frac{P(S_w \leq S_t < Se^{r_1 t})}{P(Se^{r_2 t} < S_t < Se^{r_1 t})} & \text{dla } Se^{r_1 t} < S_w < Se^{r_2 t} \end{cases}. \end{aligned}$$

Należy rozważyć trzy przypadki:

1. Jeżeli $S_w > S$, to nierówność $S_w \leq Se^{r_2 t}$ jest fałszywa dla $t \geq 0$ i $r_2 \leq 0$.

Mamy zatem:

$$P(A \setminus B) = \begin{cases} 0 & \text{dla } S_w \geq Se^{r_2 t} \\ \frac{P(S_w \leq S_t < Se^{r_1 t})}{P(Se^{r_2 t} < S_t < Se^{r_1 t})} & \text{dla } Se^{r_1 t} < S_w < Se^{r_2 t} \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \in \langle 0, t_1 \rangle \\ \frac{F(Se^{r_1 t}) - F(S_w)}{F(Se^{r_1 t}) - F(Se^{r_2 t})} & \text{dla } t > t_1 \end{cases}, \quad (13)$$

gdzie $t_1 = \frac{\ln \frac{S_w}{S}}{r_1}$.

2. Jeżeli $S_w < S$, to nierówność $S_w \geq Se^{r_1 t}$ jest fałszywa dla $t \geq 0$ i $r_1 \geq 0$.

Mamy zatem:

$$P(A \setminus B) = \begin{cases} 1 & \text{dla } S_w \leq Se^{r_2 t} \\ \frac{P(S_w \leq S_t < Se^{r_1 t})}{P(Se^{r_2 t} < S_t < Se^{r_1 t})} & \text{dla } Se^{r_1 t} < S_w < Se^{r_2 t} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{dla } t \in \langle 0, t_1 \rangle \\ \frac{F(Se^{r_1 t}) - F(S_w)}{F(Se^{r_1 t}) - F(Se^{r_2 t})} & \text{dla } t > t_1 \end{cases}, \quad (14)$$

gdzie $t_1 = \frac{\ln \frac{S_w}{S}}{r_2}$.

3. Jeżeli $S_w = S$, to:

$$P(A \setminus B) = \frac{P(S_w \leq S_t < Se^{r_1 t})}{P(Se^{r_2 t} < S_t < Se^{r_1 t})} \text{ dla } t \geq 0, \text{ gdyż w tym przypadku } t_1 = 0. \text{ Jest}$$

to szczególny przypadek wzorów (13) i (14).

Porównując wzory (13) i (14) ze wzorami (7) i (9), otrzymujemy:

$$P(A \setminus B) = \hat{P}(t).$$

W przypadku granicznym, kiedy czas realizacji opcji rośnie nieograniczenie, otrzymujemy:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{P}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{F(Se^{r_1 t}) - F(S_w)}{F(Se^{r_1 t}) - F(Se^{r_2 t})} = 1 - F(S_w),$$

gdyż z własności dystrybuanty mamy:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F(Se^{r_1 t}) = 1 \text{ dla } r_1 > 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F(Se^{r_2 t}) = F(0) = P(S_t < 0) = 0 \text{ dla } r_2 < 0.$$

Wynika z tego, że aby zwiększyć prawdopodobieństwo realizacji opcji, należy zwiększyć wartość wyrażenia $1 - F(S_w)$. Będzie tak, jeżeli wyrażenie $F(S_w)$ będzie przyjmowało wartości bliskie zeru, czyli S_w powinno być jak najmniejsze (bliskie zeru).

Podobnie, jeżeli S_w będziemy wybierać bliskie S , to t_1 będzie dążyło do zera, a co za tym – idzie funkcja prawdopodobieństwa realizacji opcji w sytuacji zarówno (13), jak i (14) będzie dążyła do funkcji P^* określonej następująco:

$$P^*(t) = \frac{F(Se^{r_1 t}) - F(S)}{F(Se^{r_1 t}) - F(Se^{r_2 t})}. \quad (15)$$

Funkcja P^* określona wzorem (15) jest granicą ciągu funkcyjnego $(\hat{P}(t))$. Ma ona następujące własności:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P^*(t) = 1 - F(S)$$

oraz

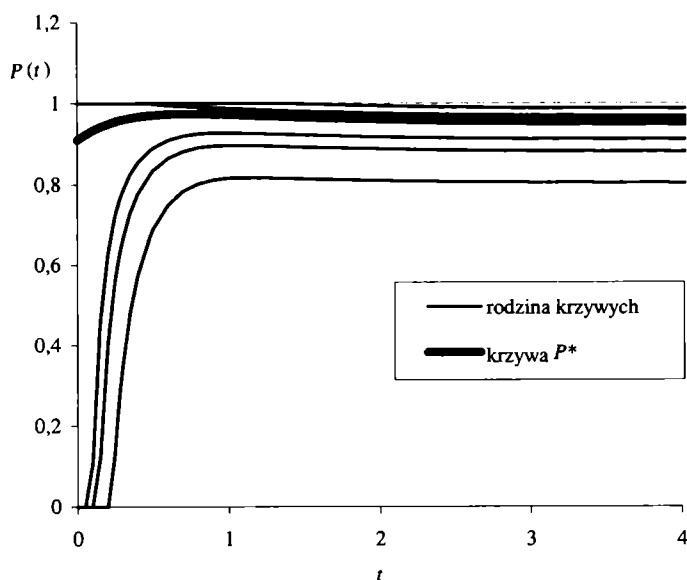
$$\lim_{t \rightarrow 0} P^*(t) = \frac{r_1}{r_1 - r_2}.$$

4. Prawdopodobieństwo realizacji opcji na przykładzie wybranych rozkładów cen

Jeżeli przyjmiemy, że ceny akcji podlegają błędzeniu losowemu i mają rozkład logarytmiczno-normalny, to logarytmiczna stopa zwrotu ma rozkład normalny [1, s. 290-291]. Rodzinę tych funkcji (wzory (7) i (9)) w tym przypadku [3, s. 264-266] przedstawia rys. 2. Funkcja P^* określona wzorem (15) przybiera wówczas postać:

$$P^*(t) = \frac{\Phi\left(\frac{\ln Se^{\eta t} - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\ln S - \mu}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{\ln Se^{\eta t} - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\ln Se^{\eta_2 t} - \mu}{\sigma}\right)}, \quad (16)$$

gdzie: Φ jest dystrybucją standardowego rozkładu normalnego.

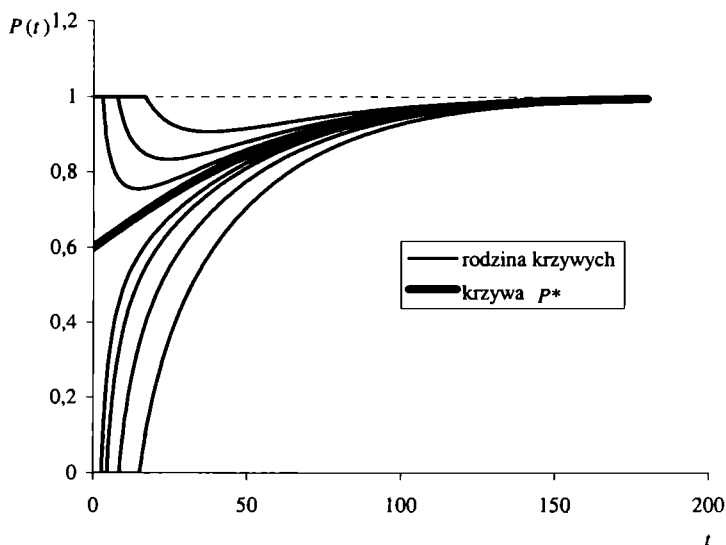


Rys. 2. Rodzina krzywych ($\hat{P}(t)$) i krzywa P^* dla rozkładu logarytmiczno-normalnego

Źródło: opracowanie własne.

Rodzine funkcji ($\hat{P}(t)$) (wzory (7) i (9)) przy założeniu, że rozkład cen instrumentu bazowego dla $r_2 \leq 0 \leq r_1$ jest jednostajny [4, s. 31-34], przedstawiono na rys. 3. Funkcja P^* przybiera wówczas postać:

$$P^*(t) = \frac{e^{\eta t} - 1}{e^{\eta t} - e^{\eta_2 t}}. \quad (17)$$



Rys. 3. Rodzina krzywych ($\hat{P}(t)$) i krzywa P^* dla rozkładu jednostajnego

Źródło: opracowanie własne.

Funkcja P^* jest zaznaczona na rys. 3 grubą linią.

5. Podsumowanie

Analizując funkcję prawdopodobieństwa realizacji opcji dla dowolnego rozkładu cen, gdy $r_2 \leq 0 \leq r_1$, można wyciągnąć następujące wnioski:

1. Jeżeli $S \leq S_w < Se^{r_1 t}$, to prawdopodobieństwo realizacji opcji wraz z wydłużeniem terminu realizacji opcji dąży do wartości $1 - F(S_w)$. Dla rozkładu logarytmiczno-normalnego funkcja prawdopodobieństwa realizacji opcji osiąga maksimum. W przypadku rozkładu jednostajnego funkcja ta jest rosnąca.

2. Jeżeli $Se^{r_2 t} < S_w \leq S$, to prawdopodobieństwo realizacji opcji również dąży do wartości $1 - F(S_w)$ wraz z wydłużeniem terminu realizacji opcji. Przy czym dla rozkładu logarytmiczno-normalnego funkcja prawdopodobieństwa realizacji opcji jest malejąca, a dla rozkładu jednostajnego osiąga minimum.

3. Funkcja graniczna P^* w chwili $t=0$ przyjmuje wartość $\frac{r_1}{r_1 - r_2}$, a wraz z wydłużeniem terminu realizacji opcji dąży do wartości $1 - F(S)$.

Literatura

- [1] Hull J., *Kontrakty terminowe i opcje. Wprowadzenie*, WIG-PRESS, Warszawa 1999.
- [2] Ross S. M., *An Elementary Introduction to Mathematical Finance*, Cambridge University Press, 2003.
- [3] Stolorz B., *Funkcja prawdopodobieństwa realizacji opcji dla logarytmiczno-normalnego rozkładu cen*, Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu nr 1088, AE, Wrocław 2005.
- [4] Stolorz B., Tarczyński W., *Ocena prawdopodobieństwa realizacji europejskiej opcji kupna akcji*, „Rynek Terminowy” 2002 nr 16 (2/02).

CONDITIONAL PROBABILITY OF EXERCISE OF EUROPEAN CALL OPTION

Summary

The purpose of the paper is to find out how high is a risk of investing the money in the stock options. The measurement of such a risk is function, that determines probability of exercising of call option. This function is the conditional probability determined for any price distribution of the underlying instrument. Family of these functions has a limit. Some properties of this limit are independent from this distribution. In the paper it's been presented examples of families of functions for uniform and log-normal distribution.