

Anna Szymańska

Uniwersytet Łódzki

ZASTOSOWANIE METODY ZEROWEJ UŻYTECZNOŚCI DO SZACOWANIA SKŁADEK W UBEZPIECZENIACH KOMUNIKACYJNYCH OC

1. Wstęp

W ubezpieczeniach komunikacyjnych OC klasyfikacja ubezpieczonych do klas taryfowych odbywa się na podstawie czynników *a priori* (obserwowalnych czynników ryzyka, takich jak np. rodzaj i rok produkcji samochodu, pojemność silnika, wiek i płeć kierowcy) oraz czynników *a posteriori* (historia szkodowości kierowcy). Dlatego składki w ubezpieczeniach komunikacyjnych OC są wyznaczone w dwóch etapach. Pierwszy to obliczenie składki podstawowej na podstawie czynników *a priori*, drugi etap to taryfikacja *a posteriori* (por. [3; 4]).

W pracy skoncentrowano się na drugim etapie nazywanym systemem *bonus-malus*.

Systemem *bonus-malus* będziemy nazywać metody wyznaczania indywidualnych składek, uwzględniające liczbę szkód spowodowanych przez kierowcę w przeszłości. W każdym systemie *bonus-malus* muszą być ustalone klasa startowa, do której trafiają ubezpieczeni bez historii szkodowości, wektor stawek składki podstawowej oraz zasady przejść między klasami.

Roczna składka netto jest wyznaczana jako iloczyn składki podstawowej obowiązującej w klasie taryfowej (taryfikacja *a priori*) oraz współczynnika, będącego szacowaną procentową stawką składki.

W pracy nie uwzględnia się dodatkowych zwyżek i zniżek, charakterystycznych dla poszczególnych ubezpieczycieli.

W ubezpieczeniach majątkowych składkę brutto oblicza się jako sumę trzech składników: składki netto, dodatku bezpieczeństwa i kosztów działalności ubezpie-

czeniuowej. Pomijamy trzeci z tych składników. Zatem składką brutto będziemy nazywać składkę netto powiększoną o dodatek bezpieczeństwa.

W pracy omówiono metodę zerowej użyteczności szacowania składek.

W ubezpieczeniach komunikacyjnych zakłada się, że liczba szkód K w jednorodnym portfelu jest zmienną losową o rozkładzie Poissona postaci:

$$P(K = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (1)$$

gdzie λ nazywamy parametrem intensywności szkód.

Jeżeli portfel jest niejednorodny, to parametr intensywności szkód Λ jest zmienną losową o rozkładzie gamma z parametrami α i β , o funkcji gęstości postaci:

$$f(\lambda) = \frac{\beta^\alpha e^{-\beta\lambda} \lambda^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \quad \alpha > 0, \beta > 0, \lambda > 0, \quad (2)$$

przy czym $\bar{\lambda} = E\Lambda = \frac{\alpha}{\beta}$ i $D^2\Lambda = \frac{\alpha}{\beta^2}$. Wówczas liczba szkód w portfelu ma rozkład ujemny dwumianowy postaci:

$$p_k = P(K = k) = \binom{k + \alpha - 1}{k} \left(\frac{\beta}{1 + \beta} \right)^\alpha \left(\frac{1}{1 + \beta} \right)^k, \quad k = 0, 1, \dots \quad (3)$$

Estymatory parametrów α i β , wyznaczone metodą momentów przybierają postać:

$$\beta = \frac{\bar{k}}{S_k^2 - \bar{k}} \quad i \quad \alpha = \frac{\bar{k}^2}{S_k^2 - \bar{k}}. \quad (4)$$

W ubezpieczeniowym systemie *bonus-malus* wyznacza się składkę *a priori*, a następnie uwzględnia się indywidualny parametr ryzyka nazywany stawką składki (por. [4]). W pracy do wyznaczania indywidualnych parametrów ryzyka zastosowano metodę wykorzystującą estymatory bayesowskie.

2. Metoda zerowej użyteczności

Niech K_j będzie zmienną losową oznaczającą liczbę szkód w roku j dla danej polisy; $(k_1, k_2, \dots, k_t)$ – wektorem obserwacji liczby szkód przez t lat dla danej polisy; $F(\lambda)$ będzie dystrybucją zmiennej losowej Λ ; $\lambda_{t+1}(k_1, k_2, \dots, k_t)$ będzie nieznanym parametrem szkodowości w roku $t+1$ dla polisy opisanej wektorem obserwacji $(k_1, k_2, \dots, k_t)$.

Nieznany parametr $\lambda_{t+1}(k_1, k_2, \dots, k_t)$ można oszacować za pomocą estymatora bayesowskiego na podstawie wektora obserwacji $(k_1, k_2, \dots, k_t)$. Estymator bayesowski parametru Λ jest warunkową wartością oczekiwaną rozkładu *a posteriori* i przybiera postać:

$$\lambda_{t+1}(k_1, \dots, k_t) = E_\lambda[\Lambda | k_1, \dots, k_t] = \int_0^\infty \lambda dF(\lambda | k_1, \dots, k_t), \quad (5)$$

gdzie $E_\lambda[\Lambda | k_1, \dots, k_t]$ jest warunkową wartością oczekiwaną rozkładu *a posteriori* parametru Λ , $F(\lambda | k_1, \dots, k_t)$ jest dystrybuantą warunkową zmiennej losowej Λ przy zaobserwowanych wartościach $(k_1, k_2, \dots, k_t)$.

Założmy, że rozkład liczby szkód w portfelu jest ujemny dwumianowy. Parametr intensywności szkód Λ ma rozkład *a priori* gamma z parametrami α i β .

Zgodnie z twierdzeniem Bayesa dystrybuanta warunkowa zmiennej Λ wynosi

$$\begin{aligned} dF(\lambda | k_1, \dots, k_t) &= \frac{P(k_1, \dots, k_t | \lambda) dF(\lambda)}{\int_0^\infty P(k_1, \dots, k_t | \lambda) dF(\lambda)} = \frac{\prod_{j=1}^t (k_j!) \frac{\lambda^k e^{-\lambda} \beta^\alpha e^{-\beta \lambda} \lambda^{\alpha-1} d\lambda}{\Gamma(\alpha)}}{\int_0^\infty \frac{\beta^\alpha}{\prod_{j=1}^t (k_j!) \Gamma(\alpha)} \lambda^{k+\alpha-1} e^{-(t+\beta)\lambda} d\lambda} = \\ &= \frac{\lambda^{k+\alpha-1} e^{-(t+\beta)\lambda} d\lambda}{\int_0^\infty \lambda^{k+\alpha-1} e^{-(t+\beta)\lambda} d\lambda} = \frac{\hat{\beta}^{\hat{\alpha}} \lambda^{\hat{\alpha}-1} e^{-\hat{\beta}\lambda}}{\Gamma(\hat{\alpha})} d\lambda. \end{aligned} \quad (6)$$

Zatem rozkład *a posteriori* parametru Λ jest rozkładem gamma z parametrami $\hat{\alpha} = \alpha + k$ oraz $\hat{\beta} = \beta + t$.

Estymator bayesowski parametru Λ przybiera postać

$$\lambda_{t+1}(k_1, \dots, k_t) = \frac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}} = \frac{\alpha + k}{\beta + t}. \quad (7)$$

Parametry α i β wyznaczamy ze wzoru (4).

W ubezpieczeniach komunikacyjnych OC indywidualna składka netto w okresie $t+1$ wynosi:

$$P_{t+1}(k_1, \dots, k_t) = (EX) \cdot (E\Lambda) \cdot b_{t+1}(k_1, \dots, k_t), \quad (8)$$

gdzie $P_{t+1}(k_1, \dots, k_t)$ – indywidualna składka netto w okresie $t+1$, (EX) – wartość oczekiwana pojedynczej szkody, $(E\Lambda)$ – oczekiwana liczba szkód, $b_{t+1}(k_1, \dots, k_t)$ – stawka szacowanej składki.

Przyjmijmy, że $(EX) = 1$ oraz $(E\Lambda) = \frac{\alpha}{\beta}$. Wówczas równanie (8) przybiera postać:

$$P_{t+1}(k_1, \dots, k_t) = \frac{\alpha}{\beta} \cdot b_{t+1}(k_1, \dots, k_t). \quad (9)$$

Dlatego kierowca, który po t latach zgłosił k szkód, powinien płacić stawkę szacowanej składki równą

$$b_{t+1}(k_1, \dots, k_t) = \frac{P_{t+1}(k_1, \dots, k_t)}{\frac{\alpha}{\beta}} \cdot 100\%. \quad (10)$$

Do szacowania indywidualnej składki netto zastosujemy zasadę zerowej użyteczności.

Zasada zerowej użyteczności opiera się na założeniu, że oczekiwana użyteczność zarobku ubezpieczyciela, gdy ryzyko X zostanie ubezpieczone za cenę P , równa się użyteczności początkowej rezerwy w ubezpieczyciela, czyli

$$u(w - P) = Eu(w - X). \quad (11)$$

Niech funkcja $u(w)$ będzie wykładniczą funkcją użyteczności postaci

$$u(w) = \frac{1}{c} (1 - e^{-cw}), \quad (12)$$

gdzie $c > 0$ jest parametrem określającym awersję do ryzyka towarzystwa ubezpieczeniowego. Jeżeli funkcja użyteczności przybiera postać określoną wzorem (12), to składka netto P wynosi

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} (1 - e^{-c(w-P)}) &= E \left(\frac{1}{c} (1 - e^{-c(w-X)}) \right), \\ \frac{1}{c} (1 - e^{-c(w-P)}) &= \frac{1}{c} E (1 - e^{-c(w-X)}), \\ -e^{-c(w-P)} &= E (-e^{-c(w-X)}), \\ -e^{-cw} \cdot (-e^{cP}) &= -e^{-cw} E (-e^{cX}), \\ e^{cP} &= E e^{cX}, \\ e^{cP} &= M_X(c), \\ P &= \frac{1}{c} \ln M_X(c), \end{aligned} \quad (13)$$

gdzie $M_X(c)$ jest funkcją tworzącą momenty zmiennej losowej X . Dla wykładniczej funkcji użyteczności funkcja tworząca momenty nie zależy od początkowych rezerw w ubezpieczyciela.

W przypadku rozkładu ujemnego dwumianowego funkcja tworząca momenty zmiennej losowej X wynosi

$$M_X(c) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{ck} \binom{\alpha + k - 1}{k} \left(\frac{\beta}{1 + \beta} \right)^{\alpha} \left(\frac{1}{1 + \beta} \right)^k = \left(1 + \frac{1 - e^c}{\beta} \right)^{-\alpha} \quad (14)$$

Uwzględniając wzory (13) i (14), indywidualną składkę netto można wyznaczyć ze wzoru

$$P = \frac{\alpha}{c} \left| \ln \left(1 - \frac{e^c - 1}{\beta} \right) \right| \quad \text{dla} \quad \beta > e^c - 1. \quad (15)$$

Uwzględniając, że $\hat{\alpha} = \alpha + k$ oraz $\hat{\beta} = \beta + t$, szacowana według zasady użyteczności indywidualna składka netto wynosi

$$P_{t+1}(k_1, \dots, k_t) = \frac{\alpha + k}{c} \left| \ln \left(1 - \frac{e^c - 1}{t + \beta} \right) \right|. \quad (16)$$

Ponieważ celem badania jest oszacowanie, ile procent składki podstawowej powinien płacić kierowca, który po t latach zgłosił k szkód, na podstawie równań (10) i (16) stawka szacowanej składki w systemie *bonus-malus* wynosi

$$b_{t+1}(k_1, \dots, k_t) = \frac{\beta}{\alpha} \frac{\alpha + k}{c} \left| \ln \left(1 - \frac{e^c - 1}{t + \beta} \right) \right| \cdot 100\%. \quad (17)$$

3. Zastosowania

Przedstawioną metodę zastosowano do wyznaczania szacowanej stawki składki na podstawie danych dotyczących historii szkodowości pochodzących z łódzkiego towarzystwa ubezpieczeniowego.

Badanie przeprowadzono na podstawie danych z łódzkiego towarzystwa ubezpieczeniowego dla ubezpieczeń komunikacyjnych OC za rok 2000. Z całego portfela liczącego 31 734 polis wylosowano w sposób niezależny 15 867. Wylosowane polisy pogrupowano według wieku kierowcy i oznaczono I – kierowcy w wieku nie wyższym niż 25 lat, II – kierowcy w wieku powyżej 25 lat. Dane przedstawia tab. 1.

Tabela 1. Struktura liczby szkód według grup portfela ubezpieczeń komunikacyjnych

Liczba szkód \ Grupa	I	II
0	2907	10221
1	592	1843
2	66	210
3	5	18
4	0	5
Suma	3570	12292

Źródło: badania własne.

Na podstawie danych z tab. 1 oszacowano parametr rozkładu Poissona przyjmując, że

$$\hat{\lambda} = \bar{k}, \quad (18)$$

gdzie $\bar{k}$ jest wartością średniej z próby. Parametry rozkładu ujemnego dwumianowego oszacowano, stosując wzór (4).

Tabela 2. Parametry rozkładu liczby roszczeń

Grupa portfela	Średnia liczba szkód	Wariancja liczby szkód	Parametry rozkładu gamma	
			α	β
I	0,207	0,209	16,95	81,88
II	0,19	0,2	3,61	19

Źródło: obliczenia własne.

W celu oceny jednorodności grup portfela z tab. 1 za pomocą testu chi-kwadrat (por. [1, 2]) zbadano zgodność rozkładu liczby roszczeń z rozkładem Poissona oraz z rozkładem ujemnym dwumianowym. Wyniki przedstawia tab. 3.

Tabela 3. Wartości statystyki χ^2 ($\chi_a^2 = 5,99$)

Grupa portfela	Rozkład Poissona	Rozkład ujemny dwumianowy
I	0,5049	11,34
II	27,349	0,07

Źródło: obliczenia własne.

Można zatem przyjąć, że rozkład liczby szkód w grupie I jest jednorodny, natomiast w grupie II – niejednorodny.

Tabela 4. Zwyżki i zniżki stosowane w badanym towarzystwie ubezpieczeniowym

Nr roku t	Liczba szkód k				
	0	1	2	3	4 i więcej
0	100				
1	90	150	200	200	200
2	80	125	150	200	200
3	70	100	125	200	200
4	60	90	125	200	200
5	50	80	100	150	150
6	50	60	80	100	100
7	40	50	70	90	90

Źródło: obliczenia własne.

Dla grupy II portfela ubezpieczeń z tab. 1 oszacowano stawki szacowanej składki w systemie *bonus-malus* za pomocą wzoru (17). Wyniki zawierają tab. 5 i 6.

Tabela 5. Stawka szacowanej składki według zasady zerowej użyteczności $c = 0,4$ (E) oraz zniżki i zwwyżki stosowane przez towarzystwo ubezpieczeniowe (TU)

$t \backslash k$	0		1		2		3 i więcej	
	E	TU	E	TU	E	TU	E	TU
0	100	100						
1	95	90	121	150	148	200	174	200
2	90	80	115	125	141	150	166	200
3	86	70	110	100	134	125	158	200
4	82	60	105	90	128	125	151	200
5	79	50	101	80	123	100	145	150
6	76	50	97	60	118	80	139	100
7	73	40	93	50	113	70	133	90

Źródło: obliczenia własne.

Tabela 6. Stawka szacowanej składki według zasady zerowej użyteczności $c = 1,65$ (E) oraz zniżki i zwwyżki stosowane przez towarzystwo ubezpieczeniowe (TU)

$t \backslash k$	0		1		2		3 i więcej	
	E	TU	E	TU	E	TU	E	TU
0	100	100						
1	94	90	121	150	147	200	173	200
2	89	80	114	125	139	150	164	200
3	85	70	108	100	132	125	155	200
4	81	60	103	90	125	125	148	200
5	77	50	98	80	120	100	141	150
6	74	50	94	60	114	80	135	100
7	71	40	90	50	110	70	129	90

Źródło: obliczenia własne.

Tabela 7. Suma bezwzględnych wartości błędów w zależności od parametru c

$c = 0,4$	$c = 1,65$
807	777

Źródło: obliczenia własne.

Tabela 8. Różnica między zwyczajami i zniżkami stosowanymi w badanym towarzystwie ubezpieczeniowym (TU) i stawkami szacowanych składek (E)

$t \backslash k$	0		1		2		3 i więcej	
	$c = 0,4$	$c = 1,65$	$c = 0,4$	$c = 1,65$	$c = 0,4$	$c = 1,65$	$c = 0,4$	$c = 1,65$
0	0	0						
1	-5	-4	29	29	52	53	26	27
2	-10	-9	10	11	9	11	34	36
3	-16	-15	-10	8	-9	-7	42	45
4	-22	-21	-15	-13	-3	0	49	52
5	-29	-27	-21	-18	-23	-20	5	9
6	-26	-24	-17	-34	-38	-34	-39	-35
7	-43	-31	-43	-40	-43	-40	-43	-39

Źródło: obliczenia własne.

4. Wnioski

Szacowane stawki składki podstawowej różnią się znacznie w niektórych klasach od współczynników danego towarzystwa ubezpieczeniowego. To oznacza, że system nie ocenia kierowców w sposób prawidłowy, w stosunku do stawek szacowanych teoretycznie. Znak dodatni różnic w tab. 8 oznacza podwyższoną składkę ubezpieczeniową, natomiast znak ujemny – zaniżoną składkę ubezpieczeniową. Zdecydowanie najmniejsze różnice występują przy szacowaniu składki metodą zerowej użyteczności z parametrem $c = 2,45$, czyli ok. 250-procentowym współczynnikiem bezpieczeństwa stosowanym przez ubezpieczyciela. Wynika stąd, że badane towarzystwo ubezpieczeniowe zakłada z góry bardzo duży współczynnik bezpieczeństwa.

Metody wykorzystujące estymatory bayesowskie do konstrukcji systemów *bonus-malus* są krytykowane, ponieważ w miarę wzrostu k i t coraz bardziej przeszacowują składki. Niemniej jednak stawki szacowanych składek zależą od parametrów rozkładu liczby szkód w portfelu. Parametry te zmieniają się w czasie, a współczynniki *bonus-malus* stosowane w towarzystwach ubezpieczeniowych nie ulegają zmianie przez wiele lat.

Literatura

- [1] Domański Cz., Pruska K., *Nieklasyczne metody statystyczne*, PWE, Warszawa 2000.
- [2] Domański Cz., (red.), *Metody statystyczne*, Wydawnictwo UŁ, Łódź 2001.
- [3] Hossack I.B., Pollard J.H., Zehnwirth B., *Introductory Statistics with Applications in General Insurance*, Cambridge 1999.
- [4] Lemaire J., *Bonus-Malus Systems in Automobile Insurance*, Kluwer Nijhoff, Boston 1995.

APPLICATION OF ZERO-UTILITY METHOD TO ESTIMATE PREMIUMS IN CIVIL RESPONSIBILITY CAR INSURANCE

Summary

The basis of insurance activity is the correct estimation of insurance premiums. The premiums should be estimated in such way that the insuring company would not incur losses and the insured would not pay too much or too little.

The overall premium is the net premium enlarged by the security loading and insurance activity costs. In the paper the zero-utility method is presented. It was also investigated if estimating premiums by means of the method selected allows to build optimal *bonus-malus* system. The investigation was carried out on real data from a Łódź insurance company.