

Aneta Włodarczyk

Politechnika Częstochowska

PROGNOZOWANIE ZMIENNOŚCI KURSÓW WALUTOWYCH NA PODSTAWIE PRZEŁĄCZNIKOWYCH MODELI MARKOWA

1. Wstęp

W procesie zarządzania ryzykiem walutowym do szacowania zmienności kursów walutowych coraz częściej wykorzystywane są zaawansowane narzędzia w postaci modeli stochastycznych. Zaletą tych modeli jest to, iż odwzorowują prawidłowości występujące w empirycznych szeregach czasowych, a mianowicie: efekt „grubych ogonów” i leptokurtyczność rozkładów stóp zwrotu, skośność rozkładów, grupowanie wariancji, słabą autokorelację stóp zwrotu i silną autokorelację kwadratów stóp zwrotu (por. [13, s. 115-124; 5, s. 5-19]. Wybrany model powinien jak najlepiej opisywać wymienione wyżej własności, gdyż prawidłowa ocena przyszłej zmienności umożliwia zarówno osiągnięcie wyższych dochodów z inwestycji w daną walutę, jak i skuteczniejsze zabezpieczenie się podmiotów gospodarczych przed ryzykiem kursowym¹. Przegląd metod prognozowania zmienności instrumentów finansowych zawierają m.in. prace [10; 12, s. 478-539].

Celem niniejszej pracy jest sporządzenie prognoz zmienności kursów wymiany złotego na podstawie przełącznikowych modeli Markowa oraz ocena zdolności prognostycznych skonstruowanych modeli.

2. Heteroskedastyczny przełącznikowy model Markowa

Modele przełącznikowe należą do klasy narzędzi odpowiednich do opisu dynamiki procesów, których charakterystyki podlegają skokowym zmianom w czasie,

¹ Prowadzone dotychczas badania nad zmiennością kursów wymiany złotego w głównej mierze dotyczyły wykorzystania modeli klasy GARCH. Porównanie różnych technik prognozowania zmienności dla kursu USD/PLN, opartych również na modelach GARCH, zawiera m.in. praca [11, s. 493-494].

w związku z czym przy ich modelowaniu zachodzi potrzeba uwzględnienia odpowiednich skokowych zmian parametrów. W modelach przełącznikowych przyjmuje się, że zarówno mechanizm sterujący zmianami w obrębie poszczególnych reżimów, jak i mechanizm zmiany reżimu jest losowy. W licznych zastosowaniach modeli przełącznikowych procesem sterującym zmianami reżimu jest jednorodny łańcuch Markowa. Ta kategoria modeli przełącznikowych jest w literaturze określana mianem przełącznikowych modeli Markowa (*Markov switching model*) (por. [6; 14]).

Rozważania dotyczą heteroskedastycznej specyfikacji modelu, tzn. poziom zmienności procesu podlega losowym przełączeniom do różnych reżimów (stanów) (por. [4, s. 689-713]):

$$r_t = \mu_{s_t} + \varepsilon_t, \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_{s_t}^2), \quad (1)$$

gdzie:

- nieobserwowalna zmienna s_t , będąca jednorodnym łańcuchem Markowa o N stanach i macierzy prawdopodobieństw przejścia $\mathbf{P} = [p_{ij}]_{N \times N}$, określa reżim, w jakim znajduje się zmienna r_t w chwili t ;
- zbiór Φ_t zawiera wszystkie dostępne informacje dotyczące obserwowalnego procesu r_t do chwili t włącznie.

Innymi słowy, proces stochastyczny generujący badane zjawisko jest mieszaniną kilku rozkładów normalnych o różnych średnich i wariancjach:

$$r_t | \Phi_t \sim N(\mu_{s_t}, \sigma_{s_t}^2). \quad (2)$$

Macierz prawdopodobieństw przejścia dla łańcucha Markowa ma następujące własności macierzy stochastycznej [6]:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} & \cdots & p_{N1} \\ p_{12} & p_{22} & \cdots & p_{N2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{1N} & p_{2N} & \cdots & p_{NN} \end{bmatrix} \quad p_{ij} \geq 0 \text{ oraz } \sum_{j=1}^N p_{ij} = 1, \text{ dla } i, j \in \{1, 2, \dots, N\}. \quad (3)$$

Należy zauważyć, iż prawdopodobieństwo przejścia (stanowiące elementy macierzy $\mathbf{P}$) ze stanu i w chwili $t-1$ do stanu j w chwili t spełnia własność Markowa [9, s. 4]:

$$p_{ij} = P(s_t = j | s_{t-1} = i) = P(s_t = j | s_{t-1} = i, s_{t-2} = i_{t-2}, \dots, s_0 = i_0) \quad (4)$$

dla dowolnego t oraz dowolnego ciągu $i_0, \dots, i_{t-2}$ należącego do przestrzeni stanów łańcucha Markowa.

Macierz $\mathbf{P}$ wykorzystywana jest do określenia zależności pomiędzy rozkładami bezwarunkowymi nieobserwowalnej zmiennej reżimowej s_t w kolejnych okresach (por. [4, s. 689-713]):

$$P(s_{t+1} = j | \Phi_t; \theta) = \sum_{i=1}^N p_{ij} \cdot P(s_t = i | \Phi_{t-1}; \theta) \text{ dla } j = 1, 2, \dots, N. \quad (5)$$

Następnie definiuje się warunkową funkcję gęstości dla zmiennej obserwowalnej r_t :

$$f(r_t | s_t = j, \Phi_{t-1}; \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_j} \exp\left\{-\frac{(r_t - \mu_j)^2}{2\sigma_j^2}\right\} \text{ dla } j = 1, 2, \dots, N, \quad (6)$$

gdzie wektor $\theta = (\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, p_{11}, p_{22})$ zawiera parametry modelu przełącznikowego postaci (1), które należy oszacować².

Dodatkowym produktem otrzymywanym w procesie estymacji są prawdopodobieństwa filtrowane (*filter probability*) oraz prawdopodobieństwa wygładzone (*smoothed probability*) (por. [9, s. 230, 249]:

$$P(s_t = j | r_t, \Phi_{t-1}; \theta) = \frac{f(r_t | s_t = j, \Phi_{t-1}; \theta) \cdot P(s_t = j | \Phi_{t-1}; \theta)}{\sum_{i=1}^N f(r_t | s_t = i, \Phi_{t-1}; \theta) \cdot P(s_t = i | \Phi_{t-1}; \theta)}, \quad (7)$$

na podstawie których można wskazać z określonym przez powyższy szacunek prawdopodobieństwem, iż obserwacja w chwili t została wygenerowana w nieobserwowalnym reżimie j ³.

3. Metoda prognozowania zmienności dla przełącznikowych modeli Markowa

Prognozowanie zmienności (*volatility forecast*) związane jest z odpowiednim przetworzeniem informacji o zmienności historycznej, którą wyznacza się na podstawie logarytmicznych stóp zwrotu dla przeszłych obserwacji zmiennej objaśnianej. Prognozy zmienności są zatem utożsamiane z konstruowanymi w okresie t prognozami wariancji zmian zmiennej objaśnianej na przestrzeni h -okresowego horyzontu czasowego [11, s. 486].

Przełącznikowe modele Markowa zaliczane są do tej kategorii modeli prognozytycznych, dla których zmienność warunkowa w kolejnych podokresach jest

² Ocenę wektora parametrów θ można uzyskać m.in. metodą największej wiarygodności. Jednym ze sposobów maksymalizacji skonstruowanej dla potrzeb przełącznikowego modelu Markowa funkcji wiarygodności jest zastosowanie odpowiedniej wersji algorytmu *Expectations Maximization*, zaproponowanego pierwotnie przez Dempstera, Lairda, Rubina (1977). Zastosowanie algorytmu EM do klasy modeli przełącznikowych wymaga wyprowadzenia zależności pomiędzy oszacowanymi na podstawie dostępnych informacji prawdopodobieństwami filtrowanymi, że obserwacja y_t została wygenerowana przez reżim j (7), a warunkami narzuconymi na parametry poprzez układ równań wynikający z potrzeby maksymalizacji funkcji wiarygodności (por. [8, s. 39-70]).

³ Zasadnicza różnica między nimi polega na tym, iż szacowanie prawdopodobieństw filtrowanych przeprowadzane jest na podstawie zbioru dostępnych informacji do chwili t , $t < T$, podczas gdy prawdopodobieństwa wygładzone wyznaczone są na podstawie całego badanego szeregu czasowego. Różna jest też ich rola w procesie prognozowania zmienności kursów walutowych: na podstawie prawdopodobieństw filtrowanych wyznaczane są prognozy typu *in-sample*, natomiast dla prawdopodobieństw wygładzonych – prognozy typu *out-of-sample*.

zmienna i zależy od przeszłych informacji. Prognozy zmienności uzyskane z przełącznikowych modeli Markowa są funkcją prawdopodobieństw zmiany reżimu. Dla dwustanowego modelu postaci (1) prognoza wariancji dla pojedynczej obserwacji w chwili T na j dni do przodu, warunkowa względem zbioru obserwacji Φ_T , wyznaczana jest w następujący sposób (por. [2, s. 891-911; 3, s. 239-276]):

$$v_{T+j} \equiv \text{var}[r_{T+j} | \Phi_T] = E_T[r_{T+j}^2] - E_T[r_{T+j}]^2 = \\ = p_{1T,T+j}(\sigma_1^2 + \mu_1^2) + (1 - p_{1T,T+j})(\sigma_2^2 + \mu_2^2) - [p_{1T,T+j}\mu_1 + (1 - p_{1T,T+j})\mu_2]^2, \quad (8)$$

gdzie prawdopodobieństwo $p_{1T,T+j}$ jest pierwszym elementem wektora zawierającego prawdopodobieństwa wygładzone wyznaczone dla okresu $T+j$:

$$p_{T+j} = P^j \cdot p_T = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}^j \cdot \begin{bmatrix} P(s_T = 1 | \Phi_T; \theta) \\ P(s_T = 2 | \Phi_T; \theta) \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Wówczas h -okresową prognozę wariancji można zapisać jako (por. [2, s. 891-911; 3, s. 239-276]):

$$\sigma_p^2 = \sum_{j=1}^h v_{T+j}. \quad (10)$$

Trafność prognoz wyznaczonych na podstawie przedstawionych powyżej modeli stochastycznych określa się za pomocą błędów *ex post*. Prognozy wariancji warunkowej porównuje się ze zrealizowaną zmiennością zmiennej prognozowanej w całym okresie prognozy. Najczęściej używaną miarą zrealizowanej zmienności na przestrzeni h okresów jest (por. [9, s. 242]):

$$v_{t,h} = \sum_{\tau=t+1}^{t+h} (r_\tau - \hat{\mu})^2. \quad (11)$$

Szczególnie obserwowalną jednookresową zmienność można szacować jako kwadrat stóp zwrotów lub wartość bezwzględną zwrotów⁴.

4. Przykład empiryczny

Badania empiryczne zostały przeprowadzone na podstawie średnich dziennych notowań NBP kursów następujących walut: USD/PLN, CHF/PLN, GBP/PLN, JPY/PLN w okresie 02.01.1998-28.02.2005 oraz EUR/PLN, CZK/PLN, HUF/PLN w okresie 01.01.1999-28.02.2005. Rozważaną próbę statystyczną podzielono na dwa podokresy: próbę uczącą obejmującą okres do 31.12.2003 oraz próbę spraw-

⁴ Przeprowadzone dla danych o wysokiej częstotliwości (*intraday*) badania wskazują, iż nieobciążony estymator zmienności zrealizowanej, jakim jest kwadrat stopy zwrotu, jest zanieczyszczony szumem, co wpływa na zaniżenie oceny trafności sporządzonych prognoz zmienności. Z tego powodu zaproponowano nową miarę zwaną zintegrowaną zmiennością (*integrated volatility*), konstruowaną jako suma kwadratów stóp zwrotu wyznaczonych dla danych o częstotliwości wyższej niż dzienna (por. [1, s. 885-905]).

dzająca obejmującą okres od 01.01.2004-28.02.2005. Na podstawie próby uczącej dokonano estymacji parametrów przełącznikowych modeli Markowa dla stóp zwrotu rozważanych kursów walutowych oraz przeprowadzono statystyczną i merytoryczną weryfikację otrzymanych wyników (por. [7, s. 127-157; 14]). Oszacowane modele posłużyły do konstrukcji prognoz wariancji 1-dniowej, 10-dniowej i 21-dniowej w próbie sprawdzającej (8)-(10). Następnie, na podstawie rzeczywistych logarytmicznych stóp zwrotu rozważanych kursów wymiany złotego w okresie 01.01.2004-28.02.2005 oszacowano zrealizowaną zmienność zgodnie ze wzorem (11) dla 10-dniowego i 21-dniowego horyzontu prognozy. Do porównania jakości skonstruowanych prognoz zmienności zastosowano następujące kryteria błędów *ex post* (por. [12, s. 478-539; 1, s. 885-905]):

- kryterium pierwiastka błędu średniokwadratowego (RMSE),
- kryterium heteroskedastycznego absolutnego błędu średniego (HMAE),
- kryterium logarytmicznej funkcji straty (*logarithmic loss function* – LL),
- kryterium współczynnika determinacji dla równania regresji zrealizowanych wariancji względem prognoz wariancji.

Zestawienie wyników przeprowadzonych obliczeń podano w tab. 1-3.

Tabela 1. Oceny dokładności 1-dniowych prognoz zmienności kursów walutowych

Kurs walutowy	Weryfikacja 1-dniowych prognoz wariancji warunkowej					
	RMSE	ME	MAE	LL	HMAE	R ²
USD/PLN	0,876065	-0,30531	0,661687	1,257396	63,84722	0,141258
EUR/PLN	0,377346	0,038812	0,217277	1,037167	110,038284	0,059965
GBP/PLN	0,420468	0,115816	0,267899	0,841738	233,966136	0,088873
JPY/PLN	0,756643	0,189737	0,427077	0,678267	139,028339	0,116586
CHF/PLN	0,401902	-0,02649	0,267978	1,302949	129,903325	0,057889
CZK/PLN	0,356267	0,063423	0,217335	0,555253	5,70006321	0,14444
HUF/PLN	0,361465	0,064041	0,213236	0,804412	52,5651957	0,11654

Źródło: obliczenia własne.

Tabela 2. Oceny dokładności 10-dniowych prognoz zmienności kursów walutowych

Kurs walutowy	Weryfikacja 10-dniowych prognoz wariancji warunkowej					
	RMSE	ME	MAE	LL	HMAE	R ²
USD/PLN	5,352079	-3,63785	4,06824	0,522767	1,063095	0,322178
EUR/PLN	1,652936	-1,32984	1,381675	0,585803	1,892708	0,170197
GBP/PLN	1,228338	-0,25809	1,037499	0,176356	0,461346	0,360482
JPY/PLN	3,363382	0,462484	2,492226	0,135626	0,793368	0,292056
CHF/PLN	3,694905	-3,41677	3,416771	0,928858	1,430116	0,015664
CZK/PLN	1,371896	-0,79997	1,12297	0,413523	1,171294	0,263746
HUF/PLN	1,853595	-0,86807	1,427401	0,489301	1,252909	0,02721

Źródło: obliczenia własne.

Tabela 3. Oceny dokładności 21-dniowych prognoz zmienności kursów walutowych

Kurs walutowy	Weryfikacja 21-dniowych prognoz wariancji warunkowej					
	RMSE	ME	MAE	LL	HMAE	R ²
USD/PLN	8,868893	-6,44769	7,82684	0,430152	0,747046	0,17641
EUR/PLN	5,066831	-4,71441	4,741773	0,76356	1,313686	0,070777
GBP/PLN	2,627681	-1,78004	2,174916	0,295948	0,462657	0,028355
JPY/PLN	6,026187	0,087853	4,444913	0,157902	0,616024	0,06814
CHF/PLN	5,915403	-3,02829	4,728755	0,308433	0,581119	0,003926
CZK/PLN	4,260405	-3,69494	3,829783	0,609202	1,058813	0,031757
HUF/PLN	2,765919	-1,95427	2,440636	0,412594	0,734572	0,014532

Źródło: obliczenia własne.

Uzyskane wyniki pokazują, iż ocena zdolności progностycznych modelu zależy w dużym stopniu od przyjętego kryterium oraz horyzontu prognozy. Biorąc pod uwagę kryterium błędu średniego, można wnioskować, iż wraz z wydłużaniem się horyzontu prognozy większość modeli przeszacowuje prognozy. Najdokładniejsze prognozy 1-dniowej wariancji według kryteriów RMSE i MAE konstruowane są na podstawie modeli kursów HUF/PLN i CZK/PLN, natomiast najmniej dokładne dla kursu USD/PLN. Wydłużanie horyzontu prognozy wpływa na zwiększenie dokładności prognoz zmienności kursu GBP/PLN. Według kryterium HMAE, najlepsze zdolności progностyczne można przypisać modelom kursów CZK/PLN (w 1-dniowym horyzoncie) oraz GBP/PLN (w 10-dniowym i 21-dniowym horyzoncie), a najgorsze modelom kursów GBP/PLN (1-dniowy horyzont) oraz EUR/PLN (10-dniowy i 21-dniowy horyzont). Z kolei na podstawie kryterium logarytmicznej funkcji straty za najlepszy model progностyczny można uznać model dla kursu CZK/PLN – w 1-dniowym horyzoncie prognozy, natomiast w dłuższym horyzoncie – model dla kursu JPY/PLN⁵. Najmniej dokładne prognozy według tego kryterium są budowane na bazie modeli dla kursu CHF/PLN (w 1-dniowym i 10-dniowym horyzoncie) oraz dla kursu EUR/PLN (w 21-dniowym horyzoncie). Najwyższe szacunki współczynnika determinacji R² dla funkcji regresji realizacji wariancji względem prognoz wariancji otrzymano dla kursów CZK/PLN, GBP/PLN oraz USD/PLN, natomiast najniższe w przypadku kursu CHF/PLN⁶.

⁵ Należy jednak pamiętać, iż prognozy konstruowane na podstawie tych modeli są dokładne w przypadku niskiej zmienności kursowej. Kryterium LL jest mniej wrażliwe na pojawianie się obserwacji nietypowych niż inne miary, z tego też powodu eliminuje częściowo wpływ ekstremalnie dużych wartości na ocenę trafności prognoz.

⁶ Należy podkreślić, iż niskie szacunki współczynnika determinacji dla wszystkich rozważanych modeli i każdego horyzontu prognozy, jak również wysokie szacunki błędów HMAE dla 1-dniowego horyzontu prognozy, nie świadczą o słabej jakości prognoz, ale są charakterystyczne dla prognoz zmienności. Dodatkowo, na wartość powyższych szacunków ma wpływ przyjęta ocena zmienności empirycznie zrealizowanej (por. [1, s. 885-905]).

5. Podsumowanie

Na podstawie oszacowanych przełącznikowych modeli Markowa skonstruowano prognozy zmienności kursowej w 1-dniowym, 10-dniowym i 21-dniowym horyzoncie prognozy. Wyznaczone prognozy są funkcją prawdopodobieństw zmiany reżimu. Według większości miar oceny trafności prognoz najlepsze własności prognostyczne mają modele kursów CZK/PLN (1-dniowy horyzont prognozy) oraz GBP/PLN (10-dniowy i 21-dniowy horyzont prognozy). Porównując wartości wszystkich wyznaczonych miar oceniających trafność prognoz zmienności kursów walutowych, należy zauważyć, iż ocena zdolności prognostycznych modelu zależy w dużym stopniu od przyjętego kryterium porównawczego oraz horyzontu prognozy.

Ponadto, prognozy zmienności kursów walutowych otrzymane na podstawie modelu mającego najlepsze własności prognostyczne mogą być wykorzystywane w procesie pomiaru ryzyka walutowego towarzyszącego inwestycji w instrument finansowy denominowany w walucie obcej, w procesie sterowania ryzykiem walutowym – przy podejmowaniu decyzji dotyczących wyboru odpowiedniej dla danego podmiotu strategii zabezpieczającej i przy ustalaniu cen opcji walutowych, dla których szacunki zmienności mają zasadnicze znaczenie.

Literatura

- [1] Andersen T., Bollerslev T., *Answering the Skeptics: Yes, Standard Volatility Models Do Provide Accurate Forecasts*, „International Economic Review” 1998 nr 39.
- [2] Beine M., Laurent S., Lecourt Ch., *Official Central Bank Interventions and Exchange Rate Volatility: Evidence from a Regime-Switching Analysis*, „European Economic Review” 2003 nr 47.
- [3] Bollen N., Gray S., Whaley R., *Regime Switching in Foreign Exchange Rates: Evidence from Currency Option Prices*, „Journal of Econometrics” 2000 nr 94.
- [4] Engle C., Hamilton J.D., *Long Swings in the Dollar: Are They in Data and Do Markets Know It?*, „American Economic Review” 1990 nr 80.
- [5] Franses P.H., van Dijk D., *Non-linear Time Series Models in Empirical Finance*, Cambridge University Press, Cambridge 2004.
- [6] Hamilton J.D., *Time Series Analysis*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey 1994.
- [7] Hamilton J.D., *Specification Testing in Markov-Switching Time Series Models*, „Journal of Econometrics” 1996 nr 70.
- [8] Hamilton J.D., *Analysis of Time Series Subject to Changes in Regime*, „Journal of Econometrics” 1990 nr 45.

- [9] Hamilton J.D., Raj B. (red.), *Advances in Markov – Switching Models: Applications in Business Cycle Research and Finance*, „Studies in Empirical Economics” nr 27, Physica-Verlag, New York 2002.
- [10] Knight J., Satchell S., *Forecasting Volatility in the Financial Markets*, Butterworth – Heinemann 1998.
- [11] Piontek K., *Weryfikacja wybranych technik prognozowania zmienności – analiza szeregów czasowych*, Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej nr 991, AE, Wrocław 2003.
- [12] Poon S-H., Granger C.W., *Forecasting Volatility in Financial Markets: A Review*, „Journal of Economic Literature” 2003 nr 41.
- [13] Włodarczyk A., *Empiryczne własności szeregów stóp zwrotu kursów wymiany na polskim rynku walutowym*, [w:] Mitas A.W. (red.), *Statystyka i informatyka w nauce o zarządzaniu*, WSZiM, Sosnowiec 2004.
- [14] Włodarczyk A., *Zastosowanie przetłaczniowych modeli Markowa do prognozowania zmienności kursów wymiany na polskim rynku walutowym*, rozprawa doktorska, PCz, Częstochowa 2005.

FORECASTING EXCHANGE RATE VOLATILITY ON THE BASIS OF MARKOV SWITCHING MODELS

Summary

The exchange rate volatility determines investment decisions of market participants. The main purpose of this paper is an application of Markov switching models to forecasting the exchange rate volatility in the Polish currency market.

Switching models describe dynamics of processes that are subject to discrete changes with time and it is assumed that the regime change mechanism is random. In Markov switching models, the stochastic process that controls the regime changes is a homogeneous Markov chain.

The volatility forecasts are the forecasts of the variance of the exchange rate change over a h -day horizon ($h = 1, h = 10, h = 21$). The important implication of using Markov switching models for volatility forecasting is that the conditional variance is a function of smoothed regime probabilities. Some statistical criteria are used to investigate the forecasting performance of Markov switching models.