

Piotr Wrzosek

Akademia Ekonomiczna we Wrocławiu

MODEL ANALIZY PORTFELOWEJ Z KOSZTAMI TRANSAKCYJNYMI

1. Wstęp

W modelach decyzyjnych analizy portfelowej często przyjmuje się założenie o braku kosztów transakcyjnych. W praktyce założenie to nie jest spełnione, a jego stosowanie prowadzi do nieoptymalnych wyników (np. w klasycznym modelu Markowitza, gdzie na ogół niemal wszystkie punkty leżące na granicy efektywnej zbioru możliwości inwestora odpowiadają portfelom, w skład których wchodzi wszystkie lub większość rozpatrywanych akcji). Naiwne stosowanie tego modelu prowadziłooby zatem do wniosku, że w portfelu racjonalnie postępującego inwestora giełdowego powinny się znaleźć akcje większości spółek obecnych na giełdzie. Działanie takie jest oczywiście niemożliwe w przypadku drobniejszych inwestorów nie korzystających z pośrednictwa np. funduszy inwestycyjnych ze względu na niedoskonałą podzielność akcji. Jednak również w przypadku inwestorów dysponujących wielkimi kapitałami nieograniczona dywersyfikacja portfela może być nieopłacalna, głównie ze względu na koszty transakcyjne. Zwykle koszty te rosną wraz ze wzrostem stopnia dywersyfikacji portfela, tak że po przekroczeniu pewnej liczby spółek reprezentowanych w portfelu spodziewane korzyści z dalszego jej zwiększania byłyby niższe od dodatkowych kosztów transakcyjnych, jakie trzeba by ponieść w celu skonstruowania tak złożonych portfeli. Celem niniejszego artykułu jest zaproponowanie modelu decyzyjnego pozwalającego na uwzględnienie kosztów transakcyjnych w procesie budowy portfela¹.

¹ Istnieje wiele innych modeli decyzyjnych analizy portfelowej uwzględniających koszty transakcyjne. Na przykład opisane w [1; 2; 3; 4; 7, rozdz. 3].

Do najważniejszych rodzajów kosztów transakcyjnych ponoszonych przez inwestorów podczas obrotu giełdowego należą:

1) koszty związane z podejmowaniem decyzji takie, jak wynagrodzenia osób uczestniczących w procesie decyzyjnym w przypadku inwestorów instytucjonalnych lub koszty czasu straconego w związku z podejmowaniem decyzji w przypadku inwestorów indywidualnych,

2) koszty związane z przekazaniem zlecenia maklerskiego, takie jak opłaty za połączenia telefoniczne lub, jak w punkcie poprzednim, koszty czasu i pracy osób składających zlecenia,

3) prowizje i opłaty pobierane przez pośredników w obrocie giełdowym,

4) podatek od dochodów kapitałowych, który wprowadzie z punktu widzenia prawa i praktyki księgowej kosztem nie jest, ale z punktu widzenia analizy decyzyjnej może być za koszt uznawany.

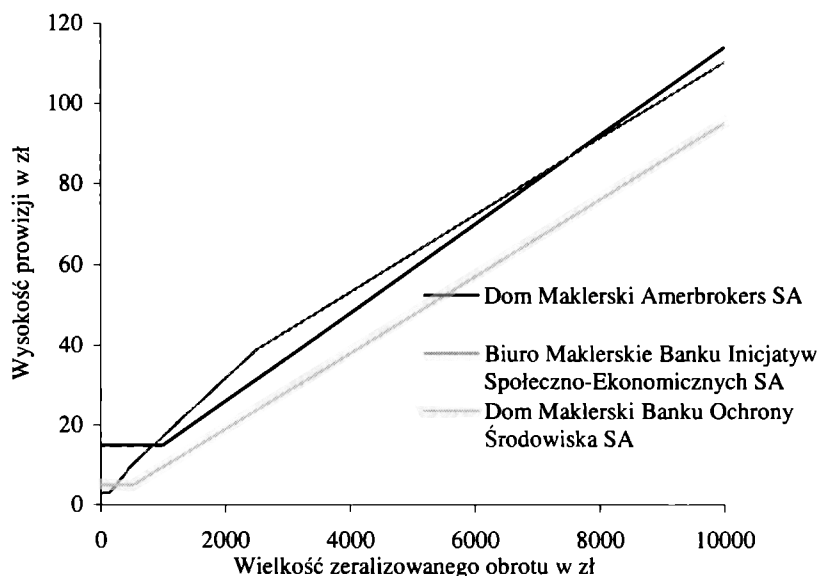
Koszty występujące w punktach 1. i 2. mogą mieć bardzo różną wysokość u różnych inwestorów, zaś część z nich może być trudno mierzalna ze względu na ich subiektywny charakter. Ponadto ponieważ przedstawiony model dotyczyć będzie tylko jednej inwestycji polegającej na zakupie, a następnie sprzedaży akcji po ustalonym czasie, nie zostaną uwzględnione w nim również opłaty i podatki, gdyż aby obliczyć wpływ większości z nich na efektywność inwestycji, należałoby posiadać informacje na temat wszystkich aktywów finansowych inwestora i generowanych przez nie dochodów, co doprowadziłoby do znacznej komplikacji modelu. W związku z tym w zaprezentowanym, prostym modelu uwzględnione zostaną jedynie prowizje, zaś możliwości wprowadzenia pozostałych rodzajów kosztów do modelu zostaną jedynie omówione w podsumowaniu artykułu, gdzie przedstawione będą możliwe sposoby jego rozbudowania.

2. Prowizje i opłaty domów i biur maklerskich obecnych na warszawskiej GPW

Podstawowa z punktu widzenia analizy decyzyjnej różnica między opłatami i prowizjami polega na tym, że prowizje są pobierane wyłącznie w momencie zawarcia transakcji giełdowej za pośrednictwem domu lub biura maklerskiego i ich wysokość jest zwykle uzależniona od wielkości transakcji, zaś opłaty pobierane są w innych momentach i z innych tytułów niż transakcje giełdowe na zlecenie. Rodzaje pobieranych opłat są różne w różnych domach maklerskich, jednak wśród najczęściej występujących na polskim rynku można wymienić opłaty za: otwarcie i prowadzenie rachunku, za wystawienie świadectwa depozytowego, zaksięgowanie na rachunku papierów nabytych w drodze umowy cywilnoprawnej, dokonanie przelewu papierów wartościowych na inny rachunek maklerski, zamianę imiennych papierów wartościowych na papiery na okaziciela, dokonanie przelewu środków pieniężnych z rachunku lub na rachunek, dokonanie wypłaty gotówkowej,

przechowywanie papierów wartościowych na rachunku i zarządzanie aktywami inwestora przez dom maklerski. Jak widać, panuje w tym zakresie duża różnorodność. Wysokość opłat wymusza ich uwzględnianie w rachunku ekonomicznym prowadzonym zarówno przez inwestorów obecnych na giełdzie, jak i osoby rozważające podjęcie takiej działalności, jednak ze względu na ograniczenia modelu prezentowanego w niniejszej pracy opłaty nie będą w nim bezpośrednio uwzględnione, zaś uwaga autora skupi się na prowizjach.

Domy i biura maklerskie naliczają prowizje przy realizacji każdego zlecenia osobno, przy czym należy pamiętać, że zakup lub sprzedaż kilku różnych instrumentów finansowych, takich jak akcje różnych spółek czy obligacje pochodzące z różnych emisji, traktowany jest jako kilka transakcji, jeśli nawet wszystkie one zostały zlecone równocześnie. Fakt ten jest najważniejszą przyczyną powstawania zjawiska nadmiernej dywersyfikacji portfeli, rozumianego tu jako sytuacja, w której zwiększenie liczby aktywów w portfelu prowadzi do pogorszenia się jego parametrów. Żeby wyjaśnić to zjawisko, przeanalizujemy najpierw cenniki prowizji stosowane przez polskie domy maklerskie.



Rys. 1. Przykładowe prowizje przy obrocie akcjami
Źródło: opracowanie własne na podstawie [8; 9; 10].

W tabelach prowizji zwykle wyodrębnia się obligacje, opcje i kontrakty terminowe, dla których obowiązują inne stawki niż dla pozostałych instrumentów finansowych. Prowizje pobierane przy obrocie kontraktami terminowymi wyrażają się zwykle stałą kwotą przypadającą na jeden kontrakt, niezależnie od np. rodzaju lub wartości instrumentu lub instrumentów podstawowych związanych z tym kontraktem. Prowizje za opcje są albo naliczane w sposób analogiczny do prowizji za kon-

trakty, albo są wprost proporcjonalne do wartości zlecenia, z zastrzeżeniem minimalnej i maksymalnej prowizji za jedną opcję. Wysokość prowizji naliczanej przy obrocie pozostałymi instrumentami jest obliczana w zależności od wielkości zrealizowanego obrotu na podstawie stawek liniowych lub degresywnych, często z zastrzeżeniem pewnej minimalnej kwoty przypadającej na zlecenie. Ponadto stawki różnicuje się w zależności od sposobu składania zlecenia – za zlecenia składane przez internet pobierane są niższe prowizje niż za identyczne zlecenia składane osobiście, telefonicznie lub faksem – a niekiedy także od łącznych obrotów używanych przez inwestora w dłuższym okresie lub od czasu między transakcjami – tzw. *daytrading*, czyli otwarcie i zamknięcie w ciągu tego samego dnia w wielu domach maklerskich jest obciążone niższą prowizją.

Na rysunku 1 przedstawiono zależność prowizji przy zakupie lub sprzedaży akcji od wielkości obrotu w wybranych dwóch domach i jednym biurze maklerskim przy założeniu, że zlecenie zostało złożone osobiście lub telefonicznie i zastosowano standardowy plan taryfowy.

3. Konstrukcja proponowanego modelu

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

- $r_{X,i}$ – stosunek ceny (np. otwarcia) spółki X na początku okresu i -tego do analogicznej ceny na początku okresu poprzedzającego,
- PV_X – wartość rynkowa akcji spółki X w chwili ich zakupu, rozumiana jako iloczyn liczby zakupionych akcji i ich ceny rynkowej (zakładamy, że jest ona znana w momencie konstruowania portfela),
- PC_X – prowizja płacona przy zakupie akcji o wartości PV_X ,
- FV_X – przyszła wartość rynkowa akcji spółki X w momencie ich sprzedaży (zmienna losowa),
- x – realizacja zmiennej losowej FV_X ,
- $FC_X(x)$ – prowizja płacona przy sprzedaży akcji spółki X, jeżeli ich wartość rynkowa wyniesie x ,
- $f_X(x)$ – funkcja gęstości prawdopodobieństwa zmiennej FV_X ,
- $f_{X,Y}(x, y)$ – funkcja gęstości prawdopodobieństwa dwuwymiarowej zmiennej losowej (FV_X, FV_Y) .

W celu skonstruowania modelu przyjęto następujące założenia:

1. Dla każdej spółki X $r_{X,i}$ są zmiennymi losowymi o rozkładzie lognormalnym o parametrach niezależnych od i .

2. Dla każdej pary spółek X i Y występuje jedynie korelacja liniowa między logarytmami zmiennych $r_{X,i}$, $r_{Y,i}$ o niezależnym od i współczynniku korelacji ρ , brak innych rodzajów korelacji (np. korelacji nieliniowych czy przesuniętych w czasie, w tym autokorelacji).

3. Inwestycja będzie polegała na zakupieniu portfela akcji na z góry określony czas, po którym wszystkie zakupione akcje zostaną sprzedane.
4. Nie będzie stosowana krótka sprzedaż akcji.
5. Można kupić tylko całkowitą liczbę akcji.
6. Jedynymi uwzględnionymi w analizie kosztami transakcyjnymi będą prowizje pobierane przez dom maklerski.
7. Znane są stawki prowizji, które będą obowiązywały zarówno w momencie zakupu, jak i podczas późniejszej sprzedaży akcji.

Założenie 1. jest oczywiście bardzo silne i w praktyce nie musi być dobrze spełnione. Jego istota sprowadza się do przyjęcia multiplikatywnego modelu zmian cen aktywów zaproponowanego w [5, s. 374 i dalsze]. Założenie to oraz podobnie silne i nierealistyczne założenie 2. uczyniono w celu wprowadzenia konkretnych rozkładów prawdopodobieństwa zmiennych $f(x)$ i $f(x, y)$, co jest niezbędne do konstrukcji modelu. Założenia 3., 6. i 7. wprowadzono w celu jednoznacznego określenia funkcji $FC_X(x)$. Założenie 4. przyjęto w celu uniknięcia komplikacji rachunkowych związanych z kosztem pożyczania sprzedawanych akcji oraz po to, aby można było się ograniczyć do analizy skończonej liczby portfeli. Możliwości zmiany przyjętych założeń zostaną omówione w punkcie podsumowującym.

Ponieważ przyjęliśmy, że dla każdej akcji X zmienne $r_{X,i}$ mają rozkład lognormalny, również stosunki FV_X/PV_X mają rozkład lognormalny, a z tego wynika, że zmienna FV_X ma rozkład lognormalny o funkcji gęstości zadanej wzorem:

$$f_X(x) = \frac{1}{x\sigma_{\ln(FV_X)}\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \mu_{\ln(FV_X)}}{\sigma_{\ln(FV_X)}}\right)^2\right], \quad (1)$$

gdzie $\mu_{\ln(FV_X)}$ i $\sigma_{\ln(FV_X)}$ oznaczają odpowiednio wartość oczekiwaną i odchylenie standardowe wyrażenia $\ln(FV_X)$. Ponadto założenie o liniowej korelacji stóp zwrotu z akcji prowadzi do wniosku, że zmienna (FV_X, FV_Y) ma rozkład dwuwymiarowy lognormalny o gęstości prawdopodobieństwa zadanej wzorem:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2xy\sigma_{\ln(FV_X)}\sigma_{\ln(FV_Y)}\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{\ln x - \mu_{\ln(FV_X)}}{\sigma_{\ln(FV_X)}}\right)^2 - \frac{2\rho(\ln x - \mu_{\ln(FV_X)})(\ln y - \mu_{\ln(FV_Y)})}{\sigma_{\ln(FV_X)}\sigma_{\ln(FV_Y)}} + \left(\frac{\ln y - \mu_{\ln(FV_Y)}}{\sigma_{\ln(FV_Y)}}\right)^2\right]\right\}, \quad (2)$$

gdzie ρ jest współczynnikiem korelacji liniowej zmiennych $\ln(FV_X)$ i $\ln(FV_Y)$.

Po uwzględnieniu kosztów transakcyjnych stopa zwrotu z inwestycji w akcje spółki X wyraża się następującą zmienną losową:

$$R_X = \frac{FV_X - FC_X}{PV_X + PC_X} - 1, \quad (3)$$

której wartość oczekiwana i wariancja wyrażają się wzorami:

$$E(R_X) = \int_0^{\infty} \left(\frac{x - FC_X(x)}{PV_X + PC_X} - 1 \right) f(x) dx, \quad (4)$$

$$V(R_X) = \int_0^{\infty} \left[\frac{x - FC_X(x)}{PV_X + PC_X} - 1 - E(R_X) \right]^2 f(x) dx. \quad (5)$$

Kowariancja stóp zwrotu z dwóch akcji wyraża się wzorem:

$$C(R_X, R_Y) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \left[\frac{x - FC_X(x)}{PV_X + PC_X} - 1 - E(R_X) \right] \cdot \left[\frac{y - FC_Y(y)}{PV_Y + PC_Y} - 1 - E(R_Y) \right] \cdot f_{X,Y}(x, y) dx dy. \quad (6)$$

Jeżeli udział akcji spółki X w portfelu mierzony jako całkowity koszt jej nabywania oznaczymy przez w_X zgodnie ze wzorem:

$$w_X = \frac{PV_X + PC_X}{\sum_{I \in A} (PV_I + PC_I)}, \quad (7)$$

gdzie A oznacza zbiór wszystkich spółek, których akcje obecne są w portfelu, to wartość oczekiwaną E_P i wariancję V_P stopy zwrotu całego portfela można zapisać wzorami:

$$E_P = \sum_{I \in A} w_I \cdot E(R_I), \quad (8)$$

$$V_P = \sum_{I \in A} w_I^2 \cdot V(R_I) + \sum_{I \in A} \sum_{\substack{J \in A \\ J \neq I}} w_I \cdot w_J \cdot C(R_I, R_J). \quad (9)$$

Otrzymany w efekcie model jest w istocie modyfikacją modelu Markowitza uwzględniającą pojawianie się kosztów transakcyjnych w momencie zakupu i sprzedaży akcji.

4. Praktyczny przykład zastosowania modelu

Założmy, że chcemy na podstawie przedstawionego modelu skonstruować portfel akcji, który zakupimy 1 sierpnia 2005 r., a sprzedamy trzy miesiące później – 1 listopada 2005 r. Z przyczyn technicznych (zapotrzebowanie zastosowanego programu na pamięć i moc obliczeniową gwałtownie rosnące wraz ze wzrostem liczby dostępnych portfeli) ograniczymy kwotę inwestowania do przedziału od 1400 zł do 1500 zł, zaś liczbę rozpatrywanych spółek do siedmiu wybranych spośród wchodzących w skład indeksu WIG 20. Będą to:

- Agora SA,
- Bank Przemysłowo-Handlowy PBK SA,
- Bank Zachodni WBK SA,
- ComputerLand SA,

- Bank PEKAO SA,
- PKN ORLEN SA,
- Mondi Packaging Paper Świecie SA.

Spółki te zostały wybrane ze względu na to, że były notowane we wszystkie dni giełdowe od 30 lipca 2002 r. do 1 sierpnia 2005 r., co zostanie wykorzystane przy estymowaniu parametrów zastosowanych rozkładów statystycznych, oraz ze względu na umiarkowane ceny 1 sierpnia 2005 r. Umożliwiło to z jednej strony w miarę swobodne dobieranie udziału poszczególnych akcji w portfelu przy założeniu niepodzielności poszczególnych akcji, a z drugiej strony pozwoliło na ograniczenie liczby analizowanych portfeli, co jest niezbędne ze względu na wspomniane wcześniej duże wymagania zastosowanego programu.

W celu dokonania obliczeń przyjmijmy dodatkowo założenie, że zgodnie z naszymi przewidywaniami parametry rozkładu stóp zwrotu z akcji będą w ciągu wybranego kwartału takie same jak w trakcie trzech lat bezpośrednio go poprzedzających. Pozwoli to nam na wyznaczenie wartości estymatorów parametrów funkcji gęstości prawdopodobieństwa $f_X(x)$ i $f_{X,Y}(x, y)$ na podstawie przeszłych cen. Procedura estymacji jest następująca:

1. Dla każdej spółki oblicz estymatory parametrów $\mu_{\ln(FV_X)}$ i $\sigma_{\ln(FV_X)}$ na podstawie wzorów:

$$\hat{\mu}_{\ln(FV_X)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\ln(p_X(i \cdot t))}{\ln(p_X((i-1) \cdot t))}, \quad (10)$$

$$\hat{\sigma}_{\ln(FV_X)} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\ln(p_X(i \cdot t))}{\ln(p_X((i-1) \cdot t))} - \hat{\mu}_{\ln(FV_X)} \right)^2}, \quad (11)$$

gdzie: $\hat{\mu}_{\ln(FV_X)}$ – estymator wartości $\mu_{\ln(FV_X)}$ (i $\mu_{\ln(FV_Y)}$) we wzorach (1) i (2),

- $\hat{\sigma}_{\ln(FV_X)}$ – estymator wartości $\sigma_{\ln(FV_X)}$ (i $\sigma_{\ln(FV_Y)}$) we wzorach (1) i (2),
- t – czas trwania planowanej inwestycji w dniach giełdowych, przyjęto 63 dni (ok. 3 miesiące),
- n – liczba podokresów o długości t dni giełdowych w okresie od 30 lipca 2002 r. do 1 sierpnia 2005 r., $n = 12$,
- $p_X(i \cdot t)$, $p_X((i-1) \cdot t)$ – cena otwarcia akcji spółki X odpowiednio $i \cdot t$ lub $(i-1) \cdot t$ dni giełdowych po 30 lipca 2002 r.

2. Dla każdej pary akcji spółek X, Y oblicz estymator parametru ρ zgodnie ze wzorem²:

² Wzór na zgodny, nieobciążony estymator współczynnika korelacji liniowej ρ zaczerpnięto z [6, s. 49].

$$\hat{\rho} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\ln(p_X(i \cdot t))}{\ln(p_X((i-1) \cdot t))} - \hat{\mu}_{\ln(FV_X)} \right) \cdot \left(\frac{\ln(p_Y(i \cdot t))}{\ln(p_Y((i-1) \cdot t))} - \hat{\mu}_{\ln(FV_Y)} \right), \quad (12)$$

gdzie: $\hat{\rho}$ – estymator parametru ρ we wzorze (2), pozostałe oznaczenia jak wyżej.

3. Podstaw obliczone wartości estymatorów w miejsce odpowiednich parametrów we wzorach (1) i (2). Uwaga! Powyższe estymatory są prawidłowe tylko, jeśli okres planowanej inwestycji wynosi t .

4. Ustal skład wszystkich portfeli możliwych do kupienia za założoną wcześniej kwotę inwestycji (1400 – 1500 zł).

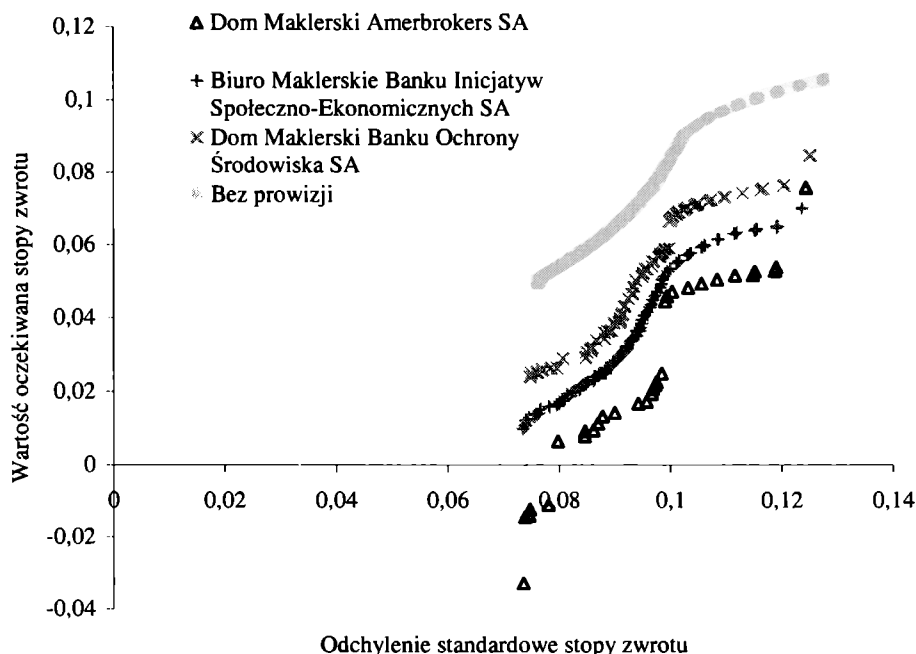
5. Oblicz PV_X i PC_X niezbędne do zakupu każdego pakietu akcji każdej spółki X z osobna w każdym z możliwych portfeli.

6. Po podstawieniu gęstości prawdopodobieństwa $f_X(x)$, wartości PV_X , i PC_X i funkcji $FC_X(x)$ oblicz wartość oczekiwaną $E(R_X)$ i wariancji $V(R_X)$ dla każdej spółki X w każdym portfelu na podstawie wzorów (4) i (5).

7. W analogiczny sposób oblicz $C(R_X, R_Y)$ dla każdej pary spółek w każdym portfelu na podstawie wzoru (6).

8. Oblicz udział każdej spółki w każdym portfelu zgodnie ze wzorem (7).

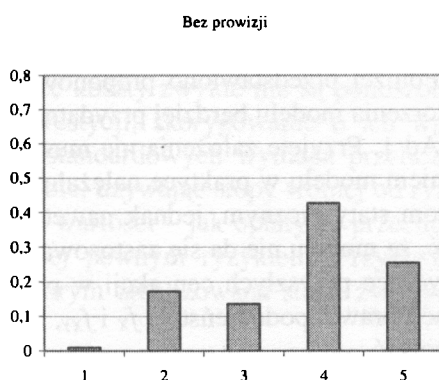
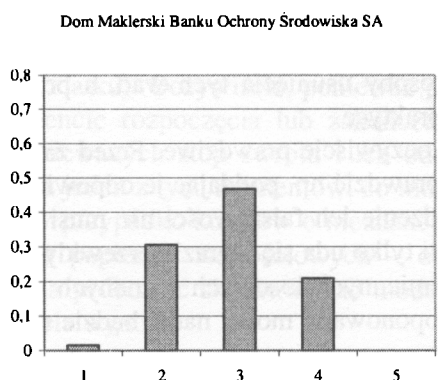
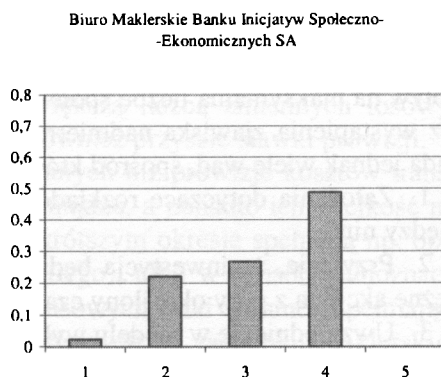
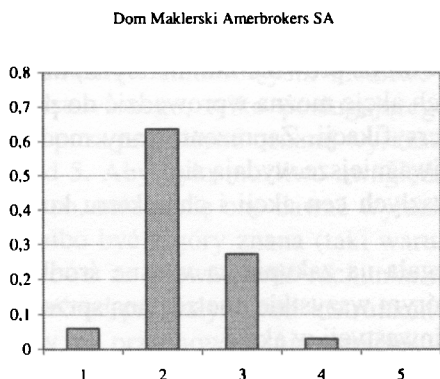
9. Oblicz wartość oczekiwaną i wariancję stopy zwrotu każdego portfela na podstawie wzorów (8) i (9).



Rys. 2. Granice efektywne zbioru dopuszczalnych portfeli przy różnych prowizjach
Źródło: opracowanie własne.

W rozważanym przykładzie wszelkie całki zostały policzone numerycznie ze względu na niemożność znalezienia ich analitycznych rozwiązań. Obliczenia te zostały przeprowadzone dla domów i biura maklerskiego uwzględnionych na rys. 1 przy założeniu, że ich tabele prowizji nie ulegną zmianie do końca okresu inwestycji i dodatkowo dla „idealnego” domu maklerskiego, który nie pobiera prowizji. Dla każdego z powyższych domów maklerskich z osobna wybrano portfele, które tworzą granicę efektywną zbioru możliwości, tzn. takie, dla których nie istnieje możliwy do nabycia w tym samym domu maklerskim portfel mający równocześnie wyższą oczekiwaną stopę zwrotu E_p i niższe odchylenie standardowe tej stopy $\sqrt{V_p}$. Wynik przedstawiono na rys. 2.

Zgodnie z oczekiwaniami, najlepszy zbiór efektywny (o najwyższej oczekiwanej stopie zwrotu przy założonym maksymalnym dopuszczalnym odchyleniu standardowym tej stopy lub minimalnym odchyleniu standardowym stopy zwrotu przy założeniu jej minimalnej wymaganej wartości oczekiwanej) jest dostępny przy inwestycji dokonanej bez płaćenia prowizji. Po uwzględnieniu prowizji okazuje się, że spodziewany zysk przy podobnym poziomie ryzyka mierzonego odchyleniem standardowym stopy zwrotu spada o ok. 2-4 pkt proc., a w niektórych przypadkach nawet bardziej. W efekcie dom maklerski lub biuro maklerskie zatrzymuje w formie prowizji od ok. 20% do ponad 100% spodziewanego zysku. Z porównania zbiorów efektywnych wynika, że z punktu widzenia inwestora najkorzystniejsze prowizje oferuje Dom Maklerski Banku Ochrony Środowiska SA (DM BOŚ SA), co nie jest zaskakujące, jeśli wziąć pod uwagę, że w rozpatrywanym zakresie obrotów (do 1500 zł) jego prowizje są niemal w każdym przypadku najniższe. Zwraca natomiast uwagę, że pomimo iż prowizje w Domu Maklerskim Amerbrokers SA (DM Amerbrokers SA) są dla wysokich obrotów (wyższych od 844,82 zł) niższe niż w Biurze Maklerskim Banku Inicjatyw Społeczno-Ekonomicznych (BM BISE), to niemal w każdym przypadku inwestycja za pośrednictwem BM BISE SA daje lepsze efekty. Jest to spowodowane tym, że wysokie prowizje DM Amerbrokers SA dla transakcji cechujących się niskim obrotem utrudnia konstruowanie portfeli złożonych z akcji wielu spółek, co jest niezbędne do skutecznego wykorzystania efektu portfelowego. Problem ten ilustruje dodatkowo rys. 3., z którego wynika, że na granicy efektywnej odpowiadającej prowizjom DM Amerbrokers SA ok. 75% portfeli składa się z akcji tylko dwóch spółek, podczas gdy na granicy BM BISE SA niemal połowa portfeli składa się z 4 spółek. DM BOŚ SA zawiera w portfelach efektywnych, średnio rzecz biorąc, mniej akcji niż BM BISE, choć nie tak mało jak DM Amerbrokers. Jest to spowodowane wyższą niż w BM BISE SA prowizją minimalną, choć należy przy tym pamiętać, że dzięki niższym prowizjom przy wysokich obrotach uzyskane w tym domu portfele dają lepsze wyniki niż w BM BISE SA. Zwraca uwagę, że portfele efektywne składające się z pięciu akcji pojawiają się, jeśli w rachunkach pominie prowizje.



Rys. 3. Rozkłady liczby spółek w portfelach leżących na granicy efektywnej w zależności od stawek prowizji
Źródło: opracowanie własne.

Analizując rys. 3, warto jeszcze zwrócić uwagę, że uzyskane granice efektywne, w przeciwieństwie do tych występujących w klasycznym modelu Markowitza, są dyskretne, a ponadto nawet po ich „uciągleniu” poprzez połączenie najbliższych punktów granica ta nie będzie krzywą w każdym punkcie wklęsłą, jak to ma miejsce w modelu klasycznym. Efekty te są spowodowane przyjęciem założenia, że można kupić tylko całkowitą liczbę akcji oraz nieliniowym charakterem zależności prowizji od obrotu.

5. Podsumowanie

Zastosowanie przedstawionego, prostego modelu pozwala stwierdzić, że podczas konstruowania portfela akcji niezbędne jest uwzględnienie prowizji domów maklerskich, zwłaszcza podczas inwestycji krótkookresowych i dokonywanych z użyciem niewielkich kapitałów. Jest to spowodowane zarówno tym, że kwoty za-

płaconych prowizji mogą stanowić bardzo dużą część spodziewanego zysku obliczonego bez uwzględnienia kosztów transakcyjnych, jak i tym, że charakter zależności prowizji od obrotu, zwłaszcza występowanie prowizji minimalnych, ma duży wpływ na maksymalną liczbę spółek, których akcje można wprowadzić do portfela bez wystąpienia zjawiska nadmiernej dywersyfikacji. Zaprezentowany model posiada jednak wiele wad, spośród których najważniejsze wydają się:

1. Założenia dotyczące rozkładów przyszłych cen akcji i charakteru korelacji między nimi.
2. Przyjęcie, że inwestycja będzie polegała na zakupie za własne środki pieniężne akcji na z góry określony czas, po którym wszystkie one zostaną sprzedane.
3. Uwzględnienie w modelu wyłącznie inwestycji w akcje.
4. Przyjęcie założenia, że znane są przyszłe stawki prowizji.
5. Nieuwzględnienie innych niż prowizje kosztów transakcyjnych.
6. Zastosowanie wartości oczekiwanej i odchylenia standardowego stopy zwrotu do opisu portfela.

Poniżej przedstawiono proponowane sposoby usunięcia tych wad, a przez to stworzenia modelu bardziej przydatnego w praktyce.

Ad 1. Przyjęte założenia nie muszą być oczywiście prawdziwe. Przed zastosowaniem modelu w praktyce należałoby je sprawdzić np. poddając je odpowiednim testom statystycznym, jednak nawet stwierdzenie ich fałszywości nie musi oznaczać, że modelu nie da się zastosować. Jeżeli tylko uda się wyrazić przewidywania dotyczące przyszłych cen akcji w postaci zmiennych losowych o znanych gęstościach prawdopodobieństwa f_X i $f_{X,Y}$, to zaproponowany model nadal będzie można stosować.

Ad 2. Jeżeli przyjmiemy, że na początku inwestor posiada pewien portfel akcji, który zamierza zrekonstruować, a następnie po określonym czasie go sprzedać, to model da się zastosować po prostej modyfikacji zależności prowizji od liczby akcji każdej ze spółek w portfelu po rekonstrukcji. Jeśli jednak przyjmiemy, że inwestycja nie jest dokonywana na z góry określony czas lub że planowane są rekonstrukcje portfeli w zależności od zmieniającej się sytuacji rynkowej, to trzeba będzie skonstruować nowy model uwzględniający prognozy zmian parametrów rozkładów cen akcji w czasie, co wydaje się zadaniem bardzo trudnym.

Ad 3. W modelu można uwzględnić oczywiście wiele innych instrumentów finansowych. Trzeba tylko w tym celu wyrazić ich przyszłe ceny w postaci zmiennych losowych o znanych rozkładach, tak jak w przypadku akcji, i zastosować dotyczące ich zależności prowizji od obrotu. Szczególnym przypadkiem może być uwzględnienie instrumentu wolnego od ryzyka o terminie wykupu równym czasowi rozpatrywanej inwestycji. W takiej sytuacji obliczona z użyciem modelu granica efektywna zbioru możliwości będzie zarazem odpowiednikiem linii rynku kapitałowego (CML), która jednak, ze względu na nieliniowy charakter zależności kosztów transakcyjnych od obrotu poszczególnymi aktywami, nie musi być linią prostą.

Ad 4. W przypadku gdy nie są znane przyszłe stawki prowizji, np. ze względu na długi okres inwestycji, ale można je prognozować w sposób podobny do cen instrumentów finansowych, możliwe jest skonstruowanie modelu podobnego do przedstawionego, tylko posługującego się większą liczbą zmiennych losowych, które poza przyszłymi cenami wyrażać będą również przyszłe stawki prowizji.

Ad 5. Aby było możliwe uwzględnienie innych niż prowizje kosztów transakcyjnych, muszą się one dawać wyrazić w pieniądzu, a ponadto ich wielkość musi być albo być z góry znana (taki warunek w krótszym okresie spełniają np. opłaty okresowe za prowadzenie rachunku maklerskiego), albo w sposób jednoznaczny zależeć od przyszłych cen instrumentów finansowych (taki warunek spełniają np. opłaty za przechowywanie papierów wartościowych na rachunku maklerskim – zwykle naliczane od sumy cen rynkowych przechowywanych papierów w chwili pobrania opłaty, a także podatek od zysków kapitałowych – jeżeli są znane prognozy cen wszystkich posiadanych instrumentów objętych tym podatkiem oraz generowanych przez nie zysków, co pozwala na obliczenie spodziewanej wysokości podatku). Oczywiście, ponieważ powyższe koszty zwykle nie są ponoszone w momencie rozpoczęcia lub zakończenia inwestycji, skorygowanie o ich wpływ spodziewanych stóp zwrotu i ich odchyłeń standardowych wymaga przeliczenia ich na jeden z tych momentów, co można zrobić, używając stopy wolnej od ryzyka lub w przypadku kosztów o nieznanej z góry wartości – jak opłaty za przechowywanie papierów wartościowych – obarczonej pewnym ryzykiem. Przykładowo można próbować skonstruować model, w którym zrealizowana stopa zwrotu R z portfela wynosi:

$$R = \frac{\sum_{X \in A} (FV_X - FC_X(FV_X)) - FC^* \left(\sum_{X \in A} FV_X \right)}{\sum_{X \in A} (PV_X - PC_X) + PC^* \left(\sum_{X \in A} PV_X \right)}, \quad (13)$$

gdzie:

- $PC^* \left(\sum_{X \in A} PV_X \right)$ – koszty transakcyjne ponoszone w momencie zakupu portfela

akcji niezależne od wartości akcji konkretnych spółek w portfelu, a co najwyżej od łącznej wartości zakupionych akcji – np. okresowe opłaty stałe za prowadzenie rachunku przypadające na moment zakupu akcji, koszty połączeń związanych ze złożeniem zlecenia lub opłaty zależne od łącznej wartości zgromadzonych na rachunku papierów wartościowych,

- $FC^* \left(\sum_{X \in A} FV_X \right)$ – analogiczne koszty ponoszone w momencie sprzedaży akcji.

Ad 6. Możliwe jest oczywiście zastosowanie innych parametrów opisujących portfele, co prowadzić będzie do konieczności obliczenia nowych estymatorów parametrów poszczególnych akcji i całych portfeli.

Literatura

- [1] Bellalah M., Besbes S.M.. *Transaction Costs and Shadow Costs in Capital Market Equilibrium*, „Finance India”, vol. XVII, no. 1., Indian Institute of Finance 2003.
- [2] Bobryk R.V., Stettner Ł., *Discrete Time Portfolio Selection with Proportional Transaction Costs*, „Probability and Mathematical Statistics” 1999, vol. 19, fasc. 2.
- [3] Chou P.S., Liao T.L.. *Testing PSR Filters with the Stochastic Dominance Approach*, „The Journal of Portfolio Management” Spring, Institutional Investor, New York 1995.
- [4] Jakubowski J. i in., *Matematyka finansowa*, WNT, Warszawa 2003.
- [5] Luenberger D.G., *Teoria inwestycji finansowych*, PWN, Warszawa 2003.
- [6] Ostasiewicz W. (red.), *Statystyczne metody analizy danych*, AE, Wrocław 1999.
- [7] Stettner Ł., *Risk Sensitive Portfolio Optimization*, „Mathematical Methods of Operations Research” 1999, 50.
- [8] Strona internetowa Biura Maklerskiego Banku Inicjatyw Społeczno-Ekonomicznych SA: <http://www.bmbise.pl/>.
- [9] Strona internetowa Domu Maklerskiego Amerbrokers SA: <http://www.amerbrokers.pl>.
- [10] Strona internetowa Domu Maklerskiego Banku Ochrony Środowiska SA: <http://bossa.pl/>.

MODEL OF PORTFOLIO ANALYSIS WITH TRANSACTION COSTS

Summary

The paper presents extended version of Markowitz model. Unlike classical model presented solution lets take into account transaction costs. This lets avoid selecting overly diversified portfolios, which are ineffective because of high transaction costs (mainly provisions) associated with buying and selling them. The paper also includes a practical example of presented model use based on data from Warsaw Stock Exchange.