

Arkadiusz Korzeniowski

PORÓWNYWANIE WARIANTÓW PODZIAŁU GŁOSÓW W GRACH GŁOSOWANIA Z PRZEDSTAWICIELSTWEM

1. Wprowadzenie

Przez gry głosowania z przedstawicielstwem będziemy rozumieć sytuacje konfliktu bądź kooperacji, w której uczestniczy k graczy (zwanymi dalej *radą*). Każdy z nich jest przedstawicielem odpowiednio N_i mieszkańców i -tego państwa ($i = 1, 2, \dots, k$). *Rada* podejmuje decyzje typu *tak/nie* w imieniu wszystkich obywateli (zwanymi dalej *unią*). Przyjmijmy przy tym, że każdy z członków rady głosuje *tak/nie* zgodnie z wolą większości reprezentowanego społeczeństwa.

Najważniejszą kwestią jest wówczas wybór *formuły decyzyjnej* V (rozumianej najczęściej jako podział głosów i określenie wymaganego progu zapadalności decyzji) we wspomnianej *radzie*, tak aby była ona możliwa do zaakceptowania przez wszystkich reprezentantów. W ostatnich miesiącach temat ten był w Polsce przedmiotem żywej dyskusji w związku z podziałem głosów w Radzie Unii Europejskiej. Głębszą analizę tego tematu wraz z częściowym wykorzystaniem wyników niniejszego artykułu można znaleźć w pracy autora, wymienionej w spisie literatury [2].

Przejdźmy do prostego przykładu ilustrującego nasze zagadnienie. Niech A , B oznaczają dwóch przedstawicieli państw o liczebności odpowiednio $n_A = 10\,000$ oraz $n_B = 4000$ obywateli. Zastanówmy się, jaka ma być *formuła decyzyjna* V (tutaj: podział głosów) w *radzie* złożonej z A oraz B . W tym celu poczynimy następujące założenie: członkowie rady poszukują *reguły decyzyjnej* V , która będzie odzwierciedlać *czystą demokrację w unii*, czyli rezultat głosowania rady powinien być identyczny jak wynik referendum wśród wszystkich obywateli *unii* na ten sam temat. W analizowanym przykładzie *unia* liczy razem 14 000 mieszkańców. Tak więc jeśli za daną ustawą jest ponad 7000 osób, powinna zostać ona przegłosowana także w *radzie*. Stąd jeśli rozważyć hipotetyczną sytuację, że w pierwszym

z państw 8000 ludzi jest za określonym aktem prawnym, w drugim kraju natomiast wszyscy są przeciwni, oznacza to, że ustawa powinna zostać przyjęta przez *radę*. Zatem gracz A musi być dyktatorem w *radzie* (mieć ponad połowę łącznej wagi głosów). Z drugiej strony, jeśli odpowiednio w tych dwóch krajach za rozporządzeniem byłoby 6000 i 0 osób, to nie powinno ono przejść w *radzie*. Lecz jeśli gracz A jest dyktatorem, to decyzją *rady* rozważany akt prawny zostanie zatwierdzony (będzie on głosował *za*, ponieważ 6000 obywateli stanowi większość reprezentowanych przez niego obywateli). Doszliśmy do sprzeczności. Nietrudno uogólnić to rozumowanie i pokazać, że poza nielicznymi przypadkami gier z przedstawicielstwem, nie istnieją reguły decyzyjne V w *radzie*, odzwierciedlające *czystą demokrację* w unii. Wynika to z przyjęcia faktu, że delegaci poszczególnych państw mogą wybierać tylko między *tak* a *nie*. Jedynie jeśli porzucimy to założenie (reprezentanci mogą opowiedzieć się za daną ustawą procentowo *tak* i *nie*), to można by uzyskać prawdziwie demokratyczną regułę V . Takie rozwiązania nie są jednak zamierzeniem autora, celem pracy będzie szukanie rozwiązania redukującego odchylenie reguły decyzyjnej V w *radzie* od woli większości mieszkańców *unii*, gdzie członkowie *rady* wybierają *tak/nie*. Istotna będzie także umiejętność porównywania różnych formuł decyzyjnych w *radzie* w danej grze głosowania z przedstawicielstwem.

W drugim punkcie pracy wprowadzono za Felsenthalem i Machoverem niezbędne definicje i twierdzenia z teorii gier koalicyjnych, określono $\Delta[W]$ jako *średni deficyt większości*, służący do pomiaru wspomnianego wyżej odchylenia gry głosowania z przedstawicielstwem $W = V[W_1, \dots, W_m]$ od zasad *czystej demokracji* w *unii*. Zaprezentowano tezę Felsenthala i Machovera o *regule decyzyjnej* V w *radzie*, która minimalizuje $\Delta[W]$, a w szczególności przedstawiono algorytm optymalnego podziału głosów w *radzie* (minimalizacji $\Delta[W]$), nazywany drugim prawem pierwiastkowym Penrose'a (*second square-root rule* – SQRR).

W części trzeciej podano propozycję użycia wskaźnika innego niż $\Delta[W]$ do badania, na ile decyzje *rady* (w grze głosowania z przedstawicielstwem $W = V[W_1, \dots, W_m]$) różniłyby się od wyboru wszystkich obywateli *unii* – tzw. *wskaźnika niezgodności* $s[W]$. Opisane rozumowanie wydaje się bardzo intuicyjne i może być traktowane w pewnych sytuacjach jako alternatywne do $\Delta[W]$. W dalszej kolejności pokazano możliwości aplikacji $s[W]$ obok $\Delta[W]$ i praw pierwiastkowych Penrose'a do porównywania wariantów przydziału głosów w grach głosowania z przedstawicielstwem.

W ostatnim, czwartym punkcie wymieniono najważniejsze wnioski odnośnie porównywania wariantów podziału głosów w grach głosowania z przedstawicielstwem oraz inne uwagi dotyczące problemów wyboru formuły decyzyjnej w *radzie* w grach głosowania z przedstawicielstwem.

2. Optymalny przydział głosów w grach głosowania z przedstawicielstwem – model Felsenthala i Machovera, wskaźnik $\Delta[W]$

Pierwsze prawo pierwiastkowe Penrose’a z 1946 r. mówi, że aby głos każdego z obywateli *unii* był jednakowo ważny, to reguła decyzyjna w *radzie* musi być taka, że „siła głosu każdego z państw powinna być proporcjonalna do pierwiastka z liczby ludności danego kraju”. Pozornie bardzo podobne twierdzenie Felsenthala i Machovera (nazywane drugim prawem pierwiastkowym) zostanie fragmentarycznie wyprowadzone poniżej. W tym celu, a także na potrzeby punktu trzeciego artykułu wypisano kilka definicji i wzorów z teorii gier koalicyjnych.

Definicja 1. Przez grę głosowania (zwaną także grą prostą, grą koalicyjną) rozumiemy zbiór W (koalicji wygrywających) podzbiorów skończonego zbioru I_n , taki że $\emptyset \in W$ i $I_n \in W$ oraz jeśli $X \in W$ i $X \subseteq Y \subseteq I_n$, to $Y \in W$. Mówiąc o I_n , mamy na myśli zbiór n graczy (wyborców) $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$. Koalicje nie należące do W są koalicjami przegrywającymi.

Definicja 2. Wyborca a jest krytyczny w grze głosowania W dla koalicji S , jeśli $S \in W$, ale $S \cup \{a\} \in W$.

Definicja 3. Niech q to dodatnia liczba rzeczywista i $w_1, \dots, w_n$ to nieujemne rzeczywiste liczby przyporządkowane kolejnym wyborcom ze zbioru $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$, takie że $0 < q < \sum_{i=1}^n w_i$. Liczbę q nazywać będziemy kworum (progiem), a w_i wagą i -tego wyborcy. Dalej jeśli dla koalicji $S \subseteq I_n$ oznaczmy $w(S) = \sum_{i \in S} w_i$, to $w(S)$ będziemy nazywać wagą koalicji S . Przez grę $[q; w_1, \dots, w_n]$ będziemy oznaczać grę głosowania zbioru I_n wyborców, dla której koalicjami wygrywającymi będą tylko te $S \subseteq I_n$, gdzie $w(S) \geq q$. Gry takie będziemy nazywać *grami ważonego głosowania*. W szczególności grę $[(n+1)/2; \underbrace{1, \dots, 1}_{n \text{ razy}}]$ określamy

jako *grę głosowania większości z jednakową wagą wyborców*.

Definicja 4. Dla skończonego zbioru I_n wyborców ustalamy przestrzeń probabilistyczną Bernoulliego, w której zdarzeniami elementarnymi będą wszystkie podzbiory zbioru I_n , z których każdy ma przyporządkowaną jednakową wartość funkcji prawdopodobieństwa 2^{-n} ($|I_n| = n$).

Definicja 5. Niech W będzie grą głosowania z n wyborcami ze zbioru I_n i $a \in I_n$. Wówczas siłą głosu gracza a w grze W będzie indeks Banzhafa (nie znormalizowany, absolutny) definiowany jak następuje:

$$\beta'_a[W] = \text{def } P\{X \subseteq I_n : a \text{ jest krytyczny dla koalicji } X\}.$$

Definicja 6. Dla dowolnej gry głosowania W ze zbiorem graczy I_n oznaczmy sumę indeksów Banzhafa wszystkich graczy jako:

$$\Sigma[W] = \text{def } \sum_{x \in I_n} \beta'_x[W].$$

Definicja 7. Dla gry głosowania W ze zbiorem graczy I_n ($|I_n| = n$), zdefiniujemy zmienną losową $D[W]$, nazywaną *deficytem większości*, w przestrzeni Bernoullego. Wartość zmiennej $D[W]$ dla dowolnej koalicji $S \subseteq I_n$ równa się odpowiednio:

- zeru, jeśli koalicja $S \in W$ oraz S stanowi większość spośród n graczy,
- zeru, jeśli $S \notin W$ oraz S stanowi mniejszość wśród n graczy,
- bezwzględnej różnicy między $|S|$ i $|I_n - S|$ w przeciwnym wypadku.

Dalej, oznaczmy wartość oczekiwaną zmiennej $D[W]$ jako $\Delta[W] = \text{def } E(D[W])$. Będziemy ją nazywać *średni deficyt większości*.

Twierdzenie 1 (Felsenthala, Machovera)

$$\Delta[W] \approx \frac{\sqrt{\frac{2n}{\pi}} - \Sigma[W]}{2},$$

gdzie n oznacza liczbę graczy w grze głosowania W ze zbiorem wyborców I_n .

Definicja 8. Niech m będzie dodatnią liczbą całkowitą, V grą głosowania ze zbiorem graczy $I_m = \{1, 2, \dots, m\}$, określanych dalej jako delegaci (przedstawiciele, reprezentanci). Dla każdego $i \in I_m$, niech W_i będzie grą głosowania ze zbiorem

graczy N_i (grą głosowania w danym państwie). Oznaczmy $I_n = \text{def } \bigcup_{i=1}^m N_i$ (oczy-

wiście wszystkie elementy N_i są rozróżnialne). Po pierwsze zdefiniujemy *zbiór większości zbioru* $X \subseteq I_n$ jako $r(X) = \text{def } \{i \in I_m : X \cap N_i \in W_i\}$. Określimy *grę głosowania z przedstawicielstwem* jako grę $\Omega = V[W_1, \dots, W_m] = \text{def } \{X \subseteq I_n : r(X) \in V\}$.

W ostatniej definicji zostaje bardzo precyzyjnie ujęty model gier głosowania z przedstawicielstwem. Dalej, *średni deficyt większości* jest dobrym narzędziem pomiaru odchylenia danej gry głosowania od „woli większości”. Co więcej, Felsenthal i Machover znaleźli warunki konieczne i wystarczające dla gier głosowania z przedstawicielstwem, aby $\Delta[\Omega]$ było minimalne. Przyjęli przy tym m.in. następujące założenia:

- (Z1) każda z gier W_i jest grą głosowania większości,
- (Z2) wielkość $n_i = |N_i|$ każdego z państw reprezentowanych przez delegatów jest na tyle duża, że błąd związany ze stosowaniem przybliżenia Stirlinga na $n_i!$ jest zaniedbywalnie mały,

• (Z3) indeks Banzhafa mieszkańca, zamieszkującego i -ty kraj *unii*, w grze głosowania Ω z przedstawicielstwem wyraża się wzorem $\beta'_x[W] \approx \beta'_x[W_i] \beta'_i[V]$ (wynika z pewnego przybliżenia oraz z wcześniej opisanego założenia, że delegowany i -tego państwa „zna” rozkład głosów w swoim kraju i głosuje zgodnie z wolą większości swojego społeczeństwa).

Wtedy mamy:

Lemat 1 (Felsenthala i Machovera). Dla gry $\Omega = V[W_1, \dots, W_m]$ głosowania z przedstawicielstwem średni deficyt większości określony jest przez:

$$\Delta[\Omega] \approx \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\sqrt{n} - \sum_{i=1}^m \sqrt{n_i} \beta'_i[V] \right)}{2}.$$

Twierdzenie 2 (Felsenthala i Machovera). Dla danej gry głosowania z przedstawicielstwem $\Omega = V[W_1, \dots, W_m]$ prawa strona wyrażenia $\Delta[\Omega]$ z lematu 1 przyjmuje wartość najmniejszą (m, n_i ustalone) wtedy i tylko, wtedy gdy w szukanej grze V spełnione są dwa następujące warunki:

- (i) każda koalicja T , dla której $w(T) < w/2$ jest koalicją przegrywającą,
- (ii) Każda koalicja T , dla której $w(T) > w/2$ jest koalicją wygrywającą,

gdzie $w_i = \sqrt{n_i}$, $w(T) = \sum_{i \in T} w_i$ oraz $w = \sum_{i=1}^m w_i$ (*drugie prawo pierwiastkowe*).

W szczególności prawa strona wyrażenia $\Delta[\Omega]$ z lematu 1 przyjmuje wartość minimalną, jeśli

$$V = [w/2 + \varepsilon; w_1, \dots, w_n],$$

gdzie ε jest bardzo małą liczbą dodatnią.

Powyższe prawo pierwiastkowe (Felsenthal i Machover przypisują je Morrisowi – jako pierwszemu, który je stosunkowo precyzyjnie wymienia) podaje przejrzysty sposób przydziału głosów w grach głosowania z przedstawicielstwem. Jeśli wagi poszczególnych przedstawicieli będą równe pierwiastkowi z liczby ludności reprezentowanych państw w grze głosowania większości, to gra taka będzie jedną z gier minimalizujących odchylenie od woli większości (mierzone $\Delta[\Omega]$). Warto zauważyć, że może istnieć wiele gier spełniających warunki (i) oraz (ii) twierdzenia drugiego.

Na koniec podkreślmy, że opisane wyżej twierdzenie minimalizuje nie $\Delta[\Omega]$, lecz przybliżenie tej wartości (lemat 1). Dlatego otrzymane rozwiązanie nie musi być najlepsze i jedynie dla gier głosowania z przedstawicielstwem z dużą liczbą uczestników będzie optymalne.

3. Porównywanie procedur decyzyjnych w grach głosowania z przedstawicielstwem

Definicja 9. Przez procedurę decyzyjną w grze głosowania z przedstawicielstwem $\Omega = V[W_1, \dots, W_m]$ rozumiemy wybór $V \subseteq 2^{I_m}$ ($I_m = \{1, 2, \dots, m\}$) koalicji wygrywających w grze głosowania V delegatów (2^{I_m} – zbiór wszystkich podzbiorów zbioru I_n).

Zacytowane twierdzenie drugie pozwala na znalezienie optymalnej procedury w grze $\Omega = V[W_1, \dots, W_m]$ – gry V ważonego głosowania, minimalizującej odchylenie $\Delta[W]$ od woli większości. Wielkość $\Delta[\Omega]$ można dość precyzyjnie określić dla gry głosowania z przedstawicielstwem (lemat 1). Proponuję więc zastosować ten wzór do porównywania różnych procedur decyzyjnych w grach głosowania z przedstawicielstwem spełniających założenia Felsenthala i Machovera (m.in. Z1-Z3). Im mniejsza wartość $\Delta[\Omega]$, tym bardziej gra jest zbliżona do głosowania zgodnie z wolą większości.

Dodatkowo chciałbym w tym miejscu wprowadzić alternatywną metodę pomiaru odchylenia gry głosowania z przedstawicielstwem od zasad czystej demokracji. Wskaźnik ten może być pewnym uzupełnieniem do wartości $\Delta[\Omega]$, a w niektórych realnych przypadkach bardziej uniwersalnym narzędziem porównywania procedur decyzyjnych w grach głosowania z przedstawicielstwem.

Założmy zatem, że w grze uczestniczy m państw tworzących unię, każdy z krajów złożony ze zbioru N_i obywateli. Chcemy, ażeby ustawa, w wyniku głosowania przedstawicieli *rady*, przechodziła tylko wtedy, gdy jest za nią większość osób

(bądź inne ustalone kworum) z *unii* $I_n = \bigcup_{i=1}^m N_i$ i na odwrót: ustawa nie przechodzi-

ła jeśli jest za nią mniejszość (bądź poniżej pewnego progu) osób. Tak więc intuicyjnym wskaźnikiem pokazującym na ile dana procedura decyzyjna odbiega od wyboru większości, może być prawdopodobieństwo zdarzenia, że wynik głosowania nad daną ustawą w *radzie* będzie niezgodny z wolą większości (bądź innym ustalonym kworum) reprezentowanych obywateli *unii*. Jako przestrzeń probabili-

styczną biorę zbiór z definicji 4, gdzie $I_n = \bigcup_{i=1}^m N_i$. Podobnie jak w punkcie drugim

pracy przyjmuję, że przedstawiciele głosują zgodnie z decyzją gier W_i .

Definicja 10. Wskaźnikiem $s[\Omega]$ niezgodności będziemy nazywać prawdopodobieństwo, że dana procedura decyzyjna V gry głosowania z przedstawicielstwem $\Omega = V[W_1, \dots, W_m]$ jest niezgodna z wolą większości *unii*

$$s[\Omega] = P\{X \subseteq I_n : (r(X) \in V \wedge |X| < q) \vee (r(X) \notin V \wedge |X| > q)\},$$

gdzie q oznacza ustalony próg zapadalności decyzji wśród obywateli państw *unii*.

Choć zazwyczaj $q = \lfloor N \rfloor / 2 + \varepsilon$ (ε – bardzo mała liczba dodatnia), wskaźnik ten równie dobrze może posłużyć do weryfikacji gier głosowania z przedstawicielstwem, w których decyzje zapadają inaczej niż zwykłą większością głosów. Oczywiście gry W_i niekoniecznie muszą być grami głosowania większości.

Należy jeszcze raz podkreślić, że $\Delta[\Omega]$ jest także odpowiedni jako wskaźnik odchylenia danej gry od woli większości. Wydaje się jednak, że w niektórych przypadkach dąży się do minimalizacji liczby przypadków niezgodności z wolą większości, a nie do minimalizowania wartości oczekiwanej $\Delta[\Omega]$.

Przykład 1

Niech $\Omega = V[W_1, \dots, W_m]$, gdzie każda z gier W_i jest grą głosowania większości – przedstawiciele poszczególnych państw głosują *tak*, jeśli ponad połowa mieszkańców ich kraju jest za *tak*. Oznaczmy $n_i = |N_i|$ – liczba ludności i -tego kraju,

$n = \sum_{i=1}^m n_i$ jest wielkością populacji unii. Chcemy policzyć wskaźnik $s[\Omega]$ dla pro-

cedury decyzyjnej $V = [q; w_1, \dots, w_m]$. Wtedy:

$$s[\Omega] = \sum_{i \in M} \frac{1}{2^n},$$

$$\text{gdzie } M = \left\{ (i_1, \dots, i_m) : 0 \leq i_k \leq n_k \wedge i_k \in Z \wedge \left(2 \sum_{k=1}^m i_k - n \right) \left(2 \sum_{k=1}^m \left[\frac{i_k}{n_k} + \frac{1}{2} \right] \cdot w_k - q \right) < 0 \right\}$$

(Z – liczby całkowite, $[a]$ – część całkowita z a).

Wzór ten otrzymano, sumując liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych, dla których:

- ustawa przechodzi zgodnie z wolą większości ludzi w unii, ale nie zostanie przyjęta przez radę (przedstawiciele państw, którzy mają przydzielone wagi głosów w_i),

- ustawa nie przechodzi zgodnie z wolą większości ludzi w unii, ale zostanie przyjęta przez radę.

Uogólnieniem tego rozumowania będzie wskaźnik $s[\Omega]$, gdy znana jest tylko procentowa liczba obywateli danego kraju w stosunku do ludności unii oraz procentowa wielkość wagi głosów określonego delegata w stosunku do wymaganego kworum q .

Przykład 2

Niech *unia* składa się z trzech państw o liczebności odpowiednio 4, 9, 16 mln osób. Zgodnie z twierdzeniem 2, procedurą decyzyjną minimalizującą wartość $\Delta[\Omega]$ gry głosowania z przedstawicielstwem jest $V' = [5; 2, 3, 4]$. Licząc wskaźnik

niezgodności, otrzymamy $s[\Omega'] \approx 0,19$ oraz *średni deficyt większości* $\Delta[\Omega'] \approx 353$. Natomiast dla procedury decyzyjnej $V'' = [15; 4, 9, 16]$ (podział głosów proporcjonalny do liczby ludności) uzyskamy $s[\Omega''] \approx 0,15$ i $\Delta[\Omega''] \approx 552$. Widać, że wskazania są inne przy $s[\Omega]$ i $\Delta[\Omega]$. W procedurze V' każdy z przedstawicieli ma taką samą siłę głosu, wydaje się to niesprawiedliwe, chociażby ze względu na to, że populacja trzeciego kraju jest cztery razy większa niż pierwszego. Z drugiej strony dla formuły V'' gracz trzeci jest dyktatorem – sytuacja taka również jest nie do zaakceptowania, gdyż w czystej demokracji obywatele krajów pierwszego i drugiego mieliby dodatnią siłę głosu. Dlatego w takich okolicznościach proponuję *formułę decyzyjną* pomiędzy grą V' i V'' , np. $V''' = [6; 2, 3, 4]$, która wzmacnia siłę gracza trzeciego w porównaniu z V' , a jednocześnie nie czyni go dyktatorem. Wtedy $s[\Omega'''] \approx 0,17$ i $\Delta[\Omega'''] \approx 452$. Na analizowanym przykładzie zauważam, że kierowanie się wartością $\Delta[\Omega]$ może być niesprawiedliwe dla dużych państw. Użycie wskaźnika $s[\Omega]$ do oceny różnych procedur decyzyjnych w grach głosowania z przedstawicielstwem jest w takich warunkach trafniejsze. Podsumowując, ostatecznie zalecam wybór formuły V''' .

Przykład 3

Weźmy unię składającą się z czterech państw, liczących odpowiednio 9, 1, 1, 1 mln mieszkańców (dane zaczerpnięte z [1]). Procedura decyzyjna zgodna z pierwszym prawem pierwiastkowym Penrose'a ustala $V = [3; 2, 1, 1, 1]$, uzyskujemy wówczas $\Delta[\Omega] \approx 185$. Spełnia ona warunki (i) oraz (ii) twierdzenia 2 – tym samym gwarantuje minimalną wartość średniego deficytu większości. Twierdzenie 2 podaje nam jednak jeszcze jedną grę ważonego głosowania, dla której $\Delta[\Omega]$ jest najmniejsze. Jest to procedura $V' = [4; 3, 1, 1, 1]$ (oczywiście $\Delta[\Omega'] \approx 185$). W takiej sytuacji należałoby się zastanowić, którą formułę wybrać. Proponuję obliczyć wskaźnik niezgodności, równy odpowiednio $s[\Omega] \approx 0,13$ oraz $s[\Omega'] \approx 0,08$. Tak więc przy V' prawdopodobieństwo, że wynik głosowania będzie niezgodny z czystą demokracją, będzie znacznie mniejsze niż przy V – należy wybrać V' . *Wskaźnik niezgodności* może być zatem skutecznie wykorzystywany przy weryfikacji procedur V , dla których *średni deficyt większości* osiąga jednakową wartość.

Przykład 4

Rozważmy trzy wydziały na uczelni liczące odpowiednio 144, 225 i 324 nauczycieli akademickich. Wybierana jest trzyosobowa rada składająca się z delegatów z każdego wydziału. W tym przypadku nie są spełnione założenia twierdzenia drugiego (Z2), więc nie ma jasnego wskazania procedury decyzyjnej minimalizującej $\Delta[\Omega]$. Można natomiast porównywać różne warianty podziału głosów w *radzie* wskaźnikiem niezgodności $s[\Omega]$. I tak dla formuły $V = [23; 12, 15, 18]$ (wagi głosów proporcjonalne do pierwiastka kwadratowego z liczby reprezentowanych graczy) wskaźnik niezgodności wynosi $s[\Omega] \approx 0,16$.

Jako procedurę decyzyjną można wskazać nie tylko grę ważonego głosowania. Weźmy następującą formułę: ustawa przechodzi, jeśli głosują za nią przynajmniej przedstawiciele dwóch wydziałów bądź suma reprezentowanych osób przez przedstawicieli głosujących za daną decyzją stanowi co najmniej 45% łącznej liczby nauczycieli. Wtedy wskaźnik $s[\Omega] \approx 0,18$. Wybieram więc spośród dwóch wymienionych procedur $V = [23; 12, 15, 18]$.

4. Wnioski końcowe

Pierwsze i drugie prawo pierwiastkowe Penrose'a wskazują na wybór procedury decyzyjnej w grach głosowania z przedstawicielstwem optymalnej pod względem określonego kryterium: równomierny rozkład siły głosu wśród obywateli unii w przypadku pierwszego prawa oraz minimalizowanie odchylenia gry głosowania z przedstawicielstwem od woli większości przy drugim prawie.

Często jednak spotyka się sytuacje, gdy należy wybrać między kilkoma wariantami reguł decyzyjnych w danej grze głosowania z przedstawicielstwem, z których żadna nie jest optymalna. Wtedy za kryterium wyboru w niniejszej pracy przyjęto minimalizowanie odchylenia decyzji *rady* od woli większości *unii*. Jako jego miarę proponuję dwa wskaźniki: $\Delta[\Omega]$ – wartość oczekiwaną zmiennej losowej *deficyt większości* (definicja 7 i lemat 1) oraz wprowadzony przeze mnie wskaźnik *niezgodności* $s[\Omega]$ (definicja 10). Służą one alternatywnie do oceny przydziału głosów, a czasami się uzupełniają. Przewagą wskaźnika $s[\Omega]$ może być jego intuicyjny charakter i uniwersalność, wadą natomiast – złożoność obliczeniowa w przypadku gier z bardzo dużą liczbą uczestników. Ciekawym rozwinięciem wskaźnika $\Delta[\Omega]$ (jeśli ma przedstawiać całkowite średnie odchylenie) mogłoby być poszerzenie go, o uwzględnianie odchyleń danej reguły decyzyjnej zgodnych z wolą większości, tak aby *średni deficyt większości* nie preferował małych państw przy wyborze procedur decyzyjnych.

Warto nadmienić, że minimalne $\Delta[\Omega]$ nie musi pociągać za sobą najmniejszego $s[\Omega]$. Wskaźnik $\Delta[\Omega]$ wydaje się bardziej uwzględniać równość obywateli unii, a $s[\Omega]$ w większym stopniu odzwierciedla wolę większości. W związku z tym zalecam porównywanie wariantów procedur decyzyjnych jednocześnie za pomocą $s[\Omega]$ i $\Delta[\Omega]$ (przykład drugi).

Literatura

- [1] Felsenthal D.S., Machover M., *Minimizing the mean majority deficit: the second square-root rule*. „Mathematical Social Sciences” 1999, 37, 25-37.
- [2] Korzeniowski A., *Metody i zastosowania badań operacyjnych*, [w:] T. Trzaskalik (red.), *Wpływ głosu Polski na decyzje Rady Unii Europejskiej*, AE, Katowice 2004, s. 211-222.

-
- [3] Lissowski G., *Elementy teorii wyboru społecznego*, Scholar, Warszawa 2001.
 - [4] Małowski M., Wiczcerek A., Sosnowska H., *Konkurencja i kooperacja. Teoria gier w ekonomii i naukach społecznych*, PWN, Warszawa 1997.
 - [5] Mercik J.W., *Sila i oczekiwania. Decyzje grupowe*, PWN, Warszawa 1999.
 - [6] Słomczyński W., Życzkowski K., *Voting in the European Union: The square-root system of Penrose and a critical point*, preprint, 2004.
 - [7] Straffin P.D., *Teoria gier*, Scholar, Warszawa 2001.

COMPARING VOICE DISTRIBUTION AMONG COUNCIL IN TWO-TIER COMPOSITE SVG

Summary

First we present Felsenthal and Machover's model of a *two-tier composite SVG* and a *theorem* of optimal (reflecting the „direct democracy“ within all constituencies) voice distribution in the *council of representatives*. Further, from the definition of the *mean majority deficit* $\Delta[W]$ of Felsenthal–Machover, the author proposes a method to compare *decision rules* V in a $W = V[W_1, \dots, W_m]$. Additionally the author introduces *index of disharmony* $s[W]$ to measure the probability that in a division of the *council* a bill will pass/fail against the majority. With the help of $s[V]$ he confronts different two-tier composite SVG $W = V[W_1, \dots, W_m]$ and the distribution V of voices in given $W = V[W_1, \dots, W_m]$.

Mgr Arkadiusz Korzeniowski jest pracownikiem Katedry Badań Operacyjnych w Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu.