

Bartłomiej Nita

STOCHASTYCZNE MODELOWANIE ZMIAN CEN AKTYWÓW W PODEJMOWANIU DECYZJI INWESTYCYJNYCH

1. Wstęp

Zasadniczy cel działalności przedsiębiorstwa jest współcześnie rozumiany jako dążenie do maksymalizacji jego wartości, a tym samym bogactwa jego właścicieli. Zarządzanie przez wartość (*value-based management*) postuluje poszukiwanie takich metod prowadzenia działalności gospodarczej, które umożliwią systematyczne powiększanie wartości przedsiębiorstwa. Aby tego dokonać, należy m.in. we właściwy sposób wybierać projekty inwestycyjne, tzn. przyjmować do realizacji te, które zapewnią generowanie wartości dodanej. Najważniejszą rolę odgrywają w tym zakresie koncepcje oparte na zdyskontowanych przepływach pieniężnych, a w szczególności kryterium wartości bieżącej netto NPV (*Net Present Value*). Dzięki dostrzeganiu osadzonych w projektach inwestycyjnych możliwości ich modyfikacji ostatnio coraz częściej stosuje się analizę opcji realnych. W związku z tym większego znaczenia nabiera modelowanie przyszłych zmian cen aktywów, które są jednym z czynników wpływających na wartość tych opcji, a jednocześnie na efektywność projektów.

Celem artykułu jest przedstawienie znaczenia modelowania zmian cen aktywów z perspektywy podejmowania decyzji inwestycyjnych w przedsiębiorstwie, głównie w warunkach stosowania opcji realnych. W tym kontekście omówiono wykorzystywany do opisu zmian cen geometryczny ruch Browna i na tym gruncie wskazano, że znacznie większą przydatnością nacechowane są stochastyczne procesy uwzględniające powrót ceny aktywów do długoterminowego poziomu przeciętnego, w szczególności proces Ornsteina–Uhlenbecka.

2. Ceny aktywów a podejmowanie decyzji inwestycyjnych

Podjęcie decyzji inwestycyjnych w przedsiębiorstwach wiąże się z szacowaniem cen sprzedaży produktów ich działalności. Przychody ze sprzedaży są bowiem najważniejszym elementem prognozowania strumieni wolnych przepływów środków pieniężnych. Problem ten nabiera szczególnego znaczenia w sektorach, które zajmują się produkcją energii elektrycznej lub wydobywaniem surowców i złóż mineralnych, takich jak: ropa naftowa, gaz czy miedź. Zmienność cen wymienionych surowców przybiera niejednokrotnie znaczne rozmiary. Na przykład zmienność cen ropy naftowej i gazu ziemnego kształtuje się na poziomie 2-6%, natomiast energii elektrycznej dochodzi nawet do 50% w skali dziennej [14].

Konieczność modelowania cen tego rodzaju aktywów jest zatem bezdyskusyjna. Wynika ona ponadto ze stosowania coraz bardziej skomplikowanych metod oceny efektywności inwestycyjnych. Okazuje się, że techniki oparte na wyłącznie zdyskontowanych przepływach pieniężnych DCF (*Discounted Cash Flow techniques*) wychodzą z założenia, że przyjęcie do realizacji projektu inwestycyjnego z dodatnią wartością bieżącą netto NPV powiększy wartość przedsiębiorstwa o tę właśnie wyrażoną kwotowo wielkość. Takie podejście jest uzasadnione i poprawne, jednakże nie zawsze wystarczające ze względu na to, że współczesne przedsiębiorstwa są zmuszone do funkcjonowania w niezwykle turbulentnym otoczeniu. Złożone procesy gospodarcze, które w nim zachodzą, prowadzą do ciągłych zmian czynników wpływających na uczestników rynku, a tym samym na opłacalność rozważanych projektów.

Powszechnie stosowane kryterium NPV jest obecnie postrzegane jako statyczne, ponieważ NPV jest kalkulowane na dany moment i nie przewiduje sytuacji, które mogą zaistnieć w praktyce gospodarczej w przyszłości. Ponadto w obliczeniach z góry zakłada się znajomość wszystkich parametrów mających wpływ na opłacalność inwestycji. W rezultacie kryterium NPV nie bierze pod uwagę możliwości reagowania na nowe okoliczności, takie jak [5, s. 89]:

- niespodziewane załamanie rynku, które prowadzi do zmniejszenia rozmiarów działalności,
- ceny inne niż oczekiwane, co może mieć znaczny wpływ na opłacalność projektu,
- wyjątkowo pomyślną koniunkturę, która pozwala rozszerzyć działalność.

Reakcja na takie zdarzenia nie jest wpisana w logikę narzędzi DCF. Innymi słowy, NPV po prostu nie uwzględnia wartości, która może wynikać z decyzji zarządu o potencjalnym rozszerzeniu lub wycofaniu projektu, opóźnieniu w czasie czy chwilowym wstrzymaniu jego realizacji. Sam fakt, że NPV danego projektu jest ujemne, nie może stanowić podstawy do stwierdzenia, że prawa do tego projektu są bezwartościowe.

Wartość bieżąca netto mieści się w ramach pasywnego zarządzania, gdzie rezultat końcowy jest znany z góry, a menedżerowie nie są w stanie odnaleźć ukrytej w projektach inwestycyjnych wartości. Metodologia DCF zakłada po prostu scenariusz najbardziej prawdopodobny [11]. L. Platt, szef Hewlett-Packard, twierdzi, że „obecnie każdy, kto mówi, że ma pięcio- lub dziesięcioletni plan, jest prawdopodobnie szalony. Teraz jest era planowania scenariuszy” [4].

Uwzględnienie zarzutów przedstawionych pod adresem NPV wymaga w ramach procedur budżetowania kapitałowego takiego podejścia, które wykorzystuje opcje realne. Techniki wykorzystujące wartość bieżącą netto nadal są niezwykle potrzebne oraz wartościowe i nie należy w żadnym wypadku umniejszać ich znaczenia. Jednak opcje realne pozwalają na głębszą analizę problemu związanego z oceną efektywności projektów inwestycyjnych i niejako rozszerzają znane dotychczas metody dzięki dostrzeganiu osadzonych w projektach inwestycyjnych różnych możliwości ich modyfikacji¹. Podział opcji realnych ze względu na duże możliwości ich konstruowania nie jest zadaniem łatwym. Można jednak wyróżnić kilka podstawowych rodzajów, do których zalicza się opcje: opóźnienia (*option to delay*), rozwoju (*option to expand*) i wyjścia (*option to abandon*)². Jednym z ciekawszych rodzajów opcji jest opcja elastyczności (*flexibility option*), która może mieć bardzo szeroką interpretację. Najogólniej można powiedzieć, że pozwala na dostosowywanie procesu produkcyjnego do warunków panujących na rynku i korzystanie ze sprzyjających okoliczności, uwarunkowanych głównie zmianami cen środków produkcji. Można ją również postrzegać jako prawo do uruchamiania lub zamykania fabryki w zależności od popytu i cen.

Możliwość ponownego uruchomienia działalności w sytuacji, gdy przedsięwzięcie jest nieczynne, jest równoważna amerykańskiej opcji kupna. Natomiast zamknięcie działalności w obliczu niesprzyjających warunków jest równoznaczne opcji sprzedaży. Przedsięwzięcie, które można dynamicznie uruchamiać i zamykać (lub przedsięwzięcie, które można przenieść z jednego miejsca na drugie), ma wyższą wartość od przedsięwzięcia pozbawionego tej elastyczności [3, s. 445].

¹ Opcję realną można zdefiniować, wykorzystując analogię do opcji finansowej. Opcja realna oznacza zatem prawo jej posiadacza do kupna lub sprzedaży szeroko rozumianych aktywów bazowych (instrumentu podstawowego, którym jest najczęściej projekt inwestycyjny) w określonych rozmiarach, po ustalonej cenie i w zadanym czasie. Opcję tę wykonuje się wtedy, gdy jest to korzystne z punktu widzenia przedsiębiorstwa.

Najogólniej można powiedzieć, że opcja realna to prawo modyfikowania projektu inwestycyjnego w przedsiębiorstwie [2, s. 269]. Umożliwia kreowanie wartości przedsiębiorstwa, ponieważ jeśli wszystko idzie pomyślnie, to projekt może być rozszerzony, jeżeli zaś sytuacja okaże się niesprzyjająca, to można zaniechać jego wykonanie. Projekty, które mogą być łatwo modyfikowane w ten sposób, są o wiele bardziej wartościowe niż te, które nie dostarczają takiej elastyczności. Dlatego im bardziej przyszłość jest niepewna, tym bardziej w cenie jest ta elastyczność.

² Różne podziały i charakterystyki poszczególnych rodzajów opcji realnych są przedstawione m.in. w następujących publikacjach: [3, s. 442-445; 5, s. 89-105; 11; 12, s. 2-3].

Uściślając – opcja kupna (*call*) w tej sytuacji to prawo (ale nie obowiązek) do uruchomienia (wykonania opcji) np. fabryki.

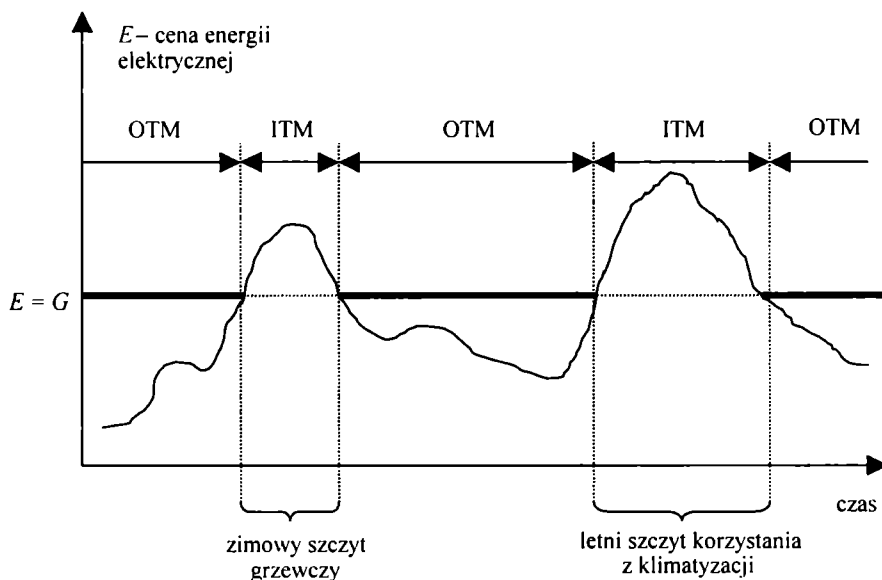
W celu wyjaśnienia istoty tego rodzaju opcji oraz znaczenia modelowania zmian cen aktywów wykorzystajmy przykład elektrowni, w której na wejściu procesu produkcyjnego jest gaz, a na wyjściu – energia elektryczna. Przedsiębiorstwem, które szeroko wykorzystywało tego rodzaju instrumenty, był Enron, początkowo w latach osiemdziesiątych w sposób tradycyjny zajmujący się produkcją energii. Deregulacja na rynku amerykańskim doprowadziła do wielkiej konkurencji, a tym samym do ogromnej zmienności cen. Od tej pory menedżerowie Enronu zaczęli myśleć o różnych formach zarządzania ryzykiem i radzenia sobie z fluktuacjami cen energii elektrycznej.

W czerwcu 1999 r. Enron przygotowywał się do otwarcia trzech elektrowni napędzanych gazem, które miały generować prąd po koszcie krańcowym o 50-70% wyższym niż najlepsze przedsiębiorstwa w branży. Wbrew pozorom szefowie Enronu postępowali racjonalnie, budując elektrownie o wyższych kosztach wytwarzania, mogli bowiem pozostawić je nie wykorzystane, a uruchamiać tylko wtedy, gdy ceny prądu gwałtownie rosły. W czerwcu 1998 r. cena jednostki prądu (1 MWh) na środkowym zachodzie Stanów Zjednoczonych wzrosła z 40 USD do bezprecedensowej wielkości 7000 USD. Przy tak znaczącej zmienności cen Enron mógł teoretycznie zarabiać ogromne pieniądze nawet, gdyby uruchamiał swoje elektrownie tylko na jeden tydzień w roku [4]. Tylko w ciągu trzech dni – od 22 do 24 czerwca – ceny wzrosły ze 180 USD/MWh do 550 USD/MWh. Wiele firm brokerskich poniosło z tego powodu niepowetowane straty (m.in. First Energy Trading and Power Marketing), jednak znalazły się oczywiście firmy, które zarobiły na krachu. Należały do nich AEP, Utilicorp, Washington Water & Power, Avista Energy oraz Enron [14].

Rozważmy zatem, w jaki sposób można skorzystać na tak ogromnych fluktuacjach cen energii elektrycznej. W tym celu warto przeanalizować opcję uruchomienia elektrowni odpowiadającą w sensie ekonomicznym opcji kupna (*call*). Jeśli zarząd ma operacyjną możliwość nieuruchamiania elektrowni, gdy ceny prądu są za niskie, to dochód przez nią generowany ma dolny limit równy zeru, a w praktyce jest to ujemna wielkość równa kosztom utrzymywania fabryki w gotowości. Jednocześnie górny potencjał dochodowy jest nieograniczony, gdyż im wyższa cena prądu, tym wyższe przepływy pieniężne. Można powiedzieć, że w tym przypadku opcja jest wystawiona na różnicę między ceną energii elektrycznej a ceną gazu (*spark spread*). Jest to daleko idące uproszczenie, gdyż w praktyce jednostka gazu na wejściu nie odpowiada jednostce energii elektrycznej na wyjściu i należałoby uwzględnić pewien współczynnik, zgodnie z którym można przeliczyć, ile jednostek gazu należy zużyć, aby wyprodukować 1 MWh energii. Cena wykonania tej opcji jest równa zeru, co oznacza, że ceny energii elektrycznej oraz gazu są sobie równe, i jest to wartość progowa, która ma decydujące znaczenie w procesie decyzyjnym związanym z wykonaniem opcji (uruchomieniem elektrowni). Innymi sło-

wy, jeśli cena prądu jest wyższa od ceny gazu, to opłaca się uruchamiać elektrownię, w przeciwnym zaś razie będzie to decyzja nierozsądna.

Aby podkreślić znaczenie modelowania zmian cen aktywów, na rys. 1 przedstawiono przykład kształtowania się ceny energii elektrycznej w określonym przedziale czasu oraz wpływ jej zmian na decyzje dotyczące uruchamiania i wyłączania elektrowni. W Stanach Zjednoczonych występują dwa zasadnicze okresy, w których można osiągnąć duże zyski ze sprzedaży prądu, gdyż popyt na energię elektryczną jest wtedy ogromny i tym samym jego ceny czasami znacznie przekraczają przeciętne rozmiary. Chodzi tu o zimowy sezon grzewczy i miesiące letnie, w których występuje wzmożone korzystanie z klimatyzacji zainstalowanej w domach mieszkalnych i biurach. Jeśli w jednym z tych okresów cena energii elektrycznej ze względu na wysoki popyt osiąga ponadprzeciętne wartości i przekracza cenę gazu, to opcja „jest w cenie” (ITM – *in the money*) i można ją wykonać, czyli uruchomić elektrownię. W przeciwnym razie opcja „nie jest w cenie” (OTM – *out of the money*) i nie należy jej wykonywać, a tym samym uruchamiać fabryki, gdyż będzie to powodować straty.

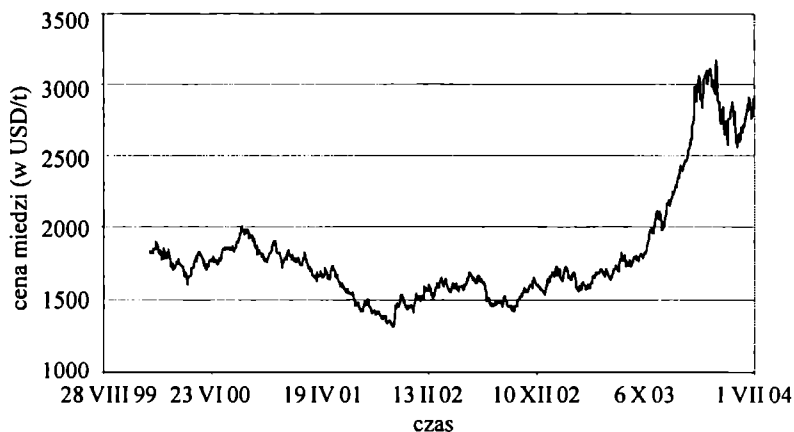


Rys. 1. Przebieg w czasie ceny energii elektrycznej i jego wpływ na uruchomienie elektrowni

Źródło: [9].

W polskich warunkach dobrym przykładem aktywów, których ceny mają duży wpływ na rentowność działalności przedsiębiorstwa i opłacalność rozważanych inwestycji, jest miedź. Przedsiębiorstwo KGHM Polska Miedź SA zajmuje siódme miejsce na świecie pod względem produkcji miedzi. Nie ulega wątpliwości, że dla

tego koncernu zmiany ceny podstawowego obok srebra produktu mają ogromne znaczenie. Wykres zmian cen miedzi w latach 1999-2004 na giełdzie London Metal Exchange ukazano na rys. 2. Wyraźne fluktuacje cen miedzi w szczególności w okresie 2001-2002 wskazują na potrzebę uwzględnienia modelowania ich cen w procesie podejmowania poważnych decyzji inwestycyjnych dotyczących np. eksploatacji nowych złóż.



Rys. 2. Wykres cen spot miedzi na giełdzie LME w latach 1999-2004

Źródło: opracowanie własne na podstawie [16].

Warto zauważyć, że w wielu sytuacjach można znaleźć inne sposoby osiągania dodatkowych korzyści ze zmienności cen aktywów i w odpowiedni sposób eksploatować opcje realne osadzone w działalności przedsiębiorstwa. W przypadku omawianej wcześniej opcji elastyczności (np. w elektrowni) można to osiągnąć dzięki doświadczeniu wynikającemu z ciągłej ekspozycji na zmienne ceny energii na rynku. Korzystając z tego doświadczenia, inżynierowie finansowi Enronu konstruowali nowe instrumenty finansowe. Wiele przedsiębiorstw, które nie zajmowały się produkcją energii elektrycznej, miało ochotę na osiąganie atrakcyjnych korzyści wynikających ze zmienności cen prądu. Enron oferował im sprzedaż portfela złożonego z opcji kupna wystawionych w uproszczeniu na różnicę między ceną prądu a ceną gazu. Terminy wygaśnięcia tych opcji zapadały sukcesywnie, np. w okresie letniego wzmożonego zapotrzebowania na energię. Enron zarabiał na sprzedaży tych opcji, podmiot kupujący natomiast otrzymywał wypłatę gotówki wtedy, gdy wartość instrumentu podstawowego przekroczyła określoną z góry w umowie cenę wykonania. Każdy zatem mógł stać się posiadaczem „wirtualnej elektrowni” i być wystawiony na wahania cen na rynku. Umowy tego typu były dlatego określane jako *Virtual Power Station Deals*.

3. Stochastyczna analiza zmian cen aktywów

Ceny aktywów zmieniają się w czasie i podlegają niepewności, a w związku z tym do ich opisu wykorzystuje się procesy stochastyczne. Jeśli chodzi o modelowanie zmian cen na potrzeby wyceny opcji realnych, to najbardziej rozpowszechnionym procesem stochastycznym jest geometryczny ruch Browna (*geometric Brownian motion*), określony w następujący sposób (por. np. [8, s. 385; 12, s. 88; 13, s. 167]):

$$dP = \alpha P dt + \sigma P dz, \quad (1)$$

gdzie P oznacza cenę aktywów (np. miedzi, energii elektrycznej), α – stopę wzrostu (dryft), σ – zmienność cen aktywów (odchylenie standardowe), z – proces Wienera, przy czym różniczka $dz = \varepsilon \sqrt{dt}$ oraz zmienna losowa $\varepsilon \sim N(0, 1)$.

Zwykły proces Wienera jest niewystarczający do opisu zmian cen, ponieważ zmienność cen aktywów kształtuje się w praktyce na różnym poziomie oraz wartość oczekiwana zmian cen aktywów powinna być nieujemna. W przypadku geometrycznego ruchu Browna wartość oczekiwana $E(dP) = \alpha P dt$, natomiast odchylenie standardowe $\sigma(dP) = \sigma P dt$. Równanie (1) pierwsze można również zapisać w następującej postaci:

$$\frac{dP}{P} = \alpha dt + \sigma dz. \quad (2)$$

Wyrażenie po lewej stronie równania reprezentuje względną zmianę ceny aktywów (zmiennej stochastycznej), pierwszy składnik sumy po prawej stronie równania wyraża oczekiwania wobec przyszłego kształtowania się cen, drugi zaś opisuje niepewność i związane z nią ryzyko odnośnie do poziomu przyszłych cen.

W przypadku opcji realnych można całkowitą stopę zwrotu (R) zapisać jako sumę dryftu α , który przez analogię do cen akcji może być interpretowany jako stopa zysku kapitałowego, oraz stopy φ , która jest związana z przepływami środków pieniężnych (analogia do dywidend). Wówczas równanie opisujące geometryczny ruch Browna przedstawia się następująco:

$$dP = (R - \varphi) P dt + \sigma P dz. \quad (3)$$

W warunkach wyceny w świecie wolnym od ryzyka, stopę R można zastąpić stopą zwrotu wolną od ryzyka r_{RF} . W modelu wyceny opartym na geometrycznym ruchu Browna oczekuje się, że stopa wzrostu lub spadku cen będzie taka sama niezależnie od przyszłego poziomu tych cen. Oznacza to, że wzrost ceny np. miedzi będzie podobny przy wyjściowym poziomie 1000 USD/t oraz przy cenie 3000 USD/t [7]. Innymi słowy, geometryczny ruch Browna zakłada, że przeszłe kształtowanie się cen aktywów aż do momentu osiągnięcia obecnego poziomu jest

nieistotne z punktu widzenia przewidywania przyszłych ruchów cen. Na przykład, biorąc pod uwagę opcję uruchamiania lub wyłączania fabryki (kopalni), można argumentować, że kiedy cena danych surowców jest wyższa niż pewna cena długoterminowa lub cena równowagi, wówczas producenci charakteryzujący się wyższymi kosztami wytwarzania niż przeciętne będą chcieli uruchomić produkcję (wejść do tego sektora), co spowoduje wzrost podaży, a w następstwie presję na obniżenie cen. Z drugiej strony, gdy ceny surowców na rynku są relatywnie niskie, niektórzy z producentów zaprzestają działalności (wychodzą z sektora), co przyczynia się do zmniejszenia podaży i w rezultacie do pojawienia się presji na zwiększenie cen. Zatem, mimo że ceny mogą być tymczasowo niższe lub wyższe od przeciętnego poziomu równowagi, mają w długim okresie tendencję do powracania do niego.

W związku z tym w przypadku surowców naturalnych bardziej odpowiednimi modelami kształtowania się ruchów cen są procesy opisujące zmiany cen powracających do określonej wartości przeciętnej (*mean reverting processes*). Procesy te mogą być postrzegane jako modyfikacje błędzenia losowego (*random walk*), w których zmiany cen są od siebie niezależne. Matematyczną ideę procesu uwzględniającego powracanie do wartości przeciętnej ilustruje rys. 3.

$$\underbrace{P_{t+1} - P_t}_{\text{oczekiwana zmiana ceny}} = \underbrace{\eta(\bar{P} - P_t)}_{\text{składnik powrotu do wartości przeciętnej}} + \underbrace{\sigma \varepsilon_t}_{\text{składnik losowy}}$$

gdzie:
 $\bar{P}$ – długoterminowy przeciętny poziom równowagi,
 P_t – cena spot aktywów w okresie t ,
 η – parametr określający szybkość powrotu do poziomu równowagi

Rys. 3. Idea powracania cen do wartości przeciętnej

Źródło: opracowanie własne na podstawie [1].

Analiza równania przedstawionego na rys. 3 pozwala zauważyć, że wartość składnika powracania do wartości przeciętnej jest uzależniona od odległości między ceną bieżącą i przeciętnym długoterminowym poziomem równowagi. Jeśli cena spot jest niższa od ceny przeciętnej, wówczas składnik powrotu jest dodatni, co wywiera dodatni wpływ na zmianę ceny. W przeciwnym wypadku efekt jest odwrotny. W miarę upływu czasu cena zaczyna oscylować wokół długoterminowej wartości przeciętnej z szybkością zdeteterminowaną parametrem η .

Najprostszy rodzaj procesu, który uwzględnia powracanie cen do wspomnianego poziomu przeciętnego, jest proces Ornsteina–Uhlenbecka, opisany w następujący sposób (por. np. [7; 10]):

$$dP = \eta(\bar{P} - P)dt + \sigma z, \quad (4)$$

gdzie $\bar{P}$ oznacza długoterminowy, przeciętny poziom ceny, η – parametr określający szybkość powrotu do poziomu równowagi (*mean reversion rate*).

Rozwiązaniem stochastycznego równania różniczkowego (4) jest zmienna o rozkładzie normalnym następującej postaci (zob. [6]):

$$P(T) = P(0)e^{-\eta T} + (1 - e^{-\eta T})\bar{P} + \sigma e^{-\eta T} \int_0^T e^{\eta t} dz(t). \quad (5)$$

Wartość oczekiwana i wariancja są określone wzorami:

$$E[P(T)] = P(0)e^{-\eta T} + \bar{P}(1 - e^{-\eta T}), \quad (6)$$

$$\text{Var}[P(T)] = (1 - e^{-\eta T}) \cdot \frac{\sigma^2}{2\eta}. \quad (7)$$

Aby można było obliczyć wartość ceny aktywów w zadanym okresie t , należy wyprowadzić dyskretno-czasową (*discrete-time*) postać tego procesu. W tym celu należy zastosować stacjonarny autoregresyjny proces pierwszego rzędu AR(1), dzięki czemu otrzymuje się:

$$P_t = P_{t-1}e^{-\eta\Delta T} + \bar{P}(1 - e^{-\eta\Delta T}) + \sigma\sqrt{\frac{(1 - e^{-\eta\Delta T})}{2\eta}}\varepsilon. \quad (8)$$

Warto zauważyć, że we wzorze (8) wartość ceny aktywów w określonym momencie jest sumą wartości oczekiwanej oraz czynnika losowego. Równanie to ma bardzo duże znaczenie praktyczne, gdyż za jego pomocą można łatwo modelować zmiany cen aktywów za pomocą prostych aplikacji, takich jak Microsoft Excel. W tym szacuje się funkcję regresji zmian cen w danym okresie od wartości bezwzględnych poziomu tych cen w okresie poprzednim [1]. Dzięki temu można uzyskać nachylenie (*slope*) i wyraz wolny tej funkcji oraz ocenę odchylenia standardowego składnika losowego (s_e). Wartość przeciwna oszacowanego nachylenia wykresu funkcji regresji oznacza parametr powracania cen do wartości przeciętnej (η), z kolei długoterminową wartość przeciętną ($\bar{P}$) oblicza się jako iloraz wyrazu wolnego i wyznaczonego parametru η , natomiast zmienność otrzymuje się przez podzielenie oceny s_e przez wartość przeciętną $\bar{P}$.

4. Zakończenie

W procesie podejmowania decyzji inwestycyjnych modelowanie zmian cen aktywów ma duże znaczenie, ponieważ to właśnie ceny decydują w znacznym

stopniu o efektywności projektów inwestycyjnych. Problem ten jest szczególnie istotny w przypadku analiz wykorzystujących podejście opcji realnych. W rzeczywistości gospodarczej bowiem okazuje się, że ceny surowców mają tendencje do powracania do pewnego przeciętnego poziomu równowagi. W takiej sytuacji modelowanie zmian cen wyłącznie za pomocą np. geometrycznego ruchu Browna nie jest wystarczające. Warto wówczas rozważyć możliwości zastosowania procesów stochastycznych, które uwzględniają powracanie cen do takiej długookresowej wartości. Do najbardziej rozpowszechnionych procesów tego typu zalicza się proces Ornsteina–Uhlenbecka.

LITERATURA

- [1] Blanco C., Soronow D., *Mean reverting processes – energy price processes and derivatives pricing and risk management*, „Commodities Now” 2001, June.
- [2] Brealey R.A., Myers S.C., *Principles of Corporate Finance*, McGraw-Hill, New York 2003.
- [3] Copeland T., Koller T., Murrin J., *Wycena: mierzenie i kształtowanie wartości firm*, Wig-Press, Warszawa 1997.
- [4] Coy P., *Exploiting uncertainty. The real-options revolution in decision-making*, „Business Week” 1999, June 7.
- [5] Damodaran A., *The Promise of Real Option*, [w:] Stern J.M., Chew D.H. (editors), *The Revolution in Corporate Finance*, Blackwell Publishing, Malden 2003.
- [6] Kloeden P.E., Platen E., *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Springer Verlag, Berlin 1992.
- [7] Lei M., *Modeling and Estimating Commodity Prices. Proceedings from the Sixth Annual Financial Econometrics Conference*, Waterloo 2004.
- [8] Luenberger D.G., *Teoria inwestycji finansowych*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2003.
- [9] Nita B., *Wykorzystanie opcji rzeczywistych w zarządzaniu wartością przedsiębiorstwa*, „Controlling i Rachunkowość Zarządcza” 2004 nr 9.
- [10] Schobel R., Zhu J., *Stochastic volatility with an Ornstein–Uhlenbeck process: An extension*, „European Finance Review” 1999, Vol. 3.
- [11] Teach E., *Will real options take root?*, „CFO Magazine” 2003, July 10.
- [12] Trigeorgis L., *Real Options. Managerial Flexibility and Strategy in Resource Allocation*, MIT Press, Cambridge 1998.
- [13] Weron A., Weron R., *Inżynieria finansowa*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1998.
- [14] Weron A., Weron R., *Zmienność a ryzyko na rynku energii*, „Rynek Terminowy” 2000, listopad.
- [15] sphere.rdc.puc-rio.br/marco.ind.
- [16] www.lme.com.

STOCHASTIC MODELLING OF COMMODITY PRICE CHANGES IN UNDERTAKING INVESTMENT DECISIONS

Summary

The paper describes the importance of stochastic modelling of commodity process in undertaking investment decisions. In the first part of the article the main emphasis is put on real options which may be understood as the options to modify different projects. The real options analysis reflects the value of strategic options that are often embedded in corporate real investments.

The limitations of geometric Brownian motion, if applied to commodity prices, are shown mainly because price changes are not independent of one another. So the paper indicates that there is a need to incorporate mean reversion processes while modelling commodity prices, especially energy and copper prices. As an example the simplest and most commonly used mean reverting process – Ornstein–Uhlenbeck process – is analyzed.

Dr Bartłomiej Nita jest pracownikiem Katedry Rachunku Kosztów i Rachunkowości Zarządczej w Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu.