

INSTYTUT TELEKOMUNIKACJI I AKUSTYKI
POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ

Raport nr I-28/98/P-046

Filtracja innowacyjna i
modelowanie stochastyczne
dwuwymiarowych pól losowych

(Rozprawa doktorska)

Jan Mazur

Słowa kluczowe:

- filtracja ortogonalna
- modelowanie stochastyczne
- przetwarzanie obrazów

Promotor

Dr hab. inż. Jan Zarzycki, prof. PWr

Wrocław 1998



300051 L/A

Acc. 208/D/99

Matce mojej poświęcam

Podziękowania

Pragnę złożyć gorące podziękowania Panu Profesorowi Janowi Zarzyckiemu za trud prowadzenia tej pracy oraz za wiedzę zdobytą pod Jego kierunkiem.

Chcę także podziękować moim kolegom i współpracownikom oraz wszystkim innym osobom za krytyczne uwagi dotyczące tej pracy.

Jestem również bardzo wdzięczny mojej żonie i córce za okazany czas, cierpliwość i zrozumienie.

Spis treści

1	Wstęp	3
1.1	Wprowadzenie	3
1.2	Przegląd literatury	4
2	Cel i układ pracy	7
2.1	Teza pracy	7
2.2	Cel pracy	7
2.3	Układ pracy	8
3	Ortogonalna parametryzacja i modelowanie stochastyczne jednowymiarowych sygnałów losowych drugiego rzędu	9
3.1	Liniowa prognoza średniokwadratowa sygnałów 2-go rzędu	9
3.1.1	Problem prognozy i jego metody rozwiązania	9
3.1.2	Ortogonalna reprezentacja estymatora prognozy	19
3.2	Ortogonalna parametryzacja sygnałów 2-go rzędu	22
3.2.1	Filtry innowacyjne o parametrach zmiennych w czasie	22
3.2.2	Filtry innowacyjne o parametrach stałych w czasie	28
3.2.3	Filtracja innowacyjna – wybielanie	30
3.3	Modelowanie stochastyczne sygnałów 2-go rzędu	33
3.3.1	Filtry modelujące o parametrach zmiennych w czasie	33
3.3.2	Filtry modelujące o parametrach stałych w czasie	39
3.3.3	Modelowanie stochastyczne	40
3.4	Podsumowanie	42
4	Ortogonalna parametryzacja i modelowanie stochastyczne dwuwymiarowych pól losowych drugiego rzędu	43
4.1	Pola losowe 2D	43
4.2	Problem prognozy pól losowych 2D	44
4.3	Uogólniona projekcja ortogonalna	50
4.4	Hiperboliczna ortogonalizacja Grama-Schmidta dwóch ortonormalnych baz przestrzeni zmiennych losowych	52
4.5	Rekurencyjne wyznaczanie błędów prognozy 2D	60
4.6	Ortogonalne rozwinięcie estymatora prognozy 2D.	69
4.7	Ortogonalna filtracja innowacyjna pól losowych 2D	69
4.7.1	Filtry innowacyjne 2D o parametrach zmiennych	70
4.7.2	Filtry innowacyjne 2D o parametrach stałych	75
4.7.3	Wybielanie pól losowych 2D	76
4.8	Modelowanie stochastyczne pól losowych 2D	78

4.8.1	Filtry modelujące 2D o parametrach zmiennych	78
4.8.2	Realizacja struktury filtru modelującego 2D	82
4.8.3	Filtry modelujące 2D o parametrach stałych	86
4.8.4	Modelowanie stochastyczne pól losowych 2D	86
5	Badania symulacyjne filtracji innowacyjnej i modelowania pól losowych 2D	89
5.1	Filtracja i modelowanie szeregów 2D	89
6	Metoda MDLPC transmisji sygnałów losowych 2D	99
7	Podsumowanie	105
A	Procesy stochastyczne i pola losowe	107
A.1	Preliminaria matematyczne.	107
A.2	Pola losowe 2D — podstawowe definicje.	109
B	Oznaczenia	111

Rozdział 1

Wstęp

1.1 Wprowadzenie

Przedmiotem niniejszej pracy jest zagadnienie liniowej filtracji innowacyjnej, parametryzacji ortogonalnej i modelowania stochastycznego (cyfrowej syntezy) jednorodnych i niejednorodnych dwuwymiarowych (2D) pól losowych drugiego rzędu, rozumiane jako uogólnienie problemu liniowej filtracji innowacyjnej i modelowania stochastycznego jednowymiarowych (1D) sygnałów losowych drugiego rzędu.

Sygnałem losowym (jedno- lub wielowymiarowym) drugiego rzędu nazywamy sygnał, który jest całkowicie scharakteryzowany za pomocą łącznych rozkładów prawdopodobieństwa rzędów pierwszego i drugiego. Sygnały losowe nazywa się *stochastycznie równoważnymi w szerszym sensie drugiego rzędu*, jeśli ich funkcje kowariancyjne (lub spektralne) drugiego rzędu są identyczne, przy różnych (w ogólności) statystykach rzędu wyższego niż 2.

Teoria liniowej filtracji innowacyjnej określa metody przeprowadzania sygnału 1D o zadanych statystykach drugiego rzędu tj. widmowej gęstości mocy lub — równoważnie funkcji kowariancji — w sygnał białego szumu.

Teoria liniowej filtracji modelującej pozwala rozwiązać problem odwrotny, określając metody kształtowania statystyk drugiego rzędu sygnału 1D z białego szumu. W ten sposób filtr modelujący generuje klasę równoważności sygnałów o zadanych statystykach drugiego rzędu. W tym sensie sygnały modelowane są sygnałami drugiego rzędu.

Teoria liniowej estymacji średniokwadratowej, obejmująca wspomniane powyżej teorie filtracji innowacyjnej i modelującej, prowadzi do optymalnej w sensie średniokwadratowym aproksymacji sygnałów 1D drugiego rzędu. Innymi słowy, filtr liniowy jest optymalnym filtrem dla sygnału losowego, którego własności probabilistyczne są w pełni określone przez statystyki drugiego rzędu.

Zagadnienie liniowej estymacji średniokwadratowej zostało dobrze poznane w aspekcie przetwarzania sygnałów losowych jednowymiarowych. Opracowano szereg algorytmów przetwarzania sygnałów w oparciu o metodę liniowej prognozy średniokwadratowej [18, 25, 27, 37]. Zaproponowano szereg struktur filtrów wybielających i modelujących, mających swe realizacje programowe i sprzętowe [1, 18, 28, 19, 56]. Algorytmy te wykorzystuje się w wielu dziedzinach nauki i techniki; są stosowane między innymi w neurofizyce, geofizyce, telekomunikacji. Zastosowanie technik transmisji sygnałów cyfrowych z kompresją ilości przesyłanej informacji, opartych na metodach ortogonalnej parametryzacji i modelowania stochastycznego (metoda LPC), w telekomunikacji jest szczególnie istotne, głównie ze względu na ich powszechność, a co za tym idzie – wymierne korzyści finansowe (np. cyfrowa telefonia

komórkowa).

Sukces liniowej prognozy średniokwadratowej w przetwarzaniu sygnałów jednowymiarowych zachęcił wielu badaczy do uogólnienia tej teorii na przypadek sygnałów losowych wielowymiarowych (głównie dwuwymiarowych). Pola losowe pojawiają się jako matematyczny model obrazu w szeroko pojętym przetwarzaniu obrazów, a także w przetwarzaniu sygnałów radarowych, sonarowych czy geofizycznych. Zatem — wszędzie tam, gdzie obserwowane i zbierane dane mają charakter dwuwymiarowy.

1.2 Przegląd literatury

W 1910 roku Frechet [15] zaproponował, aby zmienne losowe traktować jako elementy przestrzeni metrycznej. Idee proponowane przez Frecheta wykorzystał w swej pracy Wold [60]. Pozwoliło to na geometryczną interpretację zagadnienia estymacji średniokwadratowej jako projekcji na podprzestrzeń. Jednak dopiero w początkach lat sześćdziesiątych zaczęto korzystać z wyników zawartych w tych pracach.

W 1942 roku Wiener sformułował i rozwiązał problem prognozy średniokwadratowej dla sygnałów ciągłych [59], podając efektywną metodą rozwiązania zagadnienia liniowej estymacji średniokwadratowej za pomocą faktoryzacji widmowej. W pięć lat później Levinson rozpropagował idee Wienera proponując rozwiązanie zagadnienia liniowej estymacji średniokwadratowej dla sygnałów o czasie dyskretnym [33]. Praca ta miała bardzo istotny wpływ na dalszy rozwój teorii liniowej estymacji średniokwadratowej. Rozwiązanie zaproponowane przez Levinsona należy dziś do “klasyki” algorytmów cyfrowego przetwarzania sygnałów.

Idea tego rozwiązania polega na rekurencyjnym rozwiązywaniu tzw. *równań normalnych Toeplitza*, wynikających z zagadnienia średniokwadratowego, za pomocą kombinacji liniowych kolejnych rozwiązań pomocniczych *w przód* i *w tył*. Na podstawie macierzy kowariancyjnej przetwarzanego sygnału, algorytm Levinsona umożliwia wyznaczenie współczynników optymalnego estymatora średniokwadratowego. Ze względu na fakt, że macierz kowariancyjna sygnałów stacjonarnych ma własność Toeplitza, metoda Levinsona posłużyła jako podstawa tzw. szybkiego algorytmu faktoryzacji Choleskiego i odwracania macierzy Toeplitza [1, 8, 12, 16, 21, 23, 37].

Algorytm Levinsona, początkowo znany w wersji dla sygnałów stacjonarnych jednowymiarowych, został uogólniony zarówno na przypadek sygnałów niestacjonarnych jak i na przypadek wielowymiarowy, znajdując wielorakie zastosowania techniczne (np. w geofizyce [52]).

Uogólnienie na przypadek sygnału niestacjonarnego, stało się podstawą rozwiązania zagadnienia filtru liniowego o zmiennych parametrach wykorzystującego faktoryzację Choleskiego macierzy kowariancyjnej Hermite’a sygnału niestacjonarnego [8]. Pojęcie “odległości” danego sygnału od sygnału stacjonarnego (pojęcie α -stacjonarności) wprowadził Kailath [22]. Z kolei Dewilde i Deprettere [9] rozważali aproksymacje macierzy dodatnio określonych macierzami rzadkimi (pasmowymi). Problem rozważany przez nich należy do klasy problemów interpolacyjnych takich jak problem Schura czy Nevanlinny-Pick’a, który w różny sposób rozwiązało z powodzeniem wielu autorów [49, 50]. Wyniki otrzymane przez Dewilde’a i Deprettere można przenieść na grunt teorii sygnałów, umożliwiając tworzenie struktur filtrów o różnym stopniu złożoności.

Z praktycznego punktu widzenia duże znaczenie miało opracowanie algorytmów parametryzacji Schura [22, 32], które dzięki możliwości zrównoleglenia wykonywania pewnych operacji, mają szybkie implementacje w architekturach umożliwiających przetwarzanie równoległe. Al-

gorytm Schura [54] wyznacza tzw. współczynniki Schura, które są w istocie parametrami filtru Levinsona (zwanymi często *współczynnikami odbicia*).

Metoda geometryczna rozwiązania problemu liniowej estymacji średniokwadratowej, oparta o projekcję ortogonalną, prowadzi do realizacji liniowego cyfrowego filtru drabinkowego (ang. *lattice filter*) o strukturze ortogonalnej [3, 5, 22, 27], który jest równoważny filtrowi Levinsona. Estymacja parametrów filtru drabinkowego jest możliwa na podstawie macierzy kowariancyjnej sygnału lub też na podstawie bezpośrednio obserwowanych próbek sygnału (tj. bez znajomości a priori macierzy kowariancyjnej). W tym drugim przypadku rozwiązanie w bieżącej chwili t wyznacza się na podstawie rozwiązania dla chwili $t - 1$. Takie podejście prowadzi do cyfrowych filtrów adaptacyjnych umożliwiających przetwarzanie sygnałów w czasie rzeczywistym [7, 8, 22, 27].

Struktura ortogonalna filtru zapewnia dobre własności, ponieważ filtry ortogonalne cechuje bezstratność (samorzutna stabilność numeryczna) oraz mała wrażliwość na błędy zaokrągleń, przez co filtry te są szczególnie atrakcyjne także z praktycznego punktu widzenia. Poza tym struktury filtrów wykorzystujące rotacje hiperboliczne i kołowe [9] mają zgrabne implementacje z użyciem procesorów typu CORDIC [19].

Ze względu na powodzenie liniowej teorii estymacji średniokwadratowej sygnałów jednowymiarowych i wielość problemów dwuwymiarowych, naturalnym procesem było podejmowanie licznych prób uogólnienie tej teorii na przypadek dwuwymiarowy. Dokładnie 20 lat temu pracę dotyczącą filtracji innowacyjnej i modelowania stochastycznego dwuwymiarowych pól losowych przedstawił Marzetta [38], który uogólnił na przypadek 2D kilka podstawowych wyników znanych dla przypadku 1D. W szczególności, zaproponował on metodę modelowania dwuwymiarowych pól losowych wykorzystującą współczynniki odbicia. Metodę tę stosowano między innymi do kodowania obrazów [51] i do projektowania dwuwymiarowych filtrów rekursywnych [46]. Idea Marzetty polegała na “rozwinieciu” danych, które miały charakter dwuwymiarowy, w ciąg jednowymiarowy a następnie stosowanie znanych rozwiązań. Podejście Marzetty miało kilka istotnych zalet. Po pierwsze, pojedyncza sekcja filtru Marzetty spełnia warunek minimalnofazowości, co w konsekwencji oznacza, że filtr złożony z kaskady pojedynczych sekcji jest stabilnie odwracalny. Po drugie, filtr Marzetty odtwarzał poprawnie statystyki drugiego rzędu (*correlation-matching property*). Niestety, podejście Marzetty było w zasadzie sprowadzeniem przypadku 2D do 1D. Poza tym filtr Marzetty wymagał stosowania długich sekwencji opóźnień.

Inaczej do zagadnienia wybielania i modelowania podeszli Parker i Kayran [45]. Zaproponowali oni filtr, który nie wymagał rozwinięcia danych w ciąg jednowymiarowy. W każdym kroku wyznacza się tam jednocześnie cztery pola błędów. Kombinacje liniowe tych błędów używane są do wyznaczania parametrów filtrów. Rozwiązanie to było w naturalny sposób dwuwymiarowe, jednak filtr nie miał własności ortogonalnych. Nie można więc było zagwarantować, że otrzymywane rozwiązania (estymatory) są optymalne [4].

Kailath i Lev-Ari [29] uogólnili algorytm Levinsona i Schura na przypadek dwuwymiarowych pól losowych niejednorodnych. W szczególności, rozważając model sygnału zawartego w pierwszej ćwiartce płaszczyzny, zaproponowali liniowe uporządkowanie próbek sygnału i zastosowanie tzw. *struktury kratowej trójkątnej* (ang. *triangular lattice structure* [29]) lub — jak jest czasem nazywana — *struktury o pełnej złożoności* (ang. *full-complexity structure*).

Zaproponowano również tzw. *struktury o zredukowanej złożoności* (ang. *reduced-complexity structure*), które dla sygnałów stacjonarnych umożliwiają zmniejszenie liczby elementów filtru. Konstrukcją dwuwymiarowego drabinkowego filtru prognozującego, który z jednej strony byłby filtrem ortogonalnym, a z drugiej umożliwiał rekurencyjne podwyższanie rzędu zajmowali się

także Lenk i Parker [30, 31], którzy zaproponowali filtr służący do modelowania stacjonarnych pól losowych w oparciu o teorię tensorów. Przedyskutowali oni strukturę kratową trójkątną jak również strukturę o zmniejszonej złożoności.

W 1996 roku Kayran [24] zaproponował – w oparciu o metodę Burga – oryginalny model dwuwymiarowego filtru ortogonalnego, który jednak w swej istocie jest rozwinięciem pola 2D w ciąg jednowymiarowy. Przedstawiony model jest o tyle interesujący, że w porównaniu ze znanymi rozwiązaniami (np. Marzetty) wymaga on mniejszej liczby opóźnień. Autor prezentuje model o pełnej złożoności jak również struktury uproszczone przy założeniu stacjonarności przetwarzanego pola. Struktury Kayrana zbudowane są z klasycznych predyktorów z dwoma współczynnikami na sekcję. Takie podejście nie wymaga wprowadzić wstępnego normowania pola, jednak – w porównaniu z sekcją filtru reprezentowaną w postaci rotora hiperbolicznego – dwukrotnie większa liczba współczynników odbicia jest potrzebna do określenia pojedynczej sekcji filtru. Z uwagi na ewentualne zastosowania do kompresji pól 2D (np. obrazów rzeczywistych lub tekstur) jest to wada.

Rozdział 2

Cel i układ pracy

O ile uogólnienie teorii jednowymiarowych sygnałów losowych na przypadek pól losowych okazało się zadaniem stosunkowo prostym, o tyle uogólnienie teorii liniowej prognozy średniokwadratowej na przypadek dwuwymiarowy okazało się znacznie trudniejsze. Rozwiązano wiele zagadnień dotyczących filtracji innowacyjnej i modelowania stochastycznego sygnałów dwuwymiarowych [6, 24, 26, 30, 38, 44, 45]. Jednak, jak wynika z dokonanego przeglądu literatury, nie rozwiązano, jak dotąd, całkowicie problemu ortogonalnej parametryzacji i modelowania stochastycznego pól losowych 2D za pomocą filtrów o strukturze "true 2D", chociaż w ciągu ostatnich dwudziestu lat poświęcono temu zagadnieniu sporo miejsca w literaturze [24, 26, 35, 38, 45, 46].

Powyższy fakt skłonił autora tej pracy do podjęcia próby rozwiązania tego ważkiego zarówno teoretycznie, jak i z punktu widzenia zastosowań, problemu.

Z drugiej strony efektywność algorytmów kompresji sygnałów 1D w oparciu o metody liniowej filtracji ortogonalnej (LFO) skłania, w kontekście coraz szerzej rozumianej telekomunikacji, do poszukiwania uogólnień tych algorytmów i ich adaptacji do zastosowań w teorii kodowania i kompresji obrazów.

2.1 Teza pracy

Tezę pracy formułujemy następująco:

Możliwe jest uogólnienie przy użyciu metody geometrycznej, teorii i algorytmów liniowej filtracji innowacyjnej i modelowania stochastycznego jednowymiarowych sygnałów losowych na przypadek dwuwymiarowych pól losowych drugiego rzędu, prowadzące do struktur typu "true 2D" dla ortogonalnych filtrów innowacyjnych i modelujących 2D, a – w konsekwencji – zaproponowanie efektywnych rekurencyjnych algorytmów ortogonalnej parametryzacji i modelowania stochastycznego szeregów czasowych 2D.

2.2 Cel pracy

Celem tej pracy jest opracowanie uogólnienia teorii i algorytmów filtracji ortogonalnej i modelowania stochastycznego sygnałów jednowymiarowych na przypadek dwuwymiarowych pól losowych drugiego rzędu. W szczególności celem tej pracy jest:

- opracowanie struktur typu "true 2D" filtrów parametryzujących i modelujących dwuwymiarowe jednorodne (stacjonarne) i niejednorodne pola losowe 2D,

- wykorzystanie cech strukturalnych czteroindeksowych macierzy kowariancji pól losowych 2D (toeplitzowskość macierzy kowariancji) do optymalizacji tych struktur pod względem efektywności parametryzacji i modelowania pól stacjonarnych w szerszym sensie,
- wskazanie (w postaci wyników symulacji) na dużą skuteczność parametryzacji ortogonalnej, rozumianej w sensie szybkiej zbieżności parametrów (współczynników Schura) do względnie małych wartości,
- zaproponowanie wykorzystania opracowanych algorytmów do kompresji tekstur oraz obrazów rzeczywistych.

Celem podrzędnym jest wskazanie kierunków dalszych badań, których wyniki mogą być użyteczne dla rozwoju innych algorytmów przetwarzania sygnałów wielowymiarowych i/lub przetwarzania wielokanałowego, a w szczególności – w metodzie MDLPC transmisji sygnałów 2D z kompresją ilości transmitowanej informacji.

2.3 Układ pracy

Praca składa się z sześciu rozdziałów i dodatku.

W rozdziale pierwszym przedstawiono wprowadzenie do zagadnienia liniowej filtracji innowacyjnej i modelowania stochastycznego dwuwymiarowych pól losowych jak również podano krótki przegląd literatury przedmiotu.

W rozdziale drugim (niniejszym) sformułowano tezę pracy oraz cele pracy.

Rozdział trzeci poświęcono przeglądowi najważniejszych (z punktu widzenia problemu stawianego w tej pracy) wyników liniowej prognozy średniokwadratowej sygnałów jednowymiarowych.

W rozdziale czwartym przedstawiono geometryczne uogólnienie teorii ortogonalnej parametryzacji procesów 1-D na przypadek niejednorodnych i jednorodnych pól losowych 2D, prowadzące do uogólnienia struktur ortogonalnych filtrów innowacyjnych i modelujących 2D. Zaproponowane struktury umożliwiają filtrację innowacyjną (wybielanie) dwuwymiarowego pola losowego o zadanych statystykach drugiego rzędu i modelowanie statystyk drugiego rzędu dwuwymiarowego białego pola losowego 2D.

Rozdział piąty obejmuje prezentację opracowanych algorytmów parametryzacji i modelowania stochastycznego szeregów czasowych 2D oraz symulacje komputerowe potwierdzające wyniki teoretyczne otrzymane w rozdziale czwartym.

W rozdziale szóstym zaproponowano ideę kompresji obrazów opartą o teorię przedstawioną w rozdziale czwartym.

Rozdział siódmy podsumowuje otrzymane wyniki.

W dodatku A podano – istotne dla treści pracy – definicje i pojęcia dotyczące teorii liniowej prognozy średniokwadratowej, procesów stochastycznych i dwuwymiarowych pól losowych.

Rozdział 3

Ortogonalna parametryzacja i modelowanie stochastyczne jednowymiarowych sygnałów losowych drugiego rzędu

Jak wynika z przeglądu literatury w rozdziale 1, w ostatnich kilkunastu latach zaproponowano szereg rozwiązań problemu ortogonalnej parametryzacji i modelowania stochastycznego sygnałów losowych 1D. W niniejszym rozdziale omówimy podstawowe algorytmy filtracji innowacyjnej i modelowania stochastycznego niestacjonarnych sygnałów losowych jednowymiarowych drugiego rzędu, wybrane pod kątem ich uogólnienia na przypadek pól losowych 2D. Wcześniej jednak rozważymy problem prognozy sygnału, jako że geometryczne rozwiązanie tego problemu prowadzi – poprzez problem wybielania sygnału – do *realizacji ortogonalnych* optymalnych (średniokwadratowo) filtrów *innowacyjnych* i *modelujących* 1D. Wyniki przedstawione w tym rozdziale posłużą jako podstawa do uogólnienia na przypadek 2D, co stanowi przedmiot rozdziałów 4–7 i obejmuje zasadnicze wyniki uzyskane w pracy.

3.1 Liniowa prognoza średniokwadratowa sygnałów 2-go rzędu

3.1.1 Problem prognozy i jego metody rozwiązania

W podrozdziale tym poruszymy problem *jednokrokowej* liniowej prognozy średniokwadratowej sygnałów jednowymiarowych stacjonarnych i niestacjonarnych drugiego rzędu. Rozważania te traktujemy jako punkt wyjścia do sformułowania warunków (patrz rozdział 4), jakie powinno spełniać uogólnienie omawianego tutaj problemu prognozy na przypadek pól losowych, w szczególności dwuwymiarowych.

Niech y oznacza niestacjonarny rzeczywisty proces stochastyczny o czasie dyskretnym. Oznaczmy przez t ustalony punkt na osi czasu i załóżmy, że proces y jest obserwowany na skończonym odcinku czasu

$$\{t - n, t - n + 1, \dots, t - 1\} \quad (3.1)$$

stanowiącym n -krokową przeszłość względem chwili t . Proces ten jest reprezentowany za

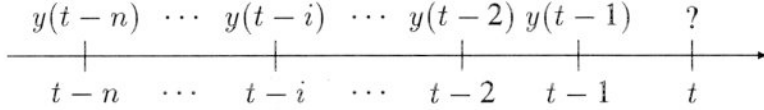
pomocą zbioru rzeczywistych zmiennych losowych

$$\{y(t-n), y(t-n+1), \dots, y(t-1)\} \quad (3.2)$$

stanowiących zbiór obserwowanych wartości procesu y .

Problem (jednokrokowej) prognozy (rys.3.1) można sformułować następująco:

Znając wartości (3.2) procesu y w chwilach (3.1) należy wyznaczyć wartość procesu y w chwili t , tj. zmienną losową $y(t)$.



Rys. 3.1: Problem jednokrokowej prognozy procesu y .

Problem prognozy można rozwiązać w dwojaki sposób – algebraicznie lub geometrycznie. Obydwa podejścia prowadzą do tzw. *normalnego układu równań* [18]. W niniejszej pracy będziemy korzystać z podejścia geometrycznego ze względu na jego uniwersalność, natomiast podejście algebraiczne można znaleźć np. w pracach [18, 36].

Traktując zmienne losowe jako elementy przestrzeni metrycznej, zagadnienie liniowej estymacji średniokwadratowej będziemy mogli interpretować jako zagadnienie projekcji na podprzestrzeń. Przestrzeń zmiennych losowych będziemy rozumieli w sensie definicji (Def. A.1) zamieszczonej w dodatku A.

Geometrycznie problem prognozy jest równoważny zagadnieniu aproksymacji. Wspomnieliśmy wcześniej, że problem prognozy procesu y w pewnej ustalonej chwili czasu t sprowadza się do wyznaczenia estymatora $\hat{y}_n(t)$ na podstawie n wartości przeszłych względem chwili t .

Ze względu na to, że w dalszych rozważaniach będziemy często odnosić się do przeszłości procesu y , wprowadzimy uproszczoną notację, w myśl której zamiast pisać $y(t-i)$ będziemy pisać y_i , tj.

$$y_i \triangleq y(t-i) \quad (3.3)$$

Niech

$$\{y_0, y_1, \dots, y_i, \dots, y_{n-1}, y_n\} \quad (3.4)$$

będzie zbiorem $n+1$ liniowo niezależnych zmiennych losowych¹ oraz niech

$$S_0^n = \text{span}\{y_0, y_1, \dots, y_n\}, \quad (3.5)$$

gdzie $\text{span}\{*\}$ oznacza domkniętą przestrzeń rozpiętą na elementach $\{*\}$, będzie $(n+1)$ -wymiarową przestrzenią rozpiętą na elementach zbioru (3.4).

Przez

$$S_k^l \triangleq \text{span}\{y_k, y_{k+1}, \dots, y_l\} \quad k \leq l, \quad k = 0, \dots, n \quad (3.6)$$

będziemy rozumieli $(l-k+1)$ -wymiarową podprzestrzeń ośrodkowej przestrzeni Hilberta $L_2 = L_2\{\mathcal{U}, \mathcal{R}, \mu\}$ (patrz dodatek A). Korzystając z liniowej niezależności elementów zbioru (3.4) możemy wyrażenie (3.6) przepisać w postaci

$$S_k^l = \text{span}\{y_k, S_{k+1}^l\}, \quad (3.7)$$

¹Definicję liniowej niezależności zmiennych losowych jak również inne definicje i pomocnicze twierdzenia zamieszczono w dodatku A.

gdzie

$$S_{k+1}^l = \text{span}\{y_{k+1}, \dots, y_l\} \quad (3.8)$$

jest podprzestrzenią rozpiętą na $(l - k)$ -krokowej przeszłości zmiennej y_k .

Element aproksymujący zmienną y_k i należący do podprzestrzeni S_{k+1}^l będziemy oznaczać jako $\hat{y}_{k,l}$. Rząd estymatora wyznaczamy wówczas w prosty sposób jako różnicę $(l - k)$.

Niech $P(S)$ oznacza operator projekcji ortogonalnej na podprzestrzeń S . Wektor $\hat{y} \in S$

$$\hat{y} = P(S)y \in S, \quad (3.9)$$

nazwiemy rzutem ortogonalnym (projekcją ortogonalną) wektora y na podprzestrzeń S .

Rzutując ortogonalnie y_k na S_{k+1}^l otrzymujemy estymator $\hat{y}_{k,l}$, który aproksymuje y_k z błędem

$$\epsilon_{k,l} \triangleq P(S_k^l \ominus S_{k+1}^l)y_k = P((S_{k+1}^l)^\perp)y_k = (I - P(S_{k+1}^l))y_k = y_k - \hat{y}_{k,l} \perp S_{k+1}^l. \quad (3.10)$$

gdzie $P(S_k^l \ominus S_{k+1}^l)y_k = P((S_{k+1}^l)^\perp)y_k$ oznacza projekcję ortogonalną elementu y_k na ortogonalne uzupełnienie S_{k+1}^l (do S_k^l), co schematycznie pokazano na rys.3.2. Błąd (3.10) określamy jako *błąd w przód* (w przyszłość).

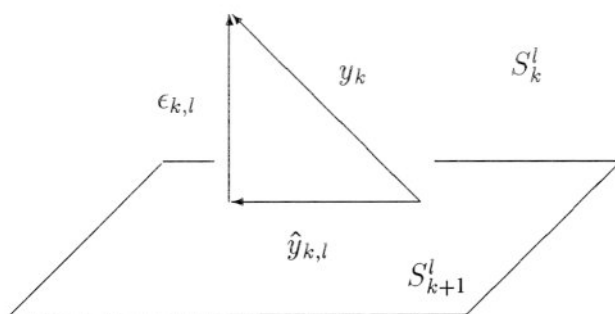
Przyjmując jako kryterium aproksymacji minimum normy ² (A.3)

$$\|\epsilon_{k,l}\| = (\epsilon_{k,l}, \epsilon_{k,l})^{\frac{1}{2}} = E\{\epsilon_{k,l}^2\}^{\frac{1}{2}}, \quad (3.11)$$

gdzie $(\cdot, \cdot)$ jest iloczynem skalarnym elementów w przestrzeni $\mathcal{U}$, zdefiniowanym jak w (A.2) to $\hat{y}_{k,l}$ jest najlepszym średniokwadratowym estymatorem y_k wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\hat{y}_{k,l} = P(S_{k+1}^l)y_k \in S_{k+1}^l. \quad (3.12)$$

Twierdzenie o najlepszej aproksymacji [57] gwarantuje, że element $\hat{y}_{k,l}$ jest jedyny zaś $\epsilon_{k,l}$ jest minimalny w sensie normy (3.11).



Rys. 3.2: Wyznaczanie optymalnego estymatora $\hat{y}_k$ zmiennej losowej y_k .

Ortogonalność $\epsilon_{k,l}$ względem S_{k+1}^l oznacza w szczególności ortogonalność $\epsilon_{k,l}$ względem każdego wektora bazowego rozpinającego S_{k+1}^l . Z zależności (3.10) wynika układ równań liniowych:

$$(\epsilon_{k,l}, y_i) = 0 \quad \text{dla } i = k+1, \dots, l. \quad (3.13)$$

²Norma ta zależy tylko od y_k i kombinacji liniowej jej przeszłości, w związku z czym optimum prognozy osiągalne jest tylko dla modeli AR.

stanowiących warunki optymalności estymatora $\hat{y}_{k,l}$. Z drugiej strony, skoro zbiór $\{y_i\}_{i=k+1}^l$ rozpina S_{k+1}^l i $\hat{y}_{k,l} \in S_{k+1}^l$, to $\hat{y}_{k,l}$ musi być kombinacją liniową elementów bazowych $\{y_i\}_{i=k+1}^l$, tj.

$$\hat{y}_{k,l} = \sum_{i=k+1}^l \alpha_i y_i, \quad (3.14)$$

gdzie α_i są współczynnikami kombinacji liniowej (reprezentacją elementu y_k w podprzestrzeni S_{k+1}^l).

Stąd i z faktu, że $\epsilon_{k,l} = y_k - \hat{y}_{k,l}$ wynika, iż układ równań (3.13) możemy przepisać w postaci:

$$(y_k - \sum_{j=k+1}^l \alpha_j y_j, y_i) = 0, \text{ dla } i = k+1, \dots, l. \quad (3.15)$$

Podnosząc do kwadratu obie strony równości (A.3) przy $f = \epsilon_{k,l}$ otrzymamy

$$(\epsilon_{k,l}, \epsilon_{k,l}) = \|\epsilon_{k,l}\|^2. \quad (3.16)$$

Wykorzystując (3.10) przepiszemy lewą stronę powyższej równości w postaci

$$(\epsilon_{k,l}, \epsilon_{k,l}) = (\epsilon_{k,l}, (y_k - \hat{y}_{k,l})) = (\epsilon_{k,l}, y_k) - (\epsilon_{k,l}, \sum_{j=k+1}^l \alpha_j y_j). \quad (3.17)$$

Ponieważ $\epsilon_{k,l} \perp S_{k+1}^l$, a $\sum_{j=k+1}^l \alpha_j y_j \in S_{k+1}^l$, to $(\epsilon_{k,l}, \sum_{j=k+1}^l \alpha_j y_j) = 0$ i stąd

$$\begin{aligned} (\epsilon_{k,l}, \epsilon_{k,l}) &= (\epsilon_{k,l}, y_k) = (y_k - \sum_{j=k+1}^l \alpha_j y_j, y_k) = \\ &= (y_k, y_k)_{\mathcal{U}} - \sum_{j=k+1}^l \alpha_j (y_j, y_k) = \|\epsilon_{k,l}\|^2. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Powołując się na (A.10) możemy iloczyny skalarne występujące w (3.18) utożsamiać z wartościami funkcji kowariancji procesu $\mathbf{y}$

$$c_{i,j} = (y_i, y_j)_{\mathcal{U}} = E\{y_i y_j\}. \quad (3.19)$$

Wówczas, układ równań (3.13) łącznie z (3.18) można – biorąc pod uwagę (3.19) – przedstawić w postaci macierzy jako

$$\begin{bmatrix} c_{k,k} & c_{k,k+1} & \cdots & c_{k,l} \\ c_{k+1,k} & c_{k+1,k+1} & \cdots & c_{k+1,l} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ c_{l,k} & c_{l,k+1} & \cdots & c_{l,l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_k \\ a_{k+1} \\ \vdots \\ a_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \|\epsilon_{k,l}\|^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.20)$$

gdzie $a_k = 1$, oraz $a_i = -\alpha_i$ dla $i = k+1, \dots, l$.

Układ (3.20) nazywamy *układem normalnym równań* lub *układem równań Youle'a-Walkera*, a macierz

$$C_{kl} = \begin{bmatrix} c_{k,k} & c_{k,k+1} & \cdots & c_{k,l} \\ c_{k+1,k} & c_{k+1,k+1} & \cdots & c_{k+1,l} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ c_{l,k} & c_{l,k+1} & \cdots & c_{l,l} \end{bmatrix}$$

nazywamy macierzą Grama elementów $y_k, y_{k+1}, \dots, y_l$.

Biorąc pod uwagę wszystkie obserwowane zmienne losowe, tj. zbiór (3.4) i podstawiając $k = 0$ oraz $l = n - 1$ otrzymamy układ równań

$$\begin{bmatrix} c_{0,0} & c_{0,1} & \cdots & c_{0,n-1} \\ c_{1,0} & c_{1,1} & \cdots & c_{1,n-1} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ c_{n-1,0} & c_{n-1,1} & \cdots & c_{n-1,n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \|\epsilon_{0,n-1}\|^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.21)$$

gdzie $a_0 = -1$ oraz $a_i = -\alpha_i$ dla $i = 1, \dots, n - 1$. Rozważmy teraz podprzestrzeń

$$S_{k+1}^{l+1} = \text{span}\{S_{k+1}^l, y_{l+1}\}, \quad (3.22)$$

gdzie S_{k+1}^l jest określona jak w (3.8).

Dotychczas poszukiwaliśmy estymatora zmiennej y_k w podprzestrzeni S_{k+1}^l i oznaczaliśmy go jako $\hat{y}_{k,l}$. Błąd tego oszacowania oznaczyliśmy przez $\epsilon_{k,l}$ i nazwaliśmy błędem w *przód*. Zauważmy, że podprzestrzeń S_{k+1}^l jest rozpięta na elementach $\{y_i\}_{i=k+1}^{i=l}$, które z jednej strony stanowią $(l - k)$ -krokową przeszłość y_k , a z drugiej – $(l - k)$ -krokową przyszłość zmiennej y_{l+1} . Możemy więc prognozować (w tył) zmienną y_{l+1} . Wówczas

$$\check{y}_{k+1,l+1} \triangleq P(S_{k+1}^l)y_{l+1} \in S_{k+1}^l \quad (3.23)$$

będzie estymatorem y_{l+1} w podprzestrzeni S_{k+1}^l . Błąd oszacowania zmiennej y_{l+1} definiujemy jako

$$v_{k+1,l+1} \triangleq y_{l+1} - \check{y}_{k+1,l+1} = P((S_{k+1}^l)^\perp)y_{l+1} \perp S_{k+1}^l \quad (3.24)$$

i określamy jako błąd w *tył*. Podobnie jak estymator prognozy w *przód*, estymator $\check{y}_{k+1,l+1}$ można wyrazić jako kombinację liniową wektorów bazowych podprzestrzeni S_{k+1}^l

$$\check{y}_{k+1,l+1} = \sum_{i=k+1}^{i=l} \beta_i y_i, \quad (3.25)$$

gdzie β_i są współczynnikami kombinacji liniowej. Z faktu, że $v_{k+1,l+1} \perp S_{k+1}^l$ (3.24) oraz z tego, że $\check{y}_{k+1,l+1} \in S_{k+1}^l$ i jest kombinacją liniową (3.25) wnosimy, że

$$(v_{k+1,l+1}, y_i) = 0 \quad \text{dla } i = k + 1, \dots, l, \quad (3.26)$$

lub równoważnie

$$(y_{l+1} - \sum_{j=k+1}^{j=l} \beta_j y_j, y_i) = 0, \quad \text{dla } i = k + 1, \dots, l. \quad (3.27)$$

Podnosząc do kwadratu obie strony równości (A.3) przy $f = v_{k+1,l+1}$ otrzymamy

$$(v_{k+1,l+1}, v_{k+1,l+1}) = \|v_{k+1,l+1}\|^2. \quad (3.28)$$

Wykorzystując (3.24) przepisemy lewą stronę powyższej równości w postaci

$$\begin{aligned} (v_{k+1,l+1}, v_{k+1,l+1}) &= (v_{k+1,l+1}, (y_{l+1} - \check{y}_{k+1,l+1})) = \\ &= (v_{k+1,l+1}, y_{l+1}) - \left(v_{k+1,l+1}, \sum_{j=k+1}^{j=l} \beta_j y_j \right). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Ponieważ $v_{k+1,l+1} \perp S_{k+1}^l$, a $\sum_{j=k+1}^l \beta_j y_j \in S_{k+1}^l$, to $(v_{k+1,l+1}, \sum_{j=k+1}^l \beta_j y_j) = 0$ i stąd

$$\begin{aligned} (v_{k+1,l+1}, v_{k+1,l+1}) &= (v_{k+1,l+1}, y_{l+1}) = \left(y_{l+1} - \sum_{j=k+1}^l \beta_j y_j, y_{l+1} \right) = \\ &= (y_{l+1}, y_{l+1}) - \sum_{j=k+1}^l \beta_j (y_j, y_{l+1}) = \|v_{k+1,l+1}\|^2. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Ponieważ, jak już wcześniej wspomnieliśmy, iloczyny skalarne występujące w (3.30) można utożsamiać z wartościami funkcji kowariancji procesu y , to układ równań (3.26) łącznie z (3.30) możemy przepisać w poniższej postaci

$$\begin{bmatrix} c_{k+1,k+1} & c_{k+1,k+2} & \cdots & c_{k+1,l+1} \\ c_{k+2,k+1} & c_{k+2,k+2} & \cdots & c_{k+2,l+1} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ c_{l+1,k+1} & c_{l+1,k+2} & \cdots & c_{l+1,l+1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{k+1} \\ b_{k+2} \\ \vdots \\ b_{l+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \|v_{k+1,l+1}\|^2 \end{bmatrix}, \quad (3.31)$$

gdzie $b_{l+1} = 1$, oraz $b_i = -\beta_i$ dla $i = k+1, \dots, l$. Powyższy układ równań jest również układem normalnym równań, a macierz kowariancyjna

$$C_{k+1,l+1} = \begin{bmatrix} c_{k+1,k+1} & c_{k+1,k+2} & \cdots & c_{k+1,l+1} \\ c_{k+2,k+1} & c_{k+2,k+2} & \cdots & c_{k+2,l+1} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ c_{l+1,k+1} & c_{l+1,k+2} & \cdots & c_{l+1,l+1} \end{bmatrix}$$

jest macierzą Grama elementów $y_{k+1}, y_{k+2}, \dots, y_{l+1}$.

Rozszerzając ciąg obserwacji na zbiór (3.4) i podstawiając $k = 0$ i $l = n - 1$ otrzymamy

$$\begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & c_{1,n} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \cdots & c_{2,n} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ c_{n,1} & c_{n,2} & \cdots & c_{n,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \|v_{1,n}\|^2 \end{bmatrix}, \quad (3.32)$$

gdzie $b_n = 1$, oraz $b_i = -\beta_i$ dla $i = 1, \dots, n - 1$.

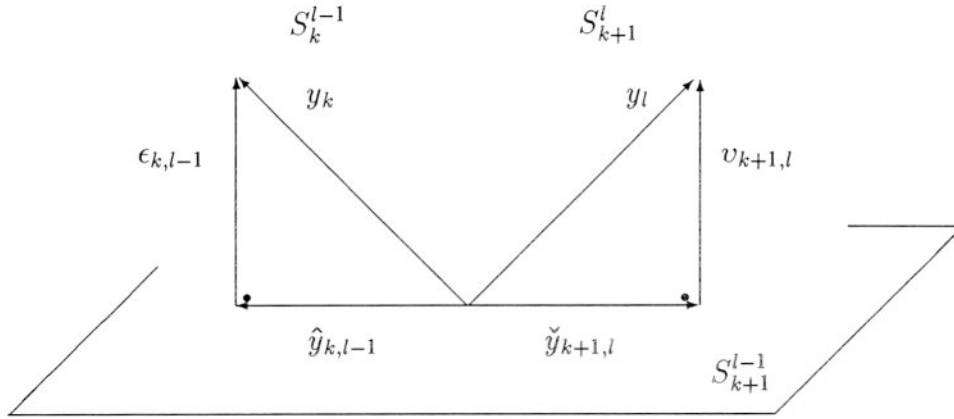
Jeśli proces y jest rzeczywisty, to zauważmy, że z definicji elementu $c_{ij} \triangleq E\{y_i y_j\}$ macierzy kowariancji wynika symetria macierzy Grama występującej w (3.20) oraz (3.31). Dla procesów zespolonych macierz C jest symetryczna po hermitowsku tj. $c_{ij} = c_{ji}^*$, gdzie $*$ oznacza transpozycję hermitowską.

W przypadku, gdy rozważamy sygnały stacjonarne w szerszym sensie (def.A.6) możemy – zgodnie z (A.11) – napisać

$$c_{ij} = E\{y_i y_j\} = E\{y_{i-\sigma} y_{j-\sigma}\} \stackrel{j \equiv \sigma}{=} E\{y_{i-j} y_0\} = c_{i-j} = c_k, \quad \text{gdzie } k = i - j \quad (3.33)$$

co oznacza, że wówczas macierz Grama występująca w (3.20) i (3.31) staje się macierzą Toeplitza. Z tej własności sygnałów stacjonarnych skorzystamy przy omawianiu struktur optymalnych filtrów ortogonalnych o parametrach stałych.

Estymatory $\hat{y}_{k,l}$ oraz $\check{y}_{k+1,l+1}$ są elementami podprzestrzeni S_{k+1}^l . Podobnie, estymatory $\hat{y}_{k,l-1}$ oraz $\check{y}_{k+1,l}$ należą do podprzestrzeni S_{k+1}^{l-1} . Fakt, że $\hat{y}_{k,l-1}$ oraz $\check{y}_{k+1,l}$ leżą w jednej podprzestrzeni daje podstawę do sformułowania następującego twierdzenia, które pozwala na rekurencyjne podwyższanie rzędu filtru prognozującego (a w konsekwencji podwyższenie rzędu estymatora prognozy).



Rys. 3.3: Wyznaczanie optymalnego estymatora rzędu $l - k$ prognozy zmiennej losowej y_k .

Twierdzenie 3.1 O podwyższaniu rzędu estymatora prognozy.

Niech y_k będzie prognozowaną zmienną losową oraz niech $\epsilon_{k,l-1}$ i $v_{k+1,l}$ będą błędami prognozy w przód i w tył (rys.3.3). Niech $e_{k,l-1}$ i $r_{k+1,l}$ będą unormowanymi wersjami odpowiednio $\epsilon_{k,l-1}$ oraz $v_{k+1,l}$ tj.

$$e_{k,l-1} \triangleq \epsilon_{k,l-1} \|\epsilon_{k,l-1}\|^{-1} \perp S_{k+1}^{l-1} \quad (3.34)$$

i

$$r_{k+1,l} \triangleq v_{k+1,l} \|v_{k+1,l}\|^{-1} \perp S_{k+1}^{l-1}. \quad (3.35)$$

Wówczas prawdziwe są następujące zależności rekurencyjne:

$$\begin{bmatrix} e_{k,l} \\ r_{k,l} \end{bmatrix} = \theta(\rho_{k,l}) \begin{bmatrix} e_{k,l-1} \\ r_{k+1,l} \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

gdzie

$$\theta(\rho_{k,l}) \triangleq (1 - \rho_{k,l}^2)^{-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 1 & \rho_{k,l} \\ \rho_{k,l} & 1 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

jest macierzą J -ortogonalną tj. spełniającą zależność

$$\theta(\rho_{k,l}) J \theta^*(\rho_{k,l}) = J \quad (3.38)$$

natomiast J jest macierzą sygnaturową

$$J \triangleq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (3.39)$$

Współczynnik $\rho_{k,l}$ jest zdefiniowany zależnością

$$\rho_{k,l} \triangleq -(e_{k,l-1}, r_{k+1,l}) = -E\{e_{k,l-1} r_{k+1,l}\}; \quad |\rho_{k,l}| \leq 1. \quad (3.40)$$

Dowód:

Biorąc pod uwagę (3.10) i (3.12) błąd $\epsilon_{k,l}$ możemy wyrazić w postaci

$$\epsilon_{k,l} = P(S_k^l \ominus S_{k+1}^l) y_k = (I - P(S_{k+1}^l)) y_k \quad (3.41)$$

oraz korzystając odpowiednio z (3.23) i (3.24) błąd $v_{k,l}$ wyrazimy jako

$$v_{k,l} = P(S_k^l \ominus S_k^{l-1})y_l = (I - P(S_k^{l-1}))y_l \quad (3.42)$$

Ponieważ $v_{k+1,l} \in S_{k+1}^l$ i jednocześnie $v_{k+1,l} \perp S_{k+1}^{l-1}$, to mamy następujące dekompozycje

$$S_{k+1}^l = S_{k+1}^{l-1} \oplus \text{span}\{v_{k+1,l}\} \quad (3.43)$$

oraz ze względu na to, że $\epsilon_{k,l-1} \in S_k^{l-1}$ i równocześnie $\epsilon_{k,l-1} \perp S_{k+1}^{l-1}$ mamy

$$S_k^{l-1} = S_{k+1}^{l-1} \oplus \text{span}\{\epsilon_{k,l-1}\}. \quad (3.44)$$

Ponieważ po prawych stronach powyższych dwóch równań występują sumy ortogonalne, to

$$P(S_{k+1}^l) = P(S_{k+1}^{l-1}) + P(\text{span}\{v_{k+1,l}\}) \quad (3.45)$$

oraz

$$P(S_k^{l-1}) = P(S_{k+1}^{l-1}) + P(\text{span}\{\epsilon_{k,l-1}\}). \quad (3.46)$$

Wstawiając prawą stronę (3.45) do (3.41) dostajemy

$$\begin{aligned} \epsilon_{k,l} &= (I - P(S_{k+1}^l))y_k = \\ &= (I - P(S_{k+1}^{l-1}))y_k - P(\text{span}\{v_{k+1,l}\})y_k \\ &= \epsilon_{k,l-1} - P(\text{span}\{v_{k+1,l}\})y_k. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Podobnie, wstawiając prawą stronę (3.46) do (3.42) mamy

$$\begin{aligned} v_{k,l} &= (I - P(S_k^{l-1}))y_l = \\ &= (I - P(S_{k+1}^{l-1}))y_l - P(\text{span}\{\epsilon_{k,l-1}\})y_l \\ &= v_{k+1,l} - P(\text{span}\{\epsilon_{k,l-1}\})y_l. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Przypomnijmy [57], że projekcja ortogonalna a_b elementu a na podprzestrzeń $\text{span}\{b\}$ wyraża się następująco:

$$a_b = P(\text{span}\{b\})a \triangleq \frac{(a, b)}{(b, b)}b = \frac{(b, a)}{(b, b)}b = \frac{(a, b)}{\|b\|^2}b. \quad (3.49)$$

gdzie (a, b) – oznacza iloczyn skalarny elementów a i b .

W myśl powyższej definicji projekcja y_k na $\text{span}\{v_{k+1,l}\}$ jest wyrażona jako

$$P(\text{span}\{v_{k+1,l}\})y_k = (v_{k+1,l}, y_k) \cdot \frac{v_{k+1,l}}{\|v_{k+1,l}\|^2}, \quad (3.50)$$

a projekcja y_l na $\text{span}\{\epsilon_{k,l-1}\}$ jako

$$P(\text{span}\{\epsilon_{k,l-1}\})y_l = (\epsilon_{k,l-1}, y_l) \cdot \frac{\epsilon_{k,l-1}}{\|\epsilon_{k,l-1}\|^2}. \quad (3.51)$$

Korzystając z (3.10) oraz (3.26) możemy iloczyn skalarny w (3.50) przepisać w postaci

$$\begin{aligned} (v_{k+1,l}, y_k) &= (v_{k+1,l}, \hat{y}_{k,l-1} + \epsilon_{k,l-1}) = \\ &= (v_{k+1,l}, \hat{y}_{k,l-1}) + (v_{k+1,l}, \epsilon_{k,l-1}) = \\ &= (v_{k+1,l}, \epsilon_{k,l-1}). \end{aligned} \quad (3.52)$$

Podobnie, korzystając z (3.24) oraz (3.13) przepisujemy iloczyn skalarny w (3.51) w postaci

$$\begin{aligned} (\epsilon_{k,l-1}, y_l) &= (\epsilon_{k,l-1}, \check{y}_{k+1,l} + v_{k+1,l}) = \\ &= (\epsilon_{k,l-1}, \check{y}_{k+1,l}) + (\epsilon_{k,l-1}, v_{k+1,l}) = \\ &= (\epsilon_{k,l-1}, v_{k+1,l}) \end{aligned} \quad (3.53)$$

Wstawiając prawe strony (3.52) i (3.53) odpowiednio do (3.50) i (3.51), a te z kolei do (3.47) i (3.48) otrzymamy

$$\epsilon_{k,l} = \epsilon_{k,l-1} - (v_{k+1,l}, \epsilon_{k,l-1}) \cdot \frac{v_{k+1,l}}{\|v_{k+1,l}\|^2} \quad (3.54)$$

oraz

$$v_{k,l} = v_{k+1,l} - (\epsilon_{k,l-1}, v_{k+1,l}) \cdot \frac{\epsilon_{k,l-1}}{\|\epsilon_{k,l-1}\|^2} \quad (3.55)$$

Z (3.34) i (3.35) mamy

$$\epsilon_{k,l-1} = \| \epsilon_{k,l-1} \| e_{k,l-1} \quad (3.56)$$

oraz

$$v_{k,l-1} = \| v_{k,l-1} \| r_{k,l-1}. \quad (3.57)$$

Stąd, normując (3.54) i (3.55), otrzymamy

$$\begin{aligned} e_{k,l} &= \frac{\epsilon_{k,l-1}}{\|\epsilon_{k,l}\|} - \frac{1}{\|\epsilon_{k,l}\|} (v_{k+1,l}, \epsilon_{k,l-1}) r_{k+1,l} \frac{1}{\|v_{k+1,l}\|} = \\ &= \frac{\|\epsilon_{k,l-1}\|}{\|\epsilon_{k,l}\|} e_{k,l-1} - \frac{\|\epsilon_{k,l-1}\|}{\|\epsilon_{k,l}\|} (r_{k+1,l}, e_{k,l-1}) r_{k+1,l} \end{aligned} \quad (3.58)$$

i, odpowiednio,

$$\begin{aligned} r_{k,l} &= \frac{v_{k+1,l}}{\|v_{k,l}\|} - \frac{1}{\|v_{k,l}\|} (\epsilon_{k,l-1}, v_{k+1,l}) e_{k,l-1} \frac{1}{\|\epsilon_{k,l-1}\|} = \\ &= \frac{\|v_{k+1,l}\|}{\|v_{k,l}\|} r_{k+1,l} - \frac{\|v_{k+1,l}\|}{\|v_{k,l}\|} (e_{k,l-1}, r_{k+1,l}) e_{k,l-1} \end{aligned} \quad (3.59)$$

Po uporządkowaniu otrzymamy

$$e_{k,l} = \frac{\|\epsilon_{k,l-1}\|}{\|\epsilon_{k,l}\|} [e_{k,l-1} - (e_{k,l-1}, r_{k+1,l}) r_{k+1,l}] \quad (3.60)$$

oraz

$$r_{k,l} = \frac{\|v_{k+1,l}\|}{\|v_{k,l}\|} [r_{k+1,l} - (e_{k,l-1}, r_{k+1,l}) e_{k,l-1}]. \quad (3.61)$$

Wstawiając do (3.60) i (3.61) współczynnik $\rho_{k,l}$ (3.40) otrzymamy

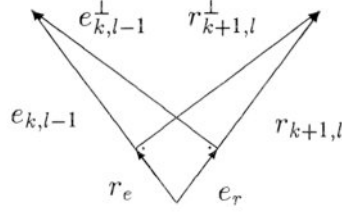
$$e_{k,l} = \frac{\|\epsilon_{k,l-1}\|}{\|\epsilon_{k,l}\|} [e_{k,l-1} + \rho_{k,l} r_{k+1,l}] \quad (3.62)$$

oraz

$$r_{k,l} = \frac{\|v_{k+1,l}\|}{\|v_{k,l}\|} [r_{k+1,l} + \rho_{k,l} e_{k,l-1}] \quad (3.63)$$

Pozostaje nam pokazanie, że

$$\frac{\|\epsilon_{k,l-1}\|}{\|\epsilon_{k,l}\|} = \frac{\|v_{k+1,l}\|}{\|v_{k,l}\|} = (1 - \rho_{k,l}^2)^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.64)$$



Rys. 3.4: Ortogonalność błędów prognozy.

W tym celu posłużymy się rys.3.4.

Niech $e_{k,l-1}$ i $r_{k+1,l}$ będą wektorami występującymi po prawej stronie równań (3.62) i (3.63) oraz niech

$$e_r = P(r_{k+1,l})e_{k,l-1} \quad \text{a} \quad r_e = P(e_{k,l-1})r_{k+1,l}. \quad (3.65)$$

Wówczas z definicji rzutu ortogonalnego mamy

$$e_{k,l-1}^\perp \triangleq e_{k,l-1} - e_r \quad \text{oraz} \quad r_{k+1,l}^\perp \triangleq r_{k+1,l} - r_e. \quad (3.66)$$

gdzie $e_{k,l-1}^\perp \perp e_r$ a $r_{k+1,l}^\perp \perp r_e$. Biorąc pod uwagę (3.49) i (3.40), przepisujemy (3.65) w postaci

$$e_r = (e_{k,l-1}, r_{k+1,l}) \frac{r_{k+1,l}}{\|r_{k+1,l}\|} = -\rho_{k,l} r_{k+1,l} \quad (3.67)$$

jako, że zgodnie z (3.35), $\|r_{k+1,l}\| = 1$. Podobnie

$$r_e = (e_{k,l-1}, r_{k+1,l}) \frac{e_{k,l-1}}{\|e_{k,l-1}\|} = -\rho_{k,l} e_{k,l-1}, \quad (3.68)$$

ponieważ, zgodnie z (3.34), $\|e_{k,l-1}\| = 1$.

Ponieważ $e_{k,l-1}^\perp \triangleq e_{k,l-1} - e_r$ oraz $r_{k+1,l}^\perp \triangleq r_{k+1,l} - r_e$, to zauważmy, że zgodnie z (3.62) i (3.63) mamy

$$e_{k,l} = \frac{\|e_{k,l-1}\|}{\|e_{k,l}\|} e_{k,l-1}^\perp \quad (3.69)$$

oraz

$$r_{k,l} = \frac{\|r_{k+1,l}\|}{\|r_{k,l}\|} r_{k+1,l}^\perp. \quad (3.70)$$

Ponieważ z (3.58) i (3.59) wiemy, że $\|e_{k,l}\| = \|r_{k,l}\| = 1$, to

$$\|e_{k,l-1}^\perp\| = (\|e_{k,l-1}\|^2 - \|e_r\|^2)^{\frac{1}{2}} = (1 - \rho_{k,l}^2)^{\frac{1}{2}} \quad (3.71)$$

i podobnie

$$\|r_{k+1,l}^\perp\| = (\|r_{k+1,l}\|^2 - \|r_e\|^2)^{\frac{1}{2}} = (1 - \rho_{k,l}^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.72)$$

Ostatecznie, wstawiając (3.71) i (3.72) odpowiednio do (3.69) i (3.70) otrzymamy

$$\frac{\|e_{k,l-1}\|}{\|e_{k,l}\|} = \frac{\|r_{k+1,l}\|}{\|r_{k,l}\|} = (1 - \rho_{k,l}^2)^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.73)$$

Dowód J -ortogonalności macierzy θ pokażemy przez sprawdzenie. Wstawiając (3.37) do (3.38) otrzymamy

$$\begin{aligned} \theta(\rho_{k,l}) J \theta^*(\rho_{k,l}) &= (1 - \rho_{k,l}^2)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & \rho_{k,l} \\ \rho_{k,l} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \rho_{k,l} \\ \rho_{k,l} & 1 \end{bmatrix} = \\ &= (1 - \rho_{k,l}^2)^{-1} \begin{bmatrix} 1 - \rho_{k,l}^2 & 0 \\ 0 & -(1 - \rho_{k,l}^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = J \end{aligned} \quad (3.74)$$

□

3.1.2 Ortogonalna reprezentacja estymatora prognozy

W poprzednim rozdziale pokazaliśmy, że estymator $\hat{y}_{k,l}$ prognozy (w przód) zmiennej y_k wyraża się kombinacją liniową (3.14) oraz, że $\hat{y}_{k,l} \in S_{k+1}^l$.

Pokażemy teraz, że

- zbiór błędów prognozy w tył $\{r_{k+1,i}\}_{i=k+1}^{l+1}$ stanowi bazę ortonormalną w podprzestrzeni S_{k+1}^l ,
- estymator prognozy $\hat{y}_{k,l}$ można wyrazić jako kombinację liniową błędów prognozy w tył tj. w postaci

$$\hat{y}_{k,l} = \sum_{i=k+1}^l \gamma_i r_{k+1,i}. \quad (3.75)$$

Rozważmy prognozę w tył zmiennej y_{l+1} w podprzestrzeni S_{k+1}^l . Wówczas, zgodnie z (3.24)

$$y_{l+1} = \check{y}_{k+1,l+1} + v_{k+1,l+1} \quad (3.76)$$

przy czym

$$y_{l+1} \in S_{k+1}^{l+1} \quad (3.77)$$

$$\check{y}_{k+1,l+1} \in S_{k+1}^l \quad (3.78)$$

oraz

$$v_{k+1,l+1} \in S_{k+1}^{l+1} \text{ i } v_{k+1,l+1} \perp S_{k+1}^l \quad (3.79)$$

Obniżając – dla ustalonego k – rząd estymatora o 1, tj. zamieniając l na $l-1$, otrzymamy

$$y_{(l-1)+1} = y_l = \check{y}_{k+1,l} + v_{k+1,l} \quad (3.80)$$

i odpowiednio

$$y_l \in S_{k+1}^l, \quad (3.81)$$

$$\check{y}_{k+1,l} \in S_{k+1}^{l-1} \quad (3.82)$$

oraz

$$v_{k+1,l} \in S_{k+1}^l \text{ i } v_{k+1,l} \perp S_{k+1}^{l-1}. \quad (3.83)$$

Skoro – zgodnie z (3.79) – $v_{k+1,l+1} \perp S_{k+1}^l$ a $v_{k+1,l} \in S_{k+1}^l$, to oczywiście

$$v_{k+1,l+1} \perp v_{k+1,l}. \quad (3.84)$$

Równocześnie, $v_{k+1,l+1} \in S_{k+1}^{l+1}$. Stąd S_{k+1}^{l+1} możemy wyrazić w postaci następującej sumy ortogonalnej

$$S_{k+1}^{l+1} = S_{k+1}^l \oplus \text{span}\{v_{k+1,l+1}\}. \quad (3.85)$$

Podobnie, korzystając z (3.83) możemy S_{k+1}^l wyrazić jako

$$S_{k+1}^l = S_{k+1}^{l-1} \oplus \text{span}\{v_{k+1,l}\}. \quad (3.86)$$

Po podstawieniu (3.86) do (3.85) otrzymamy

$$S_{k+1}^{l+1} = S_{k+1}^{l-1} \oplus \text{span}\{v_{k+1,l}\} \oplus \text{span}\{v_{k+1,l+1}\}. \quad (3.87)$$

Iterując tę procedurę, otrzymamy ostatecznie dekompozycję S_{k+1}^{l+1} w postaci

$$S_{k+1}^{l+1} = S_{k+1}^{k+1} \oplus_{i=k+2}^{i=l+1} \text{span}\{v_{k+1,i}\}, \quad (3.88)$$

gdzie $S_{k+1}^{k+1} = \text{span}\{v_{k+1,k+1}\} = \text{span}\{y_{k+1,k+1}\}$.

Ponieważ unormowanie wektora nie zmienia jego kierunku, czyli nie ma wpływu na ortogonalność wektorów, to (3.88) możemy przepisać jako

$$S_{k+1}^{l+1} = \oplus_{i=k+1}^{i=l+1} \text{span}\{r_{k+1,i}\} \quad (3.89)$$

gdzie $r_{k+1,i} = v_{k+1,i} \|v_{k+1,i}\|^{-1}$ i $r_{k,k} = y_k \|y_k\|^{-1}$.

Oczywiście z (3.89) wynika, że

$$S_{k+1}^l = \oplus_{i=k+1}^{i=l} \text{span}\{r_{k+1,i}\}. \quad (3.90)$$

Skoro zachodzi (3.90) i z (3.12) $\hat{y}_{k,l} \in S_{k+1}^l$, to istnieje kombinacja liniowa

$$\hat{y}_{k,l} = \sum_{i=k+1}^l \gamma_i r_{k+1,i}. \quad (3.91)$$

Ponieważ zbiór $\{r_{k+1,i}\}_{i=k+1}^{i=l+1}$ jest bazą ortonormalną (ON) tj.

$$(r_{k+1,i}, r_{k+1,j}) = \begin{cases} 1 & \text{dla } i = j \\ 0 & \text{dla } i \neq j, \end{cases} \quad (3.92)$$

to

$$P(S_{k+1}^l) = P(\oplus_{i=k+1}^l r_{k+1,i}) = \sum_{i=k+1}^l P(r_{k+1,i}) \quad (3.93)$$

i w związku z tym

$$\hat{y}_{k,l} = P(S_{k+1}^l)y_k = P(\oplus_{i=k+1}^l r_{k+1,i})y_k = \sum_{i=k+1}^l P(r_{k+1,i})y_k. \quad (3.94)$$

Wykorzystując (3.49) oraz fakt, że $\forall_{i=k+1, \dots, l} \|r_{k+1,i}\| = 1$ przekształcimy (3.94) do postaci

$$\begin{aligned} \hat{y}_{k,l} &= \sum_{i=k+1}^l (r_{k+1,i}, y_k) r_{k+1,i} = \\ &= \sum_{i=k+1}^l (r_{k+1,i}, \hat{y}_{k,i-1} + e_{k,i-1}) r_{k+1,i} = \\ &= \sum_{i=k+1}^l [(r_{k+1,i}, \hat{y}_{k,i-1}) + (r_{k+1,i}, e_{k,i-1})] r_{k+1,i}. \end{aligned} \quad (3.95)$$

Zauważmy, że dla $i = k+1, \dots, l$ $\hat{y}_{k,i-1} \in S_{k+1}^{i-1}$ a $r_{k+1,i} \in (S_{k+1}^{i-1})^\perp$ w związku z czym

$$(r_{k+1,i}, \hat{y}_{k,i-1}) = 0 \quad \text{dla } i = k+1, \dots, l. \quad (3.96)$$

Stąd ostatecznie otrzymamy

$$\hat{y}_{k,l} = - \sum_{i=k+1}^l \rho_{k,i} r_{k+1,i}, \quad (3.97)$$

gdzie $\rho_{k,i}$ jest współczynnikiem Schura określonym przez (3.40).

Zauważmy również, że skoro

$$\epsilon_{k,l} = y_k + \sum_{i=k+1}^l \rho_{k,i} r_{k+1,i}, \quad (3.98)$$

to

$$\begin{aligned} \|\epsilon_{k,l}\|^2 &= \left\| y_k + \sum_{i=k+1}^l \rho_{k,i} r_{k+1,i} \right\|^2 = \\ &= \left(y_k + \sum_{i=k+1}^l \rho_{k,i} r_{k+1,i}, y_k + \sum_{i=k+1}^l \rho_{k,i} r_{k+1,i} \right) = \\ &= (y_k, y_k) + 2 \left(y_k, \sum_{i=k+1}^l \rho_{k,i} r_{k+1,i} \right) + \sum_{i=k+1}^l \rho_{k,i}^2 = \\ &= \|y_k\|^2 + 2 \left(\epsilon_{k,l} - \sum_{i=k+1}^l \rho_{k,i} r_{k+1,i}, \sum_{i=k+1}^l \rho_{k,i} r_{k+1,i} \right) + \sum_{i=k+1}^l \rho_{k,i}^2 = \\ &= \|y_k\|^2 + 2 \left(\epsilon_{k,l}, \sum_{i=k+1}^l \rho_{k,i} r_{k+1,i} \right) - 2 \left(\sum_{i=k+1}^l \rho_{k,i}^2 \right) + \sum_{i=k+1}^l \rho_{k,i}^2 = \\ &= \|y_k\|^2 + 2 \left(\epsilon_{k,l}, \sum_{i=k+1}^l \rho_{k,i} r_{k+1,i} \right) - \sum_{i=k+1}^l \rho_{k,i}^2, \end{aligned} \quad (3.99)$$

przy czym

$$\left(\epsilon_{k,l}, \sum_{i=k+1}^l \rho_{k,i} r_{k+1,i} \right) = 0,$$

ponieważ $\epsilon_{k,l} \perp S_{k+1}^l = \oplus_{i=k+1}^l \text{span}\{r_{k+1,i}\}$.

Stąd

$$\|\epsilon_{k,l}\|^2 = \|y_k\|^2 - \sum_{i=k+1}^l \rho_{k,i}^2, \quad (3.100)$$

a w przypadku gdy $\|\epsilon_{k,l}\|^2 \rightarrow 0$ przy $(n = l - k) \rightarrow \infty$ otrzymujemy równość Parsewala

$$\|y_k\|^2 = \sum_{i=k+1}^l \rho_{k,i}^2. \quad (3.101)$$

Stąd wnosiśmy, że:

- prawa strona (3.97) jest sumą częściową szeregu Fouriera zmiennej losowej y_k ,
- współczynniki Schura określone przez (3.40) stanowią reprezentację ortogonalną prognozowanej zmiennej losowej y_k w podprzestrzeni S_{k+1}^l ,
- współczynniki Schura można, ze względu na (3.97) i (3.101), interpretować jako współczynniki Fouriera w ortogonalnym rozwinięciu estymatora prognozy względem bazy ON opartej na obserwacjach sygnału y .

Pokażemy jeszcze, że zbiór błędów prognozy w przód stanowi również bazę ON. Przypomnijmy, że błąd prognozy w przód $\epsilon_{k,l}$ zmiennej losowej y_k definiowaliśmy (3.10) jako

$$\epsilon_{k,l} = y_k - \hat{y}_{k,l} \quad (3.102)$$

i zgodnie z (3.10) błąd ten jest ortogonalny do S_{k+1}^l . Błąd prognozy rzędu $l - (k + 1)$ zmiennej y_{k+1} wynosi odpowiednio

$$\epsilon_{k+1,l} = y_{k+1} - \hat{y}_{k+1,l} \quad (3.103)$$

przy czym $\epsilon_{k+1,l} \perp S_{k+2}^l$. Stąd,

$$S_k^l = \text{span}\{\epsilon_{k,l}\} \oplus S_{k+1}^l \quad (3.104)$$

oraz

$$S_{k+1}^l = \text{span}\{\epsilon_{k+1,l}\} \oplus S_{k+2}^l. \quad (3.105)$$

Ostatecznie otrzymamy dekompozycję w postaci

$$S_k^l = \bigoplus_{i=k}^{i=l} \text{span}\{\epsilon_{i,l}\}, \quad (3.106)$$

gdzie $\epsilon_{i,l} = y_l$, przy czym ze względu na fakt, że unormowanie wektora nie zmienia jego kierunku, możemy powyższą dekompozycję zapisać jako

$$S_k^l = \bigoplus_{i=k}^{i=l} \text{span}\{e_{i,l}\}, \quad (3.107)$$

gdzie $e_{i,l} = \epsilon_{i,l} \|\epsilon_{i,l}\|^{-1}$.

Zależność (3.107) oznacza, że ciąg błędów prognozy w przód jest ciągiem nieskorelowanych zmiennych losowych.

3.2 Ortogonalna parametryzacja sygnałów 2-go rzędu

W paragrafie 3.1.1 sformułowaliśmy i omówiliśmy problem optymalnej prognozy średniokwadratowej. Podaliśmy również podstawowe twierdzenie określające sposób podwyższania rzędu estymatora prognozy. Przedmiotem rozważań niniejszego i kilku kolejnych podrozdziałów będzie cyfrowa realizacja algorytmu, którego ideę i własności opisano w poprzednich podrozdziałach. Przedstawimy realizacje filtrów innowacyjnych (wybielających, parametryzujących) w dwóch podstawowych konfiguracjach a także omówimy proces filtracji innowacyjnej (wybielania, parametryzacji).

3.2.1 Filtry innowacyjne o parametrach zmiennych w czasie

Struktura cyfrowych filtrów innowacyjnych wynika bezpośrednio z rekurencyjnych rozwiązań algorytmów liniowej prognozy średniokwadratowej. Podstawą realizacji tych struktur jest równanie (3.36) wyrażające sposób rekurencyjnego podwyższaniu rzędu błędu estymacji prognozowanej zmiennej losowej.

Weźmy pod uwagę równanie (3.36) i założmy, że w chwili k dysponujemy rozwiązaniem rzędu $(l - 1) - k$. Wówczas

$$\begin{bmatrix} e_{k,l} \\ r_{k,l} \end{bmatrix} = \theta(\rho_{k,l}) \begin{bmatrix} e_{k,l-1} \\ r_{k+1,l} \end{bmatrix} \quad (3.108)$$

gdzie

$$\theta(\rho_{k,l}) = \theta^{(k,l)} = \begin{bmatrix} \theta_{11}^{(k,l)} & \theta_{12}^{(k,l)} \\ \theta_{21}^{(k,l)} & \theta_{22}^{(k,l)} \end{bmatrix} \triangleq (1 - \rho_{k,l}^2)^{-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 1 & \rho_{k,l} \\ \rho_{k,l} & 1 \end{bmatrix} \quad (3.109)$$

przy czym $\theta^{(k,l)}$ spełnia zależność

$$\theta^{(k,l)} J \theta^{(k,l)*} = J, \quad (3.110)$$

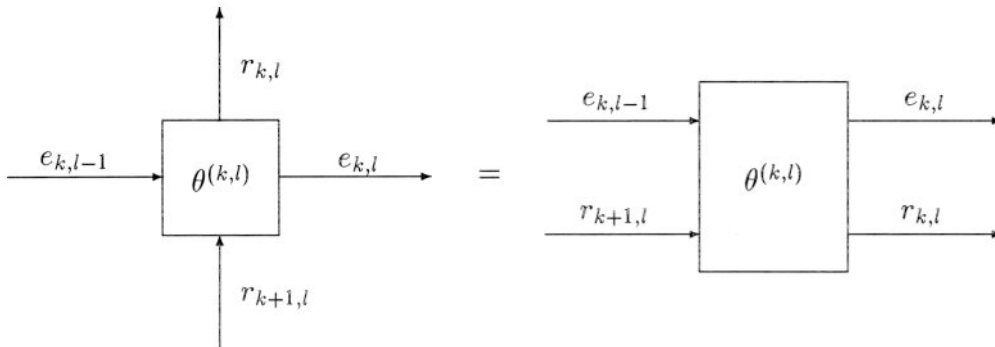
a współczynnik $\rho_{k,l}$ – podobnie jak w (3.40) – określamy jako

$$\rho_{k,l} = -(e_{k,l-1}, r_{k+1,l}). \quad (3.111)$$

Równanie (3.108) realizuje pojedynczą sekcję filtru innowacyjnego, której schemat pokazano na rys.3.5b. Jeśli przyjmiemy, że (rzeczywisty) współczynnik Schura $\rho_{k,l}$ jest tangensem hiperbolicznym pewnego kąta $\psi_{k,l}$ tj. $\rho_{k,l} = \tanh \psi_{k,l}$, to pojedyncza sekcja filtru przyjmuje postać

$$\theta(\rho_{k,l}) = \begin{bmatrix} \cosh \psi_{k,l} & \sinh \psi_{k,l} \\ \sinh \psi_{k,l} & \cosh \psi_{k,l} \end{bmatrix} \quad (3.112)$$

i tym samym realizuje rotację hiperboliczną o kąt $\psi_{k,l}$ wektora sygnałów $e_{k,l-1}$ oraz $r_{k+1,l}$. Element opisany macierzą (3.112) będziemy nazywać *rotorem hiperbolicznym* i schematycznie przedstawiać tak jak na rys.3.5a.



Rys. 3.5: a) Rotor hiperboliczny, b) równoważna mu sekcja filtru prognozującego.

Na rys.3.6 pokazano schemat podwyższania rzędu błędów estymacji w przód i w tył wynikający z twierdzenia 3.1 i oparty o użycie rotora hiperbolicznego.

Rozważmy błąd estymatora rzędu $(l - k)$. Wówczas zgodnie z (3.108) i (3.109) mamy

$$e_{k,l} = \theta_{11}^{(k,l)} e_{k,l-1} + \theta_{12}^{(k,l)} r_{k+1,l}. \quad (3.113)$$

Dla estymatora rzędu $l - (k + 1)$ otrzymamy równanie

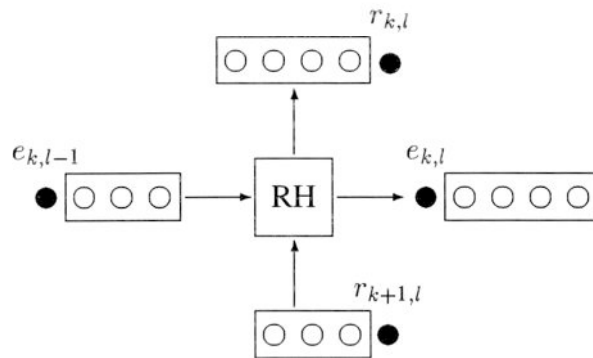
$$e_{k,l-1} = \theta_{11}^{(k,l-1)} e_{k,l-2} + \theta_{12}^{(k,l-1)} r_{k+1,l-2}, \quad (3.114)$$

i konsekwentnie, dla $(l - k) = 1$

$$e_{k,k+1} = \theta_{11}^{(k,k+1)} e_{k,k} + \theta_{12}^{(k,k+1)} r_{k+1,k}, \quad (3.115)$$

gdzie zgodnie z (3.10) i (3.13) oraz odpowiednio (3.24) i (3.25)

$$e_{i,i} = r_{i,i} = y_i \quad \text{dla} \quad i = k, \dots, l, \quad (3.116)$$



Rys. 3.6: Podwyższanie rzędu błędów estymacji $e_{k,l-1}$ do $e_{k,l}$ (w przód) i $r_{k+1,l}$ do $r_{k,l}$ (w tył) w przypadku 1D.

przy czym $y_i = y_i \|y_i\|^{-1}$.

Stąd, korzystając z (3.114) oraz (3.115), możemy (3.113) przepisać w postaci

$$e_{k,l} = \left(\prod_{i=k+1}^l \theta_{11}^{(k,i)} \right) e_{k,k} + \sum_{i=k+1}^{l-1} \prod_{j=i+1}^l \theta_{11}^{(k,j)} \theta_{12}^{(k,i)} r_{k+1,i-1} + \theta_{12}^{(k,l)} r_{k+1,l}. \quad (3.117)$$

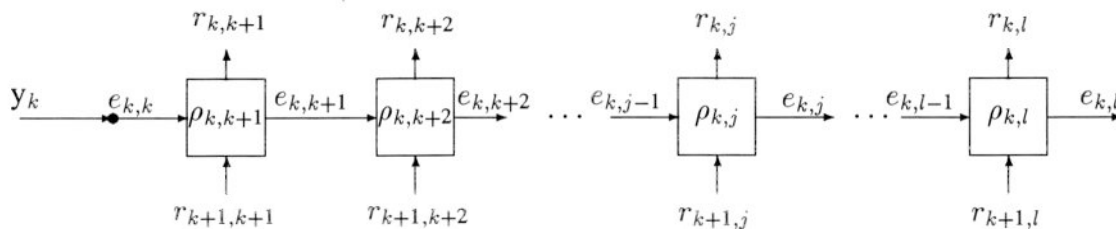
Podobne przekształcenia można wykonać dla błędu $r_{k,l}$. Istotnie, z (3.108) mamy

$$r_{k,l} = \theta_{21}^{(k,l)} e_{k,l-1} + \theta_{22}^{(k,l)} r_{k+1,l}. \quad (3.118)$$

Podstawiając $e_{k,l-1}$ otrzymane z (3.117) przez podstawienie $l-k \mapsto l-k-1$ mamy

$$\begin{aligned} r_{k,l} = & \left(\prod_{i=k+1}^{l-1} \theta_{11}^{(k,i)} \right) \theta_{21}^{(k,l)} e_{k,k} + \sum_{i=k+1}^{l-2} \left(\prod_{j=i+1}^{l-1} \theta_{11}^{(k,j)} \right) \theta_{12}^{(k,i)} \theta_{21}^{(k,l)} r_{k+1,i-1} + \\ & + \theta_{12}^{(k,l-1)} \theta_{21}^{(k,l)} r_{k+1,l} + \theta_{22}^{(k,l)} r_{k+1,l}. \end{aligned} \quad (3.119)$$

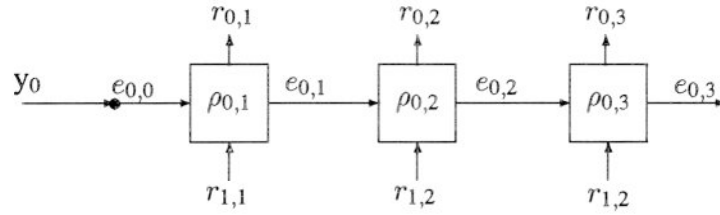
Filtr rzędu $(l-k)$ realizujący (3.117) i (3.118) pokazano na rys.3.7,



Rys. 3.7: Fragment filtru parametryzującego (innowacyjnego) rzędu $(l-k)$.

zaś na rys.3.8 pokazano dla przykładu fragment struktury filtru trzeciego rzędu, tj. filtru z rys.3.7 dla $k=0$ i $l=3$.

Zauważmy, że do wyznaczenia błędów $\{r_{k,i}\}_{i=k+1}^l$ potrzebna jest między innymi znajomość błędów $\{r_{k+1,i}\}_{i=k+1}^l$. Z kolei, aby wyznaczyć zbiór $\{r_{k+1,i}\}_{i=k+2}^l$ potrzebujemy $\{r_{k+2,i}\}_{i=k+2}^l$. W rozdziale 3.1.2 pokazaliśmy, że na mocy (3.90) zbiór $\{r_{k+1,i}\}_{i=k+1}^l$ stanowi bazę ON. Ponieważ dekompozycja (3.90) nie zależy od wyboru k , to zbiór $\{r_{k,i}\}_{i=k}^l$ jest także zbiorem ON. Z rys. 3.7 widać, że zbiór ten jest generowany przy wyznaczaniu błędu $e_{k,l}$.

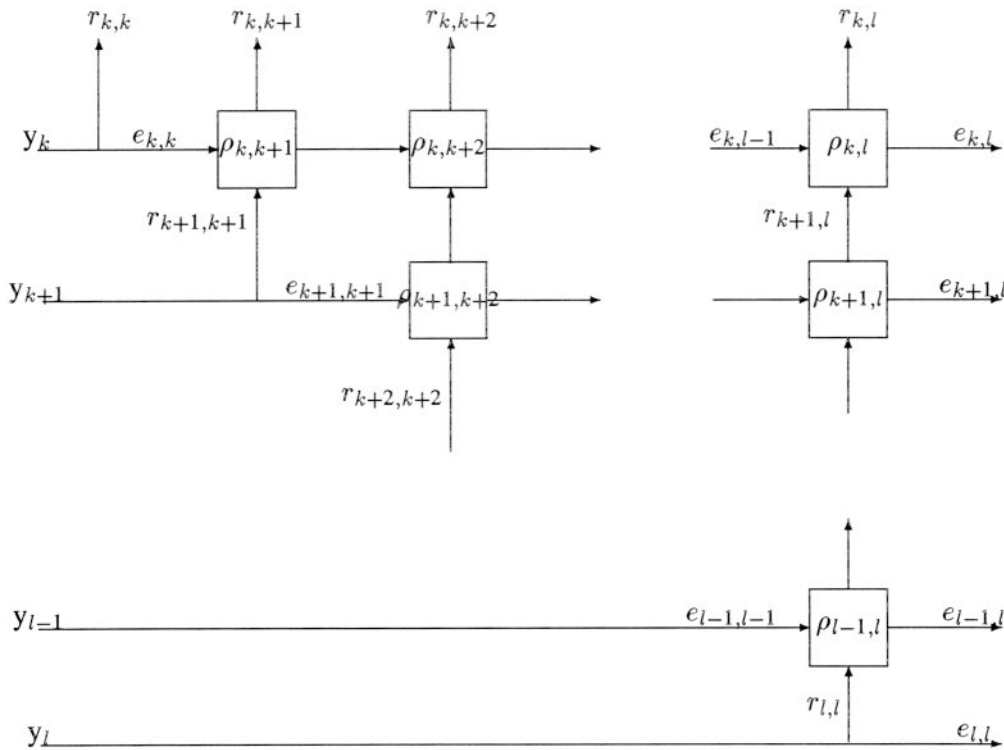


Rys. 3.8: Filtr parametryzujący (innowacyjny) trzeciego rzędu.

Rekurencyjne wyznaczanie odpowiednich zbiorów błędów w tył, tj. zbiorów $\{r_{j,i}\}_{j=k,i=l}^{j=l,i=l}$ prowadzi do struktury pokazanej na rys.3.9. Strukturę taką będziemy określać mianem *filtru innowacyjnego* lub *parametryzującego* rzędu $(l - k)$.

Przykładową strukturę filtra trzeciego rzędu pokazano na rys.3.10. Filtr tego typu (o strukturze trójkątnej) będziemy nazywać filtrem innowacyjnym o zmiennych parametrach; zmiennych dlatego, że w każdej chwili czasu wyznaczamy nowy zbiór parametrów filtra. W tym sensie rozważane struktury reprezentują filtry o odpowiedzi impulsowej zmiennej w czasie. Szerzej powiemy o tym przy omawianiu filtracji innowacyjnej w podrozdziale 3.2.3.

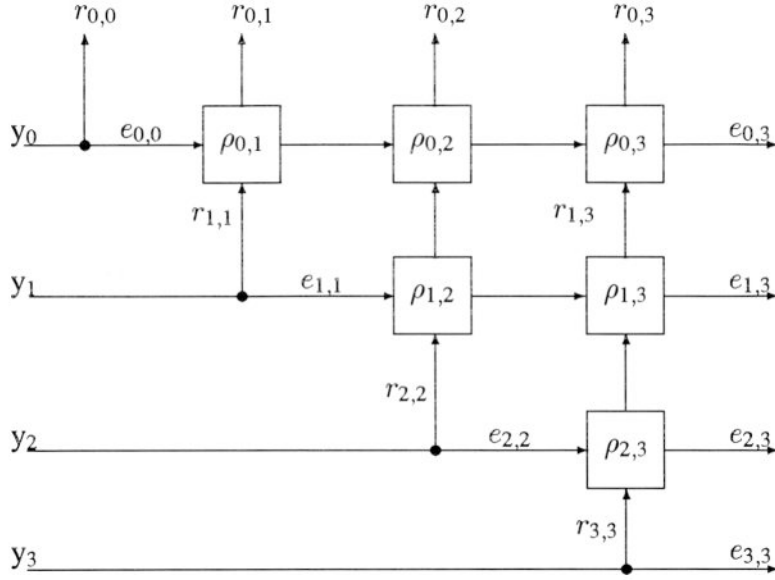
Na początku tego podrozdziału założyliśmy, że dysponujemy rozwiązaniem rzędu $(l - k - 1)$. Oznacza to, że znamy wszystkie współczynniki $\rho_{i,j}$ dla $i = k + 1, \dots, l$ i $j = i + 1, \dots, l$.

Rys. 3.9: Filtr parametryzujący (innowacyjny) rzędu $(l - k)$ dla niestacjonarnych sygnałów jednowymiarowych.

Pokażemy teraz, że wyznaczenie błędu $e_{k,l}$ wymaga – jak to wynika z rys.3.9 – złożenia $(l - k)(l - k + 1)/2$ pojedynczych rotacji określonych przez (3.37).

Twierdzenie 3.2 Niech będzie dane rozwiązanie rzędu $l - (k + 1)$, tj. niech będą dane błędy prognozy w przód i w tył w chwilach $l, l - 1, \dots, k + 1$

$$E^{(k+1,l)} \triangleq \text{col}[e_{k+1,l}, e_{k+2,l}, \dots, e_{l,l}] \quad (3.120)$$



Rys. 3.10: Przykładowy filtr parametryzujący (innowacyjny) trzeciego rzędu dla nie-stacjonarnych sygnałów jednowymiarowych.

i

$$R^{(k+1,l)} \triangleq \text{col}[r_{k+1,k+1}, r_{k+1,k+2}, \dots, r_{k+1,l}] \quad (3.121)$$

oraz wartość $e_{k,k} \triangleq y_k = r_{k,k}$.

Wówczas rozwiązanie rzędu $(l - k)$ określone przez

$$E^{(k,l)} = \text{col}[e_{k,l}, E^{(k+1,l)}] \quad (3.122)$$

i

$$R^{(k,l)} = \text{col}[r_{k,k}, R^{(k+1,l)}] \quad (3.123)$$

wyraża się poprzez rozwiązanie rzędu $(l - k - 1)$ następującą zależnością

$$\begin{bmatrix} E^{(k,l)} \\ R^{(k,l)} \end{bmatrix} = \bar{\Theta}^{(k,l)} \begin{bmatrix} e_{k,k} \\ E^{(k+1,l)} \\ r_{k,k} \\ R^{(k+1,l)} \end{bmatrix} \quad (3.124)$$

gdzie

$$\bar{\Theta}^{(k,l)} = \prod_{i=k+1}^l {}_p\theta^{(k,i)} \quad (3.125)$$

jest J -ortogonalną macierzą wymiaru $2(l - k + 1) \times 2(l - k + 1)$, ${}_p\theta^{(k,i)}$ dla $i = k + 1, \dots, l$ jest macierzą powstałą przez zanurzenie macierzy $\theta^{(k,i)}$ w macierzy jednostkowej wymiaru $p = 2(l - k + 1)$ opisującej (k, i) -ty rotor w wierszu k określoną przez (3.38). Innymi słowy, macierz $\bar{\Theta}^{(k,l)}$ jest iloczynem $(l - k)$ elementarnych macierzy J -ortogonalnych odpowiednio zanurzonych w macierzy jednostkowej I_{l-k} w sensie definicji zanurzenia (A.8). Dzięki temu możemy rozwiązanie rzędu $(l - k)$ wyrazić w funkcji rozwiązania rzędu $(l - k - 1)$ następująco:

$$\Theta^{(k,l)} = \bar{\Theta}^{k,l} \Theta^{(k+1,l)} \quad (3.126)$$

przy czym macierz $\Theta^{(k+1,l)}$ określa rozwiązanie niższego rzędu (tj. rzędu $(l - k - 1)$).

Dowód: Przepiszmy (3.124) w rozwiniętej postaci

$$\begin{bmatrix} e_{k,l} \\ e_{k+1,l} \\ e_{k+2,l} \\ e_{k+3,l} \\ \vdots \\ e_{l,l} \\ r_{k,k} \\ r_{k,k+1} \\ r_{k,k+2} \\ r_{k,k+3} \\ \vdots \\ r_{k,l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \bar{\Theta}_{11}^{(k,l)} & \bar{\Theta}_{12}^{(k,l)} & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ \bar{\Theta}_{21}^{(k,l)} & & \bar{\Theta}_{22}^{(k,l)} & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{k,k} \\ e_{k+1,l} \\ e_{k+2,l} \\ e_{k+3,l} \\ \vdots \\ e_{l,l} \\ r_{k,k} \\ r_{k+1,k+1} \\ r_{k+1,k+2} \\ r_{k+1,k+3} \\ \vdots \\ r_{k+1,l} \end{bmatrix} \quad (3.127)$$

Chcemy pokazać, że macierz $\bar{\Theta}^{(k,l)}$ można zdekomponować na iloczyn $(l - k)$ macierzy pojedynczych rotacji określonych przez (3.38). W tym celu zauważmy, że do wyznaczenia błędów $e_{k,l}$ oraz $r_{k,l}$ potrzebna jest – zgodnie z równaniem (3.37) – znajomość $e_{k,l-1}$ oraz $r_{k+1,l}$. Wyznaczenie $e_{k,l-1}$ wymaga znajomości $e_{k,l-2}$ itd. Pierwszą wartością jaką możemy wyznaczyć bezpośrednio jest $e_{k,k+1}$, ponieważ znamy zarówno $e_{k,k}$ jak i $r_{k+1,k+1}$. Pozostałe wielkości znajdujące się w prawej macierzy w (3.127) przepiszemy bez zmian. Otrzymamy wówczas

$$\begin{bmatrix} e_{k,k+1} \\ e_{k+1,l} \\ e_{k+2,l} \\ e_{k+3,l} \\ \vdots \\ e_{l,l} \\ r_{k,k} \\ r_{k,k+1} \\ r_{k+1,k+2} \\ r_{k+1,k+3} \\ \vdots \\ r_{k+1,l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_{11}^{(k,k+1)} & & & & \theta_{12}^{(k,k+1)} & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & \theta_{21}^{(k,k+1)} & & & & \theta_{22}^{(k,k+1)} & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{k,k} \\ e_{k+1,l} \\ e_{k+2,l} \\ e_{k+3,l} \\ \vdots \\ e_{l,l} \\ r_{k,k} \\ r_{k+1,k+1} \\ r_{k+1,k+2} \\ r_{k+1,k+3} \\ \vdots \\ r_{k+1,l} \end{bmatrix} \quad (3.128)$$

gdzie wielkości $\theta_{ij}^{(k,k+1)}$ dla $i, j \in \{1, 2\}$ określają pojedynczy rotor hiperboliczny występujący w strukturze filtru na pozycji $(k, k + 1)$. Puste miejsca w powyższej macierzy oznaczają zera.

Mając wyznaczone wartości $e_{k,k+1}$ oraz $r_{k,k+1}$ możemy, korzystając z wyniku otrzymanego w

(3.128), w podobny sposób wyznaczyć $e_{k,k+2}$ oraz $r_{k,k+2}$. Otrzymamy

$$\begin{bmatrix} e_{k,k+2} \\ e_{k+1,l} \\ e_{k+2,l} \\ e_{k+3,l} \\ \vdots \\ e_{l,l} \\ r_{k,k} \\ r_{k,k+1} \\ r_{k,k+2} \\ r_{k+1,k+3} \\ \vdots \\ r_{k+1,l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_{11}^{(k,k+2)} & & & & & & & \theta_{12}^{(k,k+2)} \\ & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & 1 & \\ \theta_{21}^{(k,k+2)} & & & & & & & \theta_{22}^{(k,k+2)} \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{k,k+1} \\ e_{k+1,l} \\ e_{k+2,l} \\ e_{k+3,l} \\ \vdots \\ e_{l,l} \\ r_{k,k} \\ r_{k,k+1} \\ r_{k+1,k+2} \\ r_{k+1,k+3} \\ \vdots \\ r_{k+1,l} \end{bmatrix} \quad (3.129)$$

Po $(l - k)$ krokach otrzymamy

$$\begin{bmatrix} e_{k,l} \\ e_{k+1,l} \\ e_{k+2,l} \\ e_{k+3,l} \\ \vdots \\ e_{l,l} \\ r_{k,k} \\ r_{k,k+1} \\ r_{k,k+2} \\ r_{k,k+3} \\ \vdots \\ r_{k,l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_{11}^{(k,l)} & & & & & & & \theta_{12}^{(k,l)} \\ & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & 1 & \\ \theta_{21}^{(k,l)} & & & & & & & \theta_{22}^{(k,l)} \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{k,l-1} \\ e_{k+1,l} \\ e_{k+2,l} \\ e_{k+3,l} \\ \vdots \\ e_{l,l} \\ r_{k,k} \\ r_{k,k+1} \\ r_{k,k+2} \\ r_{k,k+3} \\ \vdots \\ r_{k+1,l} \end{bmatrix} \quad (3.130)$$

Macierze występujące w (3.128) (3.129) (3.130) są J -ortogonalne zgodnie z własnością A.8. W związku z tym – na mocy (A.14) – ich iloczyn jest również macierzą J -ortogonalną.

Podobnie, rozwiązanie rzędu $(l - k - 1)$ (o którym założyliśmy na początku, że jest znane) można wyznaczyć w funkcji rozwiązania rzędu $(l - k - 2)$ itd. Łącznie otrzymamy w wyniku iloczyn $(l - k - 1)(l - k)/2$ macierzy reprezentujących pojedyncze rotacje; iloczyn ten jest oczywiście macierzą J -ortogonalną. $\square$

Jak widać, dołączając do tego schematu ortogonalizacji kolejną zmienną losową (w tym wypadku y_{k-1}), wystarczy domnożyć odpowiednią liczbę czynników, reprezentujących pojedyncze rotacje, do już istniejącej macierzy opisującej filtr, aby dostać rozwiązanie wyższego rzędu.

3.2.2 Filtry innowacyjne o parametrach stałych w czasie

W tym punkcie pokażemy możliwość uproszczenia struktury z rys.3.9, jeśli sygnał przetwarzany jest unormowanym i scentrowanym procesem stacjonarnym w szerszym sensie (A.11), dla którego zgodnie z (A.11)

$$c_{i,j} = c_{j-i} = c_m = (y_0, y_m). \quad (3.131)$$

Zauważmy, że współczynnik Schura zdefiniowany w (3.38) możemy interpretować jako kowariancję wzajemną (iloczyn skalarny w $\mathcal{U}$) odpowiednich błędów w przód i w tył

$$\rho_{i,j} = -(e_{i,j-1}, r_{i+1,j}) = -E\{e_{i,j-1}r_{i+1,j}\}. \quad (3.132)$$

Niech $j - i = 1$. Wówczas z (3.132) mamy

$$\rho_{i,j} = -(e_{i,i}, r_{i+1,i+1}), \quad \text{dla } j - i = 1, \quad (3.133)$$

a uwzględniając (3.116)

$$\rho_{i,j} = -(y_i, y_{i+1}), \quad \text{dla } j - i = 1, \quad (3.134)$$

gdzie $y_i = y_i \parallel y_i \parallel^{-1}$ jest unormowaną wersją y_i . Założyliśmy jednak, że proces y jest stacjonarny, co w szczególności oznacza, że

$$\forall_{i=k..l-1} (y_i, y_{i+1}) = (y_k, y_{k+1}) = c_{k+1-k} = c_1. \quad (3.135)$$

Stąd, (3.134) możemy przepisać jako

$$\rho_{i,j} = -(y_i, y_{i+1}) \stackrel{stacj.}{=} -(y_k, y_{k+1}) = \rho_{j-i} = \rho_1 \quad \text{dla } j - i = 1, \quad (3.136)$$

co oznacza, że wszystkie współczynniki Schura ρ_{ij} , takie że $j - i = 1$ (tj. leżące na pierwszej diagonalu) są sobie równe i wynoszą $\rho_1 = -c_1/c_0$, a ponieważ założyliśmy, że proces jest unormowany, tj. że $(y_k, y_k) = c_0 = 1$, a stąd $\rho_1 = -c_1$.

Rozumując podobnie dla pozostałych diagonal dojdziemy do wniosku, że współczynniki Schura dla sygnału drugiego rzędu tworzą górnótrójkątną macierz Toeplitza, co sugeruje możliwość uproszczenia struktury z rys.3.9. Istotnie, ze stacjonarności procesu y wynika, że

$$\rho_{i,j} = -(e_{i,j-1}, r_{i+1,j}) \stackrel{stacj.}{=} -(e_{k,j-1}, r_{k+1,j}) = \rho_{k,j} = \rho_j. \quad (3.137)$$

Równość powyższych dwóch iloczynów skalarnych implikuje stacjonarność procesu $r_{k,j-1}$ tj.

$$\|r_{k,j-1}\|^2 = \|r_{i,j-1}\|^2, \quad \text{dla } i = k+1, \dots, l. \quad (3.138)$$

Własność ta jest prawdziwa dla każdego $j = k+1, \dots, l$. Wynika stąd, że strukturę z rys.3.10 można uprościć do postaci kaskadowej pokazanej na rys.3.11. Bloki 'z' oznaczają – przez analogię z własnością transformaty $\mathcal{Z}$ ciągu opóźnionego o 1 - bloki opóźnień. Innymi słowy, zmienna losowa $r_{k+1,j}$ jest 'buforowaną' wersją zmiennej losowej $r_{k,j-1}$, którą możemy wyznaczyć wprost z zależności (3.36) (3.37) oraz (3.38).

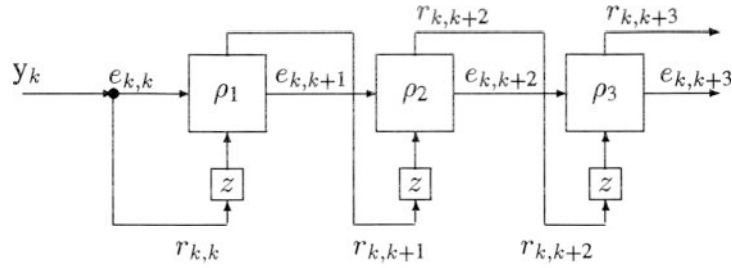
Jeśli pojedynczą sekcję filtru pokazaną na rys.3.5a 'wyposaży' w blok opóźniający, to wielkości wyjściowe jednej sekcji stają się wielkościami wejściowymi sekcji następnej. Wówczas j -tą sekcję możemy opisać macierzą

$$\theta^{(k,j)}(z) \triangleq \theta^{(k,j)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} \quad (3.139)$$

przy czym $\theta^{(k,j)}(z)$ jest nadal macierzą J -ortogonalną. Jeśli (3.139) opisuje pojedynczą sekcję, to kaskadę o długości $l - k$ opisuje macierz $\bar{\Theta}^{(k,l)}(z)$ spełniająca zależność

$$\begin{bmatrix} e_{k,l} \\ r_{k,l} \end{bmatrix} = \theta^{(k,l)}(z) \theta^{(k,l-1)}(z) \dots \theta^{(k,k+1)}(z) \begin{bmatrix} e_{k,k} \\ r_{k,k} \end{bmatrix} = \bar{\Theta}^{(k,l)}(z) \begin{bmatrix} y_k \\ y_k \end{bmatrix}. \quad (3.140)$$

Macierz $\bar{\Theta}^{(k,l)}(z)$ stanowi globalną J -ortogonalną realizację filtru innowacyjnego rzędu $l - k$.

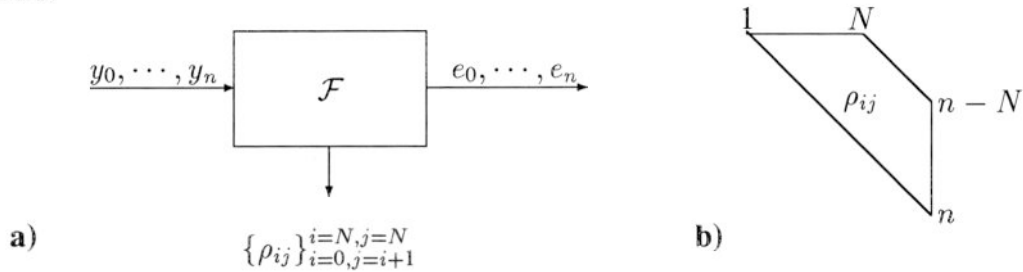


Rys. 3.11: Przykładowy filtr innowacyjny trzeciego rzędu dla stacjonarnego sygnału jednowymiarowego.

3.2.3 Filtracja innowacyjna – wybielanie

W poprzednich dwóch punktach omówiliśmy struktury ortogonalnych filtrów innowacyjnych (parametryzujących). W niniejszej pracy używamy zamiennie określeń *parametryzujący* i *innowacyjny*, ponieważ z jednej strony opisywane filtry parametryzują proces tworząc zbiór współczynników Schura, a z drugiej strony tworzą nowy proces (ciąg błędów prognozy w przód) zwany procesem innowacyjnym (rys.3.12). Wraz ze wzrostem rzędu filtru charakterystyka widma amplitudowego procesu innowacyjnego rozszerza się, dlatego filtry te często określa się mianem filtrów *wybielających*.

Przedstawiliśmy sposób, w jaki filtry te przetwarzają fragment procesu losowego o długości równej długości filtru. W punkcie 3.1.2 pokazaliśmy, że w takim przypadku ciąg błędów prognozy w przód jest ciągiem zmiennych losowych ortonormalnych, tj. takich, że $E\{e_i e_j\} = \delta_{i-j}$, przy czym $i, j = 0, 1, \dots, n$, gdzie n jest długością filtru. Innymi słowy, zmienne te tworzą proces białego szumu. W tym punkcie rozważymy przypadek, w którym długość obserwowanego (i skorelowanego) fragmentu procesu stochastycznego jest większa od długości filtru.

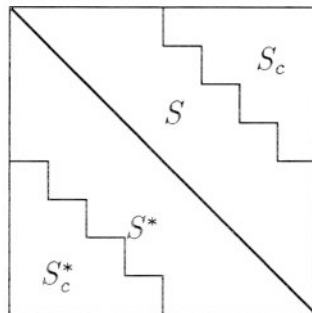


Rys. 3.12: Filtracja innowacyjna: a) filtr innowacyjny rzędu N , b) zbiór współczynników Schura (fragment macierzy współczynników Schura) otrzymanych w procesie parametryzacji procesu stochastycznego o długości $(n+1)$ filtrem rzędu $N < n$.

Filtr innowacyjny wyznacza jednoznaczną reprezentację procesu parametryzowanego w postaci zbioru współczynników Schura i procesu innowacyjnego. Co więcej, reprezentacja ta jest wzajemnie jednoznaczna, tzn. znajomość procesu innowacyjnego i zbioru współczynników Schura wystarcza (i jest konieczna) – co pokażemy w następnych punktach – do zamodelowania procesu parametryzowanego. Znajomość procesu innowacyjnego nie jest konieczna, jeśli proces parametryzowany chcemy zamodelować z dokładnością do statystyk drugiego rzędu.

Problem, który chcemy tu rozważyć na gruncie teorii sygnałów, Dewilde [9] ujął ogólniej, formułując tzw. 'staircase extension problem'.

Niech P będzie dodatnio określoną macierzą wymiaru $(n+1) \times (n+1)$, a S niech będzie tzw. zbiorem schodkowym indeksów tak jak to pokazano na rys.3.13.



Rys. 3.13: Schodkowy zbiór indeksów $S \cup S^*$ i jego dopełnienie $S_c \cup S_c^*$.

Problem:

Znaleźć dodatnio określoną macierz P_a taką, że $P_a = P$ na zbiorze $S \cup S^*$ a P_a^{-1} ma wartości zerowe na zbiorze $S_c \cup S_c^*$.

Jest to problem interpolacyjny, w którym poszukuje się macierzy dodatniookreślonej, a ponadto posiadającej te same wartości na określonym zbiorze indeksów.

Fakt, że macierz P_a jest dodatnio określona ma dla nas znaczenie o tyle, że jeśli P jest macierzą kowariancji (bo każda macierz kowariancji jest macierzą dodatnio określoną), to P_a jest również macierzą kowariancji. Co więcej, obydwie macierze mają te same wartości na zbiorze schodkowym, a (w ogólności) różne poza tym zbiorem.

Powyższy problem interpolacyjny możemy przełożyć na język teorii sygnałów następująco:

Mając dany proces losowy $\mathbf{y}$, którego macierz kowariancji wynosi C_y , znajdź proces $\mathbf{u}$ taki, że $C_u = C_y$ na zbiorze $S \cup S^*$ a C_u^{-1} zeruje się na zbiorze $S_c \cup S_c^*$.

Jest to problem modelowania sygnałów stochastycznych, który dla dwóch przypadków wybielania zamieszczonych poniżej skomentujemy szerzej w par. 3.3.3.

Przypadek 1:

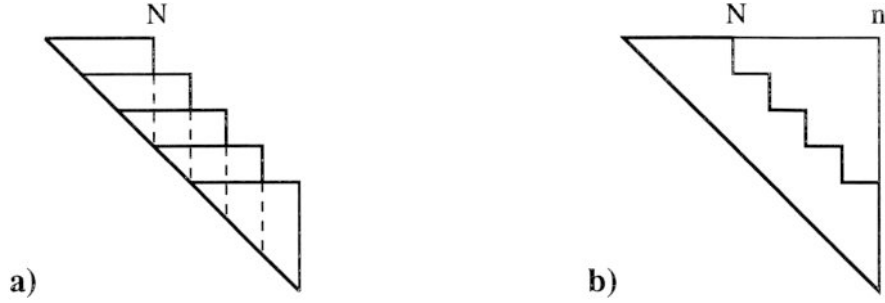
Założmy, że czas skorelowania niestacjonarnego procesu $\mathbf{Y}$ o czasie obserwacji $(n+1)$ wynosi M , co oznacza zerowanie się wszystkich diagonal macierzy kowariancji o indeksach $M+1, M+2, \dots, n$. Macierz współczynników Schura dla takiego procesu jest (w ogólnym przypadku) macierzą pełną tj. wszystkie diagonale są niezerowe. Można pokazać (co czynimy poniżej), że filtr innowacyjny rzędu N generuje N pierwszych diagonal macierzy współczynników Schura. W ogólnym przypadku filtr rzędu $N < n$ generuje proces, który nie jest biały. Natomiast w przypadku $N \geq n$ otrzymany proces innowacyjny jest zawsze procesem szumu białego.

Przypadek 2:

Założmy, że niestacjonarny proces $\mathbf{Y}$ o czasie trwania $(n+1)$ jest skorelowany w taki sposób, że w procesie parametryzacji otrzymujemy macierz współczynników Schura, której wszystkie diagonale o indeksach $M+1, M+2, \dots, n$ są zerowe. Wówczas każdy filtr innowacyjny rzędu N , gdzie $M < N \leq n$ całkowicie dekoreluje parametryzowany proces tj. proces innowacyjny jest biały.

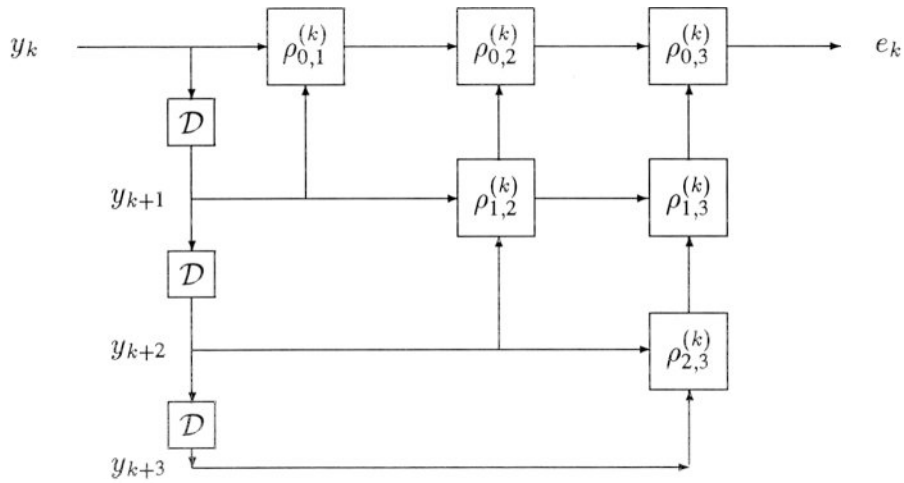
W obu przypadkach filtracja (parametryzacja) procesu o długości $(n+1)$ przy użyciu filtru rzędu $N < n$ (rys.3.14a) jest tożsama z parametryzacją przy użyciu filtru o długości n na zbiorze schodkowym o szerokości schodka równej N (rys.3.14b).

Dla ustalenia uwagi rozważmy filtr 3-go rzędu z rys.3.10 i załómy, że długość parametryzowanego sygnału $n > 3$, np. tak jak na rys.3.12a) dla $N = 3$. Wówczas filtr z rys.3.10 możemy uzupełnić o bloki opóźniające tak jak to pokazano na rys.3.15, gdzie $\mathcal{D}$ jest operatorem opóźnienia rozumianym w tym sensie, że jeśli y_k oznacza zmienną losową w chwili $(t-k)$, to



Rys. 3.14: Wyznaczanie współczynników Schura: a) przy użyciu filtru rzędu $N < n$, b) przy użyciu filtru innowacyjnego rzędu n na zbiorze schodkowym o szerokości N .

$\mathcal{D}\{y_k\} = y_{k+1}$ oznacza zmienną losową w chwili $(t - (k + 1))$.



Rys. 3.15: Filtr 3-go rzędu przetwarzający sygnał y w chwili k .

W każdej chwili czasu należy wyznaczyć nowy zbiór współczynników Schura (stąd górny indeks w opisie współczynników Schura), przy czym zauważmy, że chociaż z rysunku wynika, iż dla filtra rzędu 3 w każdej chwili należy wyznaczyć 6 parametrów, to w istocie należy wyznaczyć tylko 3 parametry (rzęd filtra wynosi 3), ponieważ

$$\rho_{0,j}^{(k)} = \rho_{l,j+l}^{(k-l)} \quad \text{dla} \quad l = 1, \dots, N - j$$

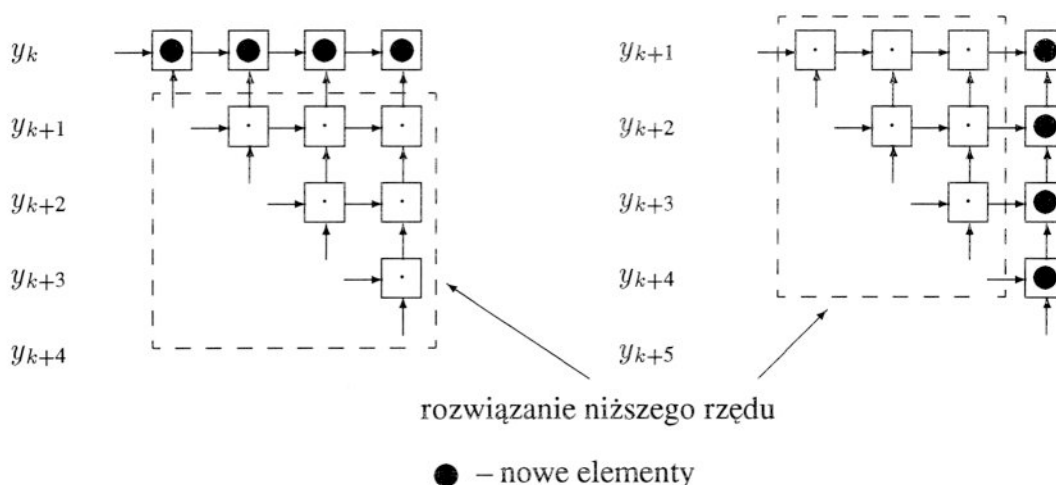
Innymi słowy, w każdej chwili czasu, należy wyznaczyć tylko współczynniki Schura w pierwszym wierszu filtra (współczynniki, których pierwszy dolny indeks wynosi 0); pozostałe współczynniki są już znane, ponieważ zostały wyznaczone w poprzednich chwilach czasu. Wszystkie (w ogólności różne) współczynniki wyznaczone w procesie parametryzacji utworzą (w tym wypadku) trzy kolejne diagonale macierzy współczynników Schura. Zauważmy, że jeśli sygnał jest stacjonarny, to wszystkie współczynniki należące do danej diagonal są sobie równe i – w konsekwencji – filtr 3-go rzędu wymaga wyznaczenia tylko trzech współczynników, co pokazaliśmy w poprzednim paragrafie.

Rozważmy jeszcze pewną kwestię związaną z podwyższaniem rzędu filtra. Filtr rzędu $N = 3$ ortogonalizuje 4 kolejne zmienne $y_{k+1}, y_{k+2}, y_{k+3}, y_{k+4}$ (duży kwadrat zaznaczony przerywaną linią na rys.3.16a).

Z punktu widzenia filtracji możemy wyróżnić 3 przypadki:

- podwyższenie rzędu filtru poprzez dodanie jednego wiersza rotorów, przy naborze nowej zmiennej losowej y_k ; jest to przypadek 'time-update' i 'order-update' (rys.3.16a),
- podwyższenie rzędu filtru poprzez dodanie jednej kolumny rotorów i przez to podwyższenie wymiaru przestrzeni estymacji zmiennej y_{k+1} o nowy element bazy — zmienną losową y_{k+5} ; z punktu widzenia estymacji zmiennej losowej y_{k+1} jest to przypadek 'order-update' (rys.3.16b),
- filtracja przy stałym rzędzie filtru; jest to przypadek 'time-update', ponieważ rząd filtru nie ulega zmianie. W wyniku filtracji otrzymujemy zbiór współczynników Schura określonych na zbiorze schodkowym o szerokości schodka N .

Na rys.3.16 pokazano obydwa sposoby podwyższania rzędu filtru dla $N = 3$.



Rys. 3.16: Dwa sposoby podwyższania rzędu filtru: a) dodanie wiersza rotorów, b) dodanie kolumny rotorów.

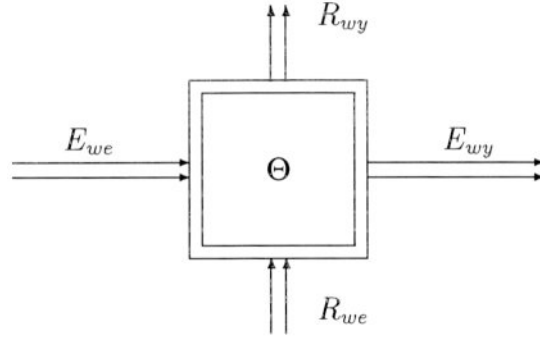
3.3 Modelowanie stochastyczne sygnałów 2-go rzędu

W niniejszym podrozdziale przedstawimy ideę modelowania statystyk drugiego rzędu sygnału i zajmiemy się realizacją filtru modelującego, który jest odwrotny do filtru innowacyjnego w tym sensie, że jeśli na wejście filtru modelującego podamy sygnał szumu białego, to na jego wyjściu otrzymamy sygnał, którego statystyki drugiego rzędu są identyczne ze statystykami drugiego rzędu sygnału parametryzowanego.

3.3.1 Filtry modelujące o parametrach zmiennych w czasie

Zajmiemy się teraz problemem odwracalności filtru innowacyjnego o parametrach zmiennych w czasie. Pokażemy, że dysponując zbiorem współczynników Schura (otrzymanym w procesie parametryzacji) oraz ciągiem błędów prognozy (w przód) można odzyskać ciąg zmiennych losowych poddanych parametryzacji. W tym celu rozważmy strukturę z rys.3.9 globalnie, tak jak to pokazano na rys.3.17. przy czym

$$E_{we} = \text{col}[e_{k,k}, e_{k+1,k+1}, \dots, e_{l,l}] \quad (3.141)$$



Rys. 3.17: Filtr innowacyjny dla niestacjonarnego sygnału jednowymiarowego w postaci globalnej.

$$R_{we} = \text{col}[r_{k,k}, r_{k+1,k+1}, \dots, r_{l,l}] \quad (3.142)$$

oraz

$$E_{wy} = \text{col}[e_{k,l}, e_{k+1,l}, \dots, e_{l,l}] \quad (3.143)$$

$$R_{wy} = \text{col}[r_{k,k}, r_{k,k+1}, \dots, r_{k,l}] \quad (3.144)$$

a Θ jest macierzą kwadratową wymiaru $(2 \cdot (l - k + 1)) \times 2 \cdot (l - k + 1)$ określającą relacje we-wy i jest wyznaczana w procesie parametryzacji.

Przy tak przyjętych oznaczeniach wielkości wyjściowe możemy wyrazić w funkcji wielkości wejściowych w postaci

$$\begin{bmatrix} E_{wy} \\ R_{wy} \end{bmatrix} = \Theta \begin{bmatrix} E_{we} \\ R_{we} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{we} \\ R_{we} \end{bmatrix} \quad (3.145)$$

przy czym, zgodnie z (3.141) oraz (3.142) $R_{we} = E_{we}$. W procesie odwrotnym interesuje nas wyznaczenie wielkości E_{we} mając dane E_{wy} tj. poszukujemy takiej macierzy Σ , która spełnia równanie

$$\begin{bmatrix} E_{we} \\ R_{we} \end{bmatrix} = \Sigma \begin{bmatrix} E_{wy} \\ R_{we} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{wy} \\ R_{we} \end{bmatrix}. \quad (3.146)$$

Elementy macierzy Σ wyznaczymy w funkcji elementów macierzy Θ . Z (3.145) mamy

$$E_{wy} = \Theta_{11} E_{we} + \Theta_{12} R_{we} \quad (3.147)$$

skąd

$$E_{we} = (\Theta_{11})^{-1} E_{wy} - (\Theta_{11})^{-1} \Theta_{12} R_{we} \quad (3.148)$$

Z drugiej strony z (3.146) E_{we} wyraża się jako

$$E_{we} = \Sigma_{11} E_{wy} + \Sigma_{12} R_{we}. \quad (3.149)$$

Przyrównując (3.148) do (3.149) otrzymamy

$$\Sigma_{11} = (\Theta_{11})^{-1} \quad \text{oraz} \quad \Sigma_{12} = -(\Theta_{11})^{-1} \Theta_{12}. \quad (3.150)$$

Rozważmy teraz drugi wiersz równania (3.145). Mamy

$$R_{wy} = \Theta_{21} E_{we} + \Theta_{22} R_{we}, \quad (3.151)$$

natomiast w (3.146) R_{wy} wyraża się jako

$$R_{wy} = \Sigma_{21} E_{wy} + \Sigma_{22} R_{we}. \quad (3.152)$$

Wstawiając prawą stronę (3.148) do (3.151) otrzymamy

$$\begin{aligned} R_{wy} &= \Theta_{21} \left((\Theta_{11})^{-1} E_{wy} - (\Theta_{11})^{-1} \Theta_{12} R_{we} \right) + \Theta_{22} R_{we} = \\ &= \Theta_{21} (\Theta_{11})^{-1} E_{wy} - \Theta_{21} (\Theta_{11})^{-1} \Theta_{12} R_{we} + \Theta_{22} R_{we} = \\ &= \Theta_{21} (\Theta_{11})^{-1} E_{wy} + \left(\Theta_{22} - \Theta_{21} (\Theta_{11})^{-1} \Theta_{12} \right) R_{we}. \end{aligned} \quad (3.153)$$

a stąd przez przyrównanie (3.153) do (3.152) otrzymamy

$$\Sigma_{21} = \Theta_{21} (\Theta_{11})^{-1} \quad \text{oraz} \quad \Sigma_{22} = \Theta_{22} - \Theta_{21} (\Theta_{11})^{-1} \Theta_{12} \quad (3.154)$$

Ostatecznie, macierz Σ filtru odwrotnego (modelującego) wyraża się poprzez elementy macierzy Θ w następujący sposób

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\Theta_{11})^{-1} & -(\Theta_{11})^{-1} \Theta_{12} \\ \Theta_{21} (\Theta_{11})^{-1} & \Theta_{22} - \Theta_{21} (\Theta_{11})^{-1} \Theta_{12} \end{bmatrix} \quad (3.155)$$

Jak widać, warunkiem istnienia filtru odwrotnego jest odwracalność macierzy Θ_{11} , która jest odwracalna jako macierz górnotrójkątna z niezerowymi elementami na głównej diagonalu. Stabilność filtru odwrotnego jest gwarantowana zawsze, jeśli współczynniki Schura (współczynniki odbicia) są co do modułu mniejsze od jedności [24]. Zależność (3.155) jest prawdziwa dla struktury dowolnego rzędu. Załóżmy, że rząd filtru wynosi 1. Wówczas, uwzględniając postać macierzy θ pojedynczego rotora hiperbolicznego określoną przez (3.37), możemy (3.155) przepisać w postaci

$$\begin{aligned} \Sigma^{(1)} &= \begin{bmatrix} \Sigma_{11}^{(1)} & \Sigma_{12}^{(1)} \\ \Sigma_{21}^{(1)} & \Sigma_{22}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} = \sigma \begin{bmatrix} (\Theta_{11}^{(1)})^{-1} & -(\Theta_{11}^{(1)})^{-1} \Theta_{12}^{(1)} \\ \Theta_{21}^{(1)} (\Theta_{11}^{(1)})^{-1} & \Theta_{22}^{(1)} - \Theta_{21}^{(1)} (\Theta_{11}^{(1)})^{-1} \Theta_{12}^{(1)} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} (\theta_{11})^{-1} & -(\theta_{11})^{-1} \theta_{12} \\ \theta_{21} (\theta_{11})^{-1} & \theta_{22} - \theta_{21} (\theta_{11})^{-1} \theta_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 - \rho^2)^{\frac{1}{2}} & -\rho \\ \rho & (1 - \rho^2)^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.156)$$

gdzie ρ jest współczynnikiem Schura określonym przez (3.40). Jeśli podstawimy $\rho = \sin \alpha$, to $\Sigma^{(1)}$ realizuje rotację kołową o kąt α . Dlatego sekcję określoną przez Σ tak jak w (3.156) będziemy nazywać *rotorem kołowym* [9] opisanym równaniem

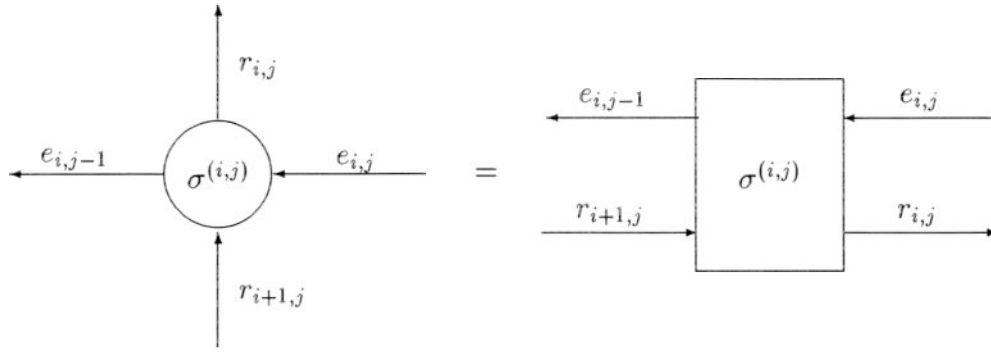
$$\Sigma^{(1)} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}. \quad (3.157)$$

Macierz Σ jest macierzą ortogonalną co implikuje bezstratność pojedynczej sekcji filtru. Zaważmy, że element $\Sigma^{(1)}$ jest określony wyłącznie przez współczynnik Schura ρ . Na rys.3.18a pokazano przykładowy rotor kołowy, a na rys.3.18b równoważną mu sekcję filtru odwrotnego. Patrząc na strukturę z rys.3.10 jest oczywiste, w świetle powyższych rozważań, że strukturę odwrotną tego samego rzędu realizuje się przez odwrócenie biegu wszystkich błędów w przód, tj. przez zamianę wszystkich rotorów hiperbolicznych na rotory kołowe, co pokazano na rys.3.19.

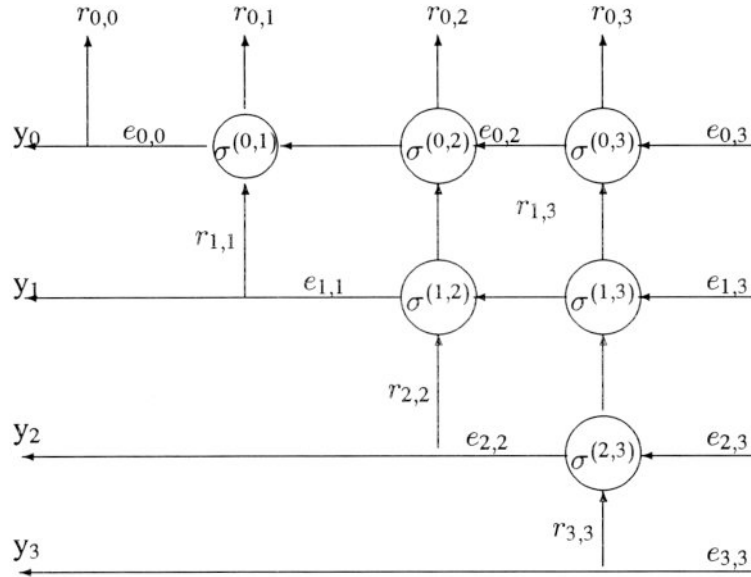
Własność 1 Jeśli Θ jest macierzą J -ortogonalną, to Σ jest macierzą ortogonalną, tj.

$$\text{jeśli } \Theta J \Theta^* = J, \quad \text{to } \Sigma \Sigma^* = I. \quad (3.158)$$

gdzie $*$ oznacza transpozycję hermitowską macierzy, tj. $A^* = \bar{A}^T$.



Rys. 3.18: a) Rotor kołowy, b) równoważna mu sekcja filtru odwrotnego.



Rys. 3.19: Przykładowy filtr modelujący trzeciego rzędu o współczynnikach zmiennych w czasie.

Dowód:

Dowód przeprowadza się przez sprawdzenie. Z założenia macierz Θ jest J -ortogonalna, tj.

$$\begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta_{11}^* & \Theta_{21}^* \\ \Theta_{12}^* & \Theta_{22}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (3.159)$$

tj.

$$\begin{bmatrix} \Theta_{11}\Theta_{11}^* - \Theta_{12}\Theta_{12}^* & \Theta_{11}\Theta_{21}^* - \Theta_{12}\Theta_{22}^* \\ \Theta_{21}\Theta_{11}^* - \Theta_{22}\Theta_{12}^* & \Theta_{21}\Theta_{21}^* - \Theta_{22}\Theta_{22}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (3.160)$$

Otrzymujemy następujący układ równań:

$$\Theta_{11}\Theta_{11}^* - \Theta_{12}\Theta_{12}^* = \mathbf{I} \quad (3.161)$$

$$\Theta_{11}\Theta_{21}^* - \Theta_{12}\Theta_{22}^* = \mathbf{0} \quad (3.162)$$

$$\Theta_{21}\Theta_{11}^* - \Theta_{22}\Theta_{12}^* = \mathbf{0} \quad (3.163)$$

$$\Theta_{22}\Theta_{21}^* - \Theta_{21}\Theta_{22}^* = \mathbf{I} \quad (3.164)$$

Macierz Σ jest ortogonalna jeśli

$$\Sigma \Sigma^* = \mathbf{I} \quad (3.165)$$

Po podstawieniu (3.155) do (3.165) otrzymamy

$$\begin{bmatrix} \Theta_{11}^{-1} & -\Theta_{11}^{-1}\Theta_{12} \\ \Theta_{21}\Theta_{11}^{-1} & \Theta_{22} - \Theta_{21}\Theta_{11}^{-1}\Theta_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\Theta_{11}^{-1})^* & (\Theta_{21}\Theta_{11}^{-1})^* \\ -(\Theta_{11}^{-1}\Theta_{12})^* & (\Theta_{22} - \Theta_{21}\Theta_{11}^{-1}\Theta_{12})^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (3.166)$$

Jeśli równanie (3.166) zachodzi, to Σ jest ortogonalna.

Wymnażając obie macierze stojące po lewej stronie równania (3.166) i oznaczając wynikową macierz przez

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}$$

otrzymamy

$$\mathbf{A}_{11} = \Theta_{11}^{-1}(\Theta_{11}^{-1})^* + \Theta_{11}^{-1}\Theta_{12}\Theta_{12}^*(\Theta_{11}^{-1})^* \quad (3.167)$$

$$\mathbf{A}_{12} = \Theta_{11}^{-1}(\Theta_{11}^{-1})^*\Theta_{21}^* - \Theta_{11}^{-1}\Theta_{12}\Theta_{22}^* + \Theta_{11}^{-1}\Theta_{12}\Theta_{12}^*(\Theta_{11}^{-1})^*\Theta_{21}^* \quad (3.168)$$

$$\mathbf{A}_{21} = \Theta_{21}\Theta_{11}^{-1}(\Theta_{11}^{-1})^* - \Theta_{22}\Theta_{12}^*(\Theta_{11}^{-1})^* + \Theta_{21}\Theta_{11}^{-1}\Theta_{12}\Theta_{12}^*(\Theta_{11}^{-1})^* \quad (3.169)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{22} &= \Theta_{21}\Theta_{11}^{-1}(\Theta_{11}^{-1})^*\Theta_{21}^* + (\Theta_{22} - \Theta_{21}\Theta_{11}^{-1}\Theta_{12})\Theta_{22}^* + \\ &\quad - (\Theta_{22} - \Theta_{21}\Theta_{11}^{-1}\Theta_{12})\Theta_{12}^*(\Theta_{11}^{-1})^*\Theta_{21}^* = \\ &= \Theta_{21}\Theta_{11}^{-1}(\Theta_{11}^{-1})^*\Theta_{21}^* + \Theta_{22}\Theta_{22}^* - \Theta_{21}\Theta_{11}^{-1}\Theta_{12}\Theta_{22}^* + \\ &\quad - \Theta_{22}\Theta_{12}^*(\Theta_{11}^{-1})^*\Theta_{21}^* + \Theta_{21}\Theta_{11}^{-1}\Theta_{12}\Theta_{12}^*(\Theta_{11}^{-1})^*\Theta_{21}^* \end{aligned} \quad (3.170)$$

Rozważmy element $\mathbf{A}_{11}$. Zauważmy, że $\Theta_{11}^{-1}(\Theta_{11}^{-1})^* = \Theta_{11}^{-1}(\Theta_{11}^*)^{-1} = (\Theta_{11}\Theta_{11}^*)^{-1}$ i pomnóżmy (3.161) najpierw lewostronnie przez Θ_{11}^{-1} a następnie prawostronnie przez $(\Theta_{11}^{-1})^*$.

Otrzymamy:

$$\mathbf{I} - \Theta_{11}^{-1}\Theta_{12}\Theta_{12}^*(\Theta_{11}^{-1})^* = \Theta_{11}^{-1}(\Theta_{11}^{-1})^* \quad (3.171)$$

tj.

$$\mathbf{I} = \Theta_{11}^{-1}(\Theta_{11}^{-1})^* + \Theta_{11}^{-1}\Theta_{12}\Theta_{12}^*(\Theta_{11}^{-1})^* = \mathbf{A}_{11}. \quad (3.172)$$

Element $\mathbf{A}_{12}$ można przekształcić do postaci

$$\mathbf{A}_{12} = [\Theta_{11}^{-1}(\Theta_{11}^{-1})^* + \Theta_{11}^{-1}\Theta_{12}\Theta_{12}^*(\Theta_{11}^{-1})^*]\Theta_{21}^* - \Theta_{11}^{-1}\Theta_{12}\Theta_{22}^*. \quad (3.173)$$

Człon w nawiasie kwadratowym jest równy elementowi $\mathbf{A}_{11} = \mathbf{I}$. Stąd

$$\mathbf{A}_{12} = \Theta_{21}^* - \Theta_{11}^{-1}\Theta_{12}\Theta_{22}^* \quad (3.174)$$

Mnożąc (3.162) lewostronnie przez Θ_{11}^{-1} otrzymamy

$$\Theta_{21}^* = \Theta_{11}^{-1}\Theta_{12}\Theta_{22}^*. \quad (3.175)$$

A stąd, podstawiając prawą stronę powyższego równania do Θ_{21}^* w (3.174) dostaniemy

$$\mathbf{A}_{12} = \mathbf{0} \quad (3.176)$$

Element $\mathbf{A}_{21}$ przekształcamy do następującej postaci:

$$\mathbf{A}_{21} = \Theta_{21}[\Theta_{11}^{-1}(\Theta_{11}^{-1})^* + \Theta_{11}^{-1}\Theta_{12}\Theta_{12}^*(\Theta_{11}^{-1})^*] - \Theta_{22}\Theta_{12}^*(\Theta_{11}^{-1})^* \quad (3.177)$$

Wyraz w nawiasie kwadratowym jest równy $A_{11} = I$. Zastępując ten wyraz przez I otrzymamy

$$A_{21} = \Theta_{21} - \Theta_{22}\Theta_{22}^*(\Theta_{11}^{-1})^*. \quad (3.178)$$

Mnożąc równanie (3.163) prawostronnie przez $(\Theta_{11}^{-1})^*$ otrzymamy

$$\Theta_{21} = \Theta_{22}\Theta_{12}^*(\Theta_{11}^{-1})^*. \quad (3.179)$$

Podstawiając prawą stronę powyższego równania do Θ_{21} w (3.178) dostaniemy w wyniku

$$A_{21} = 0. \quad (3.180)$$

Element A_{22} . Rozważmy drugi i trzeci człon wyrazu A_{22} oraz równania (3.167-3.170). Mamy

$$\Theta_{22}\Theta_{22}^* - \Theta_{21}\Theta_{11}^{-1}\Theta_{12}\Theta_{22}^* = \Theta_{22}\Theta_{22}^* - \Theta_{21}\Theta_{11}^{-1}\Theta_{11}\Theta_{21}^* = \Theta_{22}\Theta_{22}^* - \Theta_{21}\Theta_{21}^* = I. \quad (3.181)$$

Następnie przekształcimy czwarty człon:

$$\Theta_{22}\Theta_{12}^*(\Theta_{11}^{-1})^*\Theta_{21}^* = \Theta_{21}\Theta_{11}^*(\Theta_{11}^{-1})^*\Theta_{21}^* = \Theta_{21}\Theta_{21}^* \quad (3.182)$$

Następnie pierwszy i piąty człon

$$\Theta_{21}[\Theta_{11}^{-1}(\Theta_{11}^{-1})^* + \Theta_{11}^{-1}\Theta_{12}\Theta_{12}^*(\Theta_{11}^{-1})^*]\Theta_{21}^* = \Theta_{21}[A_{11}]\Theta_{21}^* = \Theta_{21}\Theta_{21}^*. \quad (3.183)$$

Biorąc pod uwagę powyższe 3 równania otrzymamy zależność na A_{22} w postaci:

$$A_{22} = \Theta_{21}\Theta_{21}^* + I - \Theta_{21}\Theta_{21}^* = I \quad (3.184)$$

Ostatecznie

$$\Sigma\Sigma^* = A = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (3.185)$$

□

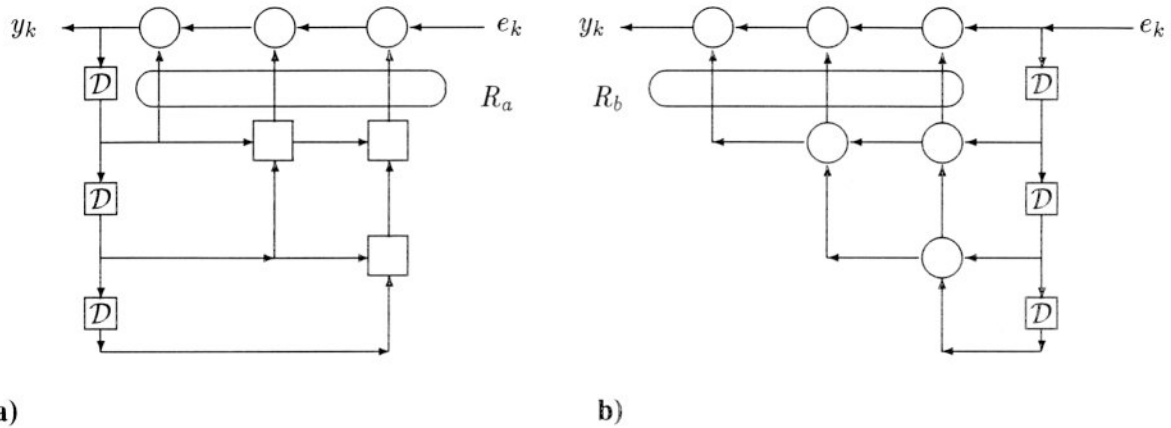
Można też skorzystać z faktu, że pojedynczy rotor kołowy realizuje przekształcenie ortogonalne i podobnie jak w dowodzie twierdzenia 3.2 zauważyć, że macierz Σ realizująca filtr modelujący jest iloczynem odpowiednich macierzy realizujących pojedyncze rotacje. Jako iloczyn macierzy ortogonalnych jest ona ortogonalna.

Filtr modelujący mieszany

Pokażemy teraz, że struktura filtru modelującego pokazana w poragrafie 3.3.1 (rys.3.19) odpowiednio uzupełniona o bloki opóźnień (rys.3.20b) jest równoważna strukturze filtru parametryzującego tego samego rzędu (w ogólności o parametrach zmiennych w czasie) z 'odwróconą' górną 'nitką' tak jak na rys.3.20a). W pracy [40] zamieszczono szczegółowy dowód poprawności struktury z rys.3.20a jako filtru modelującego. W paragrafie 3.3.1 podaliśmy dowód poprawności struktury z rys.3.20b) (bez bloków opóźnień). Dlatego tutaj podamy tylko szkic dowodu równoważności obu struktur, bazujący na założeniu o równości baz ortonormalnych w tył generowanych przez filtr parametryzujący i modelujący.

Obie struktury są równoważne, jeśli bazy R_a i R_b są sobie równe dla każdego k . W pierwszym przypadku (filtr z rys.3.20a) mamy

$$\begin{bmatrix} E \\ R_a \end{bmatrix} = \Theta \begin{bmatrix} Y \\ Y \end{bmatrix}$$



Rys. 3.20: Dwie struktury filtrów modelujących: a) z wykorzystaniem obu typów rotorów, b) z wykorzystaniem tylko rotorów kołowych.

gdzie $Y = \text{col}[y_{k+1}, y_{k+2}, y_{k+3}]$. Stąd

$$R_a = (\Theta_{21} + \Theta_{22})Y$$

W drugim przypadku (rys.3.20b) wielkości wejściowe i wyjściowe związane są równaniem

$$\begin{bmatrix} Y \\ R_b \end{bmatrix} = \Sigma \begin{bmatrix} E \\ Y \end{bmatrix}$$

Wyznaczając z powyższego równania R_b , otrzymamy

$$R_b = (\Sigma_{22} + \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1} - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12})Y$$

Wykorzystując równość (3.155), po prostych przekształceniach, dostaniemy

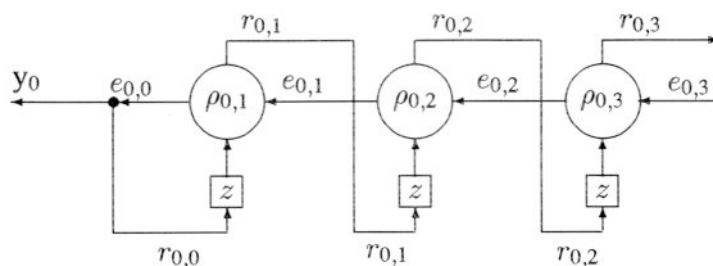
$$R_b = (\Theta_{21} + \Theta_{22})Y = R_a$$

□

Dodajmy jeszcze, że w zasadzie macierz Θ (a także Σ) powinna być opatrzona indeksem czasu jako, że w każdej chwili czasu mamy do czynienia z innym zbiorem współczynników Schura. Jedynie w przypadku sygnałów stacjonarnych indeks czasu można pominąć.

3.3.2 Filtry modelujące o parametrach stałych w czasie

W podrozdziale 3.2.2 pokazaliśmy realizację kaskadową filtra innowacyjnego, która jest uproszczeniem struktury filtru z rys.3.9 i wynika z założenia o stacjonarności przetwarzanego sygnału. W poprzednim podrozdziale pokazaliśmy natomiast strukturę filtru odwrotnego (modelującego) do filtru z rys.3.9. Zauważmy w tym miejscu, że te same współczynniki Schura opisują filtr parametryzujący (innowacyjny) i odwrotny do niego filtr modelujący. Stąd, uproszczenie filtru modelującego z rys.3.19, przy założeniu stacjonarności sygnału przetwarzanego, ma ten sam charakter co uproszczenie filtru innowacyjnego. Z rys.3.11 wynika wprost, że zastępując rotory hiperboliczne rotorami kołowymi otrzymamy strukturę jak na rys.3.21.



Rys. 3.21: Filtr modelujący trzeciego rzędu o parametrach stałych w czasie.

Pojedynczą sekcję takiego filtru (wraz z blokiem opóźniającym) opisuje macierz

$$\sigma(z)^{(j)} \triangleq \sigma^{(j)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} \quad (3.186)$$

przy czym podobnie jak $\sigma^{(j)}$ jest ona macierzą ortogonalną, wiążącą ze sobą wielkości wejściowe i wyjściowe j -tej sekcji w następujący sposób:

$$\begin{bmatrix} e_{k,j-1} \\ r_{k,j} \end{bmatrix} = \sigma(z)^{(j)} \begin{bmatrix} e_{k,j} \\ r_{k,j-1} \end{bmatrix} \quad (3.187)$$

Wielkości wyjściowe jednej sekcji są tu – podobnie jak w przypadku filtru innowacyjnego – wielkościami wejściowymi następnej sekcji, dlatego łatwo pokazać, że i w tym przypadku (co zresztą wprost wynika z rys.3.21) można sekcje zestawić w kaskadę.

3.3.3 Modelowanie stochastyczne

Idea modelowania stochastycznego polega na wykorzystaniu współczynników Schura do wygenerowania z białego szumu sygnału o statystykach 2-go rzędu identycznych jak statystyki 2-go rzędu sygnału oryginalnego.

W procesie modelowania podajemy na wejście filtru modelującego szum biały, który modelujemy współczynnikami Schura. Współczynniki te niosą informację o statystykach 2-go rzędu (widmowej gęstości mocy) pewnego procesu stochastycznego. W szczególności, można je otrzymać w drodze parametryzacji Schura.

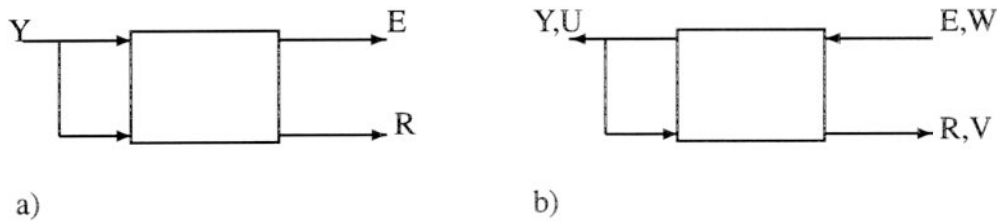
Jeśli w fazie parametryzacji otrzymaliśmy szum biały (parametryzacja całkowita), to otrzymane współczynniki Schura pozwolą zamodelować sygnał, którego macierz kowariancji jest identyczna z macierzą kowariancji sygnału parametryzowanego. Jeśli jednak proces innowacyjny nie był biały (parametryzacja częściowa), to podając w fazie modelowania szum biały na wejście filtru modelującego otrzymamy sygnał, którego macierz kowariancji zgadza się z macierzą kowariancji sygnału parametryzowanego na pierwszych N diagonalach, przy czym N jest tu długością filtru.

Powiedzieliśmy, że filtr innowacyjny wyznacza jednoznaczną reprezentację danego procesu stochastycznego w postaci zbioru współczynników Schura i procesu innowacyjnego, przy czym proces ten jest procesem białego szumu (ciągami nieskorelowanych zmiennych losowych) w dwóch przypadkach. W pierwszym, gdy dokonujemy parametryzacji całkowitej tj. wtedy, gdy do sparowania procesu o czasie trwania $(n+1)$ używamy filtru rzędu n . W drugim, gdy dokonujemy parametryzacji częściowej procesu skorelowanego w taki sposób, że otrzymany w procesie parametryzacji współczynniki Schura tworzą zbiór schodkowy. Zauważmy, że w pierwszym z opisanych w par.3.2.3 przypadków, macierz kowariancji ma niezerowe wartości

na pewnym zbiorze schodkowym (M pierwszych diagonal). W odróżnieniu od niej macierz współczynników Schura jest macierzą górnotrójkątną. Jeśli w procesie modelowania użyjemy wszystkich współczynników, to otrzymamy proces, którego macierz kowariancji jest identyczna z macierzą kowariancji procesu parametryzowanego. Jeśli skorzystamy z M pierwszych diagonal, to macierz kowariancji procesu zamodelowanego i macierz kowariancji procesu parametryzowanego mają te same wartości na M pierwszych diagonalach. Zamodelowaliśmy więc wszystkie niezerowe diagonale. Jednak macierz kowariancji procesu zamodelowanego, w odróżnieniu od macierzy procesu oryginalnego, ma również niezerowe wartości na pozostałych diagonalach.

W drugim z opisanych przypadków macierz kowariancji nie posiada zerowych diagonal, natomiast macierz współczynników Schura ma zerowe diagonale o indeksach większych niż M . W takim przypadku do zamodelowania całej macierzy kowariancji (wszystkich diagonal) wystarczy użyć do modelowania tylko M diagonal macierzy współczynników Schura. Jest to jednak przypadek dość szczególny.

Pojęcia filtracji innowacyjnej i modelowania stochastycznego dotyczą w zasadzie zgodności statystyk drugiego rzędu procesu parametryzowanego i zamodelowanego. Jeśli jednak proces innowacyjny otrzymany w fazie parametryzacji podamy na wejście filtru modelującego, to otrzymany na wyjściu filtru proces jest identyczny w sensie trajektorii z procesem parametryzowanym.



Rys. 3.22: Globalne realizacje filtrów: a) innowacyjnego, b) modelującego.

Filtr innowacyjny (rys.3.22a) spełnia równanie

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Y} \\ \mathbf{Y} \end{bmatrix} \quad (3.188)$$

natomiast filtr modelujący (rys.3.22b) spełnia równanie

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y} \\ \mathbf{R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{Y} \end{bmatrix} \quad (3.189)$$

Innymi słowy, jeśli na wejście filtru modelującego podamy proces innowacyjny, to na wyjściu filtru otrzymamy proces parametryzowany.

Jeśli, natomiast, na wejście filtru modelującego, określone współczynnikami Schura procesu parametryzowanego $\mathbf{Y}$ podamy dowolny (unormowany) proces biały $\mathbf{W}$, to w wyniku otrzymamy dwa procesy $\mathbf{U}$ i $\mathbf{V}$ spełniające równanie

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{W} \\ \mathbf{U} \end{bmatrix} \quad (3.190)$$

Wówczas macierz kowariancji C_u procesu U wynosi

$$C_u = E\{\mathbf{U}\mathbf{U}^*\} = (\mathbf{I} - \Sigma_{12})^{-1} \Sigma_{11} E\{\mathbf{W}\mathbf{W}^*\} \Sigma_{11}^* (\mathbf{I} - \Sigma_{12})^{-*} \quad (3.191)$$

Ponieważ proces $\mathbf{W}$ jest biały, to $E\{\mathbf{W}\mathbf{W}^*\} = \mathbf{I}$. Stąd

$$\mathbf{C}_u = E\{\mathbf{U}\mathbf{U}^*\} = (\mathbf{I} - \Sigma_{12})^{-1} \Sigma_{11} \Sigma_{11}^* (\mathbf{I} - \Sigma_{12})^{-*} \quad (3.192)$$

Zauważmy, że jeśli $\Theta_{11} + \Theta_{12}$ diagonalizuje $\mathbf{C}_y$ (pełna ortogonalizacja), to proces $\mathbf{E}$ jest biały. Wówczas z równań filtru modelującego mamy

$$\mathbf{C}_y = E\{\mathbf{Y}\mathbf{Y}^*\} = (\mathbf{I} - \Sigma_{12})^{-1} \Sigma_{11} E\{\mathbf{E}\mathbf{E}^*\} \Sigma_{11}^* (\mathbf{I} - \Sigma_{12})^{-*} \quad (3.193)$$

gdzie $E\{\mathbf{E}\mathbf{E}^*\} = \mathbf{I}$ z założenia. Stąd

$$\mathbf{C}_y = E\{\mathbf{Y}\mathbf{Y}^*\} = (\mathbf{I} - \Sigma_{12})^{-1} \Sigma_{11} \Sigma_{11}^* (\mathbf{I} - \Sigma_{12})^{-*} = \mathbf{C}_u \quad (3.194)$$

W przypadku, gdy $\Theta_{11} + \Theta_{12}$ nie diagonalizuje $\mathbf{C}_y$ (parametryzacja częściowa), otrzymujemy $\mathbf{C}_u^{-1} = \mathbf{C}_y^{-1}$, co – zgodnie z twierdzeniem zamieszczonym w [10] – oznacza, że $\mathbf{C}_u = \mathbf{C}_y$ na zbiorze schodkowym, którego szerokość jest równa ilości wykonanych kroków parametryzacji.

3.4 Podsumowanie

W rozdziale przedstawiliśmy podstawowe – z punktu widzenia treści zawartej w następnych rozdziałach – twierdzenia i zależności dotyczące filtracji innowacyjnej i modelowania stochastycznego sygnałów losowych jednowymiarowych (procesów stochastycznych). Przedstawiliśmy ideę wybielania (parametryzacji) i modelowania stochastycznego sygnałów drugiego rzędu. Pokazaliśmy realizację filtru innowacyjnego i modelującego dla sygnałów niestacjonarnych (filtr o parametrach zmiennych w czasie) jak również wskazaliśmy metodę uproszczenia struktury filtru dla sygnałów stacjonarnych. Uproszczenie to rozumiemy tu w sensie redukcji liczby elementów filtru potrzebnych do wybielania sygnału. W przypadku sygnałów stacjonarnych liczba ta drastycznie maleje.

Pokazaliśmy, że parametryzacja na zbiorze schodkowym o szerokości M jest równoważna parametryzacji z użyciem filtru rzędu M . Konsekwentnie, wykazaliśmy, że w wyniku modelowania białego szumu przy użyciu filtru modelującego rzędu M otrzymujemy sygnał, którego statystyki drugiego rzędu są identyczne ze statystykami drugiego rzędu sygnału określającego filtr modelujący, tylko na zbiorze schodkowym o szerokości M [9].

Przytoczone tu wyniki stanowią punkt wyjścia do uogólnień na przypadek pól losowych 2D, prowadzących do struktur typu "true 2D" i stanowiących przedmiot kolejnych rozdziałów pracy.

Rozdział 4

Ortogonalna parametryzacja i modelowanie stochastyczne dwuwymiarowych pól losowych drugiego rzędu

W poprzednim rozdziale omówiliśmy problem prognozy sygnałów jednowymiarowych stacjonarnych i niestacjonarnych. Pokazaliśmy również struktury filtrów innowacyjnych i modelujących, które wynikają z twierdzenia 3.1. W niniejszym rozdziale prezentujemy najważniejsze rezultaty rozprawy. Wykorzystując wyniki przedstawione w poprzednim rozdziale, proponujemy uogólnienie teorii liniowej filtracji innowacyjnej i modelującej sygnałów losowych na przypadek pól losowych, prowadzące do struktur typu "true-2D". Na wstępie przytoczymy zasadnicze — z punktu widzenia dalszych rozważań — pojęcia dotyczące pól losowych (2D).

4.1 Pola losowe 2D

Modelem matematycznym sygnału 1D jest jednowymiarowy proces stochastyczny. Modelem matematycznym sygnału losowego 2D (w szczególności obrazu) jest pole losowe 2D (czasami nazywane też obrazem losowym). Wartości pikseli obrazu interpretujemy jako wartości zmiennych losowych o określonym rozkładzie.

O ile dziedziną sygnału losowego 1D jest czas (dyskretny lub ciągły), o tyle w przypadku 2D zamiast mówić o czasie, będziemy mówić o *zmiennych przestrzennych*, które w naturalny sposób odnoszą się do obrazów. W dalszych częściach pracy będziemy rozumieć pole losowe w sensie definicji A.10.

Będziemy rozważać pola losowe, których dziedzina jest dyskretna, tj. pola, dla których parametr $t = (t_1, t_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} = \mathbb{N}^2$, gdzie $\mathbb{N}$ jest zbiorem liczb naturalnych. Innymi słowy zakładamy, że dziedzina jest zbiorem co najwyżej przeliczalnym, a zwykle będziemy się ograniczać do zbioru skończonego. Założenie to bierze się stąd, że proponowane przez nas uogólnienie dotyczy pól losowych o argumentie dyskretnym $\mathbf{Y} : \mathbb{N}^2 \times \mathcal{U} \mapsto \mathbb{R}^1$, obserwowanych na pewnym skończonym przedziale wartości zmiennej t i reprezentowanych przez zbiór zmiennych losowych 2D $\{y(t_1 - m, t_2 - n)\}$, dla $m = 0, 1, \dots, M$, $n = 0, 1, \dots, N$ oraz $t_1, t_2 = 0, 1, \dots$, gdzie (t_1, t_2) jest dowolnym punktem pola.

Ponieważ w dalszym ciągu będziemy rozważać przeszłość pola 2D względem dowolnego, choć ustalonego punktu obserwacji (t_1, t_2) , przyjmijmy dla uproszczenia $t_1 = t_2 = 0$.

Dlatego też dla uproszczenia dalszych zapisów wprowadzimy następujące oznaczenia:

$$y(t_1 - m, t_2 - n) \triangleq y_{m,n}. \quad (4.1)$$

Z punktu widzenia liniowej parametryzacji i prognozy, rozpatrywanymi przez nas w pracy charakterystykami probabilistycznymi pól losowych drugiego rzędu będą funkcja kowariancji pola losowego 2D oraz funkcja jego widmowej gęstości mocy. W dalszych rozważaniach będziemy rozumieli funkcję kowariancji pola losowego 2D w sensie definicji A.12, zaś funkcję widmowej gęstości mocy w sensie definicji A.13.

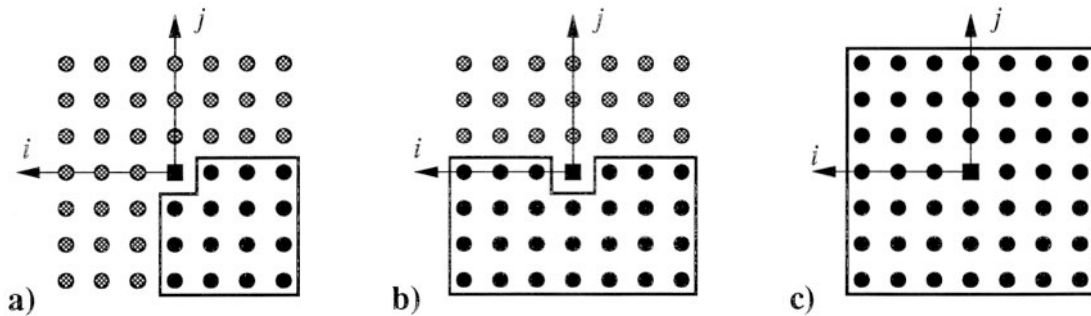
Inne, wykorzystywane w pracy pojęcia dotyczące pól losowych 2D, takie jak jednorodność w szerszym sensie, izotropowość, czy statystyki pól losowych zamieszczono w dodatku A.2.

O ile w przypadku 1D pojęcie przeszłości sygnału losowego (o czasie dyskretnym) jest jednoznacznie określone, o tyle w przypadku 2D można na kilka sposobów definiować przeszłość pola [20]. Wyborem modelu przeszłości zajmiemy się w następnym podrozdziale.

4.2 Problem prognozy pól losowych 2D

Idea prognozy w przypadku 2D stanowi uogólnienie przypadku 1D. Na podstawie 'przeszłych' wartości sygnału (względem ustalonego punktu obserwacji) wyznaczamy estymator prognozy wartości pola w punkcie obserwacji.

W przypadku 1D przeszłość sygnału jest określona jednoznacznie. W przypadku 2D tak nie jest, dlatego problem prognozy wiąże się tu z wyborem określonego modelu przeszłości. W literaturze proponuje się szereg takich modeli [14, 20, 34], pokazanych schematycznie na rys.4.1. My przyjmijmy model z rys.4.1a określony (poniższą) definicją 4.1.



Rys. 4.1: Modele prognozy pola losowego 2D: a) przyczynowy, b) półprzyczynowy, c) nieprzyczynowy.

Definicja 4.1 *Przeszłość rzędu $(k - i, l - j)$ pola losowego względem punktu o współrzędnych (i, j) będziemy rozumieli jako zbiór wartości (zmiennych losowych) $\{y_{mn}\}$ dla $(m, n) \in I$, gdzie $I = \{(m, n)\}_{m=i, n=j}^{i=k, j=l} \setminus (i, j)$. Jest to tzw. przyczynowy model przeszłości.*

Niech y będzie polem losowym 2D o dziedzinie dyskretniej. Jeśli przez (i, j) oznaczymy punkt obserwacji i założymy, że pole losowe jest reprezentowane przez zbiór zmiennych losowych

$$\{y_{mn}\} \text{ dla } (m, n) \in I = \{(m, n)\}_{m=i, n=j}^{m=k, n=l} \setminus (i, j), \quad (4.2)$$

to problem jednokrokowej prognozy "w przód" tego pola sformułujemy następująco:

Znając wartości (4.2) rozważanego fragmentu pola losowego należy wyznaczyć estymator wartości pola w punkcie o współrzędnych (i, j) .

Niech

$$S_{[i,j]}^{k,l} = \text{span}\{y_{m,n}\} \text{ dla } m, n \in I = \{(m, n)\}_{m=i, n=j}^{m=k, n=l} \setminus (i, j). \quad (4.3)$$

określa przestrzeń przeszłości zmiennej losowej $y_{i,j}$ oraz niech

$$S_{i,j}^{[k,l]} = \text{span}\{y_{m,n}\} \text{ dla } m, n \in I = \{(m, n)\}_{m=i, n=j}^{m=k, n=l} \setminus (k, l). \quad (4.4)$$

określa przestrzeń przyszłości zmiennej losowej $y_{k,l}$. Estymator zmiennej losowej $y_{i,j}$ zdefiniowany jako

$$\hat{y}_{i,j}^{k,l} \triangleq P(S_{[i,j]}^{k,l})y_{i,j} \in S_{[i,j]}^{k,l} \quad (4.5)$$

minimalizuje w sensie normy błąd "w przód" rzędu $(k-i, l-j)$ (rys.4.2a)

$$\epsilon_{i,j}^{k,l} \triangleq P((S_{[i,j]}^{k,l})^\perp)y_{i,j} \perp S_{[i,j]}^{k,l}, \quad (4.6)$$

który po unormowaniu będziemy oznaczać jako

$$e_{i,j}^{k,l} = \epsilon_{i,j}^{k,l} \|\epsilon_{i,j}^{k,l}\|^{-1}. \quad (4.7)$$

Analogicznie wprowadzimy pojęcie estymatora i błędu prognozy "w tył" (rys.4.2b):

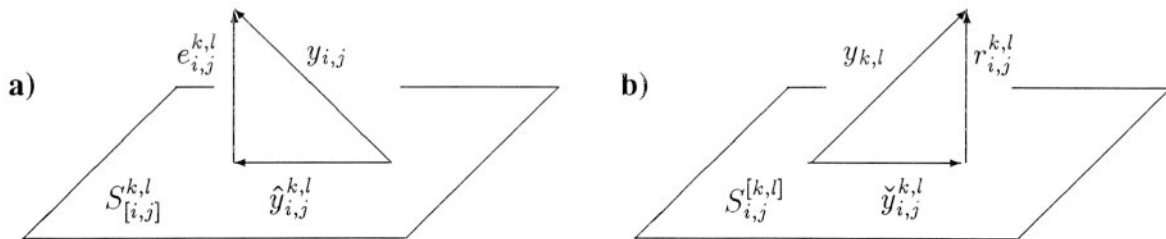
$$\tilde{y}_{i,j}^{k,l} \triangleq P(S_{i,j}^{[k,l]})y_{k,l} \in S_{i,j}^{[k,l]} \quad (4.8)$$

oraz

$$v_{i,j}^{k,l} \triangleq P((S_{i,j}^{[k,l]})^\perp)y_{k,l} \perp S_{i,j}^{[k,l]}, \quad (4.9)$$

który po unormowaniu będziemy oznaczać jako

$$r_{i,j}^{k,l} = v_{i,j}^{k,l} \|v_{i,j}^{k,l}\|^{-1}. \quad (4.10)$$



Rys. 4.2: Estymator i błąd prognozy wartości pola 2D: a) w przód, b) w tył.

Dalsze rozważania dotyczą konstrukcji błędów globalnych prognozy w przód i w tył oraz metody rekurencyjnego podwyższania rzędu tych błędów. W konsekwencji, rozważania te stanowią podstawę konstrukcji filtru parametryzującego 2D.

W przypadku 1D, gdzie dziedzina sygnału jest określona zmienną jednowymiarową (zwykle jest to zmienna określająca czas), określenia takie jak *błąd w przód* czy *błąd w tył* mają proste odniesienia do przeszłości i przyszłości sygnału i są jednoznaczne. W przypadku 2D utworzymy *rodzinę błędów w przód* oraz *rodzinę błędów w tył*, które będziemy interpretować jako uogólnienie błędów w przód i w tył pokazanych na rys.3.6.

Rodzinę obserwatorów prognozy w przód będziemy definiować jako

$$\mathbf{Y}_{i,j}^{(f)} \triangleq [y_{i,i}, y_{i,i+1}, y_{i+1,i}, \dots, y_{i,j}, y_{j,i}] \quad (4.11)$$

a rodzinę obserwatorów prognozy w tył jako

$$\mathbf{Y}_{i,j}^{(b)} \triangleq [y_{j,j}, y_{j,j-1}, y_{j-1,j}, \dots, y_{j,i}, y_{i,j}] \quad (4.12)$$

Zaproponujemy błędy *lokalne* i *globalne* prognozy w przód i w tył. Przez błąd lokalny w przód (w tył) rozumiemy błąd estymacji w sposób analogiczny jak w przypadku 1D, należący do pewnej rodziny błędów w przód (w tył), którą będziemy określać jako *błąd globalny prognozy w przód (w tył)*.

Skoncentrujemy teraz uwagę na proponowanym w pracy schemacie indeksowania obu typów błędów. Dla unormowanych błędów lokalnych, odpowiednio w przód i w tył, określonych przez (4.7) i (4.10), przyjmujemy następującą notację:

$$e_{\text{położenie}}^{(\text{rzęd globalny}), (\text{rzęd lokalny})}, \quad r_{\text{położenie}}^{(\text{rzęd globalny}), (\text{rzęd lokalny})}$$

gdzie dolny indeks *położenie* określony jest dwoma współrzędnymi położenia błędu w rozpatrywanym obszarze pola losowego. Przez rząd globalny będziemy rozumieć liczbę p określoną jako

$$p = \sqrt{\dim(S)}$$

gdzie S jest wspólną podprzestrzenią estymacji dla wszystkich błędów lokalnych będących elementami danego błędu globalnego. Wówczas, rząd globalny p jest taki sam dla wszystkich błędów lokalnych tworzących dany błąd globalny rzędu (globalnego) p . Rząd lokalny natomiast określa rząd błędu lokalnego wewnątrz rodziny, do której (ten błąd) należy. W ten sposób całkowity rząd błędu lokalnego wyraża się jako suma rzędu lokalnego i kwadratu rzędu globalnego.

Niech

$$S_i^j \triangleq \text{span}\{y_{m,n}\} \quad \text{dla } m, n \in I = \{(m, n)\}_{m=i, n=i}^{m=j, n=j} \quad (4.13)$$

Wówczas, dla każdego z elementów rodziny obserwatorów w przód definiujemy błędy prognozy w postaci

$$\epsilon_{j,i}^{p,0} \triangleq P((S_{i+1}^j)^\perp) y_{j,i} \perp S_{i+1}^j \quad (4.14)$$

$$\epsilon_{i,j}^{p,1} \triangleq P((S_{i+1}^j \dot{+} \text{span}\{y_{j,i}\})^\perp) y_{i,j} \perp \text{span}\{S_{i+1}^j \dot{+} y_{j,i}\} \quad (4.15)$$

$$\epsilon_{j-1,i}^{p,2} \triangleq P((S_{i+1}^j \dot{+} \text{span}\{y_{j,i}\} \dot{+} \text{span}\{y_{i,j}\})^\perp) y_{i,j} \perp \text{span}\{S_{i+1}^j \dot{+} y_{j,i} \dot{+} y_{i,j}\} \quad (4.16)$$

$\vdots$

$$\begin{aligned} \epsilon_{i,i}^{p,2p} &\triangleq P((S_{i+1}^j \dot{+} \text{span}\{y_{j,i}\} \dot{+} \text{span}\{y_{i,j}\} \dot{+} \dots \dot{+} \text{span}\{y_{i+1,i}\} \dot{+} \text{span}\{y_{i,i+1}\})^\perp) y_{i,i} \\ &\perp \text{span}\{S_{i+1}^j \dot{+} y_{j,i} \dot{+} y_{i,j} \dot{+} \dots \dot{+} y_{i+1,i} \dot{+} y_{i,i+1}\} \end{aligned} \quad (4.17)$$

gdzie znak $\dot{+}$ oznacza sumę prostą podprzestrzeni, a p jest rzędem globalnym określonym powyżej i w tym wypadku wynosi $p = j - i$. Analogicznie, błędy prognozy dla elementów rodziny obserwatorów prognozy w tył definiujemy w postaci

$$v_{i,j}^{p,0} \triangleq P((S_i^{j-1})^\perp) y_{i,j} \perp S_i^{j-1} \quad (4.18)$$

$$v_{j,i}^{p,1} \triangleq P((S_i^{j-1} \dot{+} \text{span}\{y_{i,j}\})^\perp) y_{j,i} \perp \text{span}\{S_i^{j-1} \dot{+} y_{i,j}\} \quad (4.19)$$

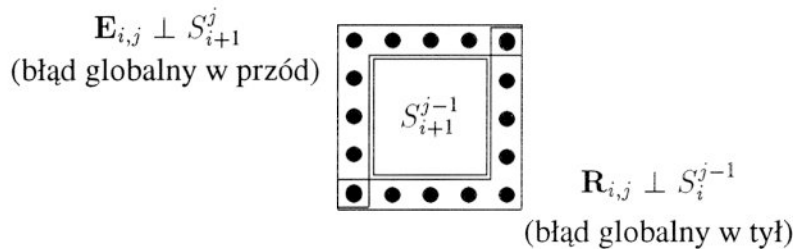
$$v_{j-1,i}^{p,2} \triangleq P((S_i^{j-1} \dot{+} \text{span}\{y_{i,j}\} \dot{+} \text{span}\{y_{j,i}\})^\perp) y_{i+1,j} \perp \text{span}\{S_i^{j-1} \dot{+} y_{i,j} \dot{+} y_{j,i}\} \quad (4.20)$$

$$\vdots$$

$$v_{i,i}^{p,2p} \triangleq P((S_i^{j-1} \dot{+} \text{span}\{y_{i,j}\} \dot{+} \text{span}\{y_{j,i}\} \dot{+} \dots \dot{+} \text{span}\{y_{j-1,j}\} \dot{+} \text{span}\{y_{j,j-1}\})^\perp) y_{j,j} \perp \text{span}\{S_i^{j-1} \dot{+} y_{i,j} \dot{+} y_{j,i} \dot{+} \dots \dot{+} y_{j-1,j} \dot{+} y_{j,j-1}\} \quad (4.21)$$

Zdefiniowane powyżej błędy prognozy tworzą po unormowaniu rodziny błędów w przód i w tył zwane dalej błędami globalnymi w przód i w tył.

Proponowaną w niniejszej pracy koncepcję błędu globalnego w przód i w tył zilustrowano na rys.4.3. Na rysunku tym pokazano również wspólną podprzestrzeń estymacji, do której oba błędy globalne są ortogonalne. Dodajmy, że błędy lokalne należące do danej rodziny stanowiącej błąd globalny (w przód lub w tył) są — ze względu na sposób konstrukcji błędu globalnego pokazanej schematycznie na rys.4.4 — parami ortonormalne tj. $E\{\mathbf{E}_{i,j}\mathbf{E}_{i,j}^*\} = \mathbf{I}_{2p+1}$ oraz $E\{\mathbf{R}_{i,j}\mathbf{R}_{i,j}^*\} = \mathbf{I}_{2p+1}$.



Rys. 4.3: Pojęcia lokalnych i globalnych błędów prognozy w przód i w tył; koła zaczerknione oznaczające błędy lokalne grupowane są w odpowiednie błędy globalne.

Przez globalny błąd prognozy w przód $\mathbf{E}_{i,j}$ rzędu (globalnego) $p = j - i$ (rys.4.3) będziemy więc rozumieć rodzinę lokalnych unormowanych błędów prognozy w przód w postaci wektora

$$\mathbf{E}_{ij} \triangleq \text{col}[e_{i,i}^{p,2p}, e_{i,i+1}^{p,2p-1}, e_{i+1,i}^{p,2p-2}, \dots, e_{i,j}^{p,1}, e_{j,i}^{p,0}] \quad (4.22)$$

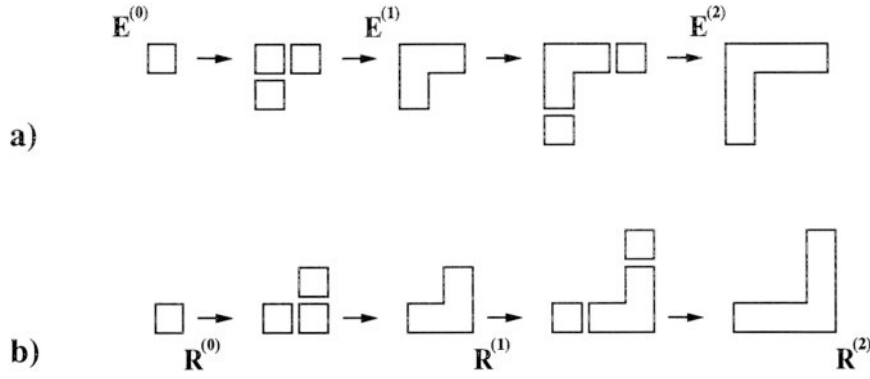
gdzie $e = \epsilon / \|\epsilon\|^{-1}$ oznacza unormowany błąd ϵ . Podobnie, globalny błąd prognozy w tył $\mathbf{R}_{i,j}$ rzędu (globalnego) $p = j - i$ (rys.4.3) będziemy rozumieć jako rodzinę lokalnych błędów w tył w postaci wektora

$$\mathbf{R}_{ij} \triangleq \text{col}[r_{j,j}^{p,2p}, r_{j,j-1}^{p,2p-1}, r_{j-1,j}^{p,2p-2}, \dots, r_{j,i}^{p,1}, r_{i,j}^{p,0}] \quad (4.23)$$

gdzie $r = v / \|v\|^{-1}$ oznacza unormowany błąd v . Przypomnijmy, że elementy powyższych wektorów są zmiennymi losowymi.

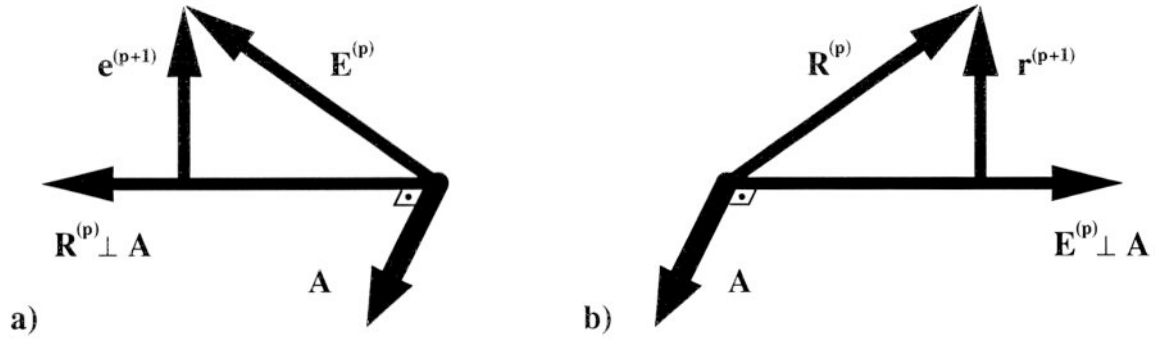
W powyższych definicjach, rząd lokalny jest funkcją rzędu globalnego, ponieważ przy podwyższaniu wymiaru przestrzeni estymacji, powiększamy też liczbę błędów lokalnych tworzących błąd globalny, co wynika z konstrukcji błędu globalnego podanej schematycznie na rys.4.4. Jak wynika z tego rysunku, w każdym kroku powiększamy rozmiar błędu globalnego poprzez doortogonalizowanie dwóch elementów do istniejącej już rodziny błędów lokalnych stanowiących błąd globalny (dodawane elementy muszą być już ortogonalne względem siebie). W ten sposób wszystkie błędy lokalne należące do danej rodziny tworzą (po unormowaniu) zbiór ON.

Analogicznie, jak w przypadku 1D, interesuje nas problem rekurencyjnego podwyższania rzędu prognozy lub równoważnie – problem wyznaczania błędów wyższych rzędów na podstawie



Rys. 4.4: Błąd globalny powstający w procesie parametryzacji: a) błąd w przód, b) błąd w tył.

błędów niższych rzędów. Algorytm rekurencyjnego podwyższania rzędu błędu prognozy tak w przód jak i w tył opisujemy szczegółowo w punkcie 4.5. W tym miejscu przedstawiamy tylko ideę rekurencyjnego podwyższania rzędu globalnego błędu prognozy przedstawioną na rys.4.5.



Rys. 4.5: Geometryczna interpretacja idei rekurencyjnego podwyższania rzędu globalnych błędów prognozy: a) w przód, b) w tył. $E^{(p)}$, $R^{(p)}$ – błędy globalne niższego rzędu, $e^{(p+1)}$, $r^{(p+1)}$ – nieunormowane błędy wyższego rzędu.

W sytuacji jak na rys.4.5a) mamy dane błędy globalne $E^{(p)}$ i $R^{(p)}$ rzędu p (niższego rzędu), które są ortogonalne do wspólnej podprzestrzeni estymacji $S^{(p)} = \text{span}\{A\}$, przy czym przez $S^{(p)}$ oznaczamy tu przestrzeń, której wymiar wynosi p^2 . Projektcja ortogonalna błędu $E^{(p)}$ na ortogonalne uzupełnienie podprzestrzeni $\text{span}\{A\} \oplus \text{span}\{R^{(p)}\}$ daje w wyniku nieunormowany błąd globalny w przód $e^{(p+1)}$ (wyższego rzędu). W ten sposób błąd $e^{(p+1)}$ jest ortogonalny zarówno do podprzestrzeni $\text{span}\{A\}$ jak i do podprzestrzeni $\text{span}\{R^{(p)}\}$. Podobnie, błąd $r^{(p+1)}$ z rys.4.5b) jest błędem wyższego rzędu względem błędu $R^{(p)}$.

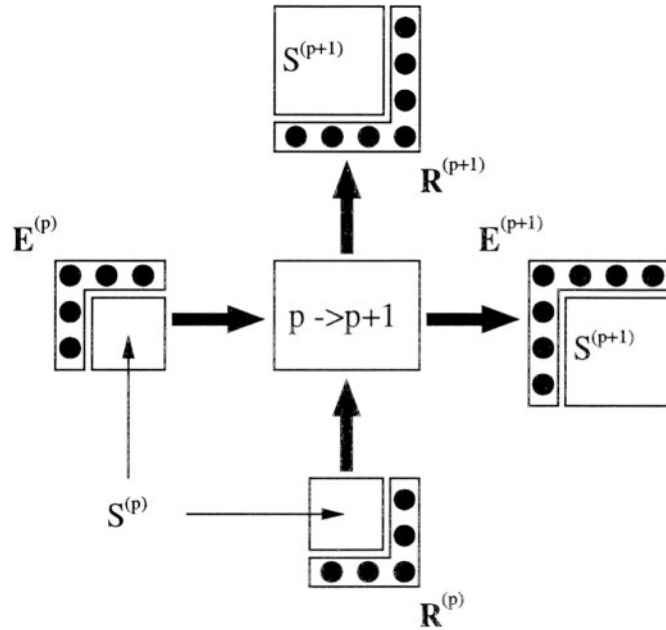
Na rys.4.6 pokazano schematycznie sposób podwyższania rzędu globalnego błędu prognozy w przód i w tył. Blok realizujący tą operację omówimy szczegółowo w punktach 4.4 i 4.5.

Przez $S^{(p)}$ oznaczono podprzestrzeń, której wymiar wynosi p . W wyniku podwyższenia rzędu globalnych błędów w przód $E_{i,j}$ oraz w tył $R_{i+1,j+1}$ rzędu $p = j - i$ otrzymamy błędy globalne w przód i w tył rzędu $(p + 1)$, tj.

$$E_{i,j+1} \triangleq \{e_{i,i}^{p+1,2(p+1)}, e_{i,i+1}^{p+1,2(p+1)-1}, e_{i+1,i}^{p+1,2(p+1)-2}, \dots, e_{i,i+p+1}^{p+1,1}, e_{i+p+1,i}^{p+1,0}\} \quad (4.24)$$

oraz

$$R_{i,j+1} \triangleq \{r_{j+1,j+1}^{p+1,2(p+1)}, r_{j+1,j}^{p+1,2(p+1)-1}, r_{j,j+1}^{p+1,2(p+1)-2}, \dots, r_{j+1,j-p}^{p+1,1}, e_{j-p,j+1}^{p+1,0}\} \quad (4.25)$$



Rys. 4.6: Podwyższanie globalnego rzędu błędów prognozy w przód i w tył.

Algorytm podwyższania rzędu globalnego można zrealizować na wiele sposobów. W punkcie 4.4 proponujemy dwa szczególne rozwiązania tego zagadnienia i wskażemy na istnienie całej rodziny rozwiązań. Do problemu parametryzacji ortogonalnej powrócimy w podrozdziale 4.5. W celu zaproponowania rozwiązania przedstawionych powyżej idei, wyjaśnimy teraz kilka pojęć, z których będziemy korzystać w dalszej części pracy.

Niech $\mathbf{g} = \text{col}[g_1, g_2, \dots, g_m]$ będzie wektorem kolumnowym zmiennych losowych $g_1, g_2, \dots, g_m$. Przez $\mathbf{g}^*$ będziemy rozumieć wektor wierszowy elementów sprzężonych do elementów należących do $\mathbf{g}$ tj.

$$\mathbf{g}^* \triangleq \text{row}[g_1^*, g_2^*, \dots, g_m^*] \quad (4.26)$$

Przez $E\{\mathbf{g}\}$ będziemy rozumieć wektor wartości oczekiwanych elementów należących do $\mathbf{g}$ tj.

$$E\{\mathbf{g}\} \triangleq \text{col}[E\{g_1\}, E\{g_2\}, \dots, E\{g_m\}] \quad (4.27)$$

Przez $E\{\mathbf{g}\mathbf{g}^*\}$ będziemy rozumieć macierz wartości oczekiwanych iloczynów zmiennych losowych należących do $\mathbf{g}$ tj. macierz Grama

$$E\{\mathbf{g}\mathbf{g}^*\} \triangleq \begin{bmatrix} E\{g_1 g_1^*\} & E\{g_1 g_2^*\} & \cdots & E\{g_1 g_m^*\} \\ E\{g_2 g_1^*\} & E\{g_2 g_2^*\} & \cdots & E\{g_2 g_m^*\} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E\{g_m g_1^*\} & E\{g_m g_2^*\} & \cdots & E\{g_m g_m^*\} \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

Niech $\mathbf{G}$ będzie wektorem unormowanych zmiennych losowych należących do $\mathbf{g}$, tj. niech

$$\mathbf{G} = \text{col}[G_1, G_2, \dots, G_m], \quad (4.29)$$

gdzie $G_i = \|g_i\|^{-1} g_i$ dla $i = 1, \dots, m$, a norma $\|\cdot\|$ jest rozumiana w sensie definicji określonej zależnością A.3. Zauważmy, że jeśli $\mathbf{g}$ jest wektorem elementów ortogonalnych w tym sensie, że $E\{\mathbf{g}\mathbf{g}^*\}$ jest macierzą diagonalną to możemy napisać

$$\mathbf{G} \triangleq \|\mathbf{g}\|^{-1} \mathbf{g} \quad (4.30)$$

gdzie

$$\|g\| = (E\{gg^*\})^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \|g_1\| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \|g_2\| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \|g_m\| \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

jest macierzą diagonalną, przy czym przez $E\{gg^*\}^{\frac{1}{2}}$ rozumiemy tu macierz D taką, że $D^2 = E\{gg^*\}$.

Własność ortonormalizująca macierzy $E\{gg^*\}^{-\frac{1}{2}}$: Jeśli g nie jest wektorem elementów ortogonalnych względem siebie, to $G = E\{gg^*\}^{-\frac{1}{2}}g$ jest wektorem elementów ortonormalnych względem siebie, ponieważ

$$E\{GG^*\} = E\{\|g\|^{-1} gg^* \|g\|^{-1}\} = C_g^{-\frac{1}{2}} C_g C_g^{-\frac{1}{2}*} = I_m, \quad (4.32)$$

gdzie $C_g = E\{gg^*\}$ a I_m jest macierzą jednostkową wymiaru m .

Niech $h = \text{col}[h_1, h_2, \dots, h_n]$ będzie wektorem kolumnowym zmiennych losowych $h_1, h_2, \dots, h_n$. Macierz

$$v \triangleq E\{gh^*\} \quad (4.33)$$

będziemy interpretować jako macierz korelacji wzajemnych zmiennych losowych należących do g i zmiennych losowych należących do h .

4.3 Uogólniona projekcja ortogonalna

Uogólnienie (4.22) i (4.23) pojęcia błędu estymacji odpowiednio w przód i w tył skłania do uogólnienia pojęcia projekcji ortogonalnej.

Niech g i h będą bazami ortonormalnymi odpowiednio w przestrzeniach $\mathcal{U}^m$ i $\mathcal{U}^n$ tj. niech

$$g = \text{col}[g_1, g_2, \dots, g_i, \dots, g_m]$$

a

$$h = \text{col}[h_1, h_2, \dots, h_j, \dots, h_n]$$

będą wektorami zmiennych losowych stanowiących bazy ortonormalne przestrzeni, odpowiednio $\text{span}\{g\}$ i $\text{span}\{h\}$ tj. takich, że $E\{gg^*\} = I_m$, $E\{hh^*\} = I_n$ a $E\{gh^*\} = v_{m \times n}$, gdzie $v_{m \times n}$ jest macierzą korelacji wzajemnych zmiennych losowych należących do g i h , tj. $v_{ij} = E\{g_i h_j^*\}$.

Ujmując rzecz geometrycznie, mamy tu do czynienia z dwiema bazami ortonormalnymi, które nie są ortogonalne względem siebie.

Niech $\hat{h}_g = P(\text{span}\{g\})h$ oznacza projekcję ortogonalną h na podprzestrzeń $\text{span}\{g\}$ rozpiętą na elementach z g i odpowiednio niech $\hat{g}_h = P(\text{span}\{h\})g$ oznacza projekcję ortogonalną g na podprzestrzeń $\text{span}\{h\}$ rozpiętą na elementach z h . Ponieważ g jest bazą ortogonalną, to możemy napisać

$$\hat{h}_g = P(\oplus_{i=1}^m \text{span}\{g_i\})h = \sum_{i=1}^m P(\text{span}\{g_i\})h. \quad (4.34)$$

Ponieważ $\hat{h}_g = [\hat{h}_{g,1}, \dots, \hat{h}_{g,n}]$, to

$$\hat{h}_{g,j} = \sum_{i=1}^m P(\text{span}\{g_i\})h_j \quad j = 1, \dots, n \quad (4.35)$$

Podobnie dla projekcji g na $\text{span}\{h\}$ otrzymamy

$$\hat{g}_{h,i} = \sum_{j=1}^n P(\text{span}\{h_j\})g_i \quad i = 1, \dots, m \quad (4.36)$$

Korzystając z tego, że projekcję elementu h na $\text{span}\{g\}$ możemy wyrazić – uogólniając na przypadek wektorowy pojęcie iloczynu skalarnego – jako

$$\hat{h}_g = P(\text{span}\{g\})h = \|g\|^{-2} (h, g)g = \|g\|^{-1} (h, g)g \|g\|^{-1} = (h, G)G \quad (4.37)$$

gdzie $(h, g) \triangleq E\{hg^*\}$, a $G = \|g\|^{-1} \cdot g$ jest unormowaną – w sensie normy (4.31) – wersją wektora g , możemy zależność (4.34) wyrazić w postaci

$$\begin{aligned} \hat{h}_g = P(\text{span}\{g\})h &= E\{hg^*\}E\{gg^*\}^{-1}g = \\ &= E\{hg^*\}E\{gg^*\}^{-\frac{1}{2}}E\{gg^*\}^{-\frac{1}{2}}g = \\ &= E\{hG^*\}G, \end{aligned} \quad (4.38)$$

gdzie $G = E\{gg^*\}^{-\frac{1}{2}}g$.

Symetrycznie, rzut g na $\text{span}\{h\}$ wyraża się jako

$$\begin{aligned} \hat{g}_h = P(\text{span}\{h\})g &= E\{gh^*\}E\{hh^*\}^{-1}h = \\ &= E\{gh^*\}E\{hh^*\}^{-\frac{1}{2}}E\{hh^*\}^{-\frac{1}{2}}h = \\ &= E\{gH^*\}H, \end{aligned} \quad (4.39)$$

gdzie $H = E\{hh^*\}^{-\frac{1}{2}}h$.

Podobny przypadek rozważono w pracy [28]. Zdefiniujmy teraz uogólniony błąd estymacji wektora h w $\text{span}\{g\}$ jako wektor a błędów projekcji elementów h_j należących do h na $(\text{span}\{g\})^\perp$ w postaci

$$a \triangleq P(\text{span}\{g\}^\perp)h = h - \hat{h}_g \quad (4.40)$$

a wektor błędów b projekcji elementów g_i należących do g na $(\text{span}\{h\})^\perp$ w postaci

$$b \triangleq P(\text{span}\{h\}^\perp)g = g - \hat{g}_h \quad (4.41)$$

Zauważmy, że $\forall_j a_j \perp \text{span}\{g\}$, ponieważ każdy element $\hat{h}_{g,j}$ jest projekcją ortogonalną h_j na $\text{span}\{g\}$. Podobnie, $\forall_i b_i \perp \text{span}\{h\}$, ponieważ każdy element $\hat{g}_{h,i}$ jest projekcją ortogonalną g_i na $\text{span}\{h\}$. Z drugiej strony, jeśli h i g są bazami, to a i b są również bazami. Istotnie, dla każdego $j = 0, 1, \dots, n$ element $\hat{h}_{g,j}$ jest kombinacją liniową elementów bazy g i dlatego nie może być kombinacją liniową elementów bazy h . W związku z tym $a = h - \hat{h}_g$ stanowi bazę. Analogicznie, dla każdego $i = 0, 1, \dots, m$ element $\hat{g}_{h,i}$ jest kombinacją liniową elementów bazy h i nie jest kombinacją liniową elementów bazy g . Dlatego $b = g - \hat{g}_h$ jest bazą. Z faktu, że g i h są ortonormalne tj. spełniają warunki $E\{gg^*\} = I_m$, $E\{hh^*\} = I_n$ nie wynika, że a i b spełniają podobne warunki. Przeciwnie, a i b nie są ani unormowane ani ortogonalne tj. $E\{aa^*\} \neq I_m$ i $E\{bb^*\} \neq I_n$. Nie są również (w ogólnym przypadku) ortogonalne względem siebie tj. zwykle $E\{ab^*\} \neq 0_{m \times n}$.

Podstawiając (4.38) do (4.40), a (4.39) do (4.41) otrzymamy

$$a = h - E\{hG^*\}G = E\{hh^*\}^{\frac{1}{2}}(H - E\{HG^*\}G) \quad (4.42)$$

$$b = g - E\{gH^*\}H = E\{gg^*\}^{\frac{1}{2}}(G - E\{GH^*\}H) \quad (4.43)$$

Ponieważ wielkość $E\{\mathbf{GH}^*\}$ możemy interpretować jako macierz korelacji wzajemnych elementów należących do $\mathbf{G}$ i do $\mathbf{H}$, to powyższe dwa równania przepiszemy w postaci

$$\mathbf{a} = E\{\mathbf{hh}^*\}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{H} - \mathbf{V}^*\mathbf{G}) \quad (4.44)$$

$$\mathbf{b} = E\{\mathbf{gg}^*\}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{G} - \mathbf{V}\mathbf{H}) \quad (4.45)$$

gdzie $\mathbf{V} = E\{\mathbf{GH}^*\}$ jest macierzą korelacji wzajemnych zmiennych losowych należących do $\mathbf{G}$ i do $\mathbf{H}$, przy czym $\mathbf{G}$ i $\mathbf{H}$ są ortonormalne tj. $E\{\mathbf{GG}^*\} = \mathbf{I}_m$ a $E\{\mathbf{HH}^*\} = \mathbf{I}_n$.

Z powyższych dwóch równań będziemy korzystać często w dalszej części pracy.

4.4 Hiperboliczna ortogonalizacja Grama-Schmidta dwóch ortonormalnych baz przestrzeni zmiennych losowych

Zauważmy, że równania (4.44) i (4.45) są w istocie uogólnioną (wektorową) wersją równań (3.54) i (3.55) określających błędy estymacji wyższego rzędu w funkcji błędów niższego rzędu i przez to prowadzących do rekurencyjnego algorytmu podwyższania rzędu błędu. Pokażemy teraz w jaki sposób równania uogólnionych błędów prognozy prowadzą do równań globalnego rotora hiperbolicznego (GRH).

Podstawiając w równaniu (4.44) $\mathbf{a} = E\{\mathbf{aa}^*\}^{\frac{1}{2}}\mathbf{A}$ a w równaniu (4.45) $\mathbf{b} = E\{\mathbf{bb}^*\}^{\frac{1}{2}}\mathbf{B}$ otrzymamy

$$\mathbf{A} = E\{\mathbf{aa}^*\}^{-\frac{1}{2}}E\{\mathbf{hh}^*\}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{H} - \mathbf{V}^*\mathbf{G}) \quad (4.46)$$

$$\mathbf{B} = E\{\mathbf{bb}^*\}^{-\frac{1}{2}}E\{\mathbf{gg}^*\}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{G} - \mathbf{V}\mathbf{H}) \quad (4.47)$$

Podstawiając $\mathbf{W}_b = E\{\mathbf{bb}^*\}^{-\frac{1}{2}}E\{\mathbf{gg}^*\}^{\frac{1}{2}}$ oraz $\mathbf{W}_a = E\{\mathbf{aa}^*\}^{-\frac{1}{2}}E\{\mathbf{hh}^*\}^{\frac{1}{2}}$ i zapisując powyższe równania w postaci macierzowej otrzymamy:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_b & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{W}_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & -\mathbf{V} \\ -\mathbf{V}^* & \mathbf{I}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

Korzystając z równania (4.45) przekształcimy $E\{\mathbf{bb}^*\}$ do postaci

$$E\{\mathbf{bb}^*\} = E\{E\{\mathbf{gg}^*\}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{G} - \mathbf{V}\mathbf{H})(\mathbf{G}^* - \mathbf{H}^*\mathbf{G}^*)E\{\mathbf{gg}^*\}^{\frac{1}{2}*}\} \quad (4.49)$$

Ponieważ $\mathbf{g}$ jest ON, to $E\{\mathbf{gg}^*\} = \mathbf{I}_m$, a stąd

$$E\{\mathbf{bb}^*\} = E\{\mathbf{GG}^*\} - \mathbf{V}E\{\mathbf{HG}^*\} - E\{\mathbf{GH}^*\}\mathbf{V}^* + \mathbf{V}E\{\mathbf{HH}^*\}\mathbf{V}^* \quad (4.50)$$

Ortonormalność $\mathbf{g}$ implikuje $E\{\mathbf{GG}^*\} = \mathbf{I}_m$, a ortonormalność $\mathbf{h}$ implikuje $E\{\mathbf{HH}^*\} = \mathbf{I}_n$. Biorąc pod uwagę, że $E\{\mathbf{GH}^*\} = \mathbf{V}$ otrzymamy

$$E\{\mathbf{bb}^*\} = \mathbf{I}_m - \mathbf{V}\mathbf{V}^* - \mathbf{V}\mathbf{V}^* + \mathbf{V}\mathbf{V}^* = \mathbf{I}_m - \mathbf{V}\mathbf{V}^* \quad (4.51)$$

Po podobnych przekształceniach otrzymamy

$$E\{\mathbf{aa}^*\} = \mathbf{I}_n - \mathbf{V}^*\mathbf{V} \quad (4.52)$$

Uwzględniając równości $E\{gg^*\} = \mathbf{I}_m$ oraz $E\{hh^*\} = \mathbf{I}_n$ i wstawiając (4.51) do wyrażenia określającego $\mathbf{W}_b$ a (4.52) do wyrażenia określającego $\mathbf{W}_a$ przepiszemy równanie (4.48) w postaci

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{I}_m - \mathbf{V}\mathbf{V}^*)^{-\frac{1}{2}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (\mathbf{I}_n - \mathbf{V}^*\mathbf{V})^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & -\mathbf{V} \\ -\mathbf{V}^* & \mathbf{I}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

Zdefiniujemy teraz uogólniony współczynnik odbicia¹ w postaci macierzy

$$\mathbf{K} = -\mathbf{V} \quad (4.54)$$

gdzie $\mathbf{V} = E\{\mathbf{G}\mathbf{H}^*\}$ jest macierzą unormowanych korelacji wzajemnych elementów (zmiennych losowych) należących do $\mathbf{G}$ i do $\mathbf{H}$. Ostatecznie, podstawiając $\mathbf{K} = -\mathbf{V}$ w równaniu (4.53)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{I}_m - \mathbf{K}\mathbf{K}^*)^{-\frac{1}{2}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (\mathbf{I}_n - \mathbf{K}^*\mathbf{K})^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{K} \\ \mathbf{K}^* & \mathbf{I}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

Faktoryzacja macierzy J -unitarnej analogicznie, jak w powyższym równaniu, jest znana pod nazwą *transformacji Halmosa* [9].

Macierz $\mathbf{P}$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} (\mathbf{I}_m - \mathbf{K}\mathbf{K}^*)^{-\frac{1}{2}} & (\mathbf{I}_m - \mathbf{K}\mathbf{K}^*)^{-\frac{1}{2}}\mathbf{K} \\ (\mathbf{I}_n - \mathbf{K}^*\mathbf{K})^{-\frac{1}{2}}\mathbf{K}^* & (\mathbf{I}_n - \mathbf{K}^*\mathbf{K})^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

realizuje operacje globalnej rotacji hiperbolicznej. Zauważmy, że dla $m = n = 1$ otrzymujemy wprost równanie (3.36) wyrażające pojedynczą (lokalną) rotację hiperboliczną.

Podstawowe własności rotora globalnego realizowanego w postaci transformacji Halmosa

Sformułujemy teraz twierdzenie dotyczące kilku podstawowych własności rotora globalnego zrealizowanego w postaci transformacji Halmosa.

Twierdzenie 4.1 O własnościach globalnego rotora hiperbolicznego

Niech $\mathbf{G}$ wymiaru $\dim(\mathbf{G}) = m$ i $\mathbf{H}$ wymiaru $\dim(\mathbf{H}) = n$ będą dwoma ortonormalnymi bazami w przestrzeni zmiennych losowych, tj. spełniającymi warunki

$$E\{\mathbf{G}\mathbf{G}^*\} = \mathbf{I}_m \quad \text{a} \quad E\{\mathbf{H}\mathbf{H}^*\} = \mathbf{I}_n \quad (4.57)$$

i stanowiącymi wektory wejściowe globalnego rotora hiperbolicznego wymiaru $(m \times n)$, opisanego J -unitarną macierzą

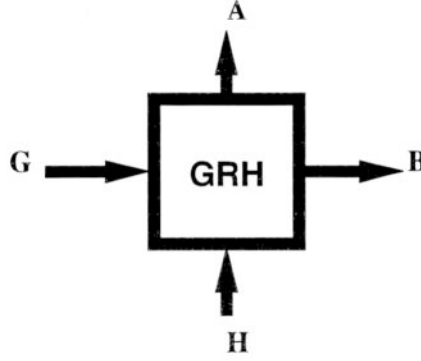
$$\Theta = \begin{bmatrix} (\mathbf{I}_m - \mathbf{K}\mathbf{K}^*)^{-\frac{1}{2}} & (\mathbf{I}_m - \mathbf{K}\mathbf{K}^*)^{-\frac{1}{2}}\mathbf{K} \\ (\mathbf{I}_n - \mathbf{K}^*\mathbf{K})^{-\frac{1}{2}}\mathbf{K}^* & (\mathbf{I}_n - \mathbf{K}^*\mathbf{K})^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

gdzie $\mathbf{K}$ jest pewną ściśle kontraktywną macierzą wymiaru $(m \times n)$ tj. $\mathbf{K}\mathbf{K}^* < \mathbf{I}_m$. Niech $\mathbf{B}$ i $\mathbf{A}$ będą wektorami wyjściowymi tego rotora tak jak to pokazano na rys.4.7. Wówczas spełnione są następujące własności

$$E\{\mathbf{B}\mathbf{B}^*\} = \mathbf{I}_m \quad \text{oraz} \quad E\{\mathbf{A}\mathbf{A}^*\} = \mathbf{I}_n \quad (4.59)$$

jak również

$$E\{\mathbf{B}\mathbf{H}^*\} = \mathbf{0}_{m \times n} \quad \text{oraz} \quad E\{\mathbf{A}\mathbf{G}^*\} = \mathbf{0}_{n \times m} \quad (4.60)$$



Rys. 4.7: Globalny rotor hiperboliczny.

Dowód:

Równania macierzowe rotora globalnego możemy zapisać następująco:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{A} \end{bmatrix} = \Theta \begin{bmatrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

gdzie Θ jest wyrażona w postaci (4.58).

Dla J -unitarnej macierzy Θ , tj. spełniającej warunek $\Theta \mathbf{J} \Theta^* = \mathbf{J}$, mamy

$$\Theta_{11} \Theta_{11}^* - \Theta_{12} \Theta_{12}^* = \mathbf{I}_m \quad (4.62)$$

$$\Theta_{11} \Theta_{21}^* - \Theta_{12} \Theta_{22}^* = \mathbf{0}_{mn} \quad (4.63)$$

$$\Theta_{22} \Theta_{22}^* - \Theta_{21} \Theta_{21}^* = \mathbf{I}_n \quad (4.64)$$

Korzystając z równania (4.61) wypiszemy zależności dla lewych stron równań (4.59), (4.60).

Mamy kolejno:

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{B}\mathbf{B}^*\} &= E\{(\Theta_{11}\mathbf{G} + \Theta_{12}\mathbf{H})(\Theta_{11}\mathbf{G} + \Theta_{12}\mathbf{H})^*\} = \\ &= E\{(\Theta_{11}\mathbf{G} + \Theta_{12}\mathbf{H})(\mathbf{G}^*\Theta_{11}^* + \mathbf{H}^*\Theta_{12}^*)\} = \\ &= \Theta_{11}E\{\mathbf{G}\mathbf{G}^*\}\Theta_{11}^* + \Theta_{11}E\{\mathbf{G}\mathbf{H}^*\}\Theta_{12}^* + \\ &+ \Theta_{12}E\{\mathbf{H}\mathbf{G}^*\}\Theta_{11}^* + \Theta_{12}E\{\mathbf{H}\mathbf{H}^*\}\Theta_{12}^* \end{aligned} \quad (4.65)$$

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{A}\mathbf{A}^*\} &= E\{(\Theta_{21}\mathbf{G} + \Theta_{22}\mathbf{H})(\Theta_{21}\mathbf{G} + \Theta_{22}\mathbf{H})^*\} = \\ &= E\{(\Theta_{21}\mathbf{G} + \Theta_{22}\mathbf{H})(\mathbf{G}^*\Theta_{21}^* + \mathbf{H}^*\Theta_{22}^*)\} = \\ &= \Theta_{21}E\{\mathbf{G}\mathbf{G}^*\}\Theta_{21}^* + \Theta_{21}E\{\mathbf{G}\mathbf{H}^*\}\Theta_{22}^* + \\ &+ \Theta_{22}E\{\mathbf{H}\mathbf{G}^*\}\Theta_{21}^* + \Theta_{22}E\{\mathbf{H}\mathbf{H}^*\}\Theta_{22}^* \end{aligned} \quad (4.66)$$

oraz

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{B}\mathbf{H}^*\} &= E\{\Theta_{11}\mathbf{G} + \Theta_{12}\mathbf{H}\}\mathbf{H}^* = \\ &= \Theta_{11}E\{\mathbf{G}\mathbf{H}^*\} + \Theta_{12}E\{\mathbf{H}\mathbf{H}^*\} \end{aligned} \quad (4.67)$$

¹ Współczynnik ten można interpretować jako uogólniony parametr Schura. Szerszą interpretację podamy w dowodzie twierdzenia 4.2.

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{AG}^*\} &= E\{\Theta_{21}\mathbf{G} + \Theta_{22}\mathbf{H}\}\mathbf{G}^* = \\ &= \Theta_{21}E\{\mathbf{GG}^*\} + \Theta_{22}E\{\mathbf{HG}^*\} \end{aligned} \quad (4.68)$$

Podstawiając w powyższych czterech równaniach $\mathbf{K} = -E\{\mathbf{GH}^*\}$ i korzystając z (4.57) otrzymamy odpowiednio

$$E\{\mathbf{BB}^*\} = \Theta_{11}\Theta_{11}^* - \Theta_{11}\mathbf{K}\Theta_{12}^* - \Theta_{12}\mathbf{K}^*\Theta_{11}^* + \Theta_{12}\Theta_{12}^* \quad (4.69)$$

$$E\{\mathbf{AA}^*\} = \Theta_{21}\Theta_{21}^* - \Theta_{21}\mathbf{K}\Theta_{22}^* - \Theta_{22}\mathbf{K}^*\Theta_{21}^* + \Theta_{22}\Theta_{22}^* \quad (4.70)$$

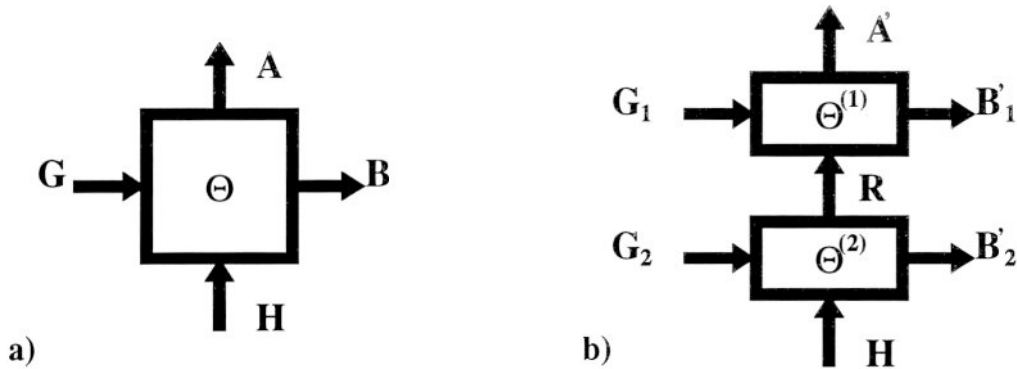
oraz

$$E\{\mathbf{BH}^*\} = -\Theta_{11}\mathbf{K} + \Theta_{12} \quad (4.71)$$

$$E\{\mathbf{AG}^*\} = \Theta_{21} - \Theta_{22}\mathbf{K}^* \quad (4.72)$$

Podstawiając w powyższych równaniach wyrażenia dla odpowiednich elementów macierzy Θ , określonych przez (4.58), otrzymamy warunki (4.59) i (4.60), co kończy dowód. $\square$

Opisany tu przypadek ortogonalizacji globalnej dwu baz ortonormalnych nie jest jedyny. Można również ortogonalizować rekurencyjnie poszczególne elementy obu baz (błędy estymacji projekcji ortogonalnych poszczególnych zmiennych losowych), co prowadzi do ortogonalizacji globalnej w postaci macierzy odpowiednio połączonych rotorów hiperbolicznych.



Rys. 4.8: Rotor globalny: a) w całości, b) podzielony na dwa mniejsze rotory.

Aby to pokazać, rozważmy globalny rotor hiperboliczny (rys.4.8a) wymiaru $m \times n$, przy czym niech $m = 2p$ a $n = 2q$, gdzie p i q są dowolnymi liczbami naturalnymi. Zgodnie z (4.61) i (4.58) równania tego rotora wyglądają następująco

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{A} \end{bmatrix} = \Theta \begin{bmatrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix} \quad (4.73)$$

gdzie

$$\Theta = \Theta(\mathbf{K}) = \begin{bmatrix} (\mathbf{I}_m - \mathbf{K}\mathbf{K}^*)^{-\frac{1}{2}} & (\mathbf{I}_m - \mathbf{K}\mathbf{K}^*)^{-\frac{1}{2}}\mathbf{K} \\ (\mathbf{I}_n - \mathbf{K}^*\mathbf{K})^{-\frac{1}{2}}\mathbf{K}^* & (\mathbf{I}_n - \mathbf{K}^*\mathbf{K})^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \quad (4.74)$$

a $\mathbf{K} = -E\{\mathbf{GH}^*\}$. Dokonując podziału bazy $\mathbf{G} = [\mathbf{G}_1 \mathbf{G}_2]$, gdzie $\mathbf{G}_1 \cap \mathbf{G}_2 = \emptyset$, tak jak to pokazano na rys.4.8b) otrzymamy dwa równania opisujące poszczególne rotory

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}'_1 \\ \mathbf{A} \end{bmatrix} = \Theta^1 \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 \\ \mathbf{R} \end{bmatrix} \quad (4.75)$$

oraz

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}'_2 \\ \mathbf{R} \end{bmatrix} = \Theta^2 \begin{bmatrix} \mathbf{G}_2 \\ \mathbf{H} \end{bmatrix} \quad (4.76)$$

które łącznie przybierają postać

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}' \\ \mathbf{A}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}'_1 \\ \mathbf{B}'_2 \\ \mathbf{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Theta_{11}^1 & \Theta_{12}^1 \Theta_{21}^2 & \Theta_{12}^1 \Theta_{22}^2 \\ 0 & \Theta_{11}^2 & \Theta_{12}^2 \\ \Theta_{21}^1 & \Theta_{22}^1 \Theta_{21}^2 & \Theta_{22}^1 \Theta_{22}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 \\ \mathbf{G}_2 \\ \mathbf{H} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Theta'_{11} & \Theta'_{12} \\ \Theta'_{21} & \Theta'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix} \quad (4.77)$$

gdzie $\mathbf{B}' = \text{col}[\mathbf{B}'_1 \mathbf{B}'_2]$. Zauważmy, że w równaniu (4.58) opisującym rotor globalny z rys.4.8a, macierz $\Theta_{11} = (\mathbf{I}_m - \mathbf{K}\mathbf{K}^*)^{-\frac{1}{2}}$ jest macierzą symetryczną. Natomiast w równaniu (4.77) macierz Θ'_{11} nie jest symetryczna; w szczególności $\mathbf{B}_2$ nie zależy od $\mathbf{G}_1$. Oznacza to, że $\mathbf{B} \neq \mathbf{B}'$. Istotnie, ponieważ $\mathbf{G}$ i $\mathbf{H}$ są liniowo niezależne, to $\mathbf{B}$ i $\mathbf{B}'$ będące kombinacjami liniowymi $\mathbf{G}$ i $\mathbf{H}$ są określone jednoznacznie i równe wtedy i tylko wtedy, gdy $\Theta_{11} = \Theta'_{11}$ a $\Theta_{12} = \Theta'_{12}$. Pokażemy jednak, że $\mathbf{B}'$ spełnia te same własności co $\mathbf{B}$, tj. $E\{\mathbf{B}'\mathbf{B}'^*\} = \mathbf{I}_m$ oraz $E\{\mathbf{B}'\mathbf{H}^*\} = \mathbf{0}_{m \times n}$.

Pokażemy najpierw, że

$$E\{\mathbf{B}'\mathbf{B}'^*\} = \begin{bmatrix} E\{\mathbf{B}'_1\mathbf{B}'_1^*\} & E\{\mathbf{B}'_1\mathbf{B}'_2^*\} \\ E\{\mathbf{B}'_2\mathbf{B}'_1^*\} & E\{\mathbf{B}'_2\mathbf{B}'_2^*\} \end{bmatrix} = \mathbf{I}_m \quad (4.78)$$

Zgodnie z równaniem (4.77)

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{B}'_1\mathbf{B}'_1^*\} &= E\{(\Theta_{11}^1 \mathbf{G}_1 + \Theta_{12}^1 \Theta_{21}^2 \mathbf{G}_2 + \Theta_{12}^1 \Theta_{22}^2 \mathbf{H}) \cdot \\ &\quad (\Theta_{11}^1 \mathbf{G}_1 + \Theta_{12}^1 \Theta_{21}^2 \mathbf{G}_2 + \Theta_{12}^1 \Theta_{22}^2 \mathbf{H})^*\} = \\ &= E\{\Theta_{11}^1 \mathbf{G}_1 \mathbf{G}_1^* \Theta_{11}^{1*}\} + E\{\Theta_{11}^1 \mathbf{G}_1 \mathbf{G}_2^* \Theta_{21}^{2*} \Theta_{12}^{1*}\} + \\ &+ E\{\Theta_{11}^1 \mathbf{G}_1 \mathbf{H}^* \Theta_{22}^{2*} \Theta_{12}^{1*}\} + E\{\Theta_{12}^1 \Theta_{21}^2 \mathbf{G}_2 \mathbf{G}_1^* \Theta_{11}^{1*}\} + \\ &+ E\{\Theta_{12}^1 \Theta_{21}^2 \mathbf{G}_2 \mathbf{G}_2^* \Theta_{21}^{2*} \Theta_{12}^{1*}\} + E\{\Theta_{12}^1 \Theta_{21}^2 \mathbf{G}_2 \mathbf{H}^* \Theta_{22}^{2*} \Theta_{12}^{1*}\} + \\ &+ E\{\Theta_{12}^1 \Theta_{22}^2 \mathbf{H} \mathbf{G}_1^* \Theta_{11}^{1*}\} + E\{\Theta_{12}^1 \Theta_{22}^2 \mathbf{H} \mathbf{G}_2^* \Theta_{21}^{2*} \Theta_{12}^{1*}\} + E\{\Theta_{12}^1 \Theta_{22}^2 \mathbf{H} \mathbf{H}^* \Theta_{22}^{2*} \Theta_{12}^{1*}\} \end{aligned} \quad (4.79)$$

Zauważmy, że ze względu na ortonormalność $\mathbf{G}$ mamy $E\{\mathbf{G}_1 \mathbf{G}_1^*\} = \mathbf{I}_p$, $E\{\mathbf{G}_1 \mathbf{G}_2^*\} = \mathbf{0}_{p \times p}$. Biorąc to pod uwagę, przepiszemy powyższe równanie w postaci

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{B}'_1\mathbf{B}'_1^*\} &= \Theta_{11}^1 \Theta_{11}^{1*} - \Theta_{11}^1 \mathbf{K}_1^{(G)} \Theta_{22}^{2*} \Theta_{12}^{1*} + \Theta_{12}^1 \Theta_{21}^2 \Theta_{21}^{2*} \Theta_{12}^{1*} + \\ &- \Theta_{12}^1 \Theta_{21}^2 \mathbf{K}_2^{(G)} \Theta_{22}^{2*} \Theta_{12}^{1*} - \Theta_{12}^1 \Theta_{22}^2 \mathbf{K}_1^{(G^*)} \Theta_{11}^{1*} + \\ &- \Theta_{12}^1 \Theta_{22}^2 \mathbf{K}_2^{(G^*)} \Theta_{21}^{2*} \Theta_{12}^{1*} + \Theta_{12}^1 \Theta_{22}^2 \Theta_{22}^{2*} \Theta_{12}^{1*} \end{aligned} \quad (4.80)$$

gdzie

$$\mathbf{K}_1^{(G)} = \mathbf{K}_1 (\Theta_{22}^2)^{-*} = -E\{\mathbf{G}_1 \mathbf{H}^*\} \quad (4.81)$$

a

$$\mathbf{K}_2^{(G)} = \mathbf{K}_2 = -E\{\mathbf{G}_1 \mathbf{H}^*\}. \quad (4.82)$$

Zapis $'^*$ oznacza operację wyznaczania macierzy odwrotnej i transpozycji hermitowskiej. Przekształcając powyższe równanie do prostszej postaci i podstawiając odpowiednie wyrażenia z równania (4.74), dostaniemy

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{B}'_1\mathbf{B}'_1^*\} &= \Theta_{11}^1 \Theta_{11}^{1*} - \Theta_{12}^1 \Theta_{12}^{1*} = \\ &= (\mathbf{I}_p - \mathbf{K}_1 \mathbf{K}_1^*)^{-1} - (\mathbf{I}_p - \mathbf{K}_1 \mathbf{K}_1^*)^{-1} \mathbf{K}_1 \mathbf{K}_1^* = \\ &= (\mathbf{I}_p - \mathbf{K}_1 \mathbf{K}_1^*)^{-1} (\mathbf{I}_p - \mathbf{K}_1 \mathbf{K}_1^*) = \mathbf{I}_p \end{aligned} \quad (4.83)$$

Wykonując podobne przekształcenia dla $\mathbf{B}_2$ otrzymamy $E\{\mathbf{B}'_2\mathbf{B}_2^*\} = \mathbf{I}_p$. Z kolei

$$E\{\mathbf{B}'_2\mathbf{B}_2^*\} = E\{(\Theta_{11}^1\mathbf{G}_1 + \Theta_{12}^1\Theta_{21}^2\mathbf{G}_2 + \Theta_{12}^1\Theta_{22}^2\mathbf{H})(\Theta_{11}^2\mathbf{G}_2 + \Theta_{12}^2\mathbf{H})^*\} \quad (4.84)$$

Po kilku przekształceniach otrzymamy

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{B}'_2\mathbf{B}_2^*\} &= \Theta_{12}^1[\Theta_{22}^2 - (\Theta_{22}^2)^{-*} - \Theta_{21}^2\mathbf{K}_2]\Theta_{12}^{2*} = \\ &= \Theta_{12}^1[(\mathbf{I}_n - \mathbf{K}_2^*\mathbf{K}_2)^{-\frac{1}{2}} - (\mathbf{I}_n - \mathbf{K}_2^*\mathbf{K}_2)^{\frac{1}{2}*} - (\mathbf{I}_n - \mathbf{K}_2^*\mathbf{K}_2)^{-\frac{1}{2}}\mathbf{K}_2^*\mathbf{K}_2]\Theta_{12}^{2*} = \\ &= \Theta_{12}^1[(\mathbf{I}_n - \mathbf{K}_2^*\mathbf{K}_2)^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{I}_n - \mathbf{K}_2^*\mathbf{K}_2) - (\mathbf{I}_n - \mathbf{K}_2^*\mathbf{K}_2)^{\frac{1}{2}*}]\Theta_{12}^{2*} = \\ &= \Theta_{12}^1[(\mathbf{I}_n - \mathbf{K}_2^*\mathbf{K}_2)^{\frac{1}{2}} - (\mathbf{I}_n - \mathbf{K}_2^*\mathbf{K}_2)^{\frac{1}{2}*}]\Theta_{12}^{2*} = \mathbf{0}_{p \times p} \end{aligned} \quad (4.85)$$

Pozostaje nam pokazanie, że $\mathbf{B}'_1 \perp \mathbf{H}$ i $\mathbf{B}'_2 \perp \mathbf{H}$. Ta ostatnia własność jest oczywista, ponieważ wynika bezpośrednio z własności rotora globalnego przedstawionych wcześniej. Sprawdźmy, że $\mathbf{B}'_1 \perp \mathbf{H}$:

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{B}'_1\mathbf{H}^*\} &= E\{\Theta_{11}^1\mathbf{G}_1 + \Theta_{12}^1\Theta_{21}^2\mathbf{G}_2 + \Theta_{12}^1\Theta_{22}^2\mathbf{H}\mathbf{H}^*\} = \\ &= \Theta_{21}^1(\Theta_{22}^2 - \Theta_{21}^2\mathbf{K}_2 - (\Theta_{22}^2)^{-*}) = \\ &= \Theta_{21}^1((\mathbf{I}_n - \mathbf{K}_2^*\mathbf{K}_2)^{-\frac{1}{2}} - (\mathbf{I}_n - \mathbf{K}_2^*\mathbf{K}_2)^{-\frac{1}{2}}\mathbf{K}_2^*\mathbf{K}_2 - (\mathbf{I}_n - \mathbf{K}_2^*\mathbf{K}_2)^{\frac{1}{2}*}) = \\ &= \Theta_{21}^1((\mathbf{I}_n - \mathbf{K}_2^*\mathbf{K}_2)^{-\frac{1}{2}} - (\mathbf{I}_n - \mathbf{K}_2^*\mathbf{K}_2) - (\mathbf{I}_n - \mathbf{K}_2^*\mathbf{K}_2)^{\frac{1}{2}*}) = \mathbf{0}_{p \times p} \end{aligned} \quad (4.86)$$

Pokazaliśmy, że podział rotora globalnego na dwa mniejsze rotory zachowuje własność ortogonalności odpowiednich wektorów w taki sposób, że $\mathbf{B}' \triangleq \text{col}[\mathbf{B}'_1, \mathbf{B}'_2]$ jest bazą ortonormalną tj. $E\{\mathbf{B}'\mathbf{B}'^*\} = \mathbf{I}_m$ oraz $\mathbf{B}'$ jest ortogonalne do $\mathbf{H}$, tj. $E\{\mathbf{B}'\mathbf{H}^*\} = \mathbf{0}_{m \times n}$. Pokazaliśmy tutaj tylko podział ze względu na bazę $\mathbf{G}$, ale jest jasne, że podziału takiego można również dokonać ze względu na bazę $\mathbf{H}$. Prawie każdy podział generuje inne rozwiązanie (wyjątek stanowią tu podziały rotora, którego jeden z wymiarów wynosi 1). Każde rozwiązanie ma inną reprezentację w postaci zbioru uogólnionych współczynników Schura (4.54) o różnych rozmiarach i wartościach. Konsekwentnie, każde rozwiązanie generuje inne wektory wyjściowe. Kolejne podziały prowadzą, w końcu, do rotora globalnego wymiaru $m \times n$ w postaci macierzy odpowiednio połączonych rotorów wymiaru 1×1 , tak jak to pokazano na rys.4.9.

Pokażemy teraz sposób ortogonalizacji globalnej, opartej na lokalnych rotacjach. Dla ułatwienia posłużymy się rys.4.9.

Rozpatrzmy jako pierwszą parę (G_m, H_1) .

Błąd estymacji wartości G_m oznaczmy jako

$$b_{m1} = G_m - P(\text{span}\{H_1\})G_m \quad (4.87)$$

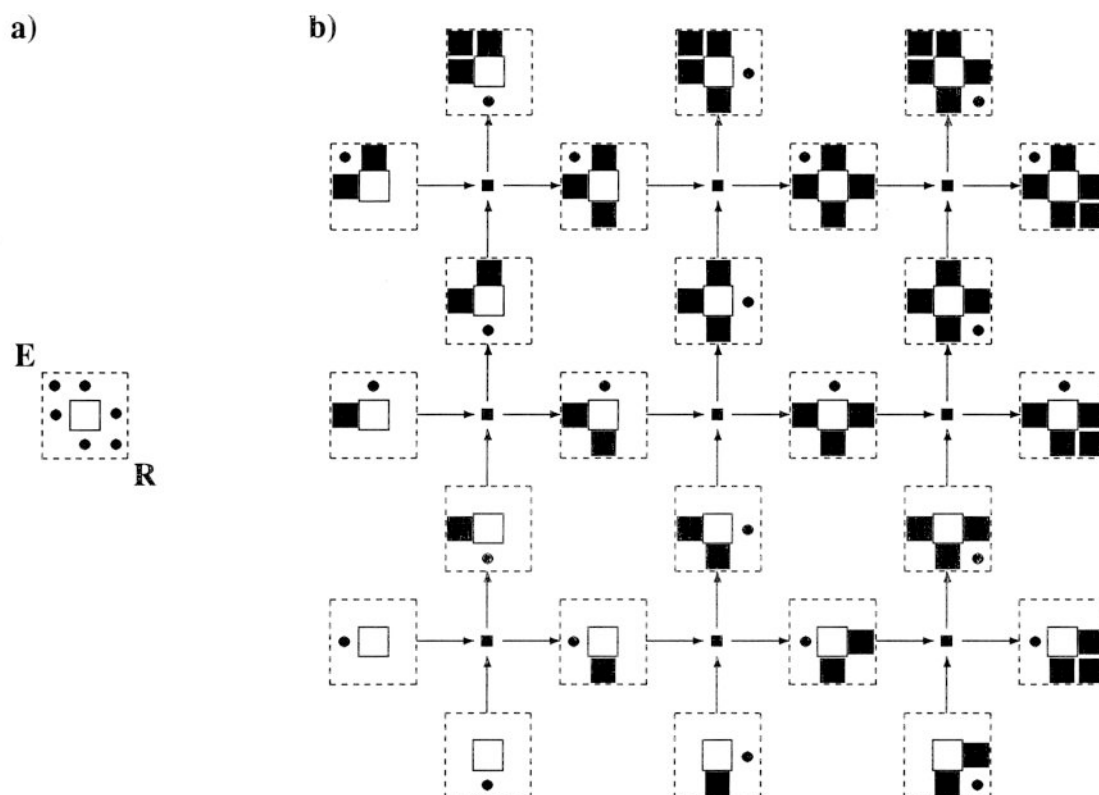
a błąd estymacji H_1 jako

$$a_{m1} = H_1 - P(\text{span}\{G_m\})H_1 \quad (4.88)$$

pamiętając, że wielkości oznaczone małą literą oznaczają nieunormowane wielkości oznaczone dużą literą. Powyższe równania po kilku prostych przekształceniach prowadzą do równań rotora opisanych równaniem macierzowym (3.36). W tym wypadku

$$\begin{bmatrix} B_{m1} \\ A_{m1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 - \rho_{m1}^2)^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & (1 - \rho_{m1}^2)^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \rho_{m1} \\ \rho_{m1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_m \\ H_1 \end{bmatrix} \quad (4.89)$$

gdzie $\rho_{m1} = -E\{G_m H_1^*\}$.



Rys. 4.10: Podwyższanie rzędu globalnych błędów w przód i w tył w postaci macierzy pojedynczych rotorów hiperbolicznych.

postaci macierzy uogólnionego współczynnika Schura wygląda następująco:

0.1673	-0.1056	-0.1136	-0.0151	-0.1555	0.1701
-0.0497	-0.0169	0.1192	-0.0276	-0.0099	0.0335
0.1241	-0.0613	0.2339	-0.0412	0.0750	0.0077
-0.3384	0.0450	0.0477	-0.2855	-0.3957	-0.2074

Błędy wyjściowe w przód i w tył oznaczmy odpowiednio jako B i A . W drugim przypadku używamy rotora globalnego w postaci macierzy odpowiednio połączonych rotorów (rys.4.9). W wyniku otrzymamy poniższą macierz współczynników Schura,

0.1796	-0.1121	-0.1174	0.0078	-0.1429	0.1830
-0.0533	-0.0157	0.1224	-0.0375	-0.0254	0.0243
0.1319	-0.0641	0.2343	-0.0331	0.0996	0.0263
-0.3384	0.0479	0.0507	-0.3041	-0.4425	-0.2586

która stanowi reprezentację tego rotora. Błędy wyjściowe oznaczmy odpowiednio przez B' i A' . Różnica obu powyższych macierzy wynosi

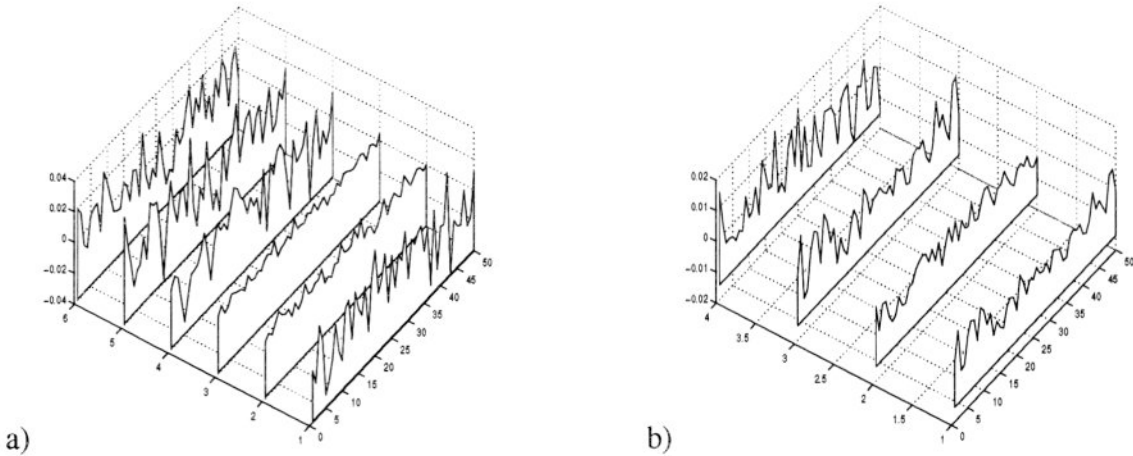
-0.0123	0.0064	0.0039	-0.0229	-0.0125	-0.0129
0.0036	-0.0012	-0.0032	0.0099	0.0155	0.0092
-0.0078	0.0028	-0.0004	-0.0081	-0.0246	-0.0186
0	-0.0028	-0.0030	0.0186	0.0468	0.0512

W obu przypadkach wektory wyjściowe stanowią zbiory ON. Różnicę wektorów A i A' (reprezentacją zmiennej losowej jest tu wektor liczb) pokazano na rys.4.11a), natomiast na rys.4.11b) pokazano różnicę wektorów B i B' .

Jak widać, reprezentacje te są różne, chociaż zarówno A jak i A' są ortonormalne tj. zarówno AA^* jak i $A'A'^*$ wynosi

1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	1.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.0000

Wektory wyjściowe w przód B i B' również są ON. Pokazane przykłady reprezentują przypadki skrajne, "pomiędzy" którymi istnieje wiele innych rozwiązań.



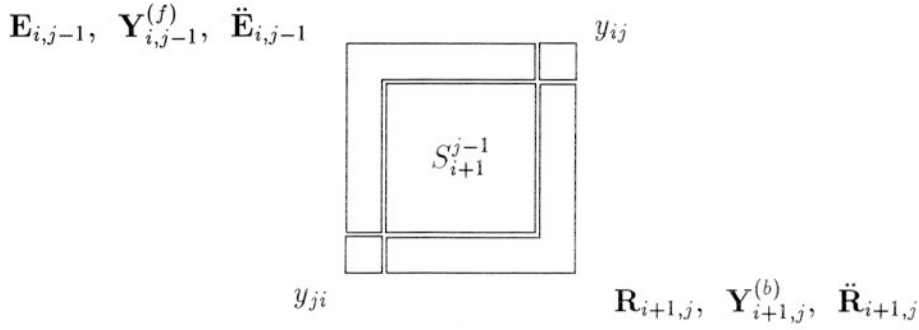
Rys. 4.11: Różnice w reprezentacji wektorów wyjściowych globalnego rotora hiperbolicznego o wymiarach 4×6 , zrealizowanego na dwa różne sposoby: a) różnice reprezentacji wektorów A i A' , b) różnice reprezentacji wektorów B i B' . Każda zmienna losowa jest tu symulowana w postaci wektora liczb pseudolosowych o długości 50.

Ze względu na zachodzące warunki ortogonalności odpowiednich baz, możemy bazy B i A traktować jako błędy wyższego rzędu, jeśli bazy G i H utożsamimy z błędami niższego rzędu.

4.5 Rekurencyjne wyznaczanie błędów prognozy 2D

Omówimy teraz proponowany algorytm parametryzacji (ortogonalizacji) pola 2D. Na rys.4.12 wyjaśniamy graficznie interpretację niektórych wielkości używanych w dalszych rozważaniach.

Przez $Y_{ij}^{(n)} \triangleq \text{col}[y_{ij}, y_{ji}]$ będziemy rozumieć dwuelementową rodzinę elementów narożnych, przy czym wyjaśnimy, że elementy te są narożne tylko w jednym, konkretnym kroku algorytmu ortogonalizacji. Potem stają się elementami odpowiednich błędów globalnych w przód oraz w tył. Przez $Y_{i,j-1}^{(f)}$ ($Y_{i+1,j}^{(b)}$) będziemy rozumieć rodzinę elementów pola, dla której w danym kroku procedury ortogonalizacji znamy odpowiednią rodzinę błędów w przód $E_{i,j-1}$ (w tył $R_{i+1,j}$).



Rys. 4.12: Obszary pola zajmowane przez odpowiednie rodziny błędów i wielkości prognozowane.

Założmy, że wykonaliśmy pewną liczbę kroków procedury parametryzującej (ortogonalizującej) pewien fragment pola losowego 2D. Dla ustalenia uwagi założmy, że $Y_i^j = \{y_{mn}\}_{m=i,n=i}^{m=j,n=j}$ jest rozważanym fragmentem pola losowego Y i założmy, że do ortogonalizacji całego fragmentu pola pozostał nam do wykonania ostatni krok, którego wykonanie schematycznie pokazano na rys.4.13.

Innymi słowy dysponujemy błędami $E_{i,j-1}$, $R_{i+1,j}$, przestrzenią S_{i+1}^{j-1} , do której obie rodziny są ortogonalne, oraz dwoma elementami narożnymi² $U_{i,j}$ i $U_{j,i}$ pola, tworzącymi rodzinę $U_{ij} \triangleq \text{col}[U_{ij}, U_{ji}]$, która jest tworzona w wyniku ortogonalizacji rodziny $Y_{ij}^{(n)}$ do podprzestrzeni S_{i+1}^{j-1} .

Kolejne etapy ortogonalizacji w rozważanym kroku przedstawiają się następująco (rys.4.13):

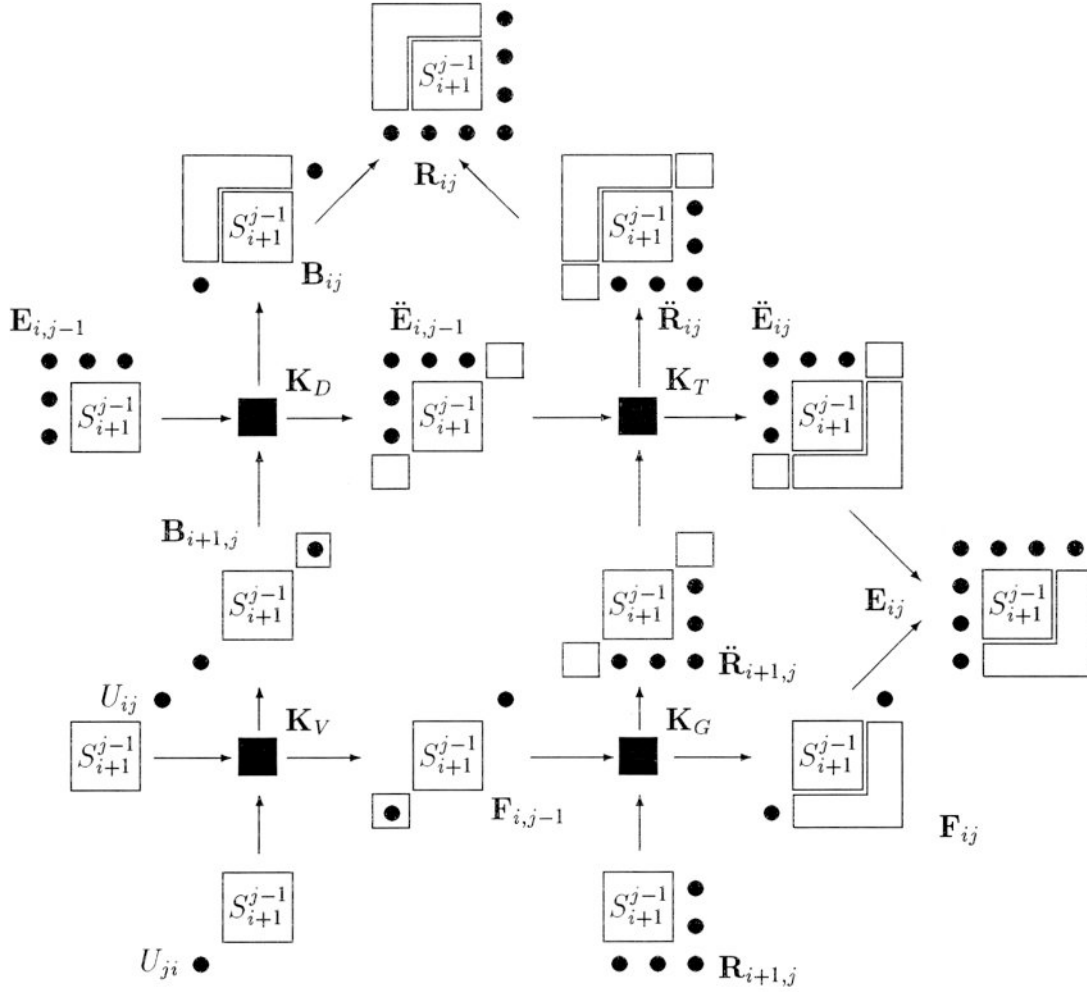
1. Unormowane elementy U_{ij} i U_{ji} ortogonalizujemy ze sobą w przód i w tył. W wyniku otrzymamy wektory $F_{i,j-1}$ oraz $B_{i+1,j}$.
2. Ortogonalizujemy elementy wektora $B_{i+1,j}$ w tył z elementami wektora $E_{i,j-1}$, otrzymując w wyniku $B_{i,j}$ i $\ddot{E}_{i,j-1}$, gdzie dwie kropki nad E oznaczają ortogonalność tego elementu do dwóch elementów narożnych.
3. Ortogonalizujemy elementy wektora $F_{i,j-1}$ w przód z elementami wektora $R_{i+1,j}$, otrzymując w wyniku $F_{i,j}$ i $\ddot{R}_{i+1,j}$.
4. Ortogonalizujemy ze sobą wektory $\ddot{E}_{i,j-1}$ i $\ddot{R}_{i+1,j}$, W wyniku otrzymamy wektory $\ddot{E}_{i,j}$ i $\ddot{R}_{i,j}$.

Ostatecznie tworzymy wektory $E_{i,j}$ oraz $R_{i,j}$ w następujący sposób:

$$E_{i,j} = \text{col}[\ddot{E}_{i,j}, F_{i,j}], \quad \text{ i } \quad R_{i,j} = \text{col}[B_{i,j}, \ddot{R}_{i,j}] \quad (4.90)$$

Pierwszym krokiem, jaki musimy wykonać, jest ortogonalizacja rodziny $Y_{ij}^{(n)}$ do podprzestrzeni S_{i+1}^{j-1} . Sposób w jaki zostanie ona wykonana jest do pewnego stopnia dowolny. Musi jednak gwarantować, że rodziny $E_{i,j-1}$ i $R_{i+1,j}$ będą w dalszym ciągu ortogonalne do podprzestrzeni S_{i+1}^{j-1} , ponieważ jest to założenie przedstawione w dalszej części pracy twierdzenia 4.2.

²Elementy te są narożne tylko w danym kroku.



Rys. 4.13: Podwyższanie rzędu błędów prognozy 2D (opis w tekście).

Przed omówieniem tej części algorytmu sformułujemy następujący lemat:

Lemat 4.1 O ortogonalnej dekompozycji przestrzeni estymacji.

Niech $\mathbf{R}_{i,i}, \mathbf{R}_{i,i+1}, \dots, \mathbf{R}_{i,j}$ będzie ciągiem rodzin błędów prognozy w tył, a $\mathbf{E}_{i,j}, \mathbf{E}_{i+1,j}, \dots, \mathbf{E}_{j,j}$ niech będzie ciągiem rodzin błędów prognozy w przód. Jeśli dla dowolnego $k = i+1, \dots, j$, błąd $\mathbf{R}_{i,k} \perp S_i^{k-1}$, to podprzestrzeń S_i^j można zdekomponować na sumę ortogonalną podprzestrzeni rozpiętych na rodzinach błędów w tył w postaci

$$S_i^j = \text{span}\{\mathbf{R}_{i,i}\} \oplus \text{span}\{\mathbf{R}_{i,i+1}\} \oplus \dots \oplus \text{span}\{\mathbf{R}_{i,j}\} \quad (4.91)$$

Podobnie, jeśli dla dowolnego $k = i, \dots, j-1$, błąd $\mathbf{E}_{k,j} \perp S_{k+1}^j$, to podprzestrzeń S_i^j można zdekomponować na sumę ortogonalną podprzestrzeni rozpiętych na rodzinach błędów w przód w postaci

$$S_i^j = \text{span}\{\mathbf{E}_{i,j}\} \oplus \text{span}\{\mathbf{E}_{i+1,j}\} \oplus \dots \oplus \text{span}\{\mathbf{E}_{j,j}\} \quad (4.92)$$

Dowód:

Zauważmy, że z jednej strony, rodzina błędów w tył $\mathbf{R}_{i,j}$ należy do podprzestrzeni S_i^j (co wynika z konstrukcji tejże rodziny), a z drugiej strony jest ona ortogonalna do podprzestrzeni S_i^{j-1} (z

założenia) tj. $\mathbf{R}_{i,j} \in S_i^j$ i $\mathbf{R}_{i,j} \perp S_i^{j-1}$. Stąd podprzestrzeń S_i^j możemy zdekomponować jako

$$S_i^j = S_i^{j-1} \oplus \text{span}\{\mathbf{R}_{i,j}\}.$$

Podobnie, rodzina błędów w tył $\mathbf{R}_{i,j-1} \in S_i^{j-1}$ a z drugiej strony $\mathbf{R}_{i,j-1} \perp S_i^{j-2}$ i analogicznie, podprzestrzeń S_i^{j-1} wyrażamy jako sumę ortogonalną dwu podprzestrzeni

$$S_i^{j-1} = S_i^{j-2} \oplus \text{span}\{\mathbf{R}_{i,j-1}\}.$$

Zauważmy, że skoro $\mathbf{R}_{i,j} \perp S_i^{j-1}$ a $\mathbf{R}_{i,j-1} \in S_i^{j-1}$, to oczywiście $\mathbf{R}_{i,j} \perp \mathbf{R}_{i,j-1}$. Ogólnie, dla $m \in \langle 0, j-i-1 \rangle$

$$S_i^{j-m} = S_i^{j-m-1} \oplus \text{span}\{\mathbf{R}_{i,j-m}\} \quad (4.93)$$

a wówczas podprzestrzeń S_i^j możemy zdekomponować na sumę ortogonalną podprzestrzeni rozpiętych na rodzinach błędów w tył jako

$$S_i^j = \bigoplus_{k=i}^{k=j} \text{span}\{\mathbf{R}_{i,k}\} \quad (4.94)$$

przy czym $\mathbf{R}_{i,i} = Y_{ii} = y_{ii} \|y_{ii}\|^{-1}$.

Analogiczne rozumowanie można przeprowadzić dla ciągu rodzin błędów w przód. Istotnie, z jednej strony rodzina błędów w przód $\mathbf{E}_{i,j}$ należy do podprzestrzeni S_i^j a z drugiej strony jest ona (na mocy założenia) ortogonalna do podprzestrzeni S_{i+1}^j tj. $\mathbf{E}_{i,j} \in S_i^j$ i $\mathbf{E}_{i,j} \perp S_{i+1}^j$. Stąd podprzestrzeń S_i^j możemy zdekomponować w postaci sumy ortogonalnej

$$S_i^j = S_{i+1}^j \oplus \text{span}\{\mathbf{E}_{i,j}\}.$$

Podobnie, rodzina błędów w przód $\mathbf{E}_{i+1,j} \in S_{i+1}^j$ a z drugiej strony $\mathbf{E}_{i+1,j} \perp S_{i+2}^j$ i analogicznie, podprzestrzeń S_{i+1}^j wyrażamy jako sumę ortogonalną dwu podprzestrzeni

$$S_{i+1}^j = S_{i+2}^j \oplus \text{span}\{\mathbf{E}_{i+1,j}\}.$$

Ponieważ $\mathbf{E}_{i,j} \perp S_{i+1}^j$ a $\mathbf{E}_{i+1,j} \in S_{i+1}^j$, to oczywiście $\mathbf{E}_{i,j} \perp \mathbf{E}_{i+1,j}$. Stąd przestrzeń S_i^j można wyrazić w postaci sumy ortogonalnej podprzestrzeni rozpiętych na rodzinach błędów w przód

$$S_i^j = \bigoplus_{k=i}^{k=j} \text{span}\{\mathbf{E}_{k,j}\} \quad (4.95)$$

przy czym $\mathbf{E}_{j,j} = Y_{jj} = y_{jj} \|y_{jj}\|^{-1}$.

□

Niech

$$\mathbf{u}_{ij} \triangleq \mathbf{Y}_{ij}^{(n)} - P(S_{i+1}^{j-1})\mathbf{Y}_{ij}^{(n)} \quad (4.96)$$

będzie rodziną błędów estymacji rodziny $\mathbf{Y}_{ij}^{(n)}$ w podprzestrzeni S_{i+1}^{j-1} .

Korzystając z lematu 4.1 przepisemy równanie (4.96) w postaci

$$\mathbf{u}_{ij} = \mathbf{Y}_{ij}^{(n)} - P(\bigoplus_{k=i+1}^{j-1} \text{span}\{\mathbf{R}_{i+1,k}\})\mathbf{Y}_{ij}^{(n)} \quad (4.97)$$

lub równoważnie

$$\mathbf{u}_{ij} = \mathbf{Y}_{ij}^{(n)} - \sum_{k=i+1}^{j-1} P(\text{span}\{\mathbf{R}_{i+1,k}\})\mathbf{Y}_{ij}^{(n)} \quad (4.98)$$

Oznaczmy przez $\check{Y}_{ij}^{(n),(k)}$ estymator rodziny $Y_{ij}^{(n)}$ w podprzestrzeni $\oplus_{l=i+1}^k \text{span}\{\mathbf{R}_{i+1,l}\}$. Wówczas stosowną rodzinę błędów estymacji zdefiniujemy jako

$$\mathbf{u}_{ij}^{(k)} = Y_{ij}^{(n)} - P(\oplus_{l=i+1}^k \text{span}\{\mathbf{R}_{i+1,l}\})Y_{ij}^{(n)} \quad (4.99)$$

lub równoważnie

$$\mathbf{u}_{ij}^{(k)} = Y_{ij}^{(n)} - \sum_{l=i+1}^k P(\text{span}\{\mathbf{R}_{i+1,l}\})Y_{ij}^{(n)} \quad (4.100)$$

W bloku (ij) sumowanie odbywa się do $(j-1)$, stąd

$$\mathbf{u}_{ij}^{(j-1)} = Y_{ij}^{(n)} - \sum_{l=i+1}^{j-1} P(\text{span}\{\mathbf{R}_{i+1,l}\})Y_{ij}^{(n)} \quad (4.101)$$

Projekcję ortogonalną $P(\text{span}\{\mathbf{R}_{i+1,l}\})Y_{ij}^{(n)}$ można wyrazić korzystając z przekształcenia $P(\text{span}\{\mathbf{R}_{i+1,l}\})Y_{ij}^{(n)} = E\{Y_{ij}^{(n)}\mathbf{R}_{i+1,l}^*\mathbf{R}_{i+1,l}\}$. Stosując powyższe przekształcenie do każdego składnika sumy w (4.101) otrzymamy

$$\mathbf{u}_{ij}^{(j-1)} = Y_{ij}^{(n)} - \sum_{l=i+1}^{j-1} E\{Y_{ij}^{(n)}\mathbf{R}_{i+1,l}^*\}\mathbf{R}_{i+1,l} \quad (4.102)$$

Podstawiając $\mathbf{R} = \text{col}[\mathbf{R}_{i+1,i+1}, \dots, \mathbf{R}_{i+1,j-1}]$ oraz $Y_{ij}^{(n)} = E\{Y_{ij}^{(n)}Y_{ij}^{(n)*}\}^{\frac{1}{2}}Y_{ij}^{(n)}$ otrzymamy

$$\mathbf{u}_{ij}^{(j-1)} = E\{Y_{ij}^{(n)}Y_{ij}^{(n)*}\}^{\frac{1}{2}}(Y_{ij}^{(n)} - E\{Y_{ij}^{(n)}\mathbf{R}^*\}\mathbf{R}) \quad (4.103)$$

Ponieważ $Y_{ij}^{(n)}$ jest rodziną elementów (w ogólnym przypadku) nieortogonalnych, to elementy rodziny $\mathbf{u}_{ij}^{(j-1)}$ także nie są do siebie ortogonalne, chociaż są one ortogonalne do wektora $\mathbf{R}$ rozpinającego podprzestrzeń S_{i+1}^{j-1} . Łatwo sprawdzić, że jeśli $\mathbf{R}$ jest zbiorem ON, to

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{u}_{ij}\mathbf{R}^*\} &= E\{(Y_{ij}^{(n)} - E\{Y_{ij}^{(n)}\mathbf{R}^*\}\mathbf{R})\mathbf{R}^*\} \\ &= E\{Y_{ij}^{(n)}\mathbf{R}^*\} - E\{Y_{ij}^{(n)}\mathbf{R}^*\}E\{\mathbf{R}\mathbf{R}^*\} = \mathbf{0}_{2 \times \dim(\text{span}\{\mathbf{R}\})} \end{aligned} \quad (4.104)$$

Po unormowaniu elementów $\mathbf{u}_{ij}^{(j-1)}$ otrzymamy rodzinę $\mathbf{U}_{ij}^{(j-1)}$ taką, że $\|\mathbf{U}_{ij}^{(j-1)}(k)\| = 1$ dla $k = 1, 2$. Górny indeks w opisie rodziny $\mathbf{U}_{ij}^{(j-1)}$ był nam potrzebny tylko do pokazania schematu ortogonalizacji, dlatego w dalszej części pracy będziemy go opuszczać rozumiejąc, że $\mathbf{U}_{ij} = \mathbf{U}_{ij}^{(j-1)}$.

Rekurencyjne podwyższanie rzędu błędu prognozy umożliwia poniższe twierdzenie stanowiące uogólnienie na przypadek 2D twierdzenia 3.1.

Ponieważ w twierdzeniu tym mówimy, iż wektory unormowanych błędów podwyższonego rzędu (tj. rzędu (ij)) można wyrazić poprzez wektory unormowanych błędów niższego rzędu (ściślej: rzędów $(i, j-1)$ oraz $(i+1, j)$), to w istocie chcemy pokazać, że powyższe zależności rekurencyjne można zdekomponować na 4 globalne rotacje hiperboliczne reprezentowane w postaci macierzy $\mathbf{T}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{G}$ i $\mathbf{V}$ i stanowiące uogólniony przypadek elementarnych rotacji hiperbolicznych opisanych w tw.3.1.

Twierdzenie 4.2 O podwyższaniu rzędu estymatora prognozy 2D.

Niech $\mathbf{E}_{i,j-1}$ oraz $\mathbf{R}_{i+1,j}$ będą rodzinami błędów odpowiednio w przód i w tył rzędu $(j-i-1)$ wektorów $\mathbf{Y}_{i,j-1}^{(f)}$ i $\mathbf{Y}_{i+1,j}^{(b)}$ oraz niech będzie dana dwuelementowa rodzina błędów $\mathbf{U}_{i,j}$ wektora $\mathbf{Y}_{ij}^{(n)}$ elementów narożnych y_{ij} oraz y_{ji} . Niech $\mathbf{E}_{i,j-1}$ oraz $\mathbf{R}_{i+1,j}$ będą ortonormalne tj.

$$E\{\mathbf{E}_{i,j-1}\mathbf{E}_{i,j-1}^*\} = \mathbf{I}_p \quad \text{a} \quad E\{\mathbf{R}_{i+1,j}\mathbf{R}_{i+1,j}^*\} = \mathbf{I}_q, \quad (4.105)$$

gdzie $p = \dim(\text{span}\{\mathbf{E}_{i,j-1}\})$ a $q = \dim(\text{span}\{\mathbf{R}_{i+1,j}\})$ i niech elementy wektora $\mathbf{U}_{ij}$ będą unormowane.

Wówczas prawdziwe są następujące zależności rekurencyjne: (patrz schemat z rys. 4.13)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_{i,j} \\ \mathbf{F}_{i,j} \\ \mathbf{B}_{i,j} \\ \mathbf{R}_{i,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{\tilde{E}}_{i,j} \\ \mathbf{F}_{i,j} \\ \mathbf{B}_{i,j} \\ \mathbf{\tilde{R}}_{i,j} \end{bmatrix} = \Theta^{ij} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{i,j-1} \\ \mathbf{U}_{i,j} \\ \mathbf{U}_{i,j} \\ \mathbf{R}_{i+1,j} \end{bmatrix} \quad (4.106)$$

przy czym Θ^{ij} jest J -ortogonalną macierzą o wymiarach $(p+q+4 \times p+q+4)$, a jej elementy są wyrażone poprzez elementy J -ortogonalnych macierzy $\mathbf{T}^{(i,j)}$, $\mathbf{G}^{(i,j)}$, $\mathbf{D}^{(i,j)}$ i $\mathbf{V}^{(i,j)}$ w postaci

$$\Theta^{ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{11}^{ij} \mathbf{G}_{11}^{ij} & \mathbf{T}_{12}^{ij} \mathbf{D}_{21}^{ij} \mathbf{V}_{11}^{ij} + \mathbf{T}_{11}^{ij} \mathbf{G}_{12}^{ij} \mathbf{V}_{21}^{ij} & \mathbf{T}_{12}^{ij} \mathbf{D}_{21}^{ij} \mathbf{V}_{12}^{ij} + \mathbf{T}_{11}^{ij} \mathbf{G}_{12}^{ij} \mathbf{V}_{22}^{ij} & \mathbf{T}_{12}^{ij} \mathbf{D}_{22}^{ij} \\ 0 & \mathbf{D}_{11}^{ij} \mathbf{V}_{11}^{ij} & \mathbf{D}_{11}^{ij} \mathbf{V}_{12}^{ij} & \mathbf{D}_{12}^{ij} \\ \mathbf{G}_{21}^{ij} & \mathbf{G}_{22}^{ij} \mathbf{V}_{21}^{ij} & \mathbf{G}_{22}^{ij} \mathbf{V}_{22}^{ij} & 0 \\ \mathbf{T}_{21}^{ij} \mathbf{G}_{11}^{ij} & \mathbf{T}_{22}^{ij} \mathbf{D}_{21}^{ij} \mathbf{V}_{11}^{ij} + \mathbf{T}_{21}^{ij} \mathbf{G}_{12}^{ij} \mathbf{V}_{21}^{ij} & \mathbf{T}_{22}^{ij} \mathbf{D}_{21}^{ij} \mathbf{V}_{12}^{ij} + \mathbf{T}_{21}^{ij} \mathbf{G}_{12}^{ij} \mathbf{V}_{22}^{ij} & \mathbf{T}_{22}^{ij} \mathbf{D}_{22}^{ij} \end{bmatrix} \quad (4.107)$$

przy czym błędy $\mathbf{E}_{ij}$ i $\mathbf{R}_{ij}$ spełniają warunki

$$E\{\mathbf{E}_{ij} \mathbf{E}_{ij}^*\} = \mathbf{I}_{p+2} \quad i \quad E\{\mathbf{E}_{ij} \mathbf{R}_{i+1,j}^*\} = \mathbf{0}_{(p+2) \times (q)} \quad (4.108)$$

oraz

$$E\{\mathbf{R}_{ij} \mathbf{R}_{ij}^*\} = \mathbf{I}_{q+2} \quad i \quad E\{\mathbf{R}_{ij} \mathbf{E}_{i,j-1}^*\} = \mathbf{0}_{(q+2) \times (p)} \quad (4.109)$$

Dowód:

Opiszemy teraz kolejno 4 kroki; w każdym z nich wykonujemy jedną rotację hiperboliczną. W pierwszym kroku wykonujemy rotację skalarną a w trzech pozostałych rotacje globalne. Przyjmujemy tu zasadę, że wielkości nieunormowane oznaczamy małą literą a unormowane dużą.

Krok 1:

W tym kroku ortogonalizujemy bazę $\mathbf{U}_{i,j}$. Jest to wektor elementów y_{ij} i y_{ji} ortogonalnych do podprzestrzeni S_{i+1}^{j-1} , ale nieortogonalnych względem siebie. Ponieważ jest to przypadek rotacji skalarnej (dwie bazy jednoelementowe), którą szczegółowo opisywaliśmy w poprzednim rozdziale, to w tym miejscu podamy tylko wynik końcowy. Ortogonalizując bazę $\mathbf{U}_{i,j} = \text{col}[\mathbf{U}_{i,j}(1), \mathbf{U}_{i,j}(2)]$ otrzymujemy dwie bazy ortonormalne w przód

$$\mathbf{F}_{i,j-1} = \text{col}[\mathbf{F}_{i,j-1}(1), \mathbf{F}_{i,j-1}(2)]$$

i w tył

$$\mathbf{B}_{i+1,j} = \text{col}[\mathbf{B}_{i+1,j}(1), \mathbf{B}_{i+1,j}(2)]$$

takie, że $\mathbf{F}_{i,j-1}(2) = \mathbf{U}_{i,j}(2)$, $\mathbf{B}_{i+1,j}(1) = \mathbf{U}_{i,j}(1)$ oraz

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_{i,j-1}(1) \\ \mathbf{B}_{i+1,j}(2) \end{bmatrix} = \mathbf{V} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{i,j}(1) \\ \mathbf{U}_{i,j}(2) \end{bmatrix} \quad (4.110)$$

gdzie $\mathbf{V}$ jest macierzą J -ortogonalną pojedynczego rotora opisanego równaniem (3.37), przy czym współczynnik Schura, zdefiniowany jak w (3.40), w tym przypadku wynosi $\rho = -E\{\mathbf{U}_{i,j}(1) \mathbf{U}_{i,j}(2)\}$.

Krok 2:

W drugim kroku ortogonalizujemy ortonormalne bazy $\mathbf{B}_{i+1,j}$ i $\mathbf{E}_{i,j-1}$, które są ortogonalne do podprzestrzeni S_{i+1}^{j-1} .

Wykorzystując ideę rekurencyjnego podwyższania rzędu pokazaną na rys.4.5 i rozumianą jako podwyższenie wymiaru przestrzeni estymacji możemy napisać

$$\ddot{\mathbf{e}}_{i,j-1} = \mathbf{E}_{i,j-1} - P(\text{span}\{\mathbf{B}_{i+1,j}\})\mathbf{E}_{i,j-1} \quad (4.111)$$

Z drugiej strony mamy

$$\mathbf{b}_{ij} = \mathbf{B}_{i+1,j} - P(\text{span}\{\mathbf{E}_{i,j-1}\})\mathbf{B}_{i+1,j} \quad (4.112)$$

Korzystając teraz z równań (4.38) i (4.39) przepiszemy powyższe dwa równania jako

$$\ddot{\mathbf{e}}_{i,j-1} = \mathbf{E}_{i,j-1} - E\{\mathbf{E}_{i,j-1}\mathbf{B}_{i+1,j}^*\}\mathbf{B}_{i+1,j} \quad (4.113)$$

$$\mathbf{b}_{ij} = \mathbf{B}_{i+1,j} - E\{\mathbf{B}_{i+1,j}\mathbf{E}_{i,j-1}^*\}\mathbf{E}_{i,j-1} \quad (4.114)$$

Podstawiając $\ddot{\mathbf{e}}_{i,j-1} = E\{\ddot{\mathbf{e}}_{i,j-1}\ddot{\mathbf{e}}_{i,j-1}^*\}^{-\frac{1}{2}}\ddot{\mathbf{E}}_{i,j-1}$, $\mathbf{b}_{ij} = E\{\mathbf{b}_{ij}\mathbf{b}_{ij}^*\}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{B}_{ij}$, otrzymamy

$$\ddot{\mathbf{E}}_{i,j-1} = E\{\ddot{\mathbf{e}}_{i,j-1}\ddot{\mathbf{e}}_{i,j-1}^*\}^{-\frac{1}{2}}\left(\mathbf{E}_{i,j-1} - E\{\mathbf{E}_{i,j-1}\mathbf{B}_{i+1,j}^*\}\mathbf{B}_{i+1,j}\right) \quad (4.115)$$

i

$$\mathbf{B}_{ij} = E\{\mathbf{b}_{ij}\mathbf{b}_{ij}^*\}^{-\frac{1}{2}}\left(\mathbf{B}_{i+1,j} - E\{\mathbf{B}_{i+1,j}\mathbf{E}_{i,j-1}^*\}\mathbf{E}_{i,j-1}\right) \quad (4.116)$$

lub w postaci macierzowej jako

$$\begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{E}}_{i,j-1} \\ \mathbf{B}_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_e & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{C}_D \\ -\mathbf{C}_D^* & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{i,j-1} \\ \mathbf{B}_{i+1,j} \end{bmatrix} \quad (4.117)$$

gdzie $\mathbf{C}_e = E\{\ddot{\mathbf{e}}_{i,j-1}\ddot{\mathbf{e}}_{i,j-1}^*\}^{-\frac{1}{2}}$, $\mathbf{C}_b = E\{\mathbf{b}_{ij}\mathbf{b}_{ij}^*\}^{-\frac{1}{2}}$, a $\mathbf{C}_D$ zdefiniowane jako

$$\mathbf{C}_D \triangleq E\{\mathbf{E}_{i,j-1}\mathbf{B}_{i+1,j}^*\} \quad (4.118)$$

interpretujemy jako macierz korelacji wzajemnych elementów obu baz. Zauważmy, że z własności (4.32) wynika, że zarówno $\ddot{\mathbf{E}}_{i,j-1}$ jak i $\mathbf{E}_{i,j-1}$ są ortonormalne tj. $E\{\ddot{\mathbf{E}}_{i,j-1}\ddot{\mathbf{E}}_{i,j-1}^*\} = \mathbf{I}_p$ oraz $E\{\mathbf{E}_{i,j-1}\mathbf{E}_{i,j-1}^*\} = \mathbf{I}_p$. Również $\mathbf{B}_{i+1,j}$ i $\mathbf{B}_{ij}$ są ortonormalne tj. $E\{\mathbf{B}_{i+1,j}\mathbf{B}_{i+1,j}^*\} = \mathbf{I}_2$ oraz $E\{\mathbf{B}_{ij}\mathbf{B}_{ij}^*\} = \mathbf{I}_2$.

Korzystając z powyższego faktu i z równania (4.115) wyznaczmy macierz $\mathbf{C}_e$ w funkcji wielkości $\mathbf{E}_{i,j-1}$ i $\mathbf{B}_{i+1,j}$.

Zgodnie z (4.115) mamy

$$\begin{aligned} E\{\ddot{\mathbf{E}}_{i,j-1}\ddot{\mathbf{E}}_{i,j-1}^*\} &= E\{(\mathbf{C}_e\mathbf{E}_{i,j-1} - \mathbf{C}_e\mathbf{C}_D\mathbf{B}_{i+1,j})(\mathbf{C}_e\mathbf{E}_{i,j-1} - \mathbf{C}_e\mathbf{C}_D\mathbf{B}_{i+1,j})^*\} = (4.119) \\ &= E\{\mathbf{C}_e\mathbf{E}_{i,j-1}\mathbf{E}_{i,j-1}^*\mathbf{C}_e^* - E\{\mathbf{C}_e\mathbf{E}_{i,j-1}\mathbf{B}_{i+1,j}^*\mathbf{C}_D^*\mathbf{C}_e^*\} + \\ &\quad - E\{\mathbf{C}_e\mathbf{C}_D\mathbf{B}_{i+1,j}\mathbf{E}_{i,j-1}^*\mathbf{C}_e^*\} + E\{\mathbf{C}_e\mathbf{C}_D\mathbf{B}_{i+1,j}\mathbf{B}_{i+1,j}^*\mathbf{C}_D^*\mathbf{C}_e^*\} = \\ &= \mathbf{C}_e E\{\mathbf{E}_{i,j-1}\mathbf{E}_{i,j-1}^*\}\mathbf{C}_e^* - \mathbf{C}_e E\{\mathbf{E}_{i,j-1}\mathbf{B}_{i+1,j}^*\}\mathbf{C}_D^*\mathbf{C}_e^* + \\ &\quad - \mathbf{C}_e\mathbf{C}_D E\{\mathbf{B}_{i+1,j}\mathbf{E}_{i,j-1}^*\}\mathbf{C}_e^* + \mathbf{C}_e\mathbf{C}_D E\{\mathbf{B}_{i+1,j}\mathbf{B}_{i+1,j}^*\}\mathbf{C}_D^*\mathbf{C}_e^* \end{aligned}$$

Biorąc pod uwagę ortonormalność $\mathbf{E}_{i,j-1}$ i $\mathbf{B}_{i+1,j}$ oraz równanie (4.118) otrzymamy

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_p &= \mathbf{C}_e\mathbf{C}_e^* - \mathbf{C}_e\mathbf{C}_D\mathbf{C}_D^*\mathbf{C}_e^* - \mathbf{C}_e\mathbf{C}_D\mathbf{C}_D^*\mathbf{C}_e^* + \mathbf{C}_e\mathbf{C}_D\mathbf{C}_D^*\mathbf{C}_e^* = \\ &= \mathbf{C}_e\mathbf{C}_e^* - \mathbf{C}_e\mathbf{C}_D\mathbf{C}_D^*\mathbf{C}_e^* \end{aligned} \quad (4.120)$$

A stąd, korzystając z tego, że C_e jest macierzą symetryczną

$$C_e = (\mathbf{I}_p - \mathbf{C}_D \mathbf{C}_D^*)^{-\frac{1}{2}} \quad (4.121)$$

Podobne przekształcenia dla C_b dają

$$\mathbf{C}_b = (\mathbf{I}_2 - \mathbf{C}_D^* \mathbf{C}_D)^{-\frac{1}{2}} \quad (4.122)$$

Jeśli teraz – zgodnie z definicją (4.54) – podstawimy $\mathbf{K}_D \triangleq -\mathbf{C}_D$, to równanie macierzowe (4.117) wygląda następująco

$$\begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{E}}_{i,j-1} \\ \mathbf{B}_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{I}_p - \mathbf{K}_D \mathbf{K}_D^*)^{-\frac{1}{2}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (\mathbf{I}_q - \mathbf{K}_D^* \mathbf{K}_D)^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_p & \mathbf{K}_D \\ \mathbf{K}_D^* & \mathbf{I}_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{i,j-1} \\ \mathbf{B}_{i+1,j} \end{bmatrix} \quad (4.123)$$

gdzie $\mathbf{K}_D$ jest (uogólnionym) współczynnikiem odbicia opisującym powyższą rotację globalną i ma sens korelacji wzajemnych odpowiednich błędów niższego rzędu. Ortogonalność (ściślej: ortonormalność) błędów $\ddot{\mathbf{E}}_{i,j-1}$ oraz $\mathbf{B}_{i,j}$ pokazaliśmy w poprzednim podrozdziale, gdzie pokazaliśmy ortonormalność baz generowanych przez globalny rotor hiperboliczny. Wielkości $\ddot{\mathbf{E}}_{i,j-1}$ oraz $\mathbf{B}_{i,j}$ stanowią właśnie bazy generowane przez rotor opisany współczynnikiem $\mathbf{K}_D$. Ostatecznie podstawiamy

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} (\mathbf{I}_p - \mathbf{K}_D \mathbf{K}_D^*)^{-\frac{1}{2}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (\mathbf{I}_q - \mathbf{K}_D^* \mathbf{K}_D)^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_p & \mathbf{K}_D \\ \mathbf{K}_D^* & \mathbf{I}_q \end{bmatrix} \quad (4.124)$$

Krok 3:

W kroku trzecim ortogonalizujemy ortonormalne bazy $\mathbf{F}_{i,j-1}$ i $\mathbf{R}_{i+1,j}$, które stanowią błędy niższego rzędu. Wówczas błędy wyższego rzędu wyrażamy w postaci

$$\mathbf{f}_{ij} = \mathbf{F}_{i,j-1} - P(\text{span}\{\mathbf{R}_{i+1,j}\})\mathbf{F}_{i,j-1} \quad (4.125)$$

oraz

$$\ddot{\mathbf{r}}_{i+1,j} = \mathbf{R}_{i+1,j} - P(\text{span}\{\mathbf{F}_{i,j-1}\})\mathbf{R}_{i+1,j} \quad (4.126)$$

Powtarzając procedurę z poprzedniego kroku otrzymamy w rezultacie równania

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_{ij} \\ \ddot{\mathbf{R}}_{i+1,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{I}_q - \mathbf{K}_G \mathbf{K}_G^*)^{-\frac{1}{2}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (\mathbf{I}_p - \mathbf{K}_G^* \mathbf{K}_G)^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_q & \mathbf{K}_G \\ \mathbf{K}_G^* & \mathbf{I}_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{i,j-1} \\ \mathbf{R}_{i+1,j} \end{bmatrix} \quad (4.127)$$

Ostatecznie

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} (\mathbf{I}_q - \mathbf{K}_G \mathbf{K}_G^*)^{-\frac{1}{2}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (\mathbf{I}_p - \mathbf{K}_G^* \mathbf{K}_G)^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_q & \mathbf{K}_G \\ \mathbf{K}_G^* & \mathbf{I}_p \end{bmatrix} \quad (4.128)$$

gdzie $\mathbf{K}_G = -E\{\mathbf{F}_{i,j-1} \mathbf{R}_{i+1,j}^*\}$ jest uogólnionym współczynnikiem Schura opisującym rotację elementów $\mathbf{F}_{i,j-1}$ i $\mathbf{R}_{i+1,j}$.

Krok 4:

W ostatnim już kroku, czwartym, dokonujemy ortogonalizacji baz $\ddot{\mathbf{E}}_{i,j-1}$ i $\ddot{\mathbf{R}}_{i+1,j}$ otrzymanych w krokach 2 i 3, które tym razem stanowią błędy niższego rzędu

$$\ddot{\mathbf{e}}_{ij} = \ddot{\mathbf{E}}_{i,j-1} - P(\text{span}\{\ddot{\mathbf{R}}_{i+1,j}\})\ddot{\mathbf{E}}_{i,j-1} \quad (4.129)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_{ij} = \ddot{\mathbf{R}}_{i+1,j} - P(\text{span}\{\ddot{\mathbf{E}}_{i,j-1}\})\ddot{\mathbf{R}}_{i+1,j}. \quad (4.130)$$

Dalszy ciąg postępowania jest analogiczny jak w krokach 2 i 3, więc zapiszemy tylko końcowe rozwiązanie

$$\begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{E}}_{ij} \\ \ddot{\mathbf{R}}_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{I}_p - \mathbf{K}_T \mathbf{K}_T^*)^{-\frac{1}{2}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (\mathbf{I}_p - \mathbf{K}_T^* \mathbf{K}_T)^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_p & \mathbf{K}_T \\ \mathbf{K}_T^* & \mathbf{I}_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{E}}_{i,j-1} \\ \ddot{\mathbf{R}}_{i+1,j} \end{bmatrix} \quad (4.131)$$

gdzie $\mathbf{K}_T = -E\{\ddot{\mathbf{E}}_{i,j-1}\ddot{\mathbf{R}}_{i+1,j}^*\}$ jest uogólnionym współczynnikiem Schura opisującym rotacje elementów $\ddot{\mathbf{E}}_{i,j-1}$ i $\ddot{\mathbf{R}}_{i+1,j}$.

Ostatecznie

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} (\mathbf{I}_p - \mathbf{K}_T \mathbf{K}_T^*)^{-\frac{1}{2}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (\mathbf{I}_p - \mathbf{K}_T^* \mathbf{K}_T)^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_q & \mathbf{K}_T \\ \mathbf{K}_T^* & \mathbf{I}_p \end{bmatrix} \quad (4.132)$$

Pokażemy teraz, że macierze $\mathbf{T}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{G}$ i $\mathbf{V}$ tworzą macierz Θ zgodnie z równaniem (4.106).

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_{i,j} \\ \mathbf{F}_{i,j} \\ \mathbf{B}_{i,j} \\ \mathbf{R}_{i,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{E}}_{i,j} \\ \mathbf{F}_{i,j} \\ \mathbf{B}_{i,j} \\ \ddot{\mathbf{R}}_{i,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{11}^{ij} \mathbf{G}_{11}^{ij} & \mathbf{T}_{12}^{ij} \mathbf{D}_{21}^{ij} & \mathbf{T}_{11}^{ij} \mathbf{G}_{12}^{ij} & \mathbf{T}_{12}^{ij} \mathbf{D}_{22}^{ij} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{11}^{ij} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{12}^{ij} \\ \mathbf{G}_{21}^{ij} & \mathbf{0} & \mathbf{G}_{22}^{ij} & \mathbf{0} \\ \mathbf{T}_{21}^{ij} \mathbf{G}_{11}^{ij} & \mathbf{T}_{22}^{ij} \mathbf{D}_{21}^{ij} & \mathbf{T}_{21}^{ij} \mathbf{G}_{12}^{ij} & \mathbf{T}_{22}^{ij} \mathbf{D}_{22}^{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{i,j-1} \\ \mathbf{F}_{i,j-1} \\ \mathbf{B}_{i+1,j} \\ \mathbf{R}_{i+1,j} \end{bmatrix} \quad (4.133)$$

Elementy $\mathbf{F}_{i,j-1}$ oraz $\mathbf{B}_{i+1,j}$ tworzą bazy ortonormalne w przód i w tył jako wynik ortogonalizacji elementu $\mathbf{U}_{i,j}$ (pierwszy krok dowodu).

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_{i,j-1} \\ \mathbf{B}_{i+1,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{11} & \mathbf{V}_{12} \\ \mathbf{V}_{21} & \mathbf{V}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{i,j} \\ \mathbf{U}_{i,j} \end{bmatrix} \quad (4.134)$$

Stąd, wektor stojący po prawej stronie równania (4.133) możemy wyrazić w postaci

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_{i,j-1} \\ \mathbf{F}_{i,j-1} \\ \mathbf{B}_{i+1,j} \\ \mathbf{R}_{i+1,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{V}_{11}^{ij} & \mathbf{V}_{12}^{ij} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{V}_{21}^{ij} & \mathbf{V}_{22}^{ij} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{i,j-1} \\ \mathbf{U}_{i,j} \\ \mathbf{U}_{i,j} \\ \mathbf{R}_{i+1,j} \end{bmatrix} \quad (4.135)$$

Łącznie, otrzymamy

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_{i,j} \\ \mathbf{F}_{i,j} \\ \mathbf{B}_{i,j} \\ \mathbf{R}_{i,j} \end{bmatrix} = \Theta^{ij} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{i,j-1} \\ \mathbf{U}_{i,j} \\ \mathbf{U}_{i,j} \\ \mathbf{R}_{i+1,j} \end{bmatrix} \quad (4.136)$$

gdzie

$$\Theta^{ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{11}^{ij} \mathbf{G}_{11}^{ij} & \mathbf{T}_{12}^{ij} \mathbf{D}_{21}^{ij} \mathbf{V}_{11}^{ij} + \mathbf{T}_{11}^{ij} \mathbf{G}_{12}^{ij} \mathbf{V}_{21}^{ij} & \mathbf{T}_{12}^{ij} \mathbf{D}_{21}^{ij} \mathbf{V}_{12}^{ij} + \mathbf{T}_{11}^{ij} \mathbf{G}_{12}^{ij} \mathbf{V}_{22}^{ij} & \mathbf{T}_{12}^{ij} \mathbf{D}_{22}^{ij} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{11}^{ij} \mathbf{V}_{11}^{ij} & \mathbf{D}_{11}^{ij} \mathbf{V}_{12}^{ij} & \mathbf{D}_{12}^{ij} \\ \mathbf{G}_{21}^{ij} & \mathbf{G}_{22}^{ij} \mathbf{V}_{21}^{ij} & \mathbf{G}_{22}^{ij} \mathbf{V}_{22}^{ij} & \mathbf{0} \\ \mathbf{T}_{21}^{ij} \mathbf{G}_{11}^{ij} & \mathbf{T}_{22}^{ij} \mathbf{D}_{21}^{ij} \mathbf{V}_{11}^{ij} + \mathbf{T}_{21}^{ij} \mathbf{G}_{12}^{ij} \mathbf{V}_{21}^{ij} & \mathbf{T}_{22}^{ij} \mathbf{D}_{21}^{ij} \mathbf{V}_{12}^{ij} + \mathbf{T}_{21}^{ij} \mathbf{G}_{12}^{ij} \mathbf{V}_{22}^{ij} & \mathbf{T}_{22}^{ij} \mathbf{D}_{22}^{ij} \end{bmatrix} \quad (4.137)$$

a błędy $\mathbf{E}_{i,j}$ i $\mathbf{R}_{i,j}$ stanowią zbiory ON. Istotnie, jedna z przytoczonych w punkcie 4.4 własności rotora globalnego stwierdza, że błąd wyjściowy rotora stanowi zbiór ON, jeśli odpowiadający mu błąd wejściowy jest zbiorem ON. Stąd błąd $\mathbf{E}_{i,j}$ jest zbiorem ON, jeśli tylko $\ddot{\mathbf{E}}_{i,j-1}$ i $\ddot{\mathbf{F}}_{i,j-1}$

są zbiorami ON oraz $\ddot{\mathbf{E}}_{i,j-1} \perp \mathbf{F}_{i,j-1}$ (sytuacja analogiczna jak na rys.4.8b). Ponieważ $\mathbf{F}_{i,j-1}$ i $\mathbf{B}_{i+1,j}$ należą do tej samej podprzestrzeni (jako wyniki rotacji), a z własności rotora globalnego wynika, że $\ddot{\mathbf{E}}_{i,j-1} \perp \mathbf{B}_{i+1,j}$ (krok 2 dowodu), to oczywiście $\ddot{\mathbf{E}}_{i,j-1} \perp \mathbf{F}_{i,j-1}$. Stąd, $\mathbf{E}_{i,j}$ jest zbiorem ON. Analogiczne rozumowanie można przeprowadzić dla błędu $\mathbf{R}_{i,j}$. $\square$

Powyższe twierdzenie pozwala na rekurencyjne podwyższanie rzędu filtru 2D. W następnym paragrafie pokażemy, że w każdym kroku otrzymujemy rozwiązanie optymalne średniokwadratowo.

4.6 Ortogonalne rozwinięcie estymatora prognozy 2D.

W podrozdziale 3.1.2 pokazaliśmy, że zbiór błędów w tył $\{r_{k+1,i}\}_{i=k+1}^l$ jest bazą ON w podprzestrzeni S_{k+1}^l oraz, że estymator $\hat{y}_{kl}$ zmiennej y_k można wyrazić jako kombinację liniową powyższego zbioru. W tym rozdziale uogólnimy ten wynik na przypadek pola losowego, tj. pokażemy, że zbiór $\{\mathbf{R}_{i,k}\}_{k=i}^{k=j}$ błędów estymacji w tył jest zbiorem ortonormalnym. Wykażemy zatem, że dla ustalonych i oraz j

$$\forall (k, l : k = i, \dots, j; l = k, \dots, j; l \neq k) \quad \mathbf{R}_{i,k} \perp \mathbf{R}_{i,l} \quad (4.138)$$

przy czym ortogonalność błędów $\mathbf{R}_{i,k}$ i $\mathbf{R}_{i,l}$ rozumiemy tutaj w tym sensie, że jeśli $\dim(\text{span}\{\mathbf{R}_{i,k}\}) = p$ a $\dim(\text{span}\{\mathbf{R}_{i,l}\}) = q$, to $E\{\mathbf{R}_{i,k}\mathbf{R}_{i,l}^*\} = \mathbf{0}_{p \times q}$. Jednocześnie $E\{\mathbf{R}_{i,k}\mathbf{R}_{i,k}^*\} = \mathbf{I}_p$ a $E\{\mathbf{R}_{i,l}\mathbf{R}_{i,l}^*\} = \mathbf{I}_q$.

W dowodzie lematu 4.1 pokazaliśmy, że zbiór $\{\mathbf{R}_{i,k}\}_{k=i}^{k=j}$ rozpiną podprzestrzeń S_i^j a ponieważ — jak wynika z tego dowodu — dla każdego $k = i, \dots, j$ zachodzi $E\{\mathbf{R}_{i,k}\mathbf{R}_{i,k}^*\} = \mathbf{I}_q$, gdzie $q = 2(k - i) + 1$, to zbiór $\{\mathbf{R}_{i,k}\}_{k=i}^{k=j}$ jest zbiorem ON.

Fakt, że $y_{i,i} = \mathbf{R}_{i,i} \in \text{span}\{\mathbf{R}_{i,k}\}_{k=i}^{k=j}$ oznacza, że do $y_{i,i}$ doortogonalizowano pewien ortonormalny zbiór $\{\mathbf{R}'_{i,k}\}_{k=i+1}^{k=j}$, z czego wynika, że $\hat{y}_{i,i} = y_{i,i} - \epsilon_{i,i}^{p,2p} \in \text{span}\{\mathbf{R}'_{i,k}\}_{k=i+1}^{k=j}$, gdzie $p = j - i$ oznacza rząd globalny. Zatem $\hat{y}_{i,i}$ ma ortogonalną reprezentację w rozwinięciu względem pewnego ortonormalnego zbioru błędów w tył.

4.7 Ortogonalna filtracja innowacyjna pól losowych 2D

W podrozdziale 3.2 omówiliśmy zagadnienie filtracji innowacyjnej sygnałów jednowymiarowych. W niniejszym podrozdziale, wykorzystując rezultaty przedstawione w poprzednich podrozdziałach, uogólnimy wyniki zamieszczone w podrozdziale 3.2 na przypadek dwuwymiarowych pól losowych, wskazując jednocześnie na fakt, że proponowane tu struktury filtru 2D charakteryzują dwie bardzo istotne cechy, a mianowicie optymalność (w sensie minimum błędu średniokwadratowego prognozy) i możliwość rekurencyjnego podwyższania rzędu filtru. Poza tym proponowane struktury nie wymagają liniowego porządkowania elementów i w tym sensie są one dwuwymiarowe (tj. "true 2D").

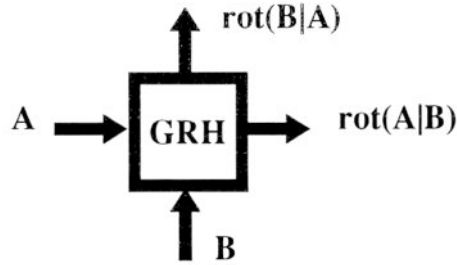
Rozważymy dwa podstawowe przypadki filtrów:

- filtr o parametrach zmiennych (w dziedzinie parametryzowanego pola),
- filtr o parametrach stałych.

Filtr o zmiennych parametrach jest użyteczny w zastosowaniach do parametryzacji sygnałów niejednorodnych.

4.7.1 Filtry innowacyjne 2D o parametrach zmiennych

W niniejszym punkcie proponujemy J -ortogonalną realizację filtra innowacyjnego 2D o parametrach zmiennych. Proponowana struktura realizuje algorytm ortogonalizacji³ fragmentu pola losowego rozważony w podrozdziale 4.5. Powiedzieliśmy wówczas, że jeden (globalny) krok ortogonalizacji można zdekomponować na 5 globalnych rotacji hiperbolicznych. Rozważymy najpierw 4 z nich, tj. rotacje opisane macierzami V , D , G i T . Dla uproszczenia zapisu przyjmujemy następującą notację: $rot(A|B)$ oznacza wynik rotacji elementu A względem elementu B w taki sposób, że $rot(A|B) \perp B$. Globalny rotor hiperboliczny wykonuje dwie rotacje jednocześnie tak jak to pokazano na rys.4.14



Rys. 4.14: Globalna rotacja hiperboliczna.

Stosując powyższą notację zapiszemy kolejne kroki algorytmu.

Krok 1: Mając dane rodziny błędów w przód $U_{i,j}(1)$ i w tył $U_{i,j}(2)$ (w tym wypadku są to rodziny jednoelementowe) wyznaczamy uogólniony współczynnik Schura K_V (w tym wypadku jest to skalar) oraz dwie rotacje: $rot(U_{i,j}(1)|U_{i,j}(2))$ i $rot(U_{i,j}(1)|U_{i,j}(2))$ a następnie tworzymy dwie bazy ortonormalne $F_{i,j-1}$ (rodzina błędów w przód) i $B_{i+1,j}$ (rodzina błędów w tył) w taki sposób, że

$$F_{i,j-1} = col[rot((U_{i,j}(1)|U_{i,j}(2))), U_{i,j}(2)] \quad (4.139)$$

oraz

$$B_{i+1,j} = col[U_{i,j}(1), rot(U_{i,j}(1)|U_{i,j}(2))] \quad (4.140)$$

Krok 2: Mając dane rodziny błędów w przód $E_{i,j-1}$ i w tył $B_{i+1,j}$ wyznaczamy uogólniony współczynnik Schura K_D oraz dwie rotacje

$$\ddot{E}_{i,j-1} = rot(E_{i,j-1}|B_{i+1,j}) \quad (4.141)$$

i

$$B_{ij} = rot(B_{i+1,j}|\ddot{E}_{i,j-1}) \quad (4.142)$$

Krok 3: Mając dane rodziny błędów w przód F_{ij} i w tył $R_{i+1,j}$ wyznaczamy uogólniony współczynnik Schura K_G oraz dwie rotacje

$$F_{ij} = rot(F_{i,j-1}|R_{i+1,j}) \quad (4.143)$$

i

$$\ddot{R}_{i+1,j} = rot(R_{i+1,j}|F_{ij}) \quad (4.144)$$

³Używamy tu zamiennie terminów *ortogonalizacja* i *parametryzacja*, ponieważ w proponowanym algorytmie oba te procesy występują naprzemiennie i żaden z nich nie może być kontynuowany bez drugiego.

Krok 4: Mając dane rodziny błędów w przód $\ddot{\mathbf{E}}_{i,j-1}$ i w tył $\ddot{\mathbf{R}}_{i+1,j}$ wyznaczamy uogólniony współczynnik Schura $\mathbf{K}_T$ oraz dwie rotacje

$$\ddot{\mathbf{E}}_{ij} = \text{rot}(\ddot{\mathbf{E}}_{i,j-1} | \ddot{\mathbf{R}}_{i+1,j}) \quad (4.145)$$

i

$$\ddot{\mathbf{R}}_{ij} = \text{rot}(\ddot{\mathbf{R}}_{i+1,j} | \ddot{\mathbf{E}}_{i,j-1}) \quad (4.146)$$

Błędy podwyższonego rzędu, tj rzędu (ij) wynoszą odpowiednio

$$\mathbf{E}_{ij} = \text{col}[\ddot{\mathbf{E}}_{ij}, \mathbf{F}_{ij}] \quad (4.147)$$

i

$$\mathbf{R}_{ij} = \text{col}[\mathbf{B}_{ij}, \ddot{\mathbf{R}}_{ij}] \quad (4.148)$$

Podstawiając odpowiednie wielkości do prawych stron powyższych równań otrzymamy zależności na $\mathbf{E}_{ij}$ i $\mathbf{R}_{ij}$ w funkcji błędów $\mathbf{E}_{i,j-1}$, $\mathbf{R}_{i+1,j}$ i $\mathbf{U}_{ij}$ w postaci

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{ij} &= \text{col}[\ddot{\mathbf{E}}_{ij}, \mathbf{F}_{ij}] = \text{col}[\text{rot}(\ddot{\mathbf{E}}_{i,j-1} | \ddot{\mathbf{R}}_{i+1,j}), \text{rot}(\mathbf{F}_{i,j-1} | \mathbf{R}_{i+1,j})] = \\ &= \text{col}[\text{rot}(\text{rot}(\mathbf{E}_{i,j-1} | \mathbf{B}_{i+1,j}) | \ddot{\mathbf{R}}_{i+1,j}), \text{rot}(\mathbf{F}_{i,j-1} | \mathbf{R}_{i+1,j})] = \\ &= \text{col}[\text{rot}(\text{rot}(\mathbf{E}_{i,j-1} | \mathbf{B}_{i+1,j}) | \text{rot}(\mathbf{R}_{i+1,j} | \mathbf{F}_{i,j-1})), \text{rot}(\mathbf{F}_{i,j-1} | \mathbf{R}_{i+1,j})] \end{aligned} \quad (4.149)$$

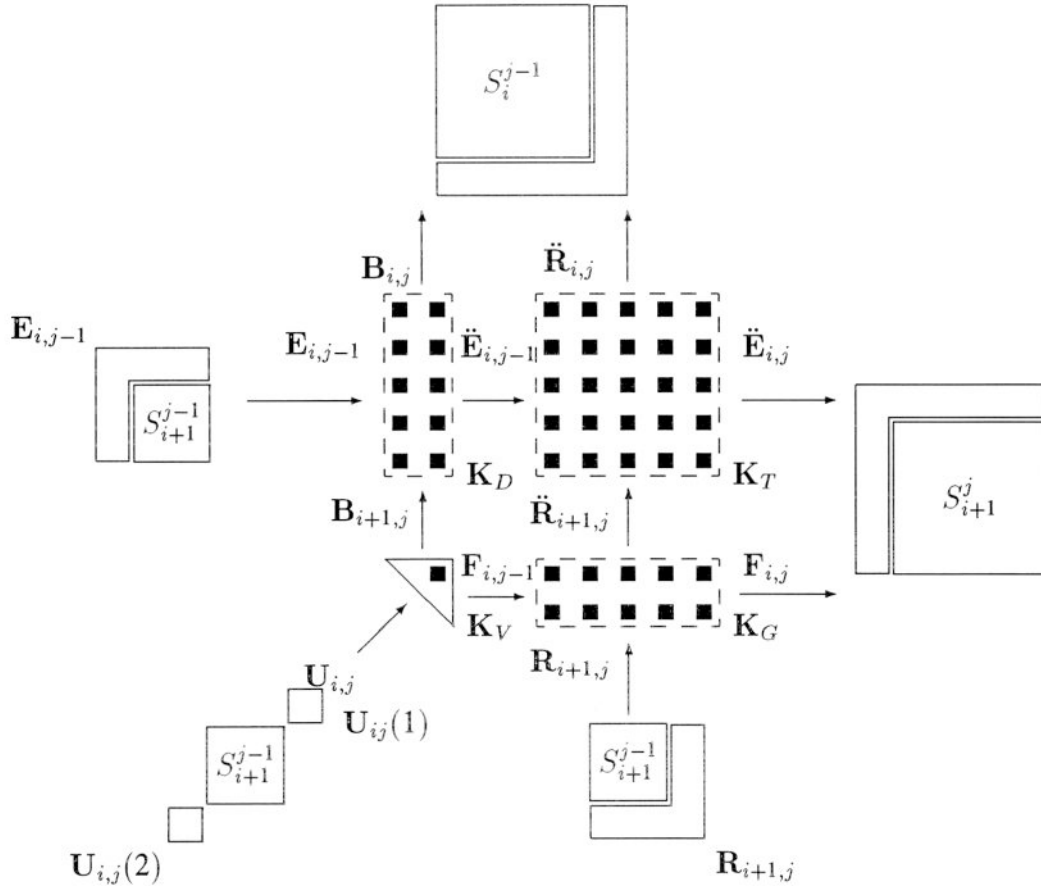
oraz

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{ij} &= \text{col}[\mathbf{B}_{ij}, \ddot{\mathbf{R}}_{ij}] = \text{col}[\text{rot}(\mathbf{B}_{i+1,j} | \mathbf{E}_{i,j-1}), \text{rot}(\ddot{\mathbf{R}}_{i+1,j} | \ddot{\mathbf{E}}_{i,j-1})] = \\ &= \text{col}[\text{rot}(\mathbf{B}_{i+1,j} | \mathbf{E}_{i,j-1}), \text{rot}(\text{rot}(\mathbf{R}_{i+1,j} | \mathbf{F}_{i,j-1}) | \ddot{\mathbf{E}}_{i,j-1})] = \\ &= \text{col}[\text{rot}(\mathbf{B}_{i+1,j} | \mathbf{E}_{i,j-1}), \text{rot}(\text{rot}(\mathbf{R}_{i+1,j} | \mathbf{F}_{i,j-1}) | \text{rot}(\mathbf{E}_{i,j-1} | \mathbf{B}_{i+1,j}))] \end{aligned} \quad (4.150)$$

Na rys.4.15 pokazano fragment struktury filtru (1 blok) realizujący wszystkie opisane powyżej kroki tj. jeden globalny krok parametryzacji. Rotory globalne (fragmenty struktury obwiedzione przerywaną linią) zostały tu zrealizowane w postaci macierzy odpowiednio połączonych rotorów hiperbolicznych. Pokazany blok spełnia jednocześnie dwie funkcje; filtru parametryzującego i filtru innowacyjnego (wybielającego). Filtr parametryzujący wyznacza zbiór $\{\mathbf{K}_V^{ij}, \mathbf{K}_G^{ij}, \mathbf{K}_D^{ij}, \mathbf{K}_T^{ij}\}$ uogólnionych współczynników Schura (parametrów pola), natomiast filtr innowacyjny wyznacza odpowiednie błędy w przód i w tył.

Analizując schemat indeksowania w bloku (ij) widzimy, że aby wyznaczyć rodzinę $\mathbf{E}_{i,j-1}$ musimy znać $\mathbf{E}_{i,j-2}$ oraz $\mathbf{R}_{i+1,j-1}$. Z kolei do wyznaczenia $\mathbf{R}_{i+1,j}$ potrzebujemy $\mathbf{R}_{i+2,j}$ oraz $\mathbf{E}_{i+1,j-1}$. Zauważmy, że $\mathbf{E}_{i+1,j-1}$ i $\mathbf{R}_{i+1,j-1}$ są generowane przez ten sam blok rzędu $(j-i-2)$, co pokazano na rys.4.16.

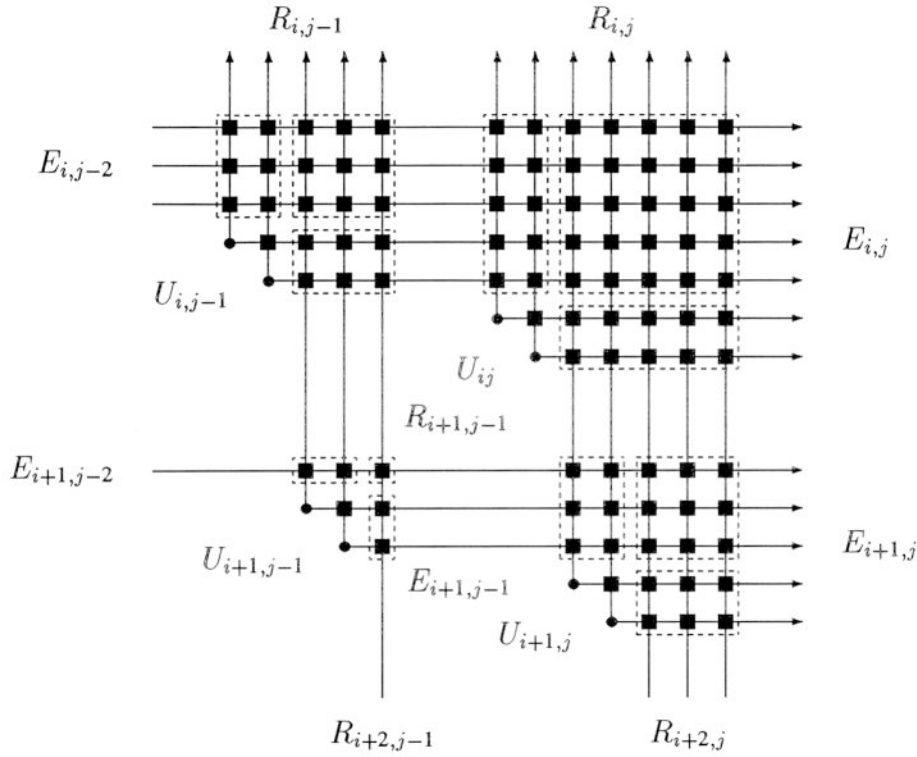
Rząd R filtru będziemy definiować jako $R \triangleq N - 1$, gdzie N jest długością boku fragmentu (kwadratowego) przetwarzanego pola losowego. Na rys.4.17 pokazano pełną strukturę filtru 3-go rzędu, przy czym pominięto na nim elementy odpowiedzialne za generowanie rodzin $\mathbf{U}_{ij}$. W omówionej powyżej strukturze pominęliśmy (dla ułatwienia) część ortogonalizującą rodzinę $\mathbf{Y}_{ij}^{(n)}$ do podprzestrzeni S_{i+1}^{j-1} . Efektem tej ortogonalizacji jest rodzina $\mathbf{U}_{ij}$ (pierwszy krok algorytmu w podrozdziale 4.5). Zauważmy (rys.4.15), że przed wykonaniem kroku (ij) rodziny $\mathbf{E}_{i,j-1}$ i $\mathbf{R}_{i+1,j}$ są już ortogonalne do podprzestrzeni S_{i+1}^{j-1} (te ortogonalizacje odbyły się w poprzednich krokach). Natomiast elementy rodziny $\mathbf{Y}_{ij}^{(n)}$ (elementy narożne) są elementami 'nowymi' i wedle algorytmu muszą najpierw zostać doortogonalizowane do podprzestrzeni S_{i+1}^{j-1} .



Rys. 4.15: Struktura realizująca pojedynczy krok globalnego algorytmu ortogonalizacji; w prawym dolnym rogu każdego bloku zaznaczono wyznaczane w tym kroku uogólnione parametry Schura.

Podprzestrzeń S_{i+1}^{j-1} jest rozpięta na bazie ON $\{\mathbf{R}_{i+1,k}\}_{k=i+1}^{k=j-1}$ jak również na bazie ON $\{\mathbf{E}_{k,j-1}\}_{k=i+1}^{k=j-1}$, co pokazaliśmy w podrozdziale 4.6. Z punktu widzenia rodziny $\mathbf{Y}_{ij}^{(n)}$ nie ma znaczenia, do której z dwu powyższych baz zostanie ona doortogonalizowana. Arbitralnie przyjmujemy, że rodzina $\mathbf{Y}_{ij}^{(n)}$ jest ortogonalizowana z bazą w tył, tj. ze zbiorem $\{\mathbf{R}_{i+1,k}\}_{k=i+1}^{k=j-1}$. Wobec powyższego strukturę z rys.4.17 należy uzupełnić o elementy wykonujące rotację $\text{rot}(\mathbf{Y}_{ij}^{(n)} | \{\mathbf{R}_{i+1,k}\}_{k=i+1}^{k=j-1})$ dla każdego i oraz j określających $\mathbf{Y}_{ij}^{(n)}$. Zauważmy, że w tym wypadku nie wykonujemy drugiej rotacji tj. $\text{rot}(\{\mathbf{R}_{i+1,k}\}_{k=i+1}^{k=j-1} | \mathbf{Y}_{ij}^{(n)})$. Dlatego, chcąc użyć tych samych bloków (tj. globalnych rotorów hiperbolicznych) do uzupełnienia struktury filtru, musimy 'wyłączyć' jedną rotację. Dzięki temu rotor hiperboliczny pozostaje 'przezroczysty' na jedno z jego wejść; w tym wypadku wejście B (rys.4.14).

Na rys.4.18 pokazaną kompletną strukturę filtru 3-go rzędu. Prezentowana tu struktura wykorzystuje do konstrukcji globalnego rotora hiperbolicznego (linią przerywaną zaznaczono bloki oznaczające rotory globalne) pojedyncze rotory hiperboliczne, jednak nie jest to warunek konieczny, o czym pisaliśmy w punkcie 4.4. Kwadraty zaczerńnione odpowiadają rotorom hiperbolicznym wykonującym dwie rotacje, natomiast kwadraty niezaczerńnione oznaczają rotory wykonujące tylko jedną rotację (obracają tylko błędy w przód). Z punktu widzenia przetwarzania sygnałów istotne jest, aby realizacja rotora gwarantowała określone własności, natomiast jego 'struktura wewnętrzna' jest o tyle istotna, że może ona mieć wpływ np. na błędy zaokrągleń, liczbę mnożeń, liczbę wyznaczanych parametrów Schura, itp.



Rys. 4.16: Filtr 2D o zmiennych parametrach – fragment struktury złożony z 4 bloków.

W postaci macierzowej równania (4.149) i (4.150) wyglądają następująco

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_{i,j} \\ \mathbf{F}_{i,j} \\ \mathbf{B}_{i,j} \\ \mathbf{R}_{i,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{E}}_{i,j} \\ \mathbf{F}_{i,j} \\ \mathbf{B}_{i,j} \\ \ddot{\mathbf{R}}_{i,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{11}^{ij} \mathbf{G}_{11}^{ij} & \mathbf{T}_{12}^{ij} \mathbf{D}_{21}^{ij} & \mathbf{T}_{11}^{ij} \mathbf{G}_{12}^{ij} & \mathbf{T}_{12}^{ij} \mathbf{D}_{22}^{ij} \\ 0 & \mathbf{D}_{11}^{ij} & 0 & \mathbf{D}_{12}^{ij} \\ \mathbf{G}_{21}^{ij} & 0 & \mathbf{G}_{22}^{ij} & 0 \\ \mathbf{T}_{21}^{ij} \mathbf{G}_{11}^{ij} & \mathbf{T}_{22}^{ij} \mathbf{D}_{21}^{ij} & \mathbf{T}_{21}^{ij} \mathbf{G}_{12}^{ij} & \mathbf{T}_{22}^{ij} \mathbf{D}_{22}^{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{i,j-1} \\ \mathbf{F}_{i,j-1} \\ \mathbf{B}_{i+1,j} \\ \mathbf{R}_{i+1,j} \end{bmatrix} \quad (4.151)$$

Elementy $\mathbf{F}_{i,j-1}$ oraz $\mathbf{B}_{i+1,j}$ tworzą bazy ortogonalne w przód i w tył jako wynik ortogonalizacji elementu $\mathbf{U}_{i,j}$

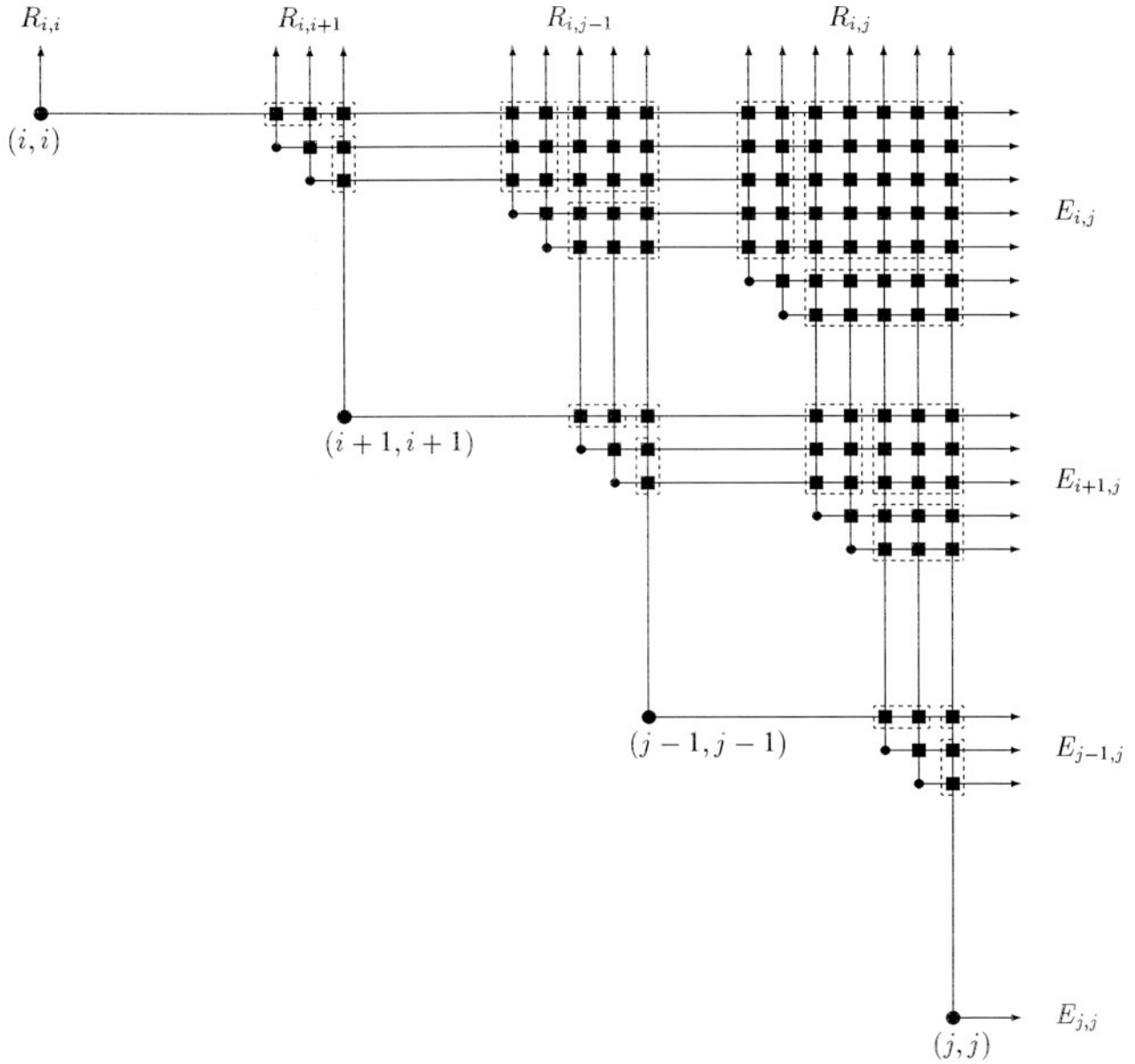
$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_{i,j-1} \\ \mathbf{B}_{i+1,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{11} & \mathbf{V}_{12} \\ \mathbf{V}_{21} & \mathbf{V}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{i,j} \\ \mathbf{U}_{i,j} \end{bmatrix} \quad (4.152)$$

Stąd, wektor stojący po prawej stronie równania (4.151) możemy wyrazić w postaci

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_{i,j-1} \\ \mathbf{F}_{i,j-1} \\ \mathbf{B}_{i+1,j} \\ \mathbf{R}_{i+1,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{V}_{11}^{ij} & \mathbf{V}_{12}^{ij} & 0 \\ 0 & \mathbf{V}_{21}^{ij} & \mathbf{V}_{22}^{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{i,j-1} \\ \mathbf{U}_{i,j} \\ \mathbf{U}_{i,j} \\ \mathbf{R}_{i+1,j} \end{bmatrix} \quad (4.153)$$

Łącznie, otrzymamy

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_{i,j} \\ \mathbf{R}_{i,j} \end{bmatrix} = \Theta^{ij} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{i,j-1} \\ \mathbf{U}_{i,j} \\ \mathbf{U}_{i,j} \\ \mathbf{R}_{i+1,j} \end{bmatrix} \quad (4.154)$$



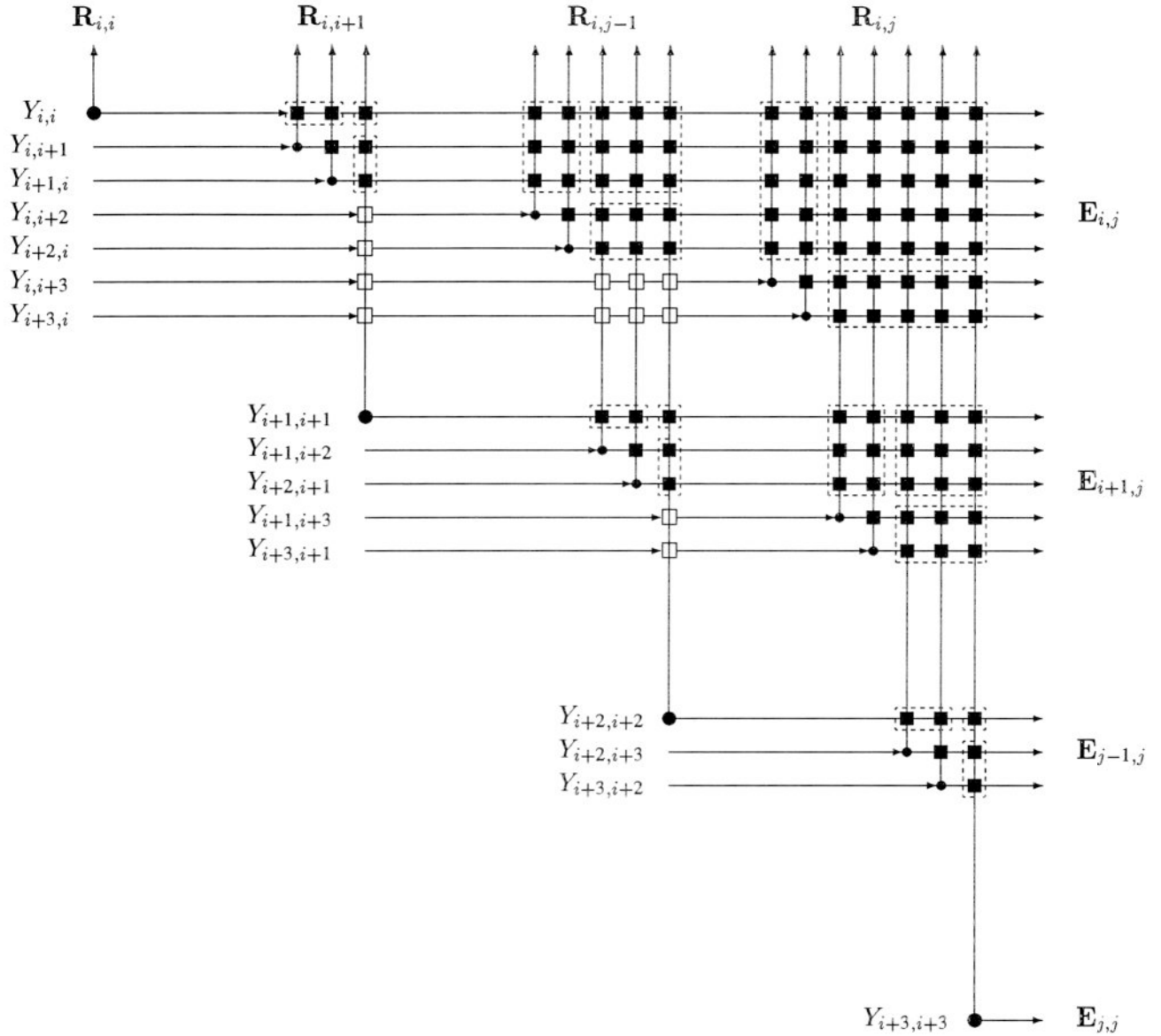
Rys. 4.17: Filtr 2D o zmiennych parametrach – struktura 3-go rzędu (bez wrysowanych elementów ortogonalizujących rodziny $\mathbf{y}_{ij}^{(n)}$).

gdzie

$$\Theta^{ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{11}^{ij} \mathbf{G}_{11}^{ij} & \mathbf{T}_{12}^{ij} \mathbf{D}_{21}^{ij} \mathbf{V}_{11}^{ij} + \mathbf{T}_{11}^{ij} \mathbf{G}_{12}^{ij} \mathbf{V}_{21}^{ij} & \mathbf{T}_{12}^{ij} \mathbf{D}_{21}^{ij} \mathbf{V}_{12}^{ij} + \mathbf{T}_{11}^{ij} \mathbf{G}_{12}^{ij} \mathbf{V}_{22}^{ij} & \mathbf{T}_{12}^{ij} \mathbf{D}_{22}^{ij} \\ 0 & \mathbf{D}_{11}^{ij} \mathbf{V}_{11}^{ij} & \mathbf{D}_{11}^{ij} \mathbf{V}_{12}^{ij} & \mathbf{D}_{12}^{ij} \\ \mathbf{G}_{21}^{ij} & \mathbf{G}_{22}^{ij} \mathbf{V}_{21}^{ij} & \mathbf{G}_{22}^{ij} \mathbf{V}_{22}^{ij} & 0 \\ \mathbf{T}_{21}^{ij} \mathbf{G}_{11}^{ij} & \mathbf{T}_{22}^{ij} \mathbf{D}_{21}^{ij} \mathbf{V}_{11}^{ij} + \mathbf{T}_{21}^{ij} \mathbf{G}_{12}^{ij} \mathbf{V}_{21}^{ij} & \mathbf{T}_{22}^{ij} \mathbf{D}_{21}^{ij} \mathbf{V}_{12}^{ij} + \mathbf{T}_{21}^{ij} \mathbf{G}_{12}^{ij} \mathbf{V}_{22}^{ij} & \mathbf{T}_{22}^{ij} \mathbf{D}_{22}^{ij} \end{bmatrix} \quad (4.155)$$

Równanie (4.154) pokazuje w jaki sposób wyrazić wielkości wyjściowe w funkcji wielkości wejściowych dla bloku (ij) . Podobne równania można wypisać dla każdego bloku struktury filtru. W efekcie można pokazać (uogólniając wyniki otrzymane dla struktur 1D), że istnieje realizacja kaskadowa struktury z rys. 4.18, tj., że

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{R} \end{bmatrix} = \Theta \begin{bmatrix} \mathbf{Y} \\ \mathbf{Y} \end{bmatrix} \quad (4.156)$$



Rys. 4.18: Filtr 2D o zmiennych parametrach – kompletna struktura 3-go rzędu.

gdzie zarówno $(\Theta_{11} + \Theta_{12})$ jak i $(\Theta_{21} + \Theta_{22})$ ortogonalizują $\mathbf{Y}$ tworząc, odpowiednio, ortogonalne ciągi $\mathbf{E}$ i $\mathbf{R}$.

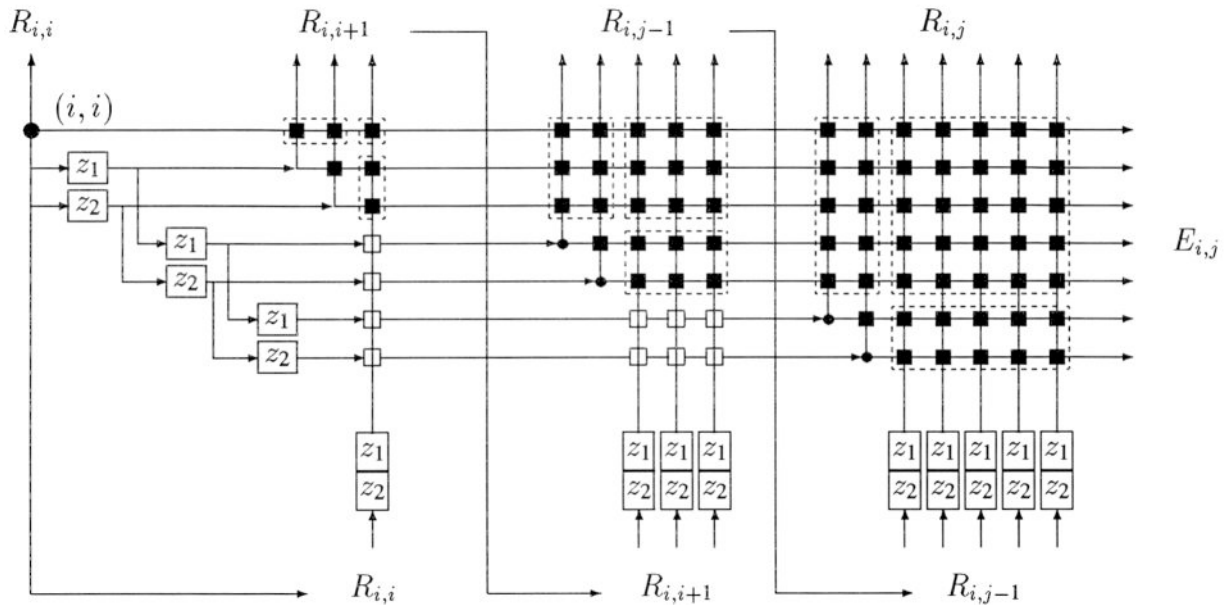
4.7.2 Filtry innowacyjne 2D o parametrach stałych

W poprzednim punkcie została pokazana realizacja filtru 2D o parametrach zmiennych (rys.4.18). Jeśli założymy, że dwuwymiarowe pole losowe $\mathbf{Y}$ jest izotropowe, to jego funkcja autokorelacji spełnia poniższe równanie (uogólnia strukturę Toeplitza macierzy 4-indeksowej)

$$\mathbf{r}_{ij}^{kl} = E\{y_{ij}y_{kl}\} = E\{y_{i+\alpha,j+\beta}y_{k+\alpha,l+\beta}\} \stackrel{i=-\alpha,j=-\beta}{=} E\{y_{00}y_{k-i,l-j}\} = \mathbf{r}_{k-i,l-j} = \mathbf{r}_{m,n} \quad (4.157)$$

Jeśli funkcja autokorelacji parametryzowanego pola spełnia powyższe równanie, to filtr parametryzujący z rys.4.18 można uprościć do postaci pokazanej na rys.4.19. Wtedy bowiem dla każdego $m = n$ mamy

$$\mathbf{r}_{m,m} = E\{y_{ij}y_{i+m,j+m}\} \quad (4.158)$$



Rys. 4.19: Filtr innowacyjny 2D o parametrach stałych.

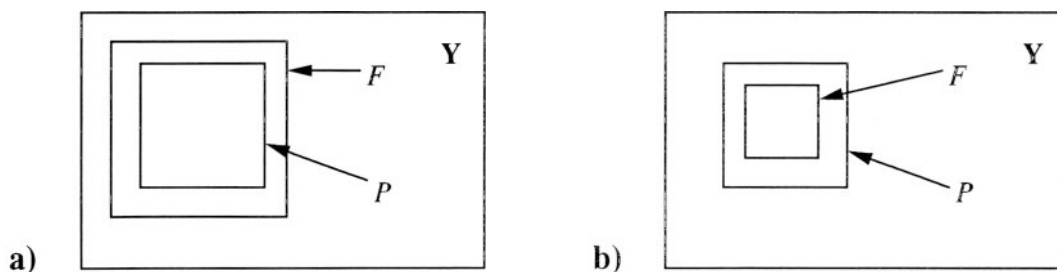
a w konsekwencji współczynniki Schura w bloku (i, j) są takie same jak współczynniki w bloku $(i + m, j + m)$ dla dowolnych i, j .

4.7.3 Wybielanie pól losowych 2D

Problem wybielania stanowi uogólnienie idei wybielania sygnałów jednowymiarowych (procesów stochastycznych) omówionej w podrozdziale 3.2.3 na przypadek pól losowych dwuwymiarowych, jak również wielowymiarowych. Przez parametryzację zawsze rozumiemy tu proces wyznaczania współczynników Schura, a przez filtrację innowacyjną proces wybielania sygnału. Jakkolwiek w prezentowanych algorytmach procesy te odbywają się równolegle, to możliwe jest ich rozdzielanie. Mianowicie, współczynniki filtru (współczynniki Schura) można – posługując się np. algebraicznym algorytmem Schura – wyznaczyć bez znajomości błędów prognozy dysponując jedynie macierzą kowariancji. Odwrotny przypadek nie jest możliwy, tj. do wyznaczenia błędów prognozy potrzebna jest znajomość współczynników filtru (i oczywiście znajomość struktury filtru).

Ponieważ w przypadku dwuwymiarowym macierz kowariancji pola losowego jest czterowymiarowa, kryterium optymalności filtru będzie dla nas stanowić ortogonalność błędów prognozy w przód i w tył. Innymi słowy, jeśli dany fragment pola został wybielony całkowicie, to zawsze błędy prognozy w przód (jak również w tył) powinny tworzyć bazy ortogonalne (ortonormalne). W przypadku dwuwymiarowym również możemy wyróżnić 3 przypadki filtracji, tak jak to uczyniliśmy w rozdziale 3.2.3. Jednak w tym wypadku innego charakteru nabierają takie pojęcia jak rząd filtru, czy zbiór schodkowy. Rząd filtru dwuwymiarowego zdefiniowaliśmy w podrozdziale 4.2. Tutaj przedyskutujemy problem całkowitego i częściowego wybielania pola 2D.

Rozważmy dwuwymiarowe unormowane i skorelowane pole losowe $\mathbf{Y}$ i założmy, że pole to jest skorelowane na obszarze W , przy czym *obszar skorelowania pola* rozumiemy w sensie poniższej definicji.



Rys. 4.20: Wybielanie pól 2D: a) całkowite wybielenie pola Y – jeśli obszar parametryzacji P jest całkowicie zawarty w obszarze zajmowanym przez filtr F , b) wybielenie częściowe – w przeciwnym przypadku

Definicja 4.2 Obszar skorelowania pola

Przez obszar W skorelowania pola rozumiemy obszar pola w kształcie kwadratu o boku r_w , spełniający warunek

$$E\{y_{ij}y_{kl}\} = 0, \quad \text{gdy} \quad |k - i|, |l - j| > r_w. \quad (4.159)$$

Wyjaśnijmy, że kwadratowy kształt obszaru skorelowania pola przyjmujemy tu dość arbitralnie, bowiem obszar ten może mieć różny kształt dla każdego punktu pola. Jednak założenie o kwadratowym obszarze skorelowania w niczym nie umniejsza ogólności rozważań, a przy tym upraszcza dalsze rozważania. Zauważmy, że wyrażenie stojące po lewej stronie powyższej zależności określa w istocie – zgodnie z definicją A.11 – czterowymiarową funkcję korelacji pola losowego 2D.

Na użytek dalszych rozważań podamy jeszcze dwie definicje.

Definicja 4.3 Minimalny obszar parametryzacji pola

Przez minimalny obszar P parametryzacji całkowitej pola rozumiemy obszar pola w kształcie kwadratu o boku r_p , przy czym r_p jest takie, że filtr innowacyjny rzędu $N > r_p$ całkowicie wybiela dane pole.

Definicja 4.4 Pole białe.

Dwuwymiarowe unormowane pole losowe E nazywamy polem białym, jeśli dla każdej pary zmiennych losowych e_{ij} i e_{kl} należących do tego pola

$$E\{e_{ij}e_{kl}\} \triangleq \begin{cases} 1 & \text{dla } (i, j) = (k, l) \\ 0 & \text{dla } (i, j) \neq (k, l). \end{cases} \quad (4.160)$$

Jeśli rząd filtru 2D jest na tyle duży, że w każdym punkcie pola filtr pokrywa obszar parametryzacji pola (rys.4.20a), to mówimy o wybielaniu całkowitym. W przeciwnym przypadku, tj. wtedy, gdy filtr nie pokrywa całkowicie obszaru parametryzacji (rys.4.20b), mówimy o wybielaniu częściowym. Innymi słowy, w wyniku filtracji pola Y filtrem z rys.4.20a) otrzymamy unormowane pole białe E , przy czym określenie *pole białe* rozumiemy tu w sensie definicji 4.4. Pole otrzymane jako wynik filtracji z rys.4.20b) nie spełnia warunków tej definicji. Załóżmy, że znamy obszar parametryzacji danego pola w każdym jego punkcie. Wówczas możemy znaleźć minimalny rząd filtru całkowicie wybielającego dane pole. Oznaczmy rząd

takiego filtru przez N_{min} i zauważmy, że skoro filtr rzędu 0 jest 'przezroczysty' dla pola (nie oddziałuje na pole w żaden sposób), a filtr rzędu N_{min} całkowicie wybiela dane pole, to każdy filtr rzędu $N < N_{min}$ wybiela pole tylko częściowo.

Dla pól o skończonych wymiarach (bo do takich się w zasadzie ograniczamy), kryterium wybielania możemy zdefiniować jako współczynnik

$$w_N \triangleq \frac{\sum_{i,j,k,l \in D} |C_{ijkl}^{(N_{min})}|}{\sum_{i,j,k,l \in D} |C_{ijkl}^{(N)}|}, \quad (4.161)$$

gdzie $D = \{(i, j, k, l)\}_{i,j,k,l=0}^{N_{min}}$ jest zbiorem indeksów określających punkty, w których wyznaczamy wartości kowariancji, $C^{(N_{min})}$ jest kowariancją pola wyznaczonego przy użyciu filtru rzędu N_{min} a $C^{(N)}$ jest kowariancją pola wyznaczonego przy użyciu filtru rzędu N . Powyższy współczynnik może być użyteczny przy ocenie skuteczności wybielania.

Wspomnieliśmy wcześniej, że proponowane w tej pracy filtry realizują jednocześnie algorytm wybielania i parametryzacji danego pola 2D. Istotnie, dla każdego punktu pola (każdej zmiennej losowej) wyznaczamy nowy zbiór parametrów filtru. Jeśli pole jest izotropowe, to dla każdego punktu pola otrzymamy ten sam zbiór współczynników Schura. W przeciwnym przypadku zbiory będą różnić się od siebie, jednak – analogicznie jak w przypadku 1D – zbiory wyznaczone dla dwóch sąsiadujących punktów mają część wspólną, którą w jednym z tych zbiorów można odrzucić. Charakter różnic pozostałych współczynników zależy od tego jak silnie niestacjonarne (nieizotropowe) jest przetwarzane pole. W przypadku 1D wynikiem procesu parametryzacji był schodkowy zbiór współczynników Schura (macierz pasmowa, w której szerokość pasma zależy od rzędu filtru). W przypadku 2D trudno mówić o zbiorze 'schodkowym' ze względu na to, że macierz współczynników Schura jest czterowymiarowa, jednak sposób rozłożenia tych współczynników jest podobny. Ze względu na ortogonalną strukturę proponowanych filtrów możemy oczekiwać szybkiej zbieżności współczynników Schura do niewielkich (a w konsekwencji mało istotnych przy modelowaniu) wartości. W rozdziale 5 zaprezentujemy wyniki symulacji wybielania przykładowych pól losowych.

4.8 Modelowanie stochastyczne pól losowych 2D

4.8.1 Filtry modelujące 2D o parametrach zmiennych

W podrozdziale 4.7.1 zaproponowaliśmy strukturę filtru innowacyjnego 2D. W niniejszym podrozdziale pokażemy strukturę filtru modelującego 2D, który jest odwrotny do filtru innowacyjnego w tym sensie, że jeśli na wejście filtru modelującego podamy dwuwymiarowy ciąg ortonormalnych zmiennych losowych, to na jego wyjściu otrzymamy dwuwymiarowy ciąg zmiennych losowych, którego statystyki drugiego rzędu są identyczne ze statystykami drugiego rzędu sygnału, którego parametry określają filtr modelujący.

Globalny rotor kołowy

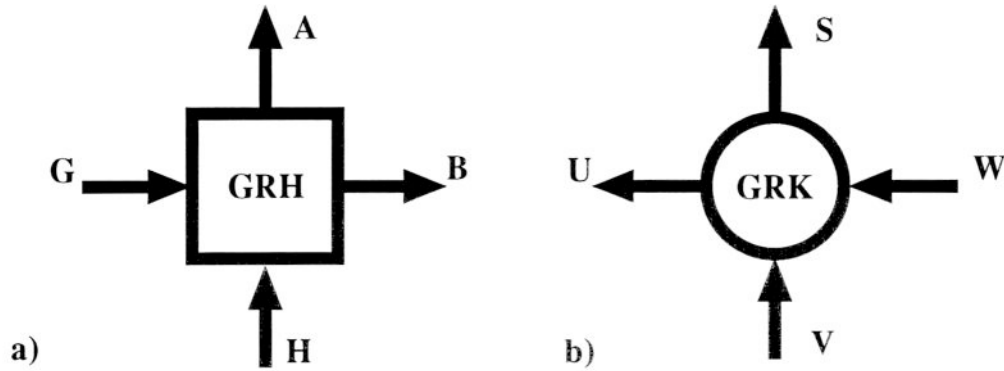
W punkcie 4.4 wprowadziliśmy pojęcie *globalnego rotora hiperbolicznego* (rys.4.21a) spełniającego równanie macierzowe

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{A} \end{bmatrix} = \Theta(\mathbf{K}) \begin{bmatrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix} \quad (4.162)$$

gdzie $\mathbf{G}$ i $\mathbf{H}$ są wektorami elementów ortonormalnych tj. spełniają warunki $E\{\mathbf{G}\mathbf{G}^*\} = \mathbf{I}_m$, $E\{\mathbf{H}\mathbf{H}^*\} = \mathbf{I}_n$, a

$$\Theta(\mathbf{K}) = \begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{I}_m - \mathbf{K}\mathbf{K}^*)^{-\frac{1}{2}} & (\mathbf{I}_m - \mathbf{K}\mathbf{K}^*)^{-\frac{1}{2}}\mathbf{K} \\ (\mathbf{I}_n - \mathbf{K}^*\mathbf{K})^{-\frac{1}{2}}\mathbf{K}^* & (\mathbf{I}_n - \mathbf{K}^*\mathbf{K})^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \quad (4.163)$$

jest macierzą J -ortogonalną, przy czym $\mathbf{K} = -E\{\mathbf{G}\mathbf{H}^*\} = -\mathbf{C}_{GH}$ jest uogólnionym współczynnikiem Schura, natomiast $m = \dim(\mathbf{G})$ i $n = \dim(\mathbf{H})$, są wymiarami wektorów $\mathbf{G}$ i $\mathbf{H}$.



Rys. 4.21: Globalny rotor: a) hiperboliczny, b) kołowy.

Przypomnijmy, że jeśli $\mathbf{G}$ i $\mathbf{H}$ są ortonormalne, to $\mathbf{B}$ i $\mathbf{A}$ są również ortonormalne oraz zachodzą zależności: $E\{\mathbf{G}\mathbf{A}^*\} = \mathbf{0}_{m \times n}$ oraz $E\{\mathbf{H}\mathbf{B}^*\} = \mathbf{0}_{n \times m}$, tj. $\mathbf{A}$ jest ortogonalne do $\mathbf{G}$ a $\mathbf{B}$ jest ortogonalne do $\mathbf{H}$.

Przepisując równanie macierzowe (4.162) w postaci dwóch równań

$$\mathbf{B} = \Theta_{11}\mathbf{G} + \Theta_{12}\mathbf{H} \quad (4.164)$$

$$\mathbf{A} = \Theta_{21}\mathbf{G} + \Theta_{22}\mathbf{H} \quad (4.165)$$

i wyznaczając z pierwszego z nich $\mathbf{G}$, otrzymamy

$$\mathbf{G} = \Theta_{11}^{-1}\mathbf{B} - \Theta_{11}^{-1}\Theta_{12}\mathbf{H} \quad (4.166)$$

Macierz Θ_{11} jest zawsze odwracalna, ponieważ jest symetryczna i ma niezerowe wartości na diagonalu (patrz par. 4.4), co zapewnia istnienie filtra modelującego.

Podstawiając $\mathbf{G}$ do drugiego z powyższych równań otrzymamy

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \Theta_{21}(\Theta_{11}^{-1}\mathbf{B} - \Theta_{11}^{-1}\Theta_{12}\mathbf{H}) + \Theta_{22}\mathbf{H} = \\ &= \Theta_{21}\Theta_{11}^{-1}\mathbf{B} - \Theta_{21}\Theta_{11}^{-1}\Theta_{12}\mathbf{H} + \Theta_{22}\mathbf{H} = \\ &= \Theta_{21}\Theta_{11}^{-1}\mathbf{B} + (\Theta_{22} - \Theta_{21}\Theta_{11}^{-1}\Theta_{12})\mathbf{H} \end{aligned} \quad (4.167)$$

Powyższe dwa równania przyjmują w postaci macierzowej postać

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{A} \end{bmatrix} = \Sigma(\mathbf{K}) \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix} \quad (4.168)$$

przy czym elementy macierzy Σ wyrażają się poprzez elementy macierzy Θ jako

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Theta_{11}^{-1} & \Theta_{11}^{-1}\Theta_{12} \\ \Theta_{21}\Theta_{11}^{-1} & \Theta_{22} - \Theta_{21}\Theta_{11}^{-1}\Theta_{12} \end{bmatrix} \quad (4.169)$$

Podstawiając odpowiednie wielkości z równania (4.163) dostajemy

$$\Sigma(\mathbf{K}) \triangleq \begin{bmatrix} (\mathbf{I}_m - \mathbf{K}\mathbf{K}^*)^{\frac{1}{2}} & -\mathbf{K} \\ (\mathbf{I}_n - \mathbf{K}^*\mathbf{K})^{-\frac{1}{2}}\mathbf{K}^*(\mathbf{I}_m - \mathbf{K}\mathbf{K}^*)^{\frac{1}{2}} & (\mathbf{I}_n - \mathbf{K}^*\mathbf{K})^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \quad (4.170)$$

Przytoczymy odpowiedni lemat [13], aby pokazać równość

$$(\mathbf{I}_n - \mathbf{K}^*\mathbf{K})^{-\frac{1}{2}}\mathbf{K}^*(\mathbf{I}_m - \mathbf{K}\mathbf{K}^*)^{\frac{1}{2}} = \mathbf{K}^* \quad (4.171)$$

Lemat 4.2 Niech $\mathbf{K}$ będzie ściśle kontraktywną macierzą wymiaru $m \times n$, tj. $\mathbf{K}\mathbf{K}^* < \mathbf{I}_m$. Wówczas

$$\mathbf{K}^*(\mathbf{I}_m - \mathbf{K}\mathbf{K}^*)^{-\frac{1}{2}} = (\mathbf{I}_n - \mathbf{K}^*\mathbf{K})^{-\frac{1}{2}}\mathbf{K}^* \quad (4.172)$$

i

$$(\mathbf{I}_m - \mathbf{K}\mathbf{K}^*)^{-\frac{1}{2}}\mathbf{K} = \mathbf{K}(\mathbf{I}_n - \mathbf{K}^*\mathbf{K})^{-\frac{1}{2}} \quad (4.173)$$

Dowód:

Dowód można znaleźć w pracy [13], gdzie powyższy lemat podano razem z pełnym dowodem. $\square$

Korzystając z równania (4.172) otrzymujemy

$$(\mathbf{I}_n - \mathbf{K}^*\mathbf{K})^{-\frac{1}{2}}\mathbf{K}^*(\mathbf{I}_m - \mathbf{K}\mathbf{K}^*)^{\frac{1}{2}} = \mathbf{K}^*(\mathbf{I}_m - \mathbf{K}\mathbf{K}^*)^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{I}_m - \mathbf{K}\mathbf{K}^*)^{\frac{1}{2}} = \mathbf{K}^* \quad (4.174)$$

Ostatecznie, uwzględniając powyższą równość, $\Sigma(\mathbf{K})$ zdefiniujemy w postaci

$$\Sigma(\mathbf{K}) \triangleq \begin{bmatrix} (\mathbf{I}_m - \mathbf{K}\mathbf{K}^*)^{\frac{1}{2}} & -\mathbf{K} \\ \mathbf{K}^* & (\mathbf{I}_n - \mathbf{K}^*\mathbf{K})^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \quad (4.175)$$

Macierz $\Sigma(\mathbf{K})$ wykonuje operację *globalnej rotacji kołowej*, stąd będziemy ją nazywać *globalnym rotorem kołowym*.

Twierdzenie 4.3 O własnościach globalnego rotora kołowego.

Niech $\mathbf{K}$ będzie macierzą $m \times n$ reprezentującą globalny współczynnik odbicia oraz niech $\mathbf{W}$ i $\mathbf{V}$, o wymiarach odpowiednio $\dim(\mathbf{W}) = m$ i $\dim(\mathbf{V}) = n$, oznaczają dwa ortogonalne względem siebie wektory ortonormalnych zmiennych losowych, tj. spełniających warunki

$$E\{\mathbf{W}\mathbf{W}^*\} = \mathbf{0}_{m \times n}, \quad E\{\mathbf{W}\mathbf{W}^*\} = \mathbf{I}_m, \quad E\{\mathbf{V}\mathbf{V}^*\} = \mathbf{I}_n. \quad (4.176)$$

Wówczas, wektory $\mathbf{U}$ i $\mathbf{S}$ określone równaniem

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{S} \end{bmatrix} = \Sigma(\mathbf{K}) \begin{bmatrix} \mathbf{W} \\ \mathbf{V} \end{bmatrix} \quad (4.177)$$

gdzie

$$\Sigma(\mathbf{K}) = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} (\mathbf{I}_m - \mathbf{K}\mathbf{K}^*)^{\frac{1}{2}} & -\mathbf{K} \\ \mathbf{K}^* & (\mathbf{I}_n - \mathbf{K}^*\mathbf{K})^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \quad (4.178)$$

spełniają poniższe własności:

własność 1

$$E\{\mathbf{U}\mathbf{U}^*\} = \mathbf{I}_m, \quad E\{\mathbf{S}\mathbf{S}^*\} = \mathbf{I}_n \quad (4.179)$$

własność 2

$$E\{\mathbf{U}\mathbf{V}^*\} = -\mathbf{K} \quad (4.180)$$

własność 3

$$E\{\mathbf{U}\mathbf{S}^*\} = \mathbf{0}_{m \times n}, \quad (4.181)$$

Dowód:

Dowód wł. 1: Przez sprawdzenie

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{U}\mathbf{U}^*\} &= E\{(\Sigma_{11}\mathbf{W} + \Sigma_{12}\mathbf{V})(\Sigma_{11}\mathbf{W} + \Sigma_{12}\mathbf{V})^*\} = \\ &= E\{\Sigma_{11}\mathbf{W}\mathbf{W}^*\Sigma_{11}^* + \Sigma_{11}\mathbf{W}\mathbf{V}^*\Sigma_{12}^* + \Sigma_{12}\mathbf{V}\mathbf{W}^*\Sigma_{11}^* + \Sigma_{12}\mathbf{V}\mathbf{V}^*\Sigma_{12}^*\} = \\ &= E\{\Sigma_{11}\mathbf{W}\mathbf{W}^*\Sigma_{11}^*\} + E\{\Sigma_{11}\mathbf{W}\mathbf{V}^*\Sigma_{12}^*\} + E\{\Sigma_{12}\mathbf{V}\mathbf{W}^*\Sigma_{11}^*\} + E\{\Sigma_{12}\mathbf{V}\mathbf{V}^*\Sigma_{12}^*\} \\ &= \Sigma_{11}E\{\mathbf{W}\mathbf{W}^*\}\Sigma_{11}^* + \Sigma_{11}E\{\mathbf{W}\mathbf{V}^*\}\Sigma_{12}^* + \Sigma_{12}E\{\mathbf{V}\mathbf{W}^*\}\Sigma_{11}^* + \Sigma_{12}E\{\mathbf{V}\mathbf{V}^*\}\Sigma_{12}^* \end{aligned} \quad (4.182)$$

Z założenia $E\{\mathbf{W}\mathbf{W}^*\} = \mathbf{I}_m$, $E\{\mathbf{V}\mathbf{V}^*\} = \mathbf{I}_n$, $E\{\mathbf{W}\mathbf{V}^*\} = \mathbf{0}_{m \times n}$, a stąd

$$E\{\mathbf{U}\mathbf{U}^*\} = \Sigma_{11}\Sigma_{11}^* + \Sigma_{12}\Sigma_{12}^* \quad (4.183)$$

Podstawiając w powyższym równaniu odpowiednie wartości na Σ_{11} i Σ_{12} z (4.175), otrzymamy

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{U}\mathbf{U}^*\} &= (\mathbf{I}_m - \mathbf{K}\mathbf{K}^*)^{\frac{1}{2}}(\mathbf{I}_m - \mathbf{K}\mathbf{K}^*)^{\frac{1}{2}*} + \mathbf{K}\mathbf{K}^* = \\ &= \mathbf{I}_m - \mathbf{K}\mathbf{K}^* + \mathbf{K}\mathbf{K}^* = \mathbf{I}_m \end{aligned} \quad (4.184)$$

Wykonując podobne przekształcenia dla $E\{\mathbf{S}\mathbf{S}^*\}$ dostajemy

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{U}\mathbf{U}^*\} &= \Sigma_{21}\Sigma_{21}^* + \Sigma_{22}\Sigma_{22}^* = \\ &= \mathbf{K}^*\mathbf{K} + (\mathbf{I}_n - \mathbf{K}^*\mathbf{K})^{\frac{1}{2}}(\mathbf{I}_n - \mathbf{K}^*\mathbf{K})^{\frac{1}{2}*} = \\ &= \mathbf{K}^*\mathbf{K} + \mathbf{I}_n - \mathbf{K}^*\mathbf{K} = \mathbf{I}_n \end{aligned} \quad (4.185)$$

Dowód wł. 2: Również przez sprawdzenie

$$E\{\mathbf{U}\mathbf{V}^*\} = E\{(\Sigma_{11}\mathbf{W} + \Sigma_{12}\mathbf{V})\mathbf{V}^*\} = \quad (4.186)$$

$$\begin{aligned} &= E\{\Sigma_{11}\mathbf{W}\mathbf{V}^* + \Sigma_{12}\mathbf{V}\mathbf{V}^*\} = \\ &= \Sigma_{11}E\{\mathbf{W}\mathbf{V}^*\} + \Sigma_{12}E\{\mathbf{V}\mathbf{V}^*\} = \Sigma_{12} = -\mathbf{K} \end{aligned} \quad (4.187)$$

Dowód wł. 3: Także przez sprawdzenie

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{U}\mathbf{S}^*\} &= E\{(\Sigma_{11}\mathbf{W} + \Sigma_{12}\mathbf{V})(\Sigma_{21}\mathbf{W} + \Sigma_{22}\mathbf{V})^*\} = \\ &= E\{\Sigma_{11}\mathbf{W}\mathbf{W}^*\Sigma_{21}^* + \Sigma_{11}\mathbf{W}\mathbf{V}^*\Sigma_{22}^* + \Sigma_{12}\mathbf{V}\mathbf{W}^*\Sigma_{21}^* + \Sigma_{12}\mathbf{V}\mathbf{V}^*\Sigma_{22}^*\} = \\ &= E\{\Sigma_{11}\mathbf{W}\mathbf{W}^*\Sigma_{21}^*\} + E\{\Sigma_{11}\mathbf{W}\mathbf{V}^*\Sigma_{22}^*\} + E\{\Sigma_{12}\mathbf{V}\mathbf{W}^*\Sigma_{21}^*\} + E\{\Sigma_{12}\mathbf{V}\mathbf{V}^*\Sigma_{22}^*\} \\ &= \Sigma_{11}E\{\mathbf{W}\mathbf{W}^*\}\Sigma_{21}^* + \Sigma_{11}E\{\mathbf{W}\mathbf{V}^*\}\Sigma_{22}^* + \Sigma_{12}E\{\mathbf{V}\mathbf{W}^*\}\Sigma_{21}^* + \Sigma_{12}E\{\mathbf{V}\mathbf{V}^*\}\Sigma_{22}^* \end{aligned} \quad (4.188)$$

Biorąc pod uwagę, że $E\{\mathbf{W}\mathbf{W}^*\} = \mathbf{I}_m$, $E\{\mathbf{V}\mathbf{V}^*\} = \mathbf{I}_n$, $E\{\mathbf{W}\mathbf{V}^*\} = \mathbf{0}_{m \times n}$ otrzymamy

$$E\{\mathbf{U}\mathbf{S}^*\} = \Sigma_{11}\Sigma_{21}^* + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^* \quad (4.189)$$

Wykorzystując równanie (4.175) dostaniemy

$$E\{\mathbf{U}\mathbf{S}^*\} = (\mathbf{I}_m - \mathbf{K}\mathbf{K}^*)^{\frac{1}{2}}\mathbf{K} - \mathbf{K}(\mathbf{I}_n - \mathbf{K}^*\mathbf{K})^{\frac{1}{2}*} \quad (4.190)$$

Macierz odwrotna do macierzy symetrycznej jest macierzą symetryczną. Stąd, biorąc pod uwagę, że $(\mathbf{I}_n - \mathbf{K}^*\mathbf{K})^{\frac{1}{2}*} = (\mathbf{I}_n - \mathbf{K}^*\mathbf{K})^{\frac{1}{2}}$ i przekształcając odpowiednio drugie równanie lematu 4.2 otrzymamy

$$E\{\mathbf{U}\mathbf{S}^*\} = \mathbf{K}(\mathbf{I}_n - \mathbf{K}^*\mathbf{K})^{\frac{1}{2}} - \mathbf{K}(\mathbf{I}_n - \mathbf{K}^*\mathbf{K})^{\frac{1}{2}} = \mathbf{0}_{m \times n} \quad (4.191)$$

□

Z własności pierwszej wynika, że jeśli na wejście rotora podamy dwa ortonormalne wektory (dwie bazy ortonormalne) ortogonalne względem siebie, to na wyjściu otrzymamy również dwie bazy ortonormalne. Innymi słowy globalny rotor kołowy jest elementem bezstratnym. Ponadto z własności trzeciej wynika, że wektory wyjściowe są również ortogonalne względem siebie (tak jak wektory wejściowe), co oznacza, że globalny rotor kołowy istotnie dokonuje obrotu obu baz wejściowych o ten sam 'kąt'.

Własność druga jest istotna w powiązaniu z własnościami globalnego rotora hiperbolicznego. Zauważmy, że jeśli w równaniu (4.187) podstawimy $\mathbf{K} = \mathbf{K}_{GH} = -E\{\mathbf{G}\mathbf{H}^*\}$, to $E\{\mathbf{U}\mathbf{V}^*\} = E\{\mathbf{G}\mathbf{H}^*\}$, czyli korelacja wzajemna $\mathbf{U}$ i $\mathbf{V}$ jest taka jak korelacja wzajemna $\mathbf{G}$ i $\mathbf{H}$. Jest to bardzo istotna własność rotora kołowego, polegająca na modelowaniu statystyk drugiego rzędu sygnałów.

W szczególności, jeśli podstawimy $\mathbf{W} = \mathbf{B}$, $\mathbf{V} = \mathbf{H}$ oraz $\mathbf{K} = \mathbf{K}_{GH}$, to $\mathbf{U} = \mathbf{G}$ i oczywiście $E\{\mathbf{U}\mathbf{V}^*\} = E\{\mathbf{G}\mathbf{H}^*\}$.

4.8.2 Realizacja struktury filtru modelującego 2D

W punkcie 4.8.1 — korzystając z opisu globalnego rotora hiperbolicznego zrealizowanego w postaci transformacji Halmosa macierzy korelacji wektorów wejściowych — wyprowadziliśmy równania globalnego rotora kołowego. Teraz pokażemy, że używając tych równań można dowieść istnienia globalnego rotora kołowego w postaci macierzy odpowiednio połączonych rotorów kołowych wymiaru 1×1 .

Założmy, że globalny rotor kołowy z rys.4.22a) wymiaru $m \times n$ opisany równaniem (4.175) dzielimy na dwa mniejsze rotory o wymiarach $p \times n$ każdy tak, jak to pokazano na rys.4.22b). Równania tych rotorów wyglądają następująco:

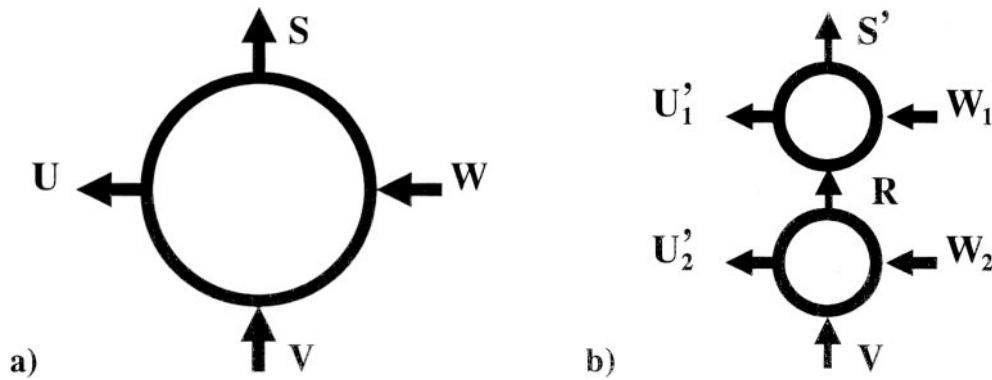
$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}'_1 \\ \mathbf{S}' \end{bmatrix} = \Sigma^1 \begin{bmatrix} \mathbf{W}_1 \\ \mathbf{R} \end{bmatrix} \quad (4.192)$$

oraz

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}'_2 \\ \mathbf{R} \end{bmatrix} = \Sigma^2 \begin{bmatrix} \mathbf{W}_2 \\ \mathbf{V} \end{bmatrix} \quad (4.193)$$

które łącznie przybierają postać

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}' \\ \mathbf{S}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}'_1 \\ \mathbf{U}'_2 \\ \mathbf{S}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_{11}^1 & \Sigma_{12}^1\Sigma_{21}^2 & \Sigma_{12}^1\Sigma_{22}^2 \\ \mathbf{0} & \Sigma_{11}^2 & \Sigma_{12}^2 \\ \Sigma_{21}^1 & \Sigma_{22}^1\Sigma_{21}^2 & \Sigma_{22}^1\Sigma_{22}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{W}_1 \\ \mathbf{W}_2 \\ \mathbf{V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_{11}' & \Sigma_{12}' \\ \Sigma_{21}' & \Sigma_{22}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{W} \\ \mathbf{V} \end{bmatrix} \quad (4.194)$$



Rys. 4.22: Globalny rotor kołowy: a) w całości, b) podzielony na dwa mniejsze rotory.

Zakładamy, że W i V są ortonormalne i ortogonalne względem siebie tj. spełniają warunki (4.176). Wówczas $U' \triangleq \text{col}[U'_1 U'_2]$ spełnia te same własności co U , tj. $E\{U'U'^*\} = I_m$ oraz $E\{U'V^*\} = -K$.

Pokażemy najpierw, że

$$E\{U'U'^*\} = \begin{bmatrix} E\{U'_1 U'^*_1\} & E\{U'_1 U'^*_2\} \\ E\{U'_2 U'^*_1\} & E\{U'_2 U'^*_2\} \end{bmatrix} = I_m \quad (4.195)$$

Zgodnie z równaniem (4.194)

$$\begin{aligned} E\{U'_1 U'^*_1\} &= E\{(\Sigma_{11}^1 W_1 + \Sigma_{12}^1 \Sigma_{21}^2 W_2 + \Sigma_{12}^1 \Sigma_{22}^2 V) \cdot \\ &\quad (\Sigma_{11}^1 W_1 + \Sigma_{12}^1 \Sigma_{21}^2 W_2 + \Sigma_{12}^1 \Sigma_{22}^2 V)^*\} = \\ &= E\{\Sigma_{11}^1 W_1 W_1^* \Sigma_{11}^{1*}\} + E\{\Sigma_{11}^1 W_1 W_2^* \Sigma_{21}^{2*} \Sigma_{12}^{1*}\} + \\ &+ E\{\Sigma_{11}^1 W_1 V^* \Sigma_{22}^{2*} \Sigma_{12}^{1*}\} + E\{\Sigma_{12}^1 \Sigma_{21}^2 W_2 W_1^* \Sigma_{11}^{1*}\} + \\ &+ E\{\Sigma_{12}^1 \Sigma_{21}^2 W_2 W_2^* \Sigma_{21}^{2*} \Sigma_{12}^{1*}\} + E\{\Sigma_{12}^1 \Sigma_{21}^2 W_2 V^* \Sigma_{22}^{2*} \Sigma_{12}^{1*}\} + \\ &+ E\{\Sigma_{12}^1 \Sigma_{22}^2 V W_1^* \Sigma_{11}^{1*}\} + E\{\Sigma_{12}^1 \Sigma_{22}^2 V W_2^* \Sigma_{21}^{2*} \Sigma_{12}^{1*}\} + E\{\Sigma_{12}^1 \Sigma_{22}^2 V V^* \Sigma_{22}^{2*} \Sigma_{12}^{1*}\} \end{aligned} \quad (4.196)$$

Biorąc pod uwagę zależności (4.176) i równanie globalnego rotora kołowego (4.175) dostaniemy

$$\begin{aligned} E\{U'_1 U'^*_1\} &= \Sigma_{11}^1 \Sigma_{11}^{1*} + \Sigma_{12}^1 \Sigma_{21}^2 \Sigma_{21}^{2*} \Sigma_{12}^{1*} + \Sigma_{12}^1 \Sigma_{22}^2 \Sigma_{22}^{2*} \Sigma_{12}^{1*} = \\ &= (I_p - K_1 K_1^*)^{\frac{1}{2}} (I_p - K_1 K_1^*)^{\frac{1}{2}*} + \\ &+ K_1 K_2^* K_2 K_1^* + K_1 (I_n - K_2^* K_2)^{\frac{1}{2}} (I_n - K_2^* K_2)^{\frac{1}{2}*} K_1^* = \\ &= (I_p - K_1 K_1^*) + K_1 K_2^* K_2 K_1^* + K_1 (I_n - K_2^* K_2) K_1^* = \\ &= (I_p - K_1 K_1^*) + K_1 (I_n - K_2^* K_2 + K_2^* K_2) K_1^* = \\ &= (I_p - K_1 K_1^*) + K_1 K_1^* = I_p \end{aligned} \quad (4.197)$$

Z kolei

$$\begin{aligned} E\{U'_2 U'^*_2\} &= E\{(\Sigma_{11}^2 W_2 + \Sigma_{12}^2 V)(\Sigma_{11}^2 W_2 + \Sigma_{12}^2 V)^*\} = \\ &= \Sigma_{11}^2 \Sigma_{11}^{2*} + \Sigma_{12}^2 \Sigma_{12}^{2*} = \\ &= (I_p - K_2 K_2^*) + K_2 K_2^* = I_p \end{aligned} \quad (4.198)$$

oraz

$$\begin{aligned} E\{U'_1 U'^*_2\} &= E\{(\Sigma_{11}^1 W_1 + \Sigma_{12}^1 \Sigma_{21}^2 W_2 + \Sigma_{12}^1 \Sigma_{22}^2 V)(\Sigma_{11}^2 W_2 + \Sigma_{12}^2 V)^*\} = \\ &= \Sigma_{12}^1 \Sigma_{21}^{2*} \Sigma_{11}^{1*} + \Sigma_{12}^1 \Sigma_{22}^2 \Sigma_{12}^{1*} = \\ &= -K_1 K_2^* (I_p - K_2 K_2^*)^{\frac{1}{2}} + K_1 (I_n - K_2^* K_2)^{\frac{1}{2}*} K_2^* = 0_{p \times p} \end{aligned} \quad (4.199)$$

Powyższe równości pokazują, że istotnie $E\{\mathbf{U}'\mathbf{U}'^*\} = \mathbf{I}_m$.
Dalsze własności:

$$E\{\mathbf{U}'_1 \mathbf{V}^*\} = E\{(\Sigma_{11}^1 \mathbf{W}_1 + \Sigma_{12}^1 \Sigma_{21}^2 \mathbf{W}_2 + \Sigma_{12}^1 \Sigma_{22}^2 \mathbf{V}) \mathbf{V}^*\} \quad (4.200)$$

Ze względu na warunki (4.176) mamy

$$E\{\mathbf{U}'_1 \mathbf{V}^*\} = \Sigma_{12}^1 \Sigma_{22}^2 = -\mathbf{K}_1 (\mathbf{I}_n - \mathbf{K}_2^* \mathbf{K}_2)^{\frac{1}{2}} = -\mathbf{K}_1 (\Theta_{22}^2)^{-1} \quad (4.201)$$

a ponieważ $(\Theta_{22}^2)^{-1}$ jest macierzą symetryczną, to $(\Theta_{22}^2)^{-1} = (\Theta_{22}^2)^{-*}$ i wówczas – zgodnie z równaniem (4.81) – otrzymamy

$$E\{\mathbf{U}'_1 \mathbf{V}^*\} = -\mathbf{K}_1 (\Theta_{22}^2)^{-*} = -\mathbf{K}_1^{(G)} = E\{\mathbf{G}_1 \mathbf{H}^*\} \quad (4.202)$$

Podobnie, biorąc pod uwagę (4.82) dostajemy

$$E\{\mathbf{U}'_2 \mathbf{V}^*\} = E\{(\Sigma_{11}^2 \mathbf{W}_2 + \Sigma_{12}^2 \mathbf{V}) \mathbf{V}^*\} = \Sigma_{12}^2 = -\mathbf{K}_2 = E\{\mathbf{G}_2 \mathbf{H}^*\} \quad (4.203)$$

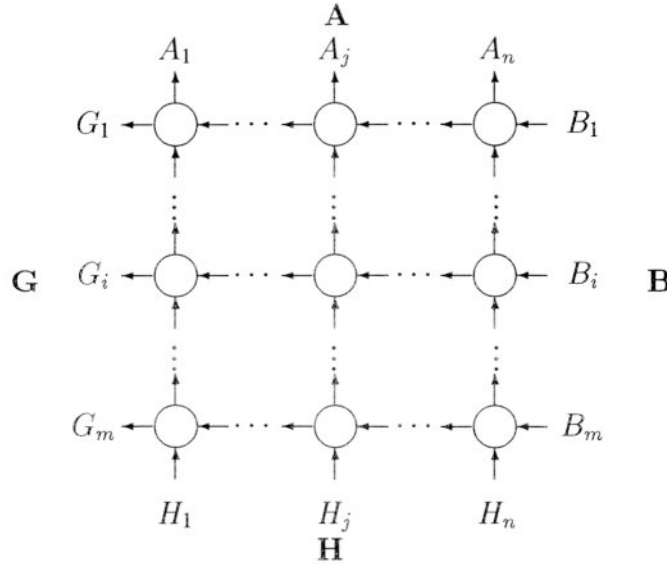
Innymi słowy, korelacje wektorów $\mathbf{U}'_1$ i $\mathbf{U}'_2$ z wektorem $\mathbf{V}$ są identyczne jak korelacje wektorów $\mathbf{G}_1$ i $\mathbf{G}_2$ z $\mathbf{H}$, tj.

$$E\{\mathbf{U}' \mathbf{V}^*\} = E\{\mathbf{U} \mathbf{V}^*\} = E\{\mathbf{G} \mathbf{H}^*\} \quad (4.204)$$

Powyższe równania stwierdzają, że zarówno globalny rotor kołowy w postaci (4.175) jak i układ dwóch mniejszych (globalnych) rotorów kołowych odtwarza statystyki drugiego rzędu. Dla porządku pokażemy jeszcze, że jeśli $\mathbf{W}_1 \perp \mathbf{V}$, to $\mathbf{W}_1 \perp \mathbf{R}$. Istotnie,

$$E\{\mathbf{W}_1 \mathbf{R}^*\} = E\{\mathbf{W}_1 ((\Sigma_{11}^2 \mathbf{W}_2 + \Sigma_{22}^2 \mathbf{V})^*)\} = \mathbf{0}_{p \times n} \quad (4.205)$$

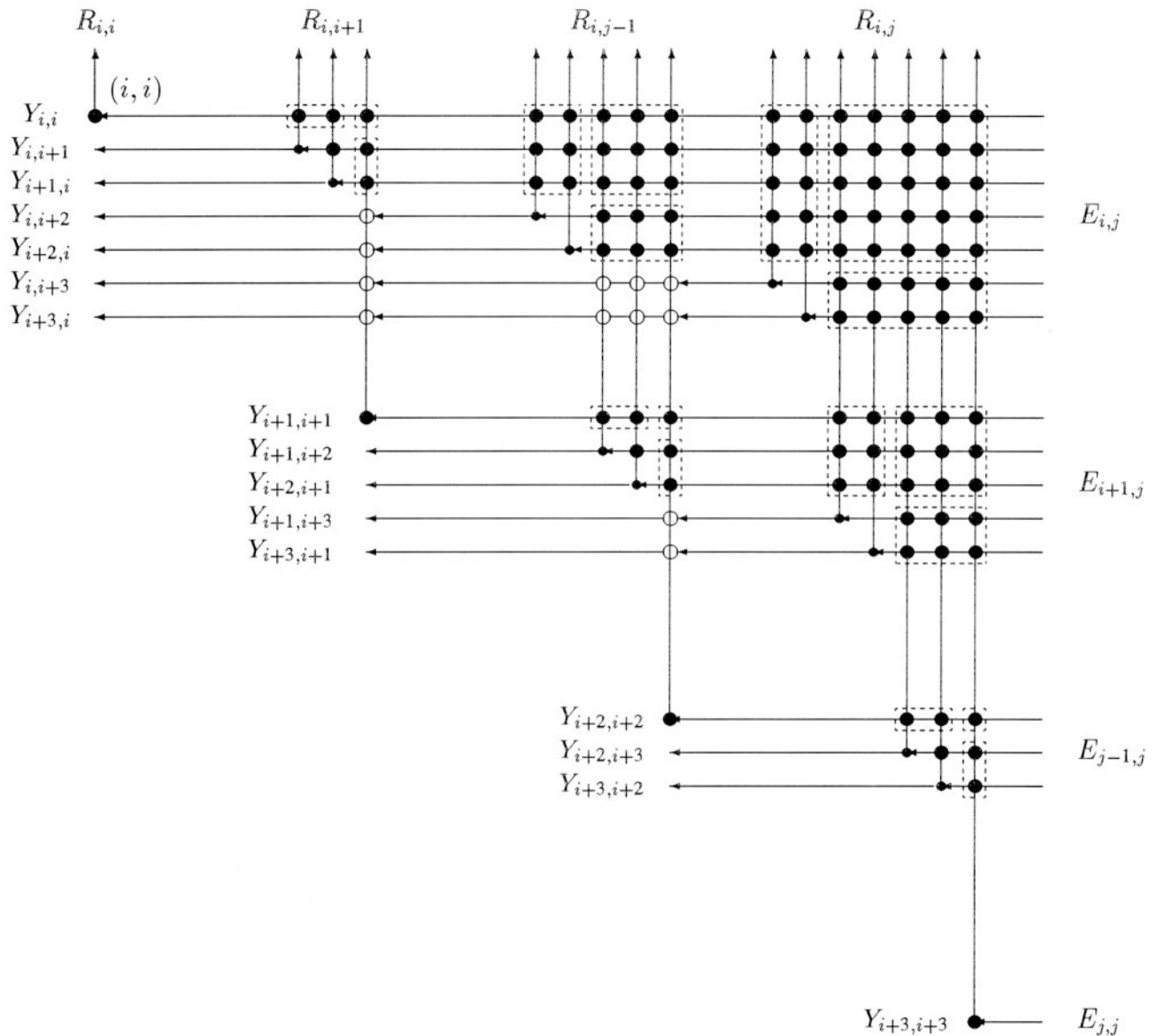
ponieważ z założenia $\mathbf{W}_1 \perp \mathbf{W}_2$ (ortonormalność $\mathbf{W}$) oraz $\mathbf{W}_1 \perp \mathbf{V}$ (ortogonalność $\mathbf{W}$ i $\mathbf{V}$).



Rys. 4.23: Globalny rotor kołowy wymiaru $m \times n$ zrealizowany w postaci macierzy rotorów kołowych wymiaru 1×1 .

Oczywiście, kolejne podziały globalnego rotora kołowego wymiaru $m \times n$ opisanego równaniem (4.175) doprowadzą ostatecznie do realizacji rotora globalnego w postaci macierzy rotorów kołowych wymiaru 1×1 . Realizację takiego rotora o wymiarach $m \times n$ pokazano na rys.4.23.

Ponieważ każdy globalny rotor kołowy modeluje ortonormalne wektory zmiennych losowych, których korelacja wzajemna jest taka jak korelacja wektorów parametryzowanych, to idea filtru modelującego jest prosta. Wystarczy zamienić wszystkie rotory hiperboliczne (globalne/lokalne) na rotory kołowe (globalne/lokalne). Weźmy pod uwagę rys.4.18 i zauważmy, że zamieniając kolejno wszystkie rotory hiperboliczne (poczynając od ostatniego wiersza rotorów, a w ramach każdego wiersza od ostatniego rotora w wierszu) na rotory kołowe otrzymamy w konsekwencji — na mocy twierdzenia 4.3 — sygnał parametryzowany. Jeśli zamiast pola $\mathbf{E}$ użyjemy do modelowania dowolnego innego pola ortonormalnego, to w wyniku otrzymamy pole, które — również na mocy twierdzenia 4.3 — będzie zachowywało statystyki drugiego rzędu pola parametryzowanego. Innymi słowy, macierze kowariancji (w tym wypadku cztero-indeksowe) pola parametryzowanego i otrzymanego w wyniku modelowania są identyczne.



Rys. 4.24: Filtr modelujący 2D o parametrach zmiennych — komplementarny do filtru parametryzującego o zmiennych parametrach.

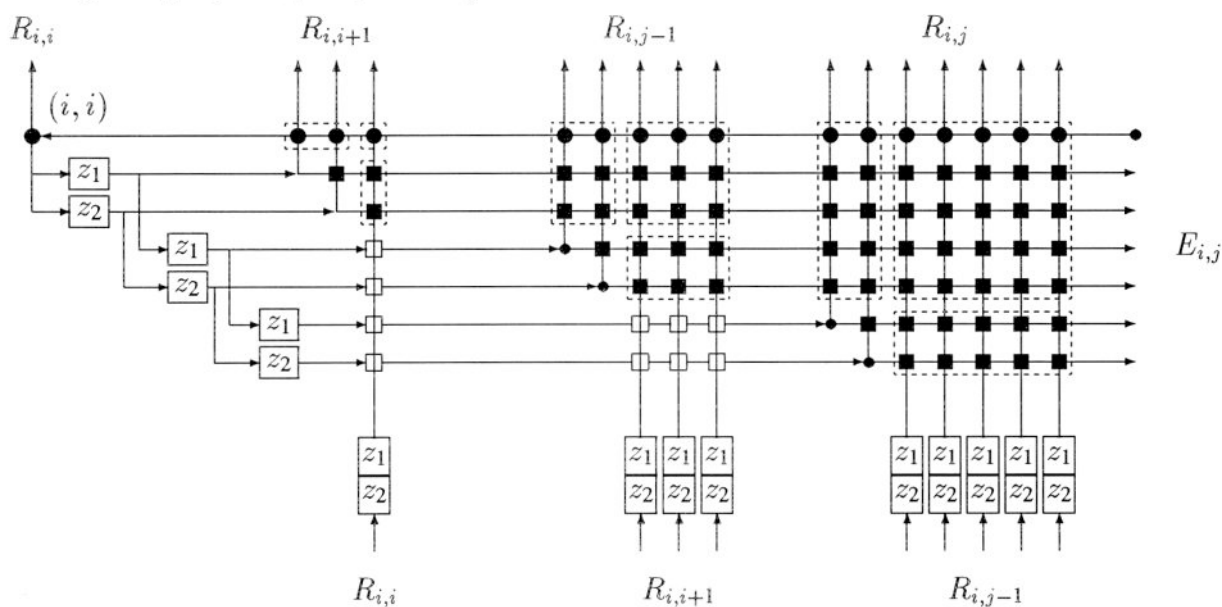
Na rys.4.24 pokazano strukturę filtru modelującego 3-go rzędu (komplementarną do struktury z

rys.4.18). Globalne rotory kołowe zostały (podobnie jak dla filtru innowacyjnego) zrealizowane w postaci macierzy odpowiednio połączonych pojedynczych rotorów kołowych. Koła zaczerńnione odpowiadają rotorom wykonującym dwie rotacje, a koła niezaczerńnione odpowiadają rotorom kołowym wykonującym tylko jedną rotację.

4.8.3 Filtry modelujące 2D o parametrach stałych

W paragrafie 4.7.2 pokazaliśmy w jaki sposób – przy założeniu stacjonarności pola – można uprościć strukturę filtru 2D o parametrach zmiennych.

Przeprowadzając analogiczne rozumowanie możemy strukturę filtru modelującego o parametrach zmiennych (rys.4.24) uprościć do postaci pokazanej na rys.4.25. Istotnie, jeśli współczynniki generowane w każdym kroku (poruszając się po przekątnej pola) są takie same, to filtr generuje tę samą bazę ON w tył.



Rys. 4.25: Filtr modelujący 2D o parametrach stałych.

4.8.4 Modelowanie stochastyczne pól losowych 2D

Modelowanie stochastyczne dwuwymiarowych pól losowych stanowi uogólnienie idei modelowania sygnałów jednowymiarowych i polega na wykorzystaniu współczynników Schura do kształtowania charakterystyki widmowej gęstości mocy dwuwymiarowego pola białego.

W procesie modelowania zadajemy na wejście filtru modelującego pole białe (w sensie definicji 4.4), które modelujemy współczynnikami Schura. Współczynniki te niosą ze sobą informację o widmowej gęstości mocy pewnego pola losowego. W szczególności, można je otrzymać w drodze uogólnionej na przypadek 2-D parametryzacji Schura.

W dalszej dyskusji przez *krok algorytmu parametryzacji* będziemy rozumieć wyznaczenie wszystkich błędów w przód i w tył tego samego rzędu. Odpowiada to przetworzeniu jednej 'diagonali' w strukturze filtru innowacyjnego, której elementy (globalne współczynniki Schura) określone są tą samą różnicą dolnych indeksów; różnica ta określa jednocześnie indeks diagonali.

Jeśli w fazie parametryzacji otrzymaliśmy pole białe (parametryzacja całkowita), to otrzymane współczynniki Schura pozwolą zamodelować pole, którego czteroindeksowa macierz kowariancji jest identyczna z macierzą kowariancji pola parametryzowanego, co opisaliśmy w paragrafie 4.8.2.

Jeśli jednak pole innowacyjne nie było białe (parametryzacja częściowa), to zadając w fazie modelowania pole białe otrzymamy pole, którego macierz kowariancji zgadza się z macierzą kowariancji sygnału parametryzowanego na zbiorze indeksów określających wykorzystane do modelowania współczynniki Schura. W ogólnym przypadku macierze kowariancji obu pól różnią się na pozostałym zbiorze indeksów, co potwierdzają odpowiednie symulacje zamieszczone, wraz z opisem, w rozdziale 5 (rys.5.2).

Rozdział 5

Badania symulacyjne filtracji innowacyjnej i modelowania pól losowych 2D

W rozdziale 4 zaproponowaliśmy algorytmy parametryzacji i modelowania stochastycznego pól losowych 2D działające w przestrzeni zmiennych losowych. W tym rozdziale pokażemy działanie tych algorytmów w przestrzeni próbek sygnału 2D a także pokażemy kilka istotnych wyników symulacji komputerowych.

5.1 Filtracja innowacyjna i modelowanie stochastyczne szeregów 2D

Dotychczas, rozważając zmienne losowe, zakładaliśmy, że zmienne te są unormowane i scentrowane. Chcąc zasymulować działanie algorytmów powinniśmy dysponować estymatorami zmiennych losowych $\hat{y}_i$ dla każdej rozważanej chwili czasu (w przypadku 1D) lub estymatorami $\hat{y}_{ij}$ dla każdej pozycji zmiennych przestrzennych (w przypadku 2D). Oznacza to, że powinniśmy dysponować wieloma realizacjami przetwarzanego procesu. W praktyce taki przypadek jest niespotykany. Zwykle dysponujemy jedną, a w rzadkich wypadkach kilkoma realizacjami. Realizacja, którą dysponujemy musi 'wystarczyć' do wyestymowania statystyk drugiego rzędu pola, do którego należy. Takie wymaganie – odniesione do procesu stochastycznego – sprowadza się do założenia o jego ergodyczności. Wówczas bowiem, pojedyncza realizacja jest dobrym reprezentantem procesu, co jest warunkiem koniecznym utworzenia szeregu estymatorów zmiennych losowych na podstawie jednej realizacji, danej w postaci szeregu czasowego.

Wyjaśnijmy, że model procesu jest nam potrzebny do wyznaczenia współczynników filtru. Jeśli je znamy, możemy poprawnie sparametryzować każdą realizację procesu, dla którego owe współczynniki zostały wyznaczone.

Rozważmy przestrzeń l_2 nieskończonych ciągów skalarów $f_0, f_1, \dots$ takich, że

$$\sum_{i=0}^{\infty} |f_i|^2 \leq \infty \quad (5.1)$$

Biorąc pod uwagę zbiór wektorów

$$e_i = [0 \cdots 0 \underbrace{1}_i 0 \cdots] \quad i = 0, 1, \dots \quad (5.2)$$

stanowiących bazę naturalną przestrzeni l_2 , tj.

$$l_2 = \text{span}\{e_0, e_1, \dots, e_n, \dots\} \quad (5.3)$$

możemy dowolny element tej przestrzeni wyrazić jako

$$F \triangleq \sum_{i=0}^{\infty} f_i e_i = [f_0, f_1, \dots, f_n, \dots]. \quad (5.4)$$

Ze względów praktycznych, ciągi skalarów muszą być skończone; możemy więc mówić tylko o estymatorach określonych wielkości wyznaczonych w pewnej podprzestrzeni przestrzeni l_2 . Dodatkowo, ze względu na to, że używamy arytmetyki o skończonej precyzji (ograniczona ilość bitów reprezentujących liczbę), pewne punkty w powyższej podprzestrzeni są nieosiągalne, co prowadzi do błędów zaokrągleń.

W niniejszym podrozdziale przyjmujemy tzw. notację braketową¹ [27].

Niech $y = [y_0, y_1, \dots, y_{T-1}] \in l_2$ będzie szeregiem czasowym o długości T interpretowanym jako pojedyncza realizacja pewnego procesu losowego. Zdefiniujmy wektor typu "ket" jako

$$|y\rangle_T \triangleq [y_0, y_1, \dots, y_{T-1}], \quad (5.5)$$

gdzie elementami powyższego wektora są skalary.

Jeśli rozważany proces jest stacjonarny i ergodyczny, to pojedyncza realizacja jest dobrym estymatorem zmiennej losowej należącej do tego procesu. Wówczas – na mocy izomorfizmu Kołmogorowa [64] – zachodzi odpowiedniość pomiędzy elementami obu przestrzeni

$$y(t) \in L_2 \longleftrightarrow |y\rangle \in l_2 \quad (5.6)$$

$$y(t-k) \in L_2 \longleftrightarrow |z^k y\rangle \in l_2 \quad (5.7)$$

gdzie

$$|z^k y\rangle \triangleq [\underbrace{0, \dots, 0}_k, y_0, y_1, \dots]. \quad (5.8)$$

Stąd widać, że dana realizacja jest estymatorem zmiennej losowej $y(t)$, a estymatory pozostałych (tj. $T-1$) zmiennych losowych tworzymy poprzez przesunięcie tej realizacji o odpowiednią ilość miejsc.

Z powyższej odpowiedniości wynika w szczególności równość (asymptotyczna) iloczynów skalarnych w przestrzeniach L_2 i l_2

$$(y(t), y(t-k)) = E\{y(t)y(t-k)\} \stackrel{st., erg.}{=} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{\infty} y_t y_{t-k} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \langle y | z^k y \rangle_T \quad (5.9)$$

gdzie wektor $\langle z^k y |_T$ jest wektorem typu "bra" (lub po prostu transpozycją). Równość (5.9) implikuje izometrię obu przestrzeni.

Powyższe rozważania można łatwo uogólnić na przypadek pól losowych 2D. Niech $\{y_{i,j}\}_{i,j=0,\dots,M-1}$ będzie realizacją dwuwymiarowego pola losowego. Uogólniony wektor typu "ket" definiujemy jako

$$|y\rangle_M \triangleq [y(i,j)]_{i,j=0,\dots,M-1}. \quad (5.10)$$

¹Nazwa tej notacji bierze się od angielskiego słowa "bracket" (nawias).

gdzie $y(i, j)$ są skalarami (próbki sygnału 2D). Dla uproszczenia notacji przyjmujemy, że $|y\rangle_M$ jest macierzą kwadratową wymiaru $M \times M$. W przetwarzaniu obrazów wielkość (5.10) jest interpretowana jako macierz pikseli obrazu o wartościach $y(i, j)$ reprezentujących poziom jasności.

Przez

$$|z_r^i z_c^j y\rangle_M \quad (5.11)$$

będziemy rozumieć macierz $|y\rangle_M$ przesuniętą o i wierszy w dół i j kolumn w prawo z wyzerowanymi i wierszami i j kolumnami tak, że

$$|z_r^i z_c^j y\rangle_M = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(i \times j)} & & \mathbf{0}_{(i \times M-1-j)} \\ & y_{00} & \cdots & y_{0, M-1-j} \\ \mathbf{0}_{(M-1-i \times j)} & \vdots & \ddots & \vdots \\ & y_{M-1-i, 0} & \cdots & y_{M-1-i, M-1-j} \end{bmatrix}.$$

Uogólniając przypadek jednowymiarowy, zbiór

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} |z_r^0 z_c^0 y\rangle_M, & \cdots & |z_r^0 z_c^j y\rangle_M, & \cdots, & |z_r^0 z_c^l y\rangle_M, & \cdots, & |z_r^0 z_c^n y\rangle_M \\ |z_r^1 z_c^0 y\rangle_M, & \cdots & |z_r^1 z_c^j y\rangle_M, & \cdots, & |z_r^1 z_c^l y\rangle_M, & \cdots, & |z_r^1 z_c^n y\rangle_M \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ |z_r^i z_c^0 y\rangle_M, & \cdots & |z_r^i z_c^j y\rangle_M, & \cdots, & |z_r^i z_c^l y\rangle_M, & \cdots, & |z_r^i z_c^n y\rangle_M \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ |z_r^k z_c^0 y\rangle_M, & \cdots & |z_r^k z_c^j y\rangle_M, & \cdots, & |z_r^k z_c^l y\rangle_M, & \cdots, & |z_r^k z_c^n y\rangle_M \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ |z_r^n z_c^0 y\rangle_M, & \cdots & |z_r^n z_c^j y\rangle_M, & \cdots, & |z_r^n z_c^l y\rangle_M, & \cdots, & |z_r^n z_c^n y\rangle_M \end{array} \right\} \quad (5.12)$$

może być interpretowany jako baza przestrzeni próbek sygnału 2D wyposażonej w iloczyn skalarny

$$\langle z_r^i z_c^j y | z_r^k z_c^l y \rangle_M \triangleq \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{M-1} y(m-i, n-j) y(m-k, n-l). \quad (5.13)$$

gdzie $\langle z_r^i z_c^j y |$ jest wektorem typu "bra". Uogólniając (5.9) możemy napisać

$$(y_{i,j}, y_{k,l}) = E\{y_{i,j} y_{k,l}\} \stackrel{st., erg.}{=} \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M^2} \sum_{t=0}^{\infty} y_{i,j} y_{i-k, j-l} = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M^2} \langle z_r^i z_c^j y | z_r^k z_c^l y \rangle_M \quad (5.14)$$

Na tej podstawie możemy przyjąć, że wyniki symulacji przeprowadzane w l_2 pozwolą wnioskować o poprawności algorytmów konstruowanych dla zmiennych losowych.

Przez

$$S_{0,0}^{M-1, M-1} = \text{span}\{|z_r^0 z_c^0 y\rangle_M, \dots, |z_r^m z_c^m y\rangle_M\}, \quad p = \dim(S_{0,0}^{M-1, M-1}) = M^2 \quad (5.15)$$

będziemy teraz rozumieć przestrzeń próbek rozpiętą na bazie (5.12).

Najbardziej podstawowym elementem proponowanych struktur jest pojedynczy (lokalny) rotor hiperboliczny (dla filtru innowacyjnego) lub rotor kołowy (dla filtru modelującego). Na poziomie pojedynczego rotora możemy przetwarzanie ująć w niżej opisany sposób. Zdefiniujemy następujący wektor typu "ket":

$$|\Pi_{r,s}\rangle_M \triangleq [\delta(r-i, s-j)]_{i,j=0,\dots,M-1} \quad (5.16)$$

gdzie $\delta(i, j)$ wynosi 1 dla $i = j = 0$ i 0 poza tym. Jeśli $|e_i\rangle_M$ i $|r_i\rangle_M$ zinterpretujemy jako błędy wejściowe rotora, odpowiednio w przód i w tył, a $|e_o\rangle_M$ i $|r_o\rangle_M$ jako błędy wyjściowe, to równanie rotora (hiperbolicznego) wygląda następująco:

$$\begin{bmatrix} |e_o\rangle_M \\ |r_o\rangle_M \end{bmatrix} = \Theta \begin{bmatrix} |e_i\rangle_M \\ |r_i\rangle_M \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

Jeśli lewą i prawą stronę powyższego równania macierzowego pomnożymy przez wektor $\langle \Pi_{r,s} |_M$, to otrzymamy

$$\begin{bmatrix} e_o(r, s) \\ r_o(r, s) \end{bmatrix} = \Theta \begin{bmatrix} e_i(r, s) \\ r_i(r, s) \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

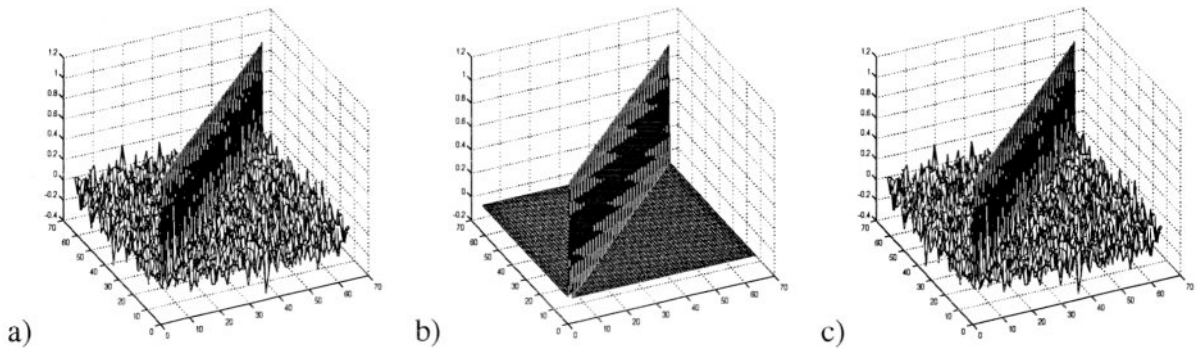
gdzie $r, s = 0, \dots, M - 1$. Inaczej mówiąc wartości leżące na pozycji (r, s) w macierzach błędów wyjściowych są kombinacjami liniowymi odpowiednich wartości stojących na pozycji (r, s) w macierzach błędów wejściowych. Algorytm filtru innowacyjnego w przestrzeni próbek wygląda podobnie jak w przestrzeni zmiennych losowych z tą jednak różnicą, że reprezentantem zmiennej losowej jest macierz próbek, a iloczyn skalarny zmiennych losowych rozumiemy teraz w sensie iloczynu określonego przez (5.13).

W proponowanych algorytmach wyznaczane są *długoterminowe* współczynniki Schura w postaci korelacji wzajemnych lokalnych błędów prognozy w przód i w tył, tj. w postaci $\rho \triangleq -\langle e|r \rangle_T$.

Symulacja 1

Przy użyciu generatora liczb pseudolosowych generujemy jedną realizację pola dwuwymiarowego o rozmiarach 64×64 piksele. Korzystając z (5.11) tworzymy model pola losowego $\mathbf{Y}$ o wymiarach 8×8 . Elementy tego pola stanowią wektory o zerowej średniej, przy czym spełniają one dwa warunki:

- są unormowane,
- stanowią bazę (łatwo to sprawdzić wyznaczając rząd macierzy utworzonej z wygenerowanych wektorów).



Rys. 5.1: Macierze kowariancji: a) pola parametryzowanego, b) pola innowacyjnego, c) pola zamodelowanego.

Na rys.5.1a) pokazano macierz kowariancji tego pola, przy czym, ze względu na to, że z definicji jest ona czterowymiarowa, przedstawiono ją w formie macierzy płaskiej rozwijając

dwuwymiarowy ciąg wektorów w ciąg jednowymiarowy i wyznaczając macierz kowariancji dla tego ciągu wyrażoną jako

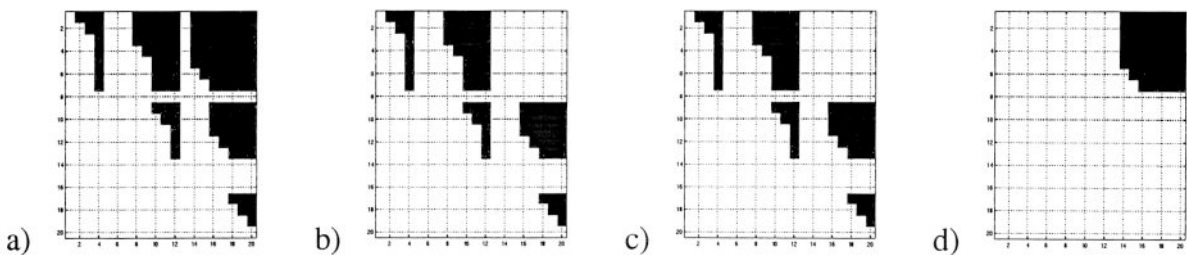
$$C = \mathbf{V}\mathbf{V}^* \quad (5.19)$$

gdzie $\mathbf{V}$ jest jednowymiarowym ciągiem elementów pola $\mathbf{Y}$ reprezentowanym w postaci macierzy, której każdy wiersz stanowi estymator jednej zmiennej losowej. Wówczas otrzymana macierz jest płaska. Pozostałe macierze przedstawiono w podobny sposób. Na rys.5.1b) pokazano macierz kowariancji pola innowacyjnego po wykonaniu parametryzacji całkowitej. Jak łatwo zauważyć jest to macierz diagonalna, co oznacza, że pole to jest ciągiem elementów ortonormalnych (polem białym). Na rysunku 5.1c prezentujemy macierz kowariancji pola zamodelowanego przy użyciu współczynników otrzymanych w procesie parametryzacji. Do symulacji algorytmu parametryzacji użyto struktury z rys.4.18, a do symulacji algorytmu modelowania – struktury z rys.4.24. W obu przypadkach użyto filtra rzędu $N = 8$, co w przypadku pola o wymiarach 8×8 oznacza całkowite wybielenie przetwarzanego pola 2D. Dane wejściowe filtra modelującego stanowiły z jednej strony współczynniki filtra, a z drugiej ortonormalny ciąg wektorów $\mathbf{W}$ otrzymany jako $\mathbf{W} = \mathbf{C}_V^{-\frac{1}{2}}\mathbf{V}$, gdzie $\mathbf{C}_V$ jest macierzą kowariancji skorelowanego pola $\mathbf{V}$ o wymiarach 8×8 , przy czym macierz $\mathbf{C}_V$ nie jest równa macierzy kowariancji pola parametryzowanego. Podkreślmy jeszcze raz, że symulacja 1 potwierdza zgodność kosinusów kierunkowych zawartych między wektorami będącymi reprezentantami zmiennych losowych pola zamodelowanego i pola oryginalnego (parametryzowanego). Inaczej, oba pola generują identyczne macierze iloczynów skalarnych wektorów reprezentujących zmienne losowe.

Jeśli przez C_y oznaczmy macierz kowariancji pola parametryzowanego, a przez C_u macierz kowariancji pola zamodelowanego, to dokładność modelowania rozumiana jako $\sum_{ij} |C_{y,ij} - C_{u,ij}|$ utrzymuje się na poziomie $10e^{-13}$, co można uznać za niedokładność spowodowaną błędami zaokrągleń (arytmetyką o skończonej precyzji). Innymi słowy, przedstawione symulacje potwierdzają poprawność proponowanych struktur.

Symulacja 2

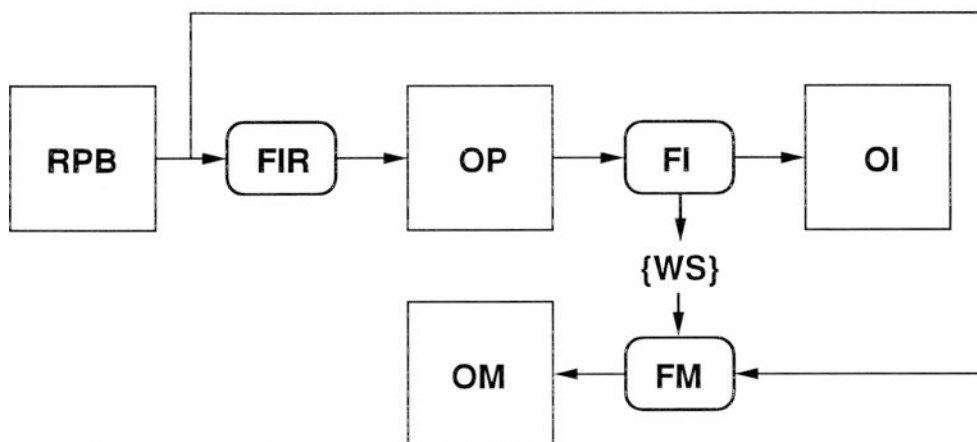
Na rys.5.2a-d pokazano wyniki symulacji parametryzacji częściowej tj. parametryzacji z odrzuceniem części wyznaczonych współczynników. Na ry.5.2a pokazano niezerowe elementy macierzy Θ współczynników parametryzowanego pola $\mathbf{Y}$. Rys.5.2b przedstawia tę samą macierz po wyzerowaniu elementów w prawym górnym rogu (oznaczoną przez Θ'). Tak przygotowaną macierz wykorzystano do zamodelowania pola $\mathbf{Y}'$. Parametryzując pole $\mathbf{Y}'$ otrzymujemy macierz współczynników Schura Θ'' pokazaną na rys.5.2c (jest ona identyczna z tą z rys.5.2b, tj. $\Theta' = \Theta''$). Różnicę macierzy $\Theta - \Theta''$ pokazano na rys.5.2d.



Rys. 5.2: Macierze współczynników Schura (pola czarne oznaczają elementy niezerowe): a) Θ (dla pola parametryzowanego), b) Θ' po wyzerowaniu współczynników w prawym górnym rogu, c) Θ'' d) różnica $\Theta'' - \Theta$

Symulacja 3

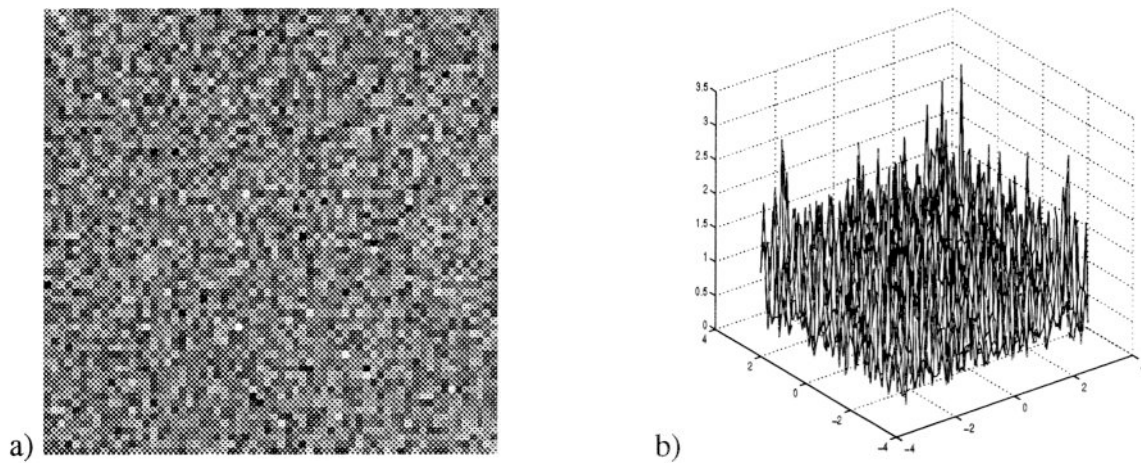
Na rys.5.3 pokazano schemat algorytmu, według którego przeprowadzono symulację. Realizacja dwuwymiarowego szumu białego (RPB), którą pokazano na rys.5.4a) a jej charakterystykę amplitudową widma na rys.5.4b), podawana jest na wejście dwuwymiarowego filtra typu FIR ograniczającego pasmo szumu białego. W efekcie otrzymujemy dolnopasmowy



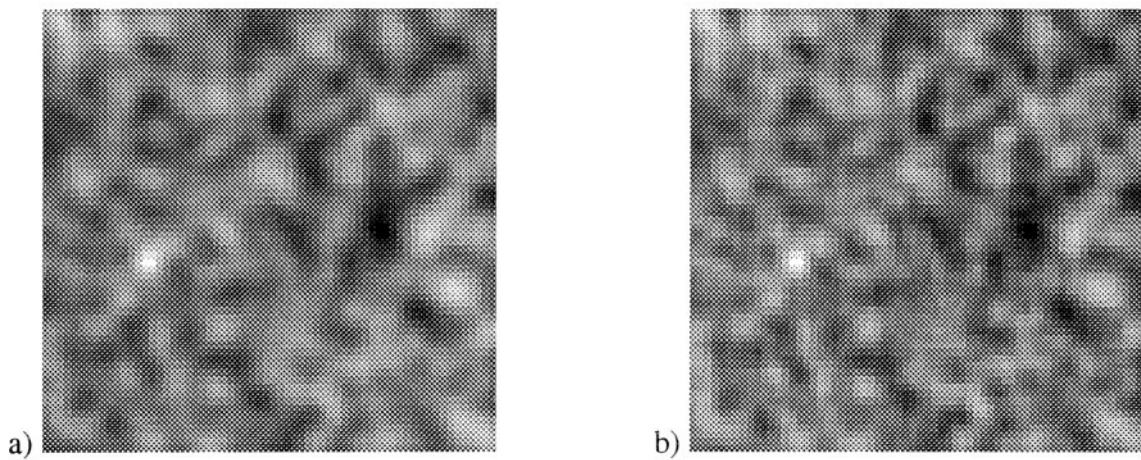
Rys. 5.3: Schemat algorytmu symulacji. Oznaczenia: RPB – realizacja pola białego, FIR – filtr 2D dolnoprzepustowy, OP – obraz parametryzowany, FI – filtr innowacyjny, OI – obraz innowacyjny, FM – filtr modelujący, OM – obraz zamodelowany, WS – zbiór współczynników Schura.

obraz (OP) pokazany na rys.5.5a), który poddajemy filtracji przy użyciu filtra innowacyjnego (FI). Wynikiem tej filtracji jest obraz innowacyjny (OI) oraz zbiór współczynników Schura, który określa filtr modelujący (FM). W fazie modelowania ta sama realizacja szumu białego jest podawana na wejście filtra modelującego (FM). Wynikiem tej filtracji jest obraz (OM) uwidoczniony na rys.5.5b). Na wejście filtra modelującego podajemy tę samą realizację szumu białego, aby w ten sposób uniezależnić wyniki symulacji (na tyle, na ile jest to możliwe) od charakterystyki widmowej pojedynczej realizacji szumu białego, która — jak to pokazano na rys.5.4b) — nie jest płaska. Na rys.5.6a i b) pokazujemy charakterystyki amplitudowe widma odpowiednio obrazu parametryzowanego i zamodelowanego. Natomiast na rys.5.7a i b) pokazujemy centralne (z powodu ich rozmiarów) fragmenty macierzy kowariancji obu obrazów. Z ich porównania wynika dobra zgodność charakterystyk widmowych obrazu parametryzowanego i zamodelowanego.

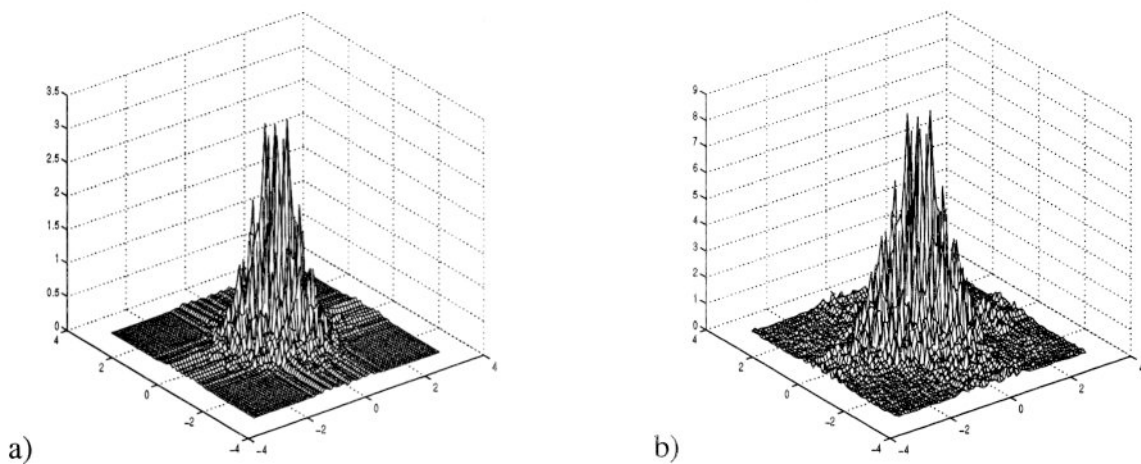
Dla porównania na rys.5.8a i b) pokazano macierze kowariancji odpowiednio sygnału szumu białego (z rys.5.4a) oraz obrazu innowacyjnego dla filtra rzędu $R = 6$. Zauważmy, że macierz z rys.5.8a) nie jest macierzą kowariancji szumu białego. Innymi słowy, sygnał z rys.5.4a) jest tylko przybliżeniem sygnału białego szumu.



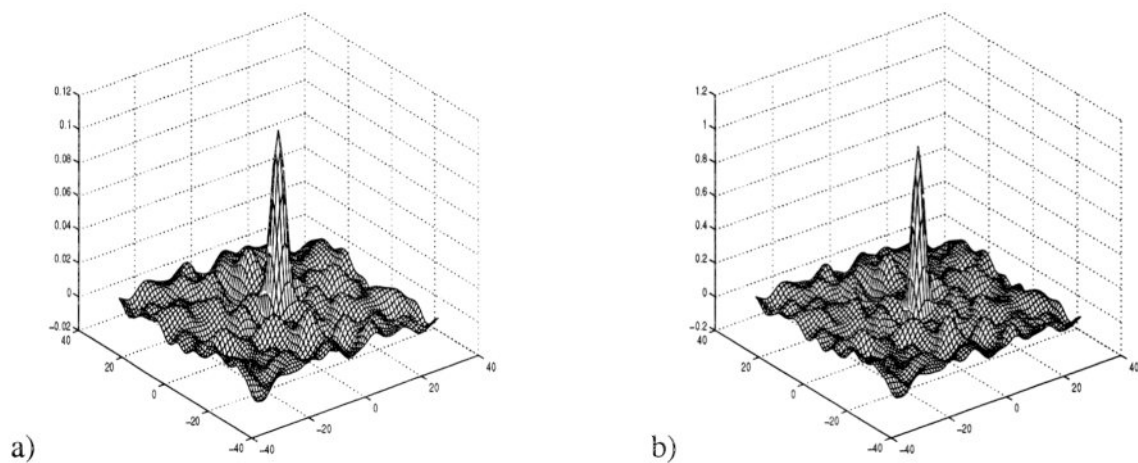
Rys. 5.4: Sygnał białego szumu gaussowskiego: a) obraz b) charakterystyka amplitudowa widma.



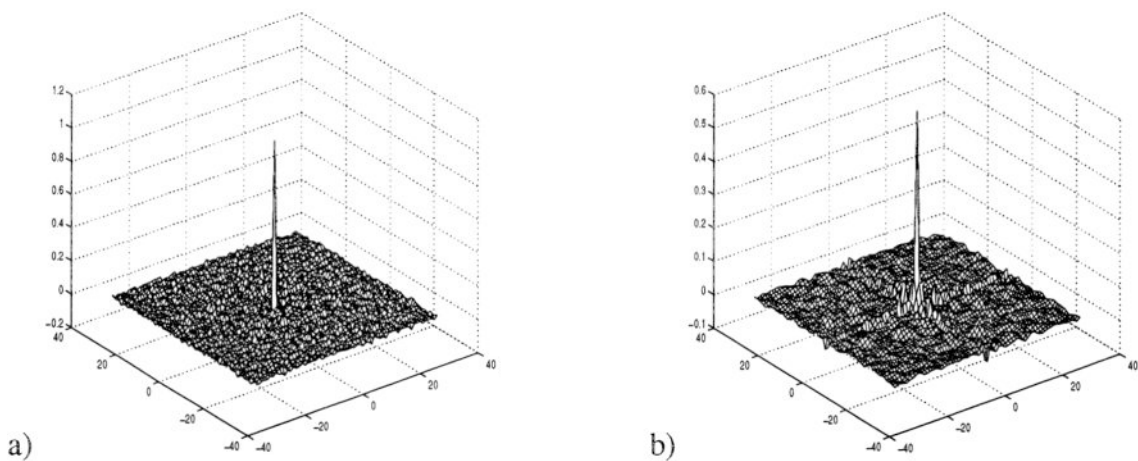
Rys. 5.5: Model MA: a) obraz parametryzowany b) obraz zamodelowany (filtr rzędu $R = 6$).



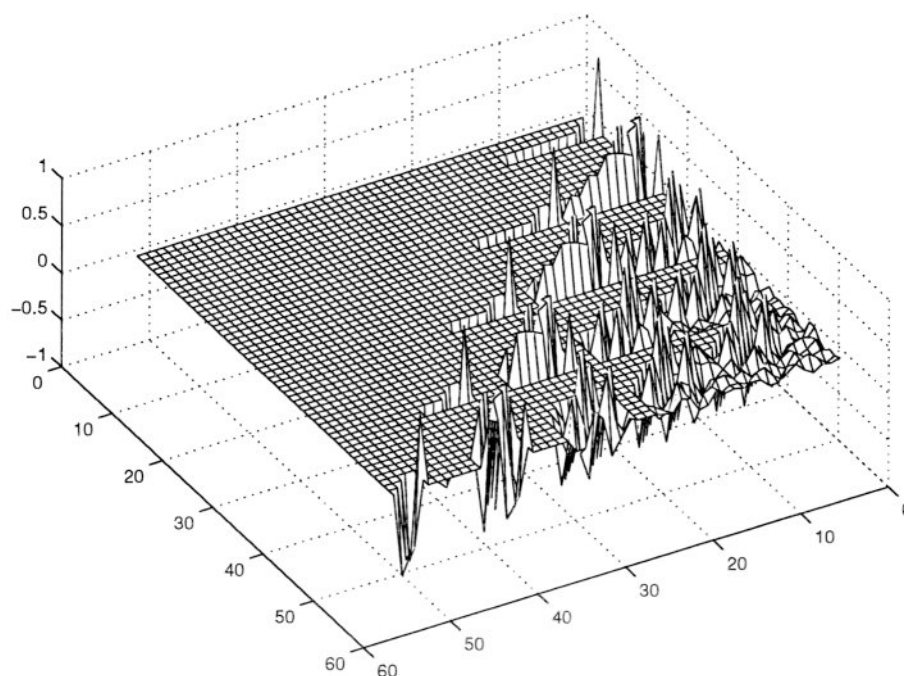
Rys. 5.6: Charakterystyka amplitudowa widma: a) obraz parametryzowany b) obraz zamodelowany (filtr rzędu $R = 6$).



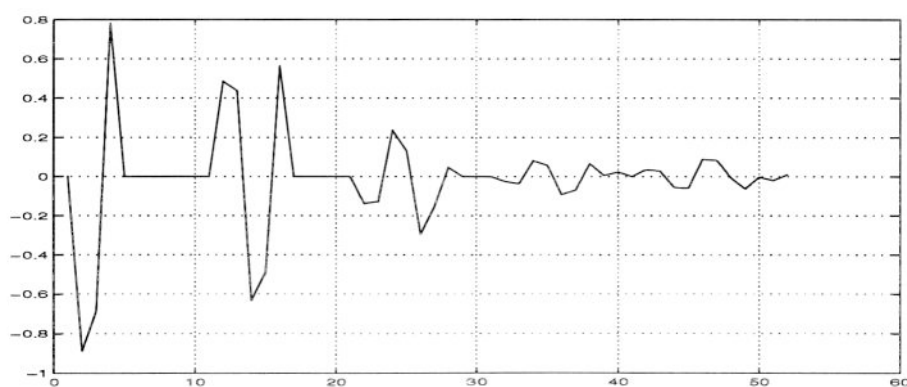
Rys. 5.7: Macierz kowariancji (centralny fragment): a) obrazu parametryzowanego b) obrazu zamodelowanego (filtr rzędu $R = 6$).



Rys. 5.8: Macierz kowariancji (centralny fragment): a) obrazu szumu białego b) obrazu innowacyjnego (filtr rzędu $R = 6$).



Rys. 5.9: Przykładowa macierz współczynników Schura. Położenie każdego współczynnika odpowiada położeniu odpowiedniego rotora w strukturze filtru.



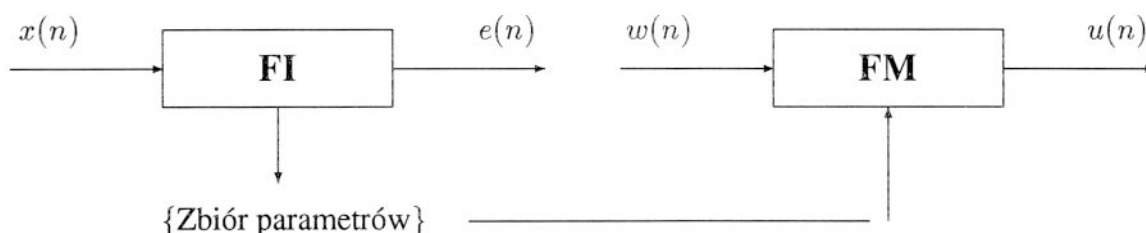
Rys. 5.10: Pierwszy wiersz prezentowanej powyżej macierzy współczynników Schura.

Rozdział 6

Metoda MDLPC transmisji sygnałów losowych 2D

Niezaprzeczalne zalety cyfrowej reprezentacji sygnałów są głównym powodem poszukiwania coraz nowocześniejszych i bardziej efektywnych metod transmisji sygnałów. Cyfrowy przekaz informacji z użyciem prostych kodów bez kompresji (np. PCM) wymaga stosowania bardzo 'szerokich' kanałów komunikacyjnych, które z wielu względów nie mogą być ogólnie dostępne. Dlatego poszukuje się rozwiązań, które zapewniają przekaz tej samej ilości użytecznej informacji 'wąskim' kanałem. Jednym z rozwiązań jest stosowanie algorytmów kompresji bezstratnej, gwarantujących wierne odtworzenie sygnału nadawanego (kodowanego). Ten sposób kodowania nie pozwala na osiągnięcie dużych współczynników kompresji i z tego powodu obecne systemy kodowania oparte są o algorytmy kompresji stratnej, które nie pozwalają wprawdzie na wierne odtworzenie sygnału zakodowanego, jednak współczynniki kompresji uzyskiwane dzięki tym metodom są – przy zachowaniu zadowalającej jakości transmitowanego sygnału – znacznie wyższe niż w przypadku kompresji bezstratnej.

Przed 20laty zaproponowano pierwsze metody kompresji sygnału mowy, dzięki którym stało się możliwe upowszechnienie telefonii cyfrowej. Najbardziej efektywne okazały się techniki kompresji stratnej oparte o metodę liniowego kodowania prognozującego (ang. LPC).

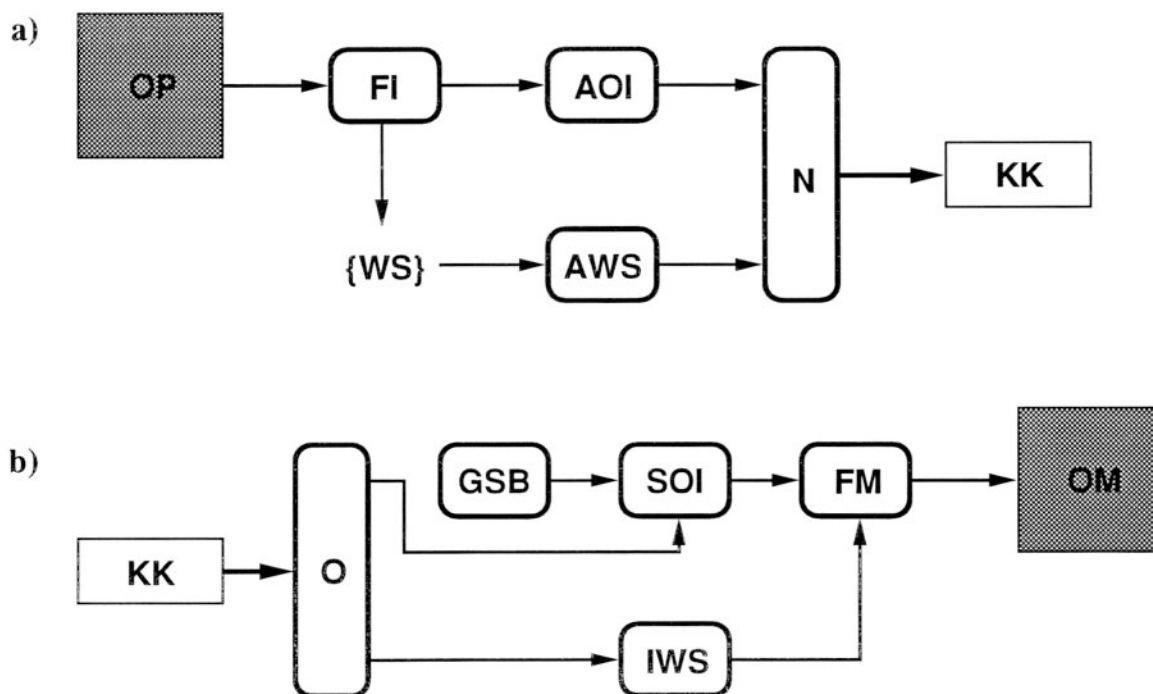


Rys. 6.1: Zasada działania prostego systemu transmisji sygnałów w oparciu o metodę LPC.

Rozważmy prosty system transmisji (z kompresją) sygnałów działający w oparciu o metodę LPC (rys.6.1). Sygnał $x(n)$ o gęstości spektralnej W_x jest poddawany parametryzacji przy użyciu filtra innowacyjnego (wybielającego), w wyniku której otrzymujemy zbiór parametrów (współczynników Schura) oraz sygnał innowacyjny $e(n)$ o gęstości spektralnej W_e , przy czym w przypadku całkowitego wybielenia mamy $W_e \equiv 1$. Kanałem transmisyjnym przesyłane są tylko współczynniki Schura. Po stronie odbiorczej sygnał $w(n)$ o gęstości spektralnej $W_w \equiv 1$ jest podawany na wejście filtra modelującego, który przy użyciu współczynników uzyskanych w procesie parametryzacji, modeluje gęstość spektralną sygnału wejściowego w taki sposób, że

sygnał zamodelowany $u(n)$ ma gęstość spektralną $W_u = W_x$. Innymi słowy sygnał parametryzowany po stronie nadawczej jest po stronie odbiorczej rekonstruowany z dokładnością do gęstości spektralnej tj. z dokładnością do statystyk drugiego rzędu. Mimo, iż narząd słuchu człowieka jest stosunkowo mało wrażliwe na zmiany w charakterystyce fazowej widma sygnału, to jednak subiektywnie oceniana jakość sygnału, w którym odtwarza się jedynie charakterystykę amplitudową widma (gęstość spektralną) sygnału oryginalnego jest nie do zaakceptowania. Wykorzystując informacje zawarte w sygnale innowacyjnym do odpowiedniego przygotowania sygnału wejściowego filtru modelującego można drastycznie poprawić jakość odtwarzanego sygnału, z zachowaniem wysokich współczynników kompresji np. [25].

Naturalnym dążeniem stało się uogólnienie tych technik na przypadek obrazów zarówno stałych jak i ruchomych. Niestety, ze względu na dużą wrażliwość oka na zmiany w charakterystyce fazowej, zadanie to okazało się znacznie trudniejsze niż pierwotnie sądzono i w zasadzie dotychczas problem nie został rozwiązany.

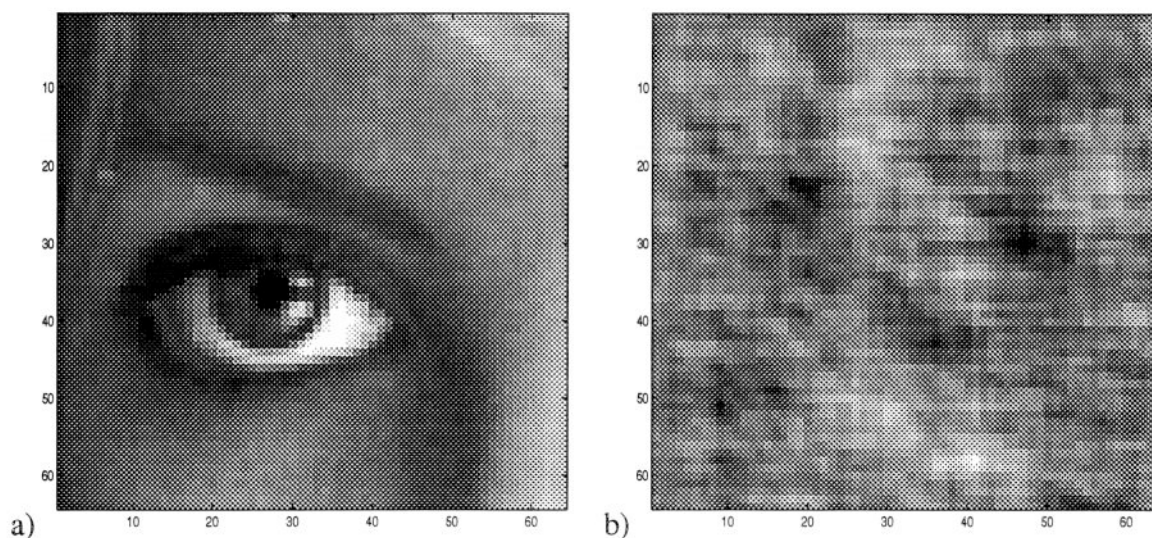


Rys. 6.2: Schemat systemu transmisji obrazów: a) schemat kodera, b) schemat dekodera. Oznaczenia: OP– obraz parametryzowany, FI– filtr innowacyjny, WS– zbiór współczynników Schura, AOI– analizator obrazu innowacyjnego, AWS– analizator współczynników Schura, N– nadajnik, KK– kanał komunikacyjny, O– odbiornik, GSB– generator szumu białego 2D, SOI– syntezer obrazu innowacyjnego, IWS– interpolator współczynników Schura, FM– filtr modelujący, OM– obraz zamodelowany.

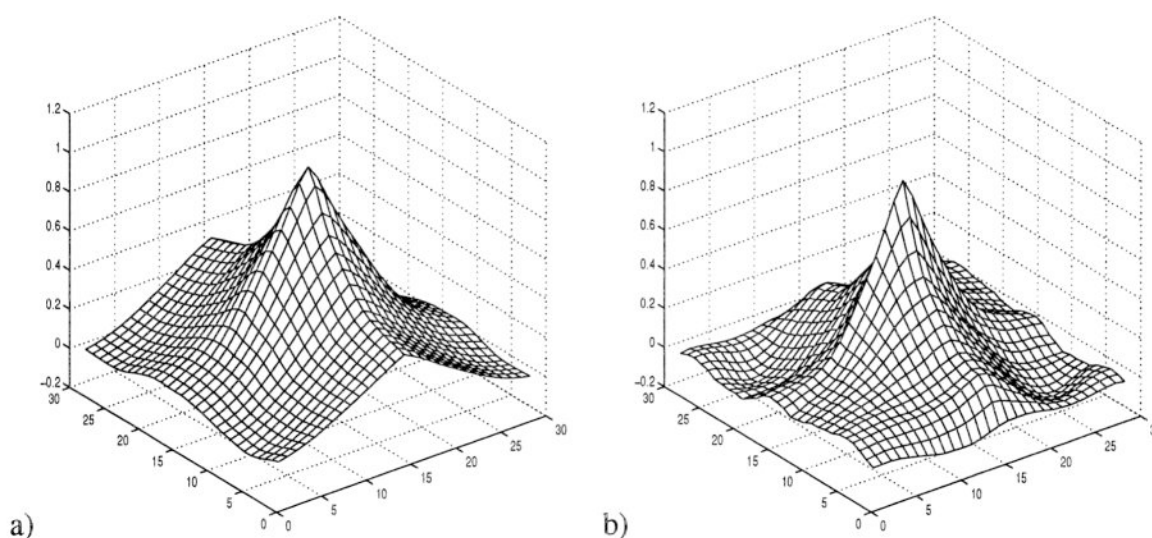
Chociaż zagadnienie transmisji obrazów rzeczywistych z wykorzystaniem algorytmów kompresji stratnej nie jest przedmiotem tej pracy, to jednak chcemy spróbować nakreślić obraz hipotetycznego systemu wykorzystującego algorytmy LPC (ściślej: MDLPC – *Multi-Dimensional LPC*) do transmisji obrazów rzeczywistych, który mógłby być użyty na przykład w wideofonii cyfrowej.

Schemat blokowy przykładowego systemu pokazano na rys.6.2. W najprostszej postaci system upraszcza się do filtru innowacyjnego (FI), nadajnika (N), odbiornika (O) oraz filtru modelującego (FM). Wówczas taki system pozwalałby wprowadzić na osiągnięcie dużych współczynników

kompresji obrazów, jednak odtwarzany obraz (rys.6.3b) byłby zgodny z oryginałem (rys.6.3a) tylko w sensie widmowej gęstości mocy lub – równoważnie – w sensie statystyk drugiego rzędu (rys.6.4a i b).



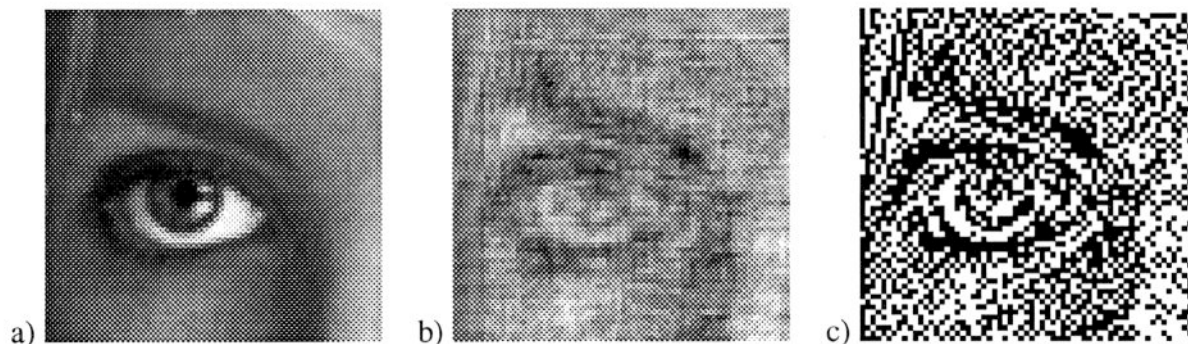
Rys. 6.3: Obraz testowy: a) oryginalny, b) zamodelowany, bez uwzględnienia informacji zawartej w obrazie innowacyjnym (filtr rzędu $R = 6$).



Rys. 6.4: Fragment macierzy kowariancji obrazu: a) oryginalnego, b) zamodelowanego (filtr rzędu $R=14$).

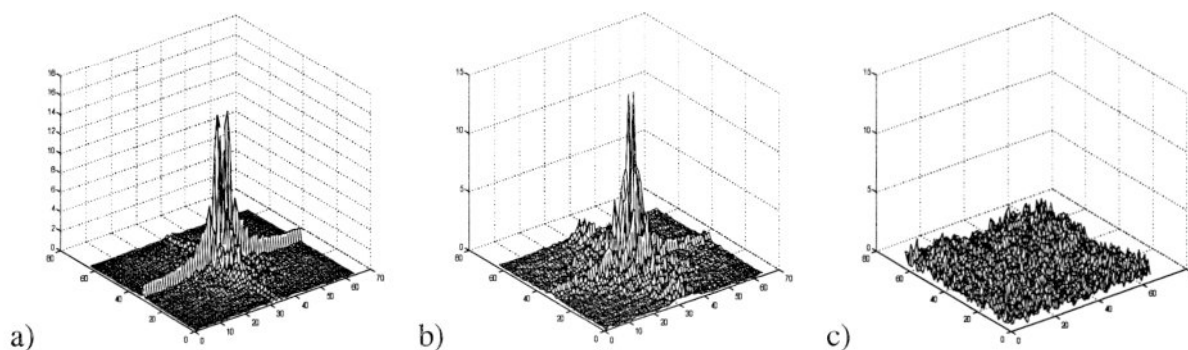
Z punktu widzenia transmisji obrazów rzeczywistych taki system jest nie do przyjęcia. Ponieważ, jak powiedzieliśmy, sygnał innowacyjny i zbiór współczynników Schura stanowią, w sumie, jednoznaczną reprezentację obrazu, to należy się spodziewać, że wykorzystując w procesie modelowania informacje zawarte w sygnale innowacyjnym, można znacznie poprawić obiektywną jakość odbioru. Na schemacie z rys.6.2 bloki odpowiedzialne za przetwarzanie informacji zawartej w sygnale innowacyjnym oznaczono jako AOI oraz SOI. Blok AOI analizuje obraz innowacyjny pod kątem informacji przydatnych przy modelowaniu obrazu odtwarzanego i odpowiednie informacje przesyła do nadajnika, gdzie wraz z wyznaczonymi współczynnikami

Schura są one kodowane bezstratnie (np. kodowanie arytmetyczne) i przygotowywane do transmisji kanałem komunikacyjnym. Dodatkowo można poddać analizie zbiór współczynników Schura otrzymany w drodze parametryzacji. Dla obrazów izotropowych (lub kawałkami izotropowych) liczbę użytecznych współczynników Schura można radykalnie zmniejszyć.



Rys. 6.5: Modelowanie z uwzględnieniem informacji zawartej w sygnale innowacyjnym. a) obraz oryginalny, b) obraz zamodelowany, c) źródło modelowania (obraz innowacyjny, kwantowany dwubitowo).

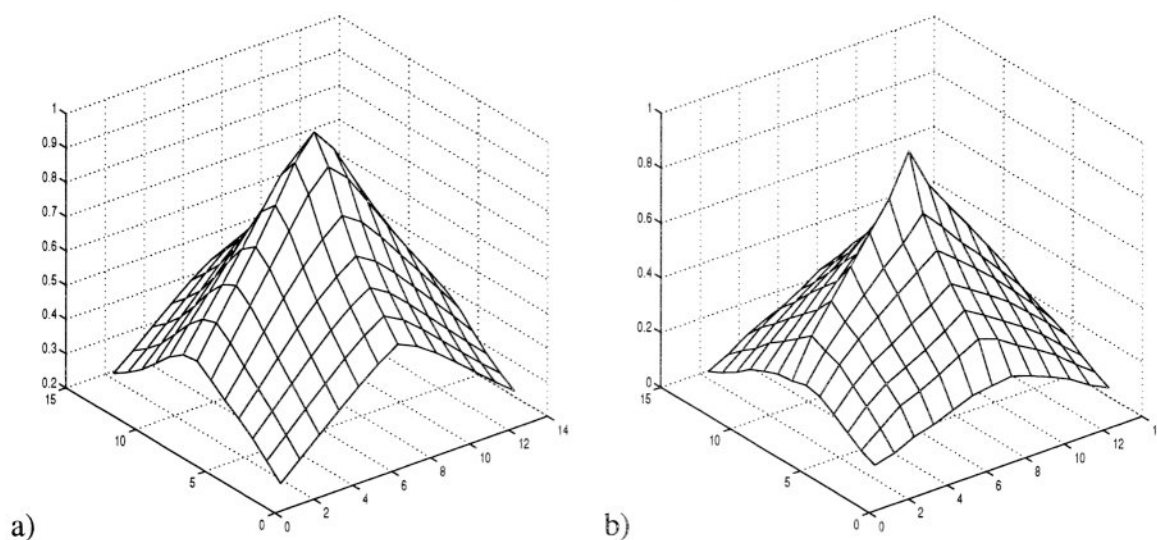
Na rys.6.5 pokazano przykład modelowania z uwzględnieniem informacji zawartej w obrazie innowacyjnym. W tym prostym przypadku blok AOI realizuje funkcję $\text{sign}()$ na obrazie innowacyjnym i otrzymany w ten sposób obraz (rys.6.5c), jest wprost podawany do filtru modelującego (FM). W tym wypadku blok SOI jest 'przezroczysty', a blok GSB jest wyłączony. Zauważmy, że obraz (rys.6.5b) zamodelowany w ten sposób sprawia wrażenie zaszumionego, co potwierdza rys.6.6b. Widać większą zawartość wyższych harmonicznych w porównaniu z rys.6.6a. Może to być spowodowane faktem, że obraz innowacyjny kwantowany (dwubitowo) ma szersze widmo niż obraz innowacyjny niekwantowany. Przypomnijmy, że dokładne odtworzenie statystyk drugiego rzędu następuje przy założeniu całkowitego wybielenia sygnału parametryzowanego. W praktyce to założenie nie jest spełnione. Dla porównania, na rys.6.7 pokazano macierze kowariancji obrazów z rys.6.5a i b.



Rys. 6.6: Charakterystyka amplitudowa widma: a) obrazu oryginalnego, b) obrazu zamodelowanego, c) źródła modelowania.

Na podstawie otrzymanych wyników można przewidywać, że dopracowanie proponowanego systemu kompresji obrazów może zaowocować systemem dokonującym kompresji obrazu w stosunku ok. 1:50, przy zadowalającej jakości obrazu odtwarzanego. Byłby to wynik porównywalny z istniejącymi obecnie rozwiązaniami (np. metoda kompresji JPEG). Wymagałoby to jednak rozwiązania problemu analizatora obrazu innowacyjnego, dokonującego

ekstrakcji cech obrazu, istotnych z punktu widzenia oceny subiektywnej obrazu odtwarzanego, co wymagałoby wykorzystania wiedzy z zakresu fizjologii organu wzroku człowieka i przeprowadzenia badań subiektywnych.



Rys. 6.7: Fragment macierzy kowariancji obrazu: a) oryginalnego, b) zamodelowanego, z uwzględnieniem informacji zawartej w sygnale innowacyjnym (filtr rzędu $R=6$).

Rozdział 7

Podsumowanie

W pracy przedstawiono uogólnienie teorii i algorytmów liniowej filtracji innowacyjnej i modelowania stochastycznego sygnałów losowych jednowymiarowych na przypadek jednorodnych i niejednorodnych dwuwymiarowych pól losowych.

W szczególności:

1. Przedstawiono najważniejsze (dla treści pracy) elementy teorii liniowej filtracji innowacyjnej i modelowania sygnałów jednowymiarowych.
2. Zaproponowano nową metodę wybielania i modelowania stochastycznego dwuwymiarowych pól losowych.
3. Opracowano struktury dwuwymiarowych liniowych filtrów ortogonalnych typu "true-2D" nadających się do przetwarzania pól niejednorodnych. Przedstawiono również struktury uproszczone (zoptymalizowane pod względem liczby parametrów), umożliwiające wybielanie i modelowanie pól jednorodnych.

Własność ortogonalności filtru implikuje w szczególności:

- dobre własności numeryczne (stabilność każdej sekcji),
- rozwiązanie optymalne (w sensie średniokwadratowym).

Opracowane struktury umożliwiają dynamiczne (rekurencyjne) podwyższanie rzędu filtru. W proponowanej metodzie wyznacza się tzw. długoterminowe parametry Schura. Wskazano jednak na możliwość ich rekurencyjnego wyznaczania, dzięki czemu możliwe jest opracowanie wersji adaptacyjnych proponowanych algorytmów.

4. Opracowano algorytmy i ich implementacje komputerowe w języku C i MATLAB.
5. Zaprezentowano wyniki symulacji komputerowych potwierdzające poprawność otrzymanych rozwiązań teoretycznych. Wskazano na szybką zbieżność parametrów filtru do niewielkich wartości, co daje nadzieje na osiągnięcie dużych współczynników kompresji w modelowaniu pól jednorodnych i niejednorodnych, a w następnej kolejności, być może, obrazów rzeczywistych.

W świetle przedstawionych w pracy wyników, autor uznaje, że teza pracy została wykazana, a cel pracy osiągnięty. Uzyskane wyniki teoretyczne, potwierdzone rezultatami badań symulacyjnych, w przekonaniu autora mają istotne znaczenie praktyczne:

- obecnie – do parametryzacji i modelowania dwuwymiarowych pól losowych drugiego rzędu,
- perspektywicznie – jako grunt teoretyczny metody kodowania obrazów rzeczywistych z kompresją stratną. Proponowane metody można również uogólnić na przypadek wielowymiarowy (transmisja sekwencji obrazów) jak również zastosować je do odsumiania obrazów rzeczywistych.

Dodatek A

Procesy stochastyczne i pola losowe

A.1 Preliminaria matematyczne.

Przestrzeń zmiennych losowych $L_2\{\mathcal{U}, \mathcal{R}, \mu\}$ definiujemy następująco:

Rozważmy przestrzeń probabilistyczną $\{\mathcal{U}, \mathcal{R}, \mu\}$, gdzie $\mathcal{U}$ oznacza przestrzeń zdarzeń, $\mathcal{R}$ jest σ -ciałem podzbiorów (mierzalnych po borelowsku), zaś μ – miarą prawdopodobieństwa. Elementami tej przestrzeni są σ -mierzalne funkcje rzeczywiste (zmiennie losowe) $f : \mathcal{U} \mapsto \mathcal{R}$, gdzie $\mathcal{R}$ oznacza prostą rzeczywistą.

Definicja A.1 Przez $L_2\{\mathcal{U}, \mathcal{R}, \mu\}$ będziemy rozumieć przestrzeń takich funkcji f , dla których

$$\int_{\mathcal{U}} |f(u)|^2 \mu(du) < \infty, \quad (\text{A.1})$$

gdzie $\int_{\mathcal{U}}$ oznacza całkę Lebesgue'a względem miary prawdopodobieństwa μ po przestrzeni $\mathcal{U}$.

W przestrzeni tej iloczyn skalarny definiuje się [64] jako

$$(f, g)_{\mathcal{U}} \triangleq \int_{\mathcal{U}} f(u)g^*(u)\mu(du) = E\{fg^*\}, \quad (\text{A.2})$$

gdzie $*$ oznacza sprzężenie, zaś E – operator uśredniania probabilistycznego. Poprawność definicji powyższego iloczynu wynika z faktu, że jeżeli $f, g \in L_2$, to mamy

$$|fg^*| \leq \frac{1}{2}(|f|^2 + |g|^2),$$

co oznacza, że fg^* jest zawsze całkowalna.

Iloczyn (A.2) indukuje normę

$$\|f\|_{\mathcal{U}} = (f, f)_{\mathcal{U}}^{\frac{1}{2}} \triangleq \left(\int_{\mathcal{U}} |f(u)|^2 \mu(du) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.3})$$

oraz metrykę

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{U}}(f, g) &= \|f - g\|_{\mathcal{U}} = (f - g, f - g)_{\mathcal{U}}^{\frac{1}{2}} = \\ &\triangleq \left(\int_{\mathcal{U}} |f(u) - g(u)|^2 \mu(du) \right)^{\frac{1}{2}} = (E\{|f - g|^2\})^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Nierówność

$$\varepsilon^p \mu\{u: |f(u) - g(u)| > \varepsilon\} \leq \int_{\mathcal{U}} |f(u) - g(u)|^2 \mu(du) \quad (\text{A.5})$$

implikuje zbieżność w $L_2\{\mathcal{U}, \mathcal{R}, \mu\}$ według miary, natomiast zupełność tej przestrzeni wynika z twierdzenia Riesz [17].

Niech teraz $\{\mathcal{U}, \mathcal{R}, \mu\}$ będzie przestrzenią probabilistyczną, której elementy są zmiennymi losowymi.

Definicja A.2 Przestrzeń Hilberta zmiennych losowych.

Zbiór zmiennych losowych $y = f(u), u \in \mathcal{U}$, dla których $E\{|y|\}^2 \leq \infty$, tj. zbiór zmiennych losowych o skończonej wariancji, nazywamy przestrzenią Hilberta $L_2 = L_2\{\mathcal{U}, \mathcal{R}, \mu\}$ zmiennych losowych przestrzeni probabilistycznej $\{\mathcal{U}, \mathcal{R}, \mu\}$.

Definicja A.3 Ortogonalność zmiennych losowych.

Dwie zmienne losowe nazywamy ortogonalnymi, jeśli

$$(x, y)_{\mathcal{U}} = E\{xy^*\} = 0. \quad (\text{A.6})$$

Definicja A.4 Liniowa niezależność zmiennych losowych.

Zbiór zmiennych losowych

$$\{y(t-n), \dots, y(t-1), y(t)\} \quad (\text{A.7})$$

nazywamy zbiorem liniowo niezależnym, jeśli dla każdego układu tych zmiennych losowych oraz dla niezerowych skalarów

$$\{\alpha_n, \dots, \alpha_1, \alpha_0\}, \quad \alpha_i \neq 0, \quad i = 0, \dots, n \quad (\text{A.8})$$

miara

$$\mu\{u: \alpha_0 y(t, u) + \alpha_1 y(t-1, u) + \dots + \alpha_n y(t-n, u) = 0\} = 0 \quad (\text{A.9})$$

Definicja A.5 Autokorelacja.

Autokorelację $r(i, j)$ procesu y definiujemy jako

$$r(i, j) \triangleq (y(t-i), y(t-j))_{\mathcal{U}} = \int_{\mathcal{U}} y(t-i, u) y^*(t-j, u) \mu(du) = E\{y(t-i) y^*(t-j)\} \quad (\text{A.10})$$

gdzie E jest operatorem uśredniania probabilistycznego.

Definicja A.6 Stacjonarność w szerszym sensie.

Proces y jest słabo stacjonarny jeśli

$$E\{y(t)\} = \text{const} \quad \text{oraz} \quad E\{y(t-i) y(t-j)\} = r(j-i), \quad (\text{A.11})$$

gdzie r jest funkcją autokorelacji procesu $y(t)$. Jeśli dodatkowo

$$E\{y^2(t)\} < \infty, \quad \text{dla każdego } t,$$

to proces jest stacjonarny w szerszym sensie.

Definicja A.7 Macierz $J^{(p)}$ wymiaru $2p$ taką, że

$$J^{(p)} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_p \end{bmatrix}, \quad (\text{A.12})$$

gdzie I_p jest macierzą jednostkową wymiaru p będziemy nazywać macierzą J rzędu p .

Definicja A.8 Zanurzenie danej macierzy w macierzy jednostkowej.

Niech I_p będzie macierzą jednostkową wymiaru $2p \times 2p$ oraz niech będzie dana macierz θ wymiaru 2×2 . Zanurzeniem macierzy θ w macierzy jednostkowej będziemy nazywać takie ułożenie elementów macierzy θ w macierzy jednostkowej, że θ_{11} leży na pozycji (k, k) dla $k, 1, \dots, p$, i elementy macierzy θ tworzą kwadrat o boku $m < (2p - k)$.

Własność 2 Iloczyn macierzy J -ortogonalnych.

Macierz A jest J -ortogonalna jeżeli, zgodnie z (3.38), spełnia zależność

$$AJA^* = J \quad (\text{A.13})$$

Jeżeli macierze B i C są J -ortogonalne, to ich iloczyn BC jest również macierzą J -ortogonalną, ponieważ z (A.13) mamy

$$(BC)J(C^*B^*) = B(CJC^*)B^* = BJB^* = J. \quad (\text{A.14})$$

Definicja A.9 Proces innowacyjny.

Procesem innowacyjnym $\mathbf{e}$ dla obserwowanego procesu $\mathbf{y}$ nazywamy ciąg błędów prognozy w przód

$$\{e_{p-i}(t-i)\}_{i=0}^{i=p} = \{e_0(t-p), e_1(t-p+1), \dots, e_p(t)\}. \quad (\text{A.15})$$

A.2 Pola losowe 2D — podstawowe definicje.

Definicja A.10 Pole losowe.

Niech będzie dana przestrzeń probabilistyczna $\{\mathcal{U}, \mathcal{R}, \mu\}$. Polem losowym n -wymiarowym nazywać będziemy każde odwzorowanie $\mathbf{Y} : \mathbf{R}^n \times \mathcal{U} \mapsto \mathbf{R}^1$ takie, że dla każdego ustalonego $\mathbf{t} \in \mathbf{R}^n$ odwzorowanie $u \mapsto y(\mathbf{t}, u)$ jest zmienną losową w $\mathcal{U}$. Jeśli $n = 2$, to $y(\mathbf{t}) = y(t_1, t_2)$, (gdzie $\mathbf{t} \in \mathbf{R}^2$) jest polem losowym dwuwymiarowym.

Definicja A.11 Funkcja autokorelacji pola losowego 2D.

Niech y będzie polem losowym 2D. Funkcję

$$r_{ij}^{kl} = (y_{ij}, y_{kl})_{\mathcal{U}} = E\{y_{ij}y_{kl}^*\} \quad (\text{A.16})$$

gdzie $(*, *)_{\mathcal{U}}$ - jest iloczynem skalarnym w przestrzeni Hilberta a E - jest operatorem uśredniania probabilistycznego, będziemy nazywali funkcją autokorelacji pola losowego 2D.

Definicja A.12 Funkcja kowariancji pola losowego 2D.

Niech y będzie polem losowym 2D. Funkcję

$$c_{ij}^{kl} = (y_{ij} - E\{y_{ij}\}, y_{kl} - E\{y_{kl}\})_{\mathcal{U}} = E\{(y_{ij} - E\{y_{ij}\})(y_{kl} - E\{y_{kl}\})\} \quad (\text{A.17})$$

będziemy nazywali funkcją autokowariancji pola losowego 2D.

Wniosek:

Funkcje korelacji i kowariancji są sobie równe jeśli wartość oczekiwana przynajmniej jednej ze zmiennych jest równa zero, ponieważ wówczas

$$c_{ij}^{kl} = E\{(y_{ij} - E\{y_{ij}\})(y_{kl} - E\{y_{kl}\})\} = E\{y_{ij}y_{kl}\} - E\{y_{ij}\}E\{y_{kl}\} = r_{ij}^{kl} - E\{y_{ij}\}E\{y_{kl}\} = r_{ij}^{kl}. \quad (\text{A.18})$$

Definicja A.13 Funkcja widmowej gęstości mocy pola losowego 2D.

Niech C będzie funkcją kowariancji pola losowego 2D. Funkcję

$$W = \mathcal{F}\{C\} \quad (\text{A.19})$$

gdzie $\mathcal{F}$ oznacza transformację Fouriera, będziemy nazywali widmową gęstością mocy pola losowego 2D.

Definicja A.14 Pole stacjonarne.

Pole losowe $y(\mathbf{t})$ nazywamy jednorodnym, jeśli funkcja autokorelacji tego pola nie zależy od wyboru punktu $\mathbf{t}_1$.

Definicja A.15 Stacjonarność w szerszym sensie.

Pole losowe nazywamy stacjonarnym w szerszym sensie, jeśli wartość oczekiwana i wariancja mają skończone wartości oraz dla każdego $\mathbf{t}_1$ i $\mathbf{t}_2 \in \mathbf{R}^n$

$$r(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) = r(\mathbf{t}_1 \vec{\mathbf{t}}_2) \quad (\text{A.20})$$

gdzie $\mathbf{t}_1 \vec{\mathbf{t}}_2$ jest wektorem łączącym punkty $\mathbf{t}_1$ i $\mathbf{t}_2$.

Definicja A.16 Pole izotropowe.

Pole losowe stacjonarne w szerszym sensie nazywamy izotropowym, jeśli $r(\mathbf{t}_1, \mathbf{s}_1) = r(\mathbf{t}_2, \mathbf{s}_2)$, o ile tylko $d(\mathbf{t}_1, \mathbf{s}_1) = d(\mathbf{t}_2, \mathbf{s}_2)$, gdzie d oznacza odległość odpowiednich punktów.

Dodatek B

Oznaczenia

$E\{\}$	—	operator wartości oczekiwanej
$P(S)$	—	operator projekcji na podprzestrzeń S
$P(S^\perp)$	—	operator projekcji na ortogonalne uzupełnienie podprzestrzeni S
$x \perp y$	—	ortogonalność elementów x i y
$\dot{+}$	—	suma prosta przestrzeni
$\oplus$	—	suma ortogonalna przestrzeni
J	—	macierz sygnaturowa
y	—	nieunormowane pole losowe
y	—	element pola y
Y	—	unormowane pole losowe
Y	—	element pola Y
ϵ	—	nieunormowany błąd prognozy w przód
v	—	nieunormowany błąd prognozy w tył
e	—	unormowany błąd prognozy w przód
r	—	unormowany błąd prognozy w tył
$Y^{(f)}$	—	rodzina (wektor) unormowanych obserwatorów prognozy w przód
$Y^{(b)}$	—	rodzina (wektor) unormowanych obserwatorów prognozy w tył
E, F	—	rodzina (wektor) unormowanych błędów w przód
R, B	—	rodzina (wektor) unormowanych błędów w tył
ρ	—	współczynnik Schura
K	—	uogólniony współczynnik Schura
L_2	—	przestrzeń Hilberta zmiennych losowych
l_2	—	przestrzeń Hilberta nieskończonych ciągów skalarów

Literatura

- [1] H.M. Ahmed, M. Morf, "VLSI array architectures for matrix factorization," in *Outils et modeles mathematiques pour l'automatique, l'analyse de systemes et le traitement du signal*, Eds. CNRS, vol.2, Paris 1982, pp. 691-704.
- [2] A.V. Balakrishnan, "Introduction to Random Processes in Engineering.," John Wiley & Sons, Inc., New York, 1995.
- [3] A. Benveniste, "Lattice Orthogonalization Methods for the Stochastic Realization Problem, in: *Outils et modeles mathematiques pour l'automatique, l'analyse de systemes et le traitement du signal*, Eds. CNRS, vol.2, Paris 1982, pp. 267-308.
- [4] N.K. Bose, "Multidimensional digital signal processing: Problems, progress, and future scopes," *Proc. IEEE*, vol. 78, pp. 590-597, Apr. 1984.
- [5] J .Burg, "Maximum Entropy Spectral Analysis," PhD Thesis, Stanford Univ. 1975.
- [6] Y.S. Chung, M. Kanefsky, "On 2-D recursive LMS algorithms using ARMA prediction for ADPCM encoding of images," *IEEE Trans. Image Processing*, vol. 1, pp. 416-421, July, 1992.
- [7] E. Deprettere, "Mixed form time-variant lattice reccursion," in: *Outils et modeles mathematiques pour l'automatique, l'analyse de systemes et le traitement du signal*, Eds. CNRS, vol.2, Paris 1982, pp. 545-562.
- [8] E. Deprettere, S.C. Lie, *Generalized Schur-Darlington Algorithms for Lattice-Structured Matrix Inversion and Stochastic Modeling*, Tech.Rept., Delft.Univ.Techn. 1980
- [9] P. Dewilde, "A course on the algebraic Schur and Nevanlinna-Pick interpolation problems," in *E. F. Deprettere and A. J. van der Veen, editors, Algorithms and Parallel VLSI Architectures*, pp. 13-69, Amsterdam/ New York/ Oxford/ Tokyo, 1991, Elsevier.
- [10] P. Dewilde, E. Deprettere, "Approximative inversion of positive matrices with applications to modelling," *NATO ASI Series*, vol. F34 on *Modelling, Robustness and Sensitivity Reduction in Control Systems*, Springer Verlag, Berlin, 1987
- [11] P. Dewilde, H. Dym, "Lossless Inverse Scattering for digital filters," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol 30, pp. 644-662, 1984
- [12] P. Dewilde, A.C. Vieira, T. Kailath, "On a Generalized Szego-Levinson Realization Algorithm for Optimal Linear Predictors Based on a Network Synthesis Approach," *IEEE Trans. on CAS*, CAS-25, 1978, pp. 663-675.

- [13] H. Dym, "*J contractive matrix functions, reproducing kernel Hilbert spaces and interpolation.*," Expository Lectures, CBMS Regional Conference, Case Western Reserve University, September 10-14, 1984
- [14] D.E. Dudgeon, R.M. Mersereau, "*Multidimensional Digital Signal Processing*," Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall Signal Processing Series, 1984.
- [15] M. Frechet, "Sur le fonctionelles continues," *Ann. de l'Ecole Norm.Sup.*, 3-me, Ser.V.27, 1910.
- [16] Y. Genin, " Σ -lossless transfer functions and shift-operator – A theoretical approach with applications to the matrix inversion problem," in: *Outils et modeles mathematiques pour l'automatique, l'analyse de systemes et le traitement du signal*, Eds. CNRS, vol.2, Paris 1982, pp. 465-498.
- [17] , E. Gichman, P. Skorochod, "*Wstęp do teorii procesów stochastycznych.*," PWN, Warszawa, 1973.
- [18] S. Haykin, "*Modern Filters.*," Macmillan Publishing Company, New York, 1990.
- [19] G.J. Hekstra, E. Deprettere, "Floating point cordic (extended version)," technical report: ET/NT 93.15
- [20] A.K. Jain, *Fundamentals of Digital Image Processing*, Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1989.
- [21] T. Kailath, "A view of three decades of linear filtering theory," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. IT-20, pp. 146-181, 1974.
- [22] T. Kailath, "Time-Variant and Time-Invariant Lattice Filters for Nonstationary Processes," in *Outils et modeles mathematiques pour l'automatique, l'analyse de systemes et le traitement du signal*, Eds. CNRS, vol.2, Paris 1982, pp. 417-462.
- [23] T. Kailath, A.C. Vieira, M. Morf, "Inverses of Toeplitz Operators, Innovations and Orthogonal Polynomials," *SIAM Review*, vol.20, pp. 106-119, 1978.
- [24] A.H. Kayran, "Two-dimensional orthogonal lattice structures for autoregressive modeling of random fields," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 44, pp. 963-978, Apr. 1996.
- [25] P. Kroon, *Time-domain coding of (near) toll quality speech at rates below 16KB/S*, Ph.D. Thesis, Delft University of Technology, Delft, 1985.
- [26] H. K. Kwan, B. Lui, "Lattice implementation of two-dimensional recursive digital filters," *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol. 36, pp. 383-386.
- [27] L. Lee, M. Morf and B. Friedlander, "Recursive least-squares ladder estimation algorithms," *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, CAS-28:467-481, 1981.
- [28] H. Lev-Ari, "Modular architectures for adaptive multichannel lattice algorithms," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-35, pp. 543-552, Apr. 1987.
- [29] H. Lev-Ari, T. Kailath, "Schur and Levinson algorithms for nonstationary processes," w *Proc. Int. Conf. Acoust. Speech Signal Proceesing*, Atlanta, GA, Mar. 1981, pp. 860-864.

- [30] P.J. Lenk, S.R. Parker, "Schur and Levinson recursions for two-dimensional lattice filters," w *Proc. Int. Symp. Circuits Syst.*, San Hose, CA, May 1986, pp. 92-95.
- [31] ——— "Orthogonal two-dimensional lattice filters," in *Proc. Nineteenth Asilomar Conf. Circuits, Syst. Comput.*, Pacific Grove, CA, Nov. 1985, pp. 278-282.
- [32] H. Lev-Ari, T. Kailath, "Lattice Filter Parametrization and Modeling of Nonstationary Processes," *IEEE Trans. on IT-30*, pp. 2-16, 1984.
- [33] N. Levinson, "The Wiener RMS Error Criterium in Filter Design and Prediction", *J. Math. Phys.* vol.25, pp. 261-278, 1947.
- [34] J.S. Lim, *Two-Dimensional Signal and Image Processing*, Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1990.
- [35] X. Liu, P. Baylou, M. Naim, "A new 2D fast lattice RLS algorithm," in *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust. Speech Signal Processing*, Atlanta, GA, Mar. 1992, pp. 329-332.
- [36] J. Makhoul, "Linear prediction: A tutorial review," *Proceedings of the IEEE*, Vol. 63, No 4, pp. 561-587, 1975.
- [37] J.D. Markel, A.H. Gray, "Linear prediction of speech," Springer Verlag, N.Y. 1976.
- [38] T.L. Marzetta "A Linear Prediction Approach to Two-Dimensional Spectral Factorization and Spectral Estimation," Ph.D. Thesis, Department Electrical Engineering and Computer Science, MIT, Feb. 1978
- [39] J. Mazur, "Orthogonal Schur parametrization of 2D stochastic sequences (images)," *Proceedings of the XVIII-th National Conference on Circuit Theory and Electronic Circuits*, Polana Zgorzelisko, 1995, vol 2, pp. 449-454.
- [40] J. Mazur, "Orthogonal Schur modeling of 2D stochastic sequences (images)," *Proceedings of the XIX-th National Conference on Circuit Theory and Electronic Circuits*, Kraków-Krynica, 1996, vol 2, pp. 561-566.
- [41] D. Maksimiuk J. Mazur, "Isolated words recognition system based on RLSLE and neural network approach," *Proc. Sec. Conf. Neural Networks and Their Applications*, vol. 2, Częstochowa, 1996, pp. 306-310.
- [42] J. Mazur, "Implementacja algorytmów cyfrowego przetwarzania obrazów w środowisku MATLAB," *III KK KOWBAN'96*, 1996, pp. 247-250.
- [43] J. Mazur, "Orthogonal Schur parametrisation and modeling of 2D stochastic sequences (images)," *Biuletyn PAN*, vol. 45, pp. 347-356, 1997.
- [44] B.F. McGuffin, B. Liu, "An efficient algorithm for two-dimensional autoregressive spectrum estimation," *IEEE Trans. Acoust., Speech and Signal Processing*, vol. 37, pp. 106-117, Jan. 1989.
- [45] S. R. Parker, A. H. Kayran, "Lattice parameter autoregressive modeling of 2-D fields, part I: The quarter plane case," *IWWW Trans. Acoust., Speech and Signal Processing*, vol. ASSP-32, pp. 872-885, Aug. 1984.

- [46] ———, "The design of 2-D recursive filters in 2-D reflection coefficient domain," w *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing*, Washington, DC, Apr. 1979, pp. 673-676.
- [47] A. Okniński, "On relation between sensitivity and losslessness for orthogonal digital filters," *Proceedings of the XVII-th National Conference on Circuit Theory and Electronic Circuits*, Polanica Zdrój, 1994, vol 1, pp. 49-54.
- [48] A. Papoulis, "Prawdopodobieństwo, zmienne losowe i procesy stochastyczne." WNT, Warszawa, 1972.
- [49] M.S. Piekarski M. Uruski "Tangential Nevanlinna-Pick interpolation problem for bounded real matrices — A network approach," *International Journal of Circuit Theory and Applications*, vol. 21, pp. 513-538, 1993.
- [50] M.S. Piekarski M. Uruski, "The tangential interpolation problem with bounded real matrices — a state space approach," *Proceedings of the XVII-th National Conference on Circuit Theory and Electronic Circuits*, Polanica Zdrój, 1994, vol 1, pp. 55-60.
- [51] P. Poehler, J. Choi, "Linear predictive coding of imagery for data communications," w *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing*, Boston, MA, Apr. 1983, pp. 1240-1243.
- [52] E.A. Robinson, "Multichannel time-series analysis with digital computer programs," San Francisco, Holden-Day, 1967.
- [53] B. Sankur, R.A. van Schijndel, J.C.A. van der Lubbe, "Two-layer coding for videotelephone," *Signal Processing: Image Communication*, Vol. 5, No. 4, Oct.1993, pp 295-303.
- [54] J. Schur, Ueber potenzreihen, die in innern des einheitskreses beschraenkt sind, *J. Reine Ang. Math.*, vol.147, pp. 205-232, 1917.
- [55] W. Skarbek, "Metody reprezentacji obrazów cyfrowych.," Akademicka Oficyna Wydawnicza PLJ, Warszawa, 1993.
- [56] P. Strobach, "Fast recursive low-rank linear prediction frequency estimation algorithms," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 44, pp. 834-846, Apr. 1996.
- [57] J. Szabatin, "Podstawy teorii sygnałów.," WKiŁ, Warszawa, 1990.
- [58] E. Szczepankiewicz, "Zastosowania pól losowych.," BNI, Warszawa, 1985.
- [59] N. Wiener, *Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time-series, with engineering applications*, Tech. Press and Wiley NY, 1949.
- [60] H. Wold, *A study in the analysis of stationary time-series*, Uppsala, Sweden: Almquist and Wiksell 1938.
- [61] J. Zarzycki, "Nieliniowa prognoza i modelowanie stochastyczne sygnałów losowych wyższego rzędu.," Prace Naukowe Instytutu Telekomunikacji i Akustyki Politechniki Wrocławskiej, Seria: Monografie, Wrocław, 1986.

- [62] J. Zarzycki, "Nonlinear stochastic modelling of higher-order random processes," *XIXth National Conference, Circuit Theory and Electronic Networks*, Kraków-Krynica, 1996, vol 2, pp. 493-498.
- [63] J. Zarzycki, "Orthogonal modelling of 4-th order time-series," *XIXth National Conference, Circuit Theory and Electronic Networks*, Kraków-Krynica, 1996, vol 2, pp. 499-504.
- [64] J. Zarzycki, "Cyfrowa filtracja ortogonalna sygnałów losowych.," WNT, Warszawa, 1998.



Lista odbiorców

1	Promotor	–	1 egz.
2	Recenzenci	–	2 egz.
3	Autor	–	1 egz.
4	OINT BI-28	–	1 egz.
	Razem	–	5 egz.