

*Na prawach rękopisu
Do użytku służbowego*

INSTYTUT INŻYNIERII LĄDOWEJ
POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ

Raport serii PRE nr 32/98

NIESTACJONARNE DRGANIA ZBIORNIKA WYPEŁNIONEGO CIECZĄ

Grzegorz Waśniewski

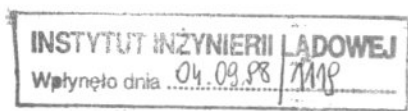
Praca doktorska

Promotor: dr hab. inż. Piotr Konderla prof. PWr

Słowa kluczowe:

teoria powłok,
mechanika płynów,
metody numeryczne,
MES, MEB,
wektory Ritza,
zbiornik wieżowy na ciecz,
program komputerowy

Wrocław, 1998



Spis treści

1. Wprowadzenie	3
1.1. Charakterystyka zagadnienia	3
1.2. Cel, główne założenia, tezy i zakres pracy	7
2. Model powłoki	11
2.1. Geometria powierzchni obrotowej	11
2.2. Model fizyczny powłoki obrotowej	15
2.2.1. Przemieszczenia i związki geometryczne	15
2.2.2. Operator związków geometrycznych we współrzędnych fizycznych	19
2.2.3. Równania równowagi i warunki brzegowe	24
2.2.4. Związki fizyczne	28
2.3. Model obliczeniowy MES	30
2.3.1. Model globalny konstrukcji	30
2.3.2. Model rozłączny elementu	32
2.3.3. Agregacja modelu	38
3. Model cieczy	40
3.1. Model fizyczny cieczy	40
3.2. Model obliczeniowy MEB	47
4. Sprzężone równania ruchu obu ośrodków	52
5. Rozwiązanie numeryczne równania ruchu	54
5.1. Metoda ortogonalizacji wektorami własnymi	54
5.2. Metoda ortogonalizacji wektorami Ritza	56
5.3. Oszacowanie błędu ograniczenia bazy wektorowej	59
5.4. Całkowanie numeryczne równania ruchu	60
6. Przykłady liczbowe	62
6.1. Model obliczeniowy zbiornika wieżowego	62
6.2. Wrażliwość projektowa częstotliwości drgań własnych zbiornika	62
6.3. Analiza drgań zbiornika wywołanych wymuszeniem kinematycznym	69
7. Opis programu obliczeniowego	77
8. Podsumowanie	83
Literatura	86
Załącznik. Oznaczenia	90
Z.1. Zasady ogólne	90
Z.2. Oznaczenia szczegółowe	91
Streszczenie	98
Summary	100

1. Wprowadzenie

1.1. Charakterystyka zagadnienia

Przedmiotem pracy jest analiza dynamiczna zbiorników powłokowych wypełnionych cieczą. Zbiorniki na materiały płynne są powszechnie wznoszone i użytkowane dla celów przemysłowych i komunalnych. Ze względu na ich znaczną liczbę i różne przeznaczenie do ich budowy wykorzystuje się różne technologie i materiały. Najczęściej zbiorniki wykonuje się jako konstrukcje żelbetowe lub stalowe. W przypadku użycia żelbetu mogą one być wznoszone jako monolityczne lub prefabrykowane z zastosowaniem lub bez sprężenia kablami bądź strunami.

Stosuje się różne kształty tego typu obiektów. Można wyróżnić zbiorniki prostopadłościennne, walcowe, kuliste oraz złożone z fragmentów powierzchni stożkowych. W zależności od przeznaczenia i innych szczególnych wymagań mogą znajdować się one całkowicie pod ziemią lub pod wodą, być częściowo zagłębione lub znajdować się ponad powierzchnią terenu. Szczególną kategorię stanowią zbiorniki wieżowe, w których ciecz jest gromadzona w wyniesionej wysoko ponad poziom posadowienia części zbiornika.

Ważną rolę w analizie tego typu konstrukcji odgrywają obciążenia dynamiczne. Szczególnie jest to widoczne w przypadku zbiorników wieżowych, w których znaczna masa jest wysoko wyniesiona i podtrzymywana za pomocą stosunkowo wiotkiej konstrukcji nośnej. Jako główne źródła obciążeń dynamicznych należy wymienić wiatr, wpływy sejsmiczne lub parasejsmiczne, dynamiczne oddziaływanie zamontowanych urządzeń oraz obciążenia powstające przy napełnianiu i opróżnianiu zbiornika. W analizie dodatkowym elementem jest fakt, że charakterystyki dynamiczne układu zależą w znaczący sposób od stopnia wypełnienia zbiornika. Nagromadzona ciecz w znaczny sposób zwiększa bezwładność układu i w związku z tym obniżają się częstotliwości drgań własnych oraz zmieniają się formy własne w stosunku do konstrukcji bez wypełnienia. W przypadku częściowo wypełnionego zbiornika występuje zjawisko wzbudzenia falowania powierzchni swobodnej, której widmo częstotliwości leży w innym zakresie niż częstotliwości drgań własnych konstrukcji.

Z punktu widzenia mechaniki ośrodków ciągłych układ złożony jest z dwóch odmiennych ciał: ciała stałego i cieczy. Pomiędzy tymi ośrodkami występują wzajemne oddziaływania na

powierzchni kontaktu. W trakcie ruchu układu następuje wzajemna interakcja pomiędzy ośrodkami co oznacza, że ruch konstrukcji powłokowej modyfikuje pole ciśnień w cieczy, z drugiej strony pole ciśnień wpływa na ruch konstrukcji. Ponieważ siły interakcji w analizowanych układach są znaczące, muszą być one rozwiązywane jako całość. Tę grupę zagadnień wyróżnia się w mechanice ośrodków ciągłych i oznacza w skrócie FSI (od angielskiego określenia *fluid–structure interaction*).

W analizie zbiorników jako model fizyczny konstrukcji przyjmuje się zwykle powłokę cienką. Przy założeniach: hipotezy płaskich przekrojów, liniowo–sprężystych cech materiału i liniowych związków geometrycznych. Na sformułowanie zagadnienia brzegowo–początkowego składają się: związki geometryczne i fizyczne, równania równowagi oraz warunki brzegowe i początkowe. Rozwiązania uzyskiwane są przy wykorzystaniu metod numerycznych dla sformułowanych równań równowagi zapisanych w przemieszczeniach. Teoria powłok ma swoją bogatą literaturę i w pracach dotyczących problemów FSI nie wprowadza się innych szczególnych elementów teorii. Dzieje się tak dlatego, że z zakresu modelu konstrukcji w zagadnieniach FSI wystarczająca jest tylko znajomość stanu przemieszczenia. Niezależnie od sformułowania modelu fizycznego powłoki nie zmienia się postać i charakter równań połączonych ośrodków.

W przypadku modeli fizycznych cieczy można zauważyć dużą różnorodność. Zazwyczaj powszechnie zakłada się bezwirowość ruchu oraz tzw. liniowość cieczy [26], co oznacza, że przyjmuje się ciecz nielepką i pomija się człony konwekcyjne w pochodnej materialnej. W pracy [32] przedstawiono rozwiązanie dla cieczy wiskotycznej.

Do opisu zachowania się cieczy stosuje się dwa podejścia: Lagrange'a lub Eulera [42]. W podejściu Lagrange'a ruch cieczy opisywany jest w przemieszczeniach. W tym opisie ciecz jest traktowana jak ciało sprężyste, w którym pomija się sztywność postaciową. Równania układu uzyskuje się z wariacyjnej zasady minimum energii potencjalnej układu. W podejściu Eulera ciecz jest charakteryzowana przez ciśnienie lub funkcję potencjału prędkości. Podejście Eulera znajduje szersze zastosowanie w rozwiązywaniu praktycznych zagadnień. Jego przewagą jest mniejsza liczba niewiadomych i dużo lepsza zbieżność przy całkowaniu po czasie sprzężonego równania ruchu obu ośrodków. Z drugiej strony wadą jest brak pasmowości i symetrii macierzy w modelach dyskretnych (w podejściu Lagrange'a macierze są symetryczne). Trudności te można jednak wyeliminować lub w znacznym stopniu ograniczyć przez przeformułowanie zagadnienia [34]. W tym celu stosuje się wprowadzenie dodatkowych współrzędnych związanych z cieczą, odpowiednią numerację niewiadomych lub rozprężenie równań obu ośrodków podczas całkowania po czasie. Dalsze uproszczenia polegają na diagonalizacji macierzy mas i tłumienia cieczy.

W budowaniu modeli fizycznych ciecz traktuje się jako ośrodek ściśliwy lub nieściśliwy. Dla ośrodka ściśliwego parametrem opisu jest funkcja ciśnienia. W tym podejściu często stosuje się założenie o stacjonarności odpowiedzi, w celu pozbycia się pochodnej czasowej i doprowadzeniu opisu do równania Helmholtza. Postępowanie takie przedstawiono między innymi w pracach [1, 9, 10, 11, 26, 28, 33, 35, 39, 42]. Taki sposób postępowania prowadzi do sformułowania, w którym macierze współczynników są zależne od częstotliwości. Powoduje to znaczne trudności numeryczne. W pracy [12] przedstawiono algorytm rozwiązywania zagadnienia własnego problemu opisanego równaniem Helmholtza.

W przypadku ośrodka nieściśliwego w opisie używa się funkcji ciśnienia lub potencjału prędkości. Przyjęcie tego założenia w znaczny sposób upraszcza problem i prowadzi do dodania, do macierzy mas konstrukcji, niezależnej od częstotliwości macierzy mas pochodzącej od cieczy. Podejście takie nazywa się w literaturze zagadnieniem masy dodanej [18, 24, 26, 29, 30, 42]. Przyjęcie tego założenia jest możliwe gdy prędkość rozchodzenia się dźwięku w ośrodku jest duża. Wtedy w równaniu falowym można pominąć pochodną czasową i ograniczyć się do rozwiązania równania jedynie z cząstkowym przestrzennym operatorem różniczkowym Laplace'a. Można również uniknąć założenia o stacjonarności odpowiedzi, jakie często wykonuje się przy rozwiązywaniu równania z operatorem czasoprzestrzennym, w celu uzyskania równania Helmholtza.

Modele obu ośrodków są połączone przez oddziaływania hydromechaniczne na powierzchni ich wzajemnego kontaktu. Stosuje się uproszczenie polegające na wyznaczeniu pola ciśnienia przy założeniu idealnej sztywności konstrukcji, a następnie sprężystą już konstrukcję obciąża się wyznaczonym ciśnieniem [21]. Wadą takiego postępowania jest zaniedbanie oddziaływania ruchu sprężystej w istocie konstrukcji na rozkład ciśnień w cieczy.

Rozwiązania analityczne zbudowanych modeli są możliwe w niewielu przypadkach. Zwykle dotyczą regularnych obszarów o szczególnych warunków brzegowych i wymagają wprowadzenia szeregu dodatkowych założeń upraszczających. W praktycznych zastosowaniach główne znaczenie mają dyskretyzacyjne metody numeryczne: metoda elementów skończonych (MES) i metoda elementów brzegowych (MEB), w których równania ruchu zapisywane są w przestrzeniach skończenie-wymiarowych. MES może być stosowana w budowie modelu dyskretnego zarówno dla konstrukcji jak i cieczy. MEB jest wykorzystywana w modelach hybrydowych, w którym całkowitymi równaniami brzegowymi opisuje się ciecz, natomiast dla konstrukcji powłokowej używa się sformułowania MES.

W jednolitym podejściu MES podstawową trudnością jest znaczna liczba współrzędnych uogólnionych związana z dyskretyzacją trójwymiarowego obszaru zajmowanego przez ciecz.

Ponadto dla zagadnień, w których ciecz zajmuje nieskończony obszar, należy ograniczony model obliczeniowy dobrać tak, aby można było założyć, że poza jego granicami istnieją jedynie fale powierzchniowe spełniające na granicy warunek Sommerfelda [10, 42]. Brzeg siatki MES generuje zwykle odbicie fali na granicy dyskretyzowanego obszaru.

Wykorzystując podejście MES, analizuje się zagadnienia dotyczące zbiorników na ciecz, platform wiertniczych, ciał sprężystych zanurzonych w cieczy, zapór wodnych oraz zagadnienia akustyczne [7, 9, 10, 22, 26, 28, 34].

W ostatnich latach coraz większego znaczenia nabierają modele hybrydowe. Podejście takie ma wiele zalet. Przede wszystkim zmniejsza się liczba niewiadomych, gdyż zapisuje się jedynie równanie całkowe na brzegu obszaru zajmowanego przez ciecz, co sprowadza zagadnienie do problemu dwuwymiarowego. W przypadku osiowo-symetrycznej geometrii, po rozwinięciu niewiadomych funkcji w szeregi trygonometryczne w kierunku obwodowym, zadanie redukuje się do jednego wymiaru. Inną korzyścią jest możliwość użycia tych samych punktów węzłowych lub elementów do dyskretyzacji obu ośrodków. W podejściu MEB w sposób naturalny można modelować obszary nieograniczone. Dla obszarów nieskończonych warunek Sommerfelda jest spełniony automatycznie. Z drugiej strony wadą takiego podejścia są problemy związane z opisem zagadnień nieliniowych i ciał o niejednorodnych własnościach fizycznych, które w podejściu MES mogą być modelowane w stosunkowo łatwy sposób. Ponadto takie sformułowanie powoduje konieczność numerycznego wyznaczania wartości całek osobliwych.

Podejście hybrydowe MES-MEB stosuje się dla płynów ściśliwych [11, 33, 37], nieściśliwych [18, 24, 29, 30, 35], zagadnień aerodynamiki [25] oraz hydroakustyki [1, 2, 39]. W wymienionych pracach, w wypadku cieczy nieściśliwej lub po przyjęciu założenia o stacjonarności odpowiedzi przy cieczy ściśliwej, eliminuje się z opisu parametr czasu. Prezentowane są również prace, w których zastosowano MEB do rozwiązania problemu opisanego ogólnym sprzężonym czasoprzestrzennym równaniem różniczkowym [36, 37]. Podejście to, ze względu na stosowanie czterowymiarowych rozwiązań fundamentalnych i konieczność ciągłego ich całkowania od punktu początkowego przez całą historię procesu, wiąże się ze znacznymi rozmiarami macierzy współczynników i długimi czasami obliczeń. W pracach używa się bezpośredniego sformułowania metody elementów brzegowych lub sformułowań pośrednich przy użyciu potencjału warstwy pojedynczej lub warstwy podwójnej.

Istotnym problemem jest rozwiązanie dynamicznego równania ruchu dla dużych układów dyskretnych opisujących zagadnienia FSI. W szczególnych przypadkach, kiedy powierzchnia kontaktu obu ośrodków nie jest duża i w związku z tym sprzężenie ogranicza się do niewielkiej liczby

równań, proponowano rozwiązanie rozłączne. Najpierw w kroku czasowym wyznaczano rozkład ciśnień, bazując na parametrach związanych z konstrukcją w chwili poprzedniej, następnie tak wyznaczonym ciśnieniem obciążano konstrukcję i wyznaczano jej aktualny stan przemieszczenia. W podejściu tym krok czasowy przy całkowaniu musiał być mały, aby rozwiązanie było zbieżne. Podobne ograniczenia na długość kroku czasowego występowały w przypadku traktowania cieczy jako ciała sprężystego z zerową sztywnością postaciową.

Większość autorów skłania się do tego, by opis obu ośrodków traktować jako jeden sprzężony układ równań i całkować go w całości. W pracach stosuje się różne metody całkowania równania ruchu: Rungego–Kutty [21], stałego średniego przyśpieszenia [34] lub Newmarka [37]. Często równania ruchu separuje się, wykorzystując ortogonalizacyjne własności wektorów własnych [9, 18]. Zasadę ortogonalności dla zagadnień FSI udowodniono w pracach [40, 41].

Rozwiązanie zagadnienia własnego dla układu o wielu stopniach swobody wiąże się ze znacznymi czasami obliczeń. Wykorzystanie w analizie wektorów Ritza [3, 17, 23, 33, 38], pozwala w znaczący sposób ograniczyć rozmiar rozwiązywanego zagadnienia własnego oraz poprawić zbieżność rozwiązania. Otrzymane wyniki dla zredukowanej bazy współrzędnych uogólnionych można następnie transformować do oryginalnej (pełnej) bazy współrzędnych. W efekcie rozwiązania otrzymuje się również częstości i formy drgań własnych. Wektory Ritza można wyznaczyć w prosty sposób według zależności rekurencyjnych.

1.2. Cel, główne założenia, tezy i zakres pracy

Celem niniejszej pracy jest ogólne i jednolite sformułowanie zagadnienia drgań zbiornika zawierającego ciecz w przypadkach jego całkowitego lub częściowego wypełnienia oraz dla zbiornika pustego. Opis problemu zawiera sprzężone równanie ruchu dwóch ośrodków tzn. konstrukcji i cieczy, metodę jego ortogonalizacji oraz rozwiązanie w dziedzinie czasu. Ponadto w ramach pracy wykonano program obliczeniowy przeznaczony do rozwiązywania zadań na sprzęcie klasy PC. Poprawność i skuteczność algorytmu i jego implementacji komputerowej została wykazana na podstawie rozwiązanych przykładów.

W modelach fizycznym i numerycznym powłoki przyjęto następujące założenia:

- kształt powłoki ogranicza się do osiowo-symetrycznej geometrii powierzchni środkowej z możliwością liniowej zmiany jej grubości wzdłuż południka,
- przyjmuje się liniowy, ortotropowy materiał o głównych kierunkach ortotropii zgodnych z kierunkami głównymi krzywizn powierzchni środkowej powłoki,
- zakłada się, że powłoka jest cienka, spełniająca hipotezę kinematyczną Kirchhoffa–Love'a,

- przyjmuje się liniową postać związków geometrycznych,
- powłokę dyskretyzuje się płaskimi, trójkątnymi elementami skończonymi o sześciu parametrach w każdym węźle,
- przemieszczenia stanu tarczowego aproksymuje się liniowymi funkcjami kształtu, stan płytowy wielomianami trzeciego stopnia.

Fizyczny i numeryczny model cieczy sformułowano, przyjmując założenia:

- rozważa się płyn idealny, który jest nielepki i nieściśliwy,
- zakłada się, że przemieszczenia płynu podczas ruchu są małe,
- ruch jest bezwrowy,
- powierzchnia kontaktu cieczy z konstrukcją jest stała w procesie drgań,
- powierzchnię brzegową cieczy dyskretyzuje się płaskimi trapezowymi elementami brzegowymi z węzłem w środku; na obszarze elementu niewiadome aproksymuje się stałymi funkcjami kształtu,
- równania MEB zapisuje się w punktach kolokacji pokrywających się z węzłami.

Ponadto przy ortogonalizacji równania ruchu generalnie zakłada się macierz tłumienia proporcjonalną do macierzy sztywności i bezwładności. W jednym z przykładów zakłada się, że macierz tłumienia jest proporcjonalna jedynie do macierzy sztywności. Przyjmuje się, że tłumienie jest charakteryzowane przez bezwymiarowy współczynnik tłumienia taki sam dla obu ośrodków.

Praca wykazuje prawdziwość następujących tez:

- 1° przyjęcie założenia nieściśliwości cieczy znacznie upraszcza opis zagadnienia,
- 2° sformułowanie hybrydowego modelu numerycznego MES–MEB dla zagadnień FSI charakteryzuje się dużą przejrzystością i prowadzi do klasycznej postaci równania ruchu,
- 3° podejście hybrydowe jest konkurencyjne w stosunku do czystego podejścia MES i pozwala skutecznie rozwiązywać szereg praktycznych zagadnień,
- 4° ortogonalizacja równania ruchu wektorami Ritza daje poprawne wyniki i jest mniej czasochłonna niż ortogonalizacja wektorami własnymi,
- 5° przy użyciu opisanych modeli numerycznych można zbudować programy obliczeniowe i realizować obliczenia na komputerach klasy PC,
- 6° stwierdzenia 2°–5° są prawdziwe niezależnie od stopnia wypełnienia zbiornika.

Praca składa się ze wstępu, czterech rozdziałów opisujących modele fizyczne i numeryczne, przykładów liczbowych, opisu stworzonych programów komputerowych, podsumowania, spisu literatury i załącznika.

We wstępie, który zamieszczono w rozdziale pierwszym, przedstawiono krótką charakterystykę zagadnienia. Opisano stosowane modele fizyczne i numeryczne wraz z odniesieniami do literatury. Sformułowano cel, wyszczególniono podstawowe założenia, podano tezy oraz opisano zakres pracy.

W rozdziale drugim pracy wyznaczono wielkości charakteryzujące geometrię powierzchni obrotowej opisanej w krzywoliniowym układzie współrzędnych. Wyznaczono wektory bazowe, współczynniki pierwszej i drugiej formy podstawowej powierzchni oraz symbole Christoffela we współrzędnych kowariantnych i kontrawariantnych. Sformułowano model fizyczny powłoki, w ramach którego: obliczono współrzędne liniowego tensora odkształcenia i podano ich postać dla wariantu Koitera, określono operator związków geometrycznych we współrzędnych fizycznych, wyprowadzono równania równowagi i warunki brzegowe oraz związki fizyczne. Zbudowano model numeryczny MES. Podano postacie macierzy transformacji współrzędnych, funkcji kształtu, operatora związków geometrycznych oraz macierzy sprężystości. Przedstawiono wyrażenia na globalne macierze sztywności i bezwładności oraz na energię potencjalną i kinetyczną konstrukcji.

W rozdziale trzecim sformułowano modele fizyczne: cieczy ściśliwej opisanej funkcją rozkładu ciśnienia prowadzący do równania Helmholtza oraz cieczy nieściśliwej charakteryzowanej przez funkcję potencjału prędkości i równanie Laplace'a. Wyznaczono postać warunków brzegowych na powierzchni kontaktu z konstrukcją i na powierzchni swobodnej cieczy. Sformułowanie zagadnienia w postaci równania różniczkowego zastąpiono równoważnym całkowym równaniem brzegowym. Zbudowano dyskretny model obliczeniowy MEB obszaru zajmowanego przez ciecz. Przedstawiono wyrażenia na macierze sztywności i bezwładności oraz na energię potencjalną i kinetyczną cieczy.

Rozdział czwarty przedstawia połączenie modeli numerycznych obu ośrodków, wyrażenia na macierze sztywności i bezwładności oraz na energię potencjalną i kinetyczną układu. Definiuje się bazę współrzędnych uogólnionych i zapisuje równanie ruchu w jednolitej, klasycznej postaci.

W rozdziale piątym przedstawiono metodę ortogonalizacji równania ruchu. Określono sposób przyjęcia tłumienia. Podano rekurencyjny algorytm generowania wektorów Ritza, szacowania ich wpływu na rozwiązanie oraz wyznaczania błędu "obcięcia" bazy. Zamieszczono porównanie ortogonalizacji układu równań wektorami Ritza i wektorami własnymi. Przedstawiono algorytm Newmarka rozwiązywania równania ruchu i określono sposób uwzględnienia warunków początkowych.

Rozdział szósty zawiera dwa przykłady dotyczące zbiornika wieżowego na ciecz. W przykładzie pierwszym wyznaczono wrażliwość projektową częstotliwości drgań własnych ze względu na wybrane parametry geometryczne. Wyznaczono częstotliwości drgań własnych, pokazano

podstawowe formy drgań konstrukcji i wypełniającej jej cieczy. Przykład drugi przedstawia rozwiązanie równania drgań zbiornika poddanego wymuszeniu kinematycznemu. Przedstawiono funkcje przemieszczeń wybranego punktu konstrukcji oraz drgania wybranego punktu położonego na lustrze wody. Wyznaczono błąd obcięcia bazy wektorowej i pokazano jaki jest udział poszczególnych wektorów Ritza w rozkładzie wektora obciążenia. Oba przykłady rozwiązano w trzech wariantach: zbiornik pusty, częściowo i całkowicie napełniony.

W rozdziale siódmym zamieszczono informację na temat opracowanych programów komputerowych i zastosowanych w nich procedur numerycznych.

Do pracy dołączono załącznik, w którym opisano konwencję oznaczeń i zamieszczono ich szczegółowy wykaz.

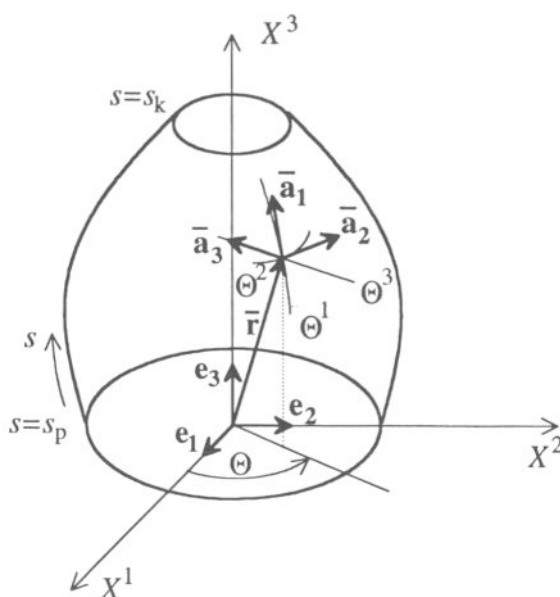
2. Model powłoki

2.1. Geometria powierzchni obrotowej

Analizuje się powierzchnię środkową powłoki obrotowej w kartezjańskim układzie współrzędnych $\{X^1, X^2, X^3\}$ otrzymaną przez obrót krzywej płaskiej wokół osi X^3 (Rys. 2.1). Krzywa ta na płaszczyźnie X^1X^3 opisana jest równaniem parametrycznym

$$\begin{cases} X^1 = r(s) \\ X^3 = z(s) \end{cases} \quad s \in \langle s_p, s_k \rangle, \quad (2.1)$$

gdzie s jest bezwymiarowym parametrem zmieniającym się wzdłuż tworzącej. Wprowadza się krzywoliniowy układ współrzędnych związany z kierunkami głównych krzywizn powierzchni $\{\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3\}$, którego linie współrzędnych odpowiadają kierunkom: równoleżnika, południka i prostopadłemu do powierzchni. Wektory bazowe dla tego układu oznaczono $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3\}$. Wersory osi układu kartezjańskiego oznaczono przez $\{e_1, e_2, e_3\}$ (Rys. 2.1).



Rys. 2.1. Układy współrzędnych i wektory bazowe

Dla uproszczenia zapisu przyjęto

$$\begin{cases} s \equiv \Theta^1 \\ \Theta \equiv \Theta^2 \end{cases} \quad (2.2)$$

Niech położenie dowolnego punktu powierzchni opisuje wektor $\bar{\mathbf{r}}(\Theta^1, \Theta^2)$ (Rys. 2.1)

$$\bar{\mathbf{r}}(\Theta^1, \Theta^2) = \bar{\mathbf{r}}(s, \Theta) = r(s)(\cos \Theta \mathbf{e}_1 + \sin \Theta \mathbf{e}_2) + z(s) \mathbf{e}_3. \quad (2.3)$$

Wektory bazowe styczne do powierzchni wyznaczają się z definicji:

$$\bar{\mathbf{a}}_1 = \bar{\mathbf{r}}_{,1} = r'(\cos \Theta \mathbf{e}_1 + \sin \Theta \mathbf{e}_2) + z' \mathbf{e}_3, \quad (2.4)$$

$$\bar{\mathbf{a}}_2 = \bar{\mathbf{r}}_{,2} = r(-\sin \Theta \mathbf{e}_1 + \cos \Theta \mathbf{e}_2). \quad (2.5)$$

Jednostkowy wektor normalny do powierzchni jest równy

$$\bar{\mathbf{a}}_3 = \frac{\bar{\mathbf{a}}_1 \times \bar{\mathbf{a}}_2}{|\bar{\mathbf{a}}_1 \times \bar{\mathbf{a}}_2|}, \quad (2.6)$$



$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{a}}_1 \times \bar{\mathbf{a}}_2 &= [r'(\cos \Theta \mathbf{e}_1 + \sin \Theta \mathbf{e}_2) + z' \mathbf{e}_3] \times [r(-\sin \Theta \mathbf{e}_1 + \cos \Theta \mathbf{e}_2)] = \\ &= -z'r(\cos \Theta \mathbf{e}_1 + \sin \Theta \mathbf{e}_2) + r' r \mathbf{e}_3, \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$|\bar{\mathbf{a}}_1 \times \bar{\mathbf{a}}_2| = \sqrt{(\bar{\mathbf{a}}_1 \times \bar{\mathbf{a}}_2) \cdot (\bar{\mathbf{a}}_1 \times \bar{\mathbf{a}}_2)} = \sqrt{(r'r)^2 + (z'r)^2 (\cos^2 \Theta + \sin^2 \Theta)} = r \sqrt{(r')^2 + (z')^2} = rA, \quad (2.8)$$

$$\bar{\mathbf{a}}_3 = -\frac{z'}{A}(\cos \Theta \mathbf{e}_1 + \sin \Theta \mathbf{e}_2) + \frac{r'}{A} \mathbf{e}_3, \quad (2.9)$$

gdzie $A(s) = \sqrt{(r')^2 + (z')^2}$ jest metryką wzdłuż południka.

Współczynniki pierwszej formy podstawowej powierzchni oblicza się z zależności

$$a_{\alpha\beta} = \bar{\mathbf{a}}_\alpha \cdot \bar{\mathbf{a}}_\beta. \quad (2.10)$$

Poszczególne współrzędne tensora przyjmują wartości

$$\begin{aligned} a_{11} = \bar{\mathbf{a}}_1 \cdot \bar{\mathbf{a}}_1 &= [r'(\cos \Theta \mathbf{e}_1 + \sin \Theta \mathbf{e}_2) + z' \mathbf{e}_3] \cdot [r'(\cos \Theta \mathbf{e}_1 + \sin \Theta \mathbf{e}_2) + z' \mathbf{e}_3] = \\ &= (r')^2 + (z')^2 = A^2, \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$a_{12} = a_{21} = \bar{\mathbf{a}}_1 \cdot \bar{\mathbf{a}}_2 = [r'(\cos \Theta \mathbf{e}_1 + \sin \Theta \mathbf{e}_2) + z' \mathbf{e}_3] \cdot [r(-\sin \Theta \mathbf{e}_1 + \cos \Theta \mathbf{e}_2)] = 0, \quad (2.12)$$

$$a_{22} = \bar{\mathbf{a}}_2 \cdot \bar{\mathbf{a}}_2 = [r(-\sin \Theta \mathbf{e}_1 + \cos \Theta \mathbf{e}_2)] \cdot [r(-\sin \Theta \mathbf{e}_1 + \cos \Theta \mathbf{e}_2)] = r^2, \quad (2.13)$$

stąd

$$[a_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} A^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

Składowe kontrawariantne pierwszej formy podstawowej wyznacza się z zależności

$$a_{\alpha\delta} a^{\delta\beta} = \delta_{\alpha}^{\beta}. \quad (2.15)$$

Powyższy układ równań, ze względu na ortogonalność kowariantnych wektorów bazowych, ma proste rozwiązanie:

$$a^{11} = \frac{1}{a_{11}}, \quad (2.16)$$

$$a^{22} = \frac{1}{a_{22}}, \quad (2.17)$$

$$a^{12} = a^{21} = 0, \quad (2.18)$$

skąd

$$[a^{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{A^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$



Współrzędne drugiej formy podstawowej powierzchni oblicza się z definicji

$$b_{\alpha\beta} = \bar{\mathbf{a}}_3 \cdot \bar{\mathbf{a}}_{\alpha, \beta}. \quad (2.20)$$

Pochodne wektorów bazowych są równe

$$\bar{\mathbf{a}}_{1,1} = [r'(\cos \Theta \mathbf{e}_1 + \sin \Theta \mathbf{e}_2) + z' \mathbf{e}_3],_{1} = r''(\cos \Theta \mathbf{e}_1 + \sin \Theta \mathbf{e}_2) + z'' \mathbf{e}_3, \quad (2.21)$$

$$\bar{\mathbf{a}}_{1,2} = \bar{\mathbf{a}}_{2,1} = [r'(\cos \Theta \mathbf{e}_1 + \sin \Theta \mathbf{e}_2) + z' \mathbf{e}_3],_{2} = r'(-\sin \Theta \mathbf{e}_1 + \cos \Theta \mathbf{e}_2), \quad (2.22)$$

$$\bar{\mathbf{a}}_{2,2} = [r(-\sin \Theta \mathbf{e}_1 + \cos \Theta \mathbf{e}_2)],_{2} = -r(\cos \Theta \mathbf{e}_1 + \sin \Theta \mathbf{e}_2). \quad (2.23)$$

Współczynniki drugiej formy podstawowej powierzchni przyjmują wartości

$$\begin{aligned} b_{11} = \bar{\mathbf{a}}_3 \cdot \bar{\mathbf{a}}_{1,1} &= \left[-\frac{z'}{A}(\cos \Theta \mathbf{e}_1 + \sin \Theta \mathbf{e}_2) + \frac{r'}{A} \mathbf{e}_3 \right] \cdot [r''(\cos \Theta \mathbf{e}_1 + \sin \Theta \mathbf{e}_2) + z'' \mathbf{e}_3] = \\ &= \frac{-z' r'' + r' z''}{A} = \frac{B}{A}, \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$b_{12} = b_{21} = \bar{\mathbf{a}}_3 \cdot \bar{\mathbf{a}}_{1,2} = \left[-\frac{z'}{A}(\cos \Theta \mathbf{e}_1 + \sin \Theta \mathbf{e}_2) + \frac{r'}{A} \mathbf{e}_3 \right] \cdot [r'(-\sin \Theta \mathbf{e}_1 + \cos \Theta \mathbf{e}_2)] = 0, \quad (2.25)$$

$$b_{22} = \bar{\mathbf{a}}_3 \cdot \bar{\mathbf{a}}_{2,2} = \left[-\frac{z'}{A}(\cos \Theta \mathbf{e}_1 + \sin \Theta \mathbf{e}_2) + \frac{r'}{A} \mathbf{e}_3 \right] \cdot [-r(\cos \Theta \mathbf{e}_1 + \sin \Theta \mathbf{e}_2)] = \frac{z'r}{A}, \quad (2.26)$$

skąd

$$[b_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} \frac{B}{A} & 0 \\ 0 & \frac{z'r}{A} \end{bmatrix}, \quad (2.27)$$

gdzie wprowadzono oznaczenie $B = (-z'r'' + r'z'')$.

Współrzędne mieszane drugiej formy podstawowej powierzchni oblicza się, wykonując operację podniesienia wskaźnika

$$b_{\beta}^{\alpha} = a^{\alpha\delta} b_{\delta\beta}. \quad (2.28)$$

Poszczególne współrzędne tensora przyjmują wartości

$$b_1^1 = a^{11} b_{11} = \frac{B}{A^3}, \quad (2.29)$$

$$b_2^1 = b_1^2 = 0, \quad (2.30)$$

$$b_2^2 = a^{22} b_{22} = \frac{z'r}{rA}, \quad (2.31)$$

skąd

$$[b_{\beta}^{\alpha}] = \begin{bmatrix} \frac{B}{A^3} & 0 \\ 0 & \frac{z'r}{rA} \end{bmatrix}. \quad (2.32)$$

Symbole Christoffela I rodzaju oblicza się z definicji

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}(a_{\alpha\gamma, \beta} + a_{\beta\gamma, \alpha} - a_{\alpha\beta, \gamma}). \quad (2.33)$$

Jedynie dwie z występujących wyżej pochodnych są niezerowe

$$a_{11,1} = (A^2)_{,1} = 2(r'r'' + z'z'') = 2G, \quad (2.34)$$

$$a_{22,1} = 2r'r', \quad (2.35)$$

$$a_{11,2} = a_{12,1} = a_{12,2} = a_{21,1} = a_{21,2} = a_{22,2} = 0, \quad (2.36)$$

gdzie wprowadzono oznaczenie $G = (r'r'' + z'z'')$.

Poszczególne symbole Christoffela przyjmują wartości

$$\Gamma_{111} = \frac{1}{2}(a_{11,1} + a_{11,1} - a_{11,1}) = r'r'' + z'z'' = G, \quad (2.37)$$

$$\Gamma_{112} = \frac{1}{2}(a_{12,1} + a_{12,1} - a_{11,2}) = 0, \quad (2.38)$$

$$\Gamma_{121} = \Gamma_{211} = \frac{1}{2}(a_{11,2} + a_{21,1} - a_{12,1}) = 0, \quad (2.39)$$

$$\Gamma_{122} = \Gamma_{212} = \frac{1}{2}(a_{12,2} + a_{22,1} - a_{12,2}) = rr', \quad (2.40)$$

$$\Gamma_{221} = \frac{1}{2}(a_{21,2} + a_{21,2} - a_{22,1}) = -rr', \quad (2.41)$$

$$\Gamma_{222} = \frac{1}{2}(a_{22,2} + a_{22,2} - a_{22,2}) = 0. \quad (2.42)$$

Symbole Christoffela II rodzaju oblicza się, wykonując operację podniesienia wskaźnika

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} = a^{\gamma\delta}\Gamma_{\alpha\beta\delta}, \quad (2.43)$$

skąd

$$\Gamma_{11}^1 = a^{11}\Gamma_{111} = \frac{G}{A^2}, \quad (2.44)$$

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = 0, \quad (2.45)$$

$$\Gamma_{22}^1 = a^{11}\Gamma_{221} = -\frac{r'r}{A^2}, \quad (2.46)$$

$$\Gamma_{11}^2 = 0, \quad (2.47)$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = a^{22}\Gamma_{122} = \frac{r'}{r}, \quad (2.48)$$

$$\Gamma_{22}^2 = 0. \quad (2.49)$$

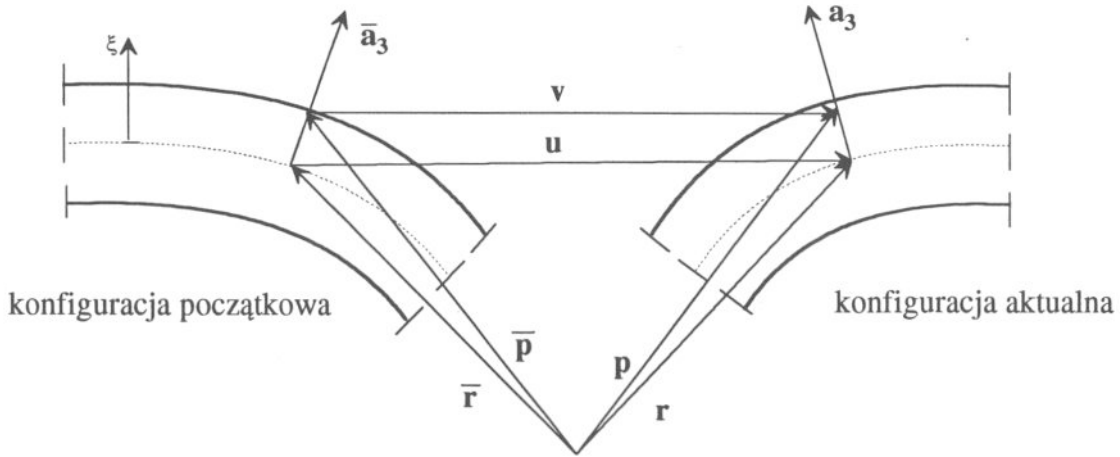
2.2. Model fizyczny powłoki obrotowej

2.2.1. Przemieszczenia i związki geometryczne

Rozpatruje się powłokę obrotową parametryzowaną układem krzywoliniowym $\{\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3\}$, który związany jest z kierunkami głównych krzywizn powierzchni środkowej powłoki. Rozważa się punkt powłoki w procesie deformacji opisany poprzez wektory jego położenia w konfiguracjach początkowej i aktualnej – odpowiednio $\bar{\mathbf{p}}$, $\mathbf{p}$ wraz z odpowiadającym mu punktem powierzchni

środkowej, opisanym wektorami położenia $\bar{\mathbf{r}}$ i $\mathbf{r}$ oraz z określonymi jednostkowymi wektorami normalnymi do powierzchni środkowej $\bar{\mathbf{a}}_3$, $\mathbf{a}_3$ (Rys. 2.2). Wprowadzając bezwymiarową współrzędną ξ w kierunku $\bar{\mathbf{a}}_3$, można wyrazić położenie dowolnego punktu w konfiguracji początkowej

$$\bar{\mathbf{p}}(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3) = \bar{\mathbf{r}}(\Theta^1, \Theta^2) + \xi \bar{\mathbf{a}}_3(\Theta^1, \Theta^2). \quad (2.50)$$



Rys. 2.2. Opis stanu przemieszczenia powłoki

Wektory bazowe w konfiguracji początkowej na powierzchni środkowej określa się zależnością $\bar{\mathbf{a}}_\alpha = \bar{\mathbf{r}}_{,\alpha}$. Jako trzeci wektor bazowy przyjmuje się jednostkowy wektor normalny do powierzchni środkowej $\bar{\mathbf{a}}_3$. Ponadto wyznacza się wektory bazowe dla dowolnego punktu powłoki

$$\bar{\mathbf{g}}_\alpha = \bar{\mathbf{p}}_{,\alpha} = \bar{\mathbf{r}}_{,\alpha} + \xi \bar{\mathbf{a}}_{3,\alpha} = \bar{\mathbf{a}}_\alpha - \xi b_\alpha^\beta \bar{\mathbf{a}}_\beta = \mu_\alpha^\beta \bar{\mathbf{a}}_\beta, \quad (2.51)$$

$$\bar{\mathbf{g}}_3 = \bar{\mathbf{p}}_{,\xi} = \bar{\mathbf{a}}_3, \quad (2.52)$$

gdzie tensor $\mathbf{b}$ jest drugą formą podstawową powierzchni, a μ oznacza translator

$$\mu_\alpha^\beta = \delta_\alpha^\beta - \xi b_\alpha^\beta. \quad (2.53)$$

Niech wektory $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}$, β , oznaczają odpowiednio przemieszczenie dowolnych punktów powłoki, punktów powierzchni środkowej oraz zmianę jednostkowego wektora normalnego do powierzchni środkowej (Rys. 2.2):

$$\mathbf{p} = \bar{\mathbf{p}} + \mathbf{v}, \quad (2.54)$$

$$\mathbf{r} = \bar{\mathbf{r}} + \mathbf{u}, \quad (2.55)$$

$$\mathbf{a}_3 = \bar{\mathbf{a}}_3 + \beta. \quad (2.56)$$

Wektory przemieszczenia $\mathbf{u}$ i β są funkcjami położenia określonymi na powierzchni środkowej. Można pokazać, że wektor β jest styczny do powierzchni środkowej. Ze względu na jednostkową długość wektora $\mathbf{a}_3$ otrzymuje się wyrażenie

$$|\mathbf{a}_3| = 1, \quad (2.57)$$

$$|\mathbf{a}_3| = \sqrt{\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_3} = \sqrt{(\bar{\mathbf{a}}_3 + \beta) \cdot (\bar{\mathbf{a}}_3 + \beta)} = \sqrt{1 + 2\beta_3 + \beta \cdot \beta} = 1. \quad (2.58)$$

Po odrzuceniu wyrazu nieliniowego, otrzymuje się $\beta_3 = 0$, czyli $\beta = \beta_\alpha \bar{\mathbf{a}}^\alpha$. Ponadto można wyznaczyć współrzędne wektora β

$$\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_\alpha = 0, \quad (2.59)$$

$$\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_\alpha = (\bar{\mathbf{a}}_3 + \beta) \cdot (\bar{\mathbf{a}}_\alpha + \mathbf{u}_{,\alpha}) = \bar{\mathbf{a}}_3 \cdot \mathbf{u}_{,\alpha} + \beta_\alpha + \beta \cdot \mathbf{u}_{,\alpha} = 0, \quad (2.60)$$

skąd po odrzuceniu wyrazu drugiego rzędu

$$\beta_\alpha = -\bar{\mathbf{a}}_3 \cdot \mathbf{u}_{,\alpha} = -\bar{\mathbf{a}}_3 \cdot \left[(u_\beta|_\alpha - u_3 b_{\alpha\beta}) \bar{\mathbf{a}}^\beta + (u_{3,\alpha} + u_\beta b_\alpha^\beta) \bar{\mathbf{a}}_3 \right] = -(u_{3,\alpha} + u_\beta b_\alpha^\beta). \quad (2.61)$$

Założenie Kirchhoffa–Love'a (odcinek prosty i prostopadły do powierzchni środkowej po zostaje prosty i prostopadły po deformacji) można zapisać analitycznie w postaci

$$\mathbf{p} = \mathbf{r} + \xi \mathbf{a}_3. \quad (2.62)$$

Przekształcając wyrażenie na położenie punktów w konfiguracji aktualnej

$$\mathbf{p} = \mathbf{r} + \xi \mathbf{a}_3 = \bar{\mathbf{r}} + \mathbf{u} + \xi(\bar{\mathbf{a}}_3 + \beta) = (\bar{\mathbf{r}} + \xi \bar{\mathbf{a}}_3) + (\mathbf{u} + \xi \beta) = \bar{\mathbf{p}} + (\mathbf{u} + \xi \beta), \quad (2.63)$$

można zapisać przemieszczenie dowolnego punktu poprzez przemieszczenie powierzchni środkowej i zmianę jednostkowego wektora normalnego do powierzchni środkowej

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \xi \beta. \quad (2.64)$$

Wektory bazowe w konfiguracji odkształconej są równe

$$\mathbf{g}_\alpha = \mathbf{p}_{,\alpha} = (\bar{\mathbf{p}} + \mathbf{v})_{,\alpha} = \bar{\mathbf{g}}_\alpha + \mathbf{v}_{,\alpha}, \quad (2.65)$$

$$\mathbf{g}_3 = \mathbf{p}_{,\xi} = (\bar{\mathbf{p}} + \mathbf{v})_{,\xi} = \bar{\mathbf{g}}_3 + \mathbf{v}_{,\xi} = \bar{\mathbf{g}}_3 + \beta. \quad (2.66)$$

Liniowy tensor odkształcenia definiuje się jako połowę różnicy tensorów metrycznych w konfiguracjach odkształconej i początkowej

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{g} - \bar{\mathbf{g}}). \quad (2.67)$$

Jego współrzędne przyjmują wartości

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(g_{ij} - \bar{g}_{ij}) = \frac{1}{2}(\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j - \bar{\mathbf{g}}_i \cdot \bar{\mathbf{g}}_j) = \frac{1}{2}[(\bar{\mathbf{g}}_i + \mathbf{v}, i) \cdot (\bar{\mathbf{g}}_j + \mathbf{v}, j) - \bar{\mathbf{g}}_i \cdot \bar{\mathbf{g}}_j] = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{g}}_i \cdot \mathbf{v}, j + \bar{\mathbf{g}}_j \cdot \mathbf{v}, i). \quad (2.68)$$

W tensorze odkształcenia wyróżnia się współrzędne określające odkształcenia płaszczyzny równoległej do powierzchni środkowej $e_{\alpha\beta}$, odkształcenia postaciowe płaszczyzny normalnej do powierzchni środkowej $e_{\alpha 3} = e_{3\alpha}$ oraz odkształcenia odcinka normalnego e_{33}

$$\begin{aligned} e_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{g}}_\alpha \cdot \mathbf{v}, \beta + \bar{\mathbf{g}}_\beta \cdot \mathbf{v}, \alpha) = \frac{1}{2}[\mu_\alpha^\gamma \bar{\mathbf{a}}_\gamma \cdot (\mathbf{u} + \xi\beta), \beta + \mu_\beta^\gamma \bar{\mathbf{a}}_\gamma \cdot (\mathbf{u} + \xi\beta), \alpha] = \\ &= \frac{1}{2}\left\{\mu_\alpha^\gamma \bar{\mathbf{a}}_\gamma \left[(u_\delta|_\beta - u_3 b_{\beta\delta})\bar{\mathbf{a}}^\delta + (u_{3,\beta} + u_\delta b_\beta^\delta)\bar{\mathbf{a}}_3 + \xi(\beta_\delta|_\beta \bar{\mathbf{a}}^\delta + \beta_\delta b_\beta^\delta \bar{\mathbf{a}}_3)\right] + \right. \\ &\quad \left. + \mu_\beta^\gamma \bar{\mathbf{a}}_\gamma [(u_\delta|_\alpha - u_3 b_{\alpha\delta})\bar{\mathbf{a}}^\delta + (u_{3,\alpha} + u_\delta b_\alpha^\delta)\bar{\mathbf{a}}_3 + \xi(\beta_\delta|_\alpha \bar{\mathbf{a}}^\delta + \beta_\delta b_\alpha^\delta \bar{\mathbf{a}}_3)]\right\} = \\ &= \frac{1}{2}\left\{\mu_\alpha^\gamma (u_\gamma|_\beta - u_3 b_{\beta\gamma}) + \mu_\beta^\gamma (u_\gamma|_\alpha - u_3 b_{\alpha\gamma}) + \xi\mu_\alpha^\gamma \beta_\gamma|_\beta + \xi\mu_\beta^\gamma \beta_\gamma|_\alpha\right\} = \\ &= \frac{1}{2}(\mu_\alpha^\gamma \varepsilon_{\gamma\beta} + \mu_\beta^\gamma \varepsilon_{\gamma\alpha} + \xi\mu_\alpha^\gamma \kappa_{\gamma\beta} + \xi\mu_\beta^\gamma \kappa_{\gamma\alpha}), \end{aligned} \quad (2.69)$$

$$\begin{aligned} e_{\alpha 3} &= \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{g}}_\alpha \cdot \mathbf{v}, 3 + \bar{\mathbf{g}}_3 \cdot \mathbf{v}, \alpha) = \frac{1}{2}[\mu_\alpha^\gamma \bar{\mathbf{a}}_\gamma \cdot \beta + \bar{\mathbf{a}}_3 \cdot (\mathbf{u} + \xi\beta), \alpha] = \\ &= \frac{1}{2}\left\{\mu_\alpha^\gamma \beta_\gamma + \bar{\mathbf{a}}_3 \cdot [(u_\delta|_\alpha - u_3 b_{\alpha\delta})\bar{\mathbf{a}}^\delta + (u_{3,\alpha} + u_\delta b_\alpha^\delta)\bar{\mathbf{a}}_3] + \bar{\mathbf{a}}_3 \cdot \xi(\beta_\delta|_\alpha \bar{\mathbf{a}}^\delta + \beta_\delta b_\alpha^\delta \bar{\mathbf{a}}_3)\right\} = \\ &= \frac{1}{2}(\mu_\alpha^\gamma \beta_\gamma - \beta_\alpha + \xi\beta_\delta b_\alpha^\delta) = \frac{1}{2}[(\delta_\alpha^\gamma - \xi b_\alpha^\gamma)\beta_\gamma - (\delta_\alpha^\delta - \xi b_\alpha^\delta)\beta_\delta] = 0, \end{aligned} \quad (2.70)$$

$$e_{33} = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{g}}_3 \cdot \mathbf{v}, 3 + \bar{\mathbf{g}}_3 \cdot \mathbf{v}, 3) = \bar{\mathbf{a}}_3 \cdot \beta = 0. \quad (2.71)$$

Przyjęcie założenia Kirchhoffa–Love'a skutkuje w teorii liniowej zerowymi odkształceniami $e_{\alpha 3}$ i e_{33} . Współrzędne tensora odkształcenia we wzorze (2.69) są wyrażone przez dwa pola tensorowe na powierzchni środkowej zwane odpowiednio: tensorem rozciągnięć i tensorem obrotów

$$\varepsilon_{\gamma\beta} = u_\gamma|_\beta - u_3 b_{\beta\gamma}, \quad (2.72)$$

$$\kappa_{\gamma\beta} = \beta_\gamma|_\beta = -u_3|_{\gamma\beta} - b_\gamma^\delta|_\beta u_\delta - b_\gamma^\delta u_\delta|_\beta. \quad (2.73)$$

Uogólnione tensory odkształcenia ε i κ nie są symetryczne (mimo, że ogólny tensor odkształcenia $\mathbf{e}$ jest symetryczny), co powodować może brak symetrii tensora naprężenia (wyznaczonego z równań konstytutywnych). Aby ominąć tę niedogodność stosuje się różne warianty teorii powłok np. Nowożyłowa, Koitera, Sandersa. Przykładowo w wariacie Koitera uogólnione tensory

odkształcenia mają następujące definicje [27]:

$$\kappa_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\epsilon_{\alpha\beta} + \epsilon_{\beta\alpha}) = \frac{1}{2}(u_{\alpha}|_{\beta} + u_{\beta}|_{\alpha}) - u_3 b_{\alpha\beta}, \quad (2.74)$$

$$\rho_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\kappa_{\alpha\beta} + \kappa_{\beta\alpha} - b_{\alpha}^{\lambda}\omega_{\beta\lambda} - b_{\beta}^{\lambda}\omega_{\alpha\lambda}), \quad (2.75)$$

gdzie

$$\omega_{\beta\lambda} = \frac{1}{2}[u_{\lambda}|_{\beta} - u_{\beta}|_{\lambda} - (b_{\lambda\beta} - b_{\beta\lambda})u_3] = \frac{1}{2}(u_{\lambda}|_{\beta} - u_{\beta}|_{\lambda}). \quad (2.76)$$

2.2.2. Operator związków geometrycznych we współrzędnych fizycznych

Wyprowadza się operator związków geometrycznych (2.69) dla fizycznych współrzędnych odkształceń i przemieszczeń

$$e_{\langle\alpha\beta\rangle} = L_{\alpha\beta}^i u_{\langle i\rangle}. \quad (2.77)$$

Fizyczne składowe przemieszczeń i odkształceń wyznacza się z definicji

$$u_{\langle 1\rangle} = \frac{u_1}{\sqrt{a_{11}}} = \frac{u_1}{A}, \quad (2.78)$$

$$u_{\langle 2\rangle} = \frac{u_2}{\sqrt{a_{22}}} = \frac{u_2}{r}, \quad (2.79)$$

$$u_{\langle 3\rangle} = u_3 \quad (2.80)$$

i na ich podstawie otrzymuje się tensory odkształcenia.

Poszczególne składowe tensora ϵ mają postać

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= u_1|_1 - b_{11}u_3 = u_{1,1} - u_{\alpha}\Gamma_{11}^{\alpha} - b_{11}u_3 = u_{1,1} - u_1\frac{G}{A^2} - u_3\frac{B}{A} = (u_{\langle 1\rangle}A)_{,1} - u_{\langle 1\rangle}A\frac{G}{A^2} - u_{\langle 3\rangle}\frac{B}{A} = \\ &= u_{\langle 1\rangle,1}A + u_{\langle 1\rangle}\frac{G}{A} - u_{\langle 1\rangle}\frac{G}{A} - u_{\langle 3\rangle}\frac{B}{A} = Au_{\langle 1\rangle,1} - \frac{B}{A}u_{\langle 3\rangle}, \end{aligned} \quad (2.81)$$

$$\epsilon_{12} = u_1|_2 - b_{12}u_3 = u_{1,2} - u_{\alpha}\Gamma_{12}^{\alpha} = u_{1,2} - u_2\frac{r'}{r} = (u_{\langle 1\rangle}A)_{,2} - u_{\langle 2\rangle}r\frac{r'}{r} = Au_{\langle 1\rangle,2} - r'u_{\langle 2\rangle}, \quad (2.82)$$

$$\epsilon_{21} = u_2|_1 - b_{21}u_3 = u_{2,1} - u_{\alpha}\Gamma_{21}^{\alpha} = u_{2,1} - u_2\frac{r'}{r} = (u_{\langle 2\rangle}r)_{,1} - u_{\langle 2\rangle}r\frac{r'}{r} = ru_{\langle 2\rangle,1}, \quad (2.83)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{22} &= u_2|_2 - b_{22}u_3 = u_{2,2} - u_\alpha \Gamma_{22}^\alpha - b_{22}u_3 = u_{2,2} + u_1 \frac{r'r}{A^2} - \frac{z'r}{A}u_3 = (u_{<2>r})_{,2} + u_{<1>A} \frac{r'r}{A^2} - u_{<3>} \frac{z'r}{A} = \\ &= \frac{r'r}{A}u_{<1>} + ru_{<2>,2} - \frac{z'r}{A}u_{<3>}. \end{aligned} \quad (2.84)$$

W powyższych wyrażeniach wykorzystano

$$A_{,1} = \left(\sqrt{(r')^2 + (z')^2} \right)_{,1} = \frac{r'r'' + z'z''}{\sqrt{(r')^2 + (z')^2}} = \frac{G}{A}. \quad (2.85)$$

Po kolejnych przekształceniach

$$u_3|_{\alpha\beta} = (u_3|_\alpha)|_\beta = (u_{3,\alpha})|_\beta = u_{3,\alpha\beta} - u_{3,\delta}\Gamma_{\alpha\beta}^\delta, \quad (2.86)$$

$$\begin{aligned}\kappa_{\alpha\beta} &= -u_3|_{\alpha\beta} - b_\alpha^\gamma|_\beta u_\gamma - b_\alpha^\gamma u_\gamma|_\beta = \\ &= -u_{3,\alpha\beta} + u_{3,\delta}\Gamma_{\alpha\beta}^\delta - \left(b_{\alpha,\beta}^\gamma - b_\delta^\gamma \Gamma_{\alpha\beta}^\delta + b_\alpha^\delta \Gamma_{\beta\delta}^\gamma \right) u_\gamma - b_\alpha^\gamma \left(u_{\gamma,\beta} - u_\delta \Gamma_{\gamma\beta}^\delta \right), \end{aligned} \quad (2.87)$$

współrzędne tensora κ przyjmują postać

$$\begin{aligned}\kappa_{11} &= -u_{3,11} + u_{3,\delta}\Gamma_{11}^\delta - (b_{1,1}^\gamma - b_\delta^\gamma \Gamma_{11}^\delta + b_1^\delta \Gamma_{1\delta}^\gamma) u_\gamma - b_1^\gamma (u_{\gamma,1} - u_\delta \Gamma_{\gamma 1}^\delta) = \\ &= -u_{3,11} + u_{3,1} \frac{G}{A^2} - u_1 \left(H_1 - \frac{B}{A^3} \frac{G}{A^2} + \frac{B}{A^3} \frac{G}{A^2} \right) + u_1 \frac{B}{A^3} \frac{G}{A^2} - u_{1,1} \frac{B}{A^3} = \\ &= u_{<1>A} \left(\frac{BG}{A^5} - H_1 \right) - (u_{<1>A})_{,1} \frac{B}{A^3} + u_{<3>,1} \frac{G}{A^2} - u_{<3>,11} = \\ &= -AH_1 u_{<1>} - \frac{B}{A^2} u_{<1>,1} + \frac{G}{A^2} u_{<3>,1} - u_{<3>,11}, \end{aligned} \quad (2.88)$$

$$\begin{aligned}\kappa_{12} &= -u_{3,12} + u_{3,\gamma}\Gamma_{12}^\gamma - (b_{1,2}^\gamma - b_\delta^\gamma \Gamma_{12}^\delta + b_1^\delta \Gamma_{2\delta}^\gamma) u_\gamma - b_1^\gamma (u_{\gamma,2} - u_\delta \Gamma_{\gamma 2}^\delta) = \\ &= -u_{3,12} + u_{3,2} \frac{r'}{r} - \left(-\frac{z'}{rA} \frac{r'}{r} + \frac{B}{A^3} \frac{r'}{r} \right) u_2 - \frac{B}{A^3} \left(u_{1,2} - u_2 \frac{r'}{r} \right) = \\ &= -\frac{B}{A^3} (u_{<1>A})_{,2} + \frac{z'r'}{r^2 A} (u_{<2>r}) + u_{<3>,2} \frac{r'}{r} - u_{<3>,12} = \\ &= -\frac{B}{A^2} u_{<1>,2} + \frac{r'z'}{rA} u_{<2>} + \frac{r'}{r} u_{<3>,2} - u_{<3>,12}, \end{aligned} \quad (2.89)$$

$$\begin{aligned}\kappa_{21} &= -u_{3,12} + u_{3,\gamma}\Gamma_{12}^\gamma - (b_{2,1}^\gamma - b_\delta^\gamma \Gamma_{12}^\delta + b_2^\delta \Gamma_{1\delta}^\gamma) u_\gamma - b_2^\gamma (u_{\gamma,1} - u_\delta \Gamma_{\gamma 1}^\delta) = \\ &= -u_{3,12} + u_{3,2} \frac{r'}{r} - \left(H_2 - \frac{z'}{rA} \frac{r'}{r} + \frac{z'}{rA} \frac{r'}{r} \right) u_2 - \frac{z'}{rA} \left(u_{2,1} - u_2 \frac{r'}{r} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -(u_{<2>}r) \left(H_2 - \frac{z'r'}{r^2 A} \right) - \frac{z'}{rA} (u_{<2>}r)_{,1} + u_{<3>,2} \frac{r'}{r} - u_{<3>,12} = \\
 &= -H_2 r u_{<2>} - \frac{z'}{A} u_{<2>,1} + \frac{r'}{r} u_{<3>,2} - u_{<3>,12}, \quad (2.90)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \kappa_{22} &= -u_{3,22} + u_{3,\delta} \Gamma_{22}^\delta - (b_{2,2}^\gamma - b_\delta^\gamma \Gamma_{22}^\delta + b_{2\delta}^\delta \Gamma_{2\delta}^\gamma) u_\gamma - b_2^\gamma (u_{\gamma,2} - u_\delta \Gamma_{\gamma 2}^\delta) = \\
 &= -u_{3,22} - u_{3,1} \frac{rr'}{A^2} - u_1 \left(\frac{B}{A^3} \frac{rr'}{A^2} - \frac{z'}{rA} \frac{rr'}{A^2} \right) - u_{2,2} \frac{z'}{rA} - u_1 \frac{z'}{rA} \frac{rr'}{A^2} = \\
 &= -u_{<1>} A \frac{rr'B}{A^5} - (u_{<2>}r)_{,2} \frac{z'}{rA} - u_{<3>,22} - u_{<3>,1} \frac{rr'}{A^2} = \\
 &= -\frac{rr'B}{A^4} u_{<1>} - \frac{z'}{A} u_{<2>,2} - \frac{rr'}{A^2} u_{<3>,1} - u_{<3>,22}, \quad (2.91)
 \end{aligned}$$

gdzie przez H_1 i H_2 oznaczono wyrażenia

$$H_1 = b_{1,1}^1 = \left(\frac{B}{A^3} \right)_{,1} = \frac{B'A^3 - B3A^2A'}{A^6} = \frac{B'A^2 - 3BG}{A^5} = \frac{(r'z''' - z'r''')A^2 - 3BG}{A^5}. \quad (2.92)$$

$$H_2 = b_{2,1}^2 = \left(\frac{z'}{rA} \right)_{,1} = \frac{z''rA - z'(r'A + r_A^G)}{r^2 A^2} = \frac{A^2(rz'' - r'z') + rz'G}{r^2 A^3}. \quad (2.93)$$

Definicję tensora odkształcenia (2.69) można zapisać inaczej, porządkując wyrazy ze względu na potęgę ξ

$$\begin{aligned}
 e_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left[(\delta_\alpha^\gamma - \xi b_\alpha^\gamma) \varepsilon_{\gamma\beta} + (\delta_\beta^\gamma - \xi b_\beta^\gamma) \varepsilon_{\gamma\alpha} + \xi (\delta_\alpha^\gamma - \xi b_\alpha^\gamma) \kappa_{\gamma\beta} + \xi (\delta_\beta^\gamma - \xi b_\beta^\gamma) \kappa_{\gamma\alpha} \right] = \\
 &= \frac{1}{2} \left[\varepsilon_{\alpha\beta} + \varepsilon_{\beta\alpha} + \xi (\kappa_{\alpha\beta} + \kappa_{\beta\alpha} - b_\alpha^\gamma \varepsilon_{\gamma\beta} - b_\beta^\gamma \varepsilon_{\gamma\alpha}) - \xi^2 (b_\alpha^\gamma \kappa_{\gamma\beta} + b_\beta^\gamma \kappa_{\gamma\alpha}) \right]. \quad (2.94)
 \end{aligned}$$

Po podstawieniu wyznaczonych składowych (2.81–2.84) i (2.88–2.91) do wzoru (2.94) i uwzględnieniu definicji fizycznych współrzędnych tensora odkształcenia

$$e_{<11>} = \frac{e_{11}}{\sqrt{a_{11}a_{11}}} = \frac{e_{11}}{A^2}, \quad (2.95)$$

$$e_{<12>} = e_{<21>} = \frac{e_{12}}{\sqrt{a_{11}a_{22}}} = \frac{e_{12}}{rA} = \frac{e_{21}}{rA}, \quad (2.96)$$

$$e_{<22>} = \frac{e_{22}}{\sqrt{a_{22}a_{22}}} = \frac{e_{22}}{r^2}, \quad (2.97)$$

otrzymuje się kolejno współrzędne fizyczne tensora odkształcenia jako funkcje współrzędnych fizycznych wektora przemieszczenia.

$$\begin{aligned}
 e_{<11>}A^2 &= e_{11} = \varepsilon_{11} + \xi \left(\kappa_{11} - b_1^1 \varepsilon_{11} \right) - \xi^2 b_1^1 \kappa_{11} = \\
 &= Au_{<1>,1} - \frac{B}{A} u_{<3>} + \xi \left[-AH_1 u_{<1>} - \frac{B}{A^2} u_{<1>,1} + \frac{G}{A^2} u_{<3>,1} - u_{<3>,11} - \frac{B}{A^3} \left(Au_{<1>,1} - \frac{B}{A} u_{<3>} \right) \right] + \\
 &\quad - \xi^2 \frac{B}{A^3} \left(-AH_1 u_{<1>} - \frac{B}{A^2} u_{<1>,1} + \frac{G}{A^2} u_{<3>,1} - u_{<3>,11} \right) = \\
 &= Au_{<1>,1} - \frac{B}{A} u_{<3>} + \xi \left(-AH_1 u_{<1>} - \frac{2B}{A^2} u_{<1>,1} + \frac{B^2}{A^4} u_{<3>} + \frac{G}{A^2} u_{<3>,1} - u_{<3>,11} \right) + \\
 &\quad + \xi^2 \left(\frac{BH_1}{A^2} u_{<1>} + \frac{B^2}{A^5} u_{<1>,1} - \frac{BG}{A^5} u_{<3>,1} + \frac{B}{A^3} u_{<3>,11} \right), \tag{2.98}
 \end{aligned}$$

skąd

$$\begin{aligned}
 e_{<11>} &= \frac{u_{<1>,1}}{A} - \frac{B}{A^3} u_{<3>} + \xi \left(-\frac{H_1}{A} u_{<1>} - \frac{2B}{A^4} u_{<1>,1} + \frac{B^2}{A^6} u_{<3>} + \frac{G}{A^4} u_{<3>,1} - \frac{u_{<3>,11}}{A^2} \right) + \\
 &\quad + \xi^2 \left(\frac{BH_1}{A^4} u_{<1>} + \frac{B^2}{A^7} u_{<1>,1} - \frac{BG}{A^7} u_{<3>,1} + \frac{B}{A^5} u_{<3>,11} \right). \tag{2.99}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 e_{<12>}Ar &= e_{<21>}Ar = e_{12} = \frac{1}{2} \left[\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21} + \xi \left(\kappa_{12} + \kappa_{21} - b_1^1 \varepsilon_{12} - b_2^2 \varepsilon_{21} \right) - \xi^2 \left(b_1^1 \kappa_{12} + b_2^2 \kappa_{21} \right) \right] = \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ Au_{<1>,2} - r' u_{<2>} + ru_{<2>,1} + \xi \left[-\frac{B}{A^2} u_{<1>,2} + \frac{r' z'}{rA} u_{<2>} + \frac{r'}{r} u_{<3>,2} - u_{<3>,12} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - H_2 ru_{<2>} - \frac{z'}{A} u_{<2>,1} + \frac{r'}{r} u_{<3>,2} - u_{<3>,12} - \frac{B}{A^3} (Au_{<1>,2} - r' u_{<2>}) - \frac{z'}{rA} (ru_{<2>,1}) \right] + \right. \\
 &\quad \left. - \xi^2 \left[\frac{B}{A^3} \left(-\frac{B}{A^2} u_{<1>,2} + \frac{r' z'}{rA} u_{<2>} + \frac{r'}{r} u_{<3>,2} - u_{<3>,12} \right) + \frac{z'}{rA} \left(-H_2 ru_{<2>} - \frac{z'}{A} u_{<2>,1} + \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{r'}{r} u_{<3>,2} - u_{<3>,12} \right) \right] \right\} = \frac{1}{2} \left\{ Au_{<1>,2} + ru_{<2>,1} - r' u_{<2>} + \xi \left[-\frac{2B}{A^2} u_{<1>,2} - \frac{2z'}{A} u_{<2>,1} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \left(\frac{r' z'}{rA} - H_2 r + \frac{Br'}{A^3} \right) u_{<2>} + \frac{2r'}{r} u_{<3>,2} - 2u_{<3>,12} \right] + \xi^2 \left[\frac{B^2}{A^5} u_{<1>,2} + \left(\frac{H_2 z'}{A} - \frac{Br' z'}{rA^4} \right) u_{<2>} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{(z')^2}{rA^2} u_{<2>,1} - \left(\frac{Br'}{rA^3} + \frac{r' z'}{r^2 A} \right) u_{<3>,2} + \left(\frac{B}{A^3} + \frac{z'}{rA} \right) u_{<3>,12} \right] \right\}, \tag{2.100}
 \end{aligned}$$

skąd

$$\begin{aligned}
 e_{<12>} &= e_{<21>} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{u_{<1>,2}}{r} + \frac{u_{<2>,1}}{A} - \frac{r'}{rA} u_{<2>} + \xi \left[-\frac{2B}{rA^3} u_{<1>,2} - \frac{2z'}{rA^2} u_{<2>,1} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \left(\frac{r' z'}{r^2 A^2} - \frac{H_2}{A} + \frac{Br'}{rA^4} \right) u_{<2>} + \frac{2r'}{r^2 A} u_{<3>,2} - \frac{2}{rA} u_{<3>,12} \right] + \xi^2 \left[\frac{B^2}{rA^6} u_{<1>,2} + \left(\frac{H_2 z'}{rA^2} - \frac{Br' z'}{r^2 A^5} \right) u_{<2>} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{(z')^2}{r^2 A^3} u_{<2>,1} - \left(\frac{Br'}{r^2 A^4} + \frac{r' z'}{r^3 A^2} \right) u_{<3>,2} + \left(\frac{B}{rA^4} + \frac{z'}{r^2 A^2} \right) u_{<3>,12} \right] \right\}. \tag{2.101}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 e_{\langle 22 \rangle} r^2 = e_{22} = \varepsilon_{22} + \xi \left(\kappa_{22} - b_2^2 \varepsilon_{22} \right) - \xi^2 b_2^2 \kappa_{22} = \frac{r' r}{A} u_{\langle 1 \rangle} + r u_{\langle 2 \rangle, 2} - \frac{z' r}{A} u_{\langle 3 \rangle} + \\
 + \xi \left[-\frac{r r' B}{A^4} u_{\langle 1 \rangle} - \frac{z'}{A} u_{\langle 2 \rangle, 2} - \frac{r r'}{A^2} u_{\langle 3 \rangle, 1} - u_{\langle 3 \rangle, 22} - \frac{z'}{r A} \left(\frac{r' r}{A} u_{\langle 1 \rangle} + r u_{\langle 2 \rangle, 2} - \frac{z' r}{A} u_{\langle 3 \rangle} \right) \right] + \\
 - \xi^2 \frac{z'}{r A} \left(-\frac{r r' B}{A^4} u_{\langle 1 \rangle} - \frac{z'}{A} u_{\langle 2 \rangle, 2} - \frac{r r'}{A^2} u_{\langle 3 \rangle, 1} - u_{\langle 3 \rangle, 22} \right) = \frac{r' r}{A} u_{\langle 1 \rangle} + r u_{\langle 2 \rangle, 2} - \frac{z' r}{A} u_{\langle 3 \rangle} + \\
 + \xi \left[-\left(\frac{r r' B}{A^4} + \frac{r' z'}{A^2} \right) u_{\langle 1 \rangle} - \frac{2 z'}{A} u_{\langle 2 \rangle, 2} + \frac{(z')^2}{A^2} u_{\langle 3 \rangle} - \frac{r r'}{A^2} u_{\langle 3 \rangle, 1} - u_{\langle 3 \rangle, 22} \right] + \\
 + \xi^2 \left[\frac{r' z' B}{A^5} u_{\langle 1 \rangle} + \frac{(z')^2}{r A^2} u_{\langle 2 \rangle, 2} + \frac{r' z'}{A^3} u_{\langle 3 \rangle, 1} + \frac{z'}{r A} u_{\langle 3 \rangle, 22} \right], \quad (2.102)
 \end{aligned}$$

skąd

$$\begin{aligned}
 e_{\langle 22 \rangle} = \frac{r'}{r A} u_{\langle 1 \rangle} + \frac{u_{\langle 2 \rangle, 2}}{r} - \frac{z'}{r A} u_{\langle 3 \rangle} + \xi \left[-\left(\frac{r' B}{r A^4} + \frac{r' z'}{r^2 A^2} \right) u_{\langle 1 \rangle} - \frac{2 z'}{r^2 A} u_{\langle 2 \rangle, 2} + \frac{(z')^2}{r^2 A^2} u_{\langle 3 \rangle} + \right. \\
 \left. - \frac{r'}{r A^2} u_{\langle 3 \rangle, 1} - \frac{u_{\langle 3 \rangle, 22}}{r^2} \right] + \xi^2 \left[\frac{r' z' B}{r^2 A^5} u_{\langle 1 \rangle} + \frac{(z')^2}{r^3 A^2} u_{\langle 2 \rangle, 2} + \frac{r' z'}{r^2 A^3} u_{\langle 3 \rangle, 1} + \frac{z'}{r^3 A} u_{\langle 3 \rangle, 22} \right]. \quad (2.103)
 \end{aligned}$$

Po uporządkowaniu względem składowych wektora przemieszczenia

$$e_{\langle \alpha \beta \rangle} = L_{\alpha \beta}^i u_{\langle i \rangle} = L_{\alpha \beta}^1 u_{\langle 1 \rangle} + L_{\alpha \beta}^2 u_{\langle 2 \rangle} + L_{\alpha \beta}^3 u_{\langle 3 \rangle} \quad (2.104)$$

operator związków geometrycznych można przedstawić w formie macierzowej

$$[L_{\alpha \beta}^1] = \begin{bmatrix} -\frac{H_1 \xi}{A} + \frac{B H_1 \xi^2}{A^4} + \left(\frac{1}{A} - \frac{2 B \xi}{A^4} + \frac{B^2 \xi^2}{A^7} \right) \frac{\partial}{\partial s} & \left(\frac{1}{2r} - \frac{B \xi}{r A^3} + \frac{B^2 \xi^2}{2r A^6} \right) \frac{\partial}{\partial \Theta} \\ \left(\frac{1}{2r} - \frac{B \xi}{r A^3} + \frac{B^2 \xi^2}{2r A^6} \right) \frac{\partial}{\partial \Theta} & \frac{r'}{r A} - \frac{r' B \xi}{r A^4} - \frac{r' z' \xi}{r^2 A^2} + \frac{r' z' B \xi^2}{r^2 A^5} \end{bmatrix}, \quad (2.105)$$

$$[L_{\alpha \beta}^2] = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{r'}{2r A} + \frac{r' z' \xi}{2r^2 A^2} - \frac{H_2 \xi}{2A} + \frac{B r' \xi}{2r A^4} + \frac{H_2 z' \xi^2}{2r A^2} - \frac{B r' z' \xi^2}{2r^2 A^5} + \left(\frac{1}{2A} - \frac{z' \xi}{r A^2} + \frac{(z')^2 \xi^2}{2r^2 A^3} \right) \frac{\partial}{\partial s} \\ -\frac{r'}{2r A} + \frac{r' z' \xi}{2r^2 A^2} - \frac{H_2 \xi}{2A} + \frac{B r' \xi}{2r A^4} + \frac{H_2 z' \xi^2}{2r A^2} - \frac{B r' z' \xi^2}{2r^2 A^5} + \left(\frac{1}{2A} - \frac{z' \xi}{r A^2} + \frac{(z')^2 \xi^2}{2r^2 A^3} \right) \frac{\partial}{\partial s} & \left(\frac{1}{r} - \frac{2 z' \xi}{r^2 A} + \frac{(z')^2}{r^3 A^2} \right) \frac{\partial}{\partial \Theta} \end{bmatrix}, \quad (2.106)$$

$$[L^3_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} -\frac{B}{A^3} + \frac{B^2\xi}{A^6} + \left(\frac{G\xi}{A^4} - \frac{BG\xi^2}{A^7}\right) \frac{\partial}{\partial s} + & \left(\frac{r'\xi}{r^2A} - \frac{Br'\xi^2}{2r^2A^4} - \frac{r'z'\xi^2}{2r^3A^2}\right) \frac{\partial}{\partial\Theta} + \\ + \left(-\frac{\xi}{A^2} + \frac{B\xi^2}{A^5}\right) \frac{\partial^2}{\partial s^2} & + \left(-\frac{\xi}{rA} + \frac{B\xi^2}{2rA^4} + \frac{z'\xi^2}{2r^2A^2}\right) \frac{\partial^2}{\partial s\partial\Theta} \\ \left(\frac{r'\xi}{r^2A} - \frac{Br'\xi^2}{2r^2A^4} - \frac{r'z'\xi^2}{2r^3A^2}\right) \frac{\partial}{\partial\Theta} + & -\frac{z'}{rA} + \frac{(z')^2\xi}{r^2A^2} - \left(\frac{r'\xi}{rA^2} - \frac{r'z'\xi^2}{r^2A^3}\right) \frac{\partial}{\partial s} + \\ + \left(-\frac{\xi}{rA} + \frac{B\xi^2}{2rA^4} + \frac{z'\xi^2}{2r^2A^2}\right) \frac{\partial^2}{\partial s\partial\Theta} & + \left(-\frac{\xi}{r^2} + \frac{z'\xi^2}{r^3A}\right) \frac{\partial^2}{\partial\Theta^2} \end{bmatrix}. \quad (2.107)$$

2.2.3. Równania równowagi i warunki brzegowe

Równania równowagi oraz warunki brzegowe wyznacza się z zasady prac przygotowanych.

Praca wirtualna sił wewnętrznych jest równa

$$W_w = \int_V \sigma^{ij} \delta e_{ij} dV = \int_V \sigma^{\alpha\beta} \delta e_{\alpha\beta} dV, \quad (2.108)$$

gdzie element objętości wynosi

$$dV = \mu dS d\xi, \quad (2.109)$$

oraz

$$\mu = \det(\mu^\alpha_\beta) = 1 - \xi(b_1^1 + b_2^2) + \xi^2 b_1^1 b_2^2 = 1 - 2\xi H + \xi^2 K. \quad (2.110)$$

Przez H oznaczono krzywiznę średnią, a przez K krzywiznę Gaussa. Po wstawieniu do wzoru (2.108) definicji tensora odkształcenia (2.69) uzyskuje się wyrażenie

$$W_w = \int_S \left(\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mu \sigma^{\alpha\beta} \mu^\gamma_\alpha d\xi \delta \varepsilon_{\gamma\beta} + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mu \sigma^{\alpha\beta} \mu^\gamma_\alpha \xi d\xi \delta \kappa_{\gamma\beta} \right) dS = \int_S (n^{\beta\gamma} \delta \varepsilon_{\gamma\beta} + m^{\beta\gamma} \delta \kappa_{\gamma\beta}) dS. \quad (2.111)$$

W równaniu (2.111) wprowadzono definicje sił wewnętrznych postaci

$$n^{\beta\gamma} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mu \sigma^{\alpha\beta} \mu^\gamma_\alpha d\xi, \quad (2.112)$$

$$m^{\beta\gamma} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mu \sigma^{\alpha\beta} \mu^\gamma_\alpha \xi d\xi. \quad (2.113)$$

Po przekształceniu równania (2.111) mamy

$$\begin{aligned}
 W_w &= \int_S (n^{\alpha\beta} \delta u_\beta |_\alpha - n^{\alpha\beta} b_{\beta\alpha} \delta u_3 + m^{\alpha\beta} \delta \beta_\beta |_\alpha) dS = \\
 &= \int_S [(n^{\alpha\beta} \delta u_\beta) |_\alpha - n^{\alpha\beta} b_{\beta\alpha} \delta u_3 + (m^{\alpha\beta} \delta \beta_\beta) |_\alpha - n^{\alpha\beta} |_\alpha \delta u_\beta - m^{\alpha\beta} |_\alpha \delta \beta_\beta] dS. \quad (2.114)
 \end{aligned}$$

Po wykorzystaniu twierdzenia Ostrogradzkiego–Gaussa powyższe równanie przyjmuje postać

$$W_w = \int_S (-n^{\alpha\beta} b_{\beta\alpha} \delta u_3 - n^{\alpha\beta} |_\alpha \delta u_\beta - m^{\alpha\beta} |_\alpha \delta \beta_\beta) dS + \int_C (n^{\alpha\beta} \delta u_\beta + m^{\alpha\beta} \delta \beta_\beta) v_\alpha dC, \quad (2.115)$$

gdzie $\mathbf{v}$ jest jednostkowym wektorem normalnym skierowanym na zewnątrz konturu C (Rys. 2.3). W kroku następnym wyraża się wektor β przez współrzędne funkcji przemieszczenia (2.61) i wykonuje się przekształcenia jak wyżej. Wykorzystując ponownie twierdzenia Ostrogradzkiego–Gaussa mamy

$$\begin{aligned}
 W_w &= \int_S \left[-n^{\alpha\beta} b_{\beta\alpha} \delta u_3 - n^{\alpha\beta} |_\alpha \delta u_\beta - m^{\alpha\beta} |_\alpha (-\delta u_3 |_\beta - b_\beta^\gamma \delta u_\gamma) \right] dS + \\
 &\quad + \int_C \left[n^{\alpha\beta} \delta u_\beta + m^{\alpha\beta} (-\delta u_3 |_\beta - b_\beta^\gamma \delta u_\gamma) \right] v_\alpha dC = \\
 &= \int_S \left[-n^{\alpha\beta} b_{\beta\alpha} \delta u_3 - n^{\alpha\beta} |_\alpha \delta u_\beta + m^{\alpha\beta} |_\alpha b_\beta^\gamma \delta u_\gamma + (m^{\alpha\beta} |_\alpha \delta u_3) |_\beta - m^{\alpha\beta} |_{\alpha\beta} \delta u_3 \right] dS + \\
 &\quad + \int_C \left[n^{\alpha\beta} \delta u_\beta - m^{\alpha\beta} b_\beta^\gamma \delta u_\gamma - m^{\alpha\beta} v_\beta \delta \frac{\partial u_3}{\partial \mathbf{v}} - \frac{\partial}{\partial C} (m^{\alpha\beta} v^\delta \psi_{\beta\delta}) \delta u_3 \right] v_\alpha dC = \\
 &= \int_S \left[(-n^{\alpha\gamma} |_\alpha + m^{\alpha\beta} |_\alpha b_\beta^\gamma) \delta u_\gamma + (-n^{\alpha\beta} b_{\beta\alpha} - m^{\alpha\beta} |_{\alpha\beta}) \delta u_3 \right] dS + \\
 &\quad + \int_C \left\{ (n^{\alpha\gamma} v_\alpha - m^{\alpha\beta} b_\beta^\gamma v_\alpha) \delta u_\gamma + \left[m^{\alpha\beta} |_\alpha v_\beta - \frac{\partial}{\partial C} (m^{\alpha\beta} v_\alpha v^\delta \psi_{\beta\delta}) \right] \delta u_3 - m^{\alpha\beta} v_\alpha v_\beta \delta \frac{\partial u_3}{\partial \mathbf{v}} \right\} dC. \quad (2.116)
 \end{aligned}$$

W powyższym przekształceniu wykorzystano tożsamość

$$\begin{aligned}
 \int_C m^{\alpha\beta} \delta u_3 |_\beta v_\alpha dC &= \int_C m^{\alpha\beta} \left(v_\beta \delta \frac{\partial u_3}{\partial \mathbf{v}} - v^\delta \psi_{\beta\delta} \delta \frac{\partial u_3}{\partial C} \right) v_\alpha dC = \\
 &= \int_C \left[m^{\alpha\beta} v_\alpha v_\beta \delta \frac{\partial u_3}{\partial \mathbf{v}} - \frac{\partial}{\partial C} (m^{\alpha\beta} v_\alpha v^\delta \psi_{\beta\delta} \delta u_3) + \frac{\partial}{\partial C} (m^{\alpha\beta} v_\alpha v^\delta \psi_{\beta\delta}) \delta u_3 \right] dC = \\
 &= \int_C \left[m^{\alpha\beta} v_\alpha v_\beta \delta \frac{\partial u_3}{\partial \mathbf{v}} + \frac{\partial}{\partial C} (m^{\alpha\beta} v_\alpha v^\delta \psi_{\beta\delta}) \delta u_3 \right] dC, \quad (2.117)
 \end{aligned}$$

gdzie ψ jest tensorem Levi–Civita

$$\psi_{\alpha\beta} = \sqrt{\det(a_{\alpha\beta})} d_{\alpha\beta}, \quad (2.118)$$

a $\mathbf{d}$ jest symbolem permutacyjnym

$$d_{11} = d_{22} = 0, \quad (2.119)$$

$$d_{12} = -d_{21} = 1. \quad (2.120)$$

Wyznacza się pracę przygotowaną obciążeni zewnętrznym. Siły zewnętrzne dzieli się na dwie grupy. Pierwszą stanowią siły przyłożone do powierzchni granicznych powłoki i siły objętościowe, drugą siły przyłożone do powierzchni bocznych (prostopadłych do powierzchni środkowej). Dla powierzchni granicznych wprowadza się następujące oznaczenia (Rys. 2.3)

$$\mathbf{v}^+ = \mathbf{u} + \frac{h}{2}\boldsymbol{\beta}, \quad (2.121)$$

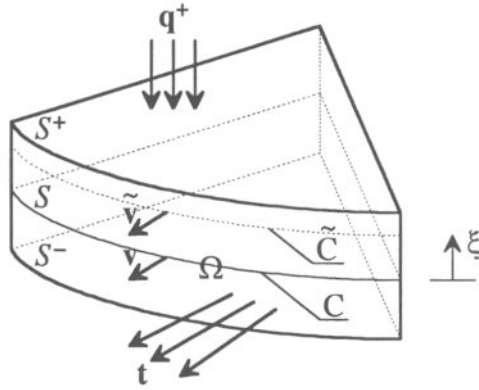
$$\mathbf{v}^- = \mathbf{u} - \frac{h}{2}\boldsymbol{\beta}, \quad (2.122)$$

$$\mu^+ = \mu\left(\frac{h}{2}\right), \quad (2.123)$$

$$\mu^- = \mu\left(-\frac{h}{2}\right), \quad (2.124)$$

$$dS^+ = \mu^+ dS, \quad (2.125)$$

$$dS^- = \mu^- dS. \quad (2.126)$$



Rys. 2.3. Obciążenia na powierzchniach granicznych i brzegowych powłoki

Praca wirtualna pierwszej grupy sił jest równa

$$W_{z1} = \int_{S^+} \mathbf{f}^+ \delta \mathbf{v}^+ dS^+ + \int_{S^-} \mathbf{f}^- \delta \mathbf{v}^- dS^- + \int_V \mathbf{x} \delta \mathbf{v} dV = \int_S \left[f^\alpha \delta u_\alpha + f^3 \delta u_3 - l^\alpha \left(\delta u_{3,\alpha} + b_\alpha^\beta \delta u_\beta \right) \right] dS, \quad (2.127)$$

gdzie zastosowano oznaczenia

$$f^i = f^{+i} \mu^+ + f^{-i} \mu^- + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mu x^i d\xi, \quad (2.128)$$

$$l^\alpha = \frac{h}{2} f^{+\alpha} \mu^+ - \frac{h}{2} f^{-\alpha} \mu^- + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mu x^\alpha \xi d\xi. \quad (2.129)$$

Równanie (2.127) przekształca się dalej, wykorzystując twierdzenie Ostrogradzkiego–Gaussa

$$\begin{aligned} W_{z1} &= \int_S \left[f^\alpha \delta u_\alpha + f^3 \delta u_3 - l^\alpha b_\alpha^\beta \delta u_\beta - (l^\alpha \delta u_3)|_\alpha + l^\alpha|_\alpha \delta u_3 \right] dS = \\ &= \int_S \left[(f^\beta - l^\alpha b_\alpha^\beta) \delta u_\beta + (f^3 + l^\alpha|_\alpha) \delta u_3 \right] dS - \int_C l^\alpha \nu_\alpha \delta u_3 dC. \end{aligned} \quad (2.130)$$

W dalszym ciągu wyznacza się pracę drugiej grupy sił obciążenia zewnętrznego $\mathbf{t}$ przyłożonych do powierzchni Ω

$$\begin{aligned} W_{z2} &= \int_\Omega \mathbf{t} \delta \mathbf{v} d\Omega = \int_\Omega \mathbf{t}^\alpha \tilde{v}_\alpha(\xi) (\delta \mathbf{u} + \xi \delta \beta) d\tilde{C}(\xi) d\xi = \int_C \left[\left(\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mathbf{t}^\alpha \nu_\alpha \mu d\xi \right) \delta \mathbf{u} + \left(\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mathbf{t}^\alpha \nu_\alpha \mu \xi d\xi \right) \delta \beta \right] dC = \\ &= \int_C (\mathbf{t}' \delta \mathbf{u} + \mathbf{t}'' \delta \beta) dC. \end{aligned} \quad (2.131)$$

W powyższym wyrażeniu wykorzystuje się warunek brzegowy zapisany w punkcie o dowolnej rzędnej ξ

$$\tilde{v}_\alpha(\xi) d\tilde{C}(\xi) = \mu \nu_\alpha dC. \quad (2.132)$$

We wzorze (2.131) zdefiniowano siły

$$\mathbf{t}' = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mathbf{t}^\alpha \nu_\alpha \mu d\xi, \quad (2.133)$$

$$\mathbf{t}'' = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mathbf{t}^\alpha \nu_\alpha \mu \xi d\xi. \quad (2.134)$$

Równanie (2.131) przekształca się do postaci

$$W_{z2} = \int_C \left(t'^\alpha \delta u_\alpha + t'^3 \delta u_3 - t''^\alpha b_\alpha^\beta \delta u_\beta - t''^\alpha \delta u_3|_\alpha \right) dC. \quad (2.135)$$

Ostatni wyraz powyższej całki jest równy

$$\begin{aligned}
 \int_C t''^\alpha \delta u_3 |_\alpha dC &= \int_C t''^\alpha \left(v_\alpha \delta \frac{\partial u_3}{\partial v} - v^\gamma \psi_{\alpha\gamma} \delta \frac{\partial u_3}{\partial C} \right) dC = \\
 &= \int_C \left[t''^\alpha v_\alpha \delta \frac{\partial u_3}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial C} (t''^\alpha v^\gamma \psi_{\alpha\gamma} \delta u_3) + \frac{\partial}{\partial C} (t''^\alpha v^\gamma \psi_{\alpha\gamma}) \delta u_3 \right] dC = \\
 &= \int_C \left[t''^\alpha v_\alpha \delta \frac{\partial u_3}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial C} (t''^\alpha v^\gamma \psi_{\alpha\gamma}) \delta u_3 \right] dC.
 \end{aligned} \tag{2.136}$$

Po wykonaniu powyższych przekształceń końcowe wyrażenie na pracę wirtualną drugiej grupy sił zewnętrznych przyjmuje postać

$$W_{z2} = \int_C \left\{ \left[t'^\beta - t''^\alpha b_\alpha^\beta \right] \delta u_\beta + \left[t'^3 - \frac{\partial}{\partial C} (t''^\alpha v^\gamma \psi_{\alpha\gamma}) \right] \delta u_3 - t''^\alpha v_\alpha \delta \frac{\partial u_3}{\partial v} \right\} dC. \tag{2.137}$$

Po zapisaniu zasady prac przygotowanych

$$W_w = W_{z1} + W_{z2} \tag{2.138}$$

otrzymuje się równania równowagi zapisane za pomocą pól tensorowych na powierzchni środkowej powłoki S

$$n^{\alpha\gamma} |_\alpha - m^{\alpha\beta} |_\alpha b_\beta^\gamma + f^\gamma - l^\alpha b_\alpha^\gamma = 0, \tag{2.139}$$

$$n^{\alpha\beta} b_{\beta\alpha} + m^{\alpha\beta} |_{\alpha\beta} + f^3 + l^\alpha |_\alpha = 0 \tag{2.140}$$

oraz kinetyczne warunki brzegowe na konturze C

$$n^{\alpha\gamma} v_\alpha - m^{\alpha\beta} b_\beta^\gamma v_\alpha = t'^\gamma - t''^\alpha b_\alpha^\gamma, \tag{2.141}$$

$$m^{\alpha\beta} |_\alpha v_\beta - \frac{\partial}{\partial C} (m^{\alpha\beta} v_\alpha v^\delta \psi_{\beta\delta}) = -l^\alpha v_\alpha + t'^3 - \frac{\partial}{\partial C} (t''^\alpha v^\gamma \psi_{\alpha\gamma}), \tag{2.142}$$

$$m^{\alpha\beta} v_\alpha v_\beta = t''^\alpha v_\alpha. \tag{2.143}$$

Oprócz warunków kinetycznych na konturze C mogą być zadawane warunki kinematyczne, jeżeli znane są na nim wartości funkcji u_α , u_3 , $\frac{\partial u_3}{\partial v}$.

2.2.4. Związki fizyczne

Związki fizyczne zapisane w układzie krzywoliniowym dla materiału izotropowego mają postać

$$\sigma^{ij} = G \left(\bar{g}^{ki} \bar{g}^{lj} + \bar{g}^{kj} \bar{g}^{li} + \frac{2v}{1-2v} \bar{g}^{kl} \bar{g}^{ij} \right) e_{kl}. \tag{2.144}$$

Wyznaczona z powyższego związku składowa naprężenia normalnego w kierunku prostopadłym do powierzchni środkowej powłoki jest równa

$$\begin{aligned}\sigma^{33} &= G\left(\bar{g}^{k3}\bar{g}^{l3} + \bar{g}^{k3}\bar{g}^{k3} + \frac{2\nu}{1-2\nu}\bar{g}^{kl}\bar{g}^{33}\right)e_{kl} = G\bar{g}^{33}\left[2\bar{g}^{33}e_{33} + \frac{2\nu}{1-2\nu}(\bar{g}^{11}e_{11} + \bar{g}^{22}e_{22} + \bar{g}^{33}e_{33})\right] = \\ &= G\bar{g}^{33}\left[2e_{\langle 33 \rangle} + \frac{2\nu}{1-2\nu}(e_{\langle 11 \rangle} + e_{\langle 22 \rangle} + e_{\langle 33 \rangle})\right].\end{aligned}\quad (2.145)$$

Generalnie w teorii powłok postuluje się występowanie płaskiego stanu naprężenia, a w związku z tym przyjmuje się, że obliczona powyżej współrzędna tensora naprężenia jest zerowa. Stąd odkształcenie normalne w kierunku prostopadłym do powierzchni środkowej jest równe

$$e_{\langle 33 \rangle} = -\frac{\nu}{1-\nu}(e_{\langle 11 \rangle} + e_{\langle 22 \rangle}).\quad (2.146)$$

Po uwzględnieniu powyższego wyrażenia, oraz uwzględniając ortogonalność tensora metrycznego ponownie zapisuje się wzór (2.144)

$$\begin{aligned}\sigma^{\alpha\beta} &= G\left(\bar{g}^{\alpha\gamma}\bar{g}^{\beta\delta}e_{\gamma\delta} + \bar{g}^{\beta\gamma}\bar{g}^{\alpha\delta}e_{\gamma\delta} + \frac{2\nu}{1-2\nu}\bar{g}^{kl}\bar{g}^{\alpha\beta}e_{kl}\right) = \\ &= 2G\left(\bar{g}^{(\alpha\alpha}\bar{g}^{(\beta\beta)}e_{\alpha\beta}) + \frac{\nu}{1-2\nu}\bar{g}^{kl}e_{kl}\sqrt{\bar{g}^{(\alpha\alpha}\bar{g}^{(\beta\beta)}}\delta_{\alpha\beta})\right) = \\ &= 2G\sqrt{\bar{g}^{(\alpha\alpha}\bar{g}^{(\beta\beta)}}\left[e_{\langle\alpha\beta\rangle} + \frac{\nu}{1-2\nu}(e_{\langle 11 \rangle} + e_{\langle 22 \rangle} + e_{\langle 33 \rangle})\delta_{\alpha\beta}\right] = \\ &= 2G\sqrt{\bar{g}^{(\alpha\alpha}\bar{g}^{(\beta\beta)}}\left(e_{\langle\alpha\beta\rangle} + \frac{\nu}{1-\nu}e_{\langle\delta\delta\rangle}^{\langle\delta\delta\rangle}\delta_{\alpha\beta}\right).\end{aligned}\quad (2.147)$$

Z definicji współrzędne fizyczne tensora naprężenia są równe

$$\sigma_{\langle\alpha\beta\rangle} = \frac{\sigma^{\alpha\beta}}{\sqrt{\bar{g}^{\alpha\alpha}\bar{g}^{\beta\beta}}} = 2G\left(e_{\langle\alpha\beta\rangle} + \frac{\nu}{1-\nu}e_{\langle\delta\delta\rangle}^{\langle\delta\delta\rangle}\delta_{\alpha\beta}\right).\quad (2.148)$$

Po podstawieniu do definicji sił wewnętrznych (2.112) i (2.113) związków fizycznych (2.147) oraz wykorzystaniu wzoru (2.94) i własności symetrii współrzędne fizyczne są równe

$$\begin{aligned}n_{\langle\beta\gamma\rangle} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mu\sigma_{\langle\alpha\beta\rangle}\mu_{\gamma}^{\alpha}d\xi = 2G \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (1 - 2\xi H + \xi^2 K)\left(e_{\langle\alpha\beta\rangle} + \frac{\nu}{1-\nu}e_{\langle\delta\delta\rangle}^{\langle\delta\delta\rangle}\delta_{\alpha\beta}\right)\left(\delta_{\gamma}^{\alpha} - \xi b_{\gamma}^{\alpha}\right)d\xi = \\ &= G \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\check{\epsilon}_{\langle\gamma\beta\rangle} + \xi\check{\kappa}_{\langle\gamma\beta\rangle} + \xi^2\check{\varphi}_{\langle\gamma\beta\rangle} + \xi^3\check{\phi}_{\langle\gamma\beta\rangle} + \xi^4\check{\chi}_{\langle\gamma\beta\rangle} + \xi^5\check{\zeta}_{\langle\gamma\beta\rangle}\right)d\xi = \\ &= G\left(h\check{\epsilon}_{\langle\gamma\beta\rangle} + \frac{h^3}{12}\check{\varphi}_{\langle\gamma\beta\rangle} + \frac{h^5}{80}\check{\chi}_{\langle\gamma\beta\rangle}\right),\end{aligned}\quad (2.149)$$

$$\begin{aligned}
 m_{\langle\beta\gamma\rangle} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mu \sigma_{\langle\alpha\beta\rangle} \mu_{\alpha}^{\gamma} \xi d\xi = G \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\xi \check{\varepsilon}_{\langle\gamma\beta\rangle} + \xi^2 \check{\kappa}_{\langle\gamma\beta\rangle} + \xi^3 \check{\varphi}_{\langle\gamma\beta\rangle} + \xi^4 \check{\phi}_{\langle\gamma\beta\rangle} + \xi^5 \check{\chi}_{\langle\gamma\beta\rangle} + \xi^6 \check{\zeta}_{\langle\gamma\beta\rangle} \right) d\xi = \\
 &= G \left(\frac{h^3}{12} \check{\kappa}_{\langle\gamma\beta\rangle} + \frac{h^5}{80} \check{\phi}_{\langle\gamma\beta\rangle} + \frac{h^7}{448} \check{\zeta}_{\langle\gamma\beta\rangle} \right). \tag{2.150}
 \end{aligned}$$

W powyższych wyrażeniach w celu skrócenia zapisu zdefiniowano następujące wielkości związane ze współrzędnymi tensora odkształcenia

$$\check{\varepsilon}_{\langle\gamma\beta\rangle} = \bar{\varepsilon}_{\langle\gamma\beta\rangle}, \tag{2.151}$$

$$\check{\kappa}_{\langle\gamma\beta\rangle} = \bar{\kappa}_{\langle\gamma\beta\rangle} - b_{\gamma}^{\alpha} \bar{\varepsilon}_{\langle\alpha\beta\rangle} - 2H \bar{\varepsilon}_{\langle\gamma\beta\rangle}, \tag{2.152}$$

$$\check{\varphi}_{\langle\gamma\beta\rangle} = -\bar{\varphi}_{\langle\gamma\beta\rangle} - b_{\gamma}^{\alpha} \bar{\kappa}_{\langle\alpha\beta\rangle} - 2H \bar{\kappa}_{\langle\gamma\beta\rangle} + 2H b_{\gamma}^{\alpha} \bar{\varepsilon}_{\langle\alpha\beta\rangle} + K \bar{\varepsilon}_{\langle\gamma\beta\rangle}, \tag{2.153}$$

$$\check{\phi}_{\langle\gamma\beta\rangle} = b_{\gamma}^{\alpha} \bar{\varphi}_{\langle\alpha\beta\rangle} + 2H \bar{\varphi}_{\langle\gamma\beta\rangle} + 2H b_{\gamma}^{\alpha} \bar{\kappa}_{\langle\alpha\beta\rangle} + K \bar{\kappa}_{\langle\gamma\beta\rangle} - K b_{\gamma}^{\alpha} \bar{\varepsilon}_{\langle\alpha\beta\rangle}, \tag{2.154}$$

$$\check{\chi}_{\langle\gamma\beta\rangle} = -2H b_{\gamma}^{\alpha} \bar{\varphi}_{\langle\alpha\beta\rangle} - K \bar{\varphi}_{\langle\gamma\beta\rangle} - K b_{\gamma}^{\alpha} \bar{\kappa}_{\langle\alpha\beta\rangle}, \tag{2.155}$$

$$\check{\zeta}_{\langle\gamma\beta\rangle} = K b_{\gamma}^{\alpha} \bar{\varphi}_{\langle\alpha\beta\rangle} \tag{2.156}$$

oraz

$$\bar{\varepsilon}_{\langle\alpha\beta\rangle} = \varepsilon_{\langle\alpha\beta\rangle} + \varepsilon_{\langle\beta\alpha\rangle} + \frac{2\nu}{1-\nu} \varepsilon_{\delta>}^{\delta} \delta_{\alpha\beta}, \tag{2.157}$$

$$\bar{\kappa}_{\langle\alpha\beta\rangle} = \kappa_{\langle\alpha\beta\rangle} + \kappa_{\langle\beta\alpha\rangle} - b_{\alpha}^{\lambda} \varepsilon_{\langle\lambda\beta\rangle} - b_{\beta}^{\lambda} \varepsilon_{\langle\lambda\alpha\rangle} + \frac{2\nu}{1-\nu} (\kappa_{\delta>}^{\delta} - b_{\delta}^{\lambda} \varepsilon_{\lambda>}^{\delta}) \delta_{\alpha\beta}, \tag{2.158}$$

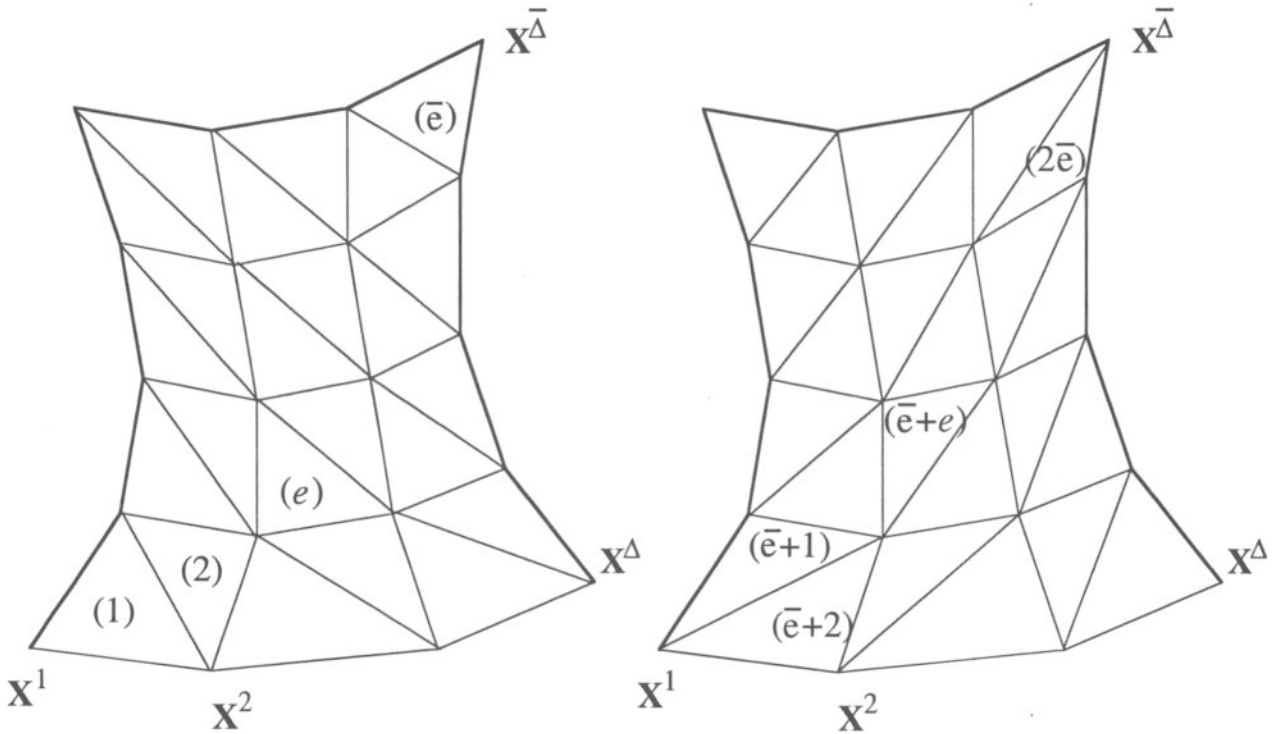
$$\bar{\varphi}_{\langle\alpha\beta\rangle} = b_{\alpha}^{\lambda} \kappa_{\langle\lambda\beta\rangle} + b_{\beta}^{\lambda} \kappa_{\langle\lambda\alpha\rangle} + \frac{2\nu}{1-\nu} b_{\delta}^{\lambda} \kappa_{\lambda>}^{\delta} \delta_{\alpha\beta}. \tag{2.159}$$

2.3. Model obliczeniowy MES

2.3.1. Model globalny konstrukcji

Równanie ruchu konstrukcji zapisuje się w postaci dyskretnej w przestrzeni skończone-wymiarowej. Współczynniki tego równania oblicza się, stosując do dyskretyzacji metodę elementów skończonych [43]. Rozważania ogranicza się do konstrukcji złożonych z wielogałęziowej powłoki o osiowo-symetrycznej geometrii, a w szczególności kołowych płyt poziomych.

Typ geometrii konstrukcji najczęściej determinuje rodzaj stosowanych elementów i siatek. W przypadku osiowej symetrii wygodnie jest przyjąć czworokątne elementy stożkowe (Rys. 2.4). Zrezygnowano z narzucającego się, w przypadku osiowej symetrii, elementu pierścieniowego i stosowania metody półanalizy tzn. rozwinięć funkcji w szeregi trygonometryczne w kierunku obwodowym. Motywacją takiego postępowania jest przewidywana w przyszłości analiza nieliniowa. W przypadku metody półanalizy otrzymuje się sprzężenie między poszczególnymi składowymi harmonicznymi rozwinięć [15, 16].

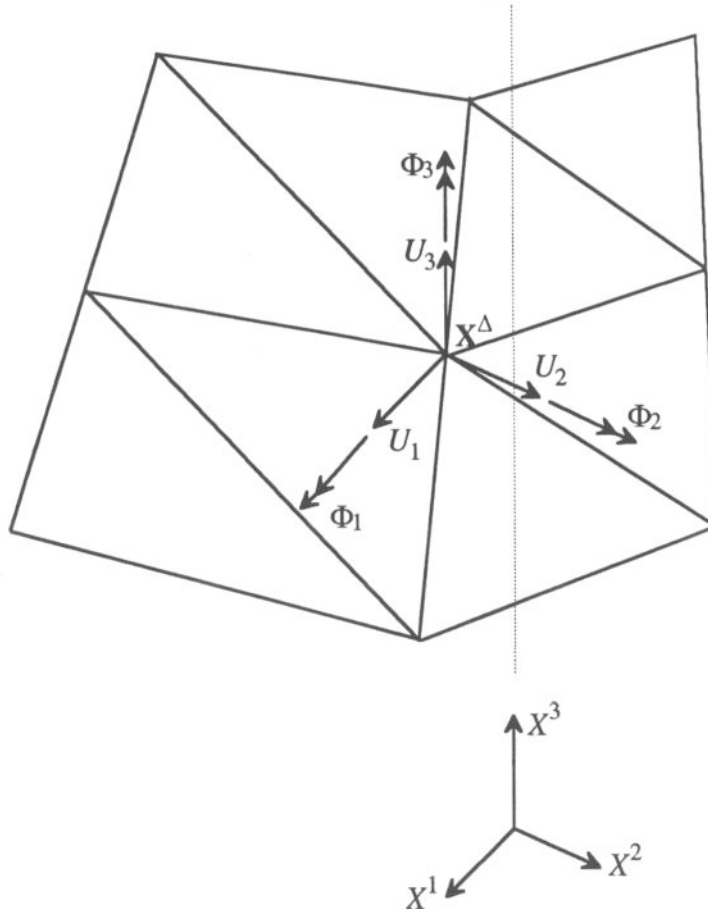


Rys. 2.4. Siatki elementów modelu dyskretnego MES

Powłokę dzieli się na płaskie elementy trójkątne. Podstawą podziału jest trapez wynikający z układu linii równoleżników i południków na powierzchni środkowej. Stosuje się dwie możliwe siatki trójkątne i uśrednia wyniki.

Jako globalny układ współrzędnych przyjmuje się układ kartezjański $\{X^1, X^2, X^3\}$ (Rys. 2.5). Niech X^Δ oznacza węzeł Δ ($\Delta = 1, 2, \dots, \bar{\Delta}$; $\bar{\Delta}$ – liczba węzłów) w globalnym układzie współrzędnych, $e = 1, 2, \dots, 2\bar{e}$ numerację elementów ($2\bar{e}$ – liczba elementów) (Rys. 2.4). Z globalnym układem współrzędnych wiąże się wektor parametrów węzłowych (Rys. 2.5). W każdym węźle przyjmuje się jako parametry trzy przemieszczenia i trzy obroty

$$s_{\mathbf{q}}^\Delta = \{U_1, U_2, U_3, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3\}^T. \quad (2.160)$$



Rys. 2.5. Parametry węzłowe w układzie globalnym

Wektory parametrów węzłowych poszczególnych węzłów porządkuje się w wektor globalny

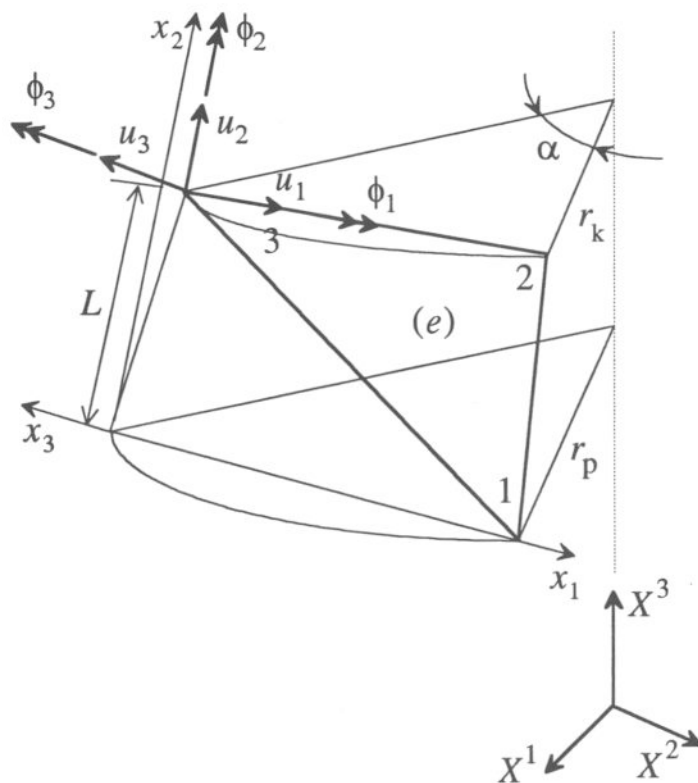
$${}^s\mathbf{q} = \{ {}^s\mathbf{q}^1, {}^s\mathbf{q}^2, \dots, {}^s\mathbf{q}^\Delta, \dots, {}^s\mathbf{q}^{\bar{\Delta}} \}^T. \quad (2.161)$$

2.3.2. Model rozłączny elementu

W ramach prowadzonych badań testowano różne typy elementów skończonych. Analizowano elementy krzywoliniowe z jedną krzywizną (w kierunku równoleżnikowym), z parametrami węzłowymi wyrażonymi w globalnym układzie walcowym lub kartezjańskim. Lokalne parametry węzłowe wyrażano w układzie głównych krzywizn powłoki lub jako stały wektor dla elementu według głównych krzywizn w środku elementu. Związki geometryczne według (2.105–2.107) wyznaczano, różniczkując analitycznie funkcje kształtu lub różnicowo. Rozważano element z sześcioma parametrami w węźle oraz element pięcioparametrowy z fikcyjną sztywnością na skręcanie. Badane elementy krzywoliniowe w niektórych typach zadań charakteryzowały się wolną zbieżnością rozwiązania. Z tego powodu zdecydowano się na zastosowanie elementów płaskich. Przyjęto płaski, czworokątny superelement w kształcie trapezu równoramiennego składający się

z dwóch par elementów trójkątnych. Podejście takie jest stosowane w wielu komercyjnych pakietach MES.

Zastosowany superelement pozwala w jednolity sposób modelować fragmenty powłokowe oraz płyty, z których składa się konstrukcja. Wprowadzenie dodatkowych elementów konstrukcyjnych takich jak: żebra równoleżnikowe, żebra południkowe, przepony pionowe nie stwarza szczególnych trudności w analizie.



Rys. 2.6. Geometria i parametry węzłowe w układzie lokalnym elementu skończonego

Na Rys. 2.6 przedstawiono typowy trójkątny element skończony oparty na trapezie związanym z przyjętą siatką równoleżników i południków. Parametrami charakteryzującymi geometrię elementu są: wysokość L , kąt α , na którym jest rozpięty, odległości od osi symetrii r_p i r_k oraz od płaszczyzny $X^3 = 0$ o X_p^3 i X_k^3 . Pomiędzy powyższymi wielkościami zachodzi zależność

$$L^2 = (r_k - r_p)^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + (X_k^3 - X_p^3)^2. \quad (2.162)$$

Niech $\alpha = 1, 2, 3$ będzie lokalną numeracją węzłów dla elementu e -tego. Wprowadza się lokalny kartezjański układ współrzędnych $\{x_1, x_2, x_3\}$. W każdym węźle elementu przyjmuje się układ sześciu parametrów węzłowych: trzy przemieszczenia i trzy obroty związane z lokalnym układem współrzędnych (Rys. 2.6)

$${}^s\mathbf{q}_{(e)}^\alpha = \{u_1, u_2, \phi_3, u_3, \phi_1, \phi_2\}^T. \quad (2.163)$$

Dwa pierwsze parametry służą do aproksymacji przemieszczeń stanu tarczowego, trzy ostatnie do aproksymacji stanu zgięciowego. Parametr ϕ_3 nie występuje w aproksymacji stanu przemieszczenia. Jest on konieczny w przypadku kiedy w węźle schodzą się elementy o różnym kącie nachylenia tworzących. Dla wyeliminowania osobliwości w macierzy sztywności w węzłach, w których nie ma załamań tworzącej, przyjmuje się fikcyjną sztywność skręcania [43].

Pole przemieszczeń

$$\mathbf{f} = \{u, v, w\}^T \quad (2.164)$$

wewnątrz elementu skończonego (e) aproksymuje funkcjami bazowymi związanymi z parametrami węzłowymi

$$\mathbf{f}_{(e)}(x_1, x_2) = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = {}^s\mathbf{N}_\alpha^{(e)}(x_1, x_2) {}^s\mathbf{q}_{(e)}^\alpha. \quad (2.165)$$

Macierz funkcji bazowych dla węzła α ma postać [6, 43]

$${}^s\mathbf{N}_\alpha^{(e)} = \begin{bmatrix} U_\alpha^{(e)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V_\alpha^{(e)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & W1_\alpha^{(e)} & W2_\alpha^{(e)} & W3_\alpha^{(e)} \end{bmatrix}. \quad (2.166)$$

Tabela 2.1. Zestawienie funkcji bazowych

α	1	2	3
U	L_1	L_2	L_3
V	L_1	L_2	L_3
$W1$	$L_1 + L_1^2 L_2 + L_1^2 L_3 -$ $-L_1 L_2^2 - L_1 L_3^2$	$L_2 + L_2^2 L_3 + L_2^2 L_1 -$ $-L_2 L_3^2 - L_2 L_1^2$	$L_3 + L_3^2 L_1 + L_3^2 L_2 -$ $-L_3 L_1^2 - L_3 L_2^2$
$W2$	$b_2 \left(L_3 L_1^2 + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3 \right) -$ $-b_3 \left(L_1^2 L_2 + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3 \right)$	$b_3 \left(L_1 L_2^2 + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3 \right) -$ $-b_1 \left(L_2^2 L_3 + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3 \right)$	$b_1 \left(L_2 L_3^2 + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3 \right) -$ $-b_2 \left(L_3^2 L_1 + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3 \right)$
$W3$	$c_2 \left(L_3 L_1^2 + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3 \right) -$ $-c_3 \left(L_1^2 L_2 + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3 \right)$	$c_3 \left(L_1 L_2^2 + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3 \right) -$ $-c_1 \left(L_2^2 L_3 + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3 \right)$	$c_1 \left(L_2 L_3^2 + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3 \right) -$ $-c_2 \left(L_3^2 L_1 + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3 \right)$

Zastosowano typowy element trójkątny o liniowej aproksymacji przemieszczeń stanu tarczowego i wielomiany trzeciego stopnia aproksymujące przemieszczenia stanu płytowego. Funkcje bazowe dla poszczególnych węzłów elementu skończonego przedstawiono w tabeli 2.1.

W definicjach funkcji bazowych zastosowano współrzędne powierzchniowe

$$L_{\alpha}^{(e)} = \frac{1}{2\Delta} \left(a_{\alpha}^{(e)} + b_{\alpha}^{(e)} x_1 + c_{\alpha}^{(e)} x_2 \right), \quad (2.167)$$

gdzie Δ oznacza pole powierzchni elementu oraz

$$a_{\alpha}^{(e)} = x_1(\alpha \bmod 3 + 1) * x_2((\alpha + 1) \bmod 3 + 1) - x_1((\alpha + 1) \bmod 3 + 1) * x_2(\alpha \bmod 3 + 1), \quad (2.168)$$

$$b_{\alpha}^{(e)} = x_2(\alpha \bmod 3 + 1) - x_2((\alpha + 1) \bmod 3 + 1), \quad (2.169)$$

$$c_{\alpha}^{(e)} = x_1((\alpha + 1) \bmod 3 + 1) - x_1(\alpha \bmod 3 + 1). \quad (2.170)$$

Praca wirtualna sił wewnętrznych w obszarze elementu jest równa (por. 2.113)

$$W_w^{(e)} = \iint_{S(e)} (n^{<\beta\gamma>} \delta \varepsilon_{<\gamma\beta>} + m^{<\beta\gamma>} \delta \kappa_{<\gamma\beta>}) dx_1 dx_2 = \iint_{S(e)} \sigma_{(e)}^T \delta \varepsilon_{(e)} dx_1 dx_2. \quad (2.171)$$

Uogólnione wektory odkształcenia i naprężenia występujące w ostatniej całce mają następujące definicje

$$\varepsilon_{(e)} = \{\varepsilon_{<11>}, \varepsilon_{<22>}, 2\varepsilon_{<12>}, \kappa_{<11>}, \kappa_{<22>}, 2\kappa_{<12>}\}^T, \quad (2.172)$$

$$\sigma_{(e)} = \{n_{<11>}, n_{<22>}, n_{<12>}, m_{<11>}, m_{<22>}, m_{<12>}\}^T. \quad (2.173)$$

Wykorzystano fakt, że dla płaskich elementów uogólnione tensory naprężenia i odkształcenia są symetryczne.

W przyjętym lokalnym kartezjańskim układzie współrzędnych operator związków geometrycznych (2.105–2.107) upraszcza się do postaci

$$[L_{\alpha\beta}^1] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{2\partial x_2} \\ \frac{\partial}{2\partial x_2} & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.174)$$

$$[L_{\alpha\beta}^2] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{2\partial x_1} \\ \frac{\partial}{2\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix}, \quad (2.175)$$

$$[L^3_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} & -\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \\ -\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} & -\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \end{bmatrix}. \quad (2.176)$$

Dla zdefiniowanego wektora odkształcenia zapisuje się związki geometryczne w postaci

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{(e)} = \mathbf{L}_{(e)} \mathbf{f}_{(e)} = \mathbf{L}_{(e)} {}^s \mathbf{N}_{\alpha}^{(e)} {}^s \mathbf{q}_{(e)}^{\alpha} = \mathbf{B}_{\alpha}^{(e)} {}^s \mathbf{q}_{(e)}^{\alpha}. \quad (2.177)$$

Operator związków geometrycznych $\mathbf{L}_{(e)}$ dla elementu e -tego przyjmuje prostą postać

$$\mathbf{L}_{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \\ 0 & 0 & -\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \\ 0 & 0 & -\frac{2\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \end{bmatrix}. \quad (2.178)$$

Związki fizyczne (2.149) i (2.150) dla płaskiego elementu przyjmują postać

$$n_{\langle\alpha\beta\rangle} = Gh \left(\varepsilon_{\langle\alpha\beta\rangle} + \varepsilon_{\langle\beta\alpha\rangle} + \frac{2\nu}{1-\nu} \varepsilon_{\delta>}^{\delta} \delta_{\alpha\beta} \right), \quad (2.179)$$

$$m_{\langle\alpha\beta\rangle} = G \frac{h^3}{12} \left(\kappa_{\langle\alpha\beta\rangle} + \kappa_{\langle\beta\alpha\rangle} + \frac{2\nu}{1-\nu} \kappa_{\delta>}^{\delta} \delta_{\alpha\beta} \right). \quad (2.180)$$

Powyższe związki można przedstawić w formie macierzowej

$$\boldsymbol{\sigma}_{(e)} = \mathbf{D}_{(e)} \boldsymbol{\varepsilon}_{(e)} = \mathbf{D}_{(e)} \mathbf{B}_{\alpha}^{(e)} {}^s \mathbf{q}_{(e)}^{\alpha}. \quad (2.181)$$

Macierz stałych sprężystości w przypadku materiału ortotropowego ma postać

$$\mathbf{D}_{(e)} = \begin{bmatrix} h \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & 0 \\ E_{12} & E_{22} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \frac{h^3}{12} \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & 0 \\ E_{12} & E_{22} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \quad (2.182)$$

gdzie stałe sprężystości E_{11} , E_{22} , E_{12} są związane z wydłużeniami w głównych kierunkach ortotropii, a stała G z odkształceniami postaciowymi dla płaskiego stanu naprężenia. Dla materiału izotropowego $E_{11} = E_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}$, $E_{12} = \frac{\nu E}{1-\nu^2}$, $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$. Założono, że główne kierunki ortotropii

pokrywają się z kierunkami lokalnego układu współrzędnych.

Jeżeli oznaczyć obciążenie zewnętrzne elementu w lokalnym układzie współrzędnych następująco

$$\mathbf{t}_{(e)}(x_1, x_2) = \{t_{(e)}^1, t_{(e)}^2, t_{(e)}^3\}^T, \quad (2.183)$$

to energię potencjalną elementu można wyrazić wzorem

$${}^sE_p^{(e)} = \frac{1}{2} \iint_{S(e)} \boldsymbol{\sigma}_{(e)}^T \boldsymbol{\varepsilon}_{(e)} dx_1 dx_2 - \iint_{S(e)} \mathbf{f}_{(e)}^T \mathbf{t}_{(e)} dx_1 dx_2 = \frac{1}{2} ({}^s\mathbf{q}_{(e)}^\alpha)^T {}^s\mathbf{k}_{\alpha\beta}^{(e)} {}^s\mathbf{q}_{(e)}^\beta - ({}^s\mathbf{q}_{(e)}^\alpha)^T {}^s\mathbf{p}_\alpha^{(e)}, \quad (2.184)$$

gdzie macierz sztywności elementu i wektor statycznych równoważników obciążenia zewnętrznego są równe

$${}^s\mathbf{k}_{\alpha\beta}^{(e)} = \iint_{S(e)} \left(\mathbf{B}_\alpha^{(e)} \right)^T \mathbf{D}_{(e)} \mathbf{B}_\beta^{(e)} dx_1 dx_2, \quad (2.185)$$

$${}^s\mathbf{p}_\alpha^{(e)} = \iint_{S(e)} \left({}^s\mathbf{N}_\alpha^{(e)} \right)^T \mathbf{t}_{(e)} dx_1 dx_2. \quad (2.186)$$

Ponieważ parametr ϕ_3 nie bierze udziału w aproksymacji przemieszczeń, macierz sztywności elementu w wierszach i kolumnach odpowiadających temu parametrowi ma współczynniki równe zeru. Aby uniknąć osobliwości macierzy sztywności przyjmuje się fikcyjną sztywność na skręcanie [43]. Współczynniki dodane do macierzy sztywności elementu są dobrane w ten sposób, że generują zrównoważony układ sił i nie wpływają znacząco na wyniki. Współczynniki macierzy sztywności elementu modyfikują się według zależności

$${}^s k_{\alpha\beta 33}^{(e)} = \begin{cases} 0.02E_{11}h\Delta & \text{gdy } \alpha = \beta \\ -0.01E_{11}h\Delta & \text{gdy } \alpha \neq \beta \end{cases}. \quad (2.187)$$

Jeżeli założyć się, że gęstość materiału powłoki wynosi ρ_s i jest stała oraz, że powłoka jest cienka, to można przyjąć, że cała masa jest skupiona na powierzchni środkowej. Energia kinetyczna elementu może być wyrażona formułą

$${}^sE_k^{(e)} = \frac{1}{2} \rho_s \iint_{S(e)} h v^2 dx_1 dx_2 = \frac{1}{2} ({}^s\dot{\mathbf{q}}_{(e)}^\alpha)^T {}^s\mathbf{m}_{\alpha\beta}^{(e)} {}^s\dot{\mathbf{q}}_{(e)}^\beta, \quad (2.188)$$

gdzie macierz bezwładności elementu jest równa

$${}^s\mathbf{m}_{\alpha\beta}^{(e)} = \rho_s \iint_{S(e)} h \left({}^s\mathbf{N}_\alpha^{(e)} \right)^T {}^s\mathbf{N}_\beta^{(e)} dx_1 dx_2. \quad (2.189)$$

W programie wartości numeryczne całek (2.185), (2.186) i (2.189) oblicza się metodą Gaussa, stosując całkowanie oparte na trzech punktach.

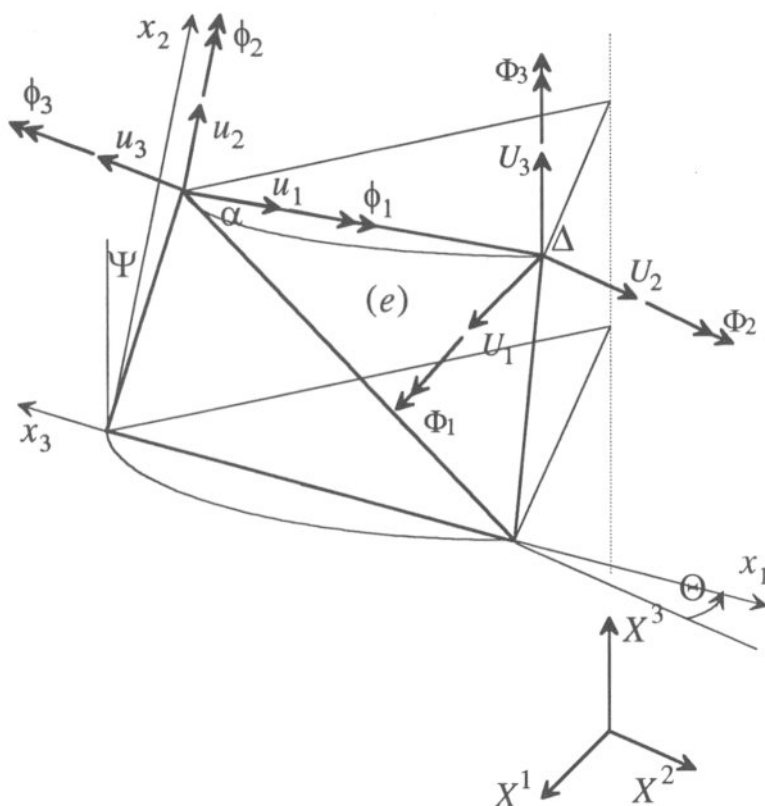
2.3.3. Agregacja modelu

Równania połączonego modelu globalnego otrzymuje się przez zsumowanie energii potencjalnej i kinetycznej wszystkich elementów wyrażonej w bazie parametrów globalnych. Niech związek między parametrami w globalnym i lokalnym układzie współrzędnych określa transformacja

$${}^s\mathbf{q}_{(e)}^\alpha = {}^{(e)}\Omega_\Delta^\alpha {}^s\mathbf{q}^\Delta, \quad (2.190)$$

gdzie

$${}^{(e)}\Omega_\Delta^\alpha = \begin{cases} \mathbf{T} & \text{gdy } \alpha \equiv \Delta \\ \mathbf{0} & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases} \quad (2.191)$$



Rys. 2.7. Związki między globalnym i lokalnym wektorem parametrów węzłowych

Jeżeli prostopadła do podstaw superelementu jest nachylona do pionu pod kątem Ψ , a kierunki X^2 i x_1 tworzą między sobą kąt Θ – leżący w płaszczyźnie X^1X^2 (Rys. 2.7), to macierz transformacji $\mathbf{T}$, która jest złożeniem obrotów wokół osi x_1 i X^3 , dla pojedynczego węzła ma następujące

współczynniki

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos \Psi & 0 & \sin \Psi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \Psi & 0 & \cos \Psi \\ -\sin \Psi & 0 & \cos \Psi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \Psi & 0 & \sin \Psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \Theta & \cos \Theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos \Theta & \sin \Theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \Theta & \cos \Theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \Theta & \sin \Theta & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.192)$$

gdzie

$$\sin \Psi = \frac{r_k - r_p}{L} \cos \frac{\alpha}{2}, \quad (2.193)$$

$$\cos \Psi = \frac{X_k^3 - X_p^3}{L}. \quad (2.194)$$

Po zapisaniu całkowitej energii potencjalnej i kinetycznej układu jako sumy energii poszczególnych elementów

$${}^s E_p = \sum_{e=1}^{2\bar{c}} {}^s E_p^{(e)} = \frac{1}{2} ({}^s \mathbf{q}^\Delta)^T {}^s \mathbf{K}_{\Delta\Gamma} {}^s \mathbf{q}^\Gamma - ({}^s \mathbf{q}^\Delta)^T {}^s \mathbf{P}_\Delta = \frac{1}{2} {}^s \mathbf{q}^T {}^s \mathbf{K} {}^s \mathbf{q} - {}^s \mathbf{q}^T {}^s \mathbf{P}, \quad (2.195)$$

$${}^s E_k = \sum_{e=1}^{2\bar{c}} {}^s E_k^{(e)} = \frac{1}{2} ({}^s \dot{\mathbf{q}}^\Delta)^T {}^s \mathbf{M}_{\Delta\Gamma} {}^s \dot{\mathbf{q}}^\Gamma = \frac{1}{2} {}^s \dot{\mathbf{q}}^T {}^s \mathbf{M} {}^s \dot{\mathbf{q}} \quad (2.196)$$

otrzymano definicje globalnych macierzy: sztywności i bezwładności oraz definicję wektora równoważników statycznych obciążenia zewnętrznego

$${}^s \mathbf{K}_{\Delta\Gamma} = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{2\bar{c}} ({}^{(e)} \Omega_\Delta^\alpha)^T {}^s \mathbf{k}_{\alpha\beta}^{(e)} {}^{(e)} \Omega_\Gamma^\beta, \quad (2.197)$$

$${}^s \mathbf{M}_{\Delta\Gamma} = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{2\bar{c}} ({}^{(e)} \Omega_\Delta^\alpha)^T {}^s \mathbf{m}_{\alpha\beta}^{(e)} {}^{(e)} \Omega_\Gamma^\beta, \quad (2.198)$$

$${}^s \mathbf{P}_\Delta = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{2\bar{c}} ({}^{(e)} \Omega_\Delta^\alpha)^T {}^s \mathbf{p}_\alpha^{(e)}. \quad (2.199)$$

Mnożniki $\frac{1}{2}$ w powyższych wyrażeniach pojawiają się ze względu na podwójną siatkę na powierzchni trapezowego superelementu.

3. Model cieczy

3.1. Model fizyczny cieczy

Równania opisujące ciecz wyprowadza się z ogólnych zasad zachowania mechaniki [31]: lokalnej postaci zasady zachowania masy

$$\dot{\rho}_f + \text{div}(\rho_f \mathbf{v}) = 0, \quad (3.1)$$

oraz lokalnej postaci zasady zachowania pędu

$$s^{ij}|_j + \rho_f \left(f^i - \frac{Dv^i}{Dt} \right) = 0, \quad (3.2)$$

gdzie ρ_f jest gęstością cieczy, $\mathbf{v}$ wektorem pola prędkości, $\mathbf{s}$ tensorem naprężenia, a $\mathbf{f}$ zewnętrzną siłą objętościową. Zakłada się, że płyn jest idealny i nielepki. W takim przypadku można zapisać związek konstytutywny, wprowadzając skalarną funkcję ciśnienia p

$$s_j^i = -p\delta_j^i. \quad (3.3)$$

Równanie zasady zachowania pędu (3.2) mnoży się stronami przez wektor bazowy $\mathbf{g}_i$

$$s^{ij}|_j \mathbf{g}_i + \rho_f \left(\mathbf{f} - \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \right) = 0. \quad (3.4)$$

Pierwszy składnik powyższego równania można przekształcić

$$s^{ij}|_j \mathbf{g}_i = \left(s_k^i g^{kj} \right)|_j \mathbf{g}_i = - \left(p \delta_k^i g^{kj} \right)|_j \mathbf{g}_i = -p_{,j} g^{ij} \mathbf{g}_i = -p_{,j} \mathbf{g}^j = -\text{grad } p. \quad (3.5)$$

Ponadto zakłada się, że zaburzenia w czasie ruchu są niewielkie w porównaniu z wartościami zmiennych w położeniu równowagi

$$p(t) = p_0 + p'(t), \quad (3.6)$$

$$p' \ll p_0 \quad (3.7)$$

oraz

$$\rho_f(t) = \rho_{f0} + \rho_f'(t), \quad (3.8)$$

$$\rho_f' \ll \rho_0. \quad (3.9)$$

Ostatnie założenie pozwala również na zaniedbanie członu konwekcyjnego w pochodnej materialnej, stąd

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \dot{\mathbf{u}} + (\mathbf{u} \text{ grad}) \mathbf{u} \cong \dot{\mathbf{u}}. \quad (3.10)$$

Z powyższego założenia wynika również, że powierzchnia kontaktu cieczy i konstrukcji a tym samym siatki MES i MEB są niezmiennie w czasie. W związku z tym macierze sztywności i bezwładności są niezależne od czasu. Zasadę zachowania masy (3.1) można zapisać w zmienionej postaci

$$\dot{\rho}_f' + \rho_0 \text{div } \mathbf{u} = 0. \quad (3.11)$$

Wielkości zaburzeń pól prędkości i gęstości związane są z sobą prędkością rozchodzenia się dźwięku w ośrodku. Jeżeli prędkość tę oznaczy się przez a , można zapisać związek

$$p' = a^2 \rho_f'. \quad (3.12)$$

Po podstawieniu do zasady zachowania masy (3.11) otrzymuje się

$$\dot{p}' + a^2 \rho_0 \text{div } \mathbf{u} = 0, \quad (3.13)$$

a po zróżniczkowaniu po czasie mamy

$$\ddot{p}' + a^2 \rho_0 \text{div } \dot{\mathbf{u}} = 0. \quad (3.14)$$

Po pominięciu zewnętrznych sił masowych i uwzględnieniu przyjętych założeń zasadę zachowania pędu (3.2) można zapisać w postaci

$$\text{grad } p' + \rho_0 \dot{\mathbf{u}} = 0. \quad (3.15)$$

Z dwóch ostatnich wzorów otrzymuje się

$$\ddot{p}' + a^2 \rho_0 \text{div} \left(-\frac{\text{grad } p'}{\rho_0} \right) = \ddot{p}' - a^2 \nabla^2 p' = 0. \quad (3.16)$$

Powyższe równanie jest równaniem opisującym rozchodzenie się fal w ośrodku akustycznym. Przyjęcie założenia o stacjonarności odpowiedzi

$$\ddot{p}' = -\omega^2 p', \quad (3.17)$$

umożliwia wyeliminowanie pochodnej czasowej i prowadzi do równania Helmholtza

$$p' + k^2 \nabla^2 p' = 0, \quad (3.18)$$

gdzie $k = \frac{a}{\omega}$ jest numerem fali.

W niniejszej pracy proponuje się przyjęcie dodatkowego założenia o nieściśliwości ośrodka i sprowadzenie oddziaływania hydrodynamicznego cieczy na konstrukcję do tzw. problemu "masy dodanej" [18, 24, 26, 29, 30]. Przyjęcie tego założenia jest możliwe gdy prędkość rozchodzenia się dźwięku w płynie jest odpowiednio duża. W przypadku cieczy z dość dobrym przybliżeniem można przyjąć to założenie. Wtedy w równaniu falowym (3.16) można pominąć pochodną czasową i ograniczyć się do rozwiązywania równania jedynie z cząstkowym przestrzennym operatorem Laplace'a.

Po przyjęciu założenia o nieściśliwości cieczy zasada zachowania masy (3.1) przyjmuje prostą postać

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (3.19)$$

Ponadto zakłada się, że wektorowe pole prędkości przepływu jest bezwirowe

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0, \quad (3.20)$$

tzn. jest osiowym polem potencjalnym i może być wyrażone poprzez skalarną funkcję potencjału Φ

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad} \Phi. \quad (3.21)$$

Z powyższych wzorów wynika, że poszukiwana funkcja potencjału prędkości musi być funkcją harmoniczną

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi = \nabla^2 \Phi = 0. \quad (3.22)$$

Zasadę zachowania pędu

$$s^{ij}|_j \mathbf{g}_i + \rho_f \left(\mathbf{f} - \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \right) = 0 \quad (3.23)$$

zapisuje się przy pomocy wprowadzonej funkcji potencjału prędkości. Korzystając z tożsamości

$$\operatorname{grad} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{a} + \mathbf{a} \times \operatorname{rot} \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \operatorname{rot} \mathbf{a}, \quad (3.24)$$

można zapisać człon konwekcyjny w pochodnej materialnej w prostszej postaci

$$(\mathbf{v} \operatorname{grad}) \mathbf{v} = \frac{1}{2} \operatorname{grad} (\mathbf{v}^2) - \mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v} = \frac{1}{2} \operatorname{grad} (\mathbf{v}^2). \quad (3.25)$$

Natomiast pochodna materialna wyrazi się wzorem

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \dot{\mathbf{v}} + (\mathbf{v} \operatorname{grad}) \mathbf{v} = \operatorname{grad} \Phi + \frac{1}{2} \operatorname{grad} [(\operatorname{grad} \Phi)^2]. \quad (3.26)$$

Jeżeli dodatkowo założyć się, że zewnętrzna siła objętościowa ma charakter potencjalny

$$\mathbf{f} = - \operatorname{grad} U, \quad (3.27)$$

to równanie zasady zachowania pędu przyjmie postać

$$-\frac{\text{grad } p}{\rho_f} - \text{grad } U - \text{grad} \left[\Phi + \frac{1}{2}(\text{grad } \Phi)^2 \right] = 0, \quad (3.28)$$

a po scałkowaniu

$$\frac{p}{\rho_f} + U + \Phi + \frac{1}{2}(\text{grad } \Phi)^2 = C(t). \quad (3.29)$$

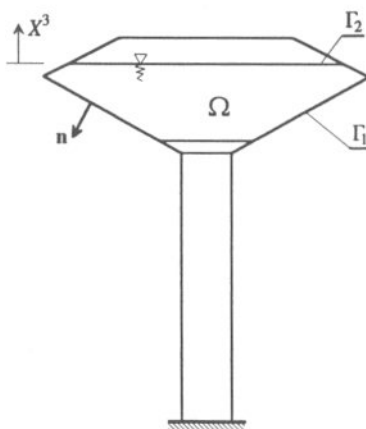
Wyznaczona całka nosi nazwę równania Cauchy'ego–Lagrange'a. Funkcja $C(t)$ może być pominięta, gdy wprowadzi się nową funkcję potencjału prędkości zdefiniowaną następująco

$$\Phi_1 = \Phi - \int C(\tau) d\tau. \quad (3.30)$$

Przyjmując założenie o małych zaburzeniach, można pominąć wyraz nieliniowy związany z członem unoszeniowym w pochodnej materialnej. Wtedy równanie Cauchy'ego–Lagrange'a (3.29) przyjmie postać

$$\dot{\Phi} + \frac{p}{\rho_f} + U = 0. \quad (3.31)$$

Aby wyznaczyć funkcję potencjału zewnętrznych sił masowych U przyjmuje się układ współrzędnych z osią X^3 skierowaną w górę i współrzędną równą zero na poziomie lustra cieczy (Rys. 3.1).



Rys. 3.1. Schemat zbiornika na ciecz

Dla zadania statycznego równanie (3.31) przyjmie postać

$$\frac{p}{\rho_f} + U = 0. \quad (3.32)$$

Ciśnienie w dowolnym punkcie można wyznaczyć z zależności

$$p = -X^3 g \rho_f + p_a, \quad (3.33)$$

gdzie g jest przyspieszeniem grawitacyjnym, a p_a ciśnieniem atmosferycznym. Pomijając ciśnienie atmosferyczne, co nie ogranicza ogólności rozważań, i porównując dwa ostatnie wyrażenia można określić potencjał

$$U = X^3 g. \quad (3.34)$$

Po wykorzystaniu powyższych zależności równanie Cauchy'ego–Lagrange'a przyjmie postać

$$\Phi + \frac{p}{\rho_f} + X^3 g = 0. \quad (3.35)$$

Poszukiwana funkcja potencjału prędkości, musi spełniać równanie Laplace'a (3.22) w obszarze Ω . Równanie Cauchy'ego–Lagrange'a (3.35) wykorzystuje się do sformułowania warunków brzegowych. Dla funkcji spełniającej równanie Laplace'a mogą być określone różne typy warunków brzegowych:

- Dirichleta (na wartość funkcji)

$$\Phi(\mathbf{X}) = f(\mathbf{X}), \quad (3.36)$$

- Neumanna (na pochodną w kierunku normalnym)

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{X})} = g(\mathbf{X}), \quad (3.37)$$

- Cauchy'ego – mieszane Dirichleta i Neumanna na rozłącznych fragmentach brzegu,
- Robina

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{X})} h_1(\mathbf{X}) + \Phi(\mathbf{X}) h_2(\mathbf{X}) = h_3(\mathbf{X}), \quad (3.38)$$

gdzie $f(\mathbf{X})$, $g(\mathbf{X})$, $h_1(\mathbf{X})$, $h_2(\mathbf{X})$, $h_3(\mathbf{X})$ są znanymi funkcjami. Należy dodać, że w przypadku gdy na całym brzegu zadane są tylko warunki brzegowe typu Neumanna, równanie Laplace'a ma jednoznaczne rozwiązanie gdy spełniony jest warunek Gaussa

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma = 0. \quad (3.39)$$

Proste przekształcenie z wykorzystaniem twierdzenia Ostrogradskiego–Gaussa tłumaczy zasadność tego warunku

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma = \int_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot \text{grad } \Phi d\Gamma = \int_{\Omega} \text{div grad } \Phi d\Omega = \int_{\Omega} \nabla^2 \Phi d\Omega = 0. \quad (3.40)$$

Aby określić warunki brzegowe cały brzeg cieczy dzieli się na dwie części: Γ_1 – powierzchnię kontaktu cieczy z konstrukcją i Γ_2 – powierzchnię swobodną lustra cieczy (Rys. 3.1)

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \quad (3.41)$$

oraz

$$\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset. \quad (3.42)$$

Na powierzchni kontaktu normalne składowe prędkości powłoki i cieczy są sobie równe

$$\dot{w} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}}. \quad (3.43)$$

Zapisanie warunku brzegowego na powierzchni swobodnej cieczy wymaga modyfikacji równania Cauchy'ego–Lagrange'a (3.35). Na powierzchni swobodnej musi być spełniony warunek.

$$p = 0. \quad (3.44)$$

Przyjmuje się, że składową pionową drgań opisuje funkcja

$$X^3 = q(X^1, X^2, t). \quad (3.45)$$

Równanie Cauchy'ego–Lagrange'a na powierzchni swobodnej przyjmie wtedy postać

$$\dot{\Phi} = -gq(X^1, X^2, t). \quad (3.46)$$

Po zróżniczkowaniu po czasie uzyskuje się poszukiwany warunek brzegowy

$$\dot{\Phi} = -g\dot{q} = -g\mathbf{v}_{X^3} = -g\frac{\partial \Phi}{\partial X^3} = -g\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}}. \quad (3.47)$$

Wyprowadzony powyżej opis zagadnienia brzegowego za pomocą równania różniczkowego wraz z określonymi warunkami brzegowymi zastępuje się równoważnym sformułowaniem całkowym. W tym celu korzysta się z drugiej tożsamości Greena zamieniającej całkę objętościową na powierzchniową [19]

$$\int_V (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f) dV = \int_S \left(f\frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} - g\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \right) dS. \quad (3.48)$$

W miejsce funkcji f podstawia się funkcję potencjału prędkości Φ , a w miejsce funkcji g rozwiązanie fundamentalne równania Laplace'a G^* [4, 5]

$$\nabla^2 G^*(\mathbf{X}, \mathbf{X}^\Sigma) = -4\pi\delta(\mathbf{X} - \mathbf{X}^\Sigma), \quad (3.49)$$

gdzie $\delta(\mathbf{X} - \mathbf{X}^\Sigma)$ jest dystrybucją delta–Diraca. Po podstawieniu otrzymuje się

$$\begin{aligned} & \int_V [\Phi(\mathbf{X}) \nabla^2 G^*(\mathbf{X}, \mathbf{X}^\Sigma) - G^*(\mathbf{X}, \mathbf{X}^\Sigma) \nabla^2 \Phi(\mathbf{X})] dV(\mathbf{X}) = \\ & = \int_S \left[\Phi(\mathbf{X}) \frac{\partial G^*(\mathbf{X}, \mathbf{X}^\Sigma)}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{X})} - G^*(\mathbf{X}, \mathbf{X}^\Sigma) \frac{\partial \Phi(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{X})} \right] dS(\mathbf{X}). \end{aligned} \quad (3.50)$$

Po uwzględnieniu własności zastosowanych funkcji otrzymuje się tożsamość całkową na brzegu obszaru zajmowanego przez ciecz

$$4\pi\Phi(\mathbf{X}^\Sigma) + \int_\Gamma \Phi(\mathbf{X}) F^*(\mathbf{X}, \mathbf{X}^\Sigma) d\Gamma(\mathbf{X}) = \int_\Gamma \frac{\partial \Phi(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{n}} G^*(\mathbf{X}, \mathbf{X}^\Sigma) d\Gamma(\mathbf{X}), \quad (3.51)$$

gdzie całkowanie odbywa się po całej powierzchni brzegowej $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

Rozwiązanie podstawowe G^* można zapisać w postaci

$$G^*(\mathbf{X}, \mathbf{X}^\Sigma) = \frac{1}{r(\mathbf{X}, \mathbf{X}^\Sigma)}, \quad (3.52)$$

gdzie $r(\mathbf{X}, \mathbf{X}^\Sigma)$ oznacza odległość między punktami $\mathbf{X}$ i $\mathbf{X}^\Sigma$. Przez funkcję $F^*(\mathbf{X}, \mathbf{X}^\Sigma)$ oznaczono pochodną w kierunku normalnym skierowanym na zewnątrz obszaru Ω rozwiązania fundamentalnego równania Laplace'a

$$F^*(\mathbf{X}, \mathbf{X}^\Sigma) = \frac{\partial G^*(\mathbf{X}, \mathbf{X}^\Sigma)}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{X})} = \frac{[X^i(\mathbf{X}^\Sigma) - X^i(\mathbf{X})] n_i(\mathbf{X})}{r^3(\mathbf{X}, \mathbf{X}^\Sigma)}, \quad (3.53)$$

przy czym

$$|\mathbf{n}| = 1. \quad (3.54)$$

Tożsamość całkową (3.51) zapisuje się dla punktu $\mathbf{X}^\Sigma$ leżącego na brzegu

$$\mathbf{X}^\Sigma \rightarrow \mathbf{X}^\Gamma \in \Gamma \quad (3.55)$$

i uzyskuje się końcową postać równania

$$C(\mathbf{X}^\Gamma) \Phi(\mathbf{X}^\Gamma) + \text{V.p.} \int_\Gamma \Phi(\mathbf{X}) F^*(\mathbf{X}, \mathbf{X}^\Gamma) d\Gamma(\mathbf{X}) = \int_\Gamma \frac{\partial \Phi(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{n}} G^*(\mathbf{X}, \mathbf{X}^\Gamma) d\Gamma(\mathbf{X}). \quad (3.56)$$

Wartość współczynnika $C(\mathbf{X}^\Gamma)$ zależy od gładkości powierzchni w punkcie $\mathbf{X}^\Gamma$. Należy zauważyć, że całka po lewej stronie powyższego równania jest silnie osobliwa, jednak istnieje jej wartość główna w sensie Cauchy'ego.

Typ równania (3.56) jest znany w mechanice jako równanie Fredholma II rodzaju, w którym nieznanne funkcje występują zarówno pod operatorami całek, jak i na zewnątrz całek. Z dwóch nie-
wiadomych funkcji $\Phi(\mathbf{X})$ i $\frac{\partial \Phi(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{n}}$ jedna jest zawsze znana (warunki brzegowe). Wyznaczenie

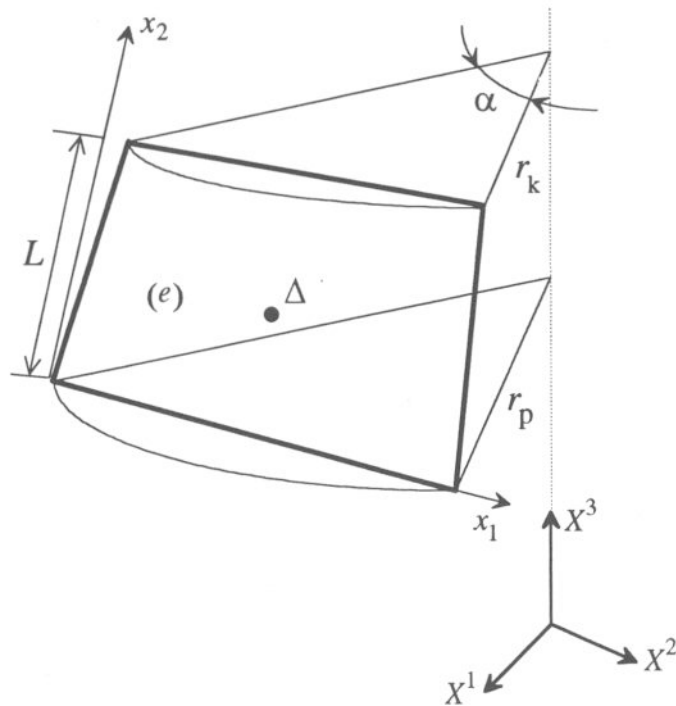
drugiej funkcji kończy rozwiązanie sformułowanego zagadnienia brzegowego dla cieczy.

3.2. Model obliczeniowy MEB

Równanie opisujące ciecz (3.56) zapisuje się w postaci dyskretnej. Współczynniki tego równania oblicza się stosując do dyskretyzacji metodę elementów brzegowych [4, 5]. Rozważania ogranicza się do osiowosymetrycznych obszarów zajmowanych przez ciecz.

Powierzchnię brzegu obszaru zajmowanego przez ciecz dzieli się na czworokątne elementy trapezowe, które są podstawą dyskretyzacji konstrukcji elementami trójkątnymi. Na powierzchni kontaktu cieczy z konstrukcją Γ_1 naroża siatek MES i MEB pokrywają się. W związku z tym poziom lustra cieczy wyznacza linię węzłów dla siatki MES.

Jako globalny układ odniesienia przyjmuje się układ kartezjański $\{X^1, X^2, X^3\}$, taki sam jak w przypadku MES (Rys. 3.2). Niech X^Δ oznacza węzeł Δ ($\Delta = 1, 2, \dots, \bar{\Delta}$; $\bar{\Delta}$ – liczba węzłów) w globalnym układzie współrzędnych, $e = 1, 2, \dots, \bar{e}$ zaś numerację elementów brzegowych ($\bar{e}$ – liczba elementów). Na Rys. 3.2 przedstawiono typowy element brzegowy o długości tworzącej L , rozpięty na kącie α , którego węzły są odległe od osi symetrii o r_p i r_k oraz są oddalone od płaszczyzny $X^3 = 0$ odpowiednio o X_p^3 i X_k^3 . Lokalny kartezjański układ współrzędnych $\{x_1, x_2\}$ przyjmuje się taki sam jak dla elementu skończonego.

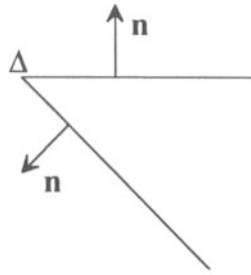


Rys. 3.2. Geometria elementu brzegowego

Przyjmuje się parametry węzłowe, którymi są wartości funkcji potencjału prędkości i ich pochodne w kierunku normalnym

$$\Phi^\Delta, \frac{\partial \Phi^\Delta}{\partial \mathbf{n}}. \quad (3.57)$$

Węzły położone są w środkach elementów. Takie usytuowanie węzłów wybrano w celu uniknięcia niejednoznaczności w określeniu pochodnej normalnej dla węzła, w którym następuje załamanie powierzchni brzegowej (Rys. 3.3). Ponadto unika się również węzłów z niejednoznacznymi warunkami brzegowymi (gdy w węźle schodzą się powierzchnie Γ_1 i Γ_2).



Rys. 3.3. Punkt węzłowy o niejednoznacznym kierunku wektora normalnego

Parametry węzłowe porządkuje się w wektory globalne

$$\Phi = \{\Phi^1, \Phi^2, \dots, \Phi^\Delta, \dots, \Phi^{\bar{\Delta}}\}^T, \quad (3.58)$$

$$\Phi_n = \left\{ \frac{\partial \Phi^1}{\partial \mathbf{n}}, \frac{\partial \Phi^2}{\partial \mathbf{n}}, \dots, \frac{\partial \Phi^\Delta}{\partial \mathbf{n}}, \dots, \frac{\partial \Phi^{\bar{\Delta}}}{\partial \mathbf{n}} \right\}^T. \quad (3.59)$$

Funkcje potencjału prędkości i jej pochodnej w kierunku normalnym wewnątrz elementu brzegowego aproksymuje się na podstawie wartości węzłowej za pomocą stałych funkcji bazowych

$$\Phi_{(e)}(x_1, x_2) = {}^f N_\Delta^{(e)}(x_1, x_2) \Phi^\Delta, \quad (3.60)$$

$$\frac{\partial \Phi_{(e)}(x_1, x_2)}{\partial \mathbf{n}} = {}^f N_\Delta^{(e)}(x_1, x_2) \frac{\partial \Phi^\Delta}{\partial \mathbf{n}}, \quad (3.61)$$

$${}^f N_\Delta^{(e)}(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } \Delta \in (e) \\ 0 & \text{gdy } \Delta \notin (e) \end{cases}. \quad (3.62)$$

Równanie (3.56) zapisuje się w formie macierzowej, przyjmując za punkty kolokacji węzły elementów brzegowych $\mathbf{X}^\Gamma$

$$F_{\Gamma\Delta}\Phi^\Delta = G_{\Gamma\Delta}\frac{\partial\Phi^\Delta}{\partial\mathbf{n}}, \quad (3.63)$$

gdzie

$$F_{\Gamma\Delta} = \sum_{e=1}^{\bar{e}} \iint_{S_{(e)}} F^*[\mathbf{X}(x_1, x_2), \mathbf{X}^\Gamma] {}^fN_\Delta^{(e)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \text{ dla } \Gamma \neq \Delta, \quad (3.64)$$

$$G_{\Gamma\Delta} = \sum_{e=1}^{\bar{e}} \iint_{S_{(e)}} G^*[\mathbf{X}(x_1, x_2), \mathbf{X}^\Gamma] {}^fN_\Delta^{(e)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2. \quad (3.65)$$

Wartości numeryczne powyższych całek oblicza się metodą Gaussa, stosując po osiem punktów Gaussa na każdym z kierunków.

Współczynniki $F_{\Delta\Delta}$, będące całkami osobliwymi, wyznacza się, rozważając pole prędkości o stałym potencjale w całym obszarze Ω

$$\bigwedge_{\Delta \in \Gamma} \Phi^\Delta = \text{Const.}, \quad (3.66)$$

wtedy

$$\bigwedge_{\Delta \in \Gamma} \frac{\partial\Phi^\Delta}{\partial\mathbf{n}} = 0, \quad (3.67)$$

czyli na podstawie równania (3.63)

$$F_{\Delta\Delta} 1^\Sigma = 0, \quad (3.68)$$

skąd

$$F_{\Delta\Delta} = - \sum_{\substack{\Sigma=1 \\ \Sigma \neq \Delta}}^{\bar{\Delta}} F_{\Delta\Sigma}. \quad (3.69)$$

Przedstawiona procedura eliminuje ponadto konieczność jawnego wyznaczania współczynnika $C(\mathbf{X}^\Gamma)$, który powinien być dodawany na diagonalu macierzy $\mathbf{F}$.

Na podstawie przytoczonych zależności łatwo można zauważyć, że macierz $\mathbf{F}$ jest osobliwa. Jest to związane z własnością równania Laplace'a, które z warunkami brzegowymi Neumanna nie ma jednoznacznego rozwiązania. Ten problem będzie dalej analizowany (3.77). Proponuje się wymianę jednego z równań MEB (3.71) na warunek ustalający wartość funkcji Φ w jednym z węzłów. Oznacza to, że wartość Φ wyznaczana jest z dokładnością do stałej. Postępowanie takie nie zmienia wartości energii kinetycznej (3.72), co łatwo można sprawdzić, wykorzystując warunek Gaussa (3.39)

$$\begin{aligned} {}^f E_k &= \frac{1}{2} \rho_f \int_{\Gamma} \frac{\partial(\Phi + \text{Const.})}{\partial \mathbf{n}} (\Phi + \text{Const.}) d\Gamma = \frac{1}{2} \rho_f \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \Phi d\Gamma + \frac{1}{2} \text{Const.} \rho_f \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma = \\ &= \frac{1}{2} \rho_f \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \Phi d\Gamma. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Układ równań MEB można zapisać w formie macierzowej

$$\mathbf{F}\Phi = \mathbf{G}\Phi_n. \quad (3.71)$$

Energia kinetyczna cieczy jest równa

$$\begin{aligned} {}^f E_k &= \frac{1}{2} \rho_f \int_{\Omega} v^2 d\Omega = \frac{1}{2} \rho_f \int_{\Omega} \text{grad} \Phi \cdot \text{grad} \Phi d\Omega = \frac{1}{2} \rho_f \int_{\Omega} g^{ij} \Phi_{,i} \Phi_{,j} d\Omega = \frac{1}{2} \rho_f \int_{\Omega} (g^{ij} \Phi_{,i} \Phi)_{,j} d\Omega = \\ &= \frac{1}{2} \rho_f \int_{\Gamma} g^{ij} \Phi_{,i} \Phi n_j d\Gamma = \frac{1}{2} \rho_f \int_{\Gamma} \Phi_{,i} n^i \Phi d\Gamma = \frac{1}{2} \rho_f \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \Phi d\Gamma. \end{aligned} \quad (3.72)$$

W powyższym wyrażeniu, wykorzystano twierdzenie Ostrogradskiego–Gaussa oraz tożsamość

$$\begin{aligned} g^{ij} \Phi_{,i} \Phi_{,j} &= (g^{ij} \Phi_{,i} \Phi)_{,j} - g^{ij} (\Phi_{,i})_{,j} \Phi = (g^{ij} \Phi_{,i} \Phi)_{,j} - g^{ij} (\Phi_{,ij} - \Phi_{,kj} \Gamma_{ij}^k) \Phi = \\ &= (g^{ij} \Phi_{,i} \Phi)_{,j} - (\nabla^2 \Phi) \Phi = (g^{ij} \Phi_{,i} \Phi)_{,j}. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Aproksymując funkcję potencjału prędkości i jej pochodną w kierunku normalnym stałymi funkcjami kształtu, wyrażenie na energię kinetyczną można zapisać w postaci

$${}^f E_k = \frac{1}{2} \rho_f \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}}^{\Gamma} N_{\Gamma\Delta} \Phi^{\Delta}, \quad (3.74)$$

gdzie

$$N_{\Gamma\Delta} = \sum_{e=1}^{\bar{e}} \iint_{S(e)} {}^f N_{\Gamma}^{(e)}(x_1, x_2) {}^f N_{\Delta}^{(e)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \quad (3.75)$$

przy czym

$$N_{\Gamma\Delta} = 0 \text{ dla } \Gamma \neq \Delta. \quad (3.76)$$

Eliminując funkcję potencjału prędkości z równania MEB (3.71)

$$\Phi = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{G} \Phi_n, \quad (3.77)$$

energię kinetyczną cieczy zapisuje się jako formę kwadratową z symetrycznym jądrem w postaci macierzy bezwładności

$${}^f E_k = \frac{1}{2} \rho_f \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}}^{\Gamma} N_{\Gamma\Delta} \Phi^{\Delta} = \frac{1}{2} \rho_f \Phi_n^T \mathbf{N} \Phi = \frac{1}{2} \rho_f \Phi_n^T \mathbf{N} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{G} \Phi_n \approx \frac{1}{2} \Phi_n^T {}^f \mathbf{M} \Phi_n. \quad (3.78)$$

Symetryzacja macierzy bezwładności

$${}^f\mathbf{M} = \frac{1}{2}\rho_f \left[(\mathbf{N}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{G})^T + \mathbf{N}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{G} \right], \quad (3.79)$$

proceedzi do dokładniejszej aproksymacji [30]. Można wykazać, że w miarę zagęszczania siatki wyrażenie $\mathbf{N}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{G}$ dąży do postaci symetrycznej.

Jeżeli założyć, że pionową składową drgań powierzchni swobodnej opisuje funkcja

$$X^3 = q(X^1, X^2, t), \quad (3.80)$$

$$X^3 = q(X^1, X^2, 0) = 0, \quad (3.81)$$

to wyrażenie na przyrost energii potencjalnej związanej z falowaniem powierzchni swobodnej cieczy przyjmuje postać

$$d {}^fE_p = \left(\int_0^q p dX^3 \right) d\Gamma = \left(g\rho_f \int_0^q X^3 dX^3 \right) d\Gamma = \frac{1}{2}g\rho_f q^2 d\Gamma. \quad (3.82)$$

Całkowita energia potencjalna związana z falowaniem cieczy wynosi zatem

$${}^fE_p = \frac{1}{2}g\rho_f \int_{\Gamma_2} q^2 d\Gamma. \quad (3.83)$$

Po zastosowaniu aproksymacji (3.60) do wyznaczania wartości funkcji q można zapisać energię potencjalną cieczy jako formę kwadratową z symetrycznym jądrem w postaci macierzy sztywności

$${}^fE_p = \frac{1}{2}g\rho_f q^{\Delta\Gamma_2} \bar{N}_{\Delta\Gamma_2\Sigma\Gamma_2} q^{\Sigma\Gamma_2} = \frac{1}{2}q^{\Delta\Gamma_2} {}^fK_{\Delta\Gamma_2\Sigma\Gamma_2} q^{\Sigma\Gamma_2} = \frac{1}{2} {}^f\mathbf{q}^T {}^f\mathbf{K} {}^f\mathbf{q}, \quad (3.84)$$

gdzie przez ${}^f\mathbf{q}$ oznaczono wektor przemieszczeń pionowych punktów powierzchni swobodnej cieczy oraz

$$\bar{N}_{\Delta\Gamma_2\Sigma\Gamma_2} = \sum_{\substack{e=1 \\ e \in \Gamma_2}}^{\bar{e}} \iint_{S(e)} {}^fN_{\Delta}^{(e)}(x_1, x_2) {}^fN_{\Sigma}^{(e)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2. \quad (3.85)$$

Jeżeli założymy, że dla $t=0$ układ znajdował się w spoczynku i lustro cieczy nie jest obciążone, można wyznaczyć w dowolnej chwili związek pomiędzy położeniem punktów powierzchni swobodnej i wartością funkcji potencjału prędkości

$$q = \int_0^t v_{X^3} d\tau = \int_0^t \frac{\partial \Phi}{\partial X^3} d\tau = -\frac{1}{g} \int_0^t \Phi d\tau = -\frac{1}{g} \Phi. \quad (3.86)$$

W powyższym przekształceniu wykorzystano warunek brzegowy (3.47).

4. Sprężone równania ruchu obu ośrodków

Zagadnienie brzegowe dla cieczy jest zadaniem Neumanna (por. rozdz. 3). Występujące w równaniach (3.77) wartości pochodnych $\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}}$ eliminuje się z warunków brzegowych.

Zapisanie warunku brzegowego (3.43) na powierzchni Γ_1 wymaga wyznaczenia przemieszczenia powłoki na kierunku normalnym do powierzchni superelementu, w punkcie węzłowym siatki MEB. Przyjmuje się, że jest ono równe średniej wartości przemieszczeń normalnych w węzłach trapezowego superelementu. W związku z tym, współrzędne wektora przemieszczeń normalnych w węzłach siatki MEB na powierzchni Γ_1 można wyrazić przez współrzędne wektora parametrów węzłowych konstrukcji za pomocą transformacji

$$\mathbf{w}_{\Gamma_1}^{\Delta} = \Gamma_1 \mathbf{\Omega}_{\Gamma}^{\Delta} {}^s \mathbf{q}^{\Gamma}, \quad (4.1)$$

gdzie

$$\Gamma_1 \mathbf{\Omega}_{\Gamma}^{\Delta} = \begin{Bmatrix} \mathbf{T}_w \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}. \quad (4.2)$$

Powyższa transformacja jest nietrywialna gdy węzeł siatki MEB Δ leży na powierzchni superelementu, którego jednym z wierzchołków jest węzeł siatki MES Γ . Macierz transformacji dla pojedynczego węzła $\mathbf{T}_w$ ma następującą postać

$$\mathbf{T}_w = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -\sin \Psi & 0 & \cos \Psi & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \Theta & \cos \Theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos \Theta & \sin \Theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \Theta & \cos \Theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \Theta & \sin \Theta & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

Po uwzględnieniu związków (3.47) i (3.86) wyrażenie na energię kinetyczną cieczy (3.78) przyjmuje postać

$${}^f E_k = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} {}^s \dot{\mathbf{q}}^T & \Gamma_1 \mathbf{\Omega}^T & {}^f \dot{\mathbf{q}}^T \end{bmatrix} {}^f \mathbf{M} \begin{bmatrix} \Gamma_1 \mathbf{\Omega} {}^s \dot{\mathbf{q}} \\ {}^f \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

Jako bazę współrzędnych uogólnionych połączonych modeli przyjmuje się wektor złożony z parametrów węzłowych konstrukcji oraz przemieszczeń pionowych powierzchni swobodnej

cieczy Γ_2

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} {}^s\mathbf{q} \\ {}^f\mathbf{q} \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

Związki między współrzędnymi określa się za pomocą zero–jedynkowych transformacji

$${}^s\mathbf{q} = {}^s\Lambda\mathbf{q}, \quad (4.6)$$

$${}^f\mathbf{q} = {}^f\Lambda\mathbf{q}. \quad (4.7)$$

Wyrażenie całkowitej energii potencjalnej i kinetycznej pozwala na określenie macierzy sztywności i bezwładności oraz wektora równoważników statycznych obciążenia zewnętrznego połączonych modeli

$$E_p = {}^sE_p + {}^fE_p = \frac{1}{2}\mathbf{q}^T ({}^s\Lambda^T {}^s\mathbf{K} {}^s\Lambda + {}^f\Lambda^T {}^f\mathbf{K} {}^f\Lambda)\mathbf{q} - \mathbf{q}^T {}^s\Lambda^T {}^s\mathbf{P} = \frac{1}{2}\mathbf{q}^T \mathbf{K}\mathbf{q} - \mathbf{q}^T \mathbf{P}, \quad (4.8)$$

$$E_k = {}^sE_k + {}^fE_k = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \left({}^s\Lambda^T {}^s\mathbf{M} {}^s\Lambda + \begin{bmatrix} {}^s\Lambda^T \Gamma_1 \Omega^T & {}^f\Lambda^T \end{bmatrix} {}^f\mathbf{M} \begin{bmatrix} \Gamma_1 \Omega {}^s\Lambda \\ {}^f\Lambda \end{bmatrix} \right) \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}. \quad (4.9)$$

Po przyjęciu hipotezy dotyczącej tłumienia uzyskuje się równanie ruchu w klasycznej postaci

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} - \mathbf{P} = \mathbf{0}. \quad (4.10)$$

Sposób wprowadzenia tłumienia do układu zostanie omówiony w punkcie 5.1.

5. Rozwiązanie numeryczne równania ruchu

5.1. Metoda ortogonalizacji wektorami własnymi

Analiza numeryczna w zakresie dynamicznym wiąże się z koniecznością rozwiązania równania ruchu (4.10). W klasycznym podejściu poszukuje się rozwiązania równań ruchu w przestrzeni wektorów własnych. W tym celu wektor parametrów węzłowych $\mathbf{q}$ przedstawia się w postaci

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{W}^T \mathbf{y}_I(t) = \mathbf{W} \mathbf{y}(t), \quad (5.1)$$

$$I = 1, 2, \dots, N, \quad (5.2)$$

gdzie N jest liczbą współrzędnych uogólnionych, $\mathbf{W}$ jest macierzą wektorów własnych (krótko: macierzą własną)

$$\mathbf{W} = [\mathbf{W}^1, \mathbf{W}^2, \dots, \mathbf{W}^N], \quad (5.3)$$

a $\mathbf{y}(t)$ wektorem, którego współrzędnymi są skalarne funkcje czasu $y_I(t)$ odpowiadające poszczególnym formom drgań

$$\mathbf{y}(t) = [y_1, y_2, \dots, y_N]^T. \quad (5.4)$$

Po dokonaniu transformacji równania (4.10) macierzą własną

$$\mathbf{W}^T [\mathbf{M} \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{y}} + \mathbf{K} \mathbf{y} - \mathbf{P}] = \mathbf{0}, \quad (5.5)$$

i przyjęciu tłumienia w postaci

$$\mathbf{C} = \mu \mathbf{K} + \eta \mathbf{M} \quad (5.6)$$

równanie (5.5) przekształca się na N skalnych, liniowych równań różniczkowych drugiego rzędu

$$\tilde{M}_I \ddot{y}_I + \tilde{C}_I \dot{y}_I + \tilde{K}_I y_I - \tilde{P}_I = 0, \quad I = 1, 2, \dots, N, \quad (5.7)$$

których rozwiązaniem są poszukiwane funkcje $y_I(t)$. Współczynnikami równania (5.7) są współrzędne macierzy diagonalnych, natomiast wyraz wolny jest współrzędną rzutu wektora obciążenia na przestrzeń $\{y_1, y_2, \dots, y_N\}$. Współczynniki te przyjmują postać

$$\tilde{M}_I = (\mathbf{W}^I)^T \mathbf{B} \mathbf{W}^I, \quad (5.8)$$

$$\tilde{K}_I = (\mathbf{W}^I)^T \mathbf{K} \mathbf{W}^I, \quad (5.9)$$

$$\tilde{C}_I = (\mathbf{W}^I)^T \mathbf{C} \mathbf{W}^I = \gamma \sqrt{\tilde{K}_I \tilde{B}_I}, \quad (5.10)$$

$$\tilde{P}_I = (\mathbf{W}^I)^T \mathbf{P}. \quad (5.11)$$

W wyrażeniu na główny współczynnik tłumienia (5.10) przyjęto bezwymiarowy współczynnik tłumienia jednakowy dla obu ośrodków. Zdecydowano się na takie uproszczenie, ponieważ przyjęcie zróżnicowanych wartości prowadziłoby do wyrażenia na macierz tłumienia postaci

$$\begin{aligned} \mathbf{C} = & \mu^s {}^s\Lambda^T {}^s\mathbf{K} {}^s\Lambda + \mu^f {}^f\Lambda^T {}^f\mathbf{K} {}^f\Lambda + \kappa^s {}^s\Lambda^T {}^s\mathbf{M} {}^s\Lambda + \\ & + \kappa^f \begin{bmatrix} {}^s\Lambda^T \Gamma_1 \Omega^T & -\frac{1}{g} {}^f\Lambda^T \end{bmatrix} {}^f\mathbf{M} \begin{bmatrix} \Gamma_1 \Omega {}^s\Lambda \\ -\frac{1}{g} {}^f\Lambda \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Powyższa forma macierzy $\mathbf{C}$ nie byłaby diagonalizowana transformacją (5.5).

W przypadku złożonych konstrukcji inżynierskich o dużej liczbie stopni swobody, przytoczony powyżej algorytm wiąże się z koniecznością rozwiązania zagadnienia własnego o znacznym rozmiarze. Występujące w algorytmie wektory własne otrzymuje się z rozwiązania układu równań postaci

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{W}^h = \mathbf{0}, \quad (5.13)$$

gdzie

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0 \rightarrow \omega = [\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N]. \quad (5.14)$$

Analizując powyższy algorytm, można sformułować następujące uwagi:

- analiza dynamiczna przy stosowaniu wektorów własnych wymaga znacznego zaangażowania mocy komputera,
- w konkretnych przypadkach wpływ poszczególnych form drgań na rozwiązanie zależy nie tylko od częstotliwości wymuszenia, ale również od przestrzennego rozłożenia obciążenia,
- formy własne odpowiadające częstotliwościom własnym zbliżonym do częstotliwości obciążenia są dominujące jedynie w przypadku właściwego tym formom przestrzennego rozłożenia obciążenia,

- nie ma możliwości oceny wpływu poszczególnych form własnych na rozwiązanie przed ukończeniem zadania, w związku z tym nie można oszacować do ilu form należy ograniczyć obliczenia,
- nie wykazano dotychczas, że wykorzystanie w analizie wektorów własnych daje lepsze wyniki niż innych układów wektorów ortogonalnych.

5.2. Metoda ortogonalizacji wektorami Ritza

W niniejszej pracy proponuje się zastosowanie transformacji ortogonalnymi wektorami Ritza, która wydatnie redukuje rozmiar zagadnienia i co za tym idzie czas obliczeń. Istotną cechą wektorów Ritza jest ich dostosowanie do przestrzennego rozmieszczenia obciążenia, co pozwala na przyjmowanie mniejszej liczby tych wektorów w analizie w porównaniu do transformacji wektorami własnymi. Można również zdefiniować błąd ograniczenia ciągu wektorów, co pozwala kontrolować zbieżność analizy.

Poniżej przedstawiono iteracyjny algorytm generowania wektorów Ritza [3, 17, 23, 33, 38]. Wyznaczenie pierwszego wektora polega na rozwiązaniu równania statycznego

$$\mathbf{K}\mathbf{X}_1^* = \mathbf{P}, \quad (5.15)$$

a następnie normalizacji otrzymanego wektora względem macierzy bezwładności

$$\mathbf{X}_1^T \mathbf{M} \mathbf{X}_1 = 1. \quad (5.16)$$

Prawą stronę w równaniu (5.15) przyjmuje się równą statycznej części obciążenia (niezależnej od czasu). W przypadku wymuszenia bezwładnościowego należy przyjąć dla wszystkich współrzędnych uogólnionych wektora $\mathbf{P}$ siły bezwładności. Podejście takie powoduje, że żaden z wygenerowanych wektorów nie będzie ortogonalny do wektora obciążenia i co za tym idzie będzie miał niezerowy udział w rozwiązaniu.

Kolejne wektory wyznacza się zgodnie z następującym algorytmem rekurencyjnym:

- wektor $\mathbf{X}_l^*$ wyznacza się, rozwiązując liniowe równanie postaci

$$\mathbf{K}\mathbf{X}_l^* = \mathbf{M}\mathbf{X}_{l-1}, \quad (5.17)$$

- wektor $\mathbf{X}_l^*$ ortogonalizuje się względem wcześniej wyznaczonych wektorów według schematu Grama–Schmidta

$$\mathbf{X}_l^{**} = \mathbf{X}_l^* - \sum_{j=1}^{l-1} c_j \mathbf{X}_j, \quad (5.18)$$

gdzie współczynniki c_j są równe

$$c_j = \mathbf{X}_j^T \mathbf{M} \mathbf{X}_j^*, \quad (5.19)$$

– następnie wektor $\mathbf{X}_j^{**}$ normalizuje się względem macierzy bezwładności, otrzymując kolejny wektor spełniający zależność

$$\mathbf{X}_j^T \mathbf{M} \mathbf{X}_j = 1. \quad (5.20)$$

Wyznaczony w ten sposób zbiór wektorów Ritza

$$\mathbf{X} = [\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_L], \quad (5.21)$$

może być użyty do rozkładu wektora współrzędnych uogólnionych (zwykle $L < N$)

$$\mathbf{q}(t) = \sum_{k=1}^L \mathbf{X}_k z_k^*(t) = \mathbf{X} \mathbf{z}^*(t). \quad (5.22)$$

Wektor $\mathbf{z}^*(t)$ postaci

$$\mathbf{z}^*(t) = [z_1^*, z_2^*, \dots, z_L^*]^T \quad (5.23)$$

jest zbiorem funkcyjnych współczynników związanych z wektorami $\mathbf{X}_k$.

Po podstawieniu wyrażenia (5.22) do równania (4.10) oraz wykonaniu na nim transformacji otrzymuje się równanie postaci

$$\mathbf{X}^T [\mathbf{M} \dot{\mathbf{X}} \mathbf{z}^* + \mathbf{C} \mathbf{X} \dot{\mathbf{z}}^* + \mathbf{K} \mathbf{X} \mathbf{z}^* - \mathbf{P}] = \mathbf{0}, \quad (5.24)$$

które przyjmuje formę

$$\mathbf{M}^* \dot{\mathbf{z}}^* + \mathbf{C}^* \dot{\mathbf{z}}^* + \mathbf{K}^* \mathbf{z}^* - \mathbf{P}^* = \mathbf{0}. \quad (5.25)$$

Wyznaczone wektory $\mathbf{X}_k$ diagonalizują jedynie macierz bezwładności. Współczynniki macierzowe w równaniach (5.25) są równe

$$\mathbf{M}^* = \mathbf{X}^T \mathbf{M} \mathbf{X} = \mathbf{I}_{L \times L}, \quad (5.26)$$

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{X}^T \mathbf{K} \mathbf{X}, \quad (5.27)$$

$$\mathbf{C}^* = \mathbf{X}^T \mathbf{C} \mathbf{X}, \quad (5.28)$$

$$\mathbf{P}^* = \mathbf{X}^T \mathbf{P}. \quad (5.29)$$

Aby dokonać pełnej ortogonalizacji równania (5.25) należy jeszcze rozwiązać zagadnienie własne:

$$\det(\mathbf{K}^* - \bar{\omega}^2 \mathbf{M}^*) = 0 \rightarrow \bar{\omega} = \{\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \dots, \bar{\omega}_L\}, \quad (5.30)$$

$$(\mathbf{K}^* - \bar{\omega}_{(K)}^2 \mathbf{M}^*) \bar{\mathbf{W}}^K = \mathbf{0} \quad (5.31)$$

i dokonać transformacji analogicznej do (5.5).

Składając obie powyższe transformacje

$$\bar{\mathbf{R}}^K = \mathbf{X} \bar{\mathbf{W}}^K \quad (5.32)$$

i normalizując otrzymane wektory względem macierzy bezwładności

$$(\mathbf{R}^K)^T \mathbf{M} \mathbf{R}^K = \mathbf{1}, \quad (5.33)$$

otrzymuje się końcową postać wektorów Ritza ortogonalizujących równanie (4.10).

Zbiór wektorów Ritza $\mathbf{R} = [\mathbf{R}^1, \mathbf{R}^2, \dots, \mathbf{R}^L]$ może być użyty do rozkładu wektora współrzędnych uogólnionych

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{R}^K z_K(t) = \mathbf{R} \mathbf{z}. \quad (5.34)$$

Po wykonaniu transformacji równania (4.10) wektorami Ritza

$$(\mathbf{R})^T [\mathbf{M} \mathbf{R} \ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{C} \mathbf{R} \dot{\mathbf{z}} + \mathbf{K} \mathbf{R} \mathbf{z} - \mathbf{P}] = \mathbf{0}, \quad (5.35)$$

uzyskuje się L skalnych, liniowych równań różniczkowych drugiego rzędu, których rozwiązaniem są poszukiwane funkcje $z_K(t)$. Rozseparowane równania ruchu mają postać

$$M_K \ddot{z}_K(t) + C_K \dot{z}_K(t) + K_K z_K(t) - P_K(t) = 0, \quad (5.36)$$

gdzie

$$M_K = (\mathbf{R}^K)^T \mathbf{M} \mathbf{R}^K = \mathbf{1}, \quad (5.37)$$

$$K_K = (\mathbf{R}^K)^T \mathbf{K} \mathbf{R}^K = \omega_K^2, \quad (5.38)$$

$$C_K = (\mathbf{R}^K)^T \mathbf{C} \mathbf{R}^K = \gamma \sqrt{K_K M_K} = \gamma \omega_K, \quad (5.39)$$

$$P_K(t) = (\mathbf{R}^K)^T \mathbf{P}(t). \quad (5.40)$$

Zastosowanie wektorów Ritza w rozwiązywaniu zadania dynamicznego ma szereg zalet:

- uzyskuje się zwykle znaczną redukcję rozwiązywanego zagadnienia własnego – dodatkowy koszt poniesiony na wygenerowanie wektorów Ritza jest stosunkowo niewielki,
- otrzymuje się dobre przybliżenie wartości pierwszych częstotliwości własnych,
- w celu przyspieszenia rozwiązania równań (5.15) i (5.17) można jednorazowo wykonać rozkład macierzy $\mathbf{K}$ na macierze górno- i dolno-trójkątne

$$\mathbf{K} = \mathbf{L}^T \mathbf{D} \mathbf{L}, \quad (5.41)$$

- macierz $\mathbf{M}^*$ jest macierzą jednostkową, a w związku z tym równanie (5.30) opisuje czyste zagadnienie własne.

5.3. Oszacowanie błędu ograniczenia bazy wektorowej

Wpływ poszczególnych wektorów Ritza na rozwiązanie charakteryzuje iloczyn skalarny

$$p_K = (\mathbf{R}^K)^T \mathbf{P} = \mathbf{P}^T \mathbf{R}^K \quad (5.42)$$

Jeżeli liczba wektorów Ritza jest równa liczbie współrzędnych uogólnionych ($L = N$), to wówczas słuszna jest tożsamość

$$\mathbf{P} - \sum_{K=1}^N p_K \mathbf{M} \mathbf{R}^K = \mathbf{0}. \quad (5.43)$$

Jeżeli liczba wektorów Ritza brana do analizy jest mniejsza niż liczba współrzędnych uogólnionych ($L < N$), to wówczas zbiór tych wektorów stanowi jedynie podprzestrzeń rozwiązania, a w takim razie różnica (5.43) nie będzie równa wektorowi zerowemu

$$\mathbf{E} = \mathbf{P} - \sum_{K=1}^L p_K \mathbf{M} \mathbf{R}^K \neq \mathbf{0}. \quad (5.44)$$

Wektor $\mathbf{E}$ pozwala zdefiniować unormowaną miarę błędu w postaci

$$e = \frac{\mathbf{P}^T \mathbf{E}}{\mathbf{P}^T \mathbf{P}}. \quad (5.45)$$

Waga wektorów Ritza w odwzorowaniu obciążenia jest wyrażona współczynnikiem

$$h_K = p_K \frac{\mathbf{P}^T \mathbf{M} \mathbf{R}^K}{\mathbf{P}^T \mathbf{P}}. \quad (5.46)$$

Wielkość błędu e oraz współczynniki h_K są związane zależnością

$$\sum_{K=1}^L h_K = 1.0 - e. \quad (5.47)$$

Można wykazać, że błąd e maleje systematycznie wraz ze wzrostem liczby wektorów Ritza branych pod uwagę przy transformacji bazy. W analogiczny sposób można zdefiniować błąd w przypadku transformacji wektorami własnymi. Jednakże w tym przypadku w miarę wzrostu liczby wektorów własnych branych do analizy błąd nie zawsze maleje systematycznie. Należy zauważyć, że wyznaczony w ten sposób błąd wynika z redukcji bazy wektorowej przyjętej do analizy i nie można go bezpośrednio interpretować jako błąd wyznaczenia przemieszczeń lub naprężeń uogólnionych.

5.4. Całkowanie numeryczne równania ruchu

Rozwiązanie numeryczne równania (5.36) uzyskuje się metodą Newmarka [20]. Iteracyjny krok czasowy Δt między chwilami t_I i t_{I+1}

$$t_{I+1} = t_I + \Delta t = t_0 + (I + 1)\Delta t \quad (5.48)$$

opiera się na rozwiązaniu układu trzech równań

$$\begin{cases} M_K \ddot{z}_K(t_{I+1}) + C_K \dot{z}_K(t_{I+1}) + K_K z_K(t_{I+1}) - P_K(t_{I+1}) = 0 \\ z_K(t_{I+1}) = z_K(t_I) + \Delta t \dot{z}_K(t_I) + \alpha (\Delta t)^2 \ddot{z}_K(t_I) + \beta (\Delta t)^2 \ddot{z}_K(t_{I+1}) \\ \dot{z}_K(t_{I+1}) = \dot{z}_K(t_I) + \frac{1}{2} \Delta t \ddot{z}_K(t_I) + \frac{1}{2} \Delta t \ddot{z}_K(t_{I+1}) \end{cases} \quad (5.49)$$

Współczynniki α i β są związane zależnością

$$\alpha + \beta = \frac{1}{2}. \quad (5.50)$$

Jeżeli znane są wartości funkcji $z_K, \dot{z}_K, \ddot{z}_K$ w chwili początkowej t_0 , to rozwiązując wielokrotnie układ równań (5.49), można wyznaczyć wartości tych funkcji w dowolnej chwili. Wartości funkcji z i jej pochodnych w chwili początkowej można wyznaczyć, rozwiązując równanie (5.34) dla $L = N$

$$z(t_0) = R^{-1} q(t_0), \quad (5.51)$$

$$\dot{z}(t_0) = R^{-1} \dot{q}(t_0), \quad (5.52)$$

$$\ddot{z}(t_0) = R^{-1} \ddot{q}(t_0). \quad (5.53)$$

Przyjęcie współczynników

$$\alpha = \beta = \frac{1}{4} \quad (5.54)$$

powoduje, że metoda całkowania jest nieograniczenie stabilna. Nie popełnia się błędu przy wyznaczaniu amplitudy, pojawia się jednak błąd fazowy. Błąd ten można redukować, zmniejszając długość kroku czasowego. Dla obciążeń harmonicznym przyjęcie 1000 kroków na długości okresu daje już zadawalające przybliżenie wyników.

Po wyznaczeniu funkcji $z_K(t)$ i zastosowaniu transformacji (5.34) otrzymuje się wartości wektora współrzędnych uogólnionych $\mathbf{q}$ w dowolnej chwili.

6. Przykłady liczbowe

6.1. Model obliczeniowy zbiornika wieżowego

Przedmiotem analizy jest żelbetowy zbiornik wieżowy wypełniony cieczą. Na model dyskretny powłoki składają się 672 trójkątne elementy skończone. W modelu obszaru cieczy na powierzchni swobodnej użyto 12 trapezowych elementów brzegowych. Łączna liczba współrzędnych uogólnionych wynosiła 984 (972 związanych z węzłami konstrukcji, 12 z elementami brzegowymi na powierzchni swobodnej cieczy). Liczbę współrzędnych na powierzchni swobodnej świadomie ograniczono. Liczba tych stopni swobody decyduje, ile form drgań własnych jest związanych z falowaniem cieczy. Aby, przy niezbyt licznych zbiorze wektorów Ritza, można było otrzymać formy drgań związanych z powłoką, należy zmniejszyć liczbę współrzędnych uogólnionych związanych z powierzchnią swobodną cieczy, które decydują o liczbie niskich częstotliwości układu.

Dane geometryczne zbiornika oraz schemat siatki elementów przedstawiono na Rys. 6.1.

Modelem materiału powłoki jest ciało sprężyste o stałych materiałowych: $E = 3 \cdot 10^7$ kPa, $\nu = 0.167$, $\rho_s = 2400$ kg/m³, $\gamma_s = 0.07$. Dla cieczy przyjęto $\rho_f = 1000$ kg/m³, $\gamma_f = \gamma_s$.

W rozdziale tym zamieszczono wyniki dwóch przykładów liczbowych. Każdy z nich rozwiązano w trzech wariantach: A – zbiornik pusty, B – zbiornik wypełniony do poziomu h_2 , C – zbiornik całkowicie wypełniony.

W obliczeniach wykonywano transformacje wektorami Ritza, każdorazowo ograniczając bazę do dwadziestu wektorów.

6.2. Wrażliwość projektowa częstotliwości drgań własnych zbiornika

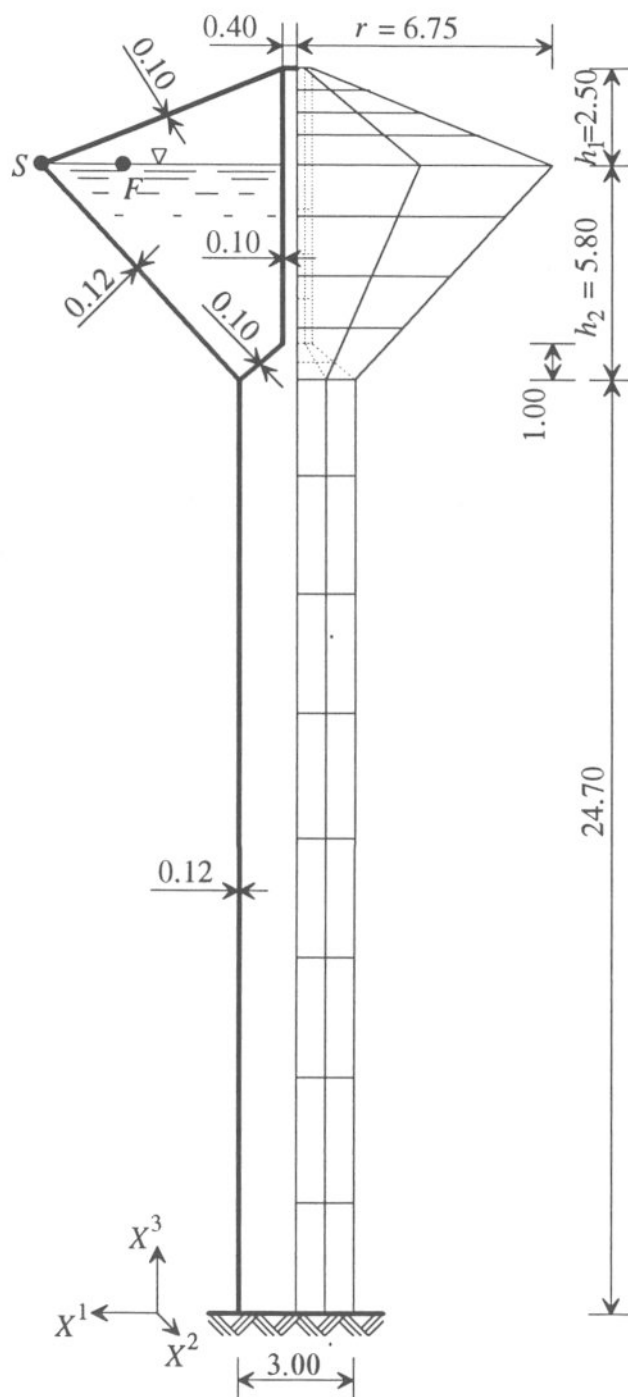
Przykład dotyczy wyznaczenia wrażliwości projektowej częstotliwości drgań własnych zbiornika wieżowego na ciecz. Analiza taka może stanowić wstępny etap zagadnienia optymalizacji i kształtowania konstrukcji.

Sformułowanie problemu wrażliwości wymaga określenia wektora zmiennych projektowych, których wpływ na zachowanie się układu będzie badany. Niech stanowią go wybrane parametry geometryczne

$$\mathbf{b} = [b_1, b_2, \dots, b_K]^T. \quad (6.1)$$

Drgania swobodne układu opisuje równanie

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0}. \quad (6.2)$$



Rys. 6.1. Geometria zbiornika. Schemat siatki elementów

Po wyznaczeniu wektorów Ritza, równanie (6.2) można przekształcić do zbioru równań postaci

$$\mathbf{K}(\mathbf{b})\mathbf{R}^I(\mathbf{b}) = \lambda_{(I)}(\mathbf{b})\mathbf{M}(\mathbf{b})\mathbf{R}^{\eta}(\mathbf{b}), \quad (6.3)$$

gdzie $I = 1, 2, \dots, L$ oraz $\lambda_I = \omega_I^2$ jest kwadratem I -tej częstotliwości drgań własnych.

Rozważa się zmianę wektora zmiennych projektowych

$$\mathbf{b}_\tau = \mathbf{b} + \tau \delta \mathbf{b}, \quad (6.4)$$

gdzie τ jest małym parametrem, a δ oznacza operator wariacji. Jeżeli równanie (6.3) pomnoży się lewostronnie przez wektor $(\mathbf{R}^I)^T$, a następnie zróżniczkuje po τ w punkcie $\tau = 0$, otrzyma się wyrażenie [8]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{b}} \left[\left(\tilde{\mathbf{R}}^I \right)^T \mathbf{K} \tilde{\mathbf{R}}^I \right] \delta \mathbf{b} + (\mathbf{R}^I)^T \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{R}^I}{\partial \mathbf{b}} \delta \mathbf{b} = \\ \frac{d\lambda_{(I)}}{d\mathbf{b}} \delta \mathbf{b} (\mathbf{R}^{\eta})^T \mathbf{M} \mathbf{R}^{\eta} + \lambda_{(I)} \frac{\partial}{\partial \mathbf{b}} \left[\left(\tilde{\mathbf{R}}^{\eta} \right)^T \mathbf{M} \tilde{\mathbf{R}}^{\eta} \right] \delta \mathbf{b} + \lambda_{(I)} (\mathbf{R}^{\eta})^T \mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{R}^{\eta}}{\partial \mathbf{b}} \delta \mathbf{b}, \end{aligned} \quad (6.5)$$

gdzie $\tilde{\mathbf{R}}^I$ oznacza wielkość stałą przy różniczkowaniu po zmiennych projektowych. Po wykonaniu niezbędnych przekształceń otrzymuje się wyrażenie na pochodną kwadratu częstotliwości drgań własnych podług zmiennych projektowych

$$\frac{d\lambda_I}{d\mathbf{b}} = \frac{d}{d\mathbf{b}} \left[\left(\tilde{\mathbf{R}}^I \right)^T \mathbf{K} \tilde{\mathbf{R}}^I \right] - \lambda_{(I)} \frac{d}{d\mathbf{b}} \left[\left(\tilde{\mathbf{R}}^{\eta} \right)^T \mathbf{M} \tilde{\mathbf{R}}^{\eta} \right]. \quad (6.6)$$

Po uwzględnieniu związku $\lambda_I = \omega_I^2$, wyrażenie na pochodną częstotliwości drgań własnych podług zmiennych projektowych przyjmie postać

$$\frac{d\omega_I}{d\mathbf{b}} = \frac{1}{2\omega_I} \frac{d\lambda_I}{d\mathbf{b}} = \frac{1}{2\omega_{(I)}} \left\{ \frac{d}{d\mathbf{b}} \left[\left(\tilde{\mathbf{R}}^{\eta} \right)^T \mathbf{K} \tilde{\mathbf{R}}^{\eta} \right] - \omega_{(I)}^2 \frac{d}{d\mathbf{b}} \left[\left(\tilde{\mathbf{R}}^{\eta} \right)^T \mathbf{M} \tilde{\mathbf{R}}^{\eta} \right] \right\}. \quad (6.7)$$

Powyższa pochodna jest miarą wrażliwości projektowej I -tej częstotliwości drgań własnych. Równanie (6.7) jest ważne w przypadku, kiedy ω_I jest pojedynczą częstotliwością drgań własnych układu. W przypadku, gdy ω_I w punkcie $\mathbf{b}$ przestrzeni zmiennych projektowych jest wielokrotną częstotliwością drgań własnych, wówczas w ogólnym przypadku pochodna częstotliwości drgań własnych istnieje, ale nie jest jednoznaczna. Zależna jest od arbitralnie obranego kierunku w przestrzeni zmiennych projektowych. Gdy krotność I -tej częstotliwości jest równa S , to w punkcie tym formalnie występuje zbiór $\{\omega_{I_1}, \omega_{I_2}, \dots, \omega_{I_K}, \dots, \omega_{I_S}\}$ częstotliwości, którym odpowiada zbiór S wektorów Ritza $\mathbf{R}^{I_K}$ ($K = 1, 2, \dots, S$).

Zgodnie z twierdzeniem Kato [14] pochodne kierunkowe dla dowolnie przyjętego kierunku $\delta \mathbf{b}$ są równe wartościom własnym macierzy

$$\mathbf{A}_{NM} = \frac{d}{d\mathbf{b}} \left[\left(\tilde{\mathbf{R}}^N \right)^T \mathbf{K} \tilde{\mathbf{R}}^M \right] \delta \mathbf{b} - \lambda_{(N)} \frac{d}{d\mathbf{b}} \left[\left(\tilde{\mathbf{R}}^N \right)^T \mathbf{M} \tilde{\mathbf{R}}^M \right] \delta \mathbf{b} \quad N, M = I_1, I_2, \dots, I_S, \quad (6.8)$$

a w takim razie

$$\det \left(\mathbf{A}_{NM} - \frac{d\lambda_N}{d\mathbf{b}} \delta \mathbf{b} \delta_{NM} \right) = 0, \quad (6.9)$$

skąd pochodna kierunkowa I_N –tej częstotliwości na kierunku $\delta \mathbf{b}$ jest równa $\frac{d\lambda_{I_N}}{d\mathbf{b}} \delta \mathbf{b}$.

Konstrukcja osiowo–symetryczna, dla której przyjęto regularny model dyskretny wzdłuż równoleżnika jest pod tym względem szczególną konstrukcją. Za wyjątkiem częstotliwości, którym odpowiadają quasi osiowosymetryczne formy własne, pozostałe częstotliwości własne są często–tliwościami wielokrotnymi, przy czym krotność S jest równa połowie liczby płaszczyzn symetrii modelu dyskretnego. Jednakże można dowieść, że jeżeli dla każdego zbioru wartości zmiennych projektowych symetrie te nie są naruszone, to wówczas wielokrotne częstotliwości drgań własnych można traktować jak częstotliwości pojedyncze i wrażliwość wyznaczać wzorami (6.6) i (6.7).

Wrażliwość liczona według wzoru (6.7) wymaga wyznaczenia częstotliwości drgań własnych oraz wektorów Ritza. W tabeli 6.1 zestawiono wartości dwudziestu najniższych częstotliwości drgań własnych uzyskanych z rozwiązania trzech wariantów. W kolumnie B gwiazdką zaznaczono częstotliwości, dla których wzbudzają się formy drgań związane tylko z falowaniem powierzchni swobodnej cieczy. Są one wyraźnie niższe od wartości związanych z formami, dla których występują drgania powłoki. Na rysunkach 6.2, 6.3 i 6.4 przedstawiono formy drgań własnych związane z pierwszą częstotliwością drgań własnych konstrukcji (w tabeli zaznaczone pogrubioną czcionką) kolejno dla przypadków A, B, C. Na rysunku 6.5 przedstawiono podstawową formę drgań własnych lustra swobodnego cieczy w zadaniu B.

W przykładzie wyznacza się wrażliwość pierwszej częstotliwości drgań własnych drgań konstrukcji powłokowej (zaznaczonej w tabeli 6.1 pogrubioną czcionką). Jako wektor zmiennych projektowych przyjmuje się wymiary geometryczne (Rys. 6.1)

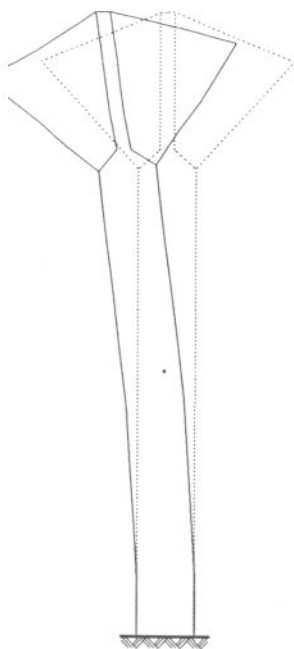
$$\mathbf{b} = [r, h_1, h_2]^T. \quad (6.10)$$

Pochodne $\frac{d}{d\mathbf{b}} = \left\{ \frac{d}{dr} \quad \frac{d}{dh_1} \quad \frac{d}{dh_2} \right\}$, występujące we wzorze (6.7), wyznaczano różnicowo, wykonując obliczenia dla kolejnych przyrostów parametrów. Aby ocenić trafność wyboru kroku różnicowego, wykonano kontrolne obliczenia przyjmując podwojone wartości przyrostu każdego parametru. W przypadku kiedy różnica norm wyznaczonych gradientów była większa niż 1% zmniejszano wielkość kroku. Uzyskane w obliczeniach wartości liczbowe pochodnych $\frac{d\omega}{d\mathbf{b}}$ zestawiono w drugim wierszu tabeli 6.2.

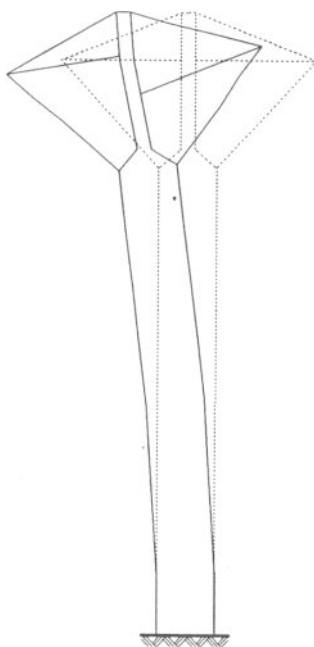
Tabela 6.1. Zestawienie częstotliwości drgań własnych

ω [Hz]		
A	B	C
8.02	1.51*	4.44
8.02	1.52*	4.44
23.5	2.01*	5.66
60.6	2.02*	23.5
60.6	2.18*	55.4
102	2.51*	55.4
115	2.97*	56.2
145	2.97*	115
157	3.09*	142
157	3.13*	142
190	3.67*	145
190	3.67*	181
200	3.97*	181
213	4.85	192
213	4.85	192
217	6.56	199
217	52.9	215
252	53.7	215
256	115	217
275	145	219

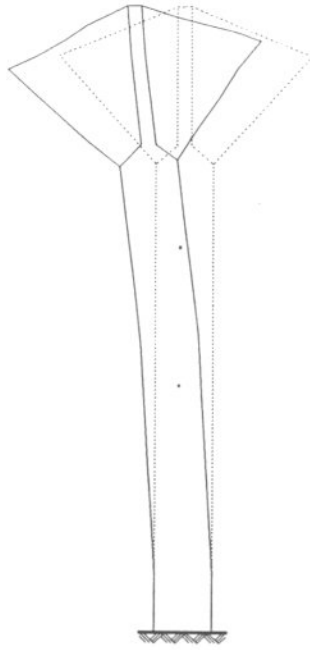
Jak pokazuje wzór (6.6) wielkościami zmiennymi przy różniczkowaniu są jedynie macierze bezwładności i sztywności, które trzeba generować wielokrotnie dla przyrostu wszystkich zmiennych projektowych. Jednak tę niedogodność rekompensuje fakt, że prezentowane podejście wymaga jedynie jednokrotnego wyznaczenia wektorów Ritza przy geometrii początkowej, co stanowi główny wysiłek numeryczny w zadaniu.



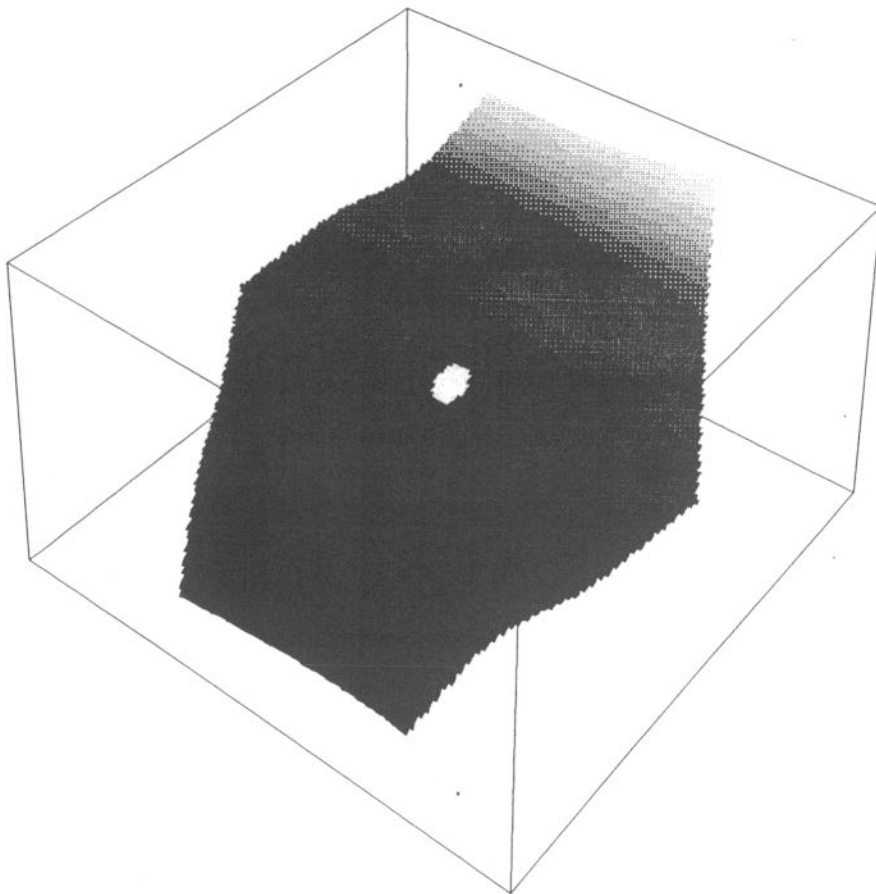
Rys. 6.2. Wariant A. Podstawowa forma drgań własnych powłoki ($\omega = 8.02$ Hz)



Rys. 6.3. Wariant B. Podstawowa forma drgań własnych powłoki ($\omega = 4.85$ Hz)



Rys. 6.4. Wariant C. Podstawowa forma drgań własnych powłoki ($\omega = 4.44$ Hz)



Rys. 6.5. Wariant B. Podstawowa forma drgań własnych powierzchni swobodnej cieczy ($\omega = 1.51$ Hz).

W celu sprawdzenia poprawności uzyskanych wyników wykonano ponowną analizę, przyjmując zmodyfikowaną geometrię konstrukcji. Nowe wymiary konstrukcji zmieniono o przyrost parametrów projektowych $\Delta \mathbf{b}$. Wektor przyrostu przyjęto proporcjonalnie do wyznaczonego gradientu ($\Delta \mathbf{b} = \alpha \frac{d\omega}{d\mathbf{b}}$). Współczynnik skali α dobrano tak, aby największa zmiana wymiaru liniowego wyniosła 10%. Dla tak określonej geometrii wykonano ponownie obliczenia i wyznaczono częstotliwości drgań własnych $\omega(\mathbf{b} + \Delta \mathbf{b})$. Następnie porównano je z przyrostem wyznaczonym różnicowo $\Delta \omega = \frac{d\omega}{d\mathbf{b}} \Delta \mathbf{b}$. Uzyskano zadawalającą zgodność wyników – różnice wyznaczonych częstotliwości nie przekraczają 0.1%. Wyniki liczbowe zamieszczono w tabeli 6.2.

Tabela 6.2. Zestawienie wyników analizy wrażliwości

		Wariant		
		A	B	C
ω	[Hz]	8.02	4.85	4.44
$\frac{d\omega}{d\mathbf{b}}$	[Hz/m]	{-0.820, -0.186, -0.492}	{-0.712, -0.040, -0.409}	{-0.561, -0.236, -0.390}
$\mathbf{b} + \Delta \mathbf{b}$	–	{0.900r, 0.977h ₁ , 0.940h ₂ }	{0.900r, 0.994h ₁ , 0.942h ₂ }	{0.900r, 0.958h ₁ , 0.930h ₂ }
$\omega(\mathbf{b} + \Delta \mathbf{b})$	[Hz]	8.83	5.52	5.06
$\omega + \frac{d\omega}{d\mathbf{b}} \Delta \mathbf{b}$	[Hz]	8.77	5.47	5.01

6.3. Analiza drgań zbiornika wywołanych wymuszeniem kinematycznym

W przykładzie analizowano drgania układu wywołane ruchem podłoża. Przyjmuje się, że wszystkie węzły podporowe przemieszczają się sztywno w kierunku osi X^1 według funkcji

$$u(t) = \begin{cases} 0.01\text{m} \cdot \sin(8\text{Hz} \cdot t) & t \in \left\langle 0, \frac{10 \cdot 2\pi}{8}\text{s} \right\rangle \\ 0 & t \notin \left\langle 0, \frac{10 \cdot 2\pi}{8}\text{s} \right\rangle \end{cases} \quad (6.11)$$

We wszystkich wariantach obciążenie przebiegało według tej samej funkcji. Częstotliwość obciążenia dobrano tak, aby była bliska podstawowej częstotliwości drgań własnych dla wariantu A. Obciążenie działa w przeciągu 7.854s, co odpowiada dziesięciu okresom. Przyjmuje się, że w chwili początkowej układ znajdował się w spoczynku.

Przyjmuje się, że wektor parametrów $\mathbf{q}$ jest sumą znanego wektora $\mathbf{q}_0$ związanego ze sztywnym ruchem układu oraz wektora $\mathbf{q}_1$ związanego z drganiami układu

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_0(t) + \mathbf{q}_1(t). \quad (6.12)$$

W wektorze $\mathbf{q}_0$ współrzędne związane z ruchem powierzchni swobodnej cieczy mają wartości zerowe, ponieważ są to przemieszczenia prostopadłe do kierunku wymuszenia. Natomiast dla parametrów węzłowych konstrukcji mamy

$${}^s\mathbf{q}^\Delta = \{u(t), 0, 0, 0, 0, 0\}^T. \quad (6.13)$$

Jeżeli przyjmiemy wygodne założenie, że tłumienie jest proporcjonalne jedynie do macierzy sztywności i nie ma innych obciążeń, to równanie ruchu (4.10) możemy zapisać w postaci

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{K}\mathbf{q}_1 = -(\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_0 + \mu\mathbf{K}\dot{\mathbf{q}}_0 + \mathbf{K}\mathbf{q}_0) = -\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_0. \quad (6.14)$$

Składniki $\mu\mathbf{K}\dot{\mathbf{q}}_0$ i $\mathbf{K}\mathbf{q}_0$ w równaniu (6.14) zostały pominięte, ponieważ wektorowa funkcja ruchu sztywnego $\mathbf{q}_0$ nie wywołuje sił węzłowych po pomnożeniu przez macierz sztywności. Po wyznaczeniu wektorów Ritza można określić główne współczynniki obciążenia dla przyjętego wymuszenia kinematycznego

$$P_K(t) = -(\mathbf{R}^K)^T \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_0(t). \quad (6.15)$$

W tabeli 6.3 przedstawiono udział wektorów Ritza w rozkładzie wektora obciążenia i błąd obciążenia bazy wektorowej w zadaniu A. Współczynnik h_K charakteryzuje udział K -tego równania ruchu (5.36) w aproksymacji wektora przemieszczenia. Wartości liczbowe tych współczynników są równe unormowanym współrzędnym rzutu wektora obciążenia na przestrzeń wektorów Ritza. Częstkowe sumy tych współczynników (trzecia kolumna w tabeli 6.3) oraz wyznaczone na ich podstawie błędy e_K pozwalają kontrolować zbieżność rozwiązania. Błąd ten systematycznie maleje w miarę wzrostu liczby wektorów Ritza i byłby on równy zeru, jeżeli liczba wektorów byłaby równa liczbie współrzędnych uogólnionych.

Na rysunkach 6.6, 6.7 i 6.8 przedstawiono przebieg drgań punktu konstrukcji S (Rys. 6.1) kolejno w kierunku X^1 , X^2 i X^3 dla zadania A. Na rysunkach 6.9, 6.10 i 6.11 pokazano analogiczne przebiegi dla wariantu B, a rysunki 6.12, 6.13 i 6.14 dotyczą zadania C. Rysunek 6.15 przedstawia przebieg drgań pionowych punktu F leżącego na powierzchni cieczy w wariacie B. Na wykresach przedstawiono drgania od momentu przyłożenia obciążenia, przez czas jego trwania oraz po ustaniu wymuszenia. W ramach każdego wariantu na wykresach przyjęto taką samą skalę przemieszczeń konstrukcji. We wszystkich przypadkach wymuszenie ustało po 200 kroku czasowym. Wykres drgań punktu powierzchni cieczy przedstawiono w 2.5 raza dłuższym przedziale czasu. Krok czasowy przy całkowaniu równania ruchu przyjęto równy jednej tysięcznej okresu wymuszenia.

Analiza przedstawionych wykresów pozwala na następujące stwierdzenia:

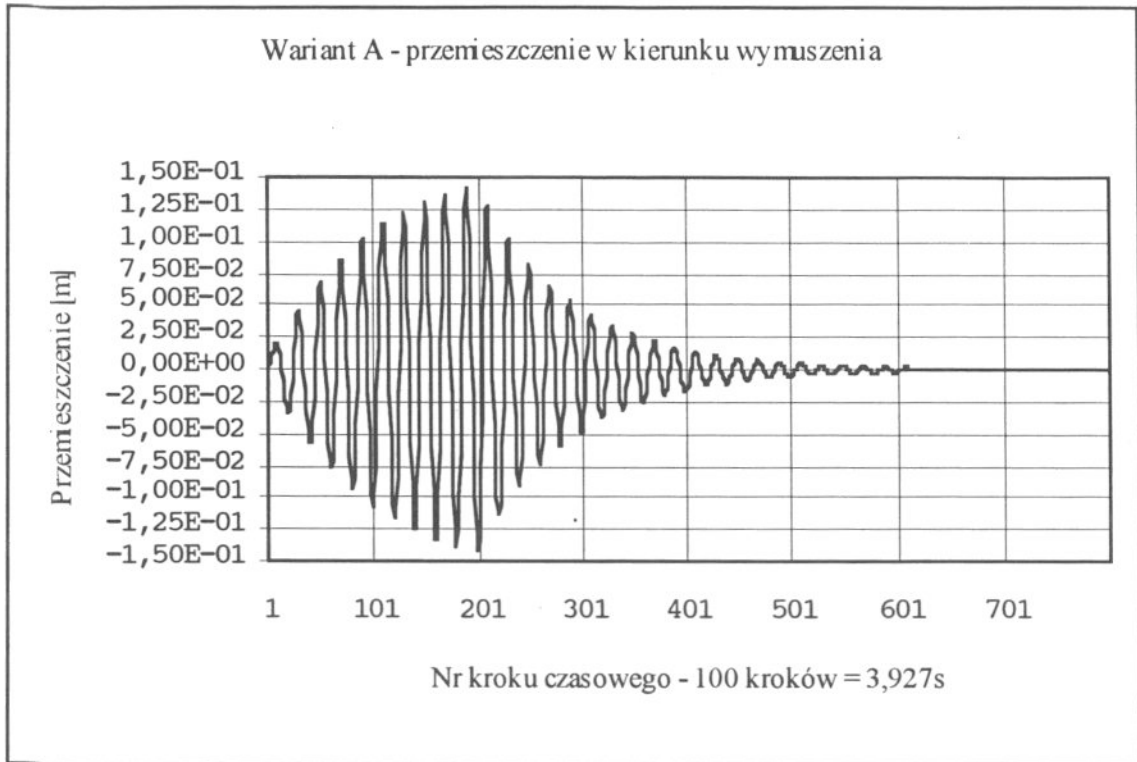
- przemieszczenia cieczy są małe i spełniają przyjęte w modelu fizycznym cieczy założenie,

- dominujące drgania obserwuje się na kierunku wymuszenia i w kierunku pionowym,
- w wariancie A przyjęta częstotliwość wymuszenia, bliska rezonansowi, powoduje narastanie amplitudy drgań,
- w przebiegach dla wariantów B i C obserwuje się drgania złożone z form o różnych częstotliwościach,
- po ustaniu wymuszenia kinematycznego drgania zanikają z eksponentialną obwiednią,
- drgania lustra swobodnego cieczy zanikają znacznie wolniej niż drgania konstrukcji i w końcowym etapie są zgodne z podstawową formą drgań cieczy.

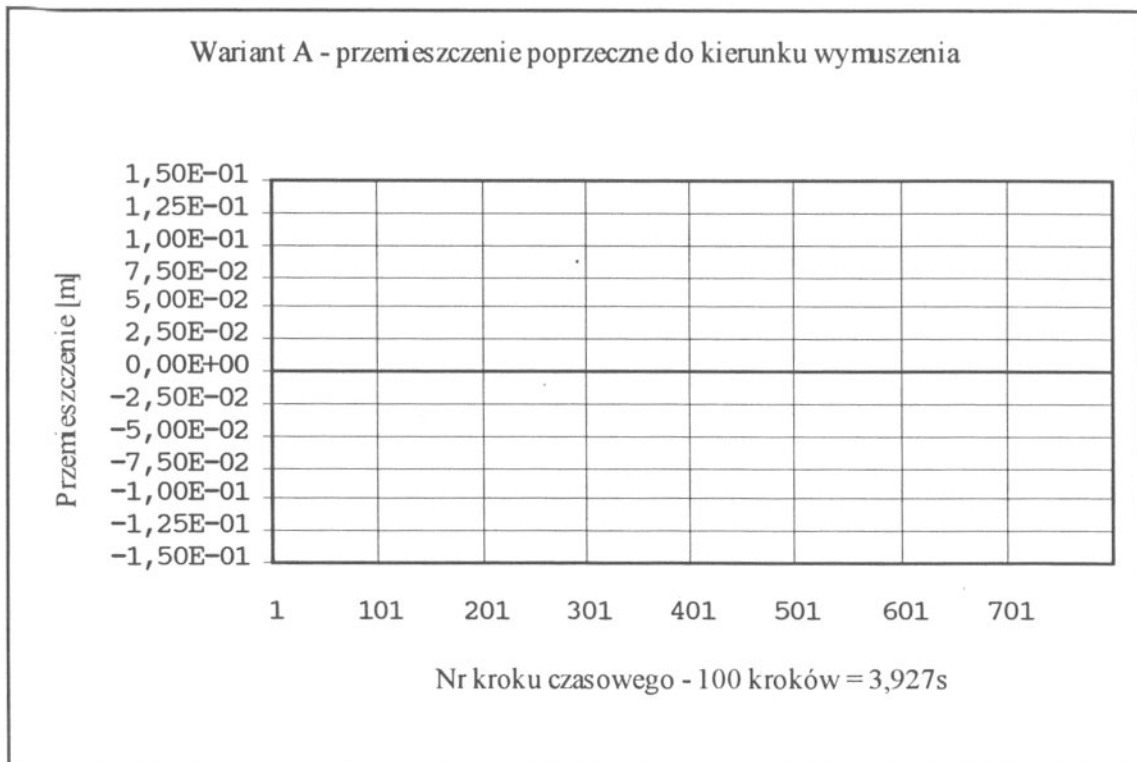
Przedstawione wnioski są zgodne z oczekiwanym zachowaniem się układu i potwierdzają poprawność zastosowanego algorytmu oraz opracowanego programu.

Tabela 6.3. Udział wektorów Ritza w rozkładzie obciążenia.

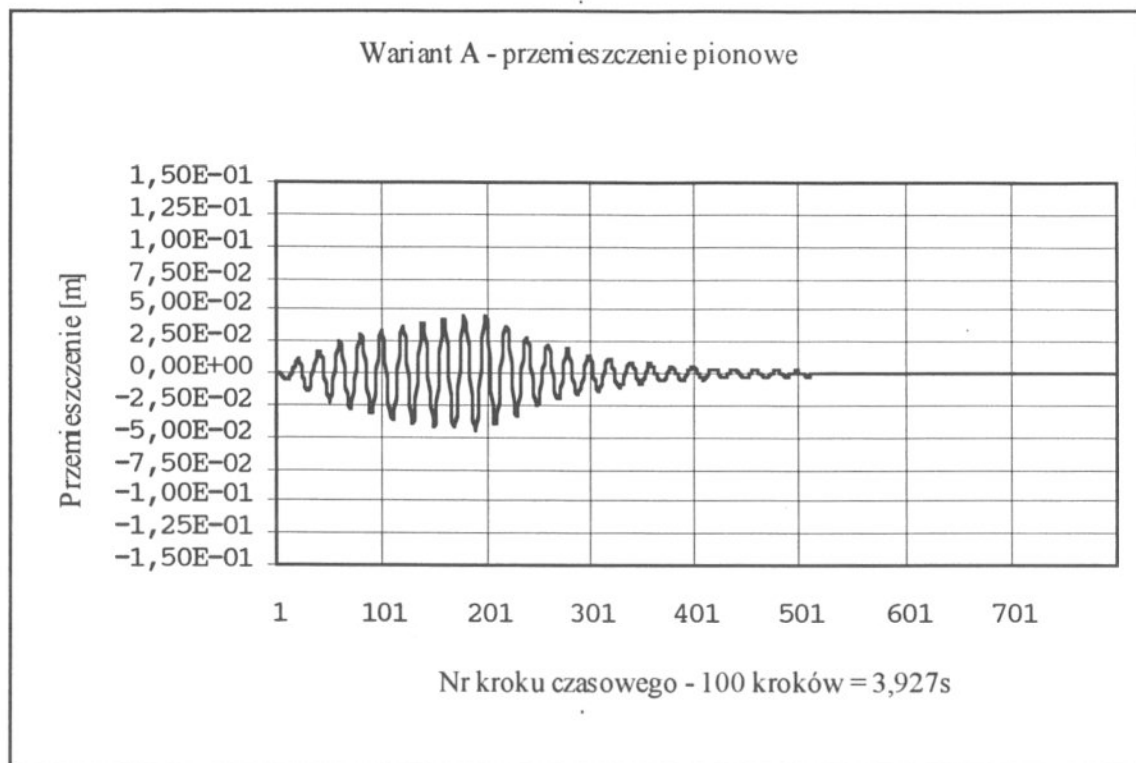
Numer wektora – K	h_K	$\sum_{j=1}^K h_j$	$e_K = 1 - \sum_{j=1}^K h_j$
1	0,46294	0,46294	0,53706
2	0,38291	0,84585	0,15415
3	0,00000	0,84585	0,15415
4	0,07168	0,91753	0,08247
5	0,00728	0,92481	0,07519
6	0,00000	0,92481	0,07519
7	0,00000	0,92481	0,07519
8	0,00000	0,92481	0,07519
9	0,00051	0,92532	0,07468
10	0,03420	0,95952	0,04048
11	0,00000	0,95952	0,04048
12	0,00000	0,95952	0,04048
13	0,00000	0,95952	0,04048
14	0,00000	0,95952	0,04048
15	0,00000	0,95952	0,04048
16	0,00000	0,95952	0,04048
17	0,00000	0,95952	0,04048
18	0,00000	0,95952	0,04048
19	0,00000	0,95952	0,04048
20	0,00000	0,95952	0,04048



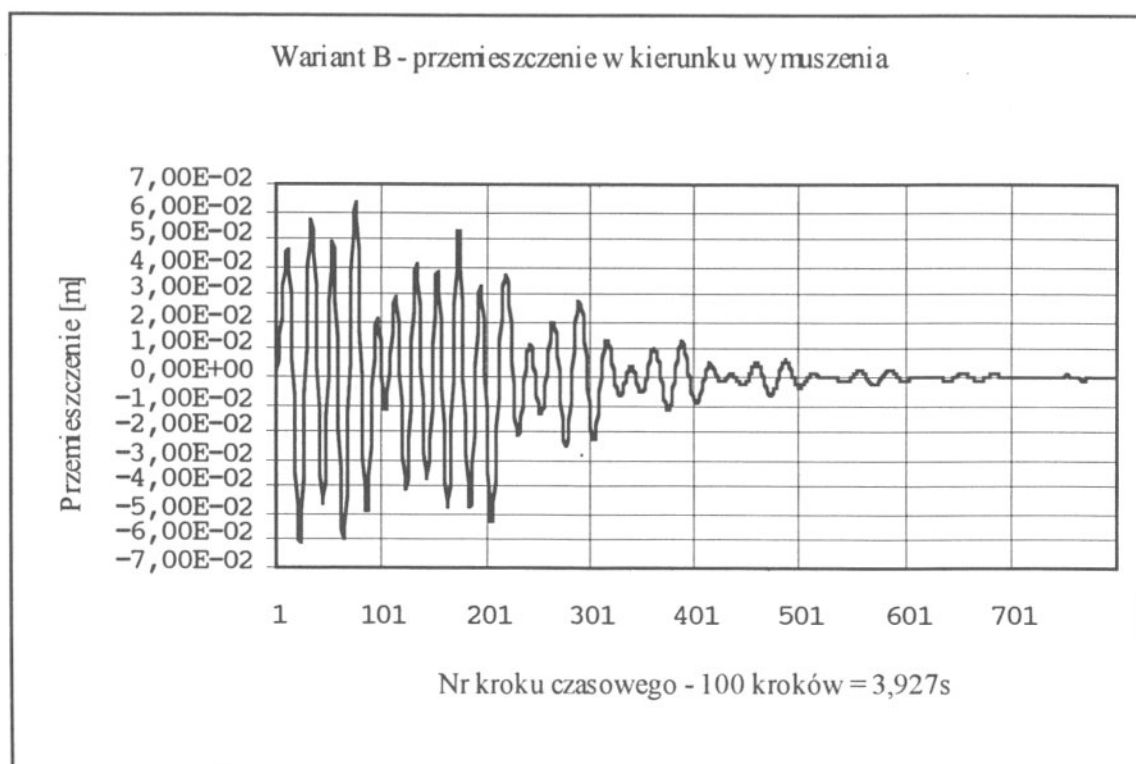
Rys. 6.6. Wariant A. Drgania poziome punktu S w kierunku wymuszenia



Rys. 6.7. Wariant A. Drgania poziome punktu S prostopadłe do kierunku wymuszenia



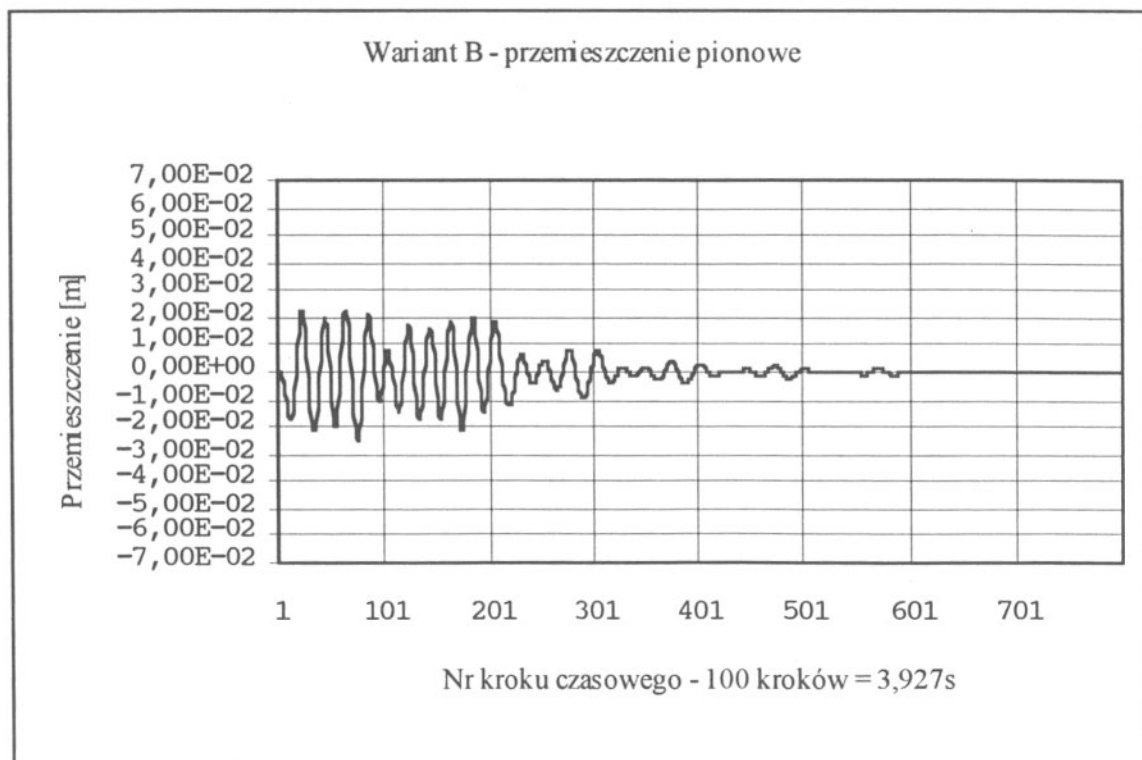
Rys. 6.8. Wariant A. Drgania pionowe punktu *S*



Rys. 6.9. Wariant B. Drgania poziome punktu *S* w kierunku wymuszenia



Rys. 6.10. Wariant B. Drgania poziome punktu S prostopadłe do kierunku wymuszenia



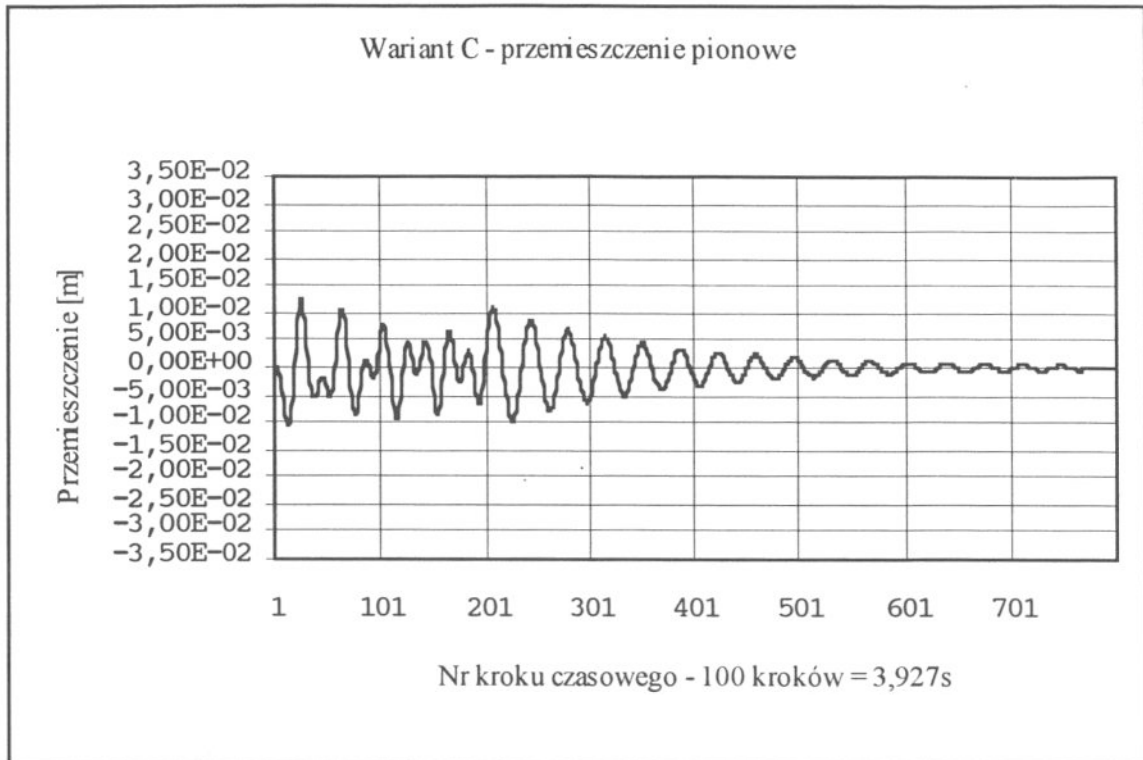
Rys. 6.11. Wariant B. Drgania pionowe punktu S



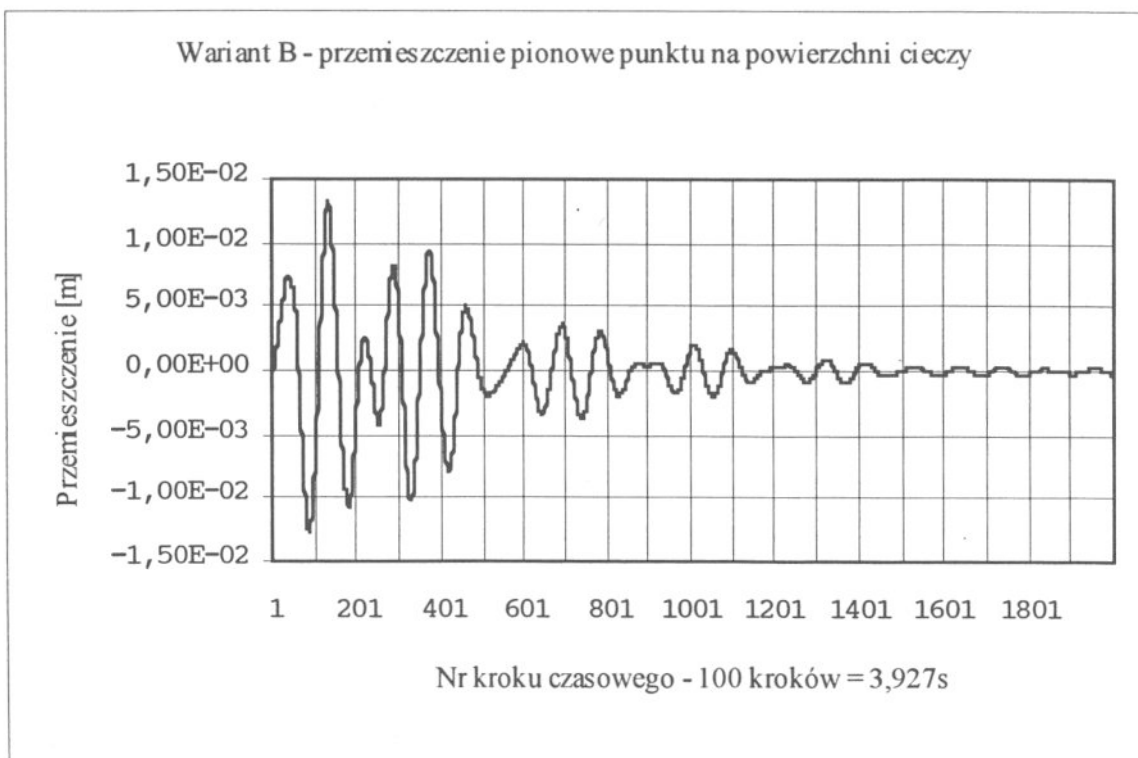
Rys. 6.12. Wariant C. Drgania poziome punktu *S* w kierunku wymuszenia



Rys. 6.13. Wariant C. Drgania poziome punktu *S* prostopadłe do kierunku wymuszenia



Rys. 6.14. Wariant C. Drgania pionowe punktu S



Rys. 6.15. Wariant B. Drgania pionowe punktu F

7. Opis programu obliczeniowego

Algorytm omówiony w rozdziałach 2÷6 zaimplementowano w programach komputerowych. Kod skompilowano pakietami Turbo Pascal 6.0 i Borland Pascal with Objects 7.0 firmy Borland International, Inc. Zestaw programów składa się z programu zarządzającego i wywoływanych przez niego programów numerycznej algebry macierzowej. Menedżer okienkowy, wykorzystujący procedury pakietu obiektowego Turbo Vision 1.0, kompiluje się do trybu rzeczywistego DOS (*DOS Real Mode*), a programy algebry do trybu chronionego DOS (*DPMI – DOS Protected Mode Interface*). Dedykowanie programów trybowi chronionemu pozwala wykorzystać całą dostępną w systemie komputerowym pamięć operacyjną (RAM).

Układ funkcjonalny systemu programów przedstawiono schematycznie na rysunku 7.1. Obszar ograniczony linią przerywaną obejmuje elementy programu głównego. Strzałki z ciągłymi liniami określają przekazywanie sterowania pomiędzy składowymi pakietu. Strzałki z przerywanymi liniami wskazują kierunki zapisywanie i pobieranie danych i wyników z plików dyskowych.

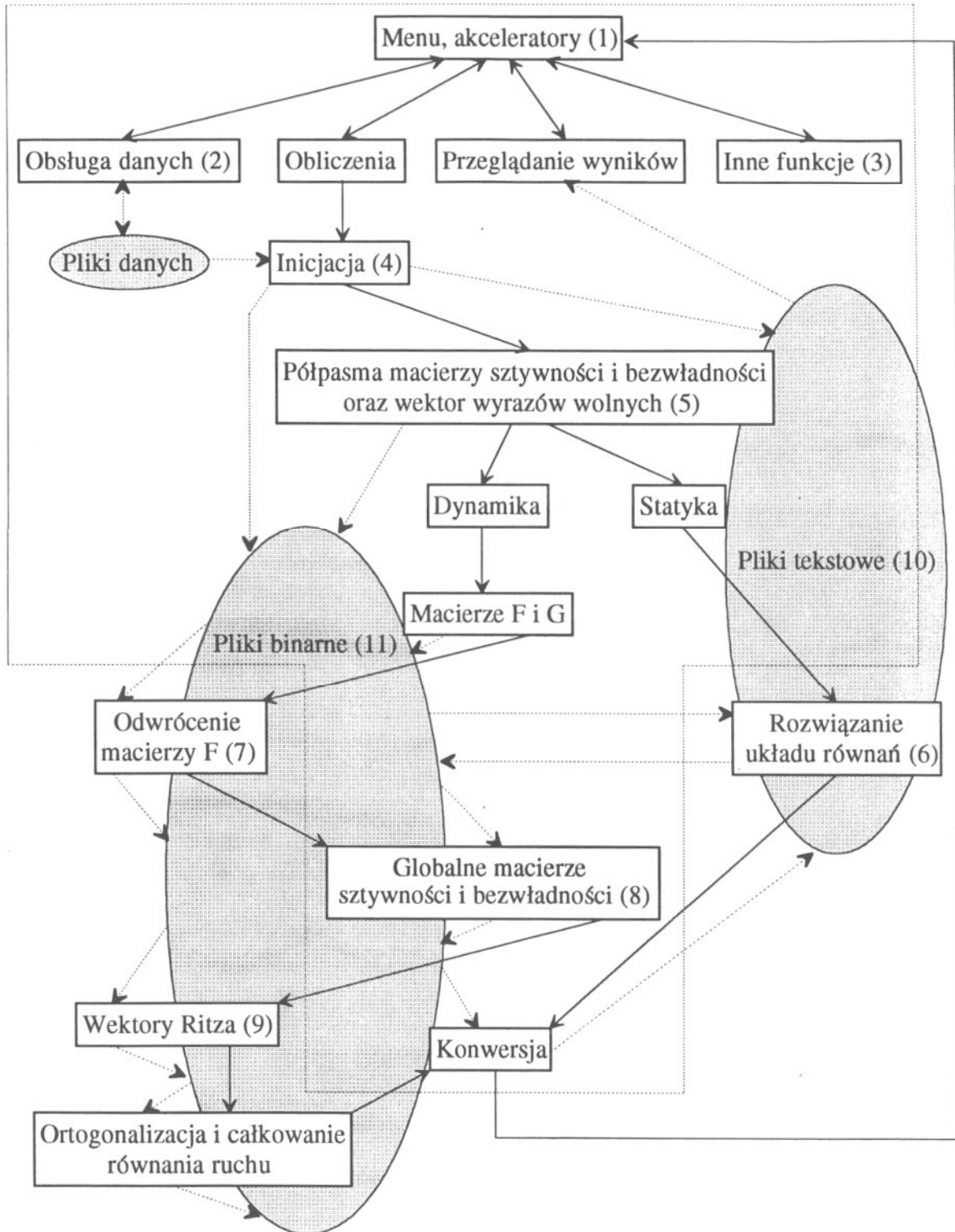
Ponumerowane na schemacie elementy systemu zostały omówione poniżej.

(1) *Menu, akcelerator*

Dostęp do funkcji systemu odbywa się za pomocą rozwijalnego menu lub klawiszy akceleratorów (tzw. *Hot key*). Fragment rozwiniętego menu przedstawiono na rysunku 7.2. Na rysunku widoczne jest również otwarte na pulpicie okno przeglądania wyników.

(2) *Obsługa danych*

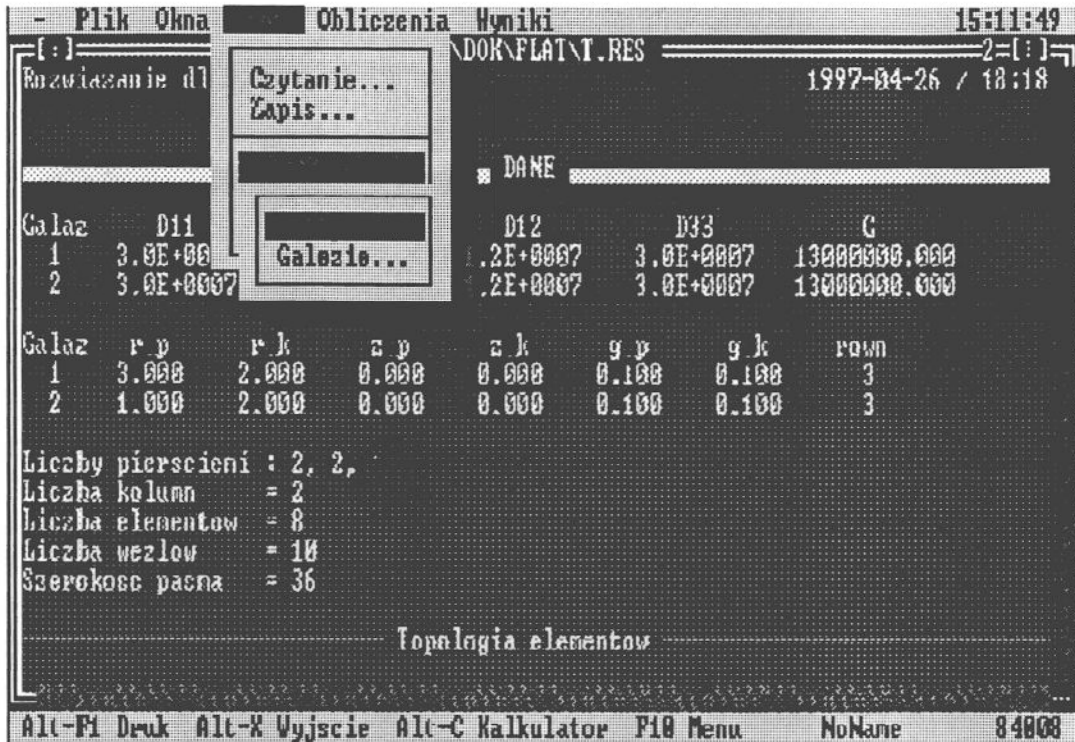
Dane są wprowadzane w oknach dialogowych. Zbiory danych przechowuje się oraz pobiera z plików dyskowych. W momencie wprowadzania danych jest automatycznie wykonywana kontrola ich poprawności. Na rysunku 7.3 pokazano przykładowe okno dialogowe kreacji danych. Jako dane wprowadza się geometrię odcinków prostych południka powłoki, ich grubości, stałe materiałowe dla przypadku ortotropii, obszar zajmowany przez ciecz i jej stałe fizyczne oraz parametry siatek MES i MEB. Do danych można dołączyć krótki opis, pozwalający na ich szybką identyfikację.



Rys. 7.1. Schemat funkcjonalny procedur i programów obliczeniowych

(3) Inne funkcje

Wśród innych funkcji i cech systemu można wymienić: zmianę aktywnego katalogu, czasowe wyjście do powłoki DOS, zarządzanie oknami, drukowanie zawartości okien tekstowych, podręczny kalkulator oraz wyświetlanie informacji o aktualnym czasie, nazwie bieżących danych i wielkości dostępnej pamięci konwencjonalnej.



Rys. 7.2. Menu i okno przeglądania wyników

(4) Inicjacja

Proces obliczeń rozpoczyna się procedurą inicjującą. Bieżące dane są konwertowane na formaty liczbowe i sprawdzana jest ponownie ich formalna poprawność. Ustalane są parametry rozmiaru zadania oraz generuje się macierze topologiczne elementów i węzłów dla siatek MES i MEB. Dane oraz macierze połączeń zapisywane są w tekstowym pliku wyników. Tworzy się plik z parametrami rozmiaru zadania do odczytu przez programy zewnętrzne.

(5) Półpasma macierzy sztywności i bezwładności oraz wektor wyrazów wolnych

Generowane są macierze sztywności i bezwładności konstrukcji powłokowej w postaci górnego półpasma. W przypadku macierzy bezwładności stosuje się podejście konsystentne. Wykorzystuje się technikę superelementu – generuje się macierze dla trapezu pokrytego dwoma parami elementów trójkątnych w lokalnym układzie współrzędnych. Następnie uzyskane struktury transformuje się do macierzy globalnych. Ze względu na identyczność trapezów opisanych w układzie lokalnym, które leżą między sąsiednimi równoleżnikami, macierze w układzie lokalnym wyznacza się jednokrotnie dla całego pasa.

(6) Rozwiązanie układu równań

Stosuje się algorytm Banachiewicza–Cholewskiego dla macierzy symetrycznej i pasmowej.

- Plik Okna Dane Obliczenia Wyniki 15:18:52

* Geometria_gniazda

Liczba oludnikow 6 Liczba wzelow :wobodnych 0

Ciecz 3 7 3

Rownolezniki

Galaz	Poczatek	Koniec	Grubosc P	Grubosc K	licz.	cecha
1	1	2	0.12	0.12	2	0
2	2	6	0.10	0.10	3	-1
3	2	3	0.12	0.12	5	1
4	6	7	0.10	0.10	5	-1
5	3	4	0.10	0.10	5	0
6	7	4	0.10	0.10	5	0
7	4	5	0.10	0.10	3	0

OK

Alt-F1 Druk Alt-X Wyjscie Alt-C Kalkulator F10 Menu B1 84688

Rys. 7.3. Okno wprowadzania danych

(7) *Odwrocenie macierzy F*

Stosuje się algorytm Gaussa z wyborem elementu maksymalnego dla macierzy pełnej i niesymetrycznej.

(8) *Globalne macierze sztywności i bezwładności*

Tworzone są kwadratowe macierze sztywności i bezwładności w pełnej bazie współrzędnych uogólnionych. Zapisywane są do struktury współczynniki z pasmowych macierzy powłoki dla czynnych stopni swobody. Generuje się i dodaje do struktury współczynniki związane z ciecżą.

(9) *Wektory Ritza*

Wektory Ritza generuje się z wykorzystaniem opisanych wcześniej własności. Równania (5.15) i (5.17), które mają tę samą macierz współczynników, rozwiązuje się, korzystając za każdym razem z wyznaczonej wcześniej odwrotności macierzy K . Macierz odwraca się metodą Gaussa z wyborem elementu maksymalnego. Po kondensacji układu równań rozwiązuje się czyste zagadnienie własne iteracyjną metodą Rayleigha. Wykonuje się projekcję wyznaczonych form własnych do oryginalnej bazy współrzędnych. Wyznacza się wagi wektorów Ritza w odwzorowaniu obciążenia.

(10) *Pliki tekstowe*

Wyniki różnych etapów obliczeń są zapisywane w plikach tekstowych. Zawierają one: wprowadzone dane, parametry rozmiaru zadania, macierze połączeń dla siatek MES i MEB, wektor obciążeń, przemieszczenia węzłowe – w wypadku rozwiązania statycznego oraz w przypadku rozwiązania dynamicznego – częstości własne, wektory własne (wektory Ritza), udziały wektorów Ritza w rozkładzie wektora obciążenia, przebiegi czasowe drgań wybranych współrzędnych uogólnionych. Pliki tekstowe mogą być przeglądane i drukowane przy użyciu procedur wbudowanych w program główny.

(11) *Pliki binarne*

Struktury danych oraz wyniki generowane i obliczane w procedurach menedżera i programach zewnętrznych zapisywane są w binarnych plikach dyskowych. Umożliwia to wymianę danych między elementami składowymi systemu.

Programy diagnozują występowanie błędów. Można do nich zaliczyć: brak formalnej poprawności wprowadzanych danych, niekompletność danych, brak wystarczającej pamięci do zainicjowania struktur niezbędnych danych, niespełnienie wymogów formalnych dla macierzy (osobliwość, brak dodatniej określoności). W przypadku rozpoznania błędu procedury są przerywane i generowany jest komunikat mówiący o wykrytym błędzie.

Programy zewnętrzne są wywoływane z programu głównego i po zakończeniu działania przekazują do niego automatycznie sterowanie. Do wywoływanych programów w nagłówku przesyłana jest nazwa danych i na tej podstawie identyfikują one pliki z parametrami rozmiaru zadania i danymi, które są następnie przez nie przetwarzane. Na tej podstawie generują pliki wynikowe o podanej nazwie. Takie ustawienie systemu umożliwia przetwarzanie danych etapami. Zadanie można przerwać w dowolnym momencie i później je wznowić. Można również uruchomić każdy z programów zewnętrznych bez udziału programu głównego, podając w linii poleceń DOSa jako parametr jego wywołania nazwę danych.

Przeliczenie przykładu drgań zbiornika wymagało przejścia pełnej ścieżki dla przypadku rozwiązania dynamicznego. Analizę wrażliwości przeprowadzono w następujący sposób. Najpierw uruchomiono ścieżkę dynamiki z pominięciem całkowania równania ruchu. Następnie wykonano tę samą ścieżkę dla przyrostów parametrów projektowych z pominięciem dodatkowo etapu wyznaczania wektorów Ritza. W ten sposób niezmiennie zostały wielkości stałe w wyrażeniu na pochodne (6.7). Po ortogonalizacjach występujących w tym wzorze w prosty sposób – różnicowo można wyznaczyć wrażliwość. Ścieżka statyki została stworzona w celu testowania różnych typów elementów skończonych.

Jak wspomniano w punkcie 2.3.2 testowano różne typy elementów skończonych. Podstawowym kryterium przy wyborze elementu była dobra zbieżność rozwiązania zadań statycznych. Wpływ na rozwiązanie dynamiczne (sprawdzano częstości drgań własnych) różnych typów elementów był niewielki. Nie zauważono znaczących różnic między podejściem konsystentnym i z masami skupionymi. Wynika stąd wniosek, że testowane elementy miały większy wpływ na postać macierzy sztywności niż bezwładności. Dlatego zastosowano takie kryterium wyboru elementu. Uzyskiwane wyniki porównywano z komercyjnymi pakietami MES i rozwiązaniami analitycznymi dla prostych przypadków (np. pręt o przekroju cienkiej rurki), które można było modelować stosowanymi klasami powierzchni i elementami.

Szybkość działania programów oceniano na podstawie wyświetlanych na monitorze liczników umieszczonych w głównych pętlach procedur numerycznych. Na tej podstawie typowano fragmenty kodu, które opłaca się optymalizować. Główne kierunki optymalizacji wiązały się mini-malizacją transferów danych z i do plików dyskowych oraz z możliwie rzadkim pozycjonowaniem głowicy – transmisja danych zajmujących kolejne pozycje w pliku. Nie można było przyspieszyć odczytu i zapisu, jak również zmniejszyć zapotrzebowania na pamięć, przez zastosowanie możliwie krótkich formatów liczb. Ze względu na znaczne różnice, dochodzące do kilku rzędów, współczynników macierzy sztywności w częściach dotyczących powłoki i cieczy, koniecznym było użycie 8 bajtowych liczb rzeczywistych (typ *Double*).

Zestaw programów liczy razem ok. 13500 linii kodu źródłowego. Przeliczenie pojedynczego przykładu wymagało 64MB RAM i 40MB HDD. Czas obliczeń pełnej ścieżki dynamiki wynosił ok. 8 godzin na komputerze PENTIUM 233 MHz.

8. Podsumowanie

W pracy przedstawiono opis zagadnienia dynamicznego związanego z interakcją dwóch ośrodków: sprężystego zbiornika powłokowego i wypełniającego go płynnego medium. Sformułowano rozłączne modele fizyczne i dyskretne konstrukcji i cieczy oraz globalny model dyskretny połączonego układu. W zakresie metod numerycznych zastosowano podejście hybrydowe: równania dyskretne powłoki są zapisywane przy użyciu metody elementów skończonych, w odniesieniu do opisu płynu stosuje się metodę elementów brzegowych.

Dla zbiornika, który potraktowano jako cienką powłokę obrotową, przedstawiono model fizyczny. W szczególności: wyznaczono wielkości geometryczne powierzchni obrotowej parametryzowanej w krzywoliniowym układzie współrzędnych związanym z kierunkami głównych krzywizn, określono współrzędne liniowego tensora odkształcenia przy założeniu kinematycznym Kirchhoffa–Love'a, podano operator związków geometrycznych we współrzędnych fizycznych, wyprowadzono równania równowagi i naprężeniowe warunki brzegowe, wyznaczono związki konstytutywne we współrzędnych fizycznych dla liniowo–sprężystego materiału. Na podstawie sformułowanego ogólnie modelu fizycznego opracowano szczegółowy model dyskretny metody elementów skończonych. Podano opis elementu skończonego wraz z funkcjami bazowymi oraz przejście z jego sformułowania lokalnego do globalnego dla całej konstrukcji.

Przedstawiono modele fizyczne idealnej, nielepkiej i liniowej cieczy bez oraz przy założeniu jej nieściśliwości. Do opracowania modelu numerycznego przyjęto, dającą znaczne uproszczenie opisu, ciecz nieściśliwą. Dla tego przypadku równanie różniczkowe zastąpiono równoważnym całkowym sformułowaniem brzegowym, dla którego opisano model numeryczny metody elementów brzegowych.

Określenie warunków brzegowych dla cieczy na powierzchni kontaktu z konstrukcją umożliwiło połączenie rozłącznych modeli numerycznych obu ośrodków. Bilans energii pozwolił na uzyskanie dynamicznego równania ruchu układu w klasycznej postaci. Podano algorytm generowania wektorów Ritza, służących do ortogonalizacji równania ruchu. Określono ich udział w rozkładzie wektora obciążenia. Rozseparowane równania ruchu całkowano metodą Newmarka.

W opinii autora należy podkreślić następujące wyniki i wnioski płynące z niniejszej pracy.

Przyjęcie założenia o nieściśliwości płynu znacznie upraszcza zagadnienie i sprowadza oddziaływanie hydromechaniczne cieczy do uwzględnienia tzw. "masy dodanej". Pozwala ono na

zastąpienie cząstkowego czasoprzestrzennego operatora różniczkowego operatorem Laplace'a. Jego konsekwencją jest, że macierze sztywności i bezwładności cieczy mają stałe i niezależne od częstotliwości współczynniki.

Sformułowany model dyskretny układu konstrukcja sprężysta – ciecz charakteryzuje się dużą przejrzystością. Można w nim wyraźnie wyróżnić rozłączne modele każdego z ośrodków wraz z dotyczącymi ich warunkami brzegowymi oraz równania je sprzęgające. Przedstawione sformułowanie hybrydowe pozwala w jednolity sposób opisać złożony układ i niezależnie od stopnia wypełnienia zbiornika prowadzi ono do klasycznej postaci równania ruchu.

Zastosowanie MEB do dyskretyzacji trójwymiarowego obszaru zajmowanego przez ciecz pozwala w znaczny sposób zredukować liczbę współrzędnych uogólnionych w stosunku do podejścia MES. Jest to na tyle istotne, gdyż rozwiązanie równania ruchu w dziedzinie czasu wiąże się z dużym wysiłkiem numerycznym i znacznymi czasami obliczeń, tak że każda redukcja rozmiaru zadania jest pożądana. Dyskretyzację MEB można bez ograniczeń i szczególnych trudności stosować w każdym liniowym zadaniu opisującym jednorodny ośrodek.

Pomimo, że wektory własne mają duże znaczenie dla zrozumienia charakteru dynamicznej pracy układu konstrukcyjnego, okazuje się, że nie stanowią najlepszej z możliwych do przyjęcia baz wektorowych do ortogonalizacji równania ruchu. Zastosowanie prostych do wygenerowania wektorów Ritza, przy znacząco mniejszych nakładach, prowadzi do lepszego opisu zagadnienia. Zdefiniowana norma błędu pozwala kontrolować liczbę niezbędnych do uwzględnienia wektorów, a nawet dokonać selekcji wektorów, które zostaną użyte w rozwiązaniu. Ponadto w wyniku zaprezentowanego algorytmu otrzymuje się poprawne wartości najniższych częstości własnych – w tej liczbie ile wektorów Ritza zostało wykorzystanych w analizie. Należy również zaznaczyć, że przedstawione podejście nie ogranicza się tylko do rozwiązania układów konstrukcyjnych, czy układów konstrukcja–ciecz. Każde zagadnienie, którego analiza wymaga rozwiązania zagadnienia własnego, może być polem zastosowania tego algorytmu.

Zaprezentowane w pracy przykłady praktycznych zadań dynamiki pokazują, że implementacja komputerowa przedstawionego algorytmu jest możliwa i daje użyteczne wyniki. Dostępne obecnie komputery PC posiadają moc obliczeniową i parametry niezbędne do rozwiązania średniej wielkości zadań. Opracowany zestaw programów może być rozbudowywany w razie potrzeby rozwiązania zagadnień o innym charakterze.

Przedstawione uwagi pozwalają na stwierdzenie, że postawione na wstępie cele pracy zostały zrealizowane, a sformułowane tezy udowodnione.

W opinii autora jako oryginalne elementy pracy można wymienić:

- sformułowanie jednolitego algorytmu hybrydowego MES–MEB dla zbiorników na ciecz i doprowadzenie do klasycznej postaci równania ruchu niezależnie od stopnia wypełnienia zbiornika,
- użycie w analizie zagadnienia FSI transformacji wektorami Ritza,
- wyeliminowanie osobliwości macierzy wpływu $\mathbf{F}$ przez ustalenie wartości funkcji potencjału prędkości w wybranym węźle w opisie cieczy,
- opracowanie własnych programów obliczeniowych dla sprzętu komputerowego klasy PC,
- rozwiązywanie zadań dotyczących analizy zbiorników wieżowych,

Kontynuacja badań przedstawionych w pracy może dotyczyć następujących zagadnień:

- dalsze testowanie elementów skończonych, w szczególności opracowanie krzywoliniowego elementu sześcioparametrowego z krzywizną w kierunku równoleżnika,
- wzbogacenie modeli fizycznych o nieliniowości geometryczne dotyczące odkształceń powłoki, członu konwekcyjnego w pochodnej materialnej pola prędkości cieczy, opracowanie dla nich modeli numerycznych i rozwiązywanie zagadnień nieliniowych,
- uwzględnienie dużych wychyleń w ruchu cieczy, a co za tym idzie uaktualnianie zakresu powierzchni kontaktu konstrukcji i cieczy w historii procesu,
- zastosowanie w modelu dyskretnym MEB dokładniejszej (wyższego rzędu) aproksymacji parametrów węzłowych,
- opracowanie modelu numerycznego MEB dla cieczy ściśliwej, porównanie jego wyników z wynikami obecnej pracy, określenie warunków stosowalności założenia nieściśliwości,
- dalsza optymalizacja kodu programów pod względem szybkości, ewentualne wykorzystanie kompilatorów 32-bitowych (np. FORTRAN, C++),
- zbudowanie modeli fizycznych i numerycznych uwzględniających interakcję konstrukcji z podłożem gruntowym.

Autor składa serdeczne podziękowania Panu Profesorowi Piotrowi Konderli za opiekę merytoryczną, wyznaczanie kierunków badań i liczne pomocne wskazówki szczegółowe, Panu Doktorowi Kazimierzowi Myśleckiemu za udostępnienie procedur numerycznych pakietu liniowej algebry macierzowej, pomoc w testowaniu programów i weryfikacji wyników numerycznych, udostępnienie sprzętu komputerowego oraz wszystkim kolegom i współpracownikom z Zakładu Wytrzymałości Materiałów i Instytutu Inżynierii Lądowej, których życzliwe i cenne uwagi przyczyniły się do powstania w tej formie niniejszej pracy.

Literatura

1. Ali A., Rajakumar C., Yunus S. M., On the formulation of the acoustic boundary element eigenvalue problems, *Int. J. Num. Meth. Engng*, **31**, 1271–1282 (1991).
2. Amini S., Harris P. J., Wilton D. T., Coupled boundary and finite element methods for solution of the dynamic fluid–structure interaction problem, Springer–Verlag, Berlin.
3. Arnold R. R., Citerley R. L., Chargin M., Galant D., Application of Ritz vectors for dynamic analysis of large structures, *Comput. Struct.*, **21**(5), 901–907 (1985).
4. Banerjee P. K., Butterfield R., Boundary element methods in engineering science, McGraw–Hill Book Company, London 1981.
5. Brebbia C. A., Telles J. C. F., Wrobel L. C., Boundary element techniques. Theory and applications in engineering, Springer–Verlag, Berlin 1984.
6. Dacko M., Zastosowanie metody elementów skończonych do analizy konstrukcji powłokowo–prętowych, *Mechanika i komputer*. t. 5 – Metody numeryczne w teorii konstrukcji, 5–96, PWN, Warszawa–Poznań 1983.
7. Hamdi A. M., Ousset Y., Verchery G., A displacement method for the analysis of vibrations of coupled fluid–structure systems, *Int. J. Num. Meth. Engng*, **13**, 139–150 (1978).
8. Haug E. J., Choi K. K., Komkov V., Design sensitivity analysis of structural system, Academic Press Inc., London 1986.
9. Hung H. X., Hien T. D., Kleiber M., Dynamic analysis of fluid–structure interaction problem by mode superposition method, X Polish Conference Computer Methods in Mechanics, Świnoujście 1991, 269–276.
10. Hung H. X., Hien T. D., Kleiber M., Dynamiczna analiza konstrukcji współpracujących z cieczą, *Mechanika i komputer*, t. 10, 169–191, PWN, Warszawa 1991.

11. Jeans R. A., Mathews I. C., Solution of fluid–structure interaction problems using a coupled finite element and variational boundary element technique, *J. Acoust. Soc. Am.*, **88**(5), 2459–2466 (1990).
12. Kamiya N., Andoh E., Helmholtz eigenvalue analysis by boundary element method, *J. Sound Vib.*, **160**(2), 279–287 (1993).
13. Kasprzak T., Konderla P., Waśniewski G., Dynamiczna analiza zbiorników wypełnionych cieczą, XL KN KILiW PAN i KN PZITB, Krynica 1994, t. 2 Teoria Konstrukcji, 99–106.
14. Kato T., Perturbation theory for linear operators, Springer – Verlag, Berlin and New York 1976.
15. Konderla P., Nieliniowe rozwiązanie powłoki o kształcie hiperboloidy jednopowłokowej. Część I. Obciążenie osiowo–symetryczne, *Archiwum Inżynierii Lądowej* **XX**(3), 501–515 (1974).
16. Konderla P., Nieliniowe rozwiązanie powłoki o kształcie hiperboloidy jednopowłokowej. Część II. Obciążenie niesymetryczne, *Archiwum Inżynierii Lądowej* **XX**(3), 517–533 (1974).
17. Konderla P., Waśniewski G., Redukcja bazy współrzędnych uogólnionych w dynamicznej analizie konstrukcji, VIII Sympozium Wpływy Sejsmiczne i Parasejsmiczne na Budowle, Kraków Listopad 1997, 65–67.
18. Kondo H., Yamamoto S., Sasaki Y., Fluid–structure interaction analysis program for axisymmetric structures, *Int. J. JSME, Series III*, **33**(3), 315–322 (1990).
19. Korn G. A., Korn T. M., Mathematical handbook, McGraw–Hill Book Company, New York 1968.
20. Langer J., Dynamika budowli, Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1980.
21. Liu K. W., Chang H., A method of computation for fluid structure interaction, *Comput. Struct.*, **20**(1–3), 311–320 (1985).
22. Liu K. W., Chang H., On a numerical method for liquid filled systems, *Comput. Struct.*, **23**(5), 671–677 (1986).
23. Lou M., Ghobarah A., Aziz T. S., Application of Wilson–Ritz vectors in dynamic substructuring, *Int. J. Solids Structures*, **30**(22), 3159–3170 (1993).

24. Mikami T., Yoshimura J., A numerical method for analyses of free vibrations of rotational shells partially filled with liquid, Trans. of the 10th SMiRT Conference, Los Angeles 1989, t. B, 323–328.
25. Morino L., Boundary integral equations in aerodynamics, Appl. Mech. Rev., **46**(8), 445–466 (August 1993).
26. Müller W. C., Simplified analysis of linear fluid–structure interaction, Int. J. Num. Meth. Engng, **17**, 113–121 (1981).
27. Naghdi P. M., Foundations of elastic shell theory, w Progress in solid mechanics, Vol. IV edited by Sneddon I. N., Hill R., North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1963.
28. Petyt M., Lim S. P., Finite element analysis of the noise inside a mechanically exited cylinder, Int. J. Num. Meth. Engng, **13**, 109–122 (1978).
29. Poterasu V. F., Lorenz P., Mihalache N., Computer simulation of accelerated fluids: behaviour in elastic containers, Trans. of the 12th SMiRT Conference, Stuttgart 1993, t. B, 25–30.
30. Rangette A. M., Calculation of the added mass matrix of fluid filled structures by a boundary element method, X SMiRT Conference, Los Angeles 1989, t. B, 7–11.
31. Rymarz Cz., Mechanika ośrodków ciągłych, PWN, Warszawa 1993.
32. Schulkes R. M. S. M., Fluid oscilations in an open, flexible container, J. Eng. Math., **24**, 237–259 (1990).
33. Seybert A. F., Wu T. W., Li W. L., A coupled FEM/BEM for fluid–structure interaction using Ritz vectors and eigenvectors, J. Vib. Acoust., **115**, 152–158 (1993).
34. Sharan S. K., Gladwell G. M. L., A general method for the dynamic response analysis of fluid–structure systems, Comput. Struct., **21**(5), 937–943 (1985).
35. Taylor R. E., Waite J. B., The dynamics of offshore structures evaluated by boundary integral techniques, Int. J. Num. Meth. Engng, **13**, 73–92 (1978).
36. Touhei T., Ohmachi T., FE–BE method for dynamic analysis of dam–foundation–reservoir systems in the time domain, Earthquake Eng. Struct. Dyn., **22**(3), 195–209 (1993).

37. Von Estorff O., Antes H., On FEM–BEM coupling for fluid–structure interaction analyses in the time domain, *Int. J. Num. Meth. Engng*, **31**, 1151–1168 (1991).
38. Wilson E. L., Yuan M.–W., Dickens J. M., Dynamic analysis by direct superposition of Ritz vectors, *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, **10**, 813–821 (1982).
39. Wilton D. T., Acoustic radiation and scattering from elastic structures, *Int. J. Num. Meth. Engng*, **13**, 123–138 (1978).
40. Zhu F., Orthogonality of wet modes in coupled vibration, *J. Sound Vib.*, **146**(3), 439–448 (1991).
41. Zhu F., Rayleigh quotients for coupled free vibrations, *J. Sound Vib.*, **171**(5), 641–649 (1994).
42. Zienkiewicz O. C., Bettess P., Fluid–structure dynamic interaction and wave forces. An introduction to numerical treatment, *Int. J. Num. Meth. Engng*, **13**, 1–16 (1978).
43. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., *The finite element method*, 4th ed. Vol. 1, Vol. 2, McGraw–Hill Book Company, London 1989, 1991.

Załącznik. Oznaczenia

Z.1. Zasady ogólne

Stosuje się następujące zasady oznaczeń:

- skalary, liczby, zmienne jednowymiarowe i funkcje zapisuje się normalną czcionką (mała lub duża, alfabetem łacińskim–kursywą lub greckim), wielkości wskaźnikowe lub wielowymiarowe czcionką pogrubioną:

α – liczba,

ρ – gęstość,

σ – tensor naprężenia,

b – druga forma podstawowa powierzchni,

K – macierz sztywności,

- obiekty geometryczne zapisuje się małymi literami, macierze liczbowe (współczynników) dużymi literami, wektory literami małymi lub dużymi,

wyjątek – symbole Christoffela oznacza się tradycyjnie dużą literą gamma $\Gamma_{\alpha\beta\gamma}$,

- indeksy będące wskaźnikami (osi, elementu macierzy) umieszcza się z prawej strony litery rdzeniowej, w przypadku tensorów i macierzy indeksy nie będące wskaźnikami osi lub elementu również po lewej stronie, indeksy będące zmiennymi – wskaźnik osi, adres elementu macierzy lub wektora – w przypadku alfabetu łacińskiego zapisuje się kursywą:

g_{ij} – element tensora metrycznego – wskaźniki odnoszą się do osi układu współrzędnych,

K_{NM} – element macierzy sztywności – wskaźniki określają adres elementu,

^s**K** – macierz sztywności konstrukcji – indeks "s" jest komentarzem,

- elementy obiektów wielowymiarowych oznacza się normalną czcionką (w przypadku alfabetu łacińskiego – kursywą) z indeksami,
- indeksy tensorów oznacza się małymi literami łacińskimi gdy przebiegają zakres 1..3, greckimi 1..2; indeksy niezwiązane z osiami układów współrzędnych zapisuje się dużymi literami:

$g_{\alpha\beta}$ – element tensora metrycznego,

$K_{\Delta\Gamma}$ – element macierzy sztywności,

uwaga – **g_i** – wektor bazowy oznacza się czcionką pogrubioną (łącznie z nazwą osi),

- operatory zapisuje się czcionką normalną:

dx – różniczka zmiennej x ,

- dla obiektów geometrycznych dolne i górne indeksy rozróżniają wielkości kowariantne i kontrawariantne, pochodną cząstkową oznacza się przecinkiem, pochodną kowariantną – kreską pionową, pochodną cząstkową po czasie – kropką nad literą rdzeniową, pochodną materialną dużymi literami D:

$\sigma^{\alpha\beta}|_s$ – pochodna kowariantna tensora dwukrotnie kontrawariantnego,

$\frac{D}{Dt}(\cdot)$ – pochodna materialna,

- umowę sumacyjną stosuje się tylko dla powtórzonych indeksów na różnych poziomach, w obiektach nie związanych z osiami układów współrzędnych górne i dolne indeksy stosuje się wyłącznie do umowy sumacyjnej – nie ma różnicy między wartościami takich elementów, podkreślenie indeksu lub ujęcie w nawias okrągły oznacza brak sumowania:

g^{ii} – element z przekątnej,

$\sum_{i=1}^3 g^{ii}$ – ślad tensora metrycznego,

$g_i^{(i)}$ – w wyrażeniu nie ma sumowania,

- układy odniesienia dla obiektów geometrycznych zaznacza się znaczkiem nad literą rdzeniową (nadmaksymalizacja – konfiguracja początkowa, bez żadnego znaczka – konfiguracja aktualna),
- współrzędne fizyczne tensorów oznacza się przez ujęcie ich w ostre nawiasy i umieszcza się je zwykle na poziomie dolnych indeksów, chyba że potrzeba inaczej ze względu na umowę sumacyjną:

$b_{\langle ij \rangle}$.

Z.2. Oznaczenia szczegółowe

W rozdziałach pracy przyjęto następujące oznaczenia:

- geometria powierzchni obrotowej i model fizyczny powłoki

$\{X^1, X^2, X^3\}$ – kartezjański układ współrzędnych,

$\{\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3\}$ – krzywoliniowy układ współrzędnych związany z głównymi kierunkami krzywizn,

$\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}$ – wektory położenia punktów powłoki w konfiguracji początkowej i aktualnej,

$\bar{\mathbf{r}}, \mathbf{r}$ – wektory położenia punktów powierzchni środkowej powłoki w konfiguracji początkowej i aktualnej,

$\mathbf{e}_i$ – wersory kartezjańskiego układu współrzędnych,

$\bar{\mathbf{g}}_i, \mathbf{g}_i$ – wektory bazowe w konfiguracji początkowej i aktualnej,

$\bar{\mathbf{a}}_\alpha, \mathbf{a}_\alpha$ – wektory bazowe na powierzchni środkowej w konfiguracji początkowej i aktualnej,

$\bar{\mathbf{a}}_3, \mathbf{a}_3$ – jednostkowy wektor normalny do powierzchni środkowej w konfiguracji początkowej i aktualnej,

$\bar{\mathbf{g}}, \mathbf{g}$ – tensory metryczne w konfiguracji początkowej i aktualnej,

δ_{ij} – symbol delta – Kroneckera,

$\mathbf{a}$ – pierwsza forma podstawowa powierzchni,

$A=a_{11}$ – metryka wzdłuż południka,

$\mathbf{b}$ – druga forma podstawowa powierzchni,

Γ – symbol Christoffela,

G – oznaczenie wyrażenia $(r'r'' + z'z'')$ skracające zapis,

B – oznaczenie wyrażenia $(-z'r'' + r'z'')$ skracające zapis,

μ – translator,

$\mathbf{v}$ – wektor przemieszczenia dowolnego punktu powłoki,

$\mathbf{u}$ – wektor przemieszczenia punktów powierzchni środkowej powłoki,

β – zmiana jednostkowego wektora normalnego do powierzchni środkowej,

ξ – bezwymiarowa współrzędna w kierunku normalnym do powierzchni środkowej powłoki,

$\mathbf{e}$ – liniowy tensor odkształcenia,

ε – składowe rozciągnięć tensora odkształcenia,

κ – składowe obrotów tensora odkształcenia,

${}^\kappa\varepsilon$ – składowe rozciągnięć tensora odkształcenia dla wariantu Koitera teorii powłok,

ρ – składowe obrotów tensora odkształcenia dla wariantu Koitera,

$\mathbf{L}$ – operator związków geometrycznych,

H_1 – oznaczenie wyrażenia $(b_1^1, 1)$ skracające zapis,

H_2 – oznaczenie wyrażenia $(b_2^2, 1)$ skracające zapis,

σ – tensor naprężenia Cauchy'ego,

W_w – praca przygotowana sił wewnętrznych,

$W_z = W_{z1} + W_{z2}$ – praca przygotowana sił zewnętrznych,

H – krzywizna średnia,

K – krzywizna Gaussa.

δ – operator wariacji,

h – grubość płaszcza powłoki,

$\mathbf{n}, \mathbf{m}$ – tensory sił wewnętrznych w powłoce, odpowiednio: dla stanu tarczowego i zgięciowego,

$\mathbf{v}$ – jednostkowy wektor normalny skierowany na zewnątrz konturu C ,

ψ – tensor Levi–Civiti,

$\mathbf{d}$ – symbol permutacyjny,

$\mathbf{f}, \mathbf{l}$ – wektory obciążenia powłoki związane określone na powierzchni środkowej,

$\mathbf{x}$ – siły objętościowe,

$\mathbf{t}$ – wektor obciążenia powierzchni bocznych powłoki,

$\mathbf{t}', \mathbf{t}''$ – uogólnione wektory obciążenia powłoki przyłożonego do powierzchni bocznych określone na konturze powierzchni środkowej,

E, G, ν – moduł Younga, moduł Kirchhoffa i współczynnik Poissona,

$\check{\epsilon}_{\langle\gamma\beta\rangle}, \check{\kappa}_{\langle\gamma\beta\rangle}, \check{\phi}_{\langle\gamma\beta\rangle}, \check{\Phi}_{\langle\gamma\beta\rangle}, \check{\chi}_{\langle\gamma\beta\rangle}, \check{\zeta}_{\langle\gamma\beta\rangle}, \bar{\epsilon}_{\langle\gamma\beta\rangle}, \bar{\kappa}_{\langle\gamma\beta\rangle}, \bar{\phi}_{\langle\gamma\beta\rangle}$ – składowe fizyczne pomocniczych tensorów odkształcenia,

– model numeryczny – metoda elementów skończonych

Δ – globalna numeracja węzłów,

$\bar{\Delta}$ – liczba węzłów,

e – numeracja elementów,

$2\bar{e}$ – liczba elementów,

${}^s\mathbf{q}^\Delta = \{U_1, U_2, U_3, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3\}^T$ – wektor parametrów węzłowych powłoki w globalnym układzie współrzędnych w węźle Δ ,

${}^s\mathbf{q}$ – globalny wektor parametrów węzłowych powłoki,

$L, \alpha, r_p, r_k, X_p^3, X_k^3$ – wielkości charakteryzujące geometrię elementu skończonego i elementu brzegowego,

α – lokalna numeracja węzłów dla elementu e ,

$\{x_1, x_2, x_3\}$ – lokalny układ współrzędnych dla elementu,

${}^s\mathbf{q}_{(e)}^\alpha = \{u_1, u_2, \phi_3, u_3, \phi_1, \phi_2\}^T$ – wektor parametrów węzłowych w układzie lokalnym elementu,

$\mathbf{f} = \{u, v, w\}^T$ – wektor składowych przemieszczeń,

${}^s\mathbf{N}_\alpha^{(e)}$ – macierz funkcji bazowych węzła dla parametrów węzłowych w lokalnym układzie współrzędnych elementu e ,

$U_\alpha^{(e)}, V_\alpha^{(e)}$ – funkcje bazowe do aproksymacji przemieszczeń w płaszczyźnie powierzchni elementu,

$W1_\alpha^{(e)}, W2_\alpha^{(e)}, W3_\alpha^{(e)}$ – funkcje bazowe do aproksymacji przemieszczeń w kierunku normalnym do powierzchni elementu,

- $L_{\alpha}^{(e)}$ – współrzędna powierzchniowa odpowiadająca wierzchołkowi α elementu skończonego e ,
 Δ – pole elementu skończonego,
 $a_{\alpha}^{(e)}, b_{\alpha}^{(e)}, c_{\alpha}^{(e)}$ – wielkości charakteryzujące geometrię elementu skończonego,
 $\varepsilon_{(e)}$ – wektor uogólnionych odkształceń dla elementu,
 $\sigma_{(e)}$ – wektor uogólnionych naprężeń dla elementu,
 $L_{(e)}$ – operator związków geometrycznych dla elementu,
 $B_{\alpha}^{(e)}$ – macierz związków geometrycznych dla węzła α elementu,
 $D_{(e)}$ – macierz współczynników sprężystości dla elementu,
 $E_{11}, E_{22}, E_{12}, G$ – stałe sprężystości dla głównych kierunków ortotropii,
 $t_{(e)}$ – obciążenie zewnętrzne elementu,
 ρ_s – gęstość materiału konstrukcji,
 $^s k_{\alpha\beta}^{(e)}$ – macierz sztywności elementu e (struktura dla węzłów α i β),
 $^s m_{\alpha\beta}^{(e)}$ – macierz bezwładności elementu e (struktura dla węzłów α i β),
 $^s p_{\alpha}^{(e)}$ – wektor równoważników statycznych obciążenia zewnętrznego elementu e dla węzła α ,
 $^s E_p^{(e)}$ – energia potencjalna elementu e ,
 $^s E_k^{(e)}$ – energia kinetyczna elementu e ,
 $^{(e)}\Omega_{\Delta}^{\alpha}$ – macierz topologiczna zamieniająca globalny układ współrzędnych na lokalny,
 T – transformacja między globalnym i lokalnym układem współrzędnych w węźle,
 Ψ – kąt nachylenia tworzącej elementu do pionu,
 Θ – kąt między kierunkami X^2 i x_1 ,
 $^s E_p$ – całkowita energia potencjalna powłoki,
 $^s E_k$ – całkowita energia kinetyczna powłoki,
 $^s K_{\Delta\Gamma}$ – globalna macierz sztywności konstrukcji (struktura dla węzłów Δ i Γ),
 $^s K$ – globalna macierz sztywności powłoki,
 $^s M_{\Delta\Gamma}$ – globalna macierz bezwładności konstrukcji (struktura dla węzłów Δ i Γ),
 $^s M$ – globalna macierz bezwładności powłoki,
 $^s P_{\Delta}$ – globalny wektor równoważników statycznych obciążeń powłoki (dla węzła Δ),
 $^s P$ – globalny wektor równoważników statycznych obciążeń powłoki,
- model fizyczny cieczy
 ρ_f – gęstość cieczy,
 u – pole prędkości w cieczy,
 s – tensor naprężenia w cieczy,

p – pole ciśnienia w cieczy,

$\mathbf{f}$ – zewnętrzna siła objętościowa działająca na ciecz,

a – prędkość rozchodzenia się dźwięku w ośrodku,

Φ – potencjał prędkości,

$\mathbf{n}$ – jednostkowy wektor normalny,

U – potencjał sił objętościowych,

g – przyspieszenie grawitacyjne,

p_a – ciśnienie atmosferyczne,

Ω – obszar zajmowany przez ciecz,

Γ_1 – powierzchnia kontaktu cieczy z konstrukcją,

Γ_2 – powierzchnia swobodna lustra cieczy,

G^* – rozwiązanie fundamentalne równania Laplace'a,

F^* – pochodna w kierunku normalnym rozwiązania fundamentalnego G^* ,

$\delta(\mathbf{X} - \mathbf{X}^\Sigma)$ – dystrybucja δ -Diraca,

$r(\mathbf{X}, \mathbf{X}^\Sigma)$ – odległość między punktami $\mathbf{X}$ i $\mathbf{X}^\Sigma$,

V.p. – wartość główna całki w sensie Cauchy'ego,

model numeryczny – metoda elementów brzegowych

Δ – numeracja węzłów,

$\bar{\Delta}$ – liczba węzłów,

e – numeracja elementów,

$\bar{e}$ – liczba elementów,

$\Phi^\Delta, \frac{\partial \Phi^\Delta}{\partial \mathbf{n}}$ – wartości funkcji potencjału prędkości i jej pochodnej w kierunku normalnym w węźle Δ ,

Φ, Φ_n – wektory parametrów węzłowych MEB,

${}^f N_\Delta^{(e)}$ – funkcja bazowa dla węzła dla parametru węzłowego dla elementu brzegowego e ,

$\mathbf{F}, \mathbf{G}$ – macierze współczynników równań MEB,

${}^f E_k$ – całkowita energia kinetyczna cieczy,

${}^f E_p$ – całkowita energia potencjalna cieczy,

$\mathbf{N}$ – macierz aproksymacji parametrów MEB,

$\bar{\mathbf{N}}$ – macierz aproksymacji parametrów MEB ograniczona do powierzchni Γ_2 ,

${}^f \mathbf{M}$ – macierz bezwładności dla cieczy,

- ${}^f\mathbf{K}$ – macierz sztywności dla cieczy,
 ${}^f\mathbf{q}$ – wektor przemieszczeń pionowych punktów powierzchni swobodnej cieczy,
- sprzężone równania ruchu obu ośrodków
- ${}^{\Gamma_1}\boldsymbol{\Omega}$ – macierz transformacji filtrująca z globalnego wektora parametrów węzłowych przemieszczenia normalne do powierzchni środkowej powłoki na powierzchni kontaktu konstrukcji z cieczą,
- $\mathbf{T}_w$ – transformacja wektora przemieszczeń węzła w układzie globalnym na przemieszczenie normalne w "mokrych węzłach" konstrukcji,
- $\mathbf{q}$ – wektor współrzędnych uogólnionych połączonych modeli,
- ${}^s\boldsymbol{\Lambda}$, ${}^f\boldsymbol{\Lambda}$ – zero–jedynekowe transformacje między wektorami współrzędnych uogólnionych,
- E_p , E_k – całkowita energia potencjalna i kinetyczna połączonych modeli,
- $\mathbf{K}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{P}$ – macierze sztywności, bezwładności i tłumienia oraz wektor równoważników statycznych obciążenia zewnętrznego dla całego układu,
- rozwiązanie numeryczne równania ruchu
- N – liczba współrzędnych uogólnionych,
- $\mathbf{W}$ – macierz wektorów własnych,
- $y_I(t)$ – funkcja odpowiadająca formie drgań o numerze I ,
- ω_I – częstość własna,
- γ – bezwymiarowy współczynnik tłumienia,
- $\mathbf{X}_I$, $\mathbf{X}_I^*$, $\mathbf{X}_I^\dagger$ – wektory pomocnicze przy wyznaczaniu wektorów Ritza,
- L – liczba wektorów Ritza,
- $z_I^*(t)$ – funkcja odpowiadająca wektorowi $\mathbf{X}_I$,
- $\mathbf{K}^*$, $\mathbf{M}^*$, $\mathbf{C}^*$, $\mathbf{P}^*$ – pomocnicze macierze sztywności, bezwładności i tłumienia oraz wektor równoważników statycznych obciążenia zewnętrznego do wyznaczenia wektorów Ritza,
- $\bar{\mathbf{W}}$ – macierz wektorów własnych zredukowanego zagadnienia własnego,
- $\bar{\omega}_K$ – częstości własne zredukowanego zagadnienia własnego,
- $\bar{\mathbf{R}}^K$ – wektor Ritza przed normalizacją,
- $\mathbf{R}^K$ – wektor Ritza,
- $z_K(t)$ – funkcja odpowiadająca wektorowi Ritza $\mathbf{R}^K$,
- K_K , M_K , C_K , P_K – główne współczynniki sztywności, bezwładności i tłumienia oraz równoważników statycznych obciążenia zewnętrznego związane z częstością ω_K ,
- p_K – wpływ K -tego wektora Ritza na rozwiązanie,
- $\mathbf{E}$ – wektor błędu przy zawężonej bazie wektorów Ritza,

e – unormowany błąd przy zawężonej bazie wektorów Ritza,

h_K – waga K -tego wektora Ritza w odwzorowaniu obciążenia,

α, β – współczynniki przy całkowaniu metodą Newmarka,

– przykłady liczbowe

$\mathbf{b}$ – wektor zmiennych projektowych,

τ – mały parametr,

$\mathbf{A}_{II}$ – macierz pomocnicza przy wielokrotnych wartościach własnych,

$u(t)$ – zadana funkcja przemieszczenia podpór,

$\mathbf{q}_0$ – wektor ruchu sztywnego układu odpowiadający ruchowi podpór,

$\mathbf{q}_1$ – drgania wokół położenia określonego przez wektor $\mathbf{q}_0$.

Niestacjonarne drgania zbiornika wypełnionego cieczą

Streszczenie

W pracy przedstawiono opis zagadnienia dynamicznego związanego z interakcją dwóch ośrodków: sprężystego zbiornika powłokowego i wypełniającego go płynnego medium. Sformułowano rozłączne modele fizyczne i dyskretne konstrukcji i cieczy oraz globalny model dyskretny połączonego układu. W zakresie metod numerycznych zastosowano podejście hybrydowe: równania dyskretne powłoki są zapisywane przy użyciu metody elementów skończonych, w odniesieniu do opisu płynu stosuje się metodę elementów brzegowych.

Dla zbiornika, który potraktowano jako cienką powłokę obrotową, przedstawiono model fizyczny. W szczególności: wyznaczono wielkości geometryczne powierzchni obrotowej parametryzowanej w krzywoliniowym układzie współrzędnych związanym z kierunkami głównych krzywizn, określono współrzędne liniowego tensora odkształcenia przy założeniu kinematycznym Kirchhoffa-Love'a, podano operator związków geometrycznych we współrzędnych fizycznych, wyprowadzono równania równowagi i naprężeniowe warunki brzegowe, wyznaczono związki konstytutywne we współrzędnych fizycznych dla liniowo-sprężystego materiału. Na podstawie sformułowanego ogólnie modelu fizycznego opracowano szczegółowy model dyskretny metody elementów skończonych. Podano opis elementu skończonego wraz z funkcjami bazowymi oraz przejście z jego sformułowania lokalnego do modelu globalnego całej konstrukcji.

Przedstawiono modele fizyczne idealnej, nielepkiej i liniowej cieczy bez oraz przy założeniu jej nieściśliwości. Do opracowania modelu numerycznego przyjęto, dającą znaczne uproszczenie opisu, ciecz nieściśliwą. Dla tego przypadku równanie różniczkowe zastąpiono równoważnym całkowym sformułowaniem brzegowym, dla którego opisano model numeryczny metody elementów brzegowych.

Określenie warunków brzegowych dla cieczy na powierzchni kontaktu z konstrukcją umożliwiło połączenie rozłącznych modeli numerycznych obu ośrodków. Bilans energii pozwolił na uzyskanie dynamicznego równania ruchu układu w klasycznej postaci. Podano algorytm generowania wektorów Ritza, służących do ortogonalizacji równania ruchu. Określono ich udział w rozkładzie wektora obciążenia. Rozseparowane równania ruchu całkowano metodą Newmarka.

W pracy zamieszczono dwa przykłady liczbowe dotyczące zbiornika wieżowego na ciecz. W przykładzie pierwszym wyznaczono wrażliwość projektową częstotliwości drgań własnych ze względu na wybrane parametry geometryczne. Wyznaczono częstotliwości drgań własnych,

pokazano podstawowe formy drgań konstrukcji i wypełniającej jej cieczy. Przykład drugi zawiera rozwiązanie równania drgań zbiornika poddanego wymuszeniu kinematycznemu. Przedstawiono funkcje przemieszczeń wybranego punktu konstrukcji oraz drgania wybranego punktu położonego na powierzchni swobodnej cieczy. Wyznaczono błąd obciążenia bazy wektorowej i pokazano udział poszczególnych wektorów Ritza w rozkładzie obciążenia układu. Oba przykłady rozwiązano w trzech wariantach: zbiornik pusty, częściowo i całkowicie napełniony.

W ramach pracy opracowano zestaw programów do rozwiązywania zadań numerycznych. Przy ich wykorzystaniu uzyskano wyniki prezentowanych przykładów liczbowych. W pracy zamieszczono informację na temat programów komputerowych i zastosowanych w nich procedur numerycznych. Opisano układ funkcjonalny systemu i sposób rozwiązania za ich pomocą przykładów liczbowych.

Do pracy dołączono załącznik. W pierwszej jego części opisano konwencję oznaczeń stosowaną w pracy. W drugiej części załącznika zamieszczono szczegółowy wykaz oznaczeń używanych poszczególnych rozdziałach.

Non-stationary oscillations of fluid filled container

Summary

In the paper the description of dynamic problem connected with fluid-structure interaction (*FSI*) is presented. The system is composed with an elastic shell container filled with fluid. Separate physical and discrete models of both media and global discrete model of whole systems were built up. As far as numerical methods is concerned the hybrid approach was used: discrete equations of shell were obtained by the finite element method (*FEM*), for fluid region the boundary element method (*BEM*) was applied.

For the container, which was assumed to be a thin shell of revolution, physical model was presented. In particular, the following objects were calculated: geometric characteristics of the surface of revolution described in curvilinear coordinate system concerned with the directions of principal curvatures, the terms of linear strain tensor under assumption of Kirchhoff hypothesis, geometric relations operator expressed in physical coordinates, equations of equilibrium with boundary conditions and physical relations for linear-elastic material in terms of physical coordinates. In base on mentioned above general physical model detailed discrete finite element method model was described. Finite element properties with shape functions and transformation between local and global models were formulated.

Physical models for linear, inviscid and irrotational fluid in two cases under or without assumption of incompressibility were presented. For numerical model formulation incompressible fluid was used, which led to simpler description. For this case a differential equation was developed to equivalent boundary integral form, for which numerical model of boundary element method was applied.

Separate numerical models of two media were connected together using boundary conditions on fluid-structure contact surface. Energy balance led to dynamic equation of motion in well known traditional form. An algorithm for Ritz vectors generation, which were used for orthogonalization of equation of motion, was given. Participation factor of each Ritz vector was formulated. Separate equations of motion were integrated using Newmark method.

In the paper two numerical examples for tower water container were shown. In the first example the sensitivity of eigenfrequency for geometrical parameters was calculated. The eigenfrequency of whole system, first eigenforms of shell and fluid free surface were shown. The second example presents solution of equation of motion for container under kinematic excitation. The

oscillations of shell and free surface points were shown. The participation factor for Ritz vectors and truncation error were calculated. Both examples were analyzed in three cases: empty, partially filled and full container.

Original computer programs were developed to solve the presented numerical examples. In the paper the system of computer programs and numerical procedures were described. The functional scheme of the system and examples calculation methods were shown.

An appendix was enclosed. In the first part a notation rules were described. In the second one the detailed list of symbols used in particular parts of the paper was given.



mgr inż. Grzegorz Waśniewski
Zakład Wytrzymałości Materiałów

Instytut Inżynierii Lądowej
Politechniki Wrocławskiej
Wybrzeże Wyspiańskiego 27
50-370 Wrocław

Raport wpłynął do Redakcji Wydawnictw Instytutu w sierpniu 1998 r.

Lista odbiorców:

liczba egzemplarzy:

Dyrekcja Instytutu Inżynierii Lądowej
Biblioteka Główna PWr
Biblioteka i OINT I-14
Promotor
Recenzenci
Autor

1
1
1
1
2
2

Razem: 8

