

Na prawach rękopisu

**INSTYTUT CYBERNETYKI TECHNICZNEJ
POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ**

Raport serii: PREPRINTY nr 16/96

MODELE I ALGORYTMY STEROWANIA KOŁOWYCH ROBOTÓW MOBILNYCH¹

(rozprawa doktorska)

Robert HOSSA

PROMOTOR:

prof. dr hab. inż. Krzysztof Tchoń

Słowa kluczowe:

- układy nieholonomiczne
- kołowy robot mobilny
- notacja Denavita-Hartenberga
- model dynamiki
- wyjścia linearyzujące
- sterowanie adaptacyjne

WROCŁAW 1996

¹ Wyniki przedstawione w rozprawie zostały uzyskane w ramach projektów badawczych KBN "Metody topologiczno-różniczkowe w robotyce", "Roboty osobliwe i nieholonomiczne: modele i algorytmy sterowania" oraz "Roboty osobliwe i nieholonomiczne: modelowanie, sterowanie i planowanie trajektorii".

Biblioteka Główna i OIMT
Politechniki Wrocławskiej



001678091



297623 L/1

AKC. 416 / D/98

Rodzicom i Żonie poświęcam

Spis treści

1	Wstęp	1
1.1	Sformułowanie problemu	1
1.1.1	Geneza problemu	1
1.1.2	Przegląd uzyskanych wyników	2
1.1.3	Wykaz podstawowych oznaczeń	4
1.2	Podstawy matematyczne modelowania układów nieholonomicznych	5
1.2.1	Zasada d'Alemberta	6
1.2.2	Zasada Gaussa	7
1.2.3	Mechanika "wakonomiczna" (Vaconomic Mechanics - Variational kind of Mechanics)	8
1.3	Model zachowania nieholonomicznego układu mechanicznego i jego własności . .	10
1.3.1	Model matematyczny nieholonomicznego układu mechanicznego	11
1.3.2	Własności modelu matematycznego nieholonomicznego układu mechanicznego	12
2	Modele matematyczne kinematyki kołowych robotów mobilnych	19
2.1	Systematyczne wyprowadzenie ograniczeń nieholonomicznych dla kołowych robotów mobilnych przy pomocy notacji Denavita-Hartenberga.	19
2.2	Opis metody wyznaczania modelu kinematyki kołowych robotów mobilnych . . .	25
2.3	Systematyczne wyprowadzenie ograniczeń nieholonomicznych dla wieloczłonowych robotów mobilnych przy pomocy notacji Denavita-Hartenberga.	28
2.4	Metoda wyznaczania modeli kinematyki dla wieloczłonowych robotów mobilnych	32
3	Modele matematyczne dynamiki kołowych robotów mobilnych	39
3.1	Energia kinetyczna i potencjalna kołowego robota mobilnego	40
3.1.1	Energia kinetyczna skrzyni robota mobilnego	41
3.1.2	Energia kinetyczna pojedynczego koła	43
3.1.3	Całkowita energia kinetyczna kołowego robota mobilnego	45
3.2	Energia kinetyczna wieloczłonowych układów jezdnych	47

3.2.1	Energia kinetyczna skrzyń wózków wchodzących w skład wieloczlonowego robota mobilnego	48
3.2.2	Energia kinetyczna kół wieloczlonowego robota mobilnego	51
4	Algorytmy sterowania kołowych robotów mobilnych	55
4.1	Przegląd algorytmów sterowania	55
4.1.1	Sterowanie sinusoidalne	56
4.1.2	Stabilizacja przez zależne od czasu statyczne sprzężenie zwrotne	61
4.1.3	Linearyzacja dynamiczna	63
4.1.4	Algorytm śledzenia trajektorii oparty na przybliżeniu liniowym modelu	65
4.1.5	Wnioski	68
4.2	Sterowanie przy pomocy wyjść linearyzujących	69
4.2.1	Wybór wyjść linearyzujących	69
4.2.2	Własności modelu matematycznego kinematyki i dynamiki po zmianie układu współrzędnych	70
4.2.3	Linearyzujące sprzężenie zwrotne	72
4.2.4	Linearyzujące sterowanie adaptacyjne	74
4.2.5	Analiza zastosowania klasycznego algorytmu sterowania adaptacyjnego Slotine'a-Li	76
4.2.6	Sterowanie przy pomocy wyjść linearyzujących dla kołowych robotów mobilnych	78
4.2.7	Wyniki symulacji komputerowej	81
4.2.8	Wnioski z badań symulacyjnych	86
5	System programowy do wyznaczania modeli matematycznych kinematyki i dynamiki kołowych robotów mobilnych	89
5.1	Wyznaczanie modeli kinematyki kołowych robotów mobilnych	89
5.2	Wyznaczanie modeli dynamiki kołowych robotów mobilnych	92
6	Wnioski końcowe	95

Rozdział 1

Wstęp

1.1 Sformułowanie problemu

1.1.1 Geneza problemu

Mechanika układów nieholonomicznych powstała w czasie, gdy okazało się, że formalizm analityczny Eulera-Lagrange’a jest niewystarczający do opisu podstawowych zagadnień mechaniki toczenia się ciała sztywnego bez poślizgu po płaszczyźnie. W 1871 r. Ferrers [56] podał równania rozszerzonej zasady d’Alemberta dla układów z niecałkowalnymi więzami kinematycznymi, a w 1894 r. Hertz dokonał podziału więzów i układów mechanicznych na holonomiczne i nieholonomiczne. W pierwszych latach XX wieku Czaplygin wyprowadził równania opisujące zachowanie łyżwiarza poruszającego się po pochylonej płaszczyźnie bez poślizgu bocznego. W latach pięćdziesiątych powstała monografia Nejmarka i Fufajewa [43], która prezentowała ówczesny stan wiedzy na temat modelowania układów mechanicznych z więzami niecałkowalnymi oraz zawierała propozycję wykorzystania metod mechaniki analitycznej do modelowania układów elektromechanicznych, co w efekcie pozwoliło na połączenie teorii maszyn elektrycznych z mechaniką układów nieholonomicznych. Na przełomie lat osiemdziesiątych i dziewięćdziesiątych pojawiło się w literaturze naukowej wiele prac poświęconych modelowaniu i sterowaniu układów nieholonomicznych, inspirowanych problematyką należącą do zakresu robotyki, a w szczególności zagadnieniem zmiany orientacji przedmiotu znajdującego się w chwytaku manipulatora lub ponownego jego chwytu [42] oraz zagadnieniami modelowania i sterowania robotów mobilnych. Istnienie więzów nieholonomicznych znajduje wyraz w sposobie postępowania kierowcy przy parkowaniu samochodu na zatłoczonym parkingu, w zachowaniu się kota spadającego ” na cztery lapy”, czy w strategii doświadczonego gimnastyka lub skoczka przy wykonywaniu skomplikowanych akrobacji. Ważne znaczenie praktyczne dla rozwoju badań nad układami nieholonomicznymi miały podjęte w ostatnich latach badania nad zadaniami sterowania i planowania ruchu układu wózków przewożących bagaże podróżnych na lotniskach. Renesans zainteresowania układami nieholonomicznymi natrafił na okres rozwoju geometrycznej teorii sterowania, która dostarczyła efektywnych narzędzi do badania tych układów ([44], [30]). Od strony teoretycznej na kierunek badań nad układami nieholonomicznymi znaczący wpływ miała praca Brockett’a [8], która wykazała niemożliwość stabilizacji tego typu układów przez gładkie statyczne sprzężenie zwrotne od stanu. Poszukiwanie algorytmów sterowania układów nieholonomicznych doprowadziło do opracowania specyficznych metod sterowania, które można podzielić na dwie

podstawowe grupy. Do pierwszej z nich zaliczamy algorytmy sterowania w układzie otwartym (często nazywane algorytmami planowania trajektorii), wśród których wyróżniamy:

- sterowanie sinusoidalne [40];
- metody iteracyjne [18].

W skład grupy drugiej wchodzi algorytmy sterowania w układzie zamkniętym ze sprzężeniem zwrotnym, a w szczególności algorytmy wykorzystujące:

- zależne od czasu statyczne sprzężenie zwrotne [15], [47];
- nieciągłe sprzężenie zwrotne od stanu [57];
- własność linearyzacji dynamicznej [9], [16], [21].

1.1.2 Przegląd uzyskanych wyników

Inicjatywa podjęcia badań nad modelowaniem i sterowaniem kołowych robotów mobilnych powstała w 1991 r. na proseminarium dla doktorantów i młodych pracowników nauki prowadzonym przez profesora Krzysztofa Tchonia. Początkowo nasze zainteresowania były skupione na problemie modelowania kinematyki kołowych robotów mobilnych. Wnikliwe studia literaturowe nad tematyką układów nieholonomicznych uwiaryściły potrzebę opracowania metody wyprowadzania równań ograniczeń kinematycznych i wyznaczania na ich podstawie zależności opisujących własności kinematyczne kołowych robotów mobilnych. Dalo to asumpt do sformułowania pierwszego z dwóch głównych problemów, które są przedmiotem dociekań w niniejszej rozprawie.

Problem 1 *Znaleźć metodę umożliwiającą wyznaczanie w sposób systematyczny modeli kinematyki i dynamiki prostych (pojedynczy robot) i wieloczłonowych kołowych robotów mobilnych.*

Naturalnym krokiem prac badawczych było zastosowanie podejścia Denavit-Hartenberga [17] do wyprowadzania ogólnych zależności opisujących ruch bez poślizgu dowolnego typu koła kołowego robota mobilnego [23]. Proponowane rozwiązanie polega na analizie zachowania koła robota mobilnego poruszającego się przy założeniu braku poślizgu bocznego i wzdłużnego. Ważną zaletą opracowanej metody okazała się możliwość jej uogólnienia i uzyskania w ten sposób zależności pozwalających na wyprowadzanie ograniczeń kinematycznych dla wieloczłonowych kołowych robotów mobilnych (np. robota ciągnącego przyczepę) [25]. Kolejnym rezultatem badań było rozwiązanie zadania wyznaczania modeli kinematyki kołowych robotów mobilnych. Zadanie to zostało sprowadzone do wyznaczenia dystrybucji anihilowanej przez macierz ograniczeń kinematycznych. Klasyfikacja kołowych robotów mobilnych przedstawiona w pracy [10] w znacznym stopniu ułatwiła opracowanie algorytmu automatycznej generacji modeli kinematyki kołowych robotów mobilnych, który został zaimplementowany przy wykorzystaniu pakietu obliczeń symbolicznych MATHEMATICA [26]. Do wyznaczania modeli kinematyki wieloczłonowych kołowych robotów mobilnych została zastosowana metoda wyboru współrzędnych uogólnionych, która pozwala na otrzymanie specyficznej postaci ograniczeń kinematycznych i dekompozycję problemu obliczania jądra macierzy związanej z ograniczeniami kinematycznymi. Przykłady tworzenia modeli kinematyki robotów wieloczłonowych przedstawiono w pracy [25].

Połączenie klasycznej w robotyce metody wyznaczania równań opisujących energię kinetyczną i potencjalną dla ciał sztywnych [45] z wynikami badań nad modelowaniem kinematyki umożliwiło uzyskanie pełnych modeli dynamiki zarówno pojedynczych jak i wieloczłonowych kołowych robotów mobilnych [24], [27].

Specyficzny charakter zagadnień związanych z projektowaniem algorytmów sterowania układów nieholonomicznych ma swoje źródło w zasadniczej niemożności stabilizacji tych układów przez gładkie statyczne sprzężenie zwrotne od stanu [8]. Rezultatem nawiązania współpracy naukowej (1994/95 r.) z prof. Guy Champion z Université Catholique de Louvain było sformułowanie następującego problemu sterowania:

Problem 2 *Zaprojektować adaptacyjny algorytm sterowania dla kołowych robotów mobilnych wykorzystujący znane algorytmy sterowania adaptacyjnego dla robotów manipulacyjnych.*

Zaproponowane w niniejszej rozprawie rozwiązanie Problemu 2, opiera się na wyborze wyjść linearyzujących [29], [12] i wymaga:

- określenia możliwości i metody wyboru wyjść linearyzujących;
- określenia własności modelu dynamiki i kinematyki kołowych robotów mobilnych po wyborze wyjść linearyzujących;
- opracowania algorytmu sterowania adaptacyjnego opartego na znanych algorytmach sterowania układów holonomicznych;
- przeprowadzenie dowodu zbieżności algorytmu.

Układ niniejszej rozprawy jest następujący. W dalszej części rozdziału 1 opisano matematyczne podstawy modelowania i wybrane własności modeli matematycznych układów nieholonomicznych ze szczególnym uwzględnieniem różnic w stosunku do układów holonomicznych. Następnie zaproponowano metodę wyznaczania ograniczeń nieholonomicznych dla prostych (rozdział 2.1) i wieloczłonowych (rozdział 2.3) kołowych robotów mobilnych oraz metody wyznaczania modeli kinematyki tych układów (rozdział 2.2 i 2.4). Z kolei, w rozdziale 3, przedstawiono wyprowadzenie ogólnych zależności opisujących funkcję Lagrange’a dla kołowych robotów mobilnych. Krótką charakterystykę wybranych algorytmów sterowania układów nieholonomicznych zamieszczono w rozdziale 4.1. Przy omawianiu algorytmów sterowania szczególną uwagę poświęcono problemowi sterowania adaptacyjnego kołowych robotów mobilnych (rozdział 4.2). Rozdział 5 zawiera opis pakietu oprogramowania wykorzystującego system obliczeń symbolicznych *MATHEMATICA*, który umożliwia automatyczną generację modeli kinematyki i dynamiki kołowych robotów mobilnych. Wnioski końcowe podsumowujące wyniki uzyskane w rozprawie zostały zamieszczone w rozdziale 6.

Należy w tym miejscu zaznaczyć, że poruszana w rozprawie tematyka dotyczy najniższego poziomu sterowania kołowych robotów mobilnych (poziom realizacji ruchu) i nie obejmuje ważnych zagadnień z dziedziny planowania ruchów [38] i działań związanych z tworzeniem map otoczenia [59] i samolokalizacji robota [19], [46].

Autor pragnie złożyć podziękowanie dla swojego nauczyciela i promotora rozprawy doktorskiej, profesora Krzysztofa Tchonia, za jego cierpliwość, wyrozumiałość i czas, który poświęcał w ciągu ostatnich kilku lat problemom będącym przedmiotem niniejszej rozprawy.

1.1.3 Wykaz podstawowych oznaczeń

W rozdziale przedstawiono podstawowe pojęcia i oznaczenia używane w rozprawie. Niech x będzie wektorem z przestrzeni R^n , a A macierzą rozmiaru $(n \times m)$. W dalszym ciągu przyjęto następującą notację dotyczącą norm wektorów i macierzy:

- $\|x\|$ - norma euklidesowa wektora $x = (x_1, \dots, x_n)^T$;
- $\|A\|$ - norma macierzowa indukowana przez normę euklidesową.

Z kolei przy założeniu, że B jest macierzą kwadratową rozmiaru $n \times n$ wprowadzamy:

- $\text{tr } B = \sum_{i=1}^n b_{ii}$ - ślad macierzy B ;
- $\det B$ - wyznacznik macierzy B .

Niech f i g będą polami wektorowymi klasy C^∞ określonymi na R^n . Przez $[f, g]$ będziemy oznaczać nawias Liego pól wektorowych f i g , zdefiniowany w następujący sposób:

$$[f, g] = \frac{\partial g}{\partial x} f - \frac{\partial f}{\partial x} g.$$

W celu uproszczenia zapisu iterowanych nawiasów Liego pól wektorowych wprowadzamy notację:

$$\text{ad}_f^0 g = [f, g];$$

$$\text{ad}_f^j g = [f, \text{ad}_f^{j-1} g], \quad j > 0.$$

Definicja 1.1 Algebrą Liego $\text{Lie}\{g_1, g_2, \dots, g_p\}$ polisystemu dynamicznego:

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^p g_i(x) u_i, \quad x \in R^n, \quad p \leq n,$$

nazywamy najmniejszą przestrzeń liniową nad R zawierającą pola wektorowe $g_1, g_2, \dots, g_p$ i zamkniętą ze względu na operację nawiasu Liego.

Niech $h : R^n \rightarrow R$ będzie funkcją klasy C^∞ . Przez pochodną Liego funkcji h w kierunku pola f w punkcie x będziemy rozumieć:

$$L_f h(x) = \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial h}{\partial x_i}(x) = dh f,$$

gdzie:

$dh = \left(\frac{\partial h}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial h}{\partial x_n} \right)$ - wektor wierszowy;
 $\frac{\partial h}{\partial x}$ - wektor kolumnowy równy $(dh)^T$.

1.2 Podstawy matematyczne modelowania układów nieholonomicznych

Rozważmy układ, którego zachowanie jest opisane przez wektor współrzędnych uogólnionych $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)^T$ i prędkości uogólnionych $\dot{q} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)^T$. Zakładamy, że położenia i prędkości są związane m ($m < n$) zależnościami postaci:

$$A^T(q)\dot{q} = 0, \quad (1.1)$$

gdzie:

$A(q)$ - macierz rozmiaru $n \times m$, pełnego rzędu, zależna w sposób gładki (C^∞) lub analityczny (C^ω) od q .

Dobierając w odpowiedni sposób numerację składowych wektora q , otrzymamy w pewnym otoczeniu q następującą dekompozycję macierzy $A^T(q)$:

$$A^T(q) = \begin{bmatrix} A_1(q) & A_2(q) \end{bmatrix}, \quad (1.2)$$

gdzie:

$A_1(q)$ - macierz rozmiaru $m \times (n - m)$;

$A_2(q)$ - macierz nieosobliwa rozmiaru $m \times m$.

Nieosobliwość macierzy $A_2(q)$ wynika z założenia o pełnym rzędzie macierzy $A^T(q)$ i implikuje, że ograniczenia (1.1) możemy lokalnie zapisać w postaci:

$$\begin{bmatrix} Q(q) & I_m \end{bmatrix} \dot{q} = 0, \quad (1.3)$$

gdzie:

$$Q(q) = A_2^{-1}(q)A_1(q).$$

W przypadku ogólnym k ($0 \leq k \leq m$) spośród m więzów kinematycznych (1.1) może być całkowalnych. Oznacza to, że istnieje funkcja $G : R^n \rightarrow R^k$, która przyjmuje stałe wartości na trajektoriach rozważanego układu. W zależności od wielkości k wyróżniamy następujące przypadki:

- $k = m$ - pełna całkowalność ograniczeń kinematycznych, układ holonomiczny;
- $0 < k < m$ - częściowa całkowalność ograniczeń, układ nieholonomiczny;
- $k = 0$ - pełna niecałkowalność ograniczeń, układ w pełni nieholonomiczny.

Przy założeniu pełnej całkowalności ograniczeń postaci (1.1) ($k = m$) możemy zapisać:

$$\frac{d}{dt}G(q) = \frac{\partial G}{\partial q}\dot{q} = 0, \quad (1.4)$$

gdzie:

$$\frac{\partial G}{\partial q} = R(q)A^T(q);$$

$R(q)$ - pewna macierz rozmiaru $m \times m$, pełnego rzędu.

Z powyższych rozważań wynika, że warunkiem wystarczającym całkowalności więzów (1.1) jest istnienie macierzy $R(q)$ (rozmiaru $m \times m$), która zapewnia, że macierz $R(q)A^T(q)$ jest macierzą Jacobiego pewnego odwzorowania $G(q)$. Nietrudno pokazać, że dla $m = n - 1$ więzy postaci (1.1) są zawsze całkowalne. Możemy wówczas przedstawić macierz $A^T(q)$ w postaci:

$$A^T(q) = \begin{bmatrix} A_1(q) & a_2(q) \end{bmatrix}, \quad (1.5)$$

gdzie:

$A_1(q)$ - jest macierzą nieosobliwą rozmiaru $(n - 1) \times (n - 1)$.

Kładąc $Q(q) = A_1^{-1}(q)$ otrzymujemy:

$$Q(q)A^T(q) = \begin{bmatrix} I_{n-1} & d(q) \end{bmatrix}, \quad (1.6)$$

gdzie:

$$d(q) = A_1^{-1}(q)a_2(q).$$

Zależności (1.6) implikują, że ograniczenia (1.1) przyjmują następującą postać:

$$\dot{q}_i = -d_i(q)\dot{q}_n \quad (i = 1, 2, \dots, n - 1). \quad (1.7)$$

Układ $(n - 1)$ równań różniczkowych (1.7) daje się scałkować, co pozwala w efekcie na eliminację $n - 1$ współrzędnych uogólnionych:

$$q_i = \Psi_i(q_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n - 1). \quad (1.8)$$

W ten sposób wykazaliśmy, że przy warunku $m = n - 1$ więzy postaci (1.1) są zawsze całkowalne. Kryterium dotyczące całkowalności ograniczeń (1.1) zostanie podane w rozdziale 1.3 niniejszej rozprawy. W dalszej części rozdziału 1.2 będziemy zakładać, że ograniczenia postaci (1.1) są niezależne i nieholonomiczne oraz przedstawimy zasady, z których wyprowadzamy model matematyczny ruchu układów nieholonomicznych.

1.2.1 Zasada d'Alemberta

Zdefiniujmy funkcję Lagrange'a dla układu bez ograniczeń kinematycznych:

$$L(q, \dot{q}) = E_k(q, \dot{q}) - E_p(q), \quad (1.9)$$

gdzie:

$E_k(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^T K(q)\dot{q}$ - energia kinetyczna układu swobodnego (bez ograniczeń kinematycznych);

E_p - energia potencjalna układu swobodnego.

Równania ruchu układu swobodnego możemy zapisać w postaci:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0. \quad (1.10)$$

ZalóŜmy teraz, Ŝe na układ zostały nałożone więzy nieholonomiczne postaci (1.1). Do równania (1.10) wprowadzamy siłę $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)^T$, która wymusza spełnienie przez rozważany układ równań ograniczeń nieholonomicznych (1.1) [43]:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = z. \quad (1.11)$$

Zakładamy ponadto, Ŝe siła z nie wykonuje pracy na dopuszczalnych przesunięciach [43]:

$$z^T dq = 0. \quad (1.12)$$

Z kolei zależność (1.1) możemy zapisać w następującej postaci:

$$A^T(q) dq = 0. \quad (1.13)$$

Jak łatwo zauwaŷyć, równania (1.12) i (1.13) implikują istnienie wektora $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)^T$ składającego się z niezdeteminowanych mnoŷników Lagrange'a λ_μ ($\mu = 1, 2, \dots, m$), który spełnia zależność:

$$z^T = \lambda^T A^T. \quad (1.14)$$

Podstawiając (1.14) do (1.11), otrzymujemy równania zasady d'Alemberta dla układów nieholonomicznych:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = A(q) \lambda. \quad (1.15)$$

Przedstawione powyŷej wyprowadzenie równań (1.15) zostało zaczerpnięte z prac ([56], [50]). Rozwinięcie problematyki układów nieholonomicznych można znaleźć w ([56], [43]). Zasada d'Alemberta ma kilka równowaŷnych sobie formalizmów. W następnym podrozdziale omawiamy przykładowo jeden nich, zwany zasadą Gaussa.

1.2.2 Zasada Gaussa

Zasada Gaussa jest nazywana również zasadą najmniejszego przymusu. Nasze rozważania dotyczące tego formalizmu przedstawimy w oparciu o prace [43], [3] i [35].

Zasada 1.1 (Gauss) *Ruch układu z ograniczeniami minimalizuje odchylenie od ruchu układu swobodnego mierzone funkcją przymusu:*

$$Z = \frac{1}{2}(\ddot{q} - a)^T K(q)(\ddot{q} - a), \quad (1.16)$$

gdzie:

$\ddot{q}$ - przyspieszenie układu z ograniczeniami;

a - przyspieszenie układu swobodnego;

$K(q)$ -macierz inercji układu swobodnego.

Z zasady Gaussa wynika, Ŝe ruch układu ograniczonego minimalizuje formę (1.16) przy ograniczeniach:

$$\frac{d}{dt}(A^T(q)\dot{q}) = A^T(q)\ddot{q} - \frac{d}{dt}(A^T(q))\dot{q} = 0. \quad (1.17)$$

Przyspieszenie a wyznaczamy z równań ruchu dla układu swobodnego (1.10), które możemy przedstawić w następującej postaci:

$$K(q)a - Q(q, \dot{q}) = 0.$$

W efekcie otrzymujemy :

$$a(q, \dot{q}) = K^{-1}(q)Q(q, \dot{q}). \quad (1.18)$$

Zauważmy, że przyspieszenie układu bez więzów nie zależy od przyspieszenia $\ddot{q}$ układu z więzami. Następnie wprowadzamy mnożniki Lagrange'a i minimalizujemy zmodyfikowany przymus

$$Z'(q, \dot{q}, \ddot{q}, \lambda) = Z - \lambda^T [A^T(q)\ddot{q} - \frac{d}{dt}(A^T(q))\dot{q}] \quad (1.19)$$

ze względu na $\ddot{q}$ i λ .

Warunki stacjonarności dla powyższego wyrażenia są następujące:

$$\begin{cases} \frac{\partial Z'}{\partial \ddot{q}} = 0; \\ \frac{\partial Z'}{\partial \lambda} = 0. \end{cases} \quad (1.20)$$

Po obliczeniach otrzymujemy następujące równania ruchu:

$$K(q)\ddot{q} - Q(q, \dot{q}) = A(q)\lambda. \quad (1.21)$$

Jak łatwo zauważyć, zależności (1.21) są równoważne (1.15). Z kolei, korzystając z warunku $\frac{\partial Z'}{\partial \lambda} = 0$, możemy wyeliminować mnożniki Lagrange'a [35] i w efekcie uzyskujemy:

$$K(q)\ddot{q} - Q(q, \dot{q}) = A(q)[A^T(q)M^{-1}(q)A(q)]^{-1}[-A^T(q)M^{-1}(q)Q(q, \dot{q}) - \frac{d}{dt}(A^T(q))\dot{q}]. \quad (1.22)$$

1.2.3 Mechanika "wakonomiczna" (Vaconomic Mechanics - Variational kind of Mechanics)

Zasada d'Alemberta i metoda Gaussa nie są jedynym sposobem wyznaczania równań ruchu układów nieholonomicznych. Spróbujmy prześledzić teraz propozycję alternatywną przedstawioną w pracy [3]. Z zasady minimalnego działania wynika, że układ mechaniczny zachowuje się w taki sposób, że minimalizuje całkę zwaną działaniem. Problem wyznaczania równań ruchu rozważanego układu możemy zatem rozwiązać klasyczną metodą rachunku wariacyjnego:

Problem 1.1 *Zminimalizować całkę zwaną działaniem*

$$\int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}) dt \quad (1.23)$$

przy ograniczeniach:

$$A^T(q)\dot{q} = 0, \quad (1.24)$$

gdzie:

$L(q, \dot{q})$ -funkcja Lagrange'a zdefiniowana przez (1.9).

Zgodnie z regułą uwzględniania ograniczeń w rachunku wariacyjnym [22], rozwiązaniem powyższego problemu są równania Eulera-Lagrange’a:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L'}{\partial q} = 0; \\ \frac{\partial L'}{\partial \lambda} = 0, \end{cases} \quad (1.25)$$

dla lagranżianu $L'(q, \dot{q}, \lambda) = L(q, \dot{q}) + \lambda^T A^T(q) \dot{q}$ będącego funkcją Lagrange’a systemu ograniczonego oraz m -wymiarowego wektora $\lambda(t)$ zależnych od czasu mnożników Lagrange’a.

Po przekształceniach warunków opisanych przez (1.25) otrzymujemy równania mechaniki wakonomicznej [60]:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = -A(q) \dot{\lambda} + ((\frac{\partial}{\partial q}(A^T(q) \dot{q}))^T - \frac{d}{dt} A(q)) \lambda; \\ A^T(q) \dot{q} = 0. \end{cases} \quad (1.26)$$

Z kolei zależności (1.26) możemy przedstawić w postaci równań Hamiltona. W tym celu wprowadzamy pęd uogólniony:

$$p = \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + A(q) \lambda. \quad (1.27)$$

Do dyspozycji mamy n równań (1.27) oraz m równań ograniczeń (1.1), z których wyznaczamy $\dot{q} = \dot{q}(p, q)$ i $\lambda = \lambda(p, q)$:

$$\begin{cases} f(q, \dot{q}, p, \lambda) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + A(q) \lambda - p = 0; \\ g(q, \dot{q}) = A(q)^T \dot{q} = 0. \end{cases} \quad (1.28)$$

Z twierdzenia o funkcji uwiklanej wynika, że jednoznaczne rozwiązanie powyższego problemu istnieje lokalnie, jeżeli $\det M \neq 0$, gdzie M jest następującej postaci:

$$M = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \dot{q}} & \frac{\partial f}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial g}{\partial \dot{q}} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2} & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.29)$$

Przy założeniu $\det M \neq 0$ definiujemy hamiltonian:

$$H(p, q) = \dot{q}^T(p, q) p - L'(\dot{q}(p, q), q, \lambda(p, q)). \quad (1.30)$$

Równania kanoniczne Hamiltona opisujące ruch układu nieholonomicznego zapisujemy następująco

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}; \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}. \end{cases} \quad (1.31)$$

Jak łatwo zauważyć, zależności (1.31) są równoważne równaniom (1.26).

Panuje przekonanie, że zasada d’Alemberta jest słuszna dla układów mechanicznych, natomiast mechanika wakonomiczna - w optyce [34]. Nietrudno dowieść, że w przypadku układów holonomicznych oba podejścia dają te same rezultaty [60].

1.3 Model zachowania nieholonomicznego układu mechanicznego i jego własności

Załóżmy, że rozważany układ jest układem mechanicznym, którego zachowanie jest określone przez wektor współrzędnych uogólnionych $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)^T \in R^n$ i prędkości uogólnionych $\dot{q} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)^T \in R^n$. Niech współrzędne układu będą związane m ($m < n$) zależnościami postaci:

$$A^T(q)\dot{q} = 0, \quad (1.32)$$

gdzie:

$A(q)$ - macierz rozmiaru $(n \times m)$, pełnego rzędu.

Nażenie na układ więzów postaci (1.32) powoduje, że dla każdej konfiguracji q , wektor prędkości $\dot{q}$ należy do $(n - m)$ wymiarowej podprzestrzeni:

$$\dot{q} \in \text{Ker } A^T(q). \quad (1.33)$$

Podprzestrzeń ta jest generowana przez kolumny macierzy $S(q)$ rozmiaru $n \times (n - m)$ spełniające warunek:

$$A^T(q)S(q) = 0 \quad (1.34)$$

a zatem

$$\dot{q} \in \text{Im } S(q) \quad \forall q. \quad (1.35)$$

Warunek (1.35) implikuje, że dla każdej trajektorii spełniającej ograniczenia (1.32) wektor styczny do niej należy do $(n - m)$ -wymiarowej dystrybucji Δ zdefiniowanej przez kolumny macierzy $S(q)$:

$$\Delta(q) = \text{Span}\{\text{Col } S(q)\}. \quad (1.36)$$

Rozważmy inwolutywne domknięcie Δ , oznaczane przez Δ^* i zdefiniowane jako najmniejsza dystrybucja inwolutywna zawierająca Δ . Niech $n - p$ ($0 \leq p \leq m$) będzie wymiarem Δ^* . Przy powyższych założeniach twierdzenie Frobeniusa [44] implikuje istnienie w otoczeniu każdej konfiguracji q lokalnego układu współrzędnych $\xi = \phi(q)$, w którym Δ^* jest rozpięta przez $\{\frac{\partial}{\partial \xi_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \xi_{n-p}}\}$, a więc współrzędne $\xi_{n-p+1}, \dots, \xi_n$ są stałe wzdłuż trajektorii układu. W zależności od wymiaru Δ^* , możemy mieć do czynienia z następującymi przypadkami:

- jeżeli $p = m$ (Δ jest inwolutywna), wówczas rozpatrywany układ jest holonomiczny, a jego przestrzeń konfiguracyjna jest rozmaitością $(n - m)$ - wymiarową;
- jeżeli $p = 0$ ($\dim \Delta^* = n$), wtedy ograniczenia tworzą układ równań niecałkowalnych, a przestrzeń konfiguracyjna wymaga użycia n współrzędnych uogólnionych;
- jeżeli $0 < p < m$, wówczas z opisu układu możemy wyeliminować p współrzędnych, a przestrzeń konfiguracyjna jest rozmaitością $(n - p)$ - wymiarową.

Przeprowadzona analiza wykazuje, że przy warunku $0 \leq p < m$ rozważany układ jest nieholonomicznym układem mechanicznym. W dalszej ciągu naszych rozważań będziemy zakładać, że $p = 0$, czyli że układ jest w pełni nieholonomiczny.

1.3.1 Model matematyczny nieholonomicznego układu mechanicznego

Niech funkcja Lagrange'a dla rozpatrywanego układu będzie określona przez (1.9). Stosując zasadę d'Alemberta dla układów nieholonomicznych opisaną w podrozdziale 1.2, otrzymujemy n równań:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = A(q)\lambda. \quad (1.37)$$

W przypadku napędzania rozpatrywanego układu przez siły zewnętrzne, prawo ruchu możemy zapisać w postaci:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = A(q)\lambda + B(q)u, \quad (1.38)$$

gdzie:

u - k -wymiarowy wektor uogólnionych sił zewnętrznych (sterowań) wymuszających ruch układu.

Po przekształceniach wykorzystujących postać funkcji Lagrange'a (1.9) i ograniczeń (1.1) równania ruchu przybierają następującą postać:

$$K(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = A(q)\lambda + B(q)u, \quad (1.39)$$

gdzie:

$K(q)$ - macierz inercji, symetryczna, dodatnio określona, rozmiaru $(n \times n)$;

$C(q, \dot{q})$ - macierz postaci:

$$C(q, \dot{q}) = \frac{d}{dt}K(q) - \frac{1}{2}\frac{d}{dq}(\dot{q}^T K(q)); \quad (1.40)$$

$g(q)$ - wektor grawitacji;

λ - m -wymiarowy wektor mnożników Lagrange'a.

Mnożąc równanie (1.39) lewostronnie przez $S^T(q)$ i korzystając z faktu, że $A^T(q)S(q) = 0$, eliminujemy człon, w którym występuje λ :

$$S^T(q)K(q)\ddot{q} + S^T(q)C(q, \dot{q})\dot{q} + S^T(q)g(q) = S^T(q)B(q)u. \quad (1.41)$$

Ograniczenia i warunek $A^T(q)S(q) = 0$ implikują istnienie $(n - m)$ -wymiarowego wektora η , który spełnia warunek:

$$\dot{q} = S(q)\eta. \quad (1.42)$$

Pełny opis układu wymaga zatem uwzględnienia zależności opisanych przez (1.42). Różniczkując (1.42) względem czasu, otrzymujemy:

$$\ddot{q} = S(q)\dot{\eta} + R(q, \dot{q})\eta, \quad (1.43)$$

gdzie:

$$R(q, \dot{q}) = \frac{d}{dt}S(q).$$

Podstawiając (1.42) i (1.43) do równań (1.41), uzyskujemy model matematyczny zachowania nieholonomicznego układu mechanicznego:

$$\begin{cases} S^T(q)K(q)S(q)\dot{\eta} + [S^T(q)C(q, S(q)\eta))S(q)\eta + S^T(q)K(q)R(q, S(q)\eta)]\eta + S^T(q)g(q) = \\ S^T(q)B(q)u; \\ \dot{q} = S(q)\eta. \end{cases} \quad (1.44)$$

1.3.2 Własności modelu matematycznego nieholonomicznego układu mechanicznego

Z punktu widzenia sterowania nieholonomicznych układów mechanicznych ważne znaczenie ma określenie ich podstawowych własności strukturalnych odróżniających układy nieholonomiczne od holonomicznych. Przy opracowaniu tej części rozprawy skorzystaliśmy z wyników prac [4], [44] i [6].

1. Postać normalna

Własność 1.1 *Jeżeli macierz $S^T(q)B(q)$ ma pełny rzęd ($= n - m$), to istnieje statyczne sprzężenie zwrotne:*

$$u(\eta, q, v) : R^{n-m} \times R^n \times R^{n-m} \rightarrow R^{n-m}$$

określone równaniem:

$$\begin{aligned} S^T(q)K(q)S(q)v + [S^T(q)C(q, S(q)\eta))S(q) + S^T(q)K(q)R(q, S(q)\eta)]\eta + S^T(q)g(q) = \\ S^T(q)B(q)u, \end{aligned} \quad (1.45)$$

gdzie:

v - jest $(n - m)$ wymiarowym wektorem nowych sterowań,

które przekształca układ (1.44) do postaci normalnej:

$$\dot{q} = S(q)\eta; \quad (1.46)$$

$$\dot{\eta} = v. \quad (1.47)$$

Zależność (1.45) jest układem $(n - m)$ równań. Niech wektor sterowań u ma wymiar równy k . W zależności od wartości k i rzędu macierzy $S^T(q)B(q)$ (jest to macierz rozmiaru $(n - m) \times k$), możemy wyróżnić trzy przypadki:

- jeżeli $k < n - m$ lub $\text{rank } S^T(q)B(q) < n - m$, to układ równań (1.45) nie ma w ogólności rozwiązań, czyli nie istnieje sprzężenie zwrotne postaci (1.45), które przekształca układ (1.44) do postaci normalnej (1.46, 1.47);
- jeżeli $k = n - m$ i $\text{rank } S^T(q)B(q) = n - m$, wówczas układ równań (1.45) ma jednoznaczne rozwiązanie ze względu na u ;

- jeżeli $k > n - m$ i $\text{rank } S^T(q)B(q) = n - m$, wtedy istnieje nieskończenie wiele sterowań u spełniających układ równań (1.45).

Z powyższych rozważań wynika, że warunkiem istnienia statycznego sprzężenia zwrotnego (1.45), które przekształca układ (1.44) do postaci normalnej jest:

- $k \geq n - m$ i
- $\text{rank } S^T(q)B(q) = n - m$.

2. Sterowalność.

Definicja 1.2 [44] Układ sterowania $\dot{x} = f(x, u)$ jest sterowalny, jeżeli dla dowolnych dwóch stanów x_1 i x_2 należących do przestrzeni stanu istnieje dopuszczalna funkcja sterowania, która przeprowadza układ ze stanu x_1 do x_2 w skończonym czasie.

Jak wiadomo, holonomiczne układy mechaniczne o n stopniach swobody, sterowane przez n sił zewnętrznych, posiadają własność sterowalności. Naszym zadaniem jest teraz zbadać, czy własność sterowalności posiadają również układy nieholonomiczne.

Twierdzenie 1.1 [44] Polisystem dynamiczny sterowania:

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^p g_i(x)u_i, \quad x \in R^n, \quad u_i \in R, \quad (1.48)$$

jest sterowalny, jeżeli w każdym punkcie przestrzeni stanu wymiar algebry Liego generowanej przez pola $g_1, g_2, \dots, g_p$ jest równy wymiarowi przestrzeni stanu, czyli $\dim \text{Lie} \{g_1, g_2, \dots, g_p\}(x) = n$.

Z powyższego twierdzenia wynika własność sterowalności dla układu (1.46).

Twierdzenie 1.2 Układ sterowania opisany przez (1.46) jest sterowalny przy założeniu, że η jest wektorem wielkości sterujących.

Dowód:

Z założenia o niezależności i nieholonomiczności ograniczeń wynika, że dystrybucja Δ zdefiniowana przez (1.36) nie jest involutywna oraz $\dim \Delta^* = n$, co implikuje, że wymiar algebry Liego $\dim \text{Lie} \{ \text{Col } S(q) \} = n$. Zatem, na mocy Twierdzenia 1.1, układ (1.47) jest sterowalny. □

Z kolei, w przypadku układu (1.46, 1.47) możemy sformułować jedynie słabsze twierdzenie dotyczące osiągalności.

Twierdzenie 1.3 Układ opisany przez równania (1.46, 1.47) posiada własność osiągalności z dowolnego punktu postaci (η, q) (tzn. zbiór punktów osiągalnych z dowolnego punktu ma niepuste wnętrze).

Dowód:

Przy dowodzie tej własności wykorzystujemy twierdzenie Sussmanna-Jurdijevica [54].

Twierdzenie 1.4 Jeśli $\dim Z(x_0) = \dim \text{Lie}\{f, g_1, \dots, g_k\}(x_0) = n$ to afiniczny układ sterowania $\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^k g_i(x)u_i$ ma własność osiągalności z x_0 .

Zauważmy, że układ (1.46, 1.47) jest układem afinicznym:

$$\begin{bmatrix} \eta \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ S(q)\eta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_{n-m} \\ 0 \end{bmatrix} v, \quad (1.49)$$

co pozwala zapisać układ (1.49) w postaci:

$$\dot{\xi} = f(\xi) + \sum_{i=1}^{n-m} g_i(\xi)v_i, \quad (1.50)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \xi &= (\eta, \quad q)^T; \\ f(\xi) &= (0, \quad S(q)\eta)^T. \end{aligned}$$

Łatwo sprawdzić, że spełnione są następujące zależności:

$$g_i = \begin{bmatrix} e_i \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1 \leq i \leq n-m); \quad (1.51)$$

$$\forall \xi \quad \dim \text{span}\{g_1, g_2, \dots, g_{n-m}\}(\xi) = n-m; \quad (1.52)$$

$$[f, g_i] = \frac{\partial g_i}{\partial \xi} f - \frac{\partial f}{\partial \xi} g_i = -\frac{\partial f}{\partial \xi} g_i = \begin{bmatrix} 0 \\ -s_i(q) \end{bmatrix} \quad (1 \leq i \leq n-m), \quad (1.53)$$

gdzie:

$s_i(q)$ - i -ta kolumna macierzy $S(q)$.

Z zależności (1.53) wynika, że przy pomocy operacji brania nawiasów Liego pól $[f, g_i]$ ($1 \leq i \leq n-m$) możemy uzyskać wektory postaci:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ d_i(q) \end{bmatrix}, \quad (1.54)$$

gdzie:

$d_i(q)$ - dowolny wektor z algebry Liego generowanej przez $\{s_1, s_2, \dots, s_{n-m}\}$.

Z Twierdzenia 1.2 wiemy, że:

$$\dim \text{Lie}\{s_1, s_2, \dots, s_{n-m}\}(q) = n. \quad (1.55)$$

Niech $W(q) = \{w_1(q), \dots, w_2(q)\}$ będzie zbiorem wektorów, który spełnia (1.55). Wówczas prawdziwa jest następująca zależność

$$\dim \text{span} \left\{ g_1, g_2, \dots, g_{n-m}, \begin{bmatrix} 0 \\ w_1(q) \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 \\ w_n(q) \end{bmatrix} \right\} = 2n-m. \quad (1.56)$$

Na mocy twierdzenia Sussmanna-Jurdijevica wnioskujemy, że układ (1.46, 1.47) posiada własność osiągalności z dowolnego stanu początkowego. □

3. Stabilizowalność.

Definicja 1.3 *Układ sterowania:*

$$\dot{x} = f(x, u), \quad f \in C^\infty, \quad f(0, 0) = 0$$

jest lokalnie stabilizowalny przez gładkie sprzężenie zwrotne od stanu, jeżeli istnieje odwzorowanie $x \mapsto u(x)$ klasy C^∞ takie, że $u(0) = 0$ oraz $\dot{x} = f(x, u(x)) = F(x)$ ma w punkcie $x = 0$ asymptotycznie stabilny punkt równowagi.

Twierdzenie 1.5 *Punkt równowagi $(0, 0)$ układu (1.46, 1.47) nie jest stabilizowalny przez gładkie statyczne sprzężenie zwrotne od stanu.*

Dowód:

Zauważmy, że odwzorowanie :

$$(\eta, q, v) \mapsto \begin{pmatrix} v \\ S(q)\eta \end{pmatrix} \quad (1.57)$$

nie jest surjekcją dla pewnego otoczenia $0 \in R^{2n-m}$. Z faktu istnienia więzów wynika, że pewne kierunki prędkości nie są dopuszczalne. Warto zauważyć, że z odwzorowania (1.57) można otrzymać tylko takie $\dot{q}$, które należą do $(n-m)$ wymiarowej podprzestrzeni rozpinanej przez kolumny macierzy $S(q)$, np. nie uzyskamy w obrazie punktu postaci

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon w \end{bmatrix}, \quad \varepsilon > 0,$$

gdzie:

$$w^T S(q) = 0.$$

Z warunku koniecznego na istnienie gładkiego sprzężenia stabilizującego układ (1.46, 1.47) [8] możemy wywnioskować, że nie istnieje takie statyczne sprzężenie zwrotne, które go stabilizuje. □

4. Linearyzowalność.

Rozważmy układ afiniczny:

$$\Sigma : \dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^p g_i(x) u_i, \quad u \in R^p, \quad x \in R^n, \quad f(0) = 0. \quad (1.58)$$

Definicja 1.4 *Układ (1.58) jest lokalnie linearyzowalny dynamicznie w otoczeniu punktu $0 \in R^n$ [13], jeżeli istnieje kompensator dynamiczny:*

$$\begin{aligned} u &= a(x, z) + b(x, z)v; \\ \dot{z} &= \alpha(x, z) + \beta(x, z)v, \quad z \in R^q, \quad v \in R^p \end{aligned}$$

oraz dyfeomorfizm rozszerzonej przestrzeni stanu

$$\xi = \varphi(x, z), \quad z \in R^{n+q}, \quad \varphi(0, 0) = 0,$$

określony w otoczeniu punktu $(0, 0)$, które przekształcają układ do postaci liniowej:

$$\dot{\xi} = A\xi + Bv, \quad z \in R^{n+q}, \quad v \in R^p. \quad (1.59)$$

Definicja 1.5 Układ postaci (1.58) jest lokalnie linearyzowalny statycznie, jeżeli jest linearyzowalny dynamicznie zgodnie z Definicją 1.4 oraz $q = 0$ (kompensator dynamiczny składa się jedynie ze statycznego sprzężenia zwrotnego) [13].

Twierdzenie 1.6 Układ (1.46, 1.47) nie jest linearyzowalny wokół żadnego punktu (η, q) przez statyczne sprzężenie zwrotne od stanu.

Dowód:

Przy dowodzie korzystamy z twierdzenia Jakubczyka-Respondek dotyczącego linearyzacji układów afinicznych przez statyczne sprzężenie zwrotne [32].

Twierdzenie 1.7 [32] Układ afiniczny postaci (1.58) jest lokalnie linearyzowalny przez statyczne sprzężenie zwrotne w pewnym otoczeniu punktu x_0 należącego do przestrzeni stanu wtedy i tylko wtedy, jeżeli spełnione są następujące warunki:

A1. $\dim D^{n-1}(x_0) = n$;

A2. dystrybucje $D^j (j = 1, 2, \dots, n-1)$ - są w pewnym otoczeniu x_0 stałego wymiaru i inwolutywne,

gdzie:

$$D^0 = \text{span}\{g_1, g_2, \dots, g_p\};$$

$$D^j = \text{span}_{C^\infty}\{ad_f^r g_i, 1 \leq i \leq p, 0 \leq r \leq j\};$$

$$ad_f^r g = [f, ad_f^{r-1} g];$$

$$[f, g] - \text{nawias Liego pól } f \text{ i } g.$$

Jak łatwo zauważyć w przypadku układu opisanego przez (1.50) dystrybucja $D^1 = \{g_1, \dots, g_p, [f, g_1], \dots, [f, g_p]\}$ jest stałego wymiaru $2p$, ale nie jest inwolutywna. Wynika to z faktu, że przez branie nawiasów Liego pól postaci $[f, g_i] (i = 1, 2, \dots, p)$ otrzymujemy pola wektorowe postaci (1.54). Z dowodu Twierdzenia 1.2 wiadomo, że:

$$\dim \text{Lie}\{s_1, s_2, \dots, s_{n-m}\}(q) = n.$$

Stąd wnioskujemy, że dystrybucja D^1 nie jest inwolutywna, a zatem rozpatrywany układ nie jest linearyzowalny przez statyczne sprzężenie zwrotne. □

Twierdzenie 1.8 Warunkiem koniecznym linearyzowalności dynamicznej afinicznego układu sterowania w pewnym otoczeniu punktu równowagi jest sterowalność przybliżenia liniowego w tym punkcie [13].

Twierdzenie 1.9 *Układ postaci (1.46, 1.47) nie jest linearyzowalny dynamicznie w otoczeniu punktu równowagi $(\eta, q) = (0, q_e)$.*

Dowód.

Skorzystajmy z warunku koniecznego na linearyzację dynamiczną (Twierdzenie 1.8) w otoczeniu punktu $(\eta, q) = (0, q_e)$. W tym celu sprawdzamy, czy przybliżenie liniowe układu (1.46, 1.47) jest sterowalne w otoczeniu punktu równowagi. Przybliżenie liniowe jest tym przypadkiem postaci:

$$\dot{\xi} = A(\xi_0)\xi + B(\xi_0)v,$$

gdzie:

$$\xi_0 = \begin{pmatrix} 0 & q_e \end{pmatrix}^T; \quad \xi = \begin{pmatrix} \eta & q - q_e \end{pmatrix}^T;$$

$$A(\xi_0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ S'(q_e) & 0 \end{bmatrix}; \quad B(\xi_0) = \begin{bmatrix} I_{n-m} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Jak łatwo zauważyć, rząd macierzy $\text{rank} [B, AB, \dots, A^{2n-m-1}B] = 2n - 2m \leq 2n - m$. Korzystając z kryterium Kalmana, stwierdzamy, że przybliżenie liniowe nie jest sterowalne w punkcie równowagi $(\eta, q) = (0, q_e)$, zatem układ opisany przez (1.46, 1.47) nie jest linearyzowalny dynamicznie w punkcie równowagi $(\eta, q) = (0, q_e)$. $\square$

Przykłady zastosowania linearyzacji dynamicznej do sterowania układów nieholonomicznych poza punktami równowagi (w ruchu) można znaleźć w pracach [16] i [21].

Rozdział 2

Modele matematyczne kinematyki kołowych robotów mobilnych

Roboty posiadające zdolność zmiany położenia w swoim otoczeniu zewnętrznym są określane jako roboty mobilne. Wyróżnia się cztery podstawowe typy robotów mobilnych:

- naziemne;
- latające;
- pływające;
- podwodne.

Z kolei roboty mobilne naziemne można podzielić na:

- kołowe;
- kroczące;
- hybrydowe;
- specjalne (np. szynowe, pełzające, absorpcyjne).

W kręgu naszych zainteresowań znajdują się kołowe roboty mobilne, które posiadają niedeformowalne koła. Należą one do klasy układów mechanicznych scharakteryzowanych przez niecałkowalne (nieholonomiczne) więzy kinematyczne [43]. W dalszej części rozdziału przedstawiamy metody pozwalające na wyznaczanie równań ograniczeń oraz modeli kinematyki prostych (pojedynczych robotów) i wieloczołowych robotów mobilnych.

2.1 Systematyczne wyprowadzenie ograniczeń nieholonomicznych dla kołowych robotów mobilnych przy pomocy notacji Denavita-Hartenberga.

Weźmy pod uwagę inercyjny układ odniesienia (O, I_1, I_2, I_3) związany z podłożem. Załóżmy, że rozpatrywany robot mobilny jest sztywnym wózkiem wyposażonym w niedeformowalne

The diagram illustrates the geometry of a mechanical system, likely a robotic arm or a similar structure, showing two coordinate systems and various geometric parameters.

Coordinate Systems:

- System 1 (Left):** Defined by axes I_1 , I_2 , and I_3 . The origin is labeled 0 .
- System 2 (Right):** Defined by axes Z_1 , Z_2 , and Z_3 . The origin is labeled 0_1 .

Points and Lines:

- Point Q :** A point on the Z_1 axis.
- Point e :** A point on the I_2 axis.
- Point A :** A point on the arm segment.
- Point d :** A point on the arm segment.
- Point 0_1 :** The origin of the second coordinate system, located at the end of the arm.

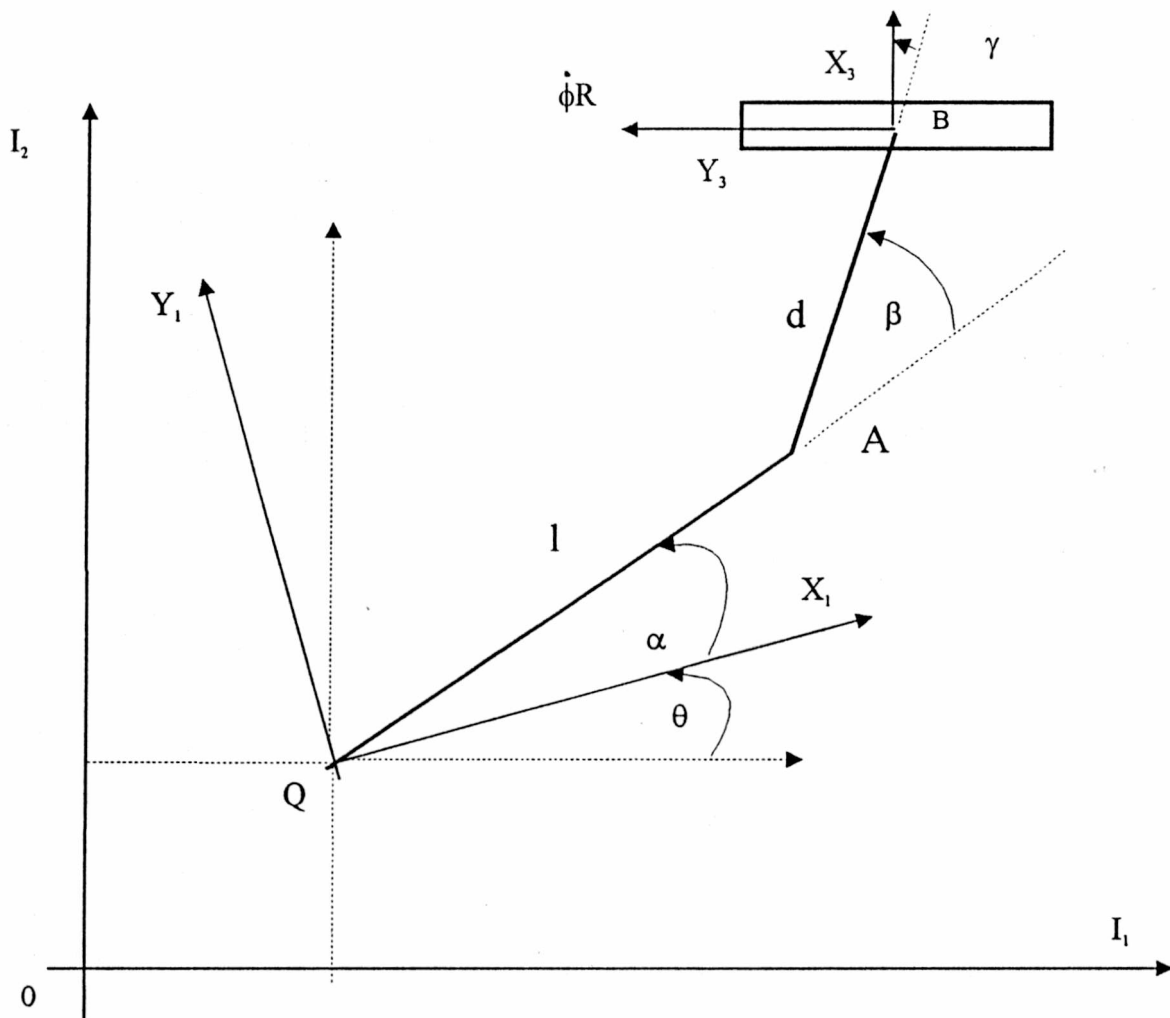
Angles:

- θ : Angle between the I_3 axis and the line segment Qe .
- α : Angle between the I_2 axis and the line segment Qe .
- β : Angle between the I_2 axis and the arm segment Ad .
- γ : Angle between the Z_3 axis and the line segment 0_1d .

Other Labels:

- Y_1 : A vector originating from Q .
- X_1 : A vector originating from e .
- Y_3 : A vector originating from 0_1 .
- X_3 : A vector originating from 0_1 .
- l : A label near the arm segment.
- B : A label near the origin 0_1 .

20



Rys. 2.2: Schemat kinematyczny pojedynczego koła w płaszczyźnie (O, I_1, I_2) .

Z punktu widzenia robotyki, zawieszenie koła możemy rozpatrywać jako manipulator, którego efektem jest koło [10]. Powyższe spostrzeżenie pozwala na wykorzystanie notacji Denavita-Hartenberga [17] do wyznaczenia współrzędnych jednorodnych b_1 dowolnego punktu na obwodzie koła w chwili t względem układu (O, I_1, I_2, I_3) :

$$b_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix} = P(\alpha, \beta, \theta, \gamma, x, y, z) \begin{bmatrix} 0 \\ R \cos \phi \\ R \sin \phi \\ 1 \end{bmatrix} = P(\alpha, \beta, \gamma, \theta, x, y, z) b_3, \quad (2.1)$$

gdzie:

$$b_3 = [0 \ R \cos \phi \ R \sin \phi \ 1]^T - \text{współrzędne jednorodne rozpatrywanego punktu na obwodzie koła w układzie lokalnym } (O_1, X_3, Y_3, Z_3);$$

$$P(\alpha, \beta, \gamma, \theta, x, y, z) = \text{Trans}(I_1, x) \text{Trans}(I_2, y) \text{Trans}(I_3, z) \text{Rot}(I_3, \theta) \text{Trans}(I_3, -e) \\ \text{Rot}(I_3, \alpha) \text{Trans}(I_1, l) \text{Rot}(I_3, \beta) \text{Trans}(I_1, d) \text{Rot}(I_3, \gamma);$$

$$Trans(I_1, x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad Trans(I_2, y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$Trans(I_3, z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad Rot(I_3, \gamma) = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

W celu wyprowadzenia warunków na brak poślizgu rozważanego koła różniczkujemy obustronnie (2.1):

$$\dot{b}_1 = \frac{d}{dt}[P(\cdot)]b_3 + P(\cdot)\dot{b}_3. \quad (2.2)$$

Warunki braku poślizgu koła są związane z punktem B ($\phi = -\frac{\pi}{2}$), w którym ma miejsce kontakt koła z podłożem.

1. Warunek braku poślizgu bocznego koła:

- wypadkowa prędkość w punkcie B prostopadła do płaszczyzny koła równa się zero

2. Warunek braku poślizgu wzdłużnego koła:

- wypadkowa prędkość w punkcie B w płaszczyźnie koła równa się zero.

Założenie, że rozpatrywany robot mobilny porusza się po płaszczyźnie $(0, I_1, I_2)$ oraz warunki braku poślizgu koła implikują, że dla punktu B , czyli przy $\phi = -\frac{\pi}{2}$, zachodzą poniższe zależności:

$$\dot{b}_1 = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{z}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0. \quad (2.3)$$

Przy uwzględnieniu powyższych warunków, równanie (2.2) przybiera postać:

$$\frac{d}{dt}[P(\cdot)]b_3 + P(\cdot)\dot{b}_3 = 0.$$

Z uwagi na nieosobliwość macierzy $P(\cdot)$ możemy zapisać:

$$\dot{b}_3 = -P^{-1} \frac{d}{dt}[P(\cdot)]b_3. \quad (2.4)$$

Jak łatwo zauważyć, współrzędne punktu $b_3 = B$ ($\phi = -\frac{\pi}{2}$) mają następujące własności:

$$b_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ R \cos \phi \\ R \sin \phi \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -R \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$\dot{b}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -R\dot{\phi} \sin \phi \\ R\dot{\phi} \cos \phi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\phi}R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Zatem równanie (2.4) można zapisać w postaci:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\phi}R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -P^{-1} \frac{d}{dt}(P) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -R \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Uwzględniając postać macierzy P^{-1} i P , po obliczeniach, otrzymujemy następujące warunki:

- brak poślizgu bocznego:

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta + \gamma) & \sin(\alpha + \beta + \gamma) & d \sin(\gamma) + l \sin(\gamma + \beta) \end{bmatrix} R(-\theta) \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + d \sin(\gamma) \dot{\beta} = 0; \quad (2.6)$$

- brak poślizgu wzdłużnego koła:

$$\begin{bmatrix} -\sin(\alpha + \beta + \gamma) & \cos(\alpha + \beta + \gamma) & d \cos(\gamma) + l \cos(\gamma + \beta) \end{bmatrix} R(-\theta) \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + d \cos(\gamma) \dot{\beta} + R\dot{\phi} = 0; \quad (2.7)$$

- robot porusza się po płaszczyźnie (O, I_1, I_2) :

$$\dot{z} = 0,$$

gdzie:

$$R(-\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$l, d, \alpha, \beta, \gamma, R, \phi$ – charakterystyka geometryczna koła, czyli kąty i odległości opisujące położenie i orientację koła.

Uzyskane w sposób systematyczny (przy pomocy notacji Denavit-Hartenberga) zależności (2.6) i (2.7) są identyczne z wyprowadzonymi w sposób incydentalny w pracy [4].

Własność 2.1 *Ograniczenia opisane przez zależności (2.6, 2.7) są nieholonomiczne.*

Dowód:

Równania ograniczeń (2.6) i (2.7) możemy zapisać w postaci macierzowej:

$$A^T(q)\dot{q} = 0,$$

gdzie:

$$A(q)^T = \begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta + \gamma + \theta) & \sin(\alpha + \beta + \gamma + \theta) & d \sin(\gamma) + l \sin(\gamma + \beta) & d \sin \gamma & 0 \\ \sin(\alpha + \beta + \gamma + \theta) & \cos(\alpha + \beta + \gamma + \theta) & d \cos(\gamma) + l \cos(\gamma + \beta) & d \cos \gamma & R \end{bmatrix};$$

$$q = \begin{bmatrix} x & y & \theta & \beta & \phi \end{bmatrix}^T.$$

Następnie wyznaczamy macierz $S(q) = [s_1(q), s_2(q), s_3(q)]$, która spełnia zależność $A^T(q)S(q) = 0$. Możliwym rozwiązaniem jest macierz postaci:

$$S(q) = \begin{bmatrix} -\sin(\alpha + \beta + \gamma + \theta) & -\cos(\alpha + \beta + \gamma + \theta) & d \cos(\alpha + \beta + \gamma + \theta) \\ & [d \sin \gamma + l \sin(\gamma + \beta)] & \sin \gamma \\ \cos(\alpha + \beta + \gamma + \theta) & -\sin(\alpha + \beta + \gamma + \theta) & d \sin(\alpha + \beta + \gamma + \theta) \\ & [d \sin \gamma + l \sin(\gamma + \beta)] & \sin \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{R} & -\frac{1}{R}(d \cos \gamma + l \cos(\gamma + \beta)) & -\frac{d}{R} \cos \gamma \end{bmatrix}$$

Zgodnie z rozważaniami zawartymi w rozdziale (1.3) rozprawy, szukamy najmniejszej dystrybucji inwolutywnej Δ^* generowanej przez kolumny macierzy $S(q)$. Nietrudno pokazać, że:

$$\Delta^* = \text{span}_{C^\infty} \left\{ s_1, s_2, s_3, [s_1, s_2], [[s_1, s_2], s_2] \right\} = \text{Im } S^*(q);$$

$$\det S^*(q) = \frac{1}{R}.$$

Z uwagi na fakt, że parametr R jest promieniem rozpatrywanego koła, możemy stwierdzić, że $\dim S^*(q) = 5 = \dim q \quad \forall q$. Wynika stąd, że ograniczenia opisane przez zależności (2.6) i (2.7) są nieholonomiczne.

□

Załóżmy, że rozpatrywany robot mobilny ma k kół. Wykorzystując równania (2.6) i (2.7), zapisujemy w ogólnej postaci równania ograniczeń:

- warunek braku poślizgu bocznego kół:

$$C_1(\beta)R(-\theta) \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + C_2(\gamma)\dot{\beta} = 0, \quad (2.8)$$

gdzie:

$$C_{1i} = [\cos(\alpha_i + \beta_i + \gamma_i) \quad \sin(\alpha_i + \beta_i + \gamma_i) \quad d_i \sin(\gamma_i) + l_i \sin(\beta_i + \gamma_i)] -$$

i -ty wiersz macierzy $C_1(\beta)$, $i \in [1, k]$;

$$C_2(\gamma) = \begin{bmatrix} d_1 \sin \gamma_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 \sin \gamma_1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d_k \sin \gamma_k \end{bmatrix}; \quad (2.9)$$

- warunek braku poślizgu wzdłużnego kół:

$$G_1(\beta)R(-\theta) \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + G_2(\gamma)\dot{\beta} + G_3\dot{\phi} = 0, \quad (2.10)$$

gdzie:

$$G_1(\beta) = \begin{bmatrix} -\sin(\alpha_i + \gamma_i + \beta_i) & \cos(\alpha_i + \beta_i + \gamma_i) & d_i \cos(\gamma_i) + l_i \cos(\beta_i + \gamma_i) \end{bmatrix} -$$

i -ty wiersz macierzy $G_1(\beta)$, $i \in [1, k]$;

$$G_2(\gamma) = \begin{bmatrix} d_1 \cos \gamma_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 \cos \gamma_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d_k \cos \gamma_k \end{bmatrix}; \quad (2.11)$$

$$G_3 = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & R_k \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

W zależnościach (2.8) i (2.10) i -ty wiersz ($i \in [1, k]$) jest równaniem ograniczeń dla i -tego koła rozpatrywanego robota mobilnego. Zdefiniujmy wektor q uogólnionych współrzędnych opisujący zachowanie kołowych robotów mobilnych w postaci:

$$q = \begin{pmatrix} x, & y, & \theta, & \beta_1, & \dots, & \beta_k, & \phi_1, & \dots, & \phi_k \end{pmatrix}^T \in R^{3+2k}. \quad (2.13)$$

Wykorzystując (2.8) i (2.10) oraz (2.13), zapisujemy ograniczenia kinematyczne w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} C_1(\beta)R(-\theta) & C_2(\gamma) & 0 \\ G_1(\beta)R(-\theta) & G_2(\gamma) & G_3 \end{bmatrix} \dot{q} = 0. \quad (2.14)$$

Zatem macierz $A^T(q)$ związana z ograniczeniami jest postaci:

$$A^T(q) = \begin{bmatrix} C_1(\beta)R(-\theta) & C_2(\gamma) & 0 \\ G_1(\beta)R(-\theta) & G_2(\gamma) & G_3 \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

2.2 Opis metody wyznaczania modelu kinematyki kołowych robotów mobilnych

W oparciu o zależności określające ogólną postać ograniczeń nieholonomicznych wyprowadza się model kinematyki robota mobilnego, który jest postaci:

$$\dot{q} = S(q)\eta, \quad (2.16)$$

gdzie:

macierz $S(q)$ spełnia zależność $A^T(q)S(q) = 0$.

Nietrudno zauważyć, że problem wyznaczania modelu postaci (2.16) sprowadza się do znalezienia

jądra macierzy $A^T(q)$ związanej z ograniczeniami (2.14). Z kolei, w poprzednim podrozdziale pokazaliśmy, że ograniczenia kinematyczne dla kołowych robotów mobilnych mają następującą formę:

$$C_1(\beta)R(-\theta) \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + C_2(\gamma)\dot{\beta} = 0, \quad (2.17)$$

$$G_1(\beta)R(-\theta) \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + G_2(\gamma)\dot{\beta} + G_3\dot{\phi} = 0. \quad (2.18)$$

Wykorzystując specyficzną postać ograniczeń kinematycznych proponujemy pewną metodę wyznaczania zależności opisujących kinematyczne własności kołowych robotów mobilnych. Metoda wyprowadzania nieholonomicznych modeli kinematyki składa się z następujących etapów [26]:

1. Jeżeli macierz C_2 jest pełnego rzędu (tzn. dla każdego koła robota mobilnego zachodzi warunek $d \sin \gamma \neq 0$), to model rozpatrywanego robota jest postaci:

$$\dot{\xi} = R(\theta)P\eta; \quad (2.19)$$

$$\dot{\beta} = -C_2^{-1}C_1(\beta)P\eta; \quad (2.20)$$

$$\dot{\phi} = -G_3^{-1}[G_1(\beta) - G_2C_2^{-1}C_1(\beta)]P\eta, \quad (2.21)$$

gdzie:

$$\xi = (x, y, \theta)^T;$$

$$\eta - \text{wektor wielkości pomocniczych};$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

W przeciwnym przypadku przechodzimy do punktu 2.

2. Dzielimy ograniczenia związane z brakiem poślizgu bocznego (2.17) na dwie części:

$$C_1^{**}(\beta)R(-\theta)\dot{\xi} + C_2^{**}\dot{\beta}_1 = 0, \quad (2.22)$$

$$C_1^*(\beta)R(-\theta)\dot{\xi} = 0; \quad (2.23)$$

gdzie:

- C_2^{**} jest macierzą nieosobliwą i diagonalną;
- $\beta = [\beta_1, \beta_2, \beta_3]^T$;
- β_1 - wektor zawierający zmienne w czasie współrzędne wektora β , dla których zachodzi warunek $d \sin \gamma \neq 0$;
- β_2 - wektor zawierający zmienne w czasie współrzędne wektora β , dla których zachodzi warunek $d \sin \gamma = 0$;
- β_3 - wektor składający się ze stałych w czasie współrzędnych wektora β ($\dot{\beta}_3 = 0$).

3. Szukamy jądra macierzy $C_1^*(\beta)$, czyli macierzy P , która spełnia zależność:

$$C_1^*(\beta)P = 0. \quad (2.24)$$

Dla efektywnego wyznaczenia postaci macierzy P wykorzystamy wyniki pracy [10].

Twierdzenie 2.1 [10] Niech δ_m (stopień mobilności) będzie wymiarem przestrzeni rozpinanej przez kolumny macierzy $R(\theta)P$ a δ_s (stopień sterowalności) liczbą niezależnie sterowanych kół robota. Istnieje 5 podstawowych typów kołowych robotów mobilnych poruszających się po płaszczyźnie, które mogą być w pełni scharakteryzowane przez parę liczb postaci (δ_m, δ_s) . Dla każdego typu można znaleźć taki punkt, że umieszczając w nim punkt Q związany z lokalnym układem odniesienia $\{Q, X_1, Y_1\}$, otrzymamy jedną z następujących postaci macierzy P :

- typ $(\delta_m, \delta_s) = (3, 0)$:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (2.25)$$

- typ $(2, 0)$:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (2.26)$$

- typ $(2, 1)$:

$$P = \begin{bmatrix} -\sin \beta & L \\ \cos \beta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (2.27)$$

- typ $(1, 1)$:

$$P = \begin{bmatrix} 0 \\ L \sin \beta \\ \cos \beta \end{bmatrix}; \quad (2.28)$$

- typ $(1, 2)$:

$$P = \begin{bmatrix} -2L \sin \beta_1 \sin \beta_2 \\ L \sin (\beta_1 + \beta_2) \\ \sin (\beta_2 - \beta_1) \end{bmatrix}; \quad (2.29)$$

Zasady wyboru położenia punktu odniesienia Q dla poszczególnych typów robotów mobilnych zostały opisane w pracy [10]. Celem wspomnianego wyboru jest zapewnienie możliwości opisu każdego z kół rozpatrywanego robota przez charakterystykę geometryczną zdefiniowaną w rozdziale 2.1.

Równania (2.23) i (2.24) implikują poniższą zależność:

$$\dot{\xi} = R(\theta)P\eta_1, \quad (2.30)$$

gdzie:

η_1 - wektor zmiennych pomocniczych.

Sposób wyznaczenia macierzy P polega zatem na sprawdzeniu, która z macierzy (2.25-2.29) spełnia warunek opisany przez (2.23). Jeżeli przy poprawnym wyborze punktu odniesienia żadna z proponowanych postaci macierzy P nie spełnia tej zależności, to ruch rozpatrywanego układu może się odbywać przy pewnych statycznych zależnościach (związki otrzymywane z warunku $\det C_1^{**} = 0$) pomiędzy uogólnionymi współrzędnymi opisującymi jego zachowanie lub robot mobilny nie może wykonać żadnego ruchu. W przypadku przeciwnym (jedna z macierzy postaci (2.25-2.29) spełnia warunek (2.23)) przechodzimy do punktu 4.

4. Z zależności (2.22) obliczamy $\dot{\beta}_1$:

$$\dot{\beta}_1 = -(C_2^{**})^{-1} C_1^{**}(\beta) R(-\theta) \dot{\xi} = -(C_2^{**})^{-1} C_1^{**}(\beta) P \eta_1; \quad (2.31)$$

5. Zauważmy, że ograniczenia związane z brakiem poślizgu wzdłużnego kół możemy zapisać w postaci:

$$G_1(\beta) R(-\theta) \dot{\xi} + G_3 \dot{\phi} + G_2^*(\beta) \dot{\beta}_1 + G_2^{**}(\beta) \dot{\beta}_2 = 0. \quad (2.32)$$

Z uwagi na nieosobliwość macierzy G_3 , otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \dot{\beta}_2 &= \eta_2; \\ \dot{\phi} &= -G_3^{-1} [G_1(\beta) P - G_2^*(\beta) C_2^{**(-1)} C_1^{**}(\beta)] P \eta_1 - G_3^{-1} G_2^{**}(\beta) \eta_2, \end{aligned} \quad (2.33)$$

gdzie:

$$\eta = [\eta_1 \quad \eta_2]^T - \text{wektor zmiennych pomocniczych.}$$

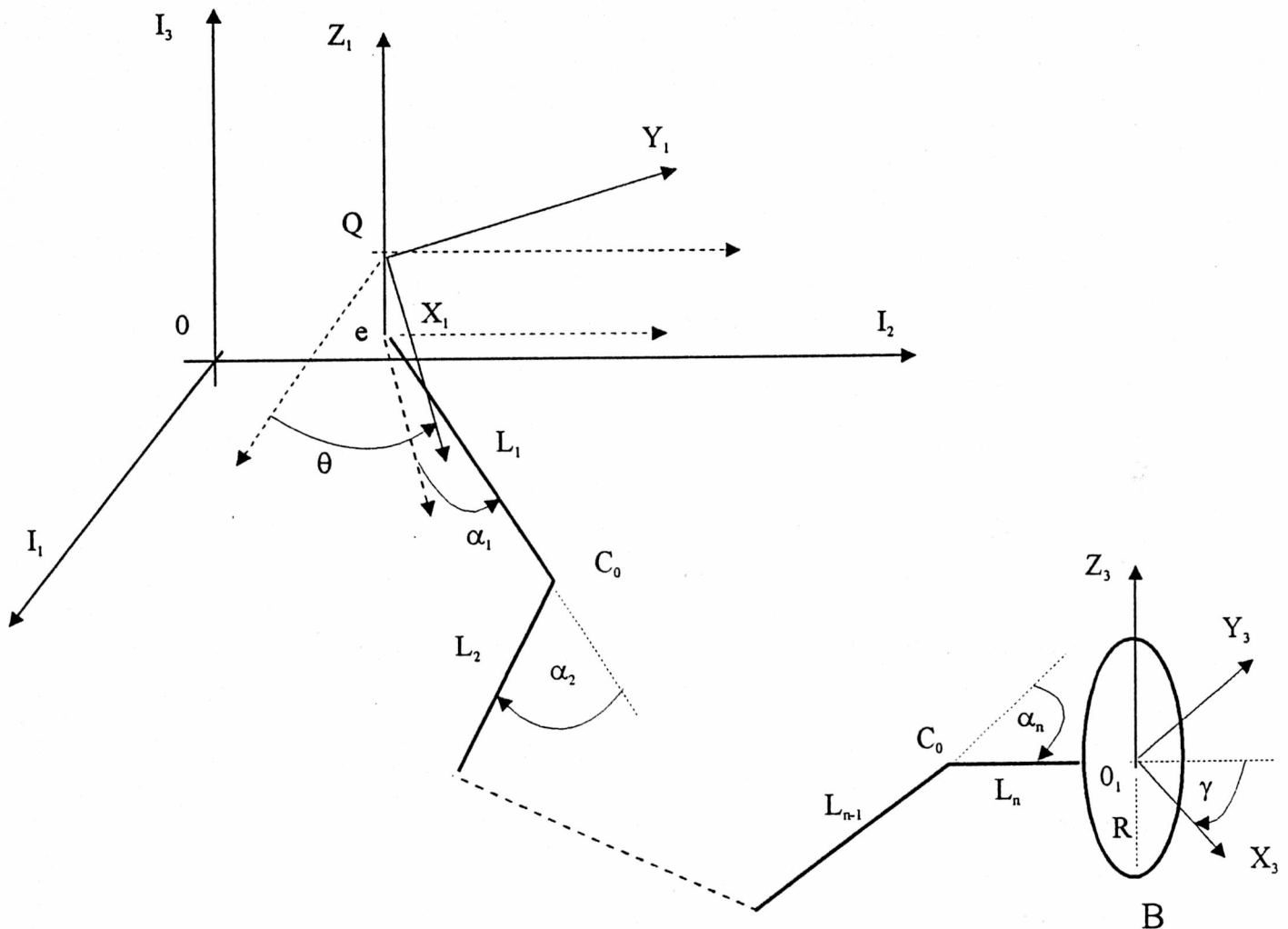
Równania (2.30, 2.31, 2.33) opisują nieholonomiczny model kinematyki rozpatrywanego robota mobilnego.

Kolejnym problemem związanym z modelowaniem kołowych robotów mobilnych jest wyznaczanie ograniczeń i modeli kinematyki dla złożonych układów jezdnych (np. wózka ciągnącego przyczepy).

2.3 Systematyczne wyprowadzenie ograniczeń nieholonomicznych dla wieloczlonowych robotów mobilnych przy pomocy notacji Denavita-Hartenberga.

Niech układ (O, I_1, I_2, I_3) będzie inercyjnym układem odniesienia związanym z podłożem. Załóżmy, że wieloczlonowy robot mobilny składa się ze sztywnych wózków tworzących łańcuch (jeden wózek napędzający pozostałe ciągnięte) wyposażonych w niedeformowalne koła i porusza się po płaszczyźnie (O, I_1, I_2) bez poślizgu kół. Zdefiniujmy punkt odniesienia Q na wózku napędzanym oraz bazę (Q, X_1, Y_1, Z_1) związaną z jego skrzynią. Przy założeniu, że wózek napędzający porusza się po płaszczyźnie, położenie jego skrzyni względem układu bazowego (O, I_1, I_2, I_3) możemy opisać przy pomocy zmiennych: (x, y, θ) (patrz rozdział 2.1). W celu wyprowadzenia równań ograniczeń rozpatrujemy układ pojedynczego koła o promieniu R wchodzącego w skład złożonego układu jezdnych [25]. Położenie środka koła (punkt 0_1) względem

układu lokalnego (Q, X_1, Y_1, Z_1) jest opisane przez następujące zmienne: $e, L_i, \alpha_i, \gamma, (i = 1, 2, \dots, n)$, które reprezentują geometrię łańcucha kinematycznego prowadzącego od układu odniesienia (Q, X_1, Y_1) do koła poprzez szereg członów tworzących wielocłonowy robot mobilny. Kąt γ określa orientację płaszczyzny koła względem odcinka $C_n O_1$. W punkcie B ma miejsce kontakt koła z podłożem. Ilustracją rozpatrywanego układu mechanicznego są Rys.2.3 i Rys.2.4.



Rys. 2.3: Schemat kinematyczny pojedynczego koła złożonego układu jezdny w układzie $(0, I_1, I_2, I_3)$.

Współrzędne b_1 dowolnego punktu na obwodzie koła w chwili t względem układu (O, I_1, I_2, I_3) możemy określić przy pomocy notacji Denavita-Hartenberga [17]:

$$b_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix} = P(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, L_1, L_2, \dots, L_n, \theta, \gamma, x, y, z) \begin{bmatrix} 0 \\ R \cos \phi \\ R \sin \phi \\ 1 \end{bmatrix} = P(\cdot) b_3, \quad (2.34)$$

gdzie:

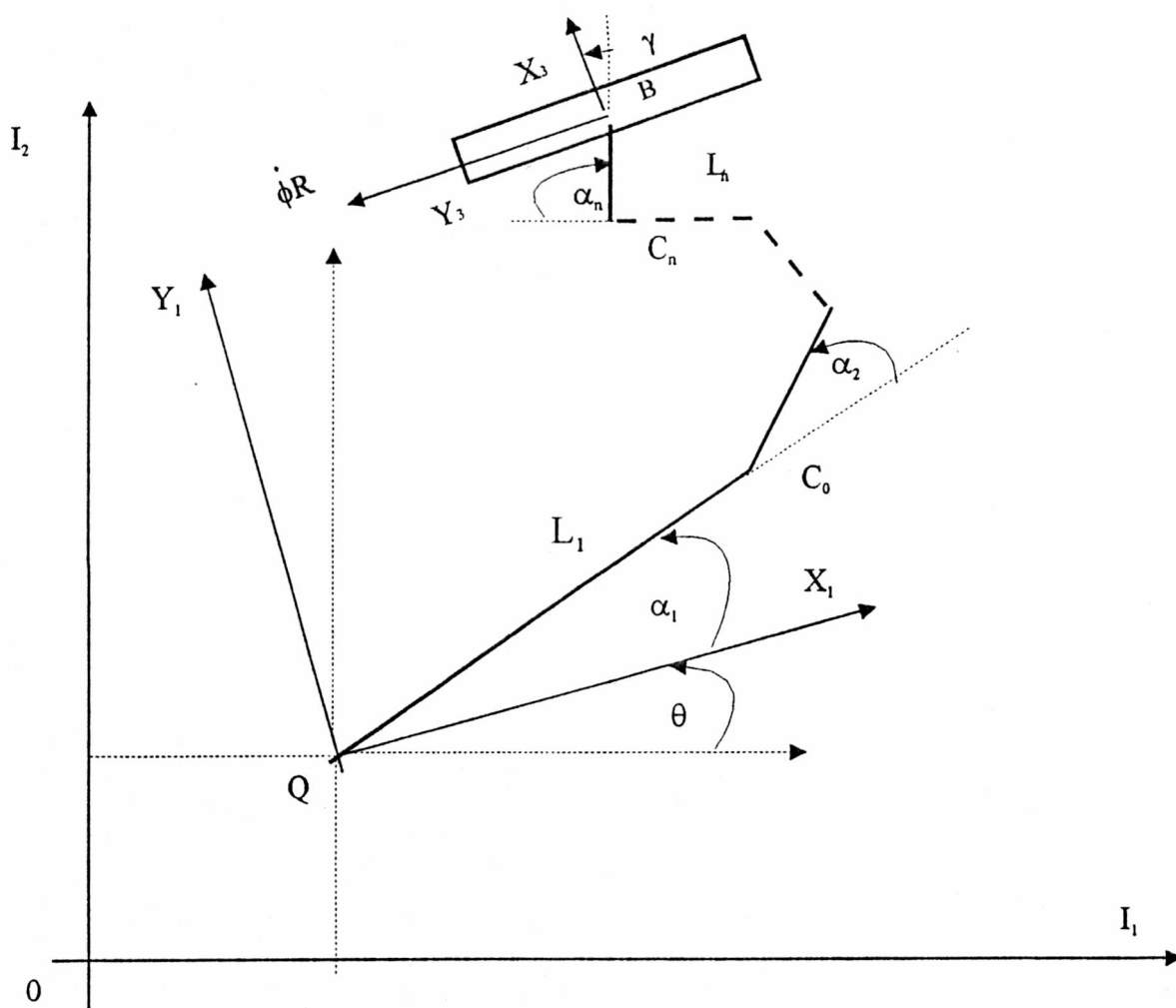
$b_3 = (0 \ R \cos \phi \ R \sin \phi \ 1)^T$ - współrzędne jednorodne rozpatrywanego punktu

w układzie lokalnym (O_1, X_3, Y_3, Z_3) ;

$$P(\alpha_1, \dots, \alpha_n, L_1, \dots, L_n, \gamma, \theta, x, y, z) = Trans(I_1, x)Trans(I_2, y)Trans(I_3, z)Rot(I_3, \theta)Trans(-e) \prod_{i=1}^n [Rot(I_3, \alpha_i)Trans(I_1, L_i)]Rot(I_3, \gamma);$$

$$Trans(I_1, x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad Trans(I_2, y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$Trans(I_3, z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad Rot(I_3, \gamma) = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$



Rys. 2.4: Schemat kinematyczny pojedynczego koła złożonego układu jezdni w płaszczyźnie (O, I_1, I_2) .

Niech kąt γ będzie stały w czasie. Różniczkując obustronnie względem czasu zależność (2.34) otrzymujemy:

$$\dot{b}_1 = \frac{d}{dt}[P(\cdot)]b_3 + P(\cdot)\dot{b}_3. \quad (2.35)$$

Warunki braku poślizgu koła są związane z punktem B , w którym ma miejsce kontakt rozpatrywanego koła z podłożem.

1. Warunek braku poślizgu bocznego koła:

- wypadkowa prędkość w punkcie B względem układu (O, I_1, I_2, I_3) prostopadła do płaszczyzny koła równa się zero.

2. Warunek braku poślizgu wzdłużnego koła:

- wypadkowa prędkość w punkcie B względem układu (O, I_1, I_2, I_3) w płaszczyźnie koła równa się zero.

Dokonując analogicznej analizy jak w rozdziale (2.1) otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\phi}R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -P^{-1} \frac{d}{dt}[P(\cdot)] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -R \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.36)$$

Powyższe równanie macierzowe zapewnia:

- brak poślizgu bocznego rozważanego koła (równanie w wierszu pierwszym);
- brak poślizgu wzdłużnego rozważanego koła (równanie w wierszu drugim);
- koło porusza się po płaszczyźnie (O, I_1, I_2) (równanie w wierszu trzecim).

Po obliczeniach otrzymujemy następujące równania ograniczeń:

- brak poślizgu bocznego:

$$\begin{aligned} & \left[\cos(\alpha_1 + \dots + \alpha_n + \gamma) \quad \sin(\alpha_1 + \dots + \alpha_n + \gamma) \quad L_1 \sin(\alpha_2 + \dots + \alpha_n + \gamma) + L_2 \sin(\alpha_3 + \dots + \alpha_n + \gamma) + \dots + L_{n-1} \sin(\alpha_n + \gamma) + L_n \sin \gamma \right] R(-\theta) \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \dot{\alpha}_1 \left[L_1 \sin(\alpha_2 + \dots + \alpha_n + \gamma) + L_2 \sin(\alpha_3 + \dots + \alpha_n + \gamma) + \dots + L_{n-1} \sin(\alpha_n + \gamma) + L_n \sin \gamma \right] + \dot{\alpha}_2 \left[L_2 \sin(\alpha_3 + \dots + \alpha_n + \gamma) + L_3 \sin(\alpha_4 + \dots + \alpha_n + \gamma) + \dots + L_{n-1} \sin(\alpha_n + \gamma) + L_n \sin \gamma \right] + \dot{\alpha}_{n-1} \left[L_{n-1} \sin(\alpha_n + \gamma) + L_n \sin \gamma \right] + \dot{\alpha}_n \left[L_n \sin \gamma \right] = 0; \end{aligned} \quad (2.37)$$

- brak poślizgu wzdłużnego koła:

$$\begin{aligned}
& \left[-\sin(\alpha_1 + \dots + \alpha_n + \gamma) \quad \cos(\alpha_1 + \dots + \alpha_n + \gamma) \quad L_1 \cos(\alpha_2 + \dots + \alpha_n + \gamma) + L_2 \cos(\alpha_3 + \dots + \alpha_n + \gamma) + \dots + L_{n-1} \cos(\alpha_n + \gamma) + L_n \cos \gamma \right] R(-\theta) \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \dot{\alpha}_1 \left[L_1 \cos(\alpha_2 + \dots + \alpha_n + \gamma) + L_2 \cos(\alpha_3 + \dots + \alpha_n + \gamma) + \dots + L_{n-1} \cos(\alpha_n + \gamma) + L_n \cos \gamma \right] + \dot{\alpha}_2 \left[L_2 \cos(\alpha_3 + \dots + \alpha_n + \gamma) + L_3 \cos(\alpha_4 + \dots + \alpha_n + \gamma) + \dots + L_{n-1} \cos(\alpha_n + \gamma) + L_n \cos \gamma \right] + \dots + \dot{\alpha}_{n-1} \left[L_{n-1} \cos(\alpha_n + \gamma) + L_n \cos \gamma \right] + \dot{\alpha}_n \left[L_n \cos \gamma \right] + R\dot{\phi} = 0;
\end{aligned} \tag{2.38}$$

- robot porusza się po płaszczyźnie $(0, I_1, I_2)$:

$$\dot{z} = 0,$$

gdzie:

$$R(-\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$L_i, \alpha_i, \gamma, (i = 1, \dots, n)$ – parametry geometryczne opisujące położenie środka ciężkości rozpatrywanego koła względem lokalnego układu współrzędnych (Q_1, X_1, Y_1, Z_1) - charakterystyka geometryczna kół.

Zależności opisane przez równania (2.37) i (2.38) umożliwiają wyznaczanie ograniczeń kinematycznych dla wieloczołowych robotów mobilnych na podstawie charakterystyki geometrycznej kół [25].

2.4 Metoda wyznaczania modeli kinematyki dla wieloczołowych robotów mobilnych

Załóżmy, że wieloczołowy robot mobilny składa się z robota napędzającego oraz N przyczep. Niech zachowanie rozpatrywanego układu będzie opisane przez n -wymiarowy wektor współrzędnych uogólnionych, który składa się ze zmiennych opisujących położenie i orientację wózka napędzanego, kątów określających położenie kolejnych przyczep oraz kątów obrotu wszystkich kół. Wypisując po kolei równania ograniczeń wyznaczone na podstawie charakterystyki geometrycznej kół i zależności (2.37) i (2.38), otrzymujemy następującą postać ograniczeń kinematycznych:

$$A^T(q)\dot{q} = \begin{bmatrix} A_0(q_0) & 0 & \dots & 0 \\ A_{10}(q_0, q_1) & A_{11}(q_1) & \dots & 0 \\ A_{20}(q_0, q_1, q_2) & A_{21}(q_1, q_2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{N0}(q_0, q_1, \dots, q_N) & A_{N1}(q_1, q_2, \dots, q_N) & \dots & A_{NN}(q_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dots \\ \dot{q}_N \end{bmatrix} = 0, \tag{2.39}$$

gdzie:

- $A_0(q_0)\dot{q}_0 = 0$ - niezależne ograniczenia nieholonomiczne związane z wózkiem napędzanym;
- q_0 - współrzędne uogólnione opisujące zachowanie wózka napędzanego;
- $\sum_{i=0}^k A_{ki}(q_i, q_{i+1}, \dots, q_k)\dot{q}_i = 0$ - niezależne ograniczenia nieholonomiczne związane z k -tą przyczepą ($k = 1, 2, \dots, N$);
- $(q_0, q_1, \dots, q_k)^T$ - współrzędne uogólnione opisujące zachowanie k -tej przyczepy ($k = 1, 2, \dots, N$).

W celu ilustracji proponowanego sposobu wyznaczania ograniczeń kinematycznych dla wieloczołowych robotów mobilnych przedstawiamy przykład analizy wózka czterokołowego ciągnącego przyczepę dwukołową.

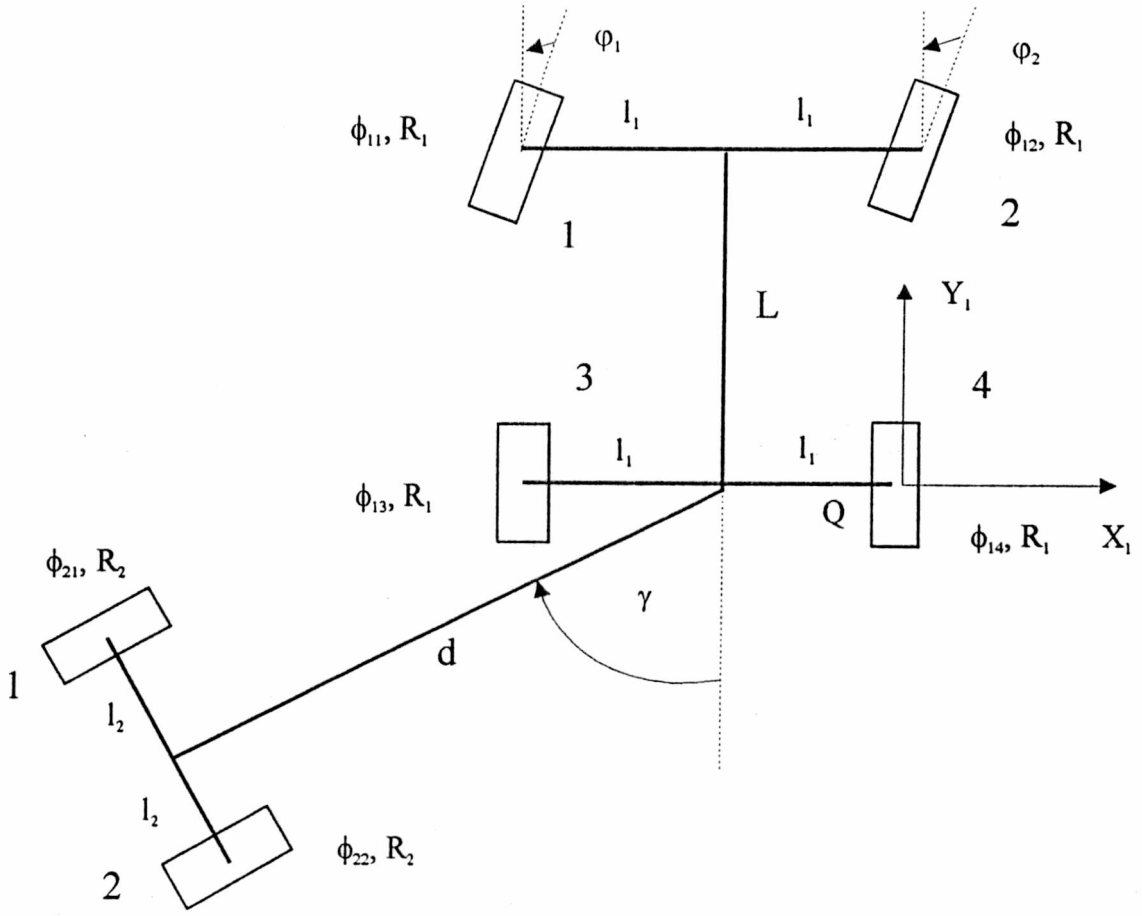
Przykład 2.1 *Ograniczenia nieholonomiczne dla czterokołowego wózka ciągnącego przyczepę dwukołową.*

Rozważmy przypadek czterokołowego kołowego robota mobilnego ciągnącego przyczepę dwukołową (Rys.2.5). Układ jezdny czterokołowego wózka składa się z dwóch par kół o następujących własnościach:

- koła przednie (1, 2) - posiadają zmienną orientację ($\varphi_1, \varphi_2 = \text{var}$) względem układu lokalnego (Q, X_1, Y_1) ;
- koła tylne (3, 4) - posiadają stałą orientację względem układu lokalnego (Q, X_1, Y_1) .

Ponadto będziemy zakładać, że:

- wózek napędzający układ i przyczepa są połączone przy pomocy sztywnego dyszla o długości d_1 ;
- kąt γ_1 jest zmienny w czasie.



Rys. 2.5: Wózek czterokołowy z przyczepą dwukołową - schemat kinematyczny.

Charakterystyka geometryczna kół rozpatrywanego układu

Wózek czterokołowy:

- koło 1:
 - $L_1 = L$; $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$; $L_2 = 2l_1$; $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$; $L_3 = 0$; $\alpha_3 = \varphi_1$; $\gamma = 0$; $r_1 = R_1$;
- koło 2:
 - $L_1 = L$; $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$; $L_2 = 0$; $\alpha_2 = -\frac{\pi}{2} + \varphi_2$; $\gamma = 0$; $r_2 = R_1$;
- koło 3:
 - $L_1 = 2l_1$; $\alpha_1 = \pi$; $\gamma = 0$; $r_3 = R_1$;
- koło 4:
 - $L_1 = 0$; $\alpha_1 = 0$; $\gamma = 0$; $r_4 = R_1$;

Przyczepa dwukołowa:

• koło 1:

$$- L_1 = l_1; \alpha_1 = \pi; L_2 = d_1; \alpha_2 = \gamma_1 - \frac{\pi}{2}; L_3 = l_2; \alpha_3 = -\frac{\pi}{2}; \gamma = 0; r_{21} = R_2;$$

• koło 2:

$$- L_1 = l_1; \alpha_1 = \pi; L_2 = d_1; \alpha_2 = \gamma_1 - \frac{\pi}{2}; L_3 = l_2; \alpha_3 = \frac{\pi}{2}; \gamma = 0; r_{22} = R_2;$$

Na podstawie charakterystyki geometrycznej kół wyznaczamy ograniczenia kinematyczne dla rozpatrywanego układu.

Ograniczenia kinematyczne

Wykorzystując charakterystykę geometryczną kół, otrzymujemy następujące równania ograniczeń nieholonomicznych:

Wózek czterokołowy:

brak poślizgu wzdłużnego kół:

$$\begin{bmatrix} \sin \varphi_1 & -\cos \varphi_1 & -L \sin \varphi_1 - 2l_1 \cos \varphi_1 \\ -\sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 & L_1 \sin \varphi_2 \\ 0 & -1 & 2l_1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} R(-\theta) \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_{11} \\ \dot{\phi}_{12} \\ \dot{\phi}_{13} \\ \dot{\phi}_{14} \end{bmatrix} = 0; \quad (2.40)$$

zapis w postaci macierzowej:

$$G_{11}(\varphi_1, \varphi_2) R(-\theta) \dot{\xi} + G_{13} \dot{\phi}_1 = 0; \quad (2.41)$$

brak poślizgu bocznego kół:

$$\begin{bmatrix} -\cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 & -L \cos \varphi_1 + 2l_1 \sin \varphi_1 \\ \cos \varphi_2 & \sin \varphi_2 & -L \cos \varphi_2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} R(-\theta) \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = 0, \quad (2.42)$$

zapis w postaci macierzowej:

$$C_{11}(\varphi_1, \varphi_2) R(-\theta) \dot{\xi} = 0. \quad (2.43)$$

Przyczepa dwukołowa:

brak poślizgu wzdłużnego kół:

$$\begin{bmatrix} -\sin \gamma_1 & \cos \gamma_1 & -l_1 \cos \gamma_1 + l_2 \\ \sin \gamma_1 & -\cos \gamma_1 & l_1 \cos \gamma_1 + l_2 \end{bmatrix} R(-\theta) \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_2 \\ l_2 \end{bmatrix} \dot{\gamma}_1 + \begin{bmatrix} R_2 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_{21} \\ \dot{\phi}_{22} \end{bmatrix} = 0; \quad (2.44)$$

zapis w postaci macierzowej:

$$G_{21}(\gamma_1)R(-\theta)\dot{\xi} + G_{22}\dot{\gamma}_1 + G_{23}\dot{\phi}_2 = 0; \quad (2.45)$$

brak poślizgu bocznego kół:

$$\begin{bmatrix} \cos \gamma_1 & \sin \gamma_1 & -l_1 \cos \gamma_1 - d_1 \\ -\cos \gamma_1 & -\sin \gamma_1 & l_1 \cos \gamma_1 + d_1 \end{bmatrix} R(-\theta) \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -d_1 \\ +d_1 \end{bmatrix} \dot{\gamma}_1 = 0; \quad (2.46)$$

zapis w postaci macierzowej:

$$C_{21}(\gamma_1)R(-\theta)\dot{\xi} + C_{22}\dot{\gamma}_1 = 0. \quad (2.47)$$

gdzie:

$$R(-\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\xi = \begin{bmatrix} x & y & \theta \end{bmatrix}^T.$$

Korzystając z postaci (2.41), (2.43), (2.44) i (2.46) otrzymujemy:

$$A^T(q)\dot{q} = \begin{bmatrix} C_{11}(\varphi_1, \varphi_2)R(-\theta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ G_{11}(\varphi_1, \varphi_2)R(-\theta) & 0 & G_{13} & 0 & 0 \\ C_{21}(\gamma_1)R(-\theta) & 0 & 0 & C_{22} & 0 \\ G_{21}(\gamma_1)R(-\theta) & 0 & 0 & G_{22} & G_{23} \end{bmatrix} \dot{q} = \begin{bmatrix} A_0(q_0) & 0 \\ A_{10}(q_0, q_1) & A_{11}(q_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix} = 0, \quad (2.48)$$

gdzie:

$$q_0 = \begin{bmatrix} x & y & \theta & \varphi_1 & \varphi_2 & \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} & \phi_{14} \end{bmatrix}^T;$$

$$q_1 = \begin{bmatrix} \gamma_1 & \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix};$$

$$A_0 = \begin{bmatrix} C_{11}(\varphi_1, \varphi_2)R(-\theta) & 0 & 0 \\ G_{11}(\varphi_1, \varphi_2)R(-\theta) & 0 & G_{13} \end{bmatrix};$$

$$A_{10} = \begin{bmatrix} C_{21}(\gamma_1)R(-\theta) & 0 & 0 \\ G_{21}(\gamma_1)R(-\theta) & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$A_{11} = \begin{bmatrix} C_{22} & 0 \\ G_{22} & G_{23} \end{bmatrix}.$$

Przedstawiony powyżej przykład ilustruje metodę otrzymywania ograniczeń postaci (2.39). Jak łatwo zauważyć, zależności (2.39) możemy zapisać w następujący sposób:

$$\begin{aligned} A_0(q_0)\dot{q}_0 &= 0; \\ A_{10}(q_0, q_1)\dot{q}_0 + A_{11}(q_1)\dot{q}_1 &= 0; \\ A_{20}(q_0, q_1, q_2)\dot{q}_0 + A_{21}(q_1, q_2)\dot{q}_1 + A_{22}(q_2)\dot{q}_2 &= 0; \\ &\dots \\ \sum_{i=0}^N A_{Ni}(q_i, q_{i+1}, \dots, q_N)\dot{q}_i &= 0. \end{aligned} \quad (2.49)$$

W celu wyprowadzenia modelu kinematyki rozpatrywanego układu mechanicznego szukamy macierzy $S(q)$ oraz wektora η , które spełniają poniższe warunki:

$$\begin{aligned} A^T(q)S(q) &= 0; \\ \dot{q} &= S(q)\eta. \end{aligned}$$

Z równań opisujących ograniczenia kinematyczne (2.39) wynika, że macierz $S(q)$ jest następującej postaci:

$$S(q) = \begin{bmatrix} S_0(q_0) \\ S_1(q_0, q_1) \\ \dots \\ S_N(q_0, q_1, \dots, q_N) \end{bmatrix}. \quad (2.50)$$

Powyższe spostrzeżenie pozwala zapisać zależność $A^T S(q) = 0$:

$$\begin{aligned} A_0(q_0)S_0(q_0) &= 0; \\ A_{10}(q_0, q_1)S_0(q_0) + A_{11}(q_1)S_1(q_0, q_1) &= 0; \\ \dots \\ \sum_{i=0}^N A_{Ni}(q_i, q_{i+1}, \dots, q_N)S_i(q_0, q_1, \dots, q_N) &= 0. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Zalóżmy, że istnieje macierz S_0 oraz wektor η spełniający zależności:

$$\begin{aligned} A_0^T(q_0)S_0(q_0) &= 0; \\ \dot{q}_0 &= S_0(q_0)\eta. \end{aligned}$$

Ogólne zasady dotyczące wyznaczania macierzy $S_0(q_0)$ oraz wektora η , czyli modeli kinematyki pojedynczego robota mobilnego, zostały przedstawione w pracy [26] i opisane w rozdziale (2.2) niniejszej rozprawy. Podstawiając równania (2.52) do zależności określających ograniczenia dla przyczepy nr 1:

$$A_{10}(q_0, q_1)\dot{q}_0 + A_{11}(q_1)\dot{q}_1 = 0 \quad (2.52)$$

otrzymujemy:

$$A_{10}(q_0, q_1)S_0(q_0)\eta + A_{11}(q_1)\dot{q}_1 = 0. \quad (2.53)$$

Nietrudno zauważyć, że wektor q_1 możemy podzielić w następujący sposób (porównaj (2.48)):

$$q_1 = \begin{pmatrix} q_{11}, & q_{12} \end{pmatrix}^T$$

gdzie:

- q_{12} - współrzędne uogólnione opisujące kąty obrotu kół pierwszej przyczepy;
- q_{11} - pozostałe współrzędne uogólnione.

To spostrzeżenie pozwala zapisać (2.53) w postaci:

- równania związane z brakiem poślizgu bocznego kół:

$$A_{10}^*(q_0, q_1)S_0(q_0)\eta + A_{11}^*\dot{q}_{11} = 0; \quad (2.54)$$

- równania związane z brakiem poślizgu wzdłużnego kół:

$$A_{10}^{**}(q_0, q_1)S_0(q_0)\eta + A_{11}^{**}(q_1)\dot{q}_{11} + E_1\dot{q}_{12} = 0. \quad (2.55)$$

Przy założeniu, że macierz $A_{11}^*(q_1)$ jest nieosobliwa, zachodzi poniższa zależność:

$$\dot{q}_{11} = -A_{11}^{*-1}(q_1)A_{10}^*(q_0, q_1)S_0(q_0)\eta. \quad (2.56)$$

Z postaci ogólnej ograniczeń wynika, że macierz E jest nieosobliwa i diagonalna, co umożliwia wyznaczenie $\dot{q}_{12}$ z równań (2.55):

$$\dot{q}_{12} = -E_1^{-1} [A_{10}^{**}(q_0, q_1)S_0(q_0)\eta + A_{11}^{**}(q_1)\dot{q}_{11}]. \quad (2.57)$$

Z kolei zależność (2.56) pozwala zapisać (2.57) w poniższej postaci:

$$\dot{q}_{12} = -E_1^{-1} [A_{10}^{**}(q_0, q_1) - A_{11}^{**}(q_1)A_{11}^{*-1}(q_1)A_{10}^*(q_0, q_1)]S_0(q_0)\eta. \quad (2.58)$$

Z równań (2.56) i (2.58) wynika, że macierz $S_1(q_0, q_1)$ jest postaci:

$$S_1(q_0, q_1) = \begin{bmatrix} -A_{11}^{*-1}(q_1)A_{10}^*(q_0, q_1)S_0(q_0) \\ -E_1^{-1} [A_{10}^{**}(q_0, q_1) - A_{11}^{**}(q_1)A_{11}^{*-1}(q_1)A_{10}^*(q_0, q_1)]S_0(q_0) \end{bmatrix}. \quad (2.59)$$

Analogicznie postępujemy w przypadku kolejnych równań opisanych przez zależności (2.49). Nietrudno zauważyć, że opisywana metoda pozwala na wyprowadzanie modeli kinematyki wieloczlonowych układów jezdnych, dla których podmacierze $A_{ii}^*(q_i)$ ($i = 1, 2, \dots, N$) związane z ograniczeniami na brak poślizgu bocznego przyczep są nieosobliwe. Przykłady złożonych układów jezdnych, które spełniają powyższe warunki były analizowane w pracy [25].

Rozdział 3

Modele matematyczne dynamiki kołowych robotów mobilnych

Po szczegółowym omówieniu rozwiązań dotyczących modelowania równań kinematyki kołowych robotów mobilnych zajmiemy się obecnie problemami związanymi z wyznaczaniem równań opisujących ich dynamikę. Zdefiniujemy funkcję Lagrange'a dla rozpatrywanego układu mechanicznego bez ograniczeń kinematycznych, czyli układu swobodnego:

$$L(q, \dot{q}) = E_k(q, \dot{q}) - E_p(q), \quad (3.1)$$

gdzie:

$E_k(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T K(q) \dot{q}$ - energia kinetyczna układu swobodnego;

$E_p(q)$ - energia potencjalna układu swobodnego.

W rozdziale (2.1) pokazaliśmy, że założenie braku poślizgu kół narzuca na rozważany układ ograniczenia nieholonomiczne postaci:

$$A^T(q) \dot{q} = 0, \quad (3.2)$$

gdzie:

$A^T(q)$ ma rozmiar $m \times n$.

Stosując zasadę d'Alemberta dla układów nieholonomicznych, zgodnie z wyprowadzeniem zawartym w podrozdziale 1.2, otrzymujemy równania:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = A(q) \lambda, \quad (3.3)$$

gdzie:

λ - m -wymiarowy wektor mnożników Lagrange'a.

Jeżeli na pewne uogólnione współrzędne naszego układu działają uogólnione siły zewnętrzne, równania ruchu możemy zapisać w postaci:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = A(q) \lambda + B u, \quad (3.4)$$

gdzie:

u - p -wymiarowy wektor uogólnionych sił zewnętrznych działających na rozpatrywany układ;
 B - macierz rozmiaru $n \times p$:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } u_j \text{ działa bezpośrednio na } q_i; \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases} \quad (3.5)$$

Po przekształceniach wykorzystujących postać funkcji Lagrange'a (3.1) i ograniczeń (3.2) równania przybierają postać:

$$K(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = A(q)\lambda + Bu, \quad (3.6)$$

gdzie:

$K(q)$ - macierz inercji, symetryczna, dodatnio określona, rozmiaru $n \times n$;
 $C(q, \dot{q})$ - macierz postaci:

$$C(q, \dot{q}) = \frac{d}{dt}K(q) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q}(\dot{q}^T K(q));$$

$g(q)$ - wektor grawitacji.

Mnożąc zależność (3.6) lewostronnie przez macierz $S^T(q)$ ($S^T(q)A(q) = 0$), eliminujemy człon, w którym występuje λ , a następnie uwzględniamy zależności opisujące własności kinematyczne:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= S(q)\eta; \\ \ddot{q} &= S(q)\dot{\eta} + \dot{S}(q)\eta, \end{aligned}$$

gdzie:

$S(q)$ - macierz $n \times (n - m)$, pełnego rzędu, której kolumny rozpinają dystrybucję $\Delta = \text{Ker}(A^T(q))$;
 $R(q, \dot{q}) = \frac{d}{dt}S(q)$;
 η - wektor $(n - m)$ -wymiarowy.

W efekcie otrzymujemy następujące równania ruchu dla układów nieholonomicznych:

$$\begin{cases} S^T(q)K(q)S(q)\dot{\eta} + S^T(q)[C(q, S(q)\eta)S(q) + K(q)R(q, S(q)\eta)]\eta + S^T(q)g(q) = S^T(q)B(q)u; \\ \dot{q} = S(q)\eta. \end{cases} \quad (3.7)$$

Z przedstawionego powyżej rozumowania wynika, że przy wyprowadzaniu modelu dynamiki kołowych robotów mobilnych pozostaje nam do rozwiązania problem wyznaczania energii kinetycznej i potencjalnej.

3.1 Energia kinetyczna i potencjalna kołowego robota mobilnego

Przedmiotem naszych rozważań będzie problem wyznaczania funkcji Lagrange'a dla robota mobilnego $L(q, \dot{q})$ opisanej formułą (3.1). Jak łatwo zauważyć, energia potencjalna układu

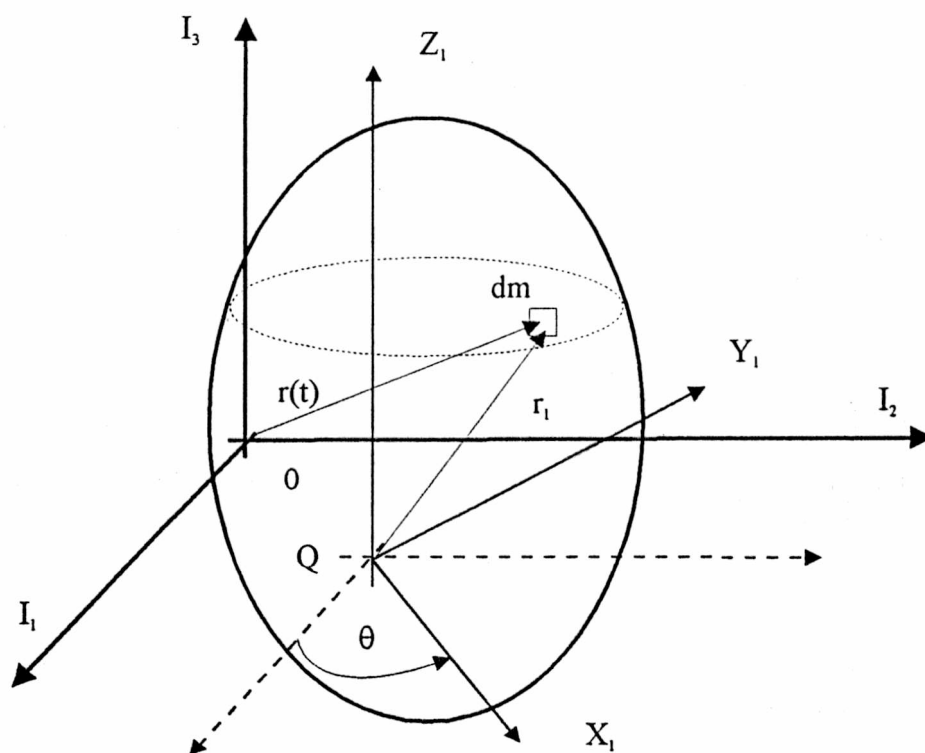
poruszającego się w płaszczyźnie (O, I_1, I_2) jest stała ($E_p = \text{const}$), zatem nie odgrywa roli w równaniach ruchu. Z kolei przy wyznaczaniu energii kinetycznej robota mobilnego zakładamy, że posiada ona jedynie następujące dwa składniki:

- energię skrzyni wózka;
- energię obracających się kół.

W następnych podrozdziałach zajmiemy się wyprowadzeniem zależności określających wyżej wymienione składniki energii kinetycznej.

3.1.1 Energia kinetyczna skrzyni robota mobilnego

Weźmy pod uwagę bryłę sztywną B poruszającą się na płaszczyźnie (O, I_1, I_2) . Układ (O, I_1, I_2, I_3) jest bazowym układem odniesienia, natomiast układ (Q, X_1, Y_1, Z_1) jest układem ruchomym związanym z bryłą sztywną (Rys.3.1). Rozważmy element masy dm , którego położenie względem układu (Q, X_1, Y_1, Z_1) jest stałe w czasie ($r_1 = (x_1 \ x_2 \ x_3 \ 1)^T$).



Rys. 3.1: Bryła sztywna poruszająca się w płaszczyźnie (O, I_1, I_2) .

W celu wyznaczenia energii dK elementu dm , najpierw określamy jego współrzędne w układzie

bazowym:

$$r(t) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = P(x, y, z, \theta) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (3.8)$$

gdzie:

$$P(x, y, z, \theta) = \text{Trans}(I_1, x) \text{Trans}(I_2, y) \text{Trans}(I_3, z) \text{Rot}(I_3, \theta);$$

$$z = \text{const};$$

$\text{Trans}(I_1, x), \text{Trans}(I_2, y), \text{Trans}(I_3, z), \text{Rot}(I_3, \theta)$ – zostały zdefiniowane w rozdziale 2.1 rozprawy.

Energia kinetyczna elementu dm liczona względem układu $(0, I_1, I_2, I_3)$ wynosi:

$$dK = \frac{1}{2} dm < \dot{r}(t), \dot{r}(t) >. \quad (3.9)$$

Jak łatwo zauważyć, kwadrat skalarny $< \dot{r}(t), \dot{r}(t) >$ można przedstawić przy pomocy operatora śladu macierzy $\dot{r}(t)\dot{r}^T(t)$ [45]:

$$< \dot{r}(t), \dot{r}(t) > = \text{tr}(\dot{r}(t)\dot{r}^T(t)). \quad (3.10)$$

Korzystając ze stałości w czasie wektora r_1 , obliczamy $\dot{r}(t)$:

$$\dot{r}(t) = \frac{d}{dt}(P(x, y, z, \theta)) r_1. \quad (3.11)$$

Wykorzystując zależność (3.11) i własność (3.10), możemy wyrazić (3.9) w postaci:

$$dK = \frac{1}{2} dm \text{tr}\left(\frac{d}{dt}P(x, y, \theta) r_1 r_1^T \frac{d}{dt}P^T(x, y, \theta)\right). \quad (3.12)$$

Energię kinetyczną rozpatrywanej bryły uzyskujemy, całkując po całym ciele B , wyrażenie (3.12):

$$K = \frac{1}{2} \text{tr}\left(\frac{d}{dt}(P(x, y, z, \theta)) \int_B r_1 r_1^T dm \frac{d}{dt}(P^T(x, y, z, \theta))\right). \quad (3.13)$$

Z postaci wektora r_1 wynika, że wyrażenie całkowite występujące w (3.13) ma następującą strukturę:

$$\int_B r_1 r_1^T dm = \begin{bmatrix} \int_B x_1^2 dm & \int_B x_1 x_2 dm & \int_B x_1 x_3 dm & \int_B x_1 dm \\ \int_B x_2 x_1 dm & \int_B x_2^2 dm & \int_B x_2 x_3 dm & \int_B x_2 dm \\ \int_B x_3 x_1 dm & \int_B x_3 x_2 dm & \int_B x_3^2 dm & \int_B x_3 dm \\ \int_B x_1 dm & \int_B x_2 dm & \int_B x_3 dm & \int_B 1 dm \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Uwzględniając zależności opisujące postać macierzy $P(x, y, z, \theta)$, otrzymujemy:

$$K = \frac{1}{2} I_z \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M_t (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + P_1 (\dot{y} \cos \theta - \dot{x} \sin \theta) \dot{\theta} - P_2 (\dot{y} \sin \theta + \dot{x} \cos \theta) \dot{\theta}, \quad (3.15)$$

gdzie:

- I_z — moment bezwładności ciała L względem osi Z_1 ;
 M_t — masa całkowita ciała L ;
 P_1, P_2 — momenty rzędu 1 ciała L w układzie (Q, X_1, Y_1, Z_1)
 $(P_1 = \int_B x_1 dm, P_2 = \int_B x_2 dm)$.

Równanie (3.15) możemy zapisać w postaci macierzowej:

$$K = \frac{1}{2} \dot{\xi}^T M(\xi) \dot{\xi}, \quad (3.16)$$

gdzie:

$$\xi = (x, y, \theta)^T;$$

$$M(\xi) = \begin{bmatrix} M_t & 0 & -P_1 \sin \theta - P_2 \cos \theta \\ 0 & M_t & P_1 \cos \theta - P_2 \sin \theta \\ -P_1 \sin \theta - P_2 \cos \theta & P_1 \cos \theta - P_2 \sin \theta & I_z \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

Zależność (3.16) określa energię skrzyni wózka względem układu bazowego $(0, I_1, I_2, I_3)$. W przypadku, kiedy lokalny układ współrzędnych jest umieszczony w środku ciężkości rozpatrywanej bryły, $P_1 = P_2 = 0$, macierz $M(\xi)$ przyjmuje postać diagonalną:

$$M(\xi) = \begin{bmatrix} M_t & 0 & 0 \\ 0 & M_t & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

3.1.2 Energia kinetyczna pojedynczego koła

Określimy teraz energię kinetyczną pojedynczego koła robota mobilnego. W tym celu rozważamy koło przedstawione na Rys.2.1 Energia kinetyczna elementu dm liczona w układzie $(0, I_1, I_2, I_3)$ wynosi:

$$dK = \frac{1}{2} dm < \dot{r}(t), \dot{r}(t) >, \quad (3.19)$$

gdzie:

$$r(t) = P(x, y, z, \theta, \beta, \gamma, \phi, R) r_1; \quad (3.20)$$

$r_1 = (x_1, x_2, x_3, 1)^T$ — położenie elementu dm w lokalnym układzie współrzędnych
 związanych z obracającym się kołem;

$$P(\cdot) = Trans(I_1, x) Trans(I_2, y) Trans(I_3, z) Rot(I_3, \theta) Trans(I_3, -e) Rot(I_3, \alpha) \\ Trans(I_1, l) Rot(I_3, \beta) Trans(I_1, d) Rot(I_3, \gamma) Rot(I_1, \phi); \quad (3.21)$$

$$Rot(I_1, \phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Korzystając ze stałości w czasie wektora r_1 , obliczamy $\dot{r}(t)$:

$$\dot{r}(t) = \frac{d}{dt} (P(x, y, z, \theta, \alpha, \beta, \gamma, \phi)) r_1. \quad (3.22)$$

Z uwagi na własności opisane przez (3.10) i (3.22), zależności (3.19) możemy przedstawić w postaci:

$$dK = \frac{1}{2} dm \operatorname{tr} \left(\frac{d}{dt} P(\cdot) r_1 r_1^T \frac{d}{dt} P^T(\cdot) \right). \quad (3.23)$$

Energię rozpatrywanego ciała otrzymujemy, całkując (3.23) po kole D wyrażenie:

$$K = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \left(\frac{d}{dt} (P(\cdot)) \int_D r_1 r_1^T dm \frac{d}{dt} (P^T(\cdot)) \right), \quad (3.24)$$

gdzie:

$$\int_D r_1 r_1^T dm = \begin{bmatrix} \int_D x_1^2 dm & \int_D x_1 x_2 dm & \int_D x_1 x_3 dm & \int_D x_1 dm \\ \int_D x_2 x_1 dm & \int_D x_2^2 dm & \int_D x_2 x_3 dm & \int_D x_2 dm \\ \int_D x_3 x_1 dm & \int_D x_3 x_2 dm & \int_D x_3^2 dm & \int_D x_3 dm \\ \int_D x_1 dm & \int_D x_2 dm & \int_D x_3 dm & \int_D 1 dm \end{bmatrix}. \quad (3.25)$$

Załóżmy, że:

- α, γ - są stałe w czasie;
- lokalny układ współrzędnych związanych z obracającym się kołem jest umieszczony w środku rozważanego koła;
- osie wspomnianego układu są głównymi osiami bezwładności koła.

Korzystając z powyższych własności, zależności (3.24) i (3.25) dają się zapisać w następującej postaci:

$$\int_D r_1 r_1^T dm = \begin{bmatrix} \int_D x_1^2 dm & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \int_D x_2^2 dm & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \int_D x_3^2 dm & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \int_D dm \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} K = & \frac{1}{2} I_{x_1} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} I_{x_3 x_3} \dot{\Delta}^2 + \frac{1}{2} M (d^2 \dot{\Delta}^2 + l^2 \dot{\theta}^2 + 2ld \dot{\Delta} \dot{\theta} \cos \beta + \dot{x}^2 + \\ & \dot{y}^2 + 2d \dot{\Delta} (\dot{y} \cos(\alpha + \beta + \theta) - \dot{x} \sin(\alpha + \beta + \theta)) + 2l \dot{\theta} (\dot{y} \cos(\alpha + \theta) - \\ & \dot{x} \sin(\alpha + \theta))), \end{aligned} \quad (3.27)$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
I_{x_1 x_1} &= \int_D (x_2^2 + x_3^2) dm = \frac{1}{2} M R^2; \\
I_{x_3 x_3} &= \int_D (x_1^2 + x_2^2) dm = \frac{1}{12} M w^2 + \frac{1}{4} M R^2; \\
M &- \text{masa koła}; \\
R &- \text{promień koła}; \\
w &- \text{grubość koła}; \\
\Delta &= \beta + \theta.
\end{aligned}$$

Równanie (3.27) możemy przedstawić w postaci macierzowej:

$$K(\xi, \dot{\xi}) = \frac{1}{2} \dot{\xi}^T R(\xi) \dot{\xi}, \quad (3.28)$$

gdzie:

$$\xi = (x, y, \theta, \beta, \phi)^T; \quad (3.29)$$

$$R(\xi) = \begin{bmatrix} M & 0 & -P_{x\theta} & -P_{x\beta} & 0 \\ 0 & M & P_{y\theta} & P_{y\beta} & 0 \\ -P_{x\theta} & P_{y\theta} & I_{\theta\theta} & I_{\theta\beta} & 0 \\ -P_{x\beta} & P_{y\beta} & I_{\theta\beta} & I_{\beta\beta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{x_1 x_1} \end{bmatrix}; \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned}
I_{\theta\theta} &= I_{x_3 x_3} + M(d^2 + l^2 + 2dl \cos \beta); \\
I_{\beta\beta} &= I_{x_3 x_3} + M d^2; \\
I_{\theta\beta} &= I_{x_3 x_3} + M(d^2 + dl \cos \beta); \\
P_{x\theta} &= M(l \sin(\theta + \alpha) + d \sin(\alpha + \beta + \theta)); \\
P_{y\theta} &= M(l \cos(\theta + \alpha) + d \cos(\alpha + \beta + \theta)); \\
P_{x\beta} &= M d \sin(\alpha + \beta + \theta); \\
P_{y\beta} &= M d \cos(\alpha + \beta + \theta).
\end{aligned} \quad (3.31)$$

Zależności (3.28), (3.29) i (3.31) określają energię kinetyczną koła D (Rys.2.1) liczoną względem układu bazowego $(0, I_1, I_2, I_3)$.

3.1.3 Całkowita energia kinetyczna kołowego robota mobilnego

Załóżmy, że rozpatrywany robot mobilny składa się ze skrzyni i k -kół. Przy powyższych założeniach wektor współrzędnych uogólnionych opisujących zachowanie robota mobilnego będzie następującej postaci:

$$q = (x, y, \theta, \beta_1, \dots, \beta_k, \phi_1, \dots, \phi_k)^T. \quad (3.32)$$

gdzie:

- $\dim q = n$;
- x, y – współrzędne określające położenie skrzyni robota względem bazowego układu odniesienia $(0, I_1, I_2, I_3)$;
- θ – orientacja robota względem układu $(0, I_1, I_2, I_3)$;
- ϕ_i – kąty obrotu kół robota;
- β_i – kąty określające orientację kół względem lokalnego układu odniesienia związanego ze skrzynią robota.

Zauważmy, że przy wykorzystaniu zależności (3.16) i (3.18) oraz (3.29), (3.31) i (3.32), energia kinetyczna robota mobilnego daje się zapisać w postaci formy kwadratowej:

$$E_k = \frac{1}{2} \dot{q}^T K(q) \dot{q}, \quad (3.33)$$

gdzie:

$$K(q) = \begin{bmatrix} P_1 & P_4 & 0 \\ P_4^T & P_2 & 0 \\ 0 & 0 & P_3 \end{bmatrix}. \quad (3.34)$$

Poszczególne podmacierze macierzy inercji $K(q)$ rozpatrywanego układu mechanicznego są postaci:

$$P_1 = \begin{bmatrix} M_t + \sum_{i=1}^k M_i & 0 & -P_1 \sin \theta - P_2 \cos \theta + \\ & & -\sum_{i=1}^k P_{x\theta_i} \\ 0 & M_t + \sum_{i=1}^k M_i & P_1 \cos \theta - P_2 \sin \theta + \\ & & + \sum_{i=1}^k P_{y\theta_i} \\ -P_1 \sin \theta - P_2 \cos \theta + & P_1 \cos \theta - P_2 \sin \theta + & I_z + \sum_{i=1}^k I_{\theta\theta_i} \\ -\sum_{i=1}^k P_{x\theta_i} & + \sum_{i=1}^k P_{y\theta_i} & \end{bmatrix}; \quad (3.35)$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} I_{\beta\beta_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I_{\beta\beta_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & I_{\beta\beta_k} \end{bmatrix}; \quad (3.36)$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} I_{(x_1x_1)_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I_{(x_1x_1)_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & I_{(x_1x_1)_k} \end{bmatrix}; \quad (3.37)$$

$$P_4 = \begin{bmatrix} -P_{x\beta_1} & -P_{x\beta_2} & \dots & -P_{x\beta_k} \\ P_{y\beta_1} & P_{y\beta_2} & \dots & P_{y\beta_k} \\ P_{\theta\beta_1} & P_{\theta\beta_2} & \dots & P_{\theta\beta_k} \end{bmatrix}. \quad (3.38)$$

gdzie:

$$I_{\theta\theta_i} = \frac{1}{12} M_i w_i^2 + \frac{1}{4} M_i R_i^2 + M_i (d_i^2 + l_i^2 + 2d_i l_i \cos \beta_i);$$

$$\begin{aligned}
I_{\beta\beta_i} &= \frac{1}{12} M_i w_i^2 + \frac{1}{4} M_i R_i^2 + M_i d_i^2; \\
P_{x\theta_i} &= M_i (l_i \sin(\theta + \alpha_i) + d_i \sin(\theta + \alpha_i + \beta_i)); \\
P_{y\theta_i} &= M_i (l_i \cos(\theta + \alpha_i) + d_i \cos(\theta + \alpha_i + \beta_i)); \\
I_{(x_1 x_1)i} &= \frac{1}{2} M_i R_i^2; \\
P_{x\beta_i} &= M_i d_i \sin(\theta + \alpha_i + \beta_i); \\
P_{y\beta_i} &= M_i d_i \cos(\theta + \alpha_i + \beta_i); \\
P_{\theta\beta_i} &= \frac{1}{12} M_i w_i^2 + \frac{1}{4} M_i R_i^2 + M_i (d_i^2 + d_i l_i \cos \beta_i); \\
M_t &- \text{masa skrzyni robota}; \\
I_z &- \text{moment bezwładności skrzyni robota względem osi } Z_1 \text{ (rys.1)}; \\
M_i &- \text{masa } i\text{-tego koła}; \\
d_i, l_i &- \text{parametry geometryczne dla } i\text{-tego koła}; \\
w_i &- \text{grubość } i\text{-tego koła}; \\
R_i &- \text{promień } i\text{-tego koła}; \\
\alpha_i, \beta_i &- \text{kąty związane z } i\text{-tym kołem}.
\end{aligned}$$

Przedstawione powyżej zależności pozwalają na wyznaczenie energii kinetycznej robota mobilnego na podstawie charakterystyki geometrycznej jego kół oraz wartości tzw. parametrów barycentrycznych [45] (masy i momenty bezwładności, czyli M_t , I_z , P_1 , P_2 , M_i ($i \in [1, \dots, k]$)). Należy zauważyć, że metoda wyznaczania modelu kinematyki (generowanie macierzy $S(q)$) opisana w rozdziale (2.2) niniejszej rozprawy wymagała również znajomości charakterystyki geometrycznej kół. Wykorzystanie powyższych spostrzeżeń umożliwia komputerową implementację tych metod, która zostanie przedstawiona w rozdziale 5 rozprawy. Posługując się metodami przedstawionymi w rozdziale 2.3 podano wyprowadzenie modeli nieholonomicznych kołowych robotów mobilnych uwzględniające dynamiczne własności silników prądu stałego zastosowanych do napędzania kół. Z uwagi na potrzebę wyznaczania modeli dynamiki dla złożonych układów jezdnych w następnym podrozdziale zajmiemy się wyprowadzeniem zależności opisujących ich energię kinetyczną.

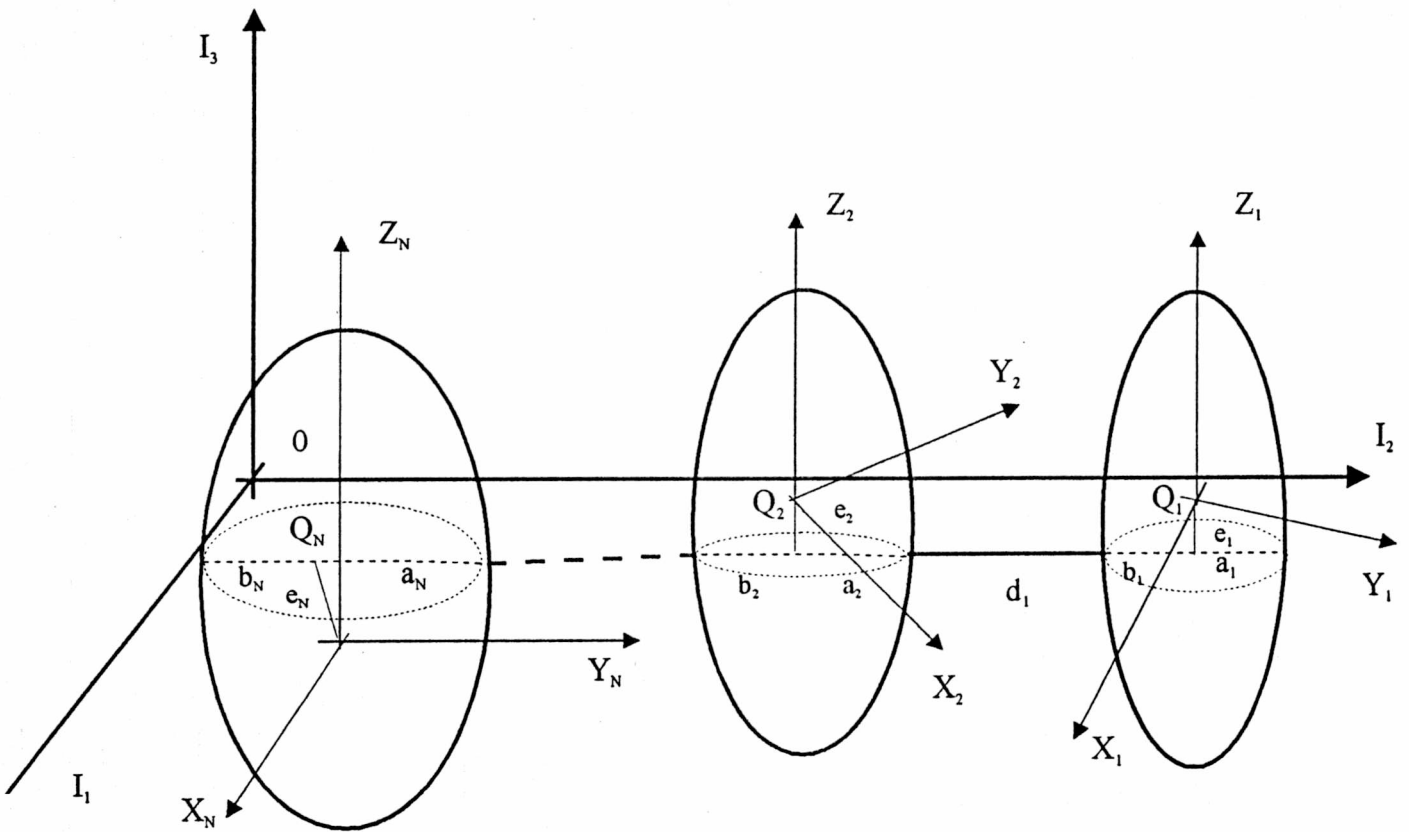
3.2 Energia kinetyczna wieloczołowych układów jezdnych

Podobnie jak w przypadku pojedynczego robota, do wyznaczenia modelu matematycznego dynamiki wieloczołowego kołowego robota mobilnego jest potrzebna znajomość jego energii kinetycznej i potencjalnej. Energia potencjalna układu bez ograniczeń nieholonomicznych poruszającego się w płaszczyźnie $(0, I_1, I_2, I_3)$ jest stała i nie będzie uwzględniana w równaniach ruchu natomiast energia kinetyczna robota mobilnego jest sumą:

- energii skrzyń wózków;
- energii obracających się kół.

3.2.1 Energia kinetyczna skrzyń wózków wchodzących w skład wielocłonowego robota mobilnego

W celu znalezienia zależności określających energię kinetyczną skrzyń wózków złożonego układu jezdnego rozważymy problem wyznaczenia energii kinetycznej dla układu N -brył sztywnych B_i ($i = 1, \dots, N$) poruszających się po płaszczyźnie $(0, I_1, I_2)$. Rozpatrywany przez nas układ ilustrują Rys.3.2 i Rys.3.2. Odległość między bryłami B_i i B_{i+1} ($i = 1, \dots, N - 1$) jest stała i wynosi d_i , co oznacza, że są one połączone sztywnym dyszlem, którego energię pomijamy w naszych rozważaniach. Dodatkowo zakładamy, że bryła B_i ($i = 1, \dots, N$) rozpatrywanego układu porusza się ruchem obrotowym względem osi $Q_i Z_i$ lokalnego układu współrzędnych (Q_i, X_i, Y_i, Z_i) związanego z tą bryłą [24]. Jak łatwo zauważyć, energia kinetyczna rozpatrywanego układu brył liczona w układzie $(0, I_1, I_2, I_3)$ jest sumą energii poszczególnych brył w tym układzie, a energia potencjalna jest stała względem czasu i może być pominięta.



Rys. 3.2: Układ N -brył sztywnych poruszających się względem układu $(0, I_1, I_2, I_3)$.

Energia bryły B_1 .

Problem znalezienia energii kinetycznej dla pojedynczej bryły poruszającej się w układzie $(0, I_1, I_2, I_3)$ był rozpatrywany w podrozdziale (3.1.1). Energię bryły B_1 możemy zapisać w postaci:

$$E_{kB1} = \frac{1}{2} \dot{\xi}_1^T K_1(\xi_1) \dot{\xi}_1, \quad (3.39)$$

gdzie:

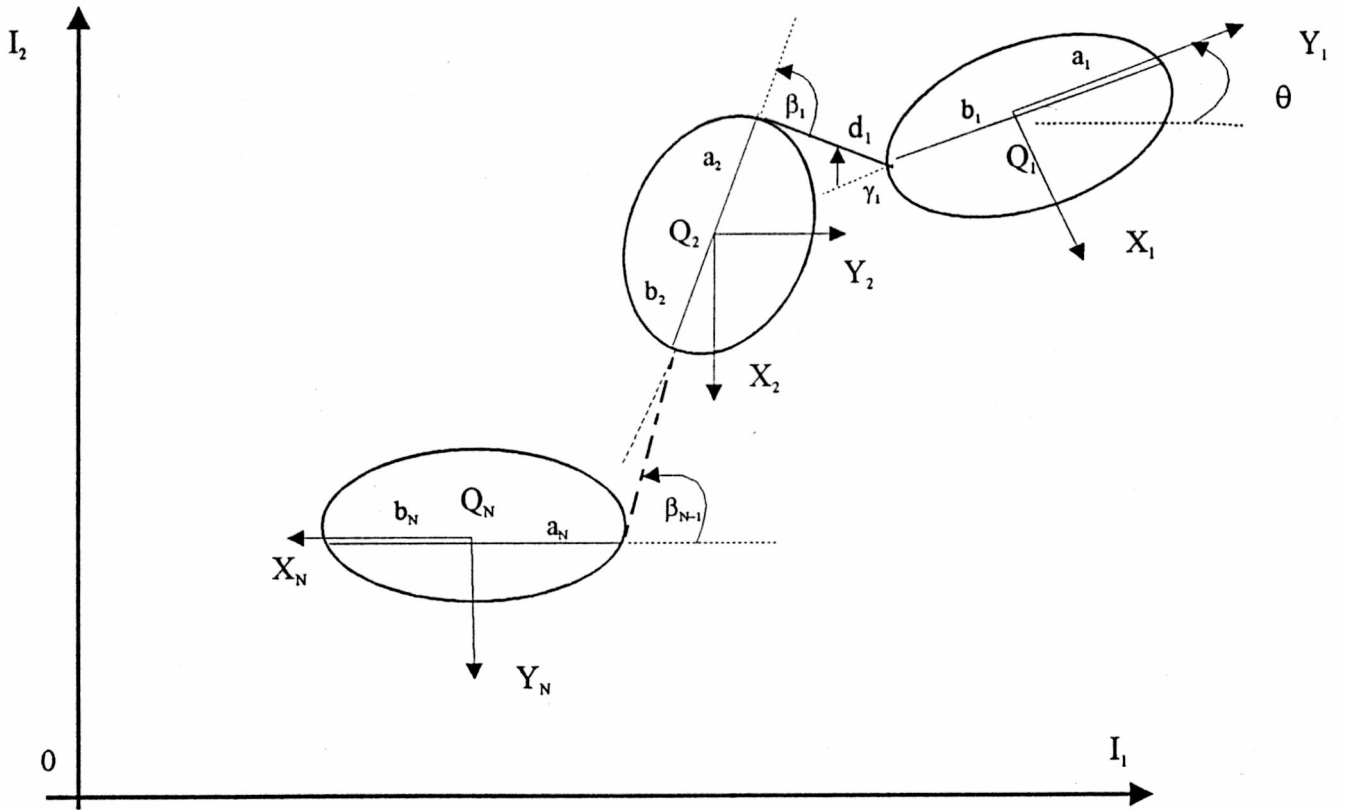
$$\xi_1 = \begin{bmatrix} x & y & \theta \end{bmatrix};$$

$$K_1(\xi_1) = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & -A_1 \sin \theta - D_1 \cos \theta \\ 0 & M_1 & A_1 \cos \theta - D_1 \sin \theta \\ -A_1 \sin \theta - D_1 \cos \theta & A_1 \cos \theta - D_1 \sin \theta & I_{z1} \end{bmatrix};$$

M_1 – masa bryły B_1 ;

I_{z1} – moment bezwładności bryły B_1 względem osi $Q_1 Z_1$;

A_1, D_1 – elementy proporcjonalne do współrzędnych środka ciężkości bryły B_1 w układzie (Q_1, X_1, Y_1, Z_1) .



Rys. 3.3: Układ N -brył sztywnych poruszająca się po płaszczyźnie $(0, I_1, I_2)$.

Energia bryły B_i ($i = 2, \dots, N$).

Rozważmy element masy dm , którego położenie względem układu (Q_i, X_i, Y_i, Z_i) jest stałe w czasie ($r_{mi} = (x_{mi}, y_{mi}, z_{mi}, 1)^T$). Energia kinetyczna elementu dm liczona względem układu $(0, I_1, I_2, I_3)$ wynosi [45]:

$$dE_{kB_i} = \frac{1}{2} dm \langle \dot{r}_i(t), \dot{r}_i(t) \rangle. \quad (3.40)$$

gdzie:

- $r_i(t) = (x_i, y_i, z_i, 1)^T$ -współrzędne jednorodne elementu dm w układzie $(0, I_1, I_2, I_3)$.

Jak łatwo zauważyć, wektor $r(t)$ można wyrazić przy pomocy zależności:

$$r_i(t) = P_i(\cdot) r_{mi}, \quad (3.41)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} r_{mi} &= \begin{pmatrix} x_{mi} & y_{mi} & z_{mi} & 1 \end{pmatrix}^T; \\ P_i(\cdot) &= Trans(I_1, x) Trans(I_2, y) Trans(I_3, z) Rot(I_3, \theta + \frac{3}{2}\pi) Trans(I_3, -e_1) Trans(I_1, b_1) \\ &\quad \left[\prod_{k=1}^{i-1} Rot(I_3, \gamma_k) Trans(I_1, d_k) Rot(I_3, \beta_k) Trans(I_1, a_{k+1} + b_{k+1}) \right] Trans(I_1, -b_i) \\ &\quad Trans(I_3, e_i). \end{aligned}$$

Różniczkując względem czasu wyrażenie (3.41) otrzymujemy:

$$\dot{r}_i(t) = \frac{d}{dt} (P_i(\cdot)) r_{mi}. \quad (3.42)$$

Z kolei korzystając z własności:

$$\langle \dot{r}(t), \dot{r}(t) \rangle = tr(\dot{r}(t) \dot{r}^T(t)). \quad (3.43)$$

oraz z (3.42) energię rozpatrywanego elementu dm możemy zapisać w postaci:

$$dE_{Bi} = \frac{1}{2} dm \, tr\left(\frac{d}{dt} P_i(\cdot) r_{mi} r_{mi}^T \frac{d}{dt} P_i^T(\cdot)\right). \quad (3.44)$$

Całkując powyższe wyrażenie po całej bryle B_i otrzymujemy:

$$E_{Bi} = \frac{1}{2} tr\left(\frac{d}{dt} P_i(\cdot) \int_{B_i} r_{mi} r_{mi}^T dm \frac{d}{dt} P_i^T(\cdot)\right), \quad (3.45)$$

gdzie:

$$\int_{B_i} r_{mi} r_{mi}^T dm = \begin{bmatrix} \int_{B_i} x_{mi}^2 dm & \int_{B_i} x_{mi} y_{mi} dm & \int_{B_i} x_{mi} z_{mi} dm & \int_{B_i} x_{mi} dm \\ \int_{B_i} y_{mi} x_{mi} dm & \int_{B_i} y_{mi}^2 dm & \int_{B_i} y_{mi} z_{mi} dm & \int_{B_i} y_{mi} dm \\ \int_{B_i} z_{mi} x_{mi} dm & \int_{B_i} z_{mi} y_{mi} dm & \int_{B_i} z_{mi}^2 dm & \int_{B_i} z_{mi} dm \\ \int_{B_i} x_{mi} dm & \int_{B_i} y_{mi} dm & \int_{B_i} z_{mi} dm & \int_{B_i} 1 dm \end{bmatrix}. \quad (3.46)$$

Przy uwzględnieniu postaci macierzy $P(\cdot)$, po obliczeniach, uzyskujemy następującą zależność:

$$E_{k B_i} = \dot{\Delta}_i I_i + 2 P_{1i} [\dot{A}_i \dot{C}_i - \dot{G}_i \dot{D}_i] + 2 P_{2i} [\dot{G}_i \dot{C}_i + \dot{A}_i \dot{D}_i] + [\dot{C}_i^2 + \dot{D}_i^2] M_i, \quad (3.47)$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
\dot{A}_i &= \dot{\Delta}_i \cos \Delta_i; \\
\dot{G}_i &= -\dot{\Delta}_i \sin \Delta_i; \\
\Delta_i &= \theta + \sum_{k=1}^{i-1} (\gamma_k - \beta_k); \\
C_i &= \sum_{k=1}^{i-1} d_k \sin(\theta + \sum_{p=1}^k \gamma_p + \sum_{p=1}^{k-1} \beta_p) + \sum_{k=2}^{i-1} (a_k + b_k) \sin(\theta + \sum_{p=1}^{k-1} \gamma_p + \beta_p) + \\
&\quad a_i \sin(\theta + \sum_{k=1}^{i-1} \gamma_k + \beta_k) + b_1 \sin \theta + x; \\
D_i &= -\sum_{k=1}^{i-1} d_k \cos(\theta + \sum_{p=1}^k \gamma_p + \sum_{p=1}^{k-1} \beta_p) - \sum_{k=2}^{i-1} (a_k + b_k) \cos(\theta + \sum_{p=1}^{k-1} \gamma_p + \beta_p) - \\
&\quad a_i \cos(\theta + \sum_{k=1}^{i-1} \gamma_k + \beta_k) - b_1 \cos \theta + y; \\
I_z &- \text{moment bezwładności } i\text{-tej bryły względem osi } Q_i Z_i; \\
M_t &- \text{masa całkowita bryły } B_i; \\
P_{1i}, P_{2i} &- \text{momenty rzędu 1 bryły } B_i \text{ w układzie } (Q_i, X_i, Y_i, Z_i) \\
&\quad (P_{1i} = \int_{B_i} x_{mi} dm, P_{2i} = \int_{B_i} y_{mi} dm).
\end{aligned}$$

Energia całkowita rozważanego układu N -brył jest sumą energii poszczególnych brył i może być przedstawiona w postaci:

$$\begin{aligned}
E_{kB} &= \sum_{i=1}^N E_{kB_i} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \text{tr} \left(\frac{d}{dt} P_i(\cdot) \int_{B_i} r_{mi} r_{mi}^T dm \frac{d}{dt} P_i^T(\cdot) \right) = \\
&= \frac{1}{2} \text{tr} \sum_{i=1}^N \left(\frac{d}{dt} P_i(\cdot) \int_{B_i} r_{mi} r_{mi}^T dm \frac{d}{dt} P_i^T(\cdot) \right),
\end{aligned} \tag{3.48}$$

3.2.2 Energia kinetyczna kół wieloczołonowego robota mobilnego

Pozostałym do rozwiązania problemem jest wyznaczenie energii kinetycznej kół wieloczołonowego robota mobilnego. Nasze rozważania będą dotyczyły zatem określenia zależności opisujących energię pojedynczego koła D , którego schemat kinematyczny został przedstawiony na Rys.2.3. Energia kinetyczna elementu dm liczona w układzie $(0, I_1, I_2, I_3)$ wynosi:

$$dK_n = \frac{1}{2} dm < \dot{r}(t), \dot{r}(t) >, \tag{3.49}$$

gdzie:

$$r(t) = P(x, y, z, \theta, L_1, \dots, L_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \gamma, \phi, R) r_1; \tag{3.50}$$

$r_1 = (x_1, x_2, x_3, 1)^T$ - położenie elementu dm w lokalnym układzie współrzędnych związanych z obracającym się kołem;

$$\begin{aligned}
P(\cdot) &= \text{Trans}(I_1, x) \text{Trans}(I_2, y) \text{Trans}(I_3, z) \text{Rot}(I_3, \theta) \text{Trans}(I_3, -e) \text{Rot}(I_3, \alpha) \\
&\quad \prod_{i=1}^n [\text{Trans}(I_1, L_i) \text{Rot}(I_3, \alpha_i)] \text{Rot}(I_3, \gamma) \text{Rot}(I_1, \phi);
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Stałość wektora r_1 względem czasu implikuje zależność:

$$\dot{r}(t) = \frac{d}{dt}(P(\cdot))r_1. \quad (3.52)$$

Wykorzystując własność opisaną przez (3.43), otrzymujemy:

$$dK_n = \frac{1}{2}dm \operatorname{tr}\left(\frac{d}{dt}P(\cdot)r_1r_1^T\frac{d}{dt}P^T(\cdot)\right). \quad (3.53)$$

Całkując powyższą zależność (3.53) po kole D , uzyskujemy:

$$K_n = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\frac{d}{dt}(P(\cdot))\int_D r_1r_1^T dm \frac{d}{dt}(P^T(\cdot))\right), \quad (3.54)$$

gdzie:

$$\int_D r_1r_1^T dm = \begin{bmatrix} \int_D x_1^2 dm & \int_D x_1x_2 dm & \int_D x_1x_3 dm & \int_D x_1 dm \\ \int_D x_2x_1 dm & \int_D x_2^2 dm & \int_D x_2x_3 dm & \int_D x_2 dm \\ \int_D x_3x_1 dm & \int_D x_2x_3 dm & \int_D x_3^2 dm & \int_D x_3 dm \\ \int_D x_1 dm & \int_D x_2 dm & \int_D x_3 dm & \int_D 1 dm \end{bmatrix}. \quad (3.55)$$

Przy założeniach:

- γ - jest stałe w czasie;
- lokalny układ współrzędnych związanych z obracającym się kołem jest umieszczony w środku masy rozważanego koła;
- osie wspomnianego wyżej układu są głównymi osiami bezwładności koła,

zależności (3.54) i (3.55) możemy zapisać w postaci:

$$\int_D r_1r_1^T dm = \begin{bmatrix} \int_D x_1^2 dm & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \int_D x_2^2 dm & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \int_D x_3^2 dm & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \int_D dm \end{bmatrix}; \quad (3.56)$$

$$K_n = \frac{1}{2}I_{xn}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}I_{yn}\dot{\Delta}^2 + \frac{1}{2}M_k(D_1^2 + D_2^2), \quad (3.57)$$

gdzie:

$$\dot{\Delta} = \theta + \sum_{i=1}^n \dot{\alpha}_i;$$

$$D_1 = \dot{x} - \sum_{i=1}^n L_i \sin(\theta + \sum_{k=1}^i \alpha_k) (\dot{\theta} + \sum_{k=1}^i \dot{\alpha}_k);$$

$$D_2 = \dot{y} + \sum_{i=1}^n L_i \cos(\theta + \sum_{k=1}^i \alpha_k) (\dot{\theta} + \sum_{k=1}^i \dot{\alpha}_k);$$

$$I_{xn} = \int_D (x_2^2 + x_3^2) dm = \frac{1}{2} M R^2;$$

$$I_{yn} = \int_D (x_1^2 + x_2^2) dm = \frac{1}{12} M w^2 + \frac{1}{4} M R^2;$$

M – masa koła;

R – promień koła;

w – grubość koła.

Przykłady wykorzystania zależności na energię kinetyczną złożonego układu jeźdnego postaci (3.48) i (3.57) do wyznaczenia modeli kinematyki tego typu układów mechanicznych (podrozdział 2.4) zostały przedstawione w pracy [24].

Rozdział 4

Algorytmy sterowania kołowych robotów mobilnych

Po omówieniu zagadnień związanych z modelowaniem kołowych robotów mobilnych zajmiemy się problematyką sterowania układów nieholonomicznych, a w szczególności kołowych robotów mobilnych. W rozdziale 4.1 przedstawiamy przegląd wybranych algorytmów sterowania, które otrzymano przy założeniu znajomości dokładnych wartości parametrów barycentrycznych układu. Z kolei w rozdziale 4.2 dopuszczamy nieznajomość wartości tych parametrów i przedstawiamy nową metodę projektowania algorytmów sterowania, która pozwala wykorzystywać w przypadku kołowych robotów mobilnych algorytmy sterowania adaptacyjnego opracowane dla układów holonomicznych (np. robotów manipulacyjnych).

4.1 Przegląd algorytmów sterowania

Z uwagi na założenie znajomości dokładnych wartości parametrów barycentrycznych i fakt równoważności (Własność 1.1) przez statyczne sprzężenie zwrotne pełnego modelu matematycznego układu nieholonomicznego i jego postaci normalnej:

$$\dot{q} = S(q)\eta; \quad (4.1)$$

$$\dot{\eta} = v, \quad (4.2)$$

w dalszej części tego podrozdziału będziemy rozważać algorytmy sterowania dla układu postaci (4.1, 4.2). Przegląd zostanie podzielony na dwie części, które opisują kolejno:

- algorytmy sterowania punktowego;
- algorytmy sterowania ciągłego (śledzenia).

Struktury sterowania punktowego możemy podzielić na:

- sterowanie w układzie otwartym;
- sterowanie z wykorzystaniem sprzężenia zwrotnego.

Pierwsza struktura (sterowanie w układzie otwartym) wymaga znalezienia ograniczonych sygnałów sterujących pozwalających na przeprowadzenie układu od zadanej pozycji początkowej do zadanej pozycji końcowej, bez znajomości aktualnego stanu. Zadanie sterowania w układzie otwartym bywa również nazywane w literaturze zadaniem planowania trajektorii. Tego typu podejście przedstawiają prace [40], [20], [42].

Druga struktura sterowania (sprzężenie zwrotne) jest realizowane przez zastosowanie nieciągłego [57] lub zmiennego w czasie statycznego sprzężenia zwrotnego [15].

Problem sterowania ciągłego (śledzenia) może być rozwiązany przy pomocy linearyzacji dynamicznej [2]. Przegląd algorytmów sterowania przy pełnej znajomości modelu układu nieholonomicznego rozpoczniemy od propozycji zamieszczonej w pracy [40].

4.1.1 Sterowanie sinusoidalne

Rozważmy układ sterowania postaci [7]:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= u_1; \\ \dot{x}_2 &= u_2; \\ \dot{x}_3 &= x_2 u_1.\end{aligned}\tag{4.3}$$

Niech zadanie sterowania polega na znalezieniu w przedziale czasu $[0, T]$ takiego sterowania $u(t) = (u_1, u_2)^T$, które przeprowadza układ od stanu początkowego $x(0)$ do stanu końcowego $x(T)$ oraz minimalizuje całkę:

$$\int_0^T u^T u dt.\tag{4.4}$$

Trajektorie układu (4.3) mają następującą postać:

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t), & x_2(t), & x_3(t) \end{pmatrix}^T.\tag{4.5}$$

Układ (4.3) jest sterowalny, ponieważ, jak łatwo sprawdzić, wektory pola $g_1 = (1, 0, x_2)^T$ i $g_2 = (0, 1, 0)^T$ oraz ich nawias Liego $[g_1, g_2]$ rozpinają R^3 (Tw. 1.1). W celu znalezienia optymalnego sterowania pomiędzy dwoma ustalonymi punktami w R^3 tworzymy lagranżian postaci [22]:

$$L(x, \dot{x}) = \sum_{i=1}^2 \dot{x}_i^2 + \lambda(t) [\dot{x}_3 - x_2 \dot{x}_1],\tag{4.6}$$

gdzie:

$\lambda(t)$ - mnożnik Lagrange'a.

Podstawiając powyższą zależność do równań Eulera-Lagrange'a:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0,\tag{4.7}$$

otrzymujemy zależności:

$$\begin{cases} 2\ddot{x}_1 - \dot{\lambda}x_2 - \lambda\dot{x}_2 = 0; \\ 2\ddot{x}_2 + \lambda\dot{x}_1 = 0; \\ \dot{\lambda} = 0. \end{cases}\tag{4.8}$$

Wykorzystując fakt, że $\lambda = \text{const}$, oraz równania (4.3), układ (4.8) możemy przedstawić w następujący sposób:

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = \frac{1}{2}\lambda u_2; \\ \dot{u}_2 = -\frac{1}{2}\lambda u_1. \end{cases} \quad (4.9)$$

Układ (4.9) ma rozwiązanie postaci:

$$\begin{cases} u_1(t) = u_1(0) \cos \frac{\lambda}{2}t + u_2(0) \sin \frac{\lambda}{2}t; \\ u_2(t) = -u_1(0) \sin \frac{\lambda}{2}t + u_2(0) \cos \frac{\lambda}{2}t. \end{cases} \quad (4.10)$$

Następnie wyznaczamy wartości $u(0) = (u_1(0), u_2(0))^T$ oraz λ . W tym celu całkujemy układ (4.3) dla $u_1(t), u_2(t)$ danych wyrażeniem (4.10):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u_1; \\ \dot{x}_2 &= u_2; \\ \dot{x}_3 &= x_2 u_1. \end{aligned}$$

gdzie:

u_1 i u_2 - są dane przez (4.10).

Po obliczeniach otrzymujemy:

$$\begin{cases} x_1(t) = C_1 + \frac{2u_1(0)}{\lambda} \sin \frac{\lambda}{2}t - \frac{2u_2(0)}{\lambda} \cos \frac{\lambda}{2}t; \\ x_2(t) = C_2 + \frac{2u_1(0)}{\lambda} \cos \frac{\lambda}{2}t + \frac{2u_2(0)}{\lambda} \sin \frac{\lambda}{2}t; \\ x_3(t) = C_3 + \int_0^t x_2(\tau) u_2(\tau) d\tau, \end{cases} \quad (4.11)$$

gdzie:

C_1, C_2, C_3 - stałe.

W przypadku ogólnym przy użyciu równań (4.11) i zadanych warunkach brzegowych $x(0)$ i $x(T)$ nie możemy wyznaczyć zależności pozwalających na określenie w sposób jawny parametrów: $C_1, C_2, C_3, u_1(0), u_2(0)$ i λ . Rozważmy zatem przypadek szczególny :

$$\begin{cases} x_1(0) = x_1(T); \\ x_2(0) = x_2(T); \\ x_3(0) \neq x_3(T). \end{cases} \quad (4.12)$$

Latwo pokazać, że warunki (4.12) oraz zależności (4.11) implikują warunek:

$$\lambda = \frac{4k\pi}{T} \quad (k \neq 0, \text{ całkowite}), \quad (4.13)$$

czyli że sterowanie jest okresowe. Wykorzystując powyższą własność, określamy algorytm sterowania dla układu (4.3) przy zadanym horyzoncie sterowania T ($T > 0$).

Algorytm sterowania:

1. Dzielimy horyzont sterowania na dwie równe części:

$$[0, \tau] \text{ i } [\tau, T],$$

gdzie:

$$\tau = \frac{T}{2}. \quad (4.14)$$

2. Na odcinku czasu $[0, \tau]$ przy pomocy stałego w czasie sterowania przeprowadzamy układ od stanu $(x_1(0), x_2(0))^T$ do $(x_1(T), x_2(T))^T$. Proste obliczenia prowadzą do następujących rezultatów:

$$\begin{cases} u_1(t) = \frac{x_1(T) - x_1(0)}{\tau}; \\ u_2(t) = \frac{x_2(T) - x_2(0)}{\tau}; \end{cases} \quad (4.15)$$

gdzie:

$$t \in [0, \tau].$$

Efekt działania sterowania postaci (4.15) jest również zmiana wartości współrzędnej x_3 :

$$x_3(\tau) = x_3(0) + u_1 x_2(0) \tau + \frac{1}{2} \tau^2 u_1 u_2, \quad (4.16)$$

gdzie:

u_1 i u_2 są określone przez (4.15).

3. Na odcinku czasu $[\tau, T]$ ysterowujemy rozpatrywany układ od stanu $x(\tau)$ do $x(T)$. Jak łatwo zauważyć, w tym przypadku mamy do czynienia z tą samą sytuacją jak w (4.12), tzn.:

$$\begin{cases} x_1(\tau) = x_1(T); \\ x_2(\tau) = x_2(T); \\ x_3(\tau) \neq x_3(T), \end{cases} \quad (4.17)$$

co pozwala nam na zastosowanie sterowania sinusoidalnego.

Proponujemy zatem sterowanie postaci:

$$\begin{cases} u_1 = a_1 \sin \omega t; \\ u_2 = a_2 \cos \omega t; \end{cases} \quad (4.18)$$

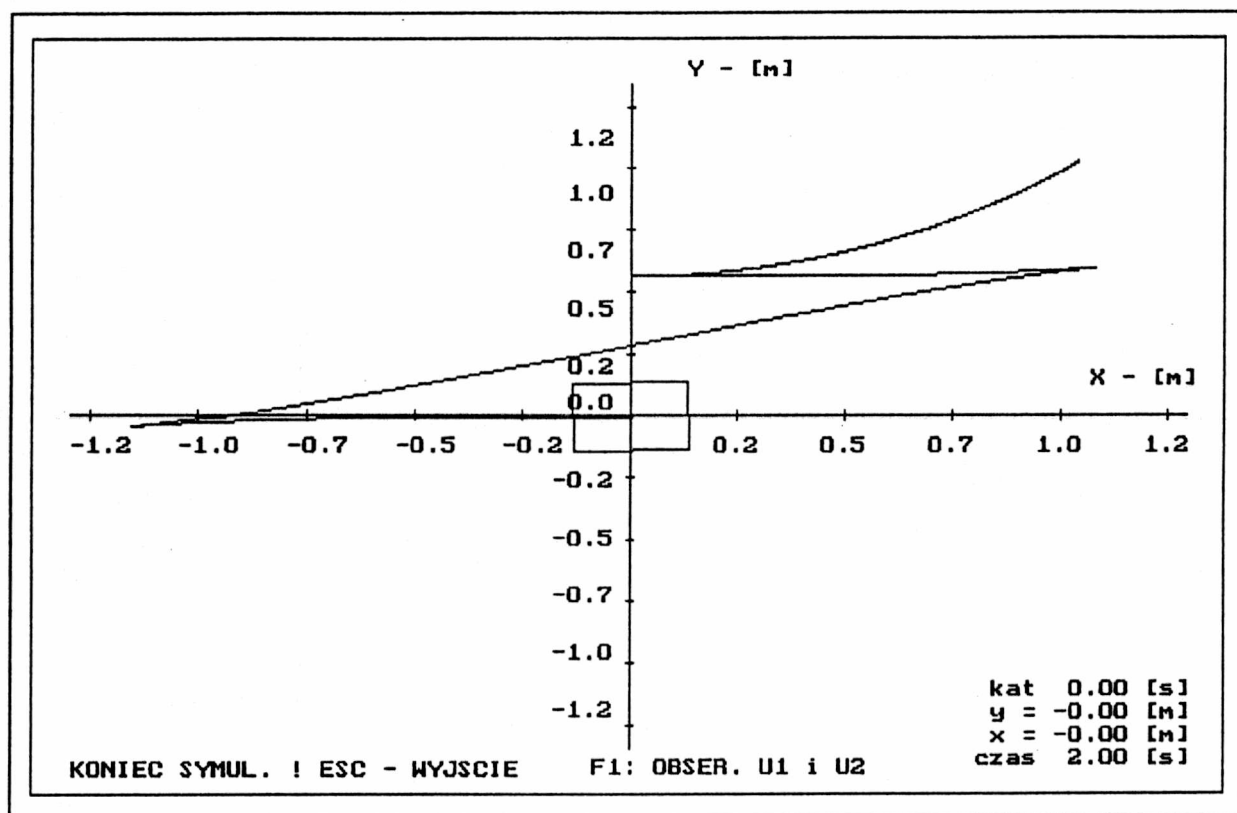
gdzie:

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau}.$$

Podstawiając (4.18) do równań układu (4.3), otrzymujemy:

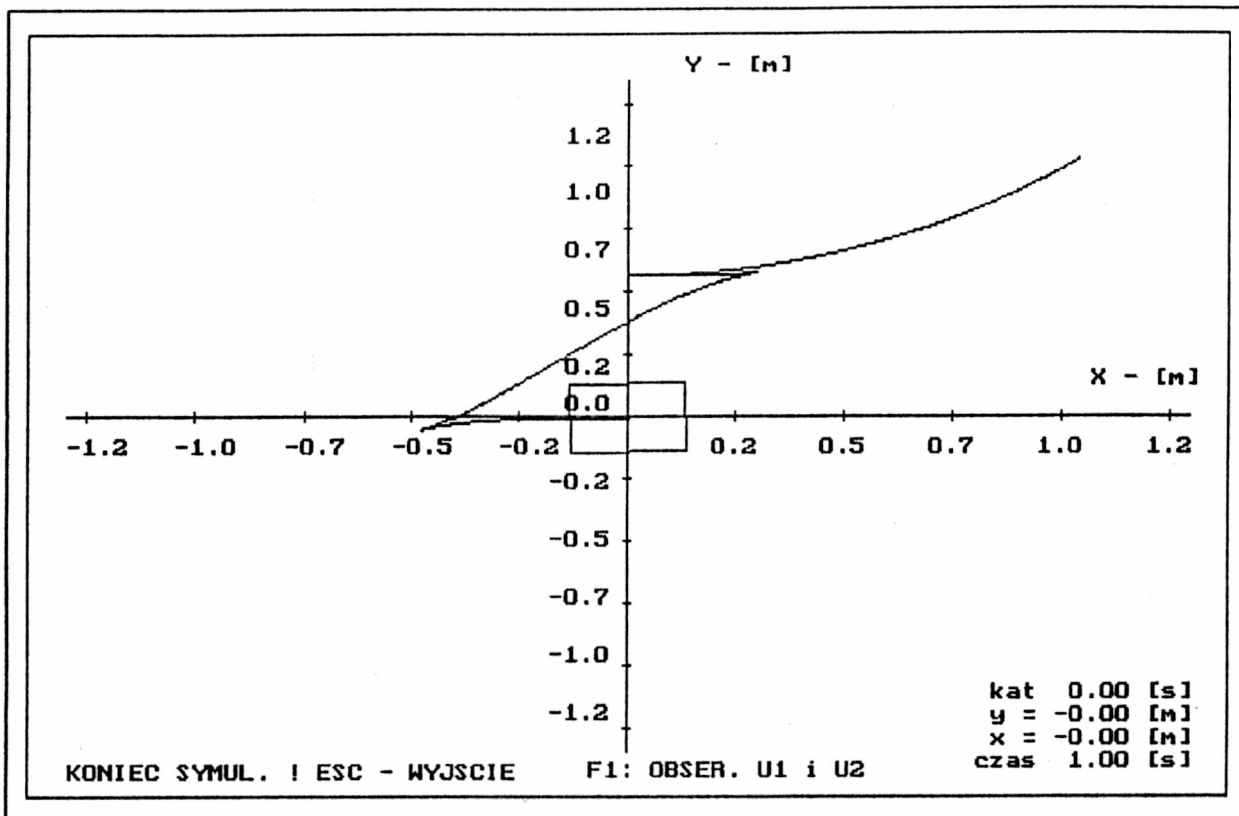
$$\begin{cases} x_1(\tau) = x_1(T); \\ x_2(\tau) = x_2(T); \\ x_3(T) = x_3(\tau) + \frac{a_1 a_2 \tau^2}{4\pi}. \end{cases} \quad (4.19)$$

W celu wyznaczenia wartości nieznanymi parametrów, tzn., a_1 i a_2 , należy określić wartość liczbową jednego z nich, np. a_1 , a następnie wyznaczyć drugi (tutaj a_2) przy pomocy (4.19). Zastosowania przedstawionej strategii sterowania do projektowania algorytmów sterowania do kołowych robotów mobilnych można znaleźć w pracach [40], [28]. Zamieszczone poniżej wyniki symulacyjne uzyskano dla modelu matematycznego kołowego robota mobilnego "Ulisses" [58].



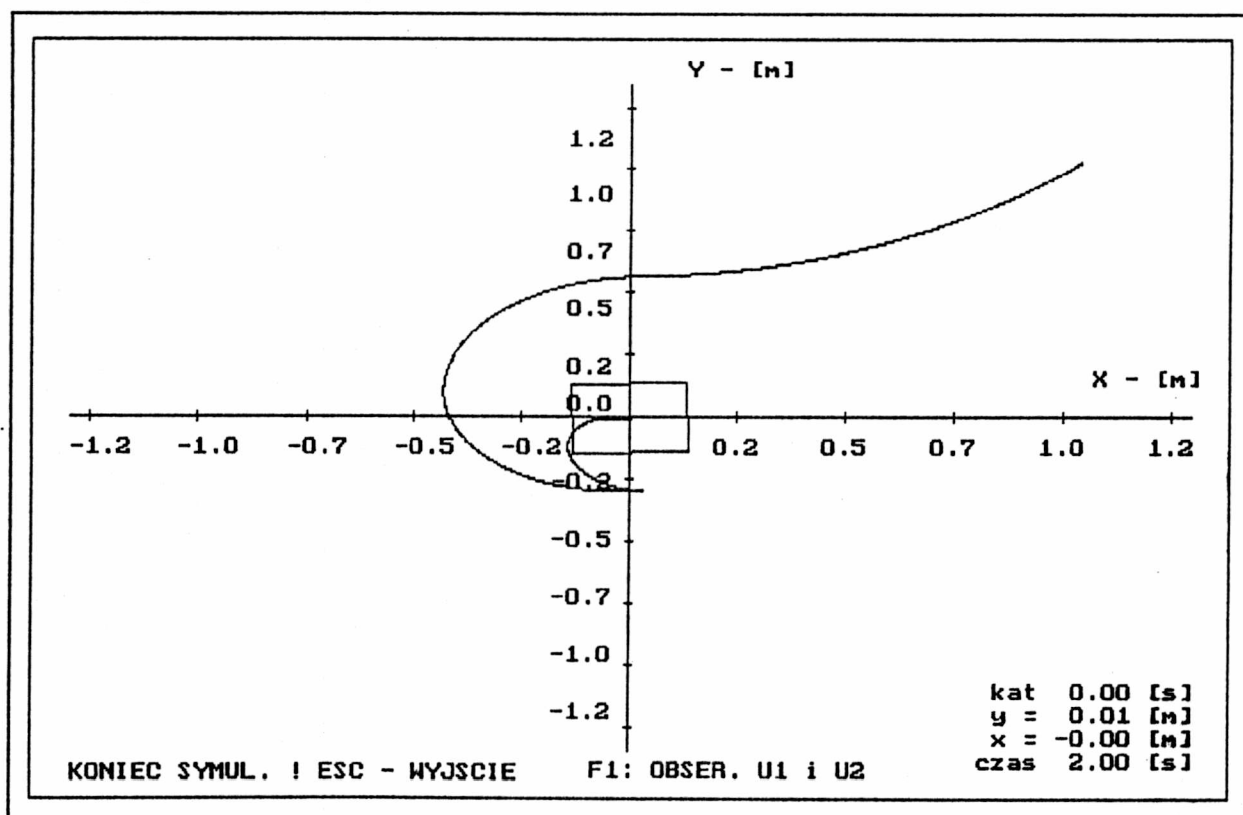
Rys.4.1: Zachowanie robota mobilnego "Ulisses" przy sterowaniu sinusoidalnym:

- $x_0 = 1, y_0 = 1, \theta_0 = 45^\circ$ (wartości początkowe);
- $x_k = 0, y_k = 0, \theta_k = 0^\circ$ (wartości końcowe);
- $T = 2, a_1 = 1$.



Rys.4.2: Zachowanie robota mobilnego "Ulisses" przy sterowaniu sinusoidalnym:

- $x_0 = 1, y_0 = 1, \theta_0 = 45^\circ$ (wartości początkowe);
- $x_k = 0, y_k = 0, \theta_k = 0^\circ$ (wartości końcowe);



Rys.4.3: Zachowanie robota mobilnego "Ulisses" przy sterowaniu sinusoidalnym:

- $x_0 = 1, y_0 = 1, \theta_0 = 45^0$ (wartości początkowe);
- $x_k = 0, y_k = 0, \theta_k = 0^0$ (wartości końcowe);
- $T = 1, a_1 = 5$.

4.1.2 Stabilizacja przez zależne od czasu statyczne sprzężenie zwrotne

Rozważmy symetryczny układ sterowania postaci:

$$\dot{x} = \sum_{k=1}^m f_k(x) u_k, \quad (4.20)$$

gdzie:

$$x \in R^n, u_k \in R.$$

Załóżmy, że spełnione są poniższe warunki:

1.

$$\dim \text{span} \{ad_{f_1}^j f_k \mid k = 1, 2, \dots, m; j \geq 0\}(x) = n. \quad (4.21)$$

2. Istnieje taki układ współrzędnych $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ wokół punktu $0 \in R^n$, że:

$$f_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}. \quad (4.22)$$

3. Jest określona pewna funkcja $V(t, x)$ postaci (dla funkcji h zdefiniowanej niżej):

$$V(t, x) = \frac{1}{2}(x_1 + h(t, x_2, \dots, x_n))^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + \dots + \frac{1}{2}x_n^2. \quad (4.23)$$

Możemy teraz przejść do sformułowania twierdzenia, które przedstawia sposób projektowania zmiennego w czasie statycznego sprzężenia zwrotnego stabilizującego układ postaci (4.20).

Twierdzenie 4.1 [47] *Jeżeli pola $f_k, k = 1, \dots, m$ są takie, że:*

$$\left. \begin{array}{l} L_{f_k} W = 0 \quad \forall k \in [2, m] \\ \frac{\partial^j h(t, x)}{\partial t^j} = 0 \quad \forall j \geq 1 \end{array} \right\} \implies (x_2 = x_3 = \dots = x_n = 0), \quad (4.24)$$

gdzie:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=2}^n x_i^2;$$

$L_{f_k} W$ - pochodna Liego, która została zdefiniowana w rozdziale 1.1.3,

wtedy:

1. punkt 0 jest globalnie jednostajnie asymptotycznie stabilnym punktem równowagi układu zamkniętego przy sterowaniu:

$$\begin{cases} u_1 = \alpha(t, x) - L_{f_1} V(t, x); \\ u_2 = -L_{f_2} V(t, x); \\ \vdots \\ u_m = -L_{f_m} V(t, x). \end{cases} \quad (4.25)$$

2. Funkcja $V(t, x)$ jest nierosnąca na trajektoriach układu nieautonomicznego (4.20), (4.25)

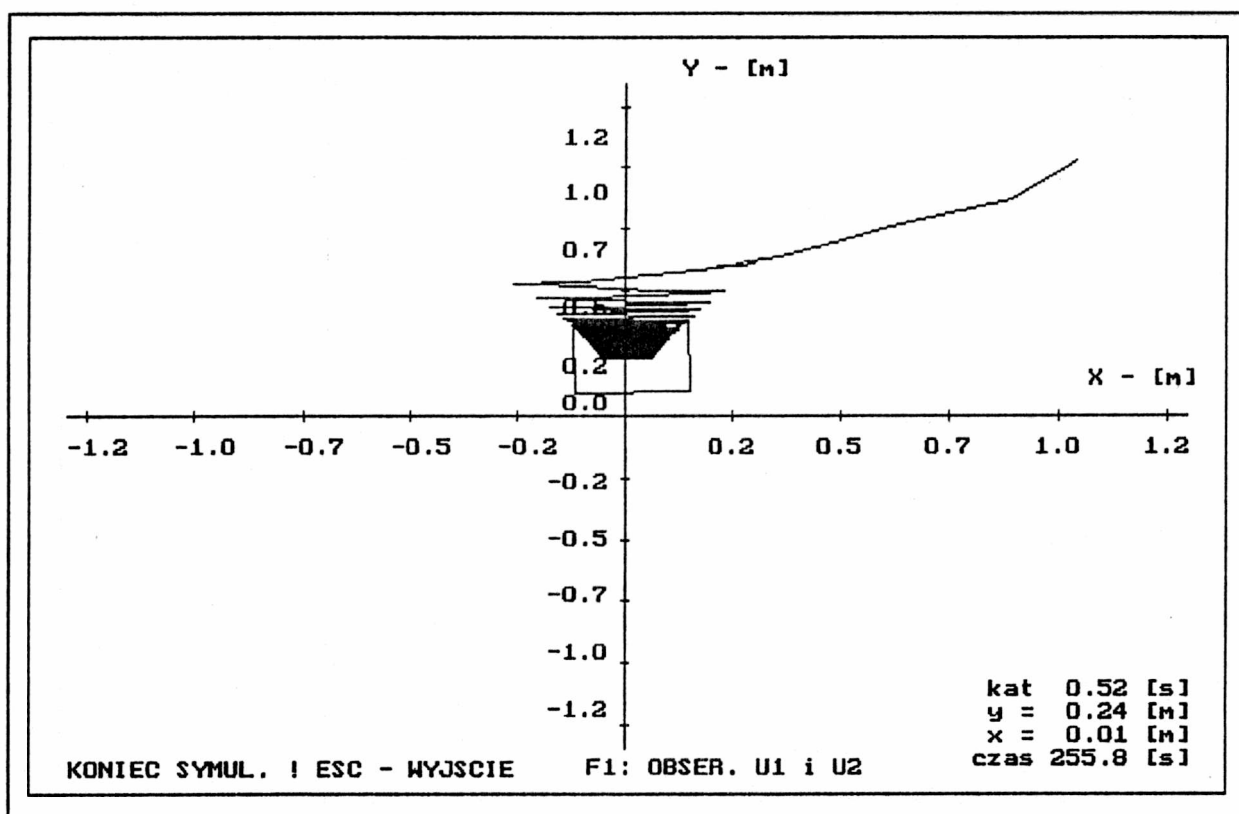
3. Funkcje $h(t, x)$ i $\alpha(t, x)$ spełniają warunek:

$$\alpha(t, x) = -\frac{\partial h(t, x)}{\partial t}. \quad (4.26)$$

Przykładowe funkcje $\alpha(t, x)$ i $h(t, x)$, które mogą być zastosowane w algorytmie sterowania

$$\begin{cases} \alpha(t, x) = (\sum_{i=2}^n x_i^2) \sin t; \\ h(t, x) = (\sum_{i=2}^n x_i^2) \cos t. \end{cases}$$

Powyższe twierdzenie podaje nam sposób wyznaczania funkcji $V(t, x)$ przy pomocy zależności (4.23) i (4.26) oraz postać algorytmu sterowania (4.25). Przykłady zastosowania tego rozwiązania do projektowania algorytmów stabilizacji dla modeli kinematyki kołowych robotów mobilnych można znaleźć w pracach ([47], [11]), a dla postaci normalnych w pracach ([28], [41]).



Rys.4.4: Działanie algorytmu stabilizacji dla robota mobilnego "Ulisses":

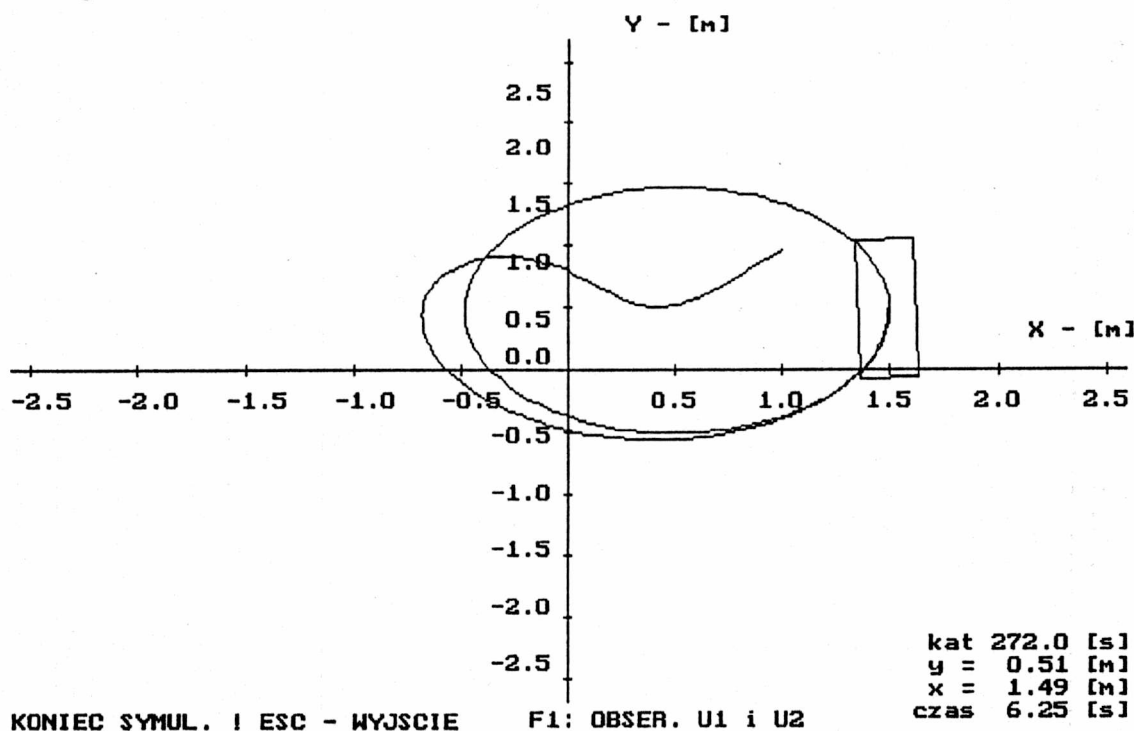
- $x_0 = 1, y_0 = 1, \theta_0 = 45^\circ$ (wartości początkowe);
- $x_k = 0, y_k = 0, \theta_k = 0^\circ$ (wartości końcowe).

4.1.3 Linearyzacja dynamiczna

W rozdziale 1.3 rozprawy pokazaliśmy, że postać normalna modelu matematycznego nieholonomicznego układu mechanicznego nie jest linearyzowalna dynamicznie w punktach równowagi $(q, \eta) = (q_e, 0)$. Okazuje się jednak, że algorytm linearyzacji dynamicznej można wykorzystać podczas ruchu rozpatrywanego układu ($\eta \neq 0$) i jest możliwe wykorzystanie metody linearyzacji dynamicznej do śledzenia trajektorii. Teorię matematyczną dynamicznego sprzężenia zwrotnego przedstawiają prace [13], [21] i [33]. Przykłady zastosowania linearyzacji dynamicznej do sterowania robotów mobilnych można znaleźć w pracach ([9], [2], [28], [16], [21]). Metoda linearyzacji dynamicznej w odniesieniu do układów afinicznych postaci:

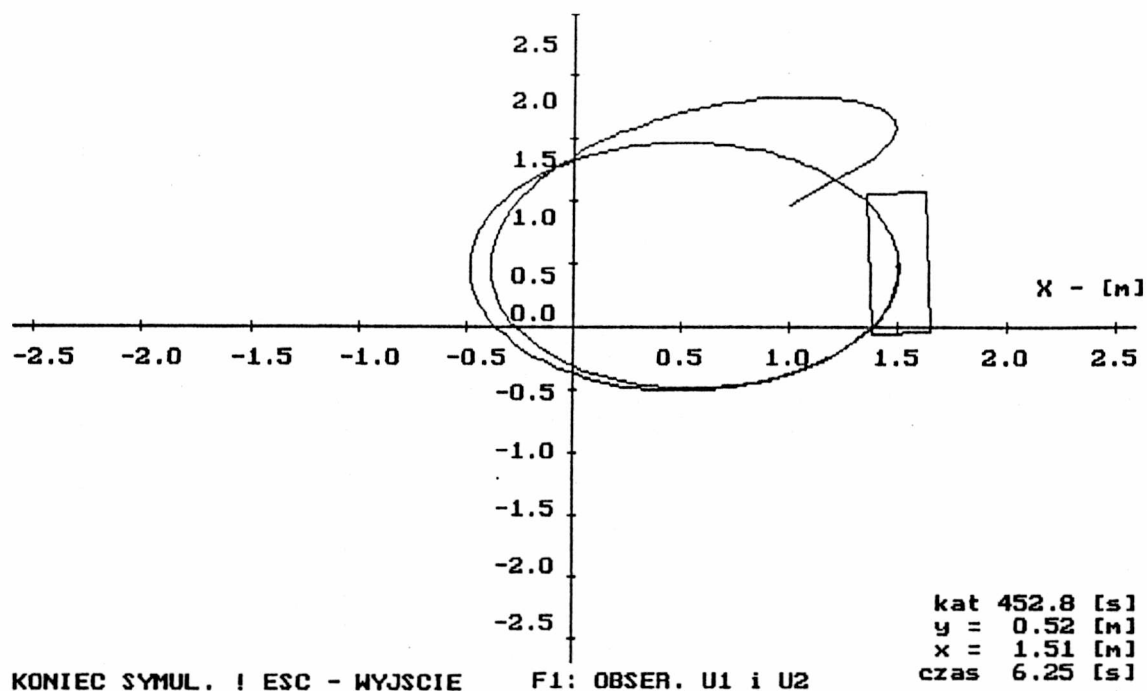
$$\Sigma : \dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i, \quad u \in R^m, x \in R^n. \quad (4.27)$$

została przedstawiona w rozdziale 1.3.2. Zamieszczone poniżej wykresy ilustrują działanie algorytmu linearyzacji dynamicznej zastosowanego do śledzenia trajektorii zadanej dla robota mobilnego "Ulisses".



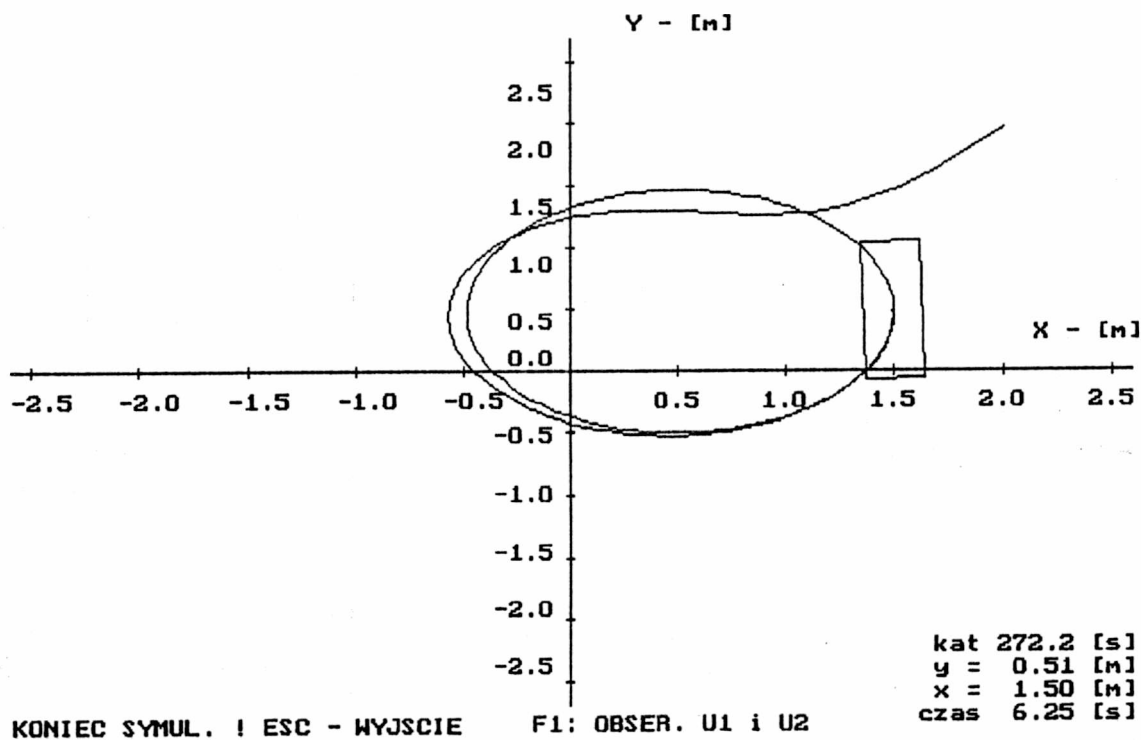
Rys.4.5: Zachowanie robota "Ulisses" przy śledzeniu opartym na linearyzacji dynamicznej:

- $R_1 = 6, R_2 = 11, R_3 = 6$;
- $x_0 = 1, y_0 = 1, \theta_0 = 45^\circ, \eta_{10} = -2$ (wartości początkowe).



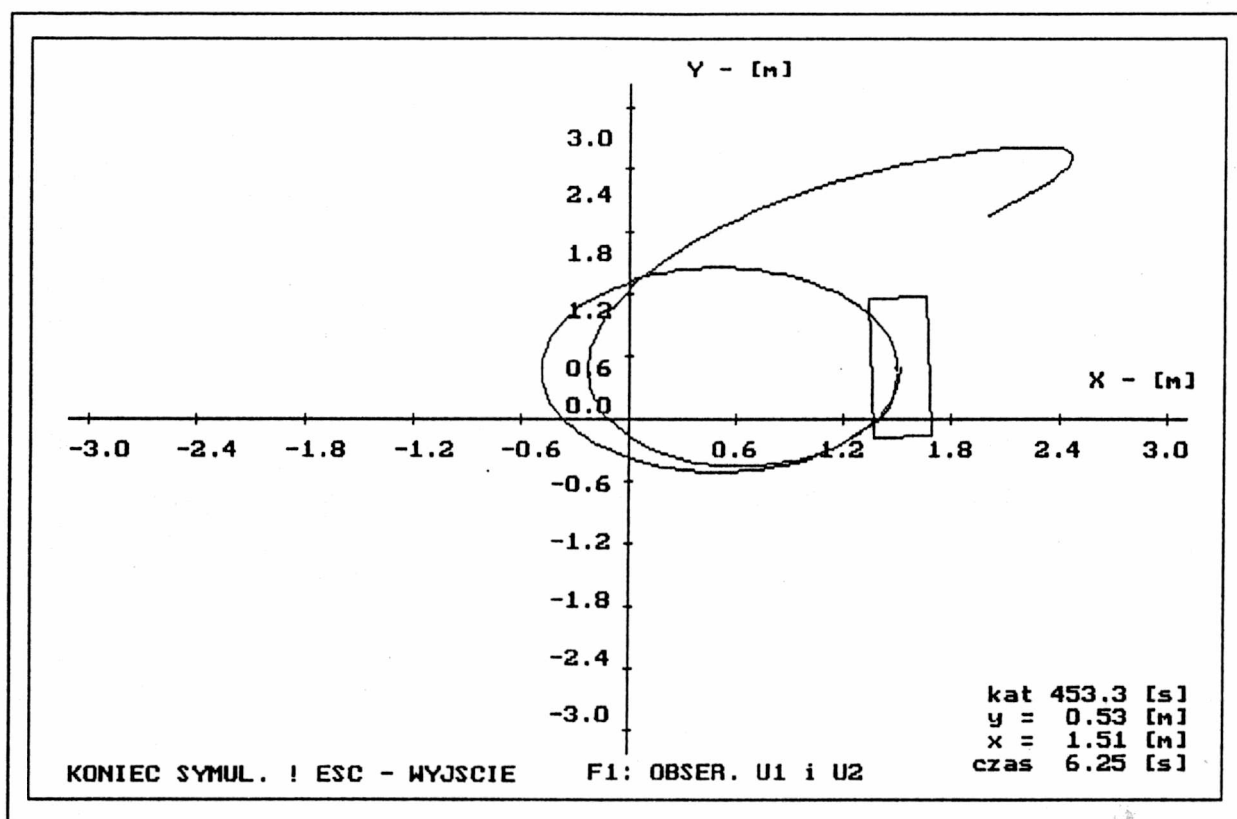
Rys.4.6: Zachowanie robota "Ulisses" przy śledzeniu opartym linearyzacji dynamicznej:

- $R_1 = 6$, $R_2 = 11$, $R_3 = 6$;



Rys.4.7: Zachowanie robota "Ulisses" przy śledzeniu opartym linearyzacji dynamicznej:

- $R_1 = 6$, $R_2 = 11$, $R_3 = 6$;
- $x_0 = 2$, $y_0 = 2$, $\theta_0 = 45^\circ$, $\eta_{10} = -2$ (wartości początkowe).



Rys.4.8: Zachowanie robota "Ulisses" przy śledzeniu opartym linearyzacji dynamicznej:

- $R_1 = 6$, $R_2 = 11$, $R_3 = 6$;
- $x_0 = 2$, $y_0 = 2$, $\theta_0 = 45^\circ$, $\eta_{10} = 2$ (wartości początkowe).

4.1.4 Algorytm śledzenia trajektorii oparty na przybliżeniu liniowym modelu

Przedstawiony w tej części rozprawy algorytm opiera się na przybliżeniu liniowym modelu wzdłuż trajektorii zadanej [55]. Dla układu z więzami nieholonomicznymi przybliżenie liniowe jest niestacjonarnym liniowym układem sterowania, a zatem w tym przypadku możemy wykorzystać wyniki pracy [14], w której opisano algorytm globalnej stabilizacji dla tego typu układów. Rozważamy nieliniowy układ dynamiczny postaci:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad x \in R^n, \quad u \in R^p. \quad (4.28)$$

Wprowadzamy następujące oznaczenia:

- $x_d(t)$ - trajektoria zadana;
- $u_d(t)$ - sterowanie odpowiadające trajektorii zadanej $x_d(t)$.

Przybliżenie liniowe układu (4.28) wzdłuż trajektorii zadanej daje się zapisać w postaci:

$$\dot{x} = A(t)x + B(x)u, \quad (4.29)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} A(t) &= \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_d(t)) + \frac{\partial[gu_d(t)]}{\partial x}(x_d(t)) \right]; \\ B(t) &= g(x_d(t)). \end{aligned}$$

Zakładamy, że $\|B(t)\|$ jest ograniczona dla każdej chwili czasu t . Niech macierz $\Psi(t, t_0)$ rozmiaru $n \times n$ będzie rozwiązaniem równania różniczkowego:

$$\dot{\Psi}(t, t_0) = A(t)\Psi(t, t_0) \quad (4.30)$$

przy warunku początkowym $\Psi(t_0, t_0) = I_n$.

Z kolei, dla pewnego $\alpha > 0$ definiujemy macierz rozmiaru $n \times n$ postaci:

$$H_c(t, t_0) = \int_{t_0}^t e^{\alpha(t_0-\tau)} \Psi(t_0, \tau) B(\tau) B^T(\tau) \Psi^T(t_0, \tau) d\tau. \quad (4.31)$$

Jeżeli istnieje takie $\delta > 0$, że macierz $H_c(t, t + \delta)$ jest nieosobliwa dla każdej chwili t , wówczas możemy zdefiniować macierz $P_c(t)$:

$$P_c(t) = H_c^{-1}(t, t + \delta). \quad (4.32)$$

Twierdzenie 4.2 [14] *Jeżeli istnieją dwie liczby $p_c^m, p_c^M > 0$, takie że:*

$$0 \leq p_c^m z^T z \leq z^T P_c(t) z \leq p_c^M z^T z, \quad \forall t \in R_+, \forall z \in R^n, \quad (4.33)$$

wtedy dla dowolnej ciągłej i ograniczonej funkcji $\gamma(t) : R_+ \rightarrow [\frac{1}{2}, \infty)$ istnieje zależne od czasu sprzężenie zwrotne postaci:

$$u = u_d(t) - \gamma(t) B^T(t) P_c(t) (x(t) - x_d(t)), \quad (4.34)$$

które lokalnie, jednostajnie i wykładniczo stabilizuje układ (4.29) do trajektorii zadanej $x_d(t)$ przy czym wykładnicza prędkość zbieżności jest większa od:

$$2\alpha(p_c^M)^{-1} > 0.$$

Uwaga.

Prezentowany powyżej algorytm wymaga informacji o trajektorii zadanej przesuniętej o od cinek czasu δ w przyszłość. W pewnych sytuacjach (działanie sterowania w czasie rzeczywistym należy zastosować modyfikację tego algorytmu polegającą na wprowadzeniu macierzy:

$$P_r(t) = H_c^{-1}(t, t - \delta). \quad (4.35)$$

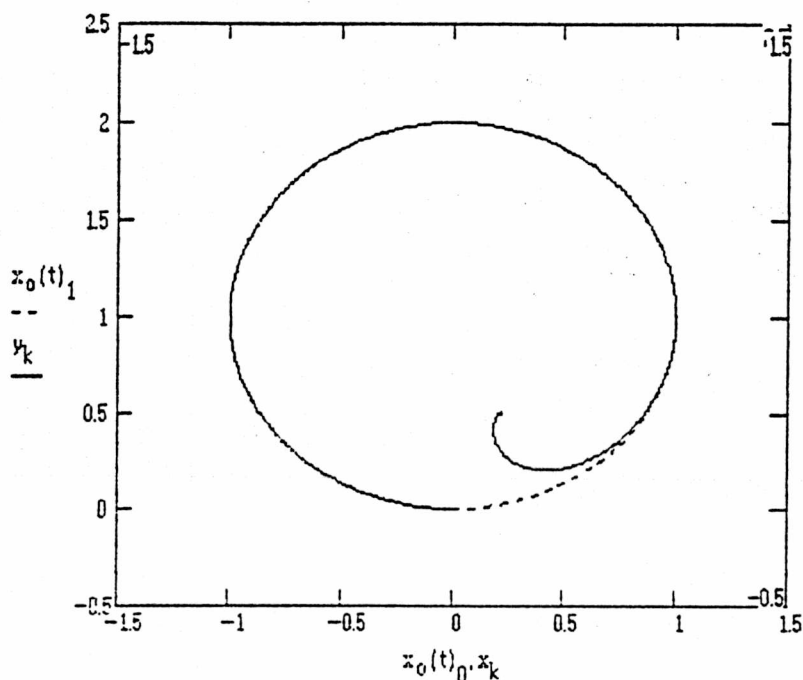
Jak łatwo zauważyć $P_r(t)$ zależy od wartości trajektorii zadanej w przeszłości. Jeżeli istnieją dwie liczby $p_r^m, p_r^M > 0$ spełniające poniższą nierówność:

$$0 \leq p_r^m z^T z \leq z^T P_r(t) z \leq p_r^M z^T z, \quad \forall t \in R_+, \forall z \in R^n, \quad (4.36)$$

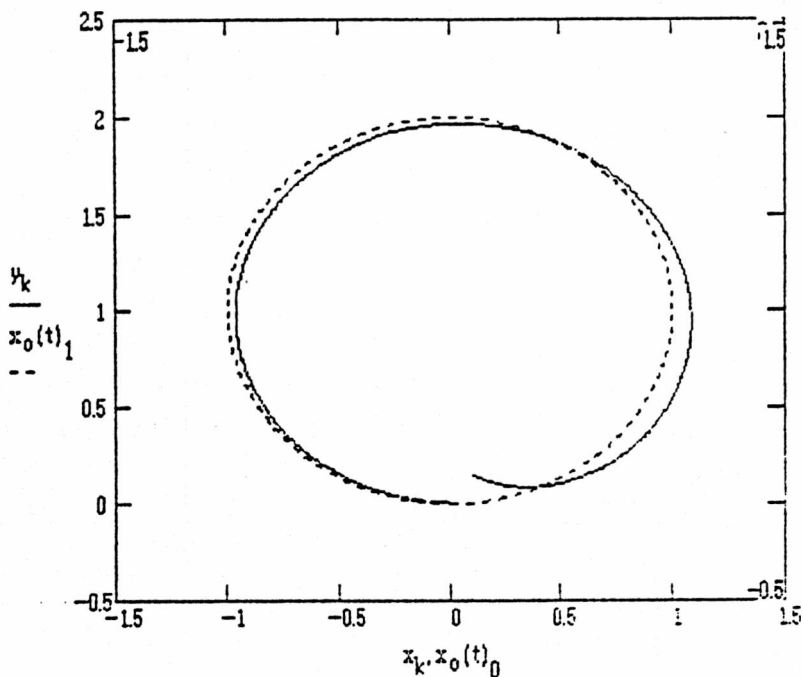
wtedy dla dowolnej ciągłej i ograniczonej funkcji $\gamma(t) : R_+ \rightarrow [\frac{1}{2}, \infty)$ istnieje zależne od czasu sprzężenie zwrotne postaci:

$$u = u_d(t) - \gamma(t) B^T(t) P_r(t) (x(t) - x_d(t)), \quad (4.37)$$

które lokalnie, jednostajnie i wykładniczo stabilizuje układ (4.29) do trajektorii zadanej $x_d(t)$. Rozważania teoretyczne dotyczące podstaw matematycznych omawianej metody można znaleźć w pracy [48]. Poniżej prezentujemy przykładowe zachowanie modelu matematycznego robota mobilnego "Ulisses" przy zastosowaniu rozpatrywanego algorytmu śledzenia [36].

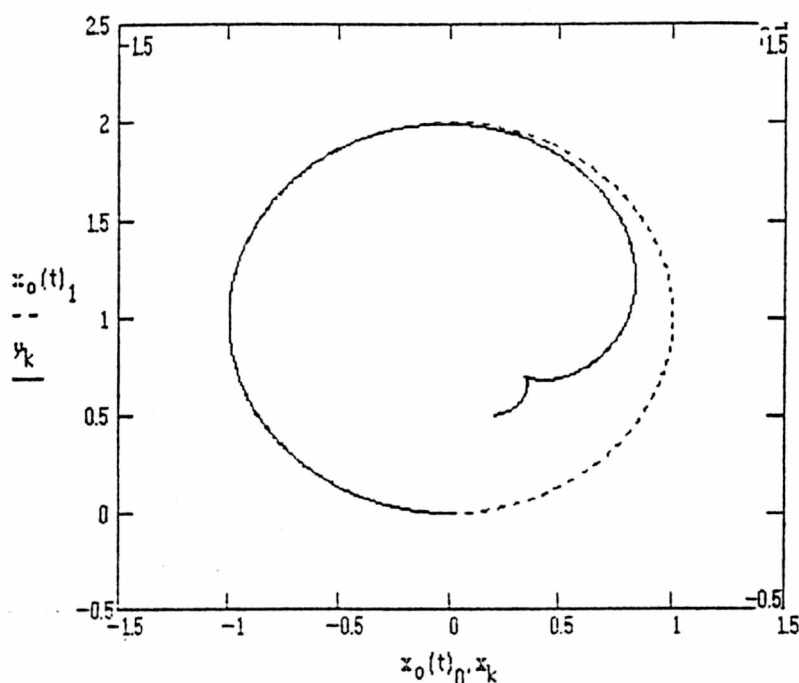


Rys.4.9: Zachowanie robota "Ulisses" przy śledzeniu korzystającym z przybliżenia liniowego modelu.



Rys.4.10: Zachowanie robota "Ulisses" przy śledzeniu korzystającym z przybliżenia liniowego modelu.

Trajektoria wózka w płaszczyźnie X-Y



Rys.4.11: Zachowanie robota "Ulisses" przy śledzeniu korzystającym z przybliżenia liniowego modelu.

4.1.5 Wnioski

Podrozdział 4.1 został poświęcony przeglądowi podstawowych strategii sterowania układów nieholonomicznych przy założeniu znajomości wartości parametrów modelu. Rozważania teoretyczne zostały uzupełnione przykładowymi wynikami badań symulacyjnych przeprowadzonych na modelu robota mobilnego "Ulisses", zaczerpniętymi z prac [28] i [36]. Wnioski wynikające z badań są następujące:

1. W przypadku algorytmu sterowania sinusoidalnego mamy do czynienia z utratą ciągłości sterowania w chwili przełączania na dosterowywanie, co jest istotną wadą tego algorytmu. Z uwagi na fakt, że jest to algorytm sterowania w układzie otwartym, dla jego poprawnego działania wymagana jest dokładna znajomość stanu początkowego robota mobilnego. Za zaletę omawianej strategii sterowania można uznać prostotę i małą złożoność obliczeniową.
2. Zastosowanie do modelu robota mobilnego "Ulisses" zmiennego w czasie statycznego sprzężenia zwrotnego nie daje zadowalających rezultatów. Ewidentną wadą tego podejścia jest generowanie "dziwnych" trajektorii (Rys. 4.4) o słabej zbieżności (zbieżności asymptotycznej) do punktu docelowego. Za pozytywne cechy należy uznać w tym przypadku prostotę i małą złożoność obliczeniową.
3. Algorytm śledzenia oparty na przybliżeniu liniowym wzdłuż trajektorii zadanej jest dość złożony obliczeniowo. Nawet w tak prostym przypadku jak model dynamiki robota "Ulisses" i trajektoria odniesienia będąca łukiem okręgu elementy macierzy H_c są złożone [36], co praktycznie uniemożliwia obliczenie w postaci symbolicznej macierzy P_c i sterowania u . Kolejną wadą algorytmu jest jego lokalność (przy zbyt dużym błędzie początkowym

algorytm nie wykazuje zbieżności do trajektorii zadanej). Do zalet omawianego algorytmu należy zaliczyć możliwość śledzenia zarówno współrzędnych położenia jak i orientacji robota.

4. Algorytm sterowania oparty na metodzie linearyzacji dynamicznej nadaje się do śledzenia trajektorii zadanej w czasie rzeczywistym. Niewątpliwą jego zaletą jest zbieżność nawet dla dużych wartości błędu początkowego. Warto jednak nadmienić, że śledzenie dotyczy w tym przypadku jedynie współrzędnych położenia.

4.2 Sterowanie przy pomocy wyjść linearyzujących

Przedstawione w tym podrozdziale rezultaty dotyczące sterowania adaptacyjnego układów nieholonomicznych zostały uzyskane przez autora rozprawy. Stosując metodę wyboru wyjść linearyzujących sformułowano warunek wystarczający rozwiązania problemu śledzenia trajektorii zadanej przy nieznajomości parametrów barycentrycznych modelu. Warunek ten implikuje, że w przypadku sterowania adaptacyjnego kołowych robotów mobilnych możemy wykorzystać dobrze opracowane algorytmy sterowania adaptacyjnego układów holonomicznych (np. manipulatorów).

Rozważamy układ mechaniczny, którego zachowanie jest opisane przez n -uogólnionych współrzędnych $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)^T$ i prędkości $\dot{q} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)^T$ spełniających m ($m < n$) niezależnych ograniczeń kinematycznych postaci:

$$A(q)^T \dot{q} = 0, \quad (4.38)$$

gdzie:

$A(q)$ - macierz $(n \times m)$ pełnego rzędu;

Model matematyczny kinematyki rozpatrywanego układu jest postaci:

$$\dot{q} = S(q)\eta, \quad (4.39)$$

gdzie:

$S(q)$ - macierz $n \times (n - m)$, pełnego rzędu i spełniająca zależność:

$$A^T S(q) = 0; \quad (4.40)$$

η - $(n - m)$ -wymiarowy wektor zmiennych pomocniczych.

4.2.1 Wybór wyjść linearyzujących

W lokalnych współrzędnych q definiujemy gładką dystrybucję

$$\Delta(q) = \text{Span} \{ \text{Col } S(q) \} \quad (4.41)$$

oraz inwolutywne domknięcie dystrybucji $\Delta(q)$ oznaczane przez Δ^* . Zakładamy, że $\dim \Delta^* = n$ a zatem ograniczenia postaci (4.38) są całkowicie nieholonomiczne. Ponadto przyjmujemy, że istnieje odwzorowanie $h(q)$:

$$h : R^n \longrightarrow R^{n-m},$$

takie że macierz $\left[\frac{\partial h}{\partial q}S(q)\right]$ jest nieosobliwa. Przy tak zdefiniowanym odwzorowaniu $h(q)$, dowolny wybór układu współrzędnych postaci

$$\xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(q) \\ k(q) \end{bmatrix} = \Phi(q), \quad (4.42)$$

gdzie:

Φ - jest lokalnym dyfeomorfizmem,
powoduje, że równania (4.39) przybierają postać:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \bar{S}_1(\xi)\eta; \\ \dot{\xi}_2 &= \bar{S}_2(\xi)\eta, \end{aligned} \quad (4.43)$$

przy oznaczeniach:

$$\begin{aligned} \bar{S}_1(\xi) &= \left(\frac{\partial h}{\partial q}S\right)_{q=\Phi^{-1}(\xi)}; \\ \bar{S}_2(\xi) &= \left(\frac{\partial k}{\partial q}S\right)_{q=\Phi^{-1}(\xi)}. \end{aligned}$$

Nietrudno zauważyć, że równania (4.43) możemy zapisać w poniższej formie:

$$\dot{\xi} = \begin{bmatrix} I_{n-m} \\ S_2(\xi) \end{bmatrix} v, \quad (4.44)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} S_2(\xi) &= \bar{S}_2(\xi)\bar{S}_1^{-1}(\xi); \\ v &= \bar{S}_1(\xi)\eta. \end{aligned}$$

Zależności (4.44) implikują, że we współrzędnych ξ , ograniczenia (4.38) przyjmują następującą postać :

$$\begin{bmatrix} -S_2(\xi) & I_m \end{bmatrix} \dot{\xi} = 0. \quad (4.45)$$

Spostrzeżenie 4.1 W przypadku szczególnym odwzorowanie $h(q)$ można wybrać w taki sposób, że składa się z $(n - m)$ spośród n współrzędnych uogólnionych q .

Spostrzeżenie 4.2 Zmiana układu współrzędnych $\xi = \Phi(q)$ zależy jedynie od postaci ograniczeń kinematycznych (własności geometrycznych), zatem współrzędne te mogą być używane również w przypadku nieznaności parametrów barycentrycznych.

4.2.2 Własności modelu matematycznego kinematyki i dynamiki po zmianie układu współrzędnych

Stosując zasadę d'Alemberta dla układów nieholonomicznych z ograniczeniami postaci (4.45), otrzymujemy:

$$\bar{M}(\xi)\ddot{\xi} + \bar{C}(\xi, \dot{\xi})\dot{\xi} + \bar{g}(\xi) = \bar{B}(\xi)u + \begin{bmatrix} -S_2^T(\xi) \\ I_m \end{bmatrix} \lambda, \quad (4.46)$$

przy oznaczeniach:

- $\bar{M}(\xi)$ - macierz inercji rozmiaru $n \times n$, symetryczna, dodatnio określona;
- $\bar{C}$ - macierz rozmiaru $n \times n$ postaci:

$$\bar{C}(\xi, \dot{\xi}) = \frac{d}{dt} \bar{M}(\xi) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} [\dot{\xi}^T \bar{M}(\xi)];$$

- $\bar{g}$ - n -wymiarowy wektor oddziaływań grawitacyjnych;
- u - $(n - m)$ -wymiarowy wektor sterowań;
- λ - m -wymiarowy wektor mnożników Lagrange'a.

Własność 4.1 [5] *Macierz postaci $(\dot{\bar{M}}(\xi) - 2\bar{C}(\xi, \dot{\xi}))$ jest skośnie symetryczna na trajektoriach układu opisanego przez (4.45, 4.46).*

Własność 4.2 [5] *Macierze $\bar{M}(\xi)$ i $\bar{C}(\xi, \dot{\xi})$ oraz wektor $\bar{g}(\xi)$ są liniowo parametryzowane przez parametry barycentryczne w następujący sposób :*

$$\bar{M}(\xi) = \bar{M}_0(\xi) + \sum_{i=1}^p \bar{M}_i(\xi) \theta_i; \quad (4.47)$$

$$\bar{C}(\xi, \dot{\xi}) = \bar{C}_0(\xi, \dot{\xi}) + \sum_{i=1}^p \bar{C}_i(\xi, \dot{\xi}) \theta_i; \quad (4.48)$$

$$\bar{g}(\xi) = \bar{g}_0(\xi) + \sum_{i=1}^p \bar{g}_i(\xi) \theta_i, \quad (4.49)$$

gdzie:

$\theta_i, i \in 1, \dots, p$ - parametry barycentryczne.

Mnożąc równanie (4.46) lewostronnie przez macierz $[I_{n-m} \ S_2^T(\xi)]^T$ oraz wykorzystując fakt, że:

$$\ddot{\xi} = \begin{bmatrix} I_{n-m} \\ S_2(\xi) \end{bmatrix} \dot{v} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{S}_2(\xi) \end{bmatrix} v,$$

otrzymujemy:

$$J(\xi) \dot{v} + C(\xi, v) v + g(\xi) = B(\xi) u, \quad (4.50)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} J(\xi) &= \begin{bmatrix} I_{n-m} & S_2^T(\xi) \end{bmatrix}^T \bar{M}(\xi) \begin{bmatrix} I_{n-m} \\ S_2(\xi) \end{bmatrix}; \\ C(\xi, v) &= \begin{bmatrix} I_{n-m} & S_2^T(\xi) \end{bmatrix} \left\{ \bar{C}(\xi, \begin{bmatrix} I_{n-m} \\ S_2(\xi) \end{bmatrix} v) \begin{bmatrix} I_{n-m} \\ S_2(\xi) \end{bmatrix} + \bar{M}(\xi) \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{S}_2(\xi) \end{bmatrix} \right\}; \\ g(\xi) &= \begin{bmatrix} I_{n-m} & S_2^T(\xi) \end{bmatrix} \bar{g}; \\ B(\xi) &= \begin{bmatrix} I_{n-m} & S_2^T(\xi) \end{bmatrix} \bar{B}. \end{aligned}$$

Równania opisujące kinematykę i dynamikę rozpatrywanego układu nieholonomicznego we współrzędnych ξ przyjmują zatem poniższą postać:

$$\dot{\xi}_1 = v; \quad (4.51)$$

$$J(\xi)\dot{v} + C(\xi, v)v + g(\xi) = B(\xi)u; \quad (4.52)$$

$$\dot{\xi}_2 = S_2(\xi)v. \quad (4.53)$$

Model (4.51-4.53) posiada następujące własności:

Własność 4.3 *Macierze $S_2(\xi)$ and $B(\xi)$ są zależne jedynie od parametrów geometrycznych. Macierz inercji $J(\xi)$ i macierz $C(\xi, v)$ oraz wektor $g(\xi)$ są liniowo parametryzowane przez parametry barycentryczne:*

$$J(\xi) = J_0(\xi) + \sum_{i=1}^p J_i(\xi) \theta_i; \quad (4.54)$$

$$C(\xi, v) = C_0(\xi, v) + \sum_{i=1}^p C_i(\xi, v) \theta_i; \quad (4.55)$$

$$g(\xi) = g_0(\xi) + \sum_{i=1}^p g_i(\xi) \theta_i, \quad (4.56)$$

gdzie:

$\theta_i, i \in 1, \dots, p$ - parametry barycentryczne.

Własność 4.4 [4] *Macierz*

$$\dot{J}(\xi) - 2C(\xi, v) \quad (4.57)$$

jest skośnie symetryczna.

Z powyższych rozważań wynika że układ nieliniowy postaci (4.51-4.52) ma takie same własności strukturalne jak równania opisujące model dynamiki układu holonomicznego o $(n-m)$ stopniach swobody. Należy jednak zwrócić uwagę na fakt, że pełny model układu zawiera dodatkowo podukład opisany przez równanie (4.53).

4.2.3 Linearyzujące sprzężenie zwrotne

Celem naszych rozważań w tym podrozdziale będzie rozwiązanie następującego problemu sterowania dla układu (4.51-4.53).

Przy danej trajektorii $\xi_{1d}(t)$, znaleźć u , takie że błąd śledzenia $e = \xi_{1d} - \xi_1$ dąży do 0 przy t dążącym do nieskończoności z wewnętrzną stabilnością, czyli ograniczonością $\xi_2(t)$.

Proponowane rozwiązanie problemu jest poprawne przy podanych niżej założeniach.

Założenie 4.1 $\xi_{1d}(t)$ jest gładką trajektorię zadaną klasy C^2 , taką że $\|\xi_{1d}(t)\|$ i $\|\dot{\xi}_{1d}(t)\|$ są jednostajnie ograniczone:

$$\exists C_1, C_2 > 0 : \quad \forall t \quad \|\xi_{1d}(t)\| \leq C_1 \quad \text{ i } \quad \|\dot{\xi}_{1d}(t)\| \leq C_2.$$

Założenie 4.2 Macierze $J(\xi)$, $C(\xi, v)$, $G(\xi)$, $B(\xi)$ są jednostajnie ograniczone ze względu na ξ :

$$\begin{aligned} \exists K_1 > 0, K_2 > 0, K_3 > 0, K_4 > 0: \quad & \|J(\xi)\| \leq K_1, \quad \|C(\xi, v)\| \leq K_2 \|v\|, \\ & \|G(\xi)\| \leq K_3, \quad \|B(\xi)\| \leq K_4. \end{aligned}$$

Macierz $B(\xi)$ jest pełnego rzędu dla dowolnej wartości ξ .

Założenie 4.3 Macierz $S_2(\xi)$ jest jednostajnie ograniczona ze względu na ξ :

$$\exists K_5 > 0 : \quad \forall \xi \quad \|S_2(\xi)\| \leq K_5.$$

Twierdzenie 4.3 Przy Założeniu 4.2 oraz znajomości dokładnych wartości parametrów barycentrycznych układ opisany przez (4.51) jest linearyzowalny przy pomocy statycznego sprzężenia zwrotnego postaci:

$$u(\xi, v) = B^{-1}(\xi) [J(\xi)w + C(\xi, v)v + G(\xi)] \quad (4.58)$$

gdzie:

w - $(n - m)$ -wymiarowy wektor nowych sterowań.

Po zastosowaniu sprzężenia zwrotnego (4.58) układ sterowania (4.51-4.53) przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= v; \\ \dot{v} &= w; \\ \dot{\xi}_2 &= S_2(\xi)v. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Wybierając w w następujący sposób

$$w = \ddot{\xi}_{1d} + R_2(\dot{\xi}_{1d} - \dot{\xi}_1) + R_1(\xi_{1d} - \xi_1), \quad (4.60)$$

gdzie:

R_1, R_2 - macierze wzmocnień, dodatnio określone,

otrzymujemy liniowy i stabilny eksponencjalnie układ dynamiczny dla błędu śledzenia e . Jednostajna ograniczoność e i jego pochodnej $\dot{e}$ oraz $\dot{\xi}_{1d}$ (Założenie 4.1) implikują jednostajną ograniczoność $\dot{\xi}_1 = v$. Z kolei, przy założeniu 4.3 (jednostajna ograniczoność $S_2(\xi)$) możemy zapisać:

$$\frac{d}{dt} \|\xi_2\| \leq \|\dot{\xi}_2\| \leq \|S_2(\xi)\| \|v\| \leq K_5 \|v\|. \quad (4.61)$$

Całkując zależność (4.61), otrzymujemy:

$$\|\xi_2(t)\| \leq \|\xi_2(0)\| + K_5 \int_0^t \|v\| dt = \|\xi_2(0)\| + K t, \quad (4.62)$$

co pozwala stwierdzić, że $\xi_2(t)$ jest ograniczone. Jak łatwo zauważyć, warunkiem wystarczającym istnienia (ograniczoności) $\xi_2(t)$ przy założeniach 4.1, 4.2 i sterowaniu (4.58, 4.60) jest jednostajna ograniczoność macierzy $S_2(\xi)$. Powyższe spostrzeżenie było inspiracją dla poszukiwania podobnego warunku zapewniającego ograniczoność (istnienie) $\xi_2(t)$ przy niepełnej znajomości modelu.

4.2.4 Linearyzujące sterowanie adaptacyjne

Załóżmy, że parametry barycentryczne układu

$$\dot{\xi}_1 = v; \quad (4.63)$$

$$J(\xi)\dot{v} + C(\xi, v)v + g(\xi) = B(\xi)u; \quad (4.64)$$

$$\dot{\xi}_2 = S_2(\xi)v \quad (4.65)$$

są nieznane.

Przyjmujemy ponadto prawdziwość Założenia 4.1, Założenia 4.2 i Założenia 4.3, które sformułowano w podrozdziale 4.2.3 rozprawy. Przy powyższych założeniach rozważamy następujący problem sterowania adaptacyjnego:

Znaleźć prawo adaptacji dla nieznanych wartości parametrów barycentrycznych i prawo sterowania, które zapewni, że układ (4.63), (4.64) śledzi trajektorię zadaną $\xi_{1d}(t)$ i zapewnia ograniczoność (istnienie) $\xi_2(t)$.

Rozwiązanie tak postawionego problemu sterowania zostanie przedstawione w postaci następującego twierdzenia.

Twierdzenie 4.4 *Jeżeli dla każdego ξ_2 algorytm sterowania adaptacyjnego dla układu (4.63), (4.64) zapewnia:*

- globalną asymptotyczną zbieżność do zera błędu śledzenia $e = \xi_{1d} - \xi_1$;
- ograniczoność błędu e i jego pochodnej względem czasu $\dot{e}$,

to wartości $\xi_2(t)$ są ograniczone.

Dowód.

Analiza stabilności wewnętrznej układu (4.63-4.70) z algorytmem sterowania adaptacyjnego będzie oparta na zamieszczonym poniżej lemacie.

Lemat 4.1 [12] *Rozważmy układ dynamiczny Σ_1 :*

$$\Sigma_1 : \begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, y); \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, y) \end{cases} \quad x_1 \in R^{n_1}, \quad x_2 \in R^{n_2}, \quad y \in R^{n_3}, \quad (4.66)$$

gdzie $y(t)$ jest dowolną funkcją klasy C^1 .

Niech g będzie funkcją klasy C^1 :

$$g : R^{n_1+n_2+n_3} \mapsto R^{n_3}.$$

Załóżmy, że:

1. Trajektorie układu Σ_1 istnieją dla dowolnej funkcji $y(t)$ klasy C^1 oraz x_2 jest ograniczone jednostajnie dla dowolnej chwili czasu t i funkcji $y(t)$:

$$\begin{aligned} \forall x_1(0), x_2(0) \exists M(x_1(0), x_2(0)), \text{ takie że} \\ \forall y(\cdot) \in C^1, \forall t \quad \|x_2(t)\| \leq M(x_1(0), x_2(0)). \end{aligned} \quad (4.67)$$

2. Funkcja g jest ograniczona jednostajnie dla dowolnych wartości x_1 i x_3 :

$\exists$ ciągła, monotoniczna i rosnąca skalarna funkcja $\rho: R^+ \rightarrow R^+$, taka że

$$\|g(x_1, x_2, x_3)\| \leq \rho(\|x_2\|). \quad (4.68)$$

Przy powyższych założeniach trajektorie układu dynamicznego Σ_2 :

$$\Sigma_2 : \begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, x_3); \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, x_3); \\ \dot{x}_3 = g(x_1, x_2, x_3) \end{cases} \quad (4.69)$$

istnieją dla dowolnej chwili czasu t i ponadto

$$\begin{aligned} \|x_2(t)\| &\leq M(x_1(0), x_2(0)) \quad \forall t; \\ \|\dot{x}_3(t)\| &\leq \rho(M(x_1(0), x_2(0))) \quad \forall t; \\ \|x_3(t)\| &\leq \|x_3(0)\| + \rho(M(x_1(0), x_2(0)))t \quad \forall t. \end{aligned}$$

Dowód

Jak łatwo zauważyć, powyższe twierdzenie wymaga jedynie dowodu istnienia (ograniczoności) $x_3(t)$ dla każdej chwili czasu t . Przy założeniu o istnieniu trajektorii układu Σ_1 i jednostajnej ograniczoności $x_2(t)$ dla dowolnej funkcji $y(\cdot) \in C^1$ możemy napisać:

$$\|x_2(t)\| \leq M(x_1(0), x_2(0)) = D_1, \quad D_1 > 0.$$

Z kolei jednostajna ograniczoność funkcji g dla dowolnych wartości x_1 i x_3 implikuje, że:

$$\|g(x_1, x_2, x_3)\| \leq \rho(\|x_2\|) \leq \rho(D_1) = D_2, \quad D_2 > 0.$$

Z powyższej nierówności wynika, że $\dot{x}_3 = g(x_1, x_2, x_3)$ jest jednostajnie ograniczone, a zatem x_3 istnieje dla każdej chwili czasu t .

□

Udowodniony powyżej Lemat 4.1 zostanie wykorzystany teraz przy dowodzie Twierdzenia 4.4. Przy założeniach 4.1 (ograniczoność trajektorii zadanej ξ_{1d}) i 4.2 (ograniczoność sterowania), algorytm sterowania adaptacyjnego z globalną asymptotyczną zbieżnością błędu śledzenia e zapewnia jednostajną ograniczoność e oraz jego pochodnej $\dot{e}$, co implikuje z kolei jednostajną ograniczoność ξ_1 i v dla dowolnych wartości $\xi_2(t)$. Przy podstawieniach $x_1 = \xi_1$, $x_2 = v$, $x_3 = \xi_2$ warunek 1 Lematu 4.1 jest spełniony. Przyjmując ponadto, że $g(x_1, x_2, x_3) = S_2(\xi)v$

oraz zakładając jednostajną ograniczoność macierzy $S_2(\xi)$, zapewniamy spełnienie warunku 2 Lematu 4.1, a zatem $\xi_2(t)$ jest ograniczone. $\square$

W grupie algorytmów sterowania adaptacyjnego spełniających założenia Twierdzenia 4.4 (asymptotyczna zbieżność błędu śledzenia e do zera) znajdują się również i takie, które zapewniają eksponencjalną zbieżność przy spełnieniu warunku trwałego wzbudzenia [53]. Dla tego typu algorytmów sterowania możemy sformułować dodatkowo następujące twierdzenie [29].

Twierdzenie 4.5 *Zalóżmy, że:*

- *trajektoria zadana $\xi_{1d}(t)$ spełnia Założenie 4.1;*
- *$\dot{\xi}_{1d} \in L_1$;*
- *algorytm sterowania adaptacyjnego zapewnia spełnienie warunku $\dot{e} \in L_1$;*
- *$S_2(\xi)$ jest jednostajnie ograniczone.*

Przy spełnieniu powyższych założeń $\xi_2(t)$ jest jednostajnie ograniczone.

Dowód:

Przy założeniu 4.1 (ograniczoność trajektorii zadanej) algorytm sterowania adaptacyjnego zapewnia jednostajną ograniczoność $\dot{\xi}_1$ i v dla dowolnych wartości $\xi_2(t)$ (patrz dowód Tw. 4.4). Przy jednostajnej ograniczoności $S_2(\xi)$ możemy zapisać:

$$\frac{d}{dt} \|\xi_2(t)\| \leq \|S_2(\xi)\| \|v\| \leq K \|\dot{\xi}_1\|, \quad (4.70)$$

gdzie:

$$K = \max_{\xi} \|S_2(\xi)\|.$$

Ponadto, korzystając z definicji błędu śledzenia e , otrzymujemy:

$$\|\dot{\xi}_1\| \leq \|\dot{e}\| + \|\dot{\xi}_{1d}\|. \quad (4.71)$$

Jeżeli $\dot{e}$ i $\dot{\xi}_{1d}$ należą do przestrzeni L_1 , wtedy słuszne jest następujące oszacowanie:

$$\|\xi_2(t)\| \leq \|\xi_2(0)\| + K \int_0^t (\|\dot{\xi}_{1d}\| + \|\dot{e}\|) dt < \infty. \quad (4.72)$$

które implikuje, że $\xi_2(t)$ jest jednostajnie ograniczone. $\square$

4.2.5 Analiza zastosowania klasycznego algorytmu sterowania adaptacyjnego Slotine'a-Li

W rozdziale dokonamy analizy zastosowania do modelu matematycznego układu nieholonomicznego klasycznego algorytmu sterowania adaptacyjnego robotów manipulacyjnych, który

spełnia założenia Twierdzenia 4.4. Korzystając z wyników pracy [52], dla układu (4.63-4.70) proponujemy algorytm sterowania postaci

$$u = B^{-1}(\xi) (\hat{J}(\xi) \ddot{\xi}_{1r} + \hat{C}(\xi, \dot{\xi}_1) \dot{\xi}_{1r} + \hat{g}(\xi) - K_D s), \quad (4.73)$$

gdzie:

- $\hat{J}(\xi) = J_0(\xi) + \sum_{i=1}^p J_i(\xi) \hat{\theta}_i$;
- $\hat{C}(\xi, \dot{\xi}_1) = C_0(\xi, \dot{\xi}_1) + \sum_{i=1}^p C_i(\xi, \dot{\xi}_1) \hat{\theta}_i$;
- $\hat{g}(\xi) = g_0(\xi) + \sum_{i=1}^p g_i(\xi) \hat{\theta}_i$;
- K_D - macierz wzmocnienia rozmiaru $(n-m) \times (n-m)$ symetryczna, dodatnio określona;
- θ - wektor p -wymiarowy nieznanych parametrów barycentrycznych;
- $\hat{\theta}$ - wektor estymowanych wartości θ ;
- $\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta$ - błąd estymacji parametrów;
- $e = \xi_{1d} - \xi_1$ - błąd śledzenia;
- $\dot{\xi}_{1r} = \dot{\xi}_{1d} + \Lambda e$ - prędkość odniesienia;
- $s = \dot{\xi}_{1r} - \dot{\xi}_1 = \dot{e} + \Lambda e$;
- Λ macierz wzmocnienia rozmiaru $(n-m) \times (n-m)$, symetryczna i dodatnio określona

i algorytm estymacji parametrów barycentrycznych

$$\dot{\hat{\theta}} = -\Gamma^{-1} Y^T(\xi, \dot{\xi}_1, \dot{\xi}_{1r}, \ddot{\xi}_{1r}) s, \quad (4.74)$$

gdzie:

i -ty ($i = 1, \dots, p$) wiersz macierzy Y^T jest zdefiniowany przez

$$Y_i^T = [J_i(\xi) \ddot{\xi}_{1r} + C_i(\xi, \dot{\xi}_1) \dot{\xi}_{1r} + g_i(\xi)]^T; \quad (4.75)$$

Γ - macierz wzmocnienia algorytmu estymacji rozmiaru $p \times p$, symetryczna, dodatnio określona.

Równania układu (4.63-4.70) z zamkniętą pętlą sprzężenia zwrotnego możemy przedstawić w poniższej postaci:

$$\dot{s} = J^{-1}(e + \xi_{1d}, \xi_2) [Y(e + \xi_{1d}, s - \Lambda e + \dot{\xi}_{1d}, \xi_2, \dot{\xi}_{1d} - \Lambda e, \ddot{\xi}_{1d} - \Lambda s + \Lambda^2 e) \tilde{\theta} - C(e + \xi_{1d}, s - \Lambda e + \dot{\xi}_{1d}, \xi_2) s - K_D s]; \quad (4.76)$$

$$\dot{e} = s - \Lambda e; \quad (4.77)$$

$$\dot{\tilde{\theta}} = -\Gamma^{-1} Y^T(e + \xi_{1d}, s - \Lambda e + \dot{\xi}_{1d}, \xi_2, \dot{\xi}_{1d} - \Lambda e, \ddot{\xi}_{1d} - \Lambda s + \Lambda^2 e) s; \quad (4.78)$$

$$\dot{\xi}_2 = S_2(e + \xi_{1d}, \xi_2)(s - \Lambda e + \dot{\xi}_{1d}). \quad (4.79)$$

Dla powyższego układu proponujemy następującą funkcję Lapunowa:

$$V(t, e, s, \tilde{\theta}, \xi_2) = \frac{1}{2} s^T J(e + \xi_{1d}, \xi_2) s + \frac{1}{2} \tilde{\theta}^T \Gamma \tilde{\theta}, \quad (4.80)$$

Równania zamkniętej pętli sprzężenia zwrotnego i własność skośnej symetryczności (Własność 4.4) pozwalają na zapisanie $\dot{V}(t, e, s, \tilde{\theta}, \xi_2)$ w postaci:

$$\dot{V}(t, e, s, \tilde{\theta}, \xi_2) = -s^T K_D s. \quad (4.81)$$

Funkcja Lapunowa $V(t, s, e, \tilde{\theta}, \xi_2)$ jest nierosnąca a zatem

$$V(t, s, e, \tilde{\theta}, \xi_2) \leq V(0, s(0), e(0), \tilde{\theta}(0), \xi_2(0)).$$

Ograniczoność od góry $V(t, s, e, \tilde{\theta}, \xi_2)$ implikuje ograniczoność s , $\tilde{\theta}$ a także przez definicję s , ograniczoność e i $\dot{e}$. Z kolei, jeżeli trajektoria zadana jest ograniczona, wówczas możemy stwierdzić (przy pomocy równania (4.76)), że $\dot{s}$ jest ograniczone, a zatem $\ddot{V}$ jest ograniczone i $\dot{V}$ jest jednostajnie ciągła. Stosując standardowy lemat Barbalata [51] otrzymujemy:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{V}(t, e, s, \tilde{\theta}, \xi_2) = 0 \quad (4.82)$$

a zatem

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = 0, \quad (4.83)$$

co ostatecznie pozwala wyciągnąć wniosek

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0. \quad (4.84)$$

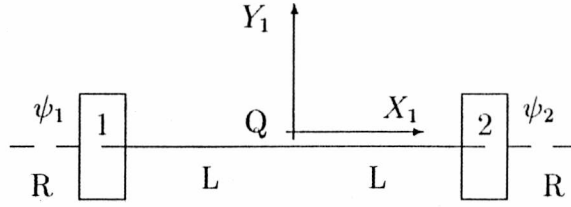
Rozpatrywany algorytm sterowania adaptacyjnego zapewnia globalną asymptotyczną zbieżność do zera błędu śledzenia e oraz ograniczoność tego błędu i jego pochodnej $\dot{e}$ dla dowolnej wartości ξ_2 , jeżeli macierz $S_2(\xi)$ jest ograniczona jednostajnie.

4.2.6 Sterowanie przy pomocy wyjść linearyzujących dla kołowych robotów mobilnych

Celem tego podrozdziału jest pokazanie, że założenie o jednostajnej ograniczoności (Założenie 4.3) $S_2(\xi)$ jest spełnione w przypadku kołowych robotów mobilnych. Jak wspomnieliśmy w rozdziale 2.2 istnieje 5 podstawowych typów robotów mobilnych. Dla każdego ze wspomnianych typów istnieją wyjścia linearyzujące, które posiadają następujące własności [10]:

- ξ_2 jest wektorem składającym się wyłącznie ze współrzędnych uogólnionych opisujących pewne kąty;
- macierze $J(\xi)$, $C(\xi, v)$ i $B(\xi)$ są ograniczone jednostajnie dla dowolnej wartości ξ ;
- $S_2(\xi)$ jest ograniczona jednostajnie ze względu na ξ .

W celu ilustracji wymienionych powyżej własności modeli kołowych robotów mobilnych dokonamy analizy dwukolowego robota mobilnego (Rys. 4.12).



Rys. 4.12: Schemat kinematyczny robota dwukółowego.

Przykład 4.1 *Model matematyczny kinematyki i dynamiki dwukółowego robota mobilnego.*

1. Ruch rozpatrywanego robota jest opisany przez wektor współrzędnych uogólnionych postaci:

$$q = \left(x, y, \theta, \psi_1, \psi_2 \right)^T,$$

gdzie:

- x, y — współrzędne kartezjańskie położenia robota;
 θ — orientacja robota na płaszczyźnie;
 ψ_i — kąt obrotu i -tego koła ($i = 1, 2$).

2. Korzystając z metod wyznaczania ograniczeń oraz wyznaczania równań kinematyki opisanych w rozdziale 2 rozprawy, otrzymujemy:

$$A^T(q) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & L & R & 0 \\ \sin \theta & -\cos \theta & L & 0 & R \end{bmatrix}; \quad S(q) = \begin{bmatrix} -\sin \theta & 0 \\ \cos \theta & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{1}{R} & -\frac{L}{R} \\ \frac{1}{R} & -\frac{L}{R} \end{bmatrix},$$

gdzie:

L, R - parametry geometryczne.

3. Definicja ξ_1, ξ_2

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} x - e \sin \theta \\ y + e \cos \theta \end{bmatrix}; \quad \xi_2 = \begin{bmatrix} \theta \\ \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix};$$

i odpowiadająca jej postać $S_2(\xi)$:

$$S_2(\xi) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{e} \cos \theta & -\frac{1}{e} \sin \theta \\ \frac{1}{R} \sin \theta + \frac{L}{eR} \cos \theta & -\frac{1}{R} \cos \theta + \frac{L}{eR} \sin \theta \\ -\frac{1}{R} \sin \theta + \frac{L}{eR} \cos \theta & \frac{1}{R} \cos \theta + \frac{L}{eR} \sin \theta \end{bmatrix}.$$

Jak łatwo zauważyć, $S_2(\xi)$ jest jednostajnie ograniczona.

4. Postać energii całkowitej rozważanego robota mobilnego we współrzędnych ξ :

$$E_k(\xi, \dot{\xi}) = \frac{1}{2}(I_z + 2M_k L^2)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}(M + 2M_k)[\dot{\xi}_{11}^2 + 2\dot{\xi}_{11}\dot{\theta}e \cos \theta + \dot{\xi}_{12}^2 + 2\dot{\xi}_{12}\dot{\theta}e \sin \theta + e^2\dot{\theta}^2] + \frac{1}{2}I_k(\dot{\psi}_1^2 + \dot{\psi}_2^2),$$

gdzie:

- M - masa skrzyni wózka;
- I_z - moment bezwładności skrzyni wózka;
- I_k - moment bezwładności koła;
- M_k - masa koła;
- $M + 2M_k$ - masa całkowita robota;
- $I_z + 2M_k L^2$ - całkowity moment bezwładności robota.

5. Wybór parametrów barycentrycznych:

- $I_z + 2M_k L^2$;
- $M + 2M_k$;
- I_k .

6. Postać macierzy $J(\xi)$, $C(\xi, v)$ i $B(\xi)$:

$$I(\xi) = I_0(\xi)\theta_0 + \sum_2^{i=1} I_i(\xi)\theta_i, \quad (4.85)$$

gdzie:

$$I_0(\xi) = \begin{bmatrix} (\sin^2 \theta + \frac{L^2}{e^2} \cos^2 \theta) \frac{2}{R^2} & \sin \theta \cos \theta (\frac{L^2}{e^2} - 1) \frac{2}{R^2} \\ \sin \theta \cos \theta (\frac{L^2}{e^2} - 1) \frac{2}{R^2} & (\cos^2 \theta + \frac{L^2}{e^2} \sin^2 \theta) \frac{2}{R^2} \end{bmatrix};$$

$$I_1(\xi) = \begin{bmatrix} \sin^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta \end{bmatrix};$$

$$I_2(\xi) = \begin{bmatrix} \frac{1}{e^2} \cos^2 \theta & \frac{1}{e^2} \sin \theta \cos \theta \\ \frac{1}{e^2} \sin \theta \cos \theta & \frac{1}{e^2} \sin^2 \theta \end{bmatrix};$$

$$\theta_0 = I_k;$$

$$\theta_1 = M + 2M_k;$$

$$\theta_2 = I_z + 2M_k L^2;$$

$$C(\xi, v) = C_0(\xi, v)\theta_0 + \sum_{i=1}^2 C_i(\xi, v)\theta_i, \quad (4.86)$$

$$C_0(\xi, v) = \begin{bmatrix} -\frac{2}{eR^2} \sin \theta \cos \theta (1 - \frac{L^2}{e^2}) & -\frac{2}{eR^2} (\sin^2 \theta + \frac{L^2}{e^2} \cos^2 \theta) \\ (v_1 \cos \theta + v_2 \sin \theta) & (v_1 \cos \theta + v_2 \sin \theta) \\ \frac{2}{eR^2} (\cos^2 \theta + \frac{L^2}{e^2} \sin^2 \theta) & -\frac{2}{eR^2} \sin \theta \cos \theta (-1 + \frac{L^2}{e^2}) \\ (v_1 \cos \theta + v_2 \sin \theta) & (v_1 \cos \theta + v_2 \sin \theta) \end{bmatrix};$$

$$C_1(\xi, v) = \begin{bmatrix} -\frac{2}{e} \sin \theta \cos \theta & -\frac{1}{e} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\ (v_1 \cos \theta + v_2 \sin \theta) & (v_1 \cos \theta + v_2 \sin \theta) \\ -\frac{1}{e} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) & \frac{2}{e} \sin \theta \cos \theta \\ (v_1 \cos \theta + v_2 \sin \theta) & (v_1 \cos \theta + v_2 \sin \theta) \end{bmatrix};$$

$$C_2(\xi, v) = \begin{bmatrix} \frac{1}{e^3} \sin \theta \cos \theta & -\frac{1}{e^3} \cos^2 \theta \\ (v_1 \cos \theta + v_2 \sin \theta) & (v_1 \cos \theta + v_2 \sin \theta) \\ \frac{1}{e^3} \sin^2 \theta (v_1 \cos \theta + v_2 \sin \theta) & -\frac{1}{e^3} \sin \theta \cos \theta \\ (v_1 \cos \theta + v_2 \sin \theta) & (v_1 \cos \theta + v_2 \sin \theta) \end{bmatrix};$$

$$G(\xi) = \begin{bmatrix} \frac{1}{R} \sin \theta + \frac{L}{eR} \cos \theta & -\frac{1}{R} \sin \theta + \frac{L}{eR} \cos \theta \\ -\frac{1}{R} \cos \theta + \frac{L}{eR} \sin \theta & \frac{1}{R} \cos \theta + \frac{L}{eR} \sin \theta \end{bmatrix}. \quad (4.87)$$

Jak widać, macierze $I(\xi)$, $C(\xi, v)$ i $G(\xi)$ są jednostajnie ograniczone ze względu na ξ .

4.2.7 Wyniki symulacji komputerowej

Wyprowadzony w poprzednim podrozdziale model matematyczny kinematyki i dynamiki dwukółowego robota mobilnego wykorzystamy do wyznaczenia algorytmu sterowania najpierw przy założeniu o znajomości, a później przy nieznanym wartości parametrów barycentrycznych. Należy zauważyć, że model dwukółowego robota mobilnego można otrzymać zaniedbując oddziaływanie koła przedniego robota mobilnego typu (2, 0). W efekcie, do badań symulacyjnych przyjęto wartości parametrów parametrów, które zostały wyznaczone dla robota mobilnego "Ulisses" [24]:

- parametry barycentryczne:
 - $M + 2M_k = 12.8 \text{ kg}$;
 - $I_z + 2M_k L^2 = 0.111 \text{ kg m}^2$;
 - $I_k = 0.00025 \text{ kg m}^2$;
- parametry geometryczne:
 - $R = 0.05 \text{ m}$;

- $L = 0.23 \text{ m}$;
- $e = 0.23 \text{ m}$.

Przedmiotem badań symulacyjnych było śledzenie trajektorii zadanych o poniższej postaci:

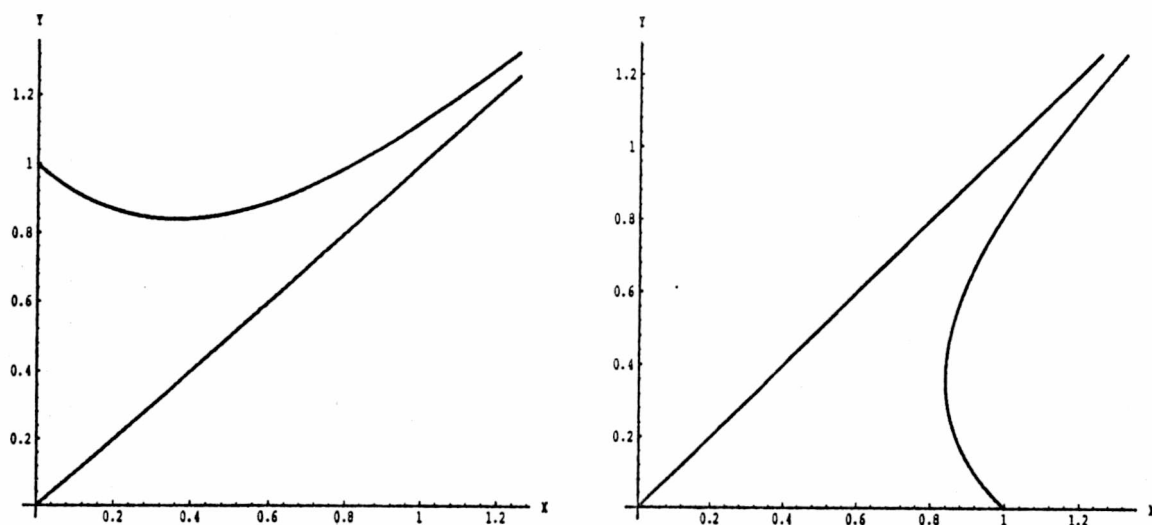
1. linia prosta:

- $\xi_{1d}(t) = \frac{t}{5}$;
- $\xi_{2d}(t) = \frac{t}{5}$;
- $\theta_d(t) = \frac{\pi}{4}$;

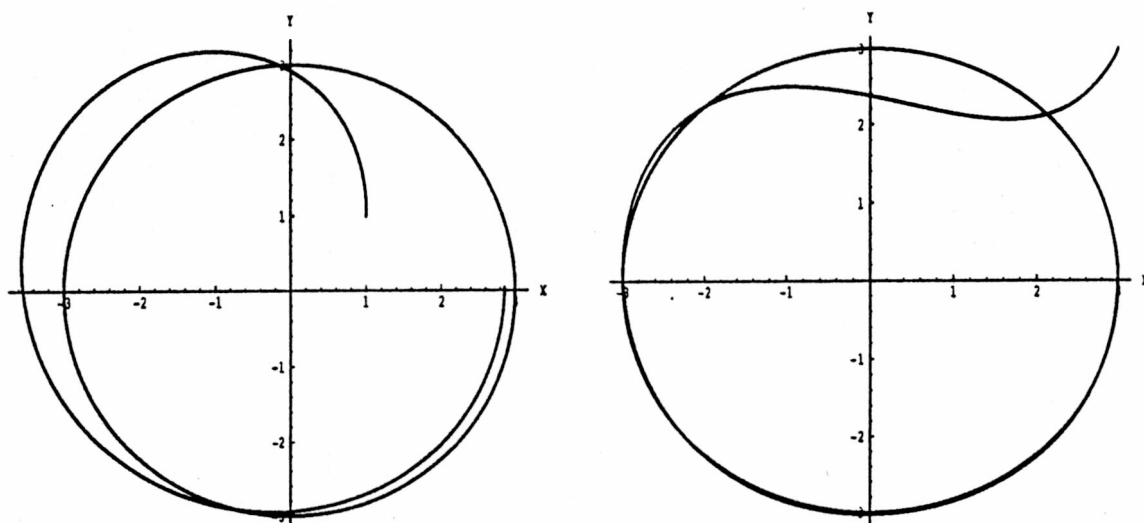
2. okrąg:

- $\xi_{1d}(t) = r \cos \theta_d$;
- $\xi_{2d}(t) = r \sin \theta_d$;
- $\theta_d(t) = \frac{t}{5}$;
- $r = 3 \text{ m}$.

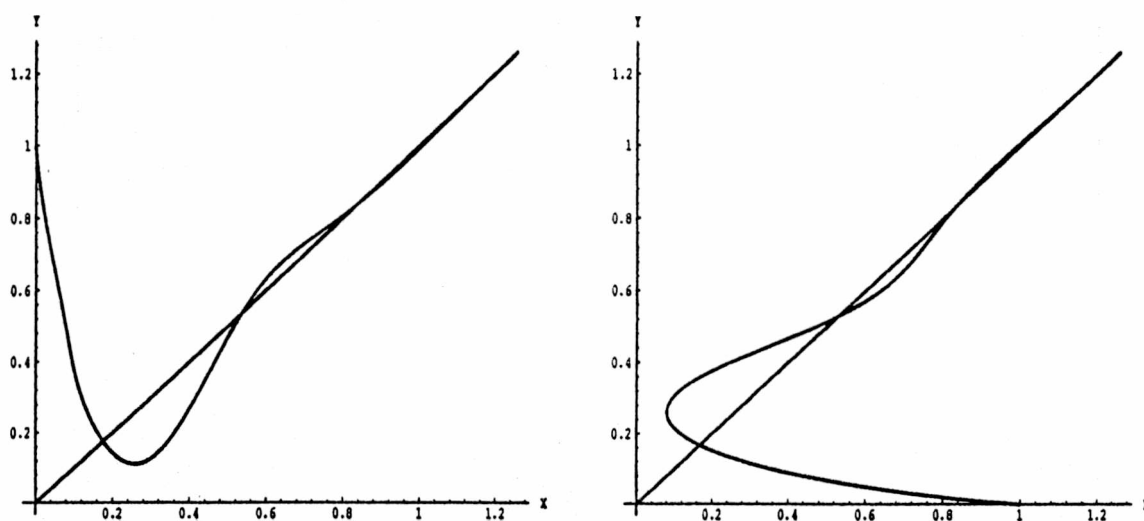
1. Zachowanie dwukółowego robota mobilnego przy sterowaniu wykorzystującym znajomość wartości parametrów barycentrycznych.



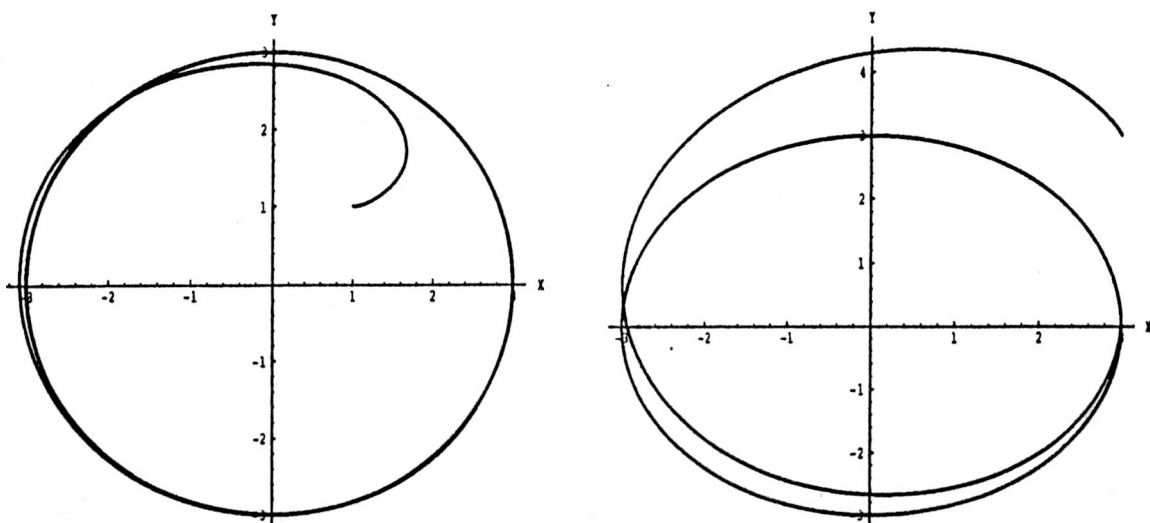
Rys. 4.13: Zachowanie robota mobilnego przy sterowaniu wykorzystującym znajomość wartości parametrów barycentrycznych dla $R_1 = 2$ i $R_2 = 5$ (trajektoria zadana - linia prosta).



Rys. 4.14: Zachowanie robota mobilnego przy sterowaniu wykorzystującym znajomość wartości parametrów barycentrycznych dla $R_1 = 2$ i $R_2 = 5$ (trajektoria zadana - okrąg).

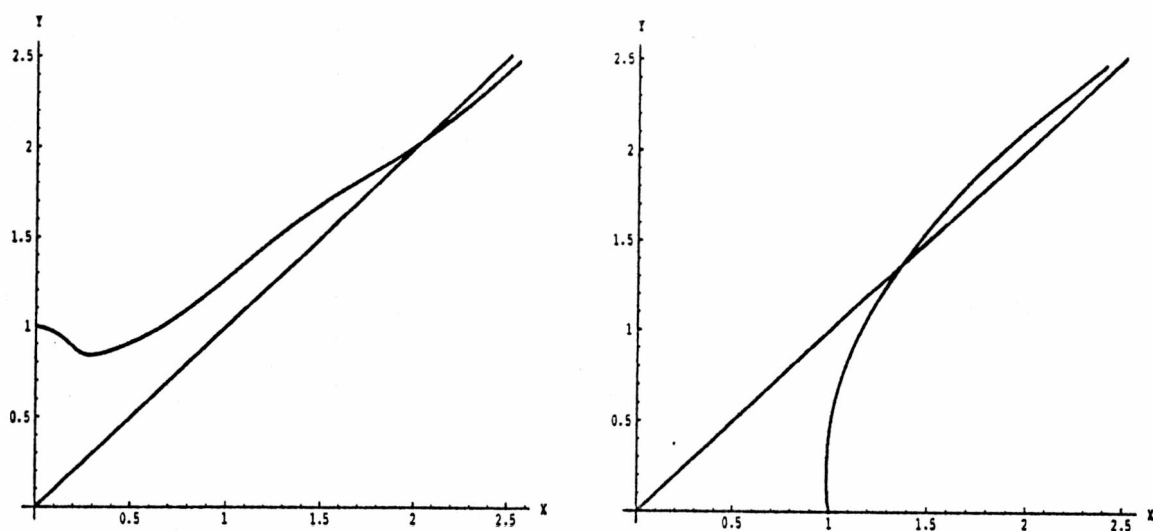


Rys. 4.15: Zachowanie robota mobilnego przy sterowaniu wykorzystującym znajomość wartości parametrów barycentrycznych dla $R_1 = 5$ i $R_2 = 2$ (trajektoria zadana - linia prosta).

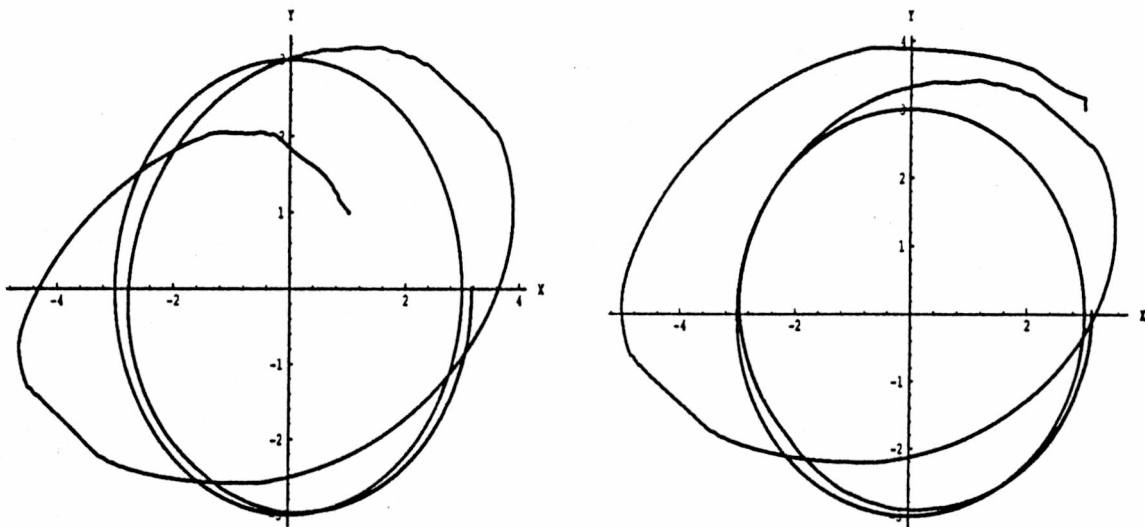


Rys. 4.16: Zachowanie robota mobilnego przy sterowaniu wykorzystującym znajomość wartości parametrów barycentrycznych dla $R_1 = 2$ i $R_2 = 5$ (trajektoria zadana - okrąg).

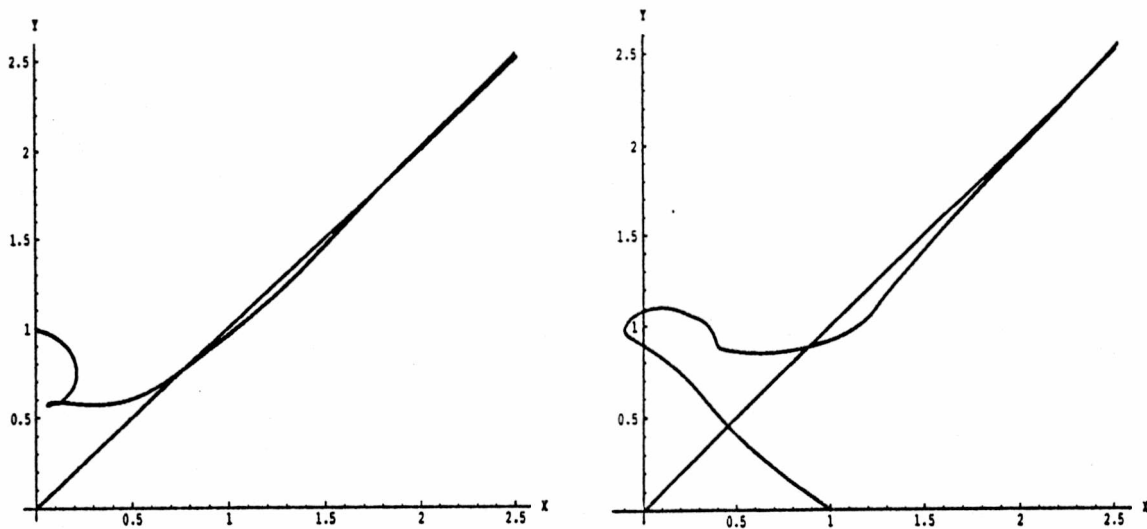
2. Zachowanie dwukółowego robota mobilnego przy sterowaniu adaptacyjnym.



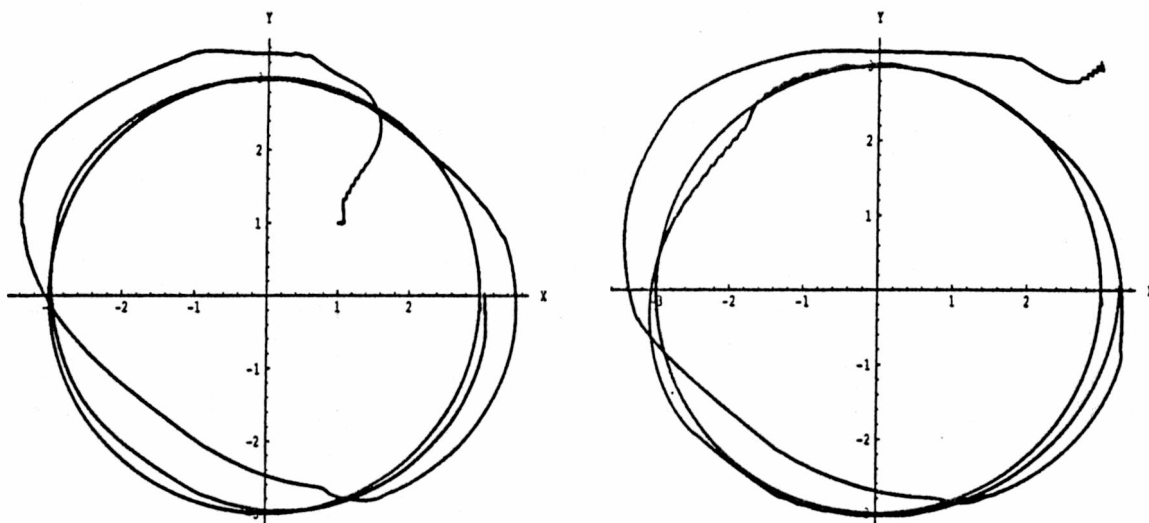
Rys. 4.17: Zachowanie robota mobilnego przy sterowaniu adaptacyjnym dla $k_1 = k_2 = 5$ i $\Lambda = 0.4$ (trajektoria zadana - linia prosta).



Rys. 4.18: Zachowanie robota mobilnego przy sterowaniu adaptacyjnym dla $k_1 = k_2 = 5$ i $\Lambda = 0.4$ (trajektoria zadana - okrąg).



Rys. 4.19: Zachowanie robota mobilnego przy sterowaniu adaptacyjnym dla $k_1 = k_2 = 5$ i $\Lambda = 2.5$ (trajektoria zadana - linia prosta).



Rys. 4.20: Zachowanie robota mobilnego przy sterowaniu adaptacyjnym dla $k_1 = k_2 = 5$ i $\Lambda = 2.5$ (trajektoria zadana - okrąg).

4.2.8 Wnioski z badań symulacyjnych

Prezentację wniosków sformułowanych na podstawie symulacji rozpoczniemy od omówienia przebiegów dotyczących nieadaptacyjnego algorytmu śledzenia.

1. Zachowanie algorytmu sterowania przy pełnej znajomości wartości parametrów barycentrycznych.

- Badany algorytm zapewnia zbieżność eksponencjalną do zera błędu śledzenia e .
- Wykorzystując klasyczną metodę analizy stabilności dla układu śledzenia, otrzymujemy następujące warunki:
 - $R_2 \geq 2\sqrt{R_1}$ - śledzenie trajektorii zadanej bez przeregulowań;
 - $R_2 < 2\sqrt{R_1}$ - charakter oscylacyjny śledzenia trajektorii zadanej.

Przedstawione powyżej zależności zostały potwierdzone przez badania symulacyjne.

- Nie stwierdzono jakościowych zmian przebiegu śledzenia przy różnych wartościach początkowych θ_0 i ξ_{10} .
 - Podczas symulacji orientacja $\theta(t)$ robota pozostawała ograniczona.
2. Zachowanie algorytmu sterowania adaptacyjnego przy sterowaniu adaptacyjnym (algorytm Slotine'a-Li [52]):
 - Badany algorytm zapewnia zbieżność asymptotyczną do zera błędu śledzenia e .

- Zaproponowany algorytm sterowania adaptacyjnego śledzi trajektorię zadaną (linia prosta, okrąg).
- Z analizy stabilności zamkniętej pętli sprzężenia zwrotnego otrzymujemy:
 - $k \geq 4\Lambda$ - śledzenie trajektorii zadanej bez przeregulowań;
 - $k < 4\Lambda$ - śledzenie trajektorii zadanej o charakterze oscylacyjnym.

Otrzymane na podstawie analizy teoretycznej warunki zostały potwierdzone przez badania symulacyjne.

- Nie zaobserwowano jakościowych zmian przebiegu śledzenia przy różnych wartościach początkowych θ_0 i ξ_{10} .
- W czasie wykonywania symulacji orientacja $\theta(t)$ dwukółowego robota mobilnego pozostawała ograniczona.

Rozdział 5

System programowy do wyznaczania modeli matematycznych kinematyki i dynamiki kołowych robotów mobilnych

Niniejszy rozdział opisuje zestaw procedur dla systemu obliczeń symbolicznych MATHEMATICA, które służą do automatycznego generowania modeli kinematyki i dynamiki kołowych robotów mobilnych. Użytkowanie wspomnianego oprogramowania wymaga uprzedniego zainstalowania pod dowolnym systemem operacyjnym pakietu obliczeń symbolicznych MATHEMATICA wraz z pakietem standardowym ANIMATION. Poprawne działanie opisanych procedur zostało sprawdzone na stacji roboczej HEWLETT PACKARD 9000 Model 716/64 pod systemem UNIX z zainstalowanym programem MATHEMATICA wersja 2.2. W kolejnych podrozdziałach przedstawiamy opis działania i użytkowania:

- procedury do wyznaczania modeli kinematyki kołowych robotów mobilnych (rozdział 5.1).
- procedury do wyznaczania modeli dynamiki kołowych robotów mobilnych (rozdział 5.2).

5.1 Wyznaczanie modeli kinematyki kołowych robotów mobilnych

W rozdziale 2.2 rozprawy została opisana metoda wyznaczania modelu kinematyki kołowych robotów mobilnych. Schemat blokowy wspomnianej metody przedstawiono na Rys. 5.1. W skład prezentowanego w tym podrozdziale oprogramowania wchodzi dwie procedury, które pozwalają na uzyskanie następujących funkcji:

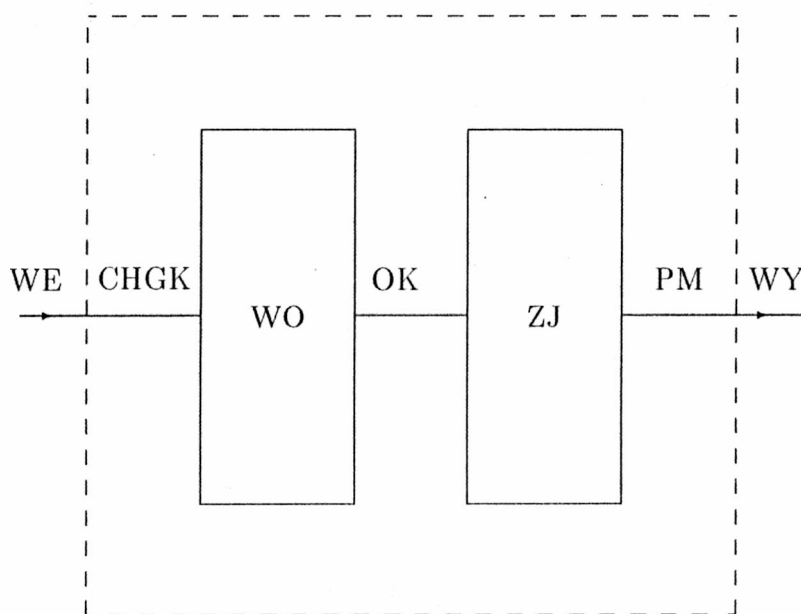
- wykonanie schematycznego rysunku robota mobilnego zdefiniowanego przez charakterystykę geometryczną kół (Procedura *Pokmodel*)
- generowanie nieholonomicznego modelu kinematyki robota mobilnego na podstawie charakterystyki geometrycznej kół (Procedura *Obmodel*).

Każda z wymienionych procedur wykorzystuje dane o charakterystyce geometrycznej kół, przechowywane w zmiennej globalnej, której przypisuje się wartości zgodnie z przedstawioną poniżej specyfikacją:

$$CHGKParam = \{\{l_1, d_1, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, R_1, \phi_1\}, \{l_2, d_2, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, R_2, \phi_2\} \dots\}, \quad (5.1)$$

gdzie:

$l_i, d_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, R_i, \phi_i$ - parametry geometryczne poszczególnych kół robota mobilnego, czyli odległości i kąty opisujące położenie i orientację kół.



Rys. 5.1: Schemat blokowy metody generacji modelu nieholonomicznego kinematyki kołowego robota mobilnego.

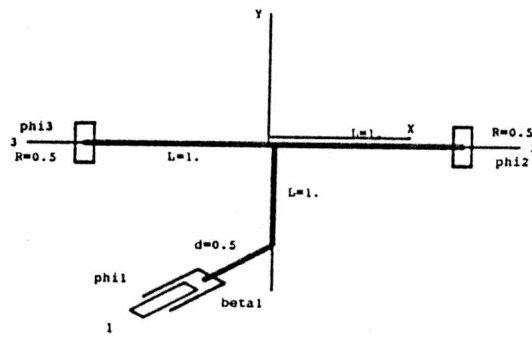
gdzie:

- *CHGK* - charakterystyka geometryczna kół;
- *WO* - blok wyprowadzania ograniczeń kinematycznych;
- *OK* - ograniczenia kinematyczne;
- *ZJ* - blok wyznaczania jądra macierzy $A^T(q)$;
- *MK* - model kinematyki.

Jak łatwo zauważyć, zmienna *CHGKParam* ma postać k -elementowej listy siedmioelementowych list, gdzie k jest liczbą kół rozpatrywanego układu jezdny. W programie źródłowym zawarte są przykładowe charakterystyki geometryczne kół dla podstawowych typów robotów mobilnych:

- CHGKParam1 - robot mobilny typu (2,0);
- CHGKParam2 - robot mobilny typu (1,1);
- CHGKParam3 - robot mobilny typu (3,0);
- CHGKParam4 - robot mobilny typu (2,1);
- CHGKParam5 - robot mobilny typu (1,2).

Uruchomienie programu odbywa się przez wydanie komendy: `<< zrodlo.txt`. Procedura *Pokmodel* pozwala na otrzymanie na ekranie rysunku robota mobilnego zdefiniowanego przez charakterystykę geometryczną kół zawartą w zmiennej postaci *CHGKParam*. Przykładowe wywołanie opisywanej procedury postaci *Pokmodel[CHGKParam1]* powoduje pojawienie się w okienku graficznym systemu MATHEMATICA rysunku, który przedstawia robota mobilnego typu (2,0).



Rys. 5.2: Schemat kinematyczny robota mobilnego typu (2,0).

Z kolei procedura *Obmodel* zwraca użytkownikowi okienko graficzne z pełną analizą mobilności robota określonego przez charakterystykę geometryczną kół. Przykładowe wywołanie procedury postaci *Obmodel[CHGKParam2]* umożliwi użytkownikowi wyznaczenie modelu kinematyki robota mobilnego typu (1,1).

```
KINEMATIC MODEL
x'[t]=-1. v1 Sin[betal] Sin[Theta]
y'[t]=v1 Cos[Theta] Sin[betal]
Theta'[t]=v1 Cos[betal]
betal'[t]=v2
phi1'[t]=-1.*v1*(2.*Cos[betal]^2 + 2.*Sin[betal]
phi2'[t]=-1.*v1*(2.*Cos[betal] + 2.*Sin[betal]
phi3'[t]=-1.*v1*(2.*Cos[betal] - 2.*Sin[betal]
```

Rys. 5.3: Model kinematyki robota mobilnego typu (1,1).

5.2 Wyznaczanie modeli dynamiki kołowych robotów mobilnych

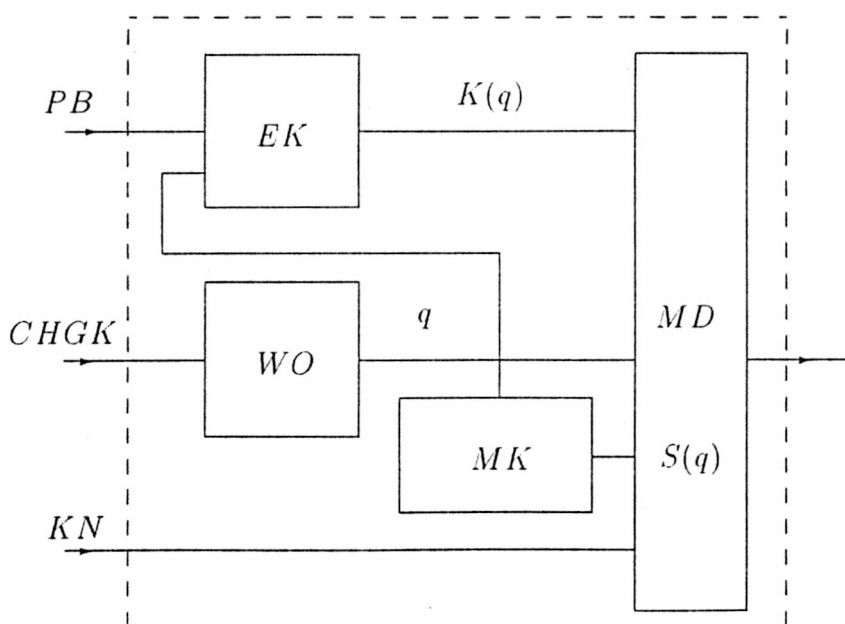
Z rozważań przeprowadzonych w rozdziale (1.2) wynika, że równania dynamiki można zapisać w postaci:

$$D(q)\dot{\eta} + E(q, \eta)\eta = R(q)u, \quad (5.2)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} D(q) &= S^T(q)K(q)S(q); \\ E(q, \eta) &= S^T(q)[K(q)\dot{S}(q) + C(q, S(q)\eta)S(q)]; \\ R(q) &= S^T(q)B(q); \\ C(q, \dot{q}) &= K(q) - \frac{1}{2}[\dot{q}^T K(q)]; \\ \dot{q} &= S(q)\eta. \end{aligned}$$

Zadaniem procedury służącej do automatycznej generacji modelu dynamiki jest wyznaczenie modelu w postaci opisanej przez (5.2). Zasadę działania prezentowanego oprogramowania przedstawia Rys.5.2.



Rys. 5.4: Procedura wyznaczania modelu dynamiki kołowego robota mobilnego - *Moddyn*.

gdzie:

- PB - lista parametrów barycentrycznych;
- CHGK - charakterystyka geometryczna kół;
- KN - lista z informacjami na temat sterowania robota;
- WO - blok wyznaczania wektora współrzędnych uogólnionych na podstawie CHGK;

- EK - blok wyznaczania energii kinetycznej robota mobilnego;
- MK - blok wyznaczania modelu kinematyki kołowego robota mobilnego;
- MDYN - blok wyznaczania równań dynamiki kołowego robota mobilnego.

Zasadę działania bloków WO i MK przedstawiono w rozdziale 5.1 rozprawy. Z kolei w rozdziale 3.3 wyprowadzono ogólne zależności opisujące energię kinetyczną kołowego robota mobilnego, które wykorzystano przy implementacji bloku EK. Końcowym etapem działania procedury jest blok MD. Z Rys.5.2 wynika zatem, że zadaniem procedury *Moddyn* jest wyznaczanie równań dynamiki na podstawie list CHGKParam, PB, i KN.

Specyfikacja listy CHGKParam, w której przechowywane są dane o charakterystyce geometrycznej kół, została przedstawiona w poprzednim podrozdziale. Kolejną listą z danymi jest PB. Przypisanie do zmiennej globalnej PB odbywa się zgodnie z poniższą specyfikacją:

$$PB = \{\{M, I, P_1, P_2\}, \{M_{k2}, I_{k2}, R_{k2}, w_{k2}\} \dots \{M_{kk}, I_{kk}, R_{kk}, w_{kk}\}\},$$

gdzie:

- M - masa skrzyni robota mobilnego;
- I - moment bezwładności skrzyni robota mobilnego względem osi Z_1 ;
- P_1, P_2 - momenty rzędu 1 skrzyni robota mobilnego względem osi Z_1 ;
- M_{ki} - masa i -tego koła;
- I_{ki} - moment bezwładności i -tego koła;
- R_{ki} - promień i -tego koła;
- w_{ki} - grubość i -tego koła.

Ostatnia z list, KN, zawiera informacje, które ze współrzędnych uogólnionych są napędzane przez siły zewnętrzne. Poniżej przedstawiono sposób przypisywania wartości dla elementów listy KN:

$$KN = \{d_1, d_2, \dots, d_n\},$$

gdzie:

$$d_i = \begin{cases} 1 & \text{— } i\text{-ta współrzędna uogólniona jest napędzana przez siłę zewnętrzną;} \\ 0 & \text{— w przypadku przeciwnym;} \end{cases}$$

n — wymiar wektora współrzędnych uogólnionych;

W programie źródłowym *zrodlo.txt* umieszczono przykładowe postacie list PB i KN dla następujących typów robotów mobilnych:

- PB1, KN1 - robot mobilny typu (2, 0);
- PB2, KN2 - robot mobilny typu (1, 1);

- PB3, KN3 - robot mobilny typu (3, 0);
- PB4, KN4 - robot mobilny typu (2, 1);
- PB5, KN5 - robot mobilny typu (1, 2).

Przykładowo, wywołanie postaci:

Moddyn(CHGKParam2,PB2,KN2)

umożliwia obliczenie modelu dynamiki robota mobilnego typu (1, 1). Z uwagi na dużą złożoność niektórych modeli dynamiki i wynikające stąd komplikacje z ich wizualizacją graficzną, zostały utworzone dodatkowo następujące procedury:

- *Drdq* - wyprowadzanie na ekran postaci macierzy $D(q)$ (patrz zależność (5.2));
- *Dreq* - wyprowadzanie na ekran postaci macierzy $E(q, \eta)$;
- *Drrq* - wyprowadzanie na ekran postaci macierzy $R(q)$.

W efekcie, wywołanie w następnym kroku:

Drdq[]

powoduje wyprowadzenie na ekran postaci macierz $D(q)$ dla robota mobilnego typu (1, 1).

```
THE FORM OF MATRIX D(q):
d11=0.5*I + 0.5*M + 1.021666666666667*Mk1 + 2.043333333333333*Mk2
      + 0.5*I*cos[2.*betal[t]] - 0.5*M*cos[2.*betal[t]] + 0.001666
666666666705*Mk1*cos[2.*betal[t]] + 0.00333333333333341*Mk2*cos[2.*betal[t]]
      + 0.25*Mk1*cos[2.*(betal[t] - 1.*Theta[t])] -
      0.25*Mk2*cos[2.*(betal[t] - 1.*Theta[t])] - 0.25*Mk1*cos[2.*
(betal[t] + Theta[t])] + 0.25*Mk2*cos[2.*(betal[t] + Theta[t]
)] - 0.5*Mk1*sin[2.*betal[t]] - 0.25*Mk1*sin[2.*(betal[t] - 1
.*Theta[t])] - 0.25*Mk1*sin[2.*(betal[t] + Theta[t])]
```

Rys. 5.5: Postać macierzy $D(q)$ dla robota mobilnego typu (1,1).

Rozdział 6

Wnioski końcowe

Przedmiotem niniejszej rozprawy były następujące dwa problemy:

Problem 1 *Znaleźć metodę umożliwiającą wyznaczanie w sposób systematyczny modeli kinematyki i dynamiki prostych (pojedynczy robot) i wieloczlonych kołowych robotów mobilnych.*

Problem 2 *Zaprojektować adaptacyjny algorytm sterowania dla kołowych robotów mobilnych wykorzystujący znane algorytmy sterowania adaptacyjnego dla robotów manipulacyjnych.*

Uzyskane w rozprawie rezultaty w odniesieniu do pierwszego z powyższych problemów obejmują metodę wyznaczania ograniczeń kinematycznych w oparciu o notację Denavita-Hartenberga dla prostych (Rozdział 2.1) i wieloczlonych (Rozdział 2.3) kołowych robotów mobilnych. W rozprawie zaproponowano metody wyznaczania równań kinematyki dla tego typu układów mechanicznych (Rozdziały 2.2 i 2.4). Wyprowadzono ogólne zależności, które umożliwiają wyznaczanie energii kinetycznej kołowych robotów mobilnych (Rozdział 3).

Wyniki badań nad Problemem 2 poprzedza przegląd podstawowych algorytmów sterowania stosowanych dla układów z więzami nieholonomicznymi zilustrowany przykładowymi symulacjami komputerowymi (Rozdział 4.1), ilustrujący specyfikę sterowania układów nieholonomicznych. Dla drugiego z problemów, sformulowano warunek wystarczający, który pozwala na wykorzystanie do sterowania kołowych robotów mobilnych algorytmów sterowania adaptacyjnego układów holonomicznych (np. robotów manipulacyjnych) spełniających założenia *Twierdzenia 4.4*. Rozważania teoretyczne uzupełniono badaniami symulacyjnymi, z których wynikają następujące wnioski:

1. zaproponowany algorytm sterowania adaptacyjnego pozwala na śledzenie trajektorii zadanych (takich jak okrąg, linia prosta);
2. wartości początkowe wektora stanu $\xi(t)$ nie mają wpływu na charakter przebiegu śledzenia trajektorii zadanej;
3. orientacja robota $\theta(t)$ pozostaje ograniczona w trakcie śledzenia (śledzenie z wewnętrzną stabilnością);
4. algorytm sterowania wykorzystujący znajomość wartości parametrów barycentrycznych zapewnia zbieżność eksponencjalną do zera błędu śledzenia, natomiast algorytm sterowania adaptacyjnego - zbieżność asymptotyczną.

Prezentację wyników rozprawy kończy przedstawienie zasady działania i sposobu użytkowania procedur napisanych pod systemem obliczeń symbolicznych MATHEMATICA, które służą do automatycznego wyznaczania modeli kinematyki i dynamiki kołowych robotów mobilnych. Podczas badań, które weszły w zakres niniejszej rozprawy, wyłoniły się nowe perspektywy badawcze obejmujące, między innymi, następujące zadania:

- systematyczne wyprowadzenie ograniczeń kinematycznych dla robotów mobilnych poruszających się w przestrzeni trójwymiarowej i opracowanie odpowiedniej metody wyznaczania modeli kinematyki (uogólnienie metody przedstawionej w rozprawie);
- klasyfikacja kołowych robotów mobilnych działających w przestrzeni trójwymiarowej;
- opracowanie nowych algorytmów i nowych realizacji algorytmów do sterowania kołowych robotów mobilnych:
 - uniwersalnych algorytmów sterowania adaptacyjnego [39];
 - realizacji algorytmów sterowania z wykorzystaniem obliczeń neuronowych.
- weryfikację na modelu fizycznym robota mobilnego wybranych algorytmów sterowania adaptacyjnego spełniających założenia *Twierdzenia 4.4*.
- rozszerzenie pakietu oprogramowania o elementy wspomagające następujące czynności projektowe:
 - wyznaczanie modeli dynamiki pojedynczych kołowych robotów mobilnych z uwzględnieniem dynamiki silników napędzających [24];
 - wyznaczanie modeli kinematyki wieloczłonowych robotów mobilnych [25];
 - automatyczne projektowanie algorytmów sterowania przy znajomości postaci symbolicznej modelu kinematyki i dynamiki robota mobilnego;
 - wyznaczanie ścieżek ruchu w przestrzeni konfiguracyjnej i roboczej z uwzględnieniem ograniczeń nieholonomicznych.

Literatura

- [1] B. d'Andrea-Novel, G. Campion, G. Bastin: Control of Wheeled Mobile Robots not satisfying ideal velocity constraints: a singular perturbation approach, *Int. Journal of Robust Control*, vol. 5, 1995, 243-267.
- [2] B. d'Andrea-Novel, G. Bastin, G. Campion: Control of nonholonomic wheeled mobile robots by state feedback linearization, to appear in *Int. Journal of Robotics Research*.
- [3] V. I. Arnold: *Dynamical Systems III*, Springer - Verlag, Berlin 1988.
- [4] G. Bastin, G. Campion, B. d'Andrea - Novel: Structural properties and classification of kinematic and dynamic models of wheeled mobile robots, Technical Report, 1993.01, CESAME (Centre for Systems Engineering Applied Mechanics).
- [5] G. Bastin, G. Campion: Adaptive control of nonholonomic mechanical systems, *ECC 1991*, Grenoble, France, 1334-1338.
- [6] A. M. Bloch, N. H. Mc Clamroch, M. Reyhanoglu: Controllability and Stabilizability properties of a nonholonomic control systems, *Proc. 29th CDC*, Honolulu, HI, 1990, 1312-1314.
- [7] R. W. Brockett: Control theory and singular Riemannian geometry, *New Directions in Applied Mathematics*, New York, Berlin, Springer-Verlag, 11-27, 1981.
- [8] R. W. Brockett: Asymptotic stability and feedback stabilization, *Diff. Geometric Control Theory*, ed. Brockett, Millman, Sussmann, Birkhäuser, Boston, 1983, 181-191.
- [9] G. Campion, G. Bastin, B. d'Andrea-Novel: Dynamic feedback linearization of nonholonomic wheeled mobile robots, *Proc. 1992 IEEE Conference on Robotics and Automation*, Nice.
- [10] G. Campion, G. Bastin, B. d'Andrea-Novel: Structural Properties and Classification of Dynamical Models of Wheeled Mobile Robots, *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, 1996, vol.12, 47-61.
- [11] G. Campion, G. Bastin, R. Mahony: Smooth feedback posture stabilization of class of mobile robots, *Appl. Math. and Comp. Sci*, 1995, vol.2, 263-276.
- [12] G. Campion, R. Hossa: Adaptive output linearizing control of Wheeled Mobile Robots, w przygotowaniu.
- [13] B. Charlet, J. Levine, R. Marino: Sufficient conditions for dynamic state feedback linearization, *SIAM J. Control and Optimization*, 1991, vol. 29, 38-57.

- [14] V. H. L. Cheng: A direct way to stabilize continuous-time and discrete-time linear time-varying systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-24, No.4, 1979, 641-643.
- [15] J. M. Coron: Global Asymptotic Stabilization for Controllable Systems without Drift, *Mathematics of Control, Signals and Systems*, 1992, vol. 5, 295-315.
- [16] P. E. Crouch, B. Jakubczyk: Dynamic transformations, linearization and chains of mechanical systems, *Proc. 33rd CDC*, Orlando, FL, 1994.
- [17] J. Denavit, R. S. Hartenberg: A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices, *ASME, Journal of Applied Mechanics*, 1955, 215-222.
- [18] J. Divelbiss, J. Wen: Trajectory tracking control of car-trailer system, to appear in *IEEE Transactions on Control System Technology*, 1994.
- [19] P. Drapikowski: Określanie pozycji robota mobilnego przy pomocy dalmierza IR, *IV KKR*, Wrocław 1993, t.2, 160-166.
- [20] C. Fernandes, L. Gurvits, Z. Li: Near optimal nonholonomic motion planning for a system of coupled rigid bodies, *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 1994, vol. 39, No. 3, 450-463.
- [21] M. Fliess, J. Levine, P. Martin, P. Rouchon: Flatness and defect of nonlinear systems: Introductory theory and examples, *Int. J. Control*, 1995, vol.61, No. 6, 1327-1361.
- [22] I. M. Gelfand, S. W. Fomin: *Rachunek wariacyjny*, PWN, Warszawa 1979.
- [23] R. Hossa: Nieholonomiczne modele kołowych robotów mobilnych, *Materiały 4 KKR*, Wrocław 1993, t.2, 183-190.
- [24] R. Hossa: Modele nieholonomiczne kinematyki i dynamiki kołowych robotów mobilnych, *Raport 11/94*, ICT PWr, 1994.
- [25] R. Hossa: Modele nieholonomiczne kinematyki wieloczłonowych kołowych robotów mobilnych, *Raport 6/95*, ICT PWr, 1995.
- [26] R. Hossa: Zastosowanie systemu obliczeń symbolicznych MATHEMATICA do generacji nieholonomicznych modeli kinematyki kołowych robotów mobilnych, *Raport 50/95*, ICT PWr, 1995.
- [27] R. Hossa: Modele nieholonomiczne kinematyki i dynamiki wieloczłonowych kołowych robotów mobilnych, *Raport 9/95*, ICT PWr, 1995.
- [28] R. Hossa: Algorytmy sterowania kołowych robotów mobilnych, *Raport 56/94*, ICT PWr, 1994.
- [29] R. Hossa: Adaptive output linearizing control of Wheeled Mobile Robots, *Proc. 2nd Symp. on Methods and Models in Automation and Robotics, Międzyzdroje 1995*, vol.2, 567-572.
- [30] A. Isidori: *Nonlinear Control Systems*, Springer-Verlag, 1989.
- [31] W. Jacak, K. Tchoń: *Podstawy robotyki*, Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, Wrocław, 1992.

- [32] B. Jakubczyk, W. Respondek: On linearization of control systems, *Bull. Acad. Pol. Ser. Sci. Math.*, 1980, vol. 28, 517-522.
- [33] B. Jakubczyk: Remarks on equivalence and linearization of nonlinear systems, *Proc. IFAC Symp. NOLCOS'92, Bordeaux*, 1992, 393-397.
- [34] T. Janeczko: Geodezyjne subriemanowskie, *Seminarium Instytutu Matematycznego PAN*, Warszawa.
- [35] R. E. Kalaba, F. E. Uwadia: A new perspective on constrained motion, *Proc. R. Soc. London*, 1992, vol.2, 407-410.
- [36] A. Kopacz: Układy sterowania z więzami nieholonomicznymi, praca dyplomowa, ICT PWr, 1995.
- [37] Z. Li, J. F. Canny: *Nonholonomic Motion Planning*, Kluwer Academic Publishers, 1992.
- [38] J. C. Latombe: *Robot Motion Planning*, Kluwer Academic Publishers, 1993.
- [39] A. Mazur: Algorytmy sterowania robotów oparte na zasadzie uniwersalnego adaptacyjnego układu sterowania, rozprawa doktorska, Instytut Cybernetyki Technicznej Politechniki Wrocławskiej, 1996.
- [40] R. Murray, S. Sastry: Nonholonomic Motion Planning: Steering Using Sinusoids, *IEEE Trans. on Automatic Control*, 1993, vol. 38, No. 5, 700-716.
- [41] R. Murray, G. Walsh, S. Sastry: Stabilization and tracking for nonholonomic systems using time-varying state feedback, *IEEE Conference on Robotics and Automation*, Nice 1992, 182-187.
- [42] R. M. Murray, Z. Li, S. Sastry: *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*, Boca FL: CRS Press, 1994.
- [43] J. Nejmark, N. Fufajew: *Dynamika układów nieholonomicznych*, PWN, Warszawa 1971.
- [44] H. Nijmeijer, A. J. van der Schaft: *Nonlinear dynamical control system*, Springer-Verlag, New York, 1990.
- [45] R. P. Paul: *Robot Manipulators: Mathematics, Programing and Control*, MIT Press, Cambridge MA, 1981.
- [46] M. Piasecki: Metody globalnej lokalizacji robotów mobilnych na podstawie danych z sensorów niskiego poziomu, rozprawa doktorska, Instytut Cybernetyki Technicznej Politechniki Wrocławskiej, 1994.
- [47] J. B. Pomet: Explicit design of time varying stabilization control laws for a class of controllable systems without drift, *Systems and Control Letters*, 1992, vol. 18, 147-158.
- [48] D. O. Popa, J. T. Wen: An Exterior Penalty Function Approach to Nonholonomic Path-Finding with Obstacle Avoidance, preprint 1995.

- [49] B. Raucent, G. Campion, G. Bastin, J. C. Samin, P. Y. Willems: Identification of the barycentric parameters of robot manipulators from external measurements. *Automatica*, 1992, vol. 28 (5), 1011-1016.
- [50] H. Rund: The Hamilton - Jacobi theory in the calculus of variations, R. E. Krieger Pub. Company, Huntington, 1973.
- [51] S. Sastry, M. Bodson: Adaptive control: stability, convergence and robustness, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1989.
- [52] J. J. Slotine, W. Li: On the adaptive control of rigid manipulators. *Int. Journal Robotics Research*, 1987, vol. 6 (3), 595-601.
- [53] J. J. Slotine, W. Li: Composite adaptive control of robot manipulators. *Automatica*, 1989, vol. 25, No. 4, 509-519.
- [54] H. Sussmann, V. Jurdićević: Controllability of nonlinear systems, *J. Diff. Eqs.* 12, 1972, 95-116.
- [55] G. Walsh, D. Tilbury, S. Sastry, R. Murray, J. P. Laumond: Stabilization of trajectories for system with nonholonomic constraints, *Proc. 1992 IEEE Conference on Robotics and Automation*, Nice, 1999-2004.
- [56] E. T. Whittaker: A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies, Cambridge University 1927, 214-250.
- [57] C. C. de Witt, O. J. Sordalen: Exponential Stabilization of Mobile Robots with nonholonomic constraints, *IEEE Transaction on Automation Control*, vol. 37, No. 11, 1791-1797, 1992.
- [58] A. Wolczowski: Podsystem sterowania lokalnego robota mobilnego "Ulisses", *Materiały konferencyjne IV KKR Wrocław*, 1993, t.2, 208-215.
- [59] A. Woźniak, P. Dobroczyński, T. Jedwabny: Tworzenie mapy bitowej otoczenia robota mobilnego z wykorzystaniem przetwarzania równoległego, *IV KKR, Wrocław 1993*, t.2, 151-159.
- [60] A. M. Vershik, V. Ya. Gershkovitz: Nonholonomic Dynamical Systems, *Geometry of Distribution and Variational Problems, Dynamical Systems VII*, ed. V. I. Arnold, Springer-Verlag, 1993.



mgr inż. Robert Hossa

Instytut Cybernetyki Technicznej
Politechniki Wrocławskiej
ul Janiszewskiego 11/17
50-372 Wrocław

Niniejszy raport otrzymują:

1. OINT	1 egz.
2. Biblioteka Główna PWr.	1 egz.
3. Z-ca Dyrektora Instytutu	1 egz.
4. Promotor	1 egz.
5. Recenzenci	2 egz.
6. KBN	1 egz.
7. Autor	1 egz.
Razem: 8 egz.	

Raport wpłynął do Redakcji ICT
w maju 1996 r.

S. 98