

Instytut Fizyki
Politechnika Wrocławska

Analiza odpowiedzi dielektrycznej typu
 α i β
materiałów biologicznych

Małgorzata Kotulska

Praca doktorska napisana pod kierunkiem
dr hab. Kariny Weron, prof. nadzw.



Wrocław, Maj 1999

Spis treści

Wprowadzenie	3
1 Własności dielektryczne tkanki	5
1.1 Charakterystyka częstotliwościowa tkanki	5
1.2 Model dielektryczny tkanki	6
1.2.1 Budowa błony biologicznej	7
1.2.2 Kanały jonowe	8
1.3 Analiza czynników kształtujących charakterystykę dielektryczną tkanki	8
2 Wpływ transportu hoppingowego jonów na charakterystykę dielektryczną tkanki w przedziale dyspersji α	11
2.1 Własności dielektryczne tkanki w przedziale dyspersji α	11
2.2 Błądzenie losowe jako kumulacyjny proces stochastyczny	15
2.3 Opis probabilistyczny jonowego przewodnictwa hoppingowego w tkance	17
2.3.1 Przedział wysokoczęstotliwościowy dyspersji α	20
2.3.2 Przedział niskoczęstotliwościowy dyspersji α	22
2.4 Symulacje komputerowe	24
2.5 Wnioski	41
3 Zjawiska międzyfazowe wewnątrz tkanki - dyspersja β	43
3.1 Własności dielektryczne tkanki w przedziale dyspersji β	43
3.2 Reprezentacja elektryczna zjawisk zachodzących w tkance w przedziale dyspersji β	44
3.3 Symulacje komputerowe	50
3.4 Wnioski	62
4 Podsumowanie	63

5 Dodatek	65
5.1 Rozkłady stabilne	65
5.2 Przegląd typów tkanki, której charakterystyki dielektryczne zostały opublikowane w literaturze	70
Literatura	73
Spis rysunków	78

Wprowadzenie

Celem niniejszej pracy jest przedstawienie modelu teoretycznego zjawisk, które mają dominujący wpływ na charakterystykę dielektryczną tkanki w przedziale dyspersji α i dyspersji β . Rozważania oparte są na publikowanych w literaturze wynikach eksperymentalnych pomiaru zespolonej podatności dielektrycznej $\chi(\omega) = \chi'(\omega) - i\chi''(\omega)$ w sinusoidalnie zmiennym polu elektrycznym w obszarze od 10^0 Hz do 10^9 Hz, gdzie obserwuje się dyspersję α i dyspersję β . Dane te, pochodzące z badań przeprowadzonych zarówno na tkankach zwierzęcych jak i roślinnych, wykazują znaczne podobieństwo charakterystyk dielektrycznych różnych tkanek, co może świadczyć o jednakowym charakterze występujących tam zjawisk, niezależnie od typu tkanki. Dyspersja α i dyspersja β nie wynikają ani z klasycznej dyfuzji jonów obecnych w tkance, ani odpowiedzi dipoli zawartych w niej związków chemicznych. Z tej przyczyny do interpretacji tych obszarów nie można zastosować klasycznych rozwiązań teoretycznych opracowanych dla relaksacji dipolowej lub klasycznej dyfuzji. Należy dodać, że na przebieg charakterystyki dielektrycznej w obszarze dyspersji α i β mają wpływ zmiany patologiczne tkanki. Dlatego badania, które mogłyby przybliżyć charakter występujących tam zjawisk są tak ważne i interesujące.

Do opisu zachodzących w tkance zjawisk molekularnych proponujemy podejście probabilistyczne, które umożliwi dobry opis układów złożonych o wielu elementach składowych. Wykorzystany w pracy aparat matematyczny opiera się na teorii twierdzeń granicznych dla sum zmiennych losowych, przy czym rozkłady stabilne, otrzymane w tych twierdzeniach jako rozkłady graniczne, stanowią naturalne uogólnienie rozkładu normalnego, najczęściej stosowanego do analizy zjawisk fizycznych. Rezultaty rozważań teoretycznych poparte są symulacjami komputerowymi.

Przedstawione w pracy wyniki, umożliwiające nową interpretację badanych charakterystyk dielektrycznych, mogą zostać zastosowane zarówno w dziedzinie medycyny [1]-[3], jak również do analizy charakterystyk nie-biologicznych materiałów hoppingowych, które wykazują odpowiedź typu LFD (ang. "Low Frequency Disper-

sion”).

Praca podzielona jest na pięć części. W części pierwszej zapoznamy czytelnika z typowym przebiegiem charakterystyki dielektrycznej tkanki, przyjęty w niej zostanie również pewien model tkanki, który ułatwi nam dalszą analizę jej charakterystyki. W części drugiej przeprowadzona będzie ścisła analiza zjawisk dyfuzyjnych zachodzących w tkance, co umożliwi interpretację przedziału dyspersji α . W części trzeciej rozważony zostanie wpływ niejednorodnej struktury tkanki na jej właściwości dielektryczne i wynikającą stąd postać dyspersji β . Wnioski zostaną zaprezentowane w Podsumowaniu. Informacje dodatkowe przedstawione zostaną w rozdziale 5, stanowiącym dwuczęściowy Dodatek. Opisane będą tam własności zmiennych losowych o rozkładach stabilnych i z obszarów przyciągania rozkładów stabilnych oraz podany przegląd literatury prezentującej własności dielektryczne określonych tkanek.

Składam serdeczne podziękowania prof. Karinie Weron za opiekę naukową i pomoc w przygotowaniu pracy doktorskiej.

Rozdział 1

Własności dielektryczne tkanki

1.1 Charakterystyka częstotliwościowa tkanki

Własności dielektryczne układów biologicznych takich jak białko [4]-[6], DNA [5, 7], błona biologiczna [8]-[16], tkanka roślinna [17, 18] oraz tkanka zwierzęca [2]-[5], [18]-[26] budzą duże zainteresowanie biofizyków i lekarzy. Badany jest także wpływ różnych czynników (temperatura, proces starzenia się materiału czy występowanie stanów patologicznych) na kształt otrzymanej charakterystyki dielektrycznej. Wynik pomiarów przedstawiany jest w postaci zależności zespolonej podatności dielektrycznej $\chi(\omega) = \chi'(\omega) - i\chi''(\omega)$ od częstotliwości ω przyłożonego pola elektrycznego.

Relaksację dielektryczną materiałów biologicznych bada się poprzez umieszczenie próbki w zmiennym polu elektrycznym, w przedziale od 10^{-4} Hz do 10^{10} Hz, przy niewielkiej, bezpiecznej dla materiału biologicznego amplitudzie sygnału. Pole powoduje wzrost wektora polaryzacji, opóźniony w stosunku do zmian pola. Opóźnienie to wynika z własności ośrodka, a głównie jego lepkości i bezwładności ładunków elektrycznych zmieniających swoje położenie pod wpływem pola elektrycznego. Ogólny związek pomiędzy wektorem polaryzacji $\mathbf{P}$ a wektorem natężenia pola elektrycznego $\mathbf{E}$ wyraża się równaniem [27]:

$$\mathbf{P} = \chi\epsilon_0\mathbf{E}, \quad (1.1)$$

gdzie ϵ_0 jest przenikalnością dielektryczną próżni, χ podatnością dielektryczną badanego ośrodka. Mierzac podatność dielektryczną materiału, która zmienia się wraz z częstotliwością zewnętrznego pola elektrycznego, można wnioskować o własnościach badanego ośrodka.

Duże znaczenie ma także charakterystyka czasowa, która odzwierciedla proces

relaksacji materiału spolaryzowanego uprzednio prostokątnym impulsem elektrycznym. W wyniku pomiarów uzyskujemy zależność prądu depolaryzacji od czasu, która jest równoważna funkcji odpowiedzi dielektrycznej $f(t)$. Z uwagi na to, że zmieniające się w czasie własności materiału biologicznego bardzo utrudniają wyznaczenie funkcji odpowiedzi dielektrycznej, nie dysponujemy charakterystykami doświadczalnymi w dziedzinie czasu. Można jednak skorzystać ze związku łączącego funkcję odpowiedzi dielektrycznej $f(t)$ z podatnością dielektryczną $\chi(\omega)$ wyrażającego się poprzez transformatę Fouriera:

$$\chi(\omega) = \mathcal{F}(f(t); \omega) = \int_0^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt \quad (1.2)$$

Nasza uwaga skupi się na własnościach charakterystyki dielektrycznej tkanki. W przypadku tkanki dysponujemy dosyć bogatym materiałem doświadczalnym. Ponadto umiejętność interpretacji charakterystyki tkanki mogłaby wzbogacić nieinwazyjne metody diagnostyczne, a także wiedzę o zjawiskach zachodzących w tkance poddanej oddziaływaniu zmiennego pola elektromagnetycznego np. w celach terapeutycznych. Podczas badań prowadzonych na różnych tkankach roślinnych i zwierzęcych zaobserwowano dużą zbieżność wyników uzyskanych dla tkanek różnego pochodzenia. Poszczególne obszary charakterystyki zależą oczywiście od badanego materiału - widoczne tu są zarówno różnice gatunkowe, jak i jednostkowe. Jednak w większości przypadków ich odpowiedź dielektryczna zachowuje podobny charakter. Szczegółowe dane dotyczące literatury, w której można znaleźć charakterystyki dielektryczne przebadanych tkanek, przedstawione są w Dodatku (rozdział 5.2).

1.2 Model dielektryczny tkanki

Tkanka jest systemem struktur otoczonych półprzepuszczalnymi błonami fosfolipidowymi, w których przestrzeń międzyfazowa wypełniona jest płynnym medium. Strukturą taką jest komórka otoczona błoną komórkową o grubości 5-10 nm oraz większość organelli komórkowych. Uproszczoną budowę takiego układu dobrze reprezentuje model Schwanna [28, 29], który traktuje tkankę jako ośrodek przewodzący (płyn zewnątrzkomórkowy) z zawieszonymi w nim sferycznymi cząsteczkami (komórki). Cząsteczki te wypełnione są dobrze przewodzącym płynem wewnątrzkomórkowym i otoczone bardzo słabo przewodzącymi membranami. Model ten można rozszerzyć uwzględniając wystąpienie struktur wewnątrzkomórkowych takich jak reticulum endoplazmatyczne, mitochondrium, czy jądro komórkowe. Błony biologiczne

występują również na poziomie ponadkomórkowym. Tkanę można więc rozpatrywać jako samopodobny system membran zanurzonych w środowisku elektrolitu. Na to samopodobieństwo tkanki powołują się autorzy modeli fraktalnych tkanki [18]. Model membranowo-elektrolitowy tkanki jest oczywiście uproszczeniem, wystarczającym jednak do modelowania jej własności dielektrycznych.

1.2.1 Budowa błony biologicznej

Błona biologiczna [30, 31] jest strukturą składającą się głównie z białek i lipidów. Stanowi ona płynną dwuwarstwę fosfolipidową z wbudowanymi membranowymi białkami globularnymi. Na zewnątrz obu warstw błony znajduje się hydrofilowa część fosforanowa, zakończona główką polarną. Wnętrze natomiast stanowi hydrofobowy obszar niepolarnych łańcuchów węglowodorowych. Pomiedzy nimi występuje obszar acetylowy.

Z badań mikroskopowych i chemicznych [30] wynika, że ułożenie fosfolipidów w błonie nie jest jednorodne. Fosfolipidy jednego typu mogą tworzyć klaster w płaszczyźnie membranowej lub mogą być wybiórczo połączone z niektórymi białkami. Ułożenie samych główek polarnych w stanie równowagi wynika z warunków energetycznych. Najstabilniejsza i najszttywniejsza jest konfiguracja heksagonalna. Na zwiększenie płynności błony, może mieć wpływ zarówno temperatura, jak i obecność niektórych związków chemicznych.

W dwuwarstwę fosfolipidową mogą być wbudowane różne związki chemiczne, z których najważniejsze są białka. Ze względu na ciężar cząsteczkowy białka stanowią przeważający składnik naturalnych błon biologicznych (ok. 60 %). Białka mają istotny wpływ na utrzymanie konformacji błony. O ile fosfolipidowa struktura błony utrzymywana jest przez słabe wiązania niekowalencyjne, to usztywnienie struktury jest spowodowane przez silne wiązania między białkami a lipidami. Najistotniejsza jest jednak rola białek w czynnym procesie przewodnictwa jonów poprzez błony. Część fosfolipidowa bardzo dobrze izoluje wnętrze błony przed substancjami zewnętrznymi, natomiast przewodnictwo jonów niezbędnych do podtrzymania procesów życiowych jest możliwe dzięki wbudowanym białkowym kanałom jonowym. Kanałów tych brak w badanych często błonach syntetycznych - tzw. BLM (ang. "Black Lipid Membrane"). Hydrofobowe łańcuchy boczne aminokwasów tworzących białka muszą znajdować się na powierzchni bocznej łączącej białka i lipidy. Głębokość wniknięcia białka do błony lipidowej zależy od jego budowy, a zewnętrzne fragmenty tych

białek posiadają obszary naładowane elektrycznie. Fragmenty te mogą stanowić pewien rodzaj pułapek zakłócających swobodny transport jonów poruszających się w elektrolicie.

1.2.2 Kanały jonowe

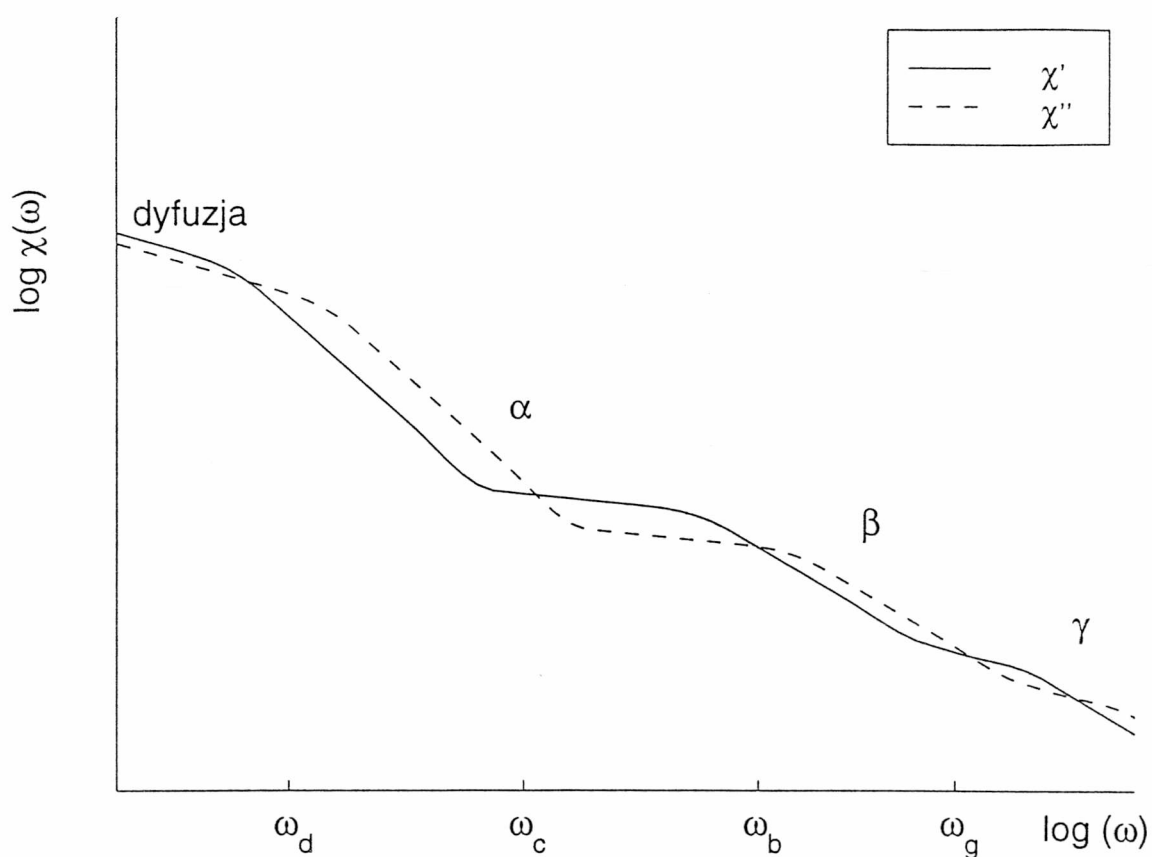
Kanały jonowe są dużymi strukturami białkowymi, przez których wnętrze mogą być transportowane jony [30]. Lokują się one w poprzek błony lipidowej a ich struktura ulega ciągłym fluktuacjom, przy czym tylko niektóre z przyjmowanych przez nie form są otwarte dla przewodnictwa jonów. Energia potrzebna do zmian konformacji pochodzić może (w zależności od typu kanału) z wiązania określonych związków chemicznych, z przyłożonego w poprzek błony napięcia lub fluktuacji termicznych. Kanały jonowe są często selektywne tzn. przepuszczają tylko określone jony. Badanie przejść pomiędzy stanami przewodzenia i nieprzewodzenia umożliwia bardzo czuła technika zwana "patch clamp" (nagroda Nobla dla jej twórców w roku 1991) [30, 32], która polega na pomiarze mikropipetą przepływającego przez błonę prądu o wielkości rzędu pikoamperów. Przewodnictwo przez membrany stało się także przedmiotem analizy teoretycznej (m.in. [32] - [34]).

1.3 Analiza czynników kształtujących charakterystykę dielektryczną tkanki

W oparciu o wyniki eksperymentu w charakterystyce dielektrycznej tkanki wyróżnia się cztery przedziały [1, 18, 28]: dyfuzji, dyspersji α , dyspersji β oraz dyspersji γ (Rysunek 1.1).

Poszczególne dyspersje rozdzielone są przedziałami o niemal stałej wartości podatności dielektrycznej. Za występowanie odrębnych przedziałów odpowiada niejednorodna budowa tkanki, w której zachodzą procesy relaksacji dipoli o różnych momentach dipolowych oraz rozmaite procesy dyfuzyjne. (Przybliżone wartości graniczne poszczególnych dyspersji podane są na przykładzie tkanki roślinnej - *Crassula Portulacaceae* [17], której charakterystyka została zmierzona w najszerszym zakresie częstotliwości).

Dyfuzja - obserwowana poniżej częstotliwości ω_d (ok. 1 Hz), szczególnie wyraźnie w gąbczastej tkance roślinnej. Za charakterystykę w tym zakresie częstotli-



Rysunek 1.1: Typowe cechy charakterystyki podatności dielektrycznej tkanki w funkcji częstotliwości.

wości odpowiedzialne są prawdopodobnie zjawiska transportu jonów poprzez błony oraz relaksacja podwójnych warstw jonowych, tworzących się na granicy badanego materiału z elektrodą.

Dyspersja α - obserwowana w przedziale od ω_d do ω_b (ok. 1 Hz - 10^6 Hz). Ze względu na przedstawioną w dalszej części pracy interpretację, do obszaru α zaliczamy także przedział od 10^3 Hz do 10^6 Hz, w którym podatność dielektryczna $\chi(\omega)$ zmienia się dużo wolniej. Na charakterystykę w tym zakresie częstotliwości może mieć wpływ: dyfuzja jonów poprzez błony biologiczne, transport jonów wzdłuż błon, przewodnictwo jonowe w medium zewnątrzkomórkowym, interakcje jonów obecnych w elektrolicie z naładowanymi elektrycznie obszarami błon biologicznych, zjawiska międzyfazowe wewnątrz struktury dwuwarstwy fosfolipidowej błony, relaksacja stałych dipoli ściany komór-

kowej (rośliny, bakterie) oraz relaksacja bardzo dużych cząstek białka występujących w błonach biologicznych. Dominujące jest tu jednak zjawisko dyfuzji anomalnej jonów, którego mechanizm nie został dotąd poznany.

Dyspersja β - zachodząca w przedziale od ω_b do ω_g (ok. 10^6 - 10^9 Hz). Pojawia się w wyniku zjawisk wynikających ze współistnienia w tkance wielu faz, interpretowanych teorią Maxwella-Wagnera [35], a także niewielkiego wpływu relaksacji dipoli białek. Niektórzy autorzy rozpatrują tu również zjawisko transportu jonów wewnątrz struktur membranowych [18].

Dyspersja γ - zachodząca powyżej ω_g (ok. 10^9 Hz). Wynika głównie z relaksacji stałych dipoli wody.

Zauważmy, że na charakterystykę dielektryczną tkanki wpływają głównie trzy zjawiska relaksacyjne:

1. Dyfuzja jonów,
2. Zjawiska międzyfazowe,
3. Relaksacja dipoli stałych i indukowanych. Charakterystyczne częstotliwości dyspersji dla poszczególnych typów dipoli maleją wraz ze wzrastającym rozmiarem i masą molekularną (np. dla białek jest to powyżej 10^6 Hz, a dla wody 10^{10} Hz). Należy przy tym zaznaczyć, że duży rozmiar dipoli białek oraz ich położenie (pomiędzy ściśle otaczającymi je cząsteczkami lipidów) bardzo ogranicza ich zdolność do rotacji. W efekcie wpływ stałych dipoli białkowych na charakterystykę dielektryczną tkanki jest znikomy [1].

W dalszej części pracy analizować będziemy jedynie główne zjawiska zachodzące w przedziałach dyspersji α oraz dyspersji β .

Rozdział 2

Wpływ transportu hoppingowego jonów na charakterystykę dielektryczną tkanki w obszarze dyspersji α

2.1 Własności dielektryczne tkanki w przedziale dyspersji α

W charakterystyce dielektrycznej tkanki dyspersja α obserwowana jest w zakresie od ω_d (ok. 1 Hz) do ω_b (ok. 10^6 Hz) (Rysunek 1.1). Można w niej wyróżnić dwa obszary charakteryzujące się odpowiedzią typu CPA (ang. "Constant Phase Angle"), czyli proporcjonalnością części rzeczywistej i urojonej podatności dielektrycznej w funkcji częstotliwości. W obu przedziałach podatność dielektryczna zależy od częstotliwości w sposób potęgowy:

$$\chi'(\omega) \propto \chi''(\omega) \propto \begin{cases} \omega^{-n} & \text{dla } \omega_d < \omega < \omega_c, \\ \omega^{-m} & \text{dla } \omega_b > \omega > \omega_c, \end{cases} \quad (2.1)$$

gdzie ω_d , ω_c , ω_b oraz $0 < n, m < 1$ są stałymi charakterystycznymi dla danej tkanki, przy czym z danych literaturowych wynika, że n jest bliskie 1, zaś m bliskie 0.

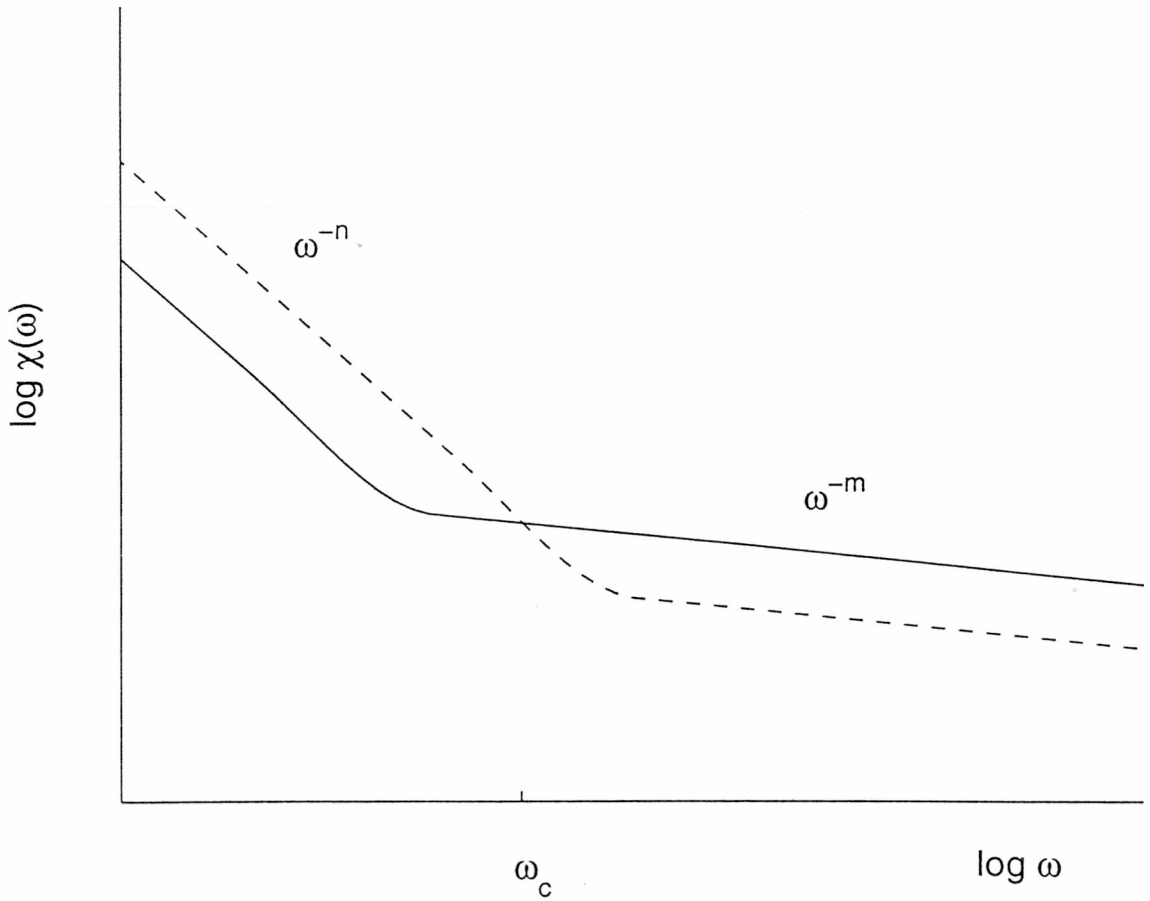
Badania nad przewodnictwem jonowym w tkance wykazały występowanie lateralnego transportu ładunków o charakterze hoppingowym na powierzchni błon biologicznych tkanki [4]. W przewodnictwie hoppingowym jony przemieszczają się

w sposób skokowy pomiędzy kolejnymi stanami zlokalizowanymi, w których zostają na pewien czas zatrzymane. Podejrzewa się, że źródłem tego zjawiska mogą być przeskoki protonów pomiędzy wiązaniami wodorowymi tworzącymi się na granicy pomiędzy wodą a lipidami błony [4] lub transport ładunków pomiędzy zjonizowanymi obszarami białka wbudowanego w błony [36].

Występowanie przewodnictwa hoppingowego w tkance może tłumaczyć podobieństwo dyspersji α do zjawiska znanego pod nazwą LFD (ang. "Low Frequency Dispersion"), występującego w dielektrykach o przewodnictwie hoppingowym. Zjawisko "Low Frequency Dispersion" zostało odkryte w 1978 roku przez Chelsea Dielectrics Group [27, 37] i od tej pory zostało wielokrotnie potwierdzone przez inne grupy doświadczalne [38]-[45]. Obserwuje się je w tych systemach dielektrycznych, w których procesy transportu nośników ładunku pomiędzy stanami zlokalizowanymi przeważają nad klasyczną dyfuzją lub typowym zachowaniem dipolowym. W dziedzinie częstotliwości w tym typie odpowiedzi występują dwa obszary potęgowej zależności podatności dielektrycznej jak w (2.1), co zostało przedstawione na Rysunku 2.1. Charakterystyczna dla LFD jest bardzo duża dyspersja zarówno części rzeczywistej, jak i zespolonej podatności dielektrycznej, występująca w niskich częstotliwościach, której nie obserwuje się w innych układach dielektrycznych. Zachowanie takie uważa się za wynik powolnego procesu transportu ładunku (część urojona charakterystyki częstotliwościowej), przy równoczesnym jego magazynowaniu w systemie (część rzeczywista charakterystyki częstotliwościowej). Wśród badaczy nie ma zgody, czy przetrzymywanie to ma miejsce we wnętrzu dielektryka, czy też na granicy między dielektrykiem a jego otoczeniem. Z analizy wielu charakterystyk pomiarowych wynika, że odpowiedź dielektryczna jest typu LFD, jeśli spełnione są następujące warunki:

1. Obecność w materiale swobodnych lub kwazi-swobodnych ładunków.
2. Występowanie w materiale stanów zlokalizowanych, między którymi przemieszczają się ładunki.
3. Transport typu hoppingowego.

Charakterystykę podatności dielektrycznej bardzo przypominającą charakterystykę typu LFD obserwuje się również w wielu materiałach biologicznych, takich jak tkanka, hemoglobina, białko, DNA i melanina [1, 4, 46, 47]. Ponieważ przewodnictwo w tych materiałach spełnia te same warunki, co w materiałach syntetycznych



Rysunek 2.1: Zależność podatności dielektrycznej w funkcji częstotliwości dla materiałów hoppingowych (zjawisko LFD).

wykazujących LFD można podejrzewać, że również tutaj mamy do czynienia z tym samym zjawiskiem. Sądźmy więc, że dyspersja α w charakterystyce dielektrycznej tkanki to szczególny przypadek zjawiska LFD.

Do chwili obecnej brak jest pełnego teoretycznego modelu zjawiska LFD [37, 50]. Jonscher [40] sugeruje, że wystąpienie dwóch odmiennych przedziałów charakterystyki podatności dielektrycznej wynika z dwóch niezależnych procesów relaksacyjnych. Założenie to stało się podstawą klasterowego modelu zjawiska LFD [18, 39, 51]. Model ten przewiduje, że charakterystykę typu LFD wykazywać będą jedynie materiały o budowie klasterowej. Struktura tych materiałów jest nieuporządkowana, występują w nich jednak pewne ograniczone obszary, które w przeciwieństwie do

swojego otoczenia mają budowę regularną. Obszary te nazywane są klastkami [39].

Zakłada się, że na charakterystykę dielektryczną dla $\omega > \omega_c$ dominujący wpływ mają migracje jonów wewnątrz poszczególnych klastków. W formalnym opisie tego zjawiska rozpatruje się przemieszczenie efektywnego ładunku na odległość, która nie przekracza rozmiaru klastka. Natomiast, gdy $\omega < \omega_c$ przeważa transport międzyklastkowy, w którym długość skoków cząstki nie jest ograniczona rozmiarami klastków i może się ona znacznie wahać. Warto tu nadmienić, że o ile w materiałach syntetycznych z wartości częstotliwości przejścia ω_c można wnioskować o długości skoków w przewodnictwie hoppingowym [52], to w przypadku materiałów biologicznych nie jest to możliwe, gdyż dotychczas nie zostały eksperymentalnie wyznaczone wszystkie niezbędne do tego charakterystyczne stałe.

Istnienie klastków zostało udowodnione dla wielu spośród materiałów wykazujących LFD [39, 46, 50]. W przypadku tkanki klastkiem może być każdy element strukturalny otoczony membraną. Okazuje się również, że budowę klastkową posiadają także same błony biologiczne, w których tworzą się domeny. Domeny te są wynikiem nierównomiernego rozkładu białek i lipidów w błonie. Zaobserwowano, że mają one wyraźny wpływ na przebieg procesu dyfuzji [36, 48].

Również w przebiegu czasowym procesów dyfuzyjnych zachodzących w materiałach o budowie klastkowej obserwuje się dwa różne zachowania [48]. W przypadku zjawiska typu LFD prąd relaksacji $I(t)$, równoważny funkcji odpowiedzi dielektrycznej $f(t)$, zależy od czasu w sposób potęgowy:

$$I(t) = f(t) \propto \begin{cases} t^{m-1} & \text{dla } t < \omega_c^{-1}, \\ t^{n-1} & \text{dla } t > \omega_c^{-1}. \end{cases} \quad (2.2)$$

Własność tą otrzymujemy na podstawie relacji (1.2) z własności (2.1) podatności $\chi(\omega)$ [37].

Gęstość prądu $j(t)$ opisana jest zależnością:

$$j(t) = n_0 q V(t),$$

gdzie n_0 oznacza koncentrację jonów, która w naszym założeniu jest stałą, q - ładunek migrującego jonu, a $V(t)$ jego średnią prędkość. Wnioskujemy stąd, że istnieje związek pomiędzy prądem relaksacji a położeniem efektywnej cząstki reprezentującej cały układ:

$$I(t) \propto \frac{dX(t)}{dt}, \quad (2.3)$$

gdzie $X(t)$ oznacza średnie położenie cząstki efektywnej w chwili t .

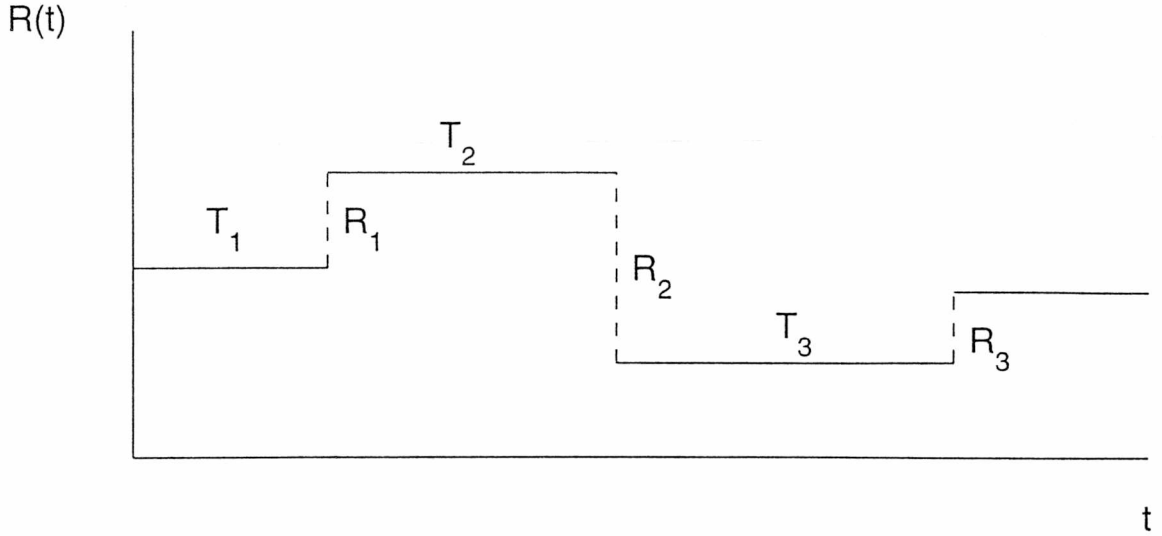
Dalej przedstawimy probabilistyczny opis zjawiska przewodnictwa hoppingowego w tkance i pokażemy jaki charakter transportu jonowego odpowiada obserwowanemu doświadczalnie prądowi relaksacji (2.2).

2.2 Błądzenie losowe jako kumulacyjny proces stochastyczny

Zjawisko transportu hoppingowego jonów w polu elektrycznym będziemy interpretować za pomocą procesu błądzenia losowego. Modele błądzenia losowego wywodzą się z rozważań Einsteina dotyczących ruchu Browna. Ruch Browna został po raz pierwszy zaobserwowany w 1785 r. przez holenderskiego lekarza Jana Ingenhasza na podstawie zachowania cząstek węgla drzewnego na powierzchni alkoholu. Swoją nazwę zjawisko to zawdzięcza Robertowi Brownowi, który w 1828 roku przedstawił wyniki obserwacji ruchu cząstek pyłków kwiatowych, kurzu i sadzy na powierzchni wody. Natomiast teoretyczny model tego zjawiska z 1905 roku, oparty na błądzeniu losowym, pochodzi od Alberta Einsteina. Od tej pory stale rozwijana teoria błądzenia losowego była stosowana do interpretacji różnych zjawisk, związanych nie tylko z migracją cząstek.

Modele wykorzystujące błądzenie losowe z czasem ciągłym, w skrócie CTRW (ang. "Continuous Time Random Walk"), zostały zaproponowane przez Montrolla i Weissa w roku 1965 [53]. Zakłada się w nich nie tylko losowe długości skoków cząstki, ale również losowe czasy oczekiwania pomiędzy kolejnymi skokami (Rysunek 2.2). Błądzenie losowe z czasem ciągłym jest często stosowane w fizyce statystycznej do modelowania zjawisk dyfuzji. Szczególnie przydatne okazuje się w analizie własności dynamicznych systemów niejednorodnych, w których występuje zjawisko dyfuzji anomalnej [54]-[66]. W dyfuzji takiej średnie przemieszczenie cząstki nie jest proporcjonalne do $t^{1/2}$ jak w zwykłej dyfuzji, ale do t^{1/d_w} , gdzie $d_w \neq 2$, w związku z czym nie można jej opisać za pomocą klasycznej teorii dyfuzji Einsteina, a rozkład odległości $R(t)$ osiąganego przez przemieszczającą się cząstkę w czasie t odbiega od rozkładu normalnego. Badania nad charakterem transportu leżącego u źródeł dyfuzji anomalnej wykazały, że może on być wynikiem długoogonowego rozkładu czasów oczekiwania pomiędzy kolejnymi skokami (rozdział 5.1). Założenie takie stało się podstawą do wprowadzenia w modelach dyfuzji anomalnej tzw. błądzeń Lévy'ego

(ang. "Lévy walks"), w miejsce ruchu Browna [54]-[66].



Rysunek 2.2: Zależność położenia cząstki od czasu w błędzeniu losowym CTRW.

Z powodu niejednorodności materiałów biologicznych przypuszczano, że do opisu zjawisk dyfuzyjnych, które zachodzą na powierzchni błon biologicznych, można stosować również rozkłady długoogonowe. Przeprowadzone badania fluorescencyjne metodą FRAP (ang. "Fluorescence Recovery After Photobleaching") dowiodły, że kinetyka cząstek migrujących wzdłuż błon biologicznych rzeczywiście charakteryzuje się długoogonowością czasu oczekiwania na kolejny skok [67].

W modelach CTRW analiza asymptotycznego położenia cząstki $R(t)$ prowadzona jest zwykle w języku transformaty Fouriera-Laplace'a przy pewnych ograniczeniach czasowo-przestrzennych [53]-[60]. Takie podejście nie pozwala jednak w pełni wykorzystać aparatu matematycznego procesów stochastycznych. Nie umożliwia także opisu zjawiska typu LFD. Poniżej analizować będziemy bezpośrednio odległość $R(t)$ efektywnej cząstki reprezentującej zachowanie migrujących jonów, osiągniętą od punktu startu po długim czasie t . Odległość tę określimy poprzez kumulacyjny proces stochastyczny w jednowymiarowym błędzeniu losowym. Położenie cząstki zdefiniowane jest więc jako suma losowej liczby N_t skoków o długościach R_i

$$R(t) = \sum_{i=0}^{N_t} R_i, \quad (2.4)$$

gdzie ilość N_t skoków cząstki do chwili t obliczamy ze wzoru:

$$N_t = \max\{k : \sum_{i=0}^k T_i \leq t\}. \quad (2.5)$$

Przyjmujemy $R_0 \equiv 0$, $T_0 \equiv 0$. Długości skoków $\{R_i\}_{i>0}$ tworzą ciąg niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie; podobnie czasy oczekiwania na skok $\{T_i\}_{i>0}$. Zmienna losowa T_i , interpretowana jako czas oczekiwania, może przyjmować tylko wartości nieujemne, natomiast R_i , która reprezentuje długość skoku, może w modelu ogólnym przyjmować wartości dowolne. Ponieważ w rozważaniach dotyczących migracji jonów skoki odbywają się jedynie w kierunku pola zewnętrznego przyjmujemy, że również zmienna R_i ma rozkład skupiony na półprostej $(0, \infty)$. Powyższy opis, w którym rozkład położenia $R(t)$ wędrującej cząstki jest precyzyjnie określony bez dodatkowych założeń ograniczających [61, 68], umożliwi nam wyznaczenie zależności prądu relaksacji od czasu i określenie charakteru transportu cząstki w zjawisku LFD obserwowanym w tkance jako dyspersja α [71]–[74].

2.3 Opis probabilistyczny jonowego przewodnictwa hoppingowego w tkance

Jednowymiarowy model CTRW zdefiniowany w rozdziale 2.2 zastosowany zostanie do opisu ruchu cząstki w procesie relaksacji tkanki. Analizować będziemy przemieszczanie się cząstki efektywnej, która reprezentuje uśrednione zachowanie migrujących jonów. Losowość rozmieszczenia pułapek na błonach biologicznych pozwala przyjąć, że długość skoku naładowanej cząstki może być opisana za pomocą zmiennej losowej. Zakładamy także, zgodnie z modelem CTRW, że czasy oczekiwania na kolejny skok są zmiennymi losowymi. Przyjmujemy, że wszystkie pary (R_i, T_i) mają jednakowy rozkład łączny i są niezależne od par reprezentujących skoki wcześniejsze lub późniejsze. Rozpatrywane będzie nieskorelowane błędzenie losowe, czyli takie, w którym zmienna losowa R_i jest niezależna od zmiennej losowej T_i . Można zauważyć, że ruch cząstki w procesie relaksacji charakteryzuje wystąpienie dryfu $\mu \neq 0$ odpowiadającego średniej długości pojedynczego skoku.

Ze względu na hoppingowy charakter transportu cząstki w zjawisku LFD oraz wynik badań metodą FRAP przeprowadzonych dla błon biologicznych [67] należy sądzić, że czasy oczekiwania T_i na kolejny skok charakteryzują się dużą zmiennością i mogą być reprezentowane przez zmienne losowe o rozkładach długoogonowych [70],

czyli takich, dla których:

$$\Pr(T_i > t) \propto t^{-\lambda} \text{ dla dużych } t, \quad (2.6)$$

dla pewnego λ , $0 < \lambda < 1$. Rozkład czasu oczekiwania na kolejny skok należy więc do obszaru przyciągania rozkładu jednostronnej stabilnej zmiennej losowej S_λ o indeksie stabilności λ . Ponieważ $0 < \lambda < 1$, zarówno T_i , jak S_λ mają nieskończone wartości oczekiwane $\langle T_i \rangle = \langle S_\lambda \rangle = \infty$ (rozdział 5.1).

Chociaż definicja (2.4) jest poprawna dla dowolnej klasy rozkładów zmiennych R_i , w klasycznych modelach CTRW zakłada się, że długość skoku R_i ma skończoną wartość oczekiwaną i wariancję [70]. Nie wystarcza to jednak do wyjaśnienia zjawiska LFD. Dlatego też proponujemy naturalne rozszerzenie zastosowanej klasy rozkładów z obszaru przyciągania rozkładu normalnego o rozkłady długoogonowe, tak że długość skoków cząstki reprezentowana jest przez zmienną losową o rozkładzie z obszaru przyciągania pewnego rozkładu stabilnego (rozdział 5.1). W proponowanym poniżej opisie tego zjawiska przyjmujemy więc, że nieujemna zmienna losowa R_i , reprezentująca długość skoku cząstki może mieć, zgodnie z klasycznymi modelami CTRW, skończoną wariancję, a więc należeć do obszaru przyciągania rozkładu normalnego:

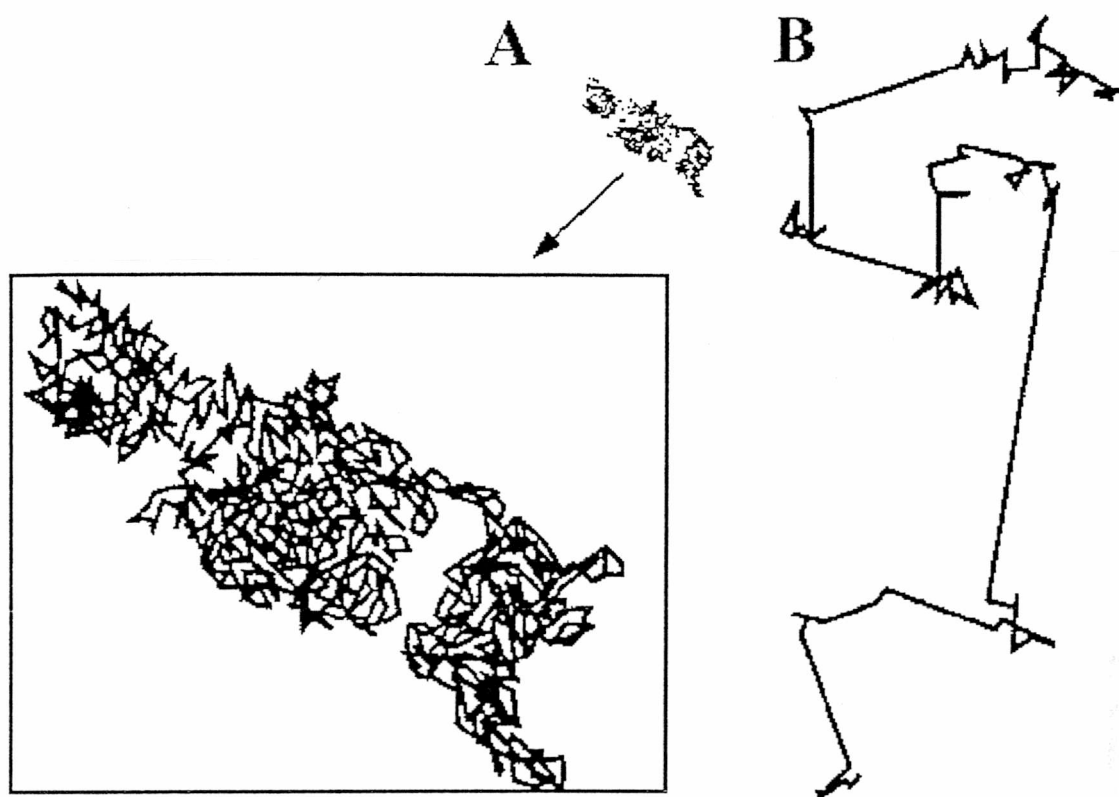
$$\text{Var}(R_i) < \infty, \quad (2.7)$$

lub w pewnych warunkach zmienna losowa R_i może nie mieć skończonej wariancji i wówczas zakładamy, że:

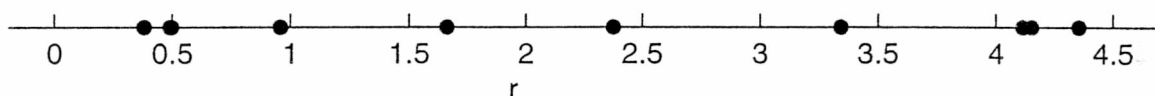
$$\Pr(R_i > r) \propto r^{-\gamma} \text{ dla dużych } r, \quad (2.8)$$

gdzie $1 < \gamma < 2$, gdy długości skoków mają skończoną wartość oczekiwaną lub $0 < \gamma < 1$, gdy długości skoków nie mają skończonej wartości oczekiwanej. Można zauważyć, że o ile własność (2.7) dotyczy skoków o podobnej, bliskiej dryfowi μ długości (Rysunek 2.3 A), to (2.8), zwłaszcza przy $0 < \gamma < 1$, odnosi się do skoków, których długości mogą być bardzo zróżnicowane (Rysunek 2.3 B).

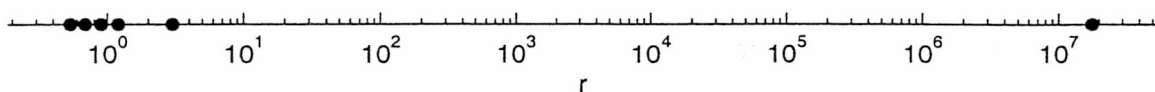
Zgodnie z modelem klasterowym obecność dwóch różnych przedziałów w charakterystyce dielektrycznej systemów hoppingowych jest konsekwencją różnego przestrzennego charakteru skoków cząstki, dominującego w danym przedziale.



A



B



Rysunek 2.3: Przykładowe trajektorie cząstki w błędzeniu losowym na płaszczyźnie przy założeniu skończonej wariancji rozkładu długości skoków (A) oraz długoogonowego rozkładu długości skoków (B) i kilka odpowiadających im położeń cząstki w błędzeniu losowym zredukowanym do jednego wymiaru (ruch cząstki w kierunku prostopadłym do elektrod).

2.3.1 Przedział wysokoczęstotliwościowy dyspersji α

Zgodnie z przedstawionym już podejściem klasterowym dominującym zjawiskiem w przedziale wysokich częstotliwości dyspersji α ($\omega > \omega_c$) jest transport wewnątrzklasterowy [18, 39]. Ze względu na niewielki rozmiar i regularność klasterów skoki mają wtedy zbliżone długości. Takie zachowanie jonów przypomina ruchy rotacyjne dipoli, dlatego też mówimy tu o relaksacji dipoli indukowanych [37]. Ponieważ rozbieżność skoków jest w tym obszarze raczej niewielka przyjmujemy, że długość skoków ma skończoną wariancję. Korzystając z przejścia (1.2) pomiędzy funkcją podatności dielektrycznej $\chi(\omega)$ a równoważną prądowi relaksacji funkcją odpowiedzi dielektrycznej $f(t)$, dalsze rozważania będziemy prowadzić w dziedzinie czasu. Zachowaniu jonów w przedziale częstotliwości $\omega > \omega_c$ odpowiadać będą zjawiska w przedziale czasu $t < \omega_c^{-1}$.

W modelu błędzenia losowego z czasem ciągłym położenie jonu $R(t)$ jest wynikiem kumulacyjnego procesu stochastycznego. Rozkład zmiennej losowej $R(t)$, zdefiniowanej tak jak w (2.4) przy założeniach (2.6) i (2.7), to znaczy, że długość skoku R_i ma skończoną wariancję, a czas T_i oczekiwania na kolejny skok ma rozkład długoogonowy z parametrem λ , $0 < \lambda < 1$, przyjmuje dla dużych t graniczną postać [61, 68]:

$$R(t) \approx t^\lambda H_\lambda, \quad (2.9)$$

gdzie H_λ jest zmienną losową o rozkładzie trans-stabilnym [82], z dystrybuantą $H_\lambda(r)$ określoną wzorem:

$$H_\lambda(r) = 1 - S_\lambda\left(\frac{1}{r^{1/\lambda}}\right), \quad (2.10)$$

w którym $S_\lambda(r)$ jest dystrybuantą jednostronnego rozkładu stabilnego o indeksie stabilności λ .

Aby uzasadnić zależność (2.9), pokażemy najpierw, że przy założeniu (2.6) dla dowolnego $r > 0$ zachodzi zbieżność:

$$\Pr\left(\frac{N_t}{t^\lambda} \leq r\right) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} H_\lambda(r) \stackrel{\text{def}}{=} 1 - S_\lambda\left(\frac{1}{r^{1/\lambda}}\right), \quad (2.11)$$

gdzie N_t zdefiniowane jest tak jak w równaniu (2.5). Ponieważ N_t przyjmuje tylko wartości naturalne,

$$\Pr\left(\frac{N_t}{t^\lambda} \geq r\right) = \Pr(N_t \geq k), \quad (2.12)$$

gdzie k jest taką liczbą naturalną, że

$$k \leq rt^\lambda < k + 1. \quad (2.13)$$

Zauważmy, że k zależy od t w taki sposób, że $k \rightarrow \infty$ dla $t \rightarrow \infty$. Z definicji N_t wynika, że:

$$\begin{aligned} \Pr(N_t \geq k) &= \Pr\left(\sum_{i=1}^k T_i \leq t\right) \\ &= \Pr\left(\frac{\sum_{i=1}^k T_i}{k^{1/\lambda} c_2} \leq \frac{t}{k^{1/\lambda} c_2}\right) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Dla dowolnie małego $\varepsilon > 0$, dla dostatecznie dużych t i k spełniających (2.13) mamy:

$$\frac{1}{r^{1/\lambda}} \leq \frac{t}{k^{1/\lambda}} < \frac{1+\varepsilon}{r^{1/\lambda}},$$

i stąd

$$\Pr\left(\frac{\sum_{i=1}^k T_i}{k^{1/\lambda}} \leq \frac{1}{r^{1/\lambda}}\right) \leq \Pr\left(\frac{\sum_{i=1}^k T_i}{k^{1/\lambda}} \leq \frac{t}{k^{1/\lambda}}\right) \leq \Pr\left(\frac{\sum_{i=1}^k T_i}{k^{1/\lambda}} \leq \frac{1+\varepsilon}{r^{1/\lambda}}\right). \quad (2.15)$$

Z założenia (2.6) rozkład zmiennej T_i należy do obszaru przyciągania rozkładu stabilnego S_λ , a więc dla dowolnego $x > 0$

$$\Pr\left(\frac{\sum_{i=1}^k T_i}{k^{1/\lambda}} \leq x\right) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} S_\lambda(x). \quad (2.16)$$

(patrz rozdział 5.1). Z zależności (2.12), (2.14)-(2.16)

$$\Pr\left(\frac{N_t}{t^\lambda} \geq r\right) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} S_\lambda\left(\frac{1}{r^{1/\lambda}}\right),$$

co równoważne jest zależności (2.11).

Pokażemy teraz, że z (2.11) i (2.7) wynika, że:

$$\Pr\left(\frac{R(t)}{\mu t^\lambda} \leq r\right) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} H_\lambda(r), \quad (2.17)$$

gdzie $\mu = \langle R_i \rangle \neq 0$ (z założenia (2.7) $\mu < \infty$). N_t rośnie do nieskończoności z prawdopodobieństwem 1, gdy $t \rightarrow \infty$. Z prawa wielkich liczb [81] otrzymujemy więc:

$$\frac{R(t)}{\mu N_t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 1 \text{ z prawdopodobieństwem } 1. \quad (2.18)$$

Ponieważ

$$\frac{R(t)}{\mu t^\lambda} = \frac{R(t)}{\mu N_t} \frac{N_t}{t^\lambda},$$

z relacji (2.11) i (2.18) otrzymujemy, że prawdziwe jest (2.17), co jest równoważne zależności (2.9). (Zauważmy, że (2.9) zachodzi już wówczas, gdy rozkład R_i ma tylko

skończoną wartość średnią μ , tak że założenie (2.7) o skończonej wariancji nie jest konieczne). Należy przy tym zaznaczyć, że zmienna losowa H_λ , w przeciwieństwie do zmiennej losowej S_λ , ma skończoną wartość oczekiwaną [82] $\langle H_\lambda \rangle < \infty$.

W oparciu o (2.9) możemy wyznaczyć średnie położenie jonu $X(t)$ jako wartość oczekiwaną $\langle R(t) \rangle$ położenia cząstki:

$$X(t) = \langle R(t) \rangle \approx t^\lambda \langle H_\lambda \rangle \propto t^\lambda. \quad (2.19)$$

Funkcja odpowiedzi dielektrycznej $f(t)$ w przedziale $t < \omega_c^{-1}$, wyznaczona z równania (2.3) oraz (2.19), ma zatem postać:

$$f(t) = I(t) \propto t^{\lambda-1}, \text{ dla } 0 < \lambda < 1.$$

Wyniki badań eksperymentalnych (2.2) wykazują, że w tym obszarze funkcja odpowiedzi dielektrycznej zależy od czasu w sposób potęgowy, z wykładnikiem $m - 1$. Teoretycznie otrzymana funkcja odpowiedzi dielektrycznej pokrywa się zatem z wynikiem eksperymentu, gdy parametr λ , charakterystyczny dla rozkładu czasów oczekiwania pomiędzy kolejnymi skokami, równy jest eksperymentalnemu parametrowi m , $\lambda = m$.

Zauważmy, że relaksacja typu LFD, w tym dyspersja α tkanki, obserwowana jest w stosunkowo niskim przedziale częstotliwości (co odpowiada długim czasom). Wydaje się więc dopuszczalne przewidywanie trajektorii cząstki w skończonym przedziale czasu, odpowiadającym rozważanemu obszarowi dyspersji α , na podstawie własności granicznego rozkładu zmiennej $R(t)$, przy $t \rightarrow \infty$. Zagadnienie to zostanie dokładnie zbadane za pomocą symulacji komputerowych (rozdział 2.4).

2.3.2 Przedział niskoczęstotliwościowy dyspersji α

Zgodnie z podejściem klasterowym w przedziale niskoczęstotliwościowym dyspersji α ($\omega < \omega_c$) zjawiskiem dominującym jest transport międzyklasterowy [18, 39]. Oznacza to, że ruch cząstki nie jest ograniczony przestrzennie do jednego klastra, ale przeważają przesunięcia w obszarze międzyklasterowym. Stany zlokalizowane, pomiędzy którymi przemieszcza się cząstka, są rozmieszczone znacznie mniej regularnie niż wewnątrz klastrów. Wynika z tego, że długości skoków mogą wykazywać znaczny rozrzut. Wykorzystamy więc teraz model błędzenia losowego z czasem ciągłym, w którym długość skoku nie ma skończonej wartości oczekiwanej, tzn. $\langle R_i \rangle = \infty$.

Założmy więc, że spełnione są warunki (2.6) i (2.8), tzn. że zarówno T_i , jak R_i mają rozkłady długoogonowe z parametrami $0 < \lambda, \gamma < 1$. Podobnie jak w obszarze wysokoczęstotliwościowym do wyznaczenia zależności prądu relaksacji $I(t)$ zgodnie ze wzorem (2.3) konieczna jest znajomość położenia cząstki $R(t)$ zdefiniowanej w równaniu (2.4). Tak określona zmienna losowa $R(t)$, przy założeniu (2.6) i (2.8) oraz niezerowym dryfie $\mu = M(R_i) \neq 0$, określonym za pomocą mediany długości skoku $M(R_i)$ (wartość oczekiwana jest w tym wypadku nieskończona) dla dużych t ma rozkład graniczny postaci [61, 68]:

$$R(t) \approx t^{\lambda/\gamma} W, \quad (2.20)$$

gdzie W jest zmienną losową określoną jako $W = S_\gamma(H_\lambda)^{1/\gamma}$, przy czym zmienna losowa S_γ ma jednostronny rozkład stabilny $S_\gamma(r)$ z indeksem stabilności γ , natomiast H_λ jest trans-stabilną zmienną losową o rozkładzie $H_\lambda(r)$ zdefiniowanym w (2.10).

Relację (2.20) można uzasadnić obliczając postać graniczną wyrażenia $R(t)/t^{\lambda/\gamma}$. Z założenia (2.8) rozkład zmiennej R_i należy do obszaru przyciągania rozkładu stabilnego S_γ , więc ponieważ $N_t \rightarrow \infty$ z prawdopodobieństwem 1 mamy:

$$\frac{\sum_{i=1}^{N_t} R_i}{(N_t)^{1/\gamma}} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} S_\gamma, \text{ wg rozkładu.} \quad (2.21)$$

Natomiast z zależności (2.11):

$$\frac{N_t}{t^\lambda} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} H_\lambda \text{ wg rozkładu.} \quad (2.22)$$

Z relacji (2.21) i (2.22) mamy [69]:

$$\frac{R(t)}{t^{\lambda/\gamma}} = \frac{\sum_{i=1}^{N_t} R_i}{(N_t)^{1/\gamma}} \frac{(N_t)^{1/\gamma}}{t^{\lambda/\gamma}} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} S_\gamma (H_\lambda)^{1/\gamma},$$

prawdziwa jest więc zależność (2.20).

Ze względu na nieskończoną wartość oczekiwaną zmiennej losowej $R(t)$ średnie położenie cząstki efektywnej $X(t)$ wyznaczamy za pomocą mediany $M(R(t))$:

$$X(t) = M(R(t)) \approx t^{\lambda/\gamma} M(W) \propto t^{\lambda/\gamma} \text{ dla dużych } t.$$

Stąd, w oparciu o (2.3), otrzymujemy dla funkcji odpowiedzi dielektrycznej $f(t)$:

$$f(t) = I(t) \propto t^{(\lambda/\gamma)-1} \text{ dla } t > \omega_c^{-1}.$$

Teoretycznie uzyskana funkcja odpowiedzi pokrywa się więc z wynikami eksperymentu (2.2), gdy $n = \lambda/\gamma$, gdzie λ charakteryzuje rozkład czasów oczekiwania na kolejny skok, natomiast γ rozkład długości skoków cząsteczki.

2.4 Symulacje komputerowe

Przedstawione dotychczas rozważania teoretyczne wykorzystywały przede wszystkim wyniki twierdzeń granicznych dla rozkładu zmiennej losowej $R(t)$ przy $t \rightarrow \infty$, chociaż w rzeczywistości dyspersja α obserwowana jest w skończonym przedziale częstotliwości (czasu). Użycie granicznego rozkładu jako przybliżenia rozkładu $R(t)$ dla dyspersji α można uzasadnić tym, że dyspersja ta występuje w stosunkowo niskim przedziale częstotliwości. Aby pokazać przy jakim doborze parametrów rozkładów zmiennych R_i oraz T_i przybliżenie to jest uzasadnione, przeprowadzone zostały symulacje komputerowe zmiennej losowej $R(t)$ zadanej wzorem (2.4), a następnie porównano zależność średniego położenia $X(t)$ cząstki efektywnej od czasu z rezultatami otrzymanymi na podstawie twierdzeń granicznych. Przeprowadzone zostały również testy wiarygodności symulacji. W symulacjach wykorzystany został język programowania Matlab 5.0, przeznaczony głównie do obliczeń numerycznych.

W pierwszej fazie symulacji zaprojektowane zostały nowe generatory liczb losowych, które umożliwiły uzyskanie ciągu zmiennych losowych o pożądanym rozkładach w oparciu o standardowe generatory rozkładu jednostajnego i normalnego.

W opisie probabilistycznym dyspersji α , zaprezentowanym wcześniej, pojawiły się dwa typy rozkładów: o skończonej wariancji i długoogonowe. W symulacjach jako rozkłady z rodziny długoogonowych rozpatrywaliśmy rozkłady stabilne z indeksem stabilności κ , $0 < \kappa < 1$, oraz rozkłady Pareto i Burra z obszaru przyciągania tych rozkładów stabilnych (rozdział 5.1), natomiast jako rozkłady o skończonej wariancji wybraliśmy rozkład normalny (jako rozkład stabilny) oraz rozkład Burra. Parametry rozkładu normalnego zostały wybrane tak, aby prawdopodobieństwo wystąpienia wartości ujemnej było znikome (byłoby to w sprzeczności z założeniem o nieujemnych wartościach zmiennej losowej R_i , reprezentującej długości skoków).

W symulacjach realizację zmiennej losowej o rozkładzie Pareto, zadany wzorem (5.5) (patrz rozdział 5.1), z parametrem k i parametrem skali w otrzymujemy w oparciu o zależność:

$$P_\lambda = w(U^{-k} - 1), \quad (2.23)$$

gdzie U jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na przedziale $(0; 1)$.

Natomiast realizację zmiennej losowej o rozkładzie Burra, wzór (5.4) w Dodatku 5.1, z parametrami p i k oraz parametrem skali w otrzymujemy w oparciu o zależność:

$$B_{p,k} = w(U^{-k} - 1)^{1/p}. \quad (2.24)$$

Rozkład Burra o parametrach p i k jest rozkładem o skończonej wariancji (z obszaru przyciągania rozkładu normalnego), gdy $\frac{p}{k} > 2$. W przypadku, gdy $0 < \frac{p}{k} < 1$ jest to rozkład długoogonowy i należy do obszaru przyciągania całkowicie asymetrycznego rozkładu stabilnego S_γ , gdzie $\gamma = p/k$.

Realizację zmiennej losowej Y o całkowicie asymetrycznym rozkładzie stabilnym z indeksem stabilności κ , $0 < \kappa < 1$ otrzymuje się zgodnie z zależnością [83]:

$$Y = wA_\kappa \frac{\sin(\kappa(V + \pi/2))}{(\cos(V))^{1/\kappa}} \cdot \left(\frac{\cos(V - \kappa(V + \pi/2))}{E} \right)^{\frac{1-\kappa}{\kappa}}, \quad (2.25)$$

gdzie:

$$A_\kappa = \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi\kappa}{2} \right)^{\frac{1}{2\kappa}}, \quad (2.26)$$

natomiast V jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na przedziale $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, a E zmienną losową o rozkładzie wykładniczym ze średnią 1. Zależności (2.25 - 2.26) mają jedynie charakter przybliżony, co może stanowić źródło błędów w symulacjach.

Korzystając z przedstawionych wyżej generatorów wyznaczone zostały trajektorie $R(t)$ pojedynczych cząstek rzeczywistych, a następnie uśredniona trajektoria $X(t)$ cząstki efektywnej. Ponieważ w poszczególnych trajektoriach skoki cząstki następują w losowych momentach czasu, różnych dla każdej trajektorii, w algorytmie zostały arbitralnie wybrane punkty czasowe, dla których wyznaczana jest trajektoria uśredniona. Wszystkie trajektorie, które składały się z 10^4 skoków, zostały skrócone do długości tej trajektorii, w której cząstka zakończyła zadaną ilość skoków najszybciej.

Zgodnie z wynikiem teoretycznym, uzyskane w symulacjach średnie położenie $X(t)$, w skali podwójnie logarytmicznej powinno mieć charakter prostoliniowy. Współczynnik nachylenia prostej uzyskanej z symulacji (na rysunkach w postaci linii przerywanej) obliczany jest metodą najmniejszych kwadratów, przy czym do obliczeń wykorzystywana jest tylko ta część trajektorii, która mieści się powyżej dolnej granicy czasu dla danego przedziału dyspersji α .

Osie wykresów przedstawiających wyniki symulacji nie są podane w konkretnych jednostkach czasu i długości, gdyż skala zależy jedynie od odpowiednio dobranego dla danego materiału współczynnika skalowania rozkładów i nie ma wpływu na uzyskane nachylenie krzywej. W trakcie symulacji wyznaczone zostały jednak graniczne współczynniki skalowania rozkładów czasów pułapkowania, przy których średnie trajektorie cząstki, obliczone dla 10^4 skoków, mają nachylenie wystarczająco bliskie wynikowi teoretycznemu w przedziałach czasowych odpowiadających obu przedziałom

dyspersji α . Należy dodać, że na załączonych rysunkach przedstawiona została tylko ta część trajektorii, która leży w przedziale czasu odpowiadającym badanej części dyspersji α . Na zakończenie wyniki symulacji porównano z rezultatem uzyskanym teoretycznie.

Na Rysunku 2.4 przedstawione są symulacje odpowiadające przedziałowi $t > \omega_c^{-1}$. Rozkładem czasów oczekiwania na kolejny skok był rozkład Pareto z parametrem $k = 5$ (co odpowiada (2.6) z $\lambda = 0.2$) oraz współczynnikiem skalowania $w = 10^{-3}$, rozkładem długości skoków - rozkład Burra z parametrami $p = 0.3$, $k = 1.2$, tak że $p/k = 0.25 < 1$ i spełniony jest (2.8) z $\gamma = 0.25$.

Na wykresie podwójnie logarytmicznym otrzymano trajektorię $X(t)$ zbliżoną do prostej o nachyleniu $n_{sym} = 0.78131$, podczas gdy wynik teoretyczny wynosi $n = \lambda/\gamma = 0.8$. Dla tego przypadku został przeprowadzony test wiarygodności symulacji. Wyznaczona została wartość średnia współczynnika nachylenia, a także odchylenie standardowe od wartości średniej oraz wartości skrajne. W tym celu symulacje uśredniające trajektorię dla 1000 cząstek zostały powtórzone 50 razy (przy większej ilości powtórzeń wyniki prawie nie ulegały zmianie), dla tych samych parametrów rozkładów Pareto i Burra. Otrzymana średnia współczynnika nachylenia wyniosła $\bar{n}_{sym} = 0.7794$, odchylenie standardowe od średniej $\sigma_n = 0.0074$, a wartości skrajne $n_{min} = 0.7227$ oraz $n_{max} = 0.8010$. Otrzymana średnia jest bliska wynikowi teoretycznemu, niewielki jest także rozrzut wyników, o czym świadczy wartość odchylenia standardowego.

Dla porównania przeprowadzono serię symulacji, w których rozkładem czasów oczekiwania na kolejny skok był również rozkład Pareto z parametrem $k = 5$, zaś rozkładem długości skoków - rozkład Burra z parametrami $p = 0.6$, $k = 2.4$, tak że iloraz $p/k = 0.25$, czyli tak jak poprzednio $\gamma = 0.25$. Współczynnik skalowania również pozostał ten sam $w = 10^{-3}$. Dla tego przypadku obliczony z serii 50 trajektorii średni współczynnik nachylenia wynosi $\bar{n}_{sym} = 0.7451$, odchylenie standardowe od średniej $\sigma_n = 0.0087$, a wartości skrajne $n_{min} = 0.7227$ oraz $n_{max} = 0.7628$. Widać, że średnia obliczona dla tego przypadku jest gorsza od poprzedniego wyniku. Można też zauważyć, że wartość maksymalna nachylenia trajektorii jest mniejsza od wartości teoretycznej, co oznacza że wynik teoretyczny leży poza zakresem otrzymanych wartości. Zbadana została więc zależność średniego współczynnika nachylenia wykresu $\bar{n}_{sym}$ od współczynnika w skalowania rozkładu czasów oczekiwania na skok, dla obu rozważanych wcześniej przypadków. Wyniki są przedstawione na Rysunku 2.5. Okazało się, że zmniejszanie współczynnika w powoduje, że współczynnik

nachylenia uzyskany z symulacji jest bliższy wynikowi teoretycznemu. Warunkiem jest wystarczająco duża ilość skoków, tak aby trajektoria pokryła cały badany obszar charakterystyki, co oznacza, że przy 10^4 skoków musi być spełniony warunek $w > 10^{-10}$. Widać także, że dobór współczynnika skali zależy nie tylko od ilorazu p/k , ale także od ich wartości. Stosując rozkład Burra z parametrami $p = 0.6$ i $k = 2.4$ należy wybrać mniejszy współczynnik w niż w przypadku rozkładu Burra z parametrami $p = 0.3$ i $k = 1.2$.

Symulacje wykazały również, że dla $p = 0.3$ i $k = 1.2$, przy współczynnikach skali $w \geq 10^{-2}$, wynik teoretyczny (tzn. $n = 0.8$) nie zawierał się w otrzymanym zakresie wartości współczynników nachylenia, gdyż już dla $w = 10^{-2}$ wartości skrajne wynosiły: $n_{\min} = 0.7441$, a $n_{\max} = 0.7869$. Dla rozkładu Burra z parametrami $p = 0.6$ i $k = 2.4$ maksymalną wartością w , przy której wynik teoretyczny należy do przedziału otrzymanych wartości nachylenia trajektorii jest $w = 10^{-7}$. Nie zaobserwowano natomiast zależności odchylenia standardowego σ_n od wartości współczynnika skalowania w .

Symulacje odpowiadające przedziałowi $t < \omega_c^{-1}$ przedstawione są na Rysunku 2.6. Rozkładem czasów oczekiwania na kolejny skok był tu rozkład Pareto z parametrem $k = 5$, spełniającym (2.6) z $\lambda = 0.2$, rozkładem długości skoków - rozkład Burra z parametrami $p = 0.6$, $k = 0.2$ czyli $\gamma = p/k = 3 > 2$, a więc rozkład ma skończoną wariancję. Współczynnik w skalowania rozkładu czasów pułapkowania wynosi tutaj $w = 10^{-6}$. Na wykresie podwójnie logarytmicznym otrzymano trajektorię $X(t)$ bardzo zbliżoną do prostej o nachyleniu $m_{sym} = 0.19877$, podczas gdy wynik teoretyczny wynosi $m = \lambda = 0.2$. Dla tego przypadku został też przeprowadzony test wiarygodności symulacji.

Otrzymane nachylenie średnie wyniosło $\overline{m}_{sym} = 0.1977$, odchylenie standardowe od średniej $\sigma_m = 0.0018$, a wartości skrajne $m_{\min} = 0.1942$ oraz $m_{\max} = 0.2018$. Otrzymana średnia jest więc bardzo bliska wynikowi teoretycznemu, niewielki jest także rozrzut wyników, o czym świadczy wartość odchylenia standardowego.

Także w tym przypadku zbadana została zależność średniego współczynnika $\overline{m}_{sym}$ nachylenia wykresu od współczynnika w skalowania rozkładu czasów oczekiwania na skok. Wyniki przedstawione są na Rysunku 2.7. Podobnie jak w przedziale niskich częstotliwości dyspersji α , zmniejszanie współczynnika w powoduje zbliżanie się wyników symulacji do wyniku teoretycznego. Można jednak zaobserwować tu znacznie lepszą zbieżność. Maksymalną wartością współczynnika w , przy którym wynik teoretyczny (tzn. $m = 0.2$) zawiera się w otrzymanym z symulacji zakresie

wartości współczynników nachylenia jest $w = 10^{-6}$. Nie zaobserwowano zależności odchylenia standardowego σ_m od współczynnika skali w , chociaż wartości odchylenia standardowego są tu dziesięciokrotnie mniejsze niż w przypadku symulacji przeprowadzonych dla niskich częstotliwości dyspersji α .

Analogiczne symulacje zostały wykonane dla innych wartości parametrów Pareto i Burra, odpowiadających współczynnikom nachylenia $m = 0.1$, $n = 0.9$. Zostały one przedstawione na Rysunku 2.8 oraz Rysunku 2.9.

Dla porównania przeprowadzono również symulacje, w których zarówno zmienna losowa reprezentująca czasy oczekiwania na kolejny skok, jak i zmienna losowa reprezentująca długości skoków mają rozkład stabilny. Indeks stabilności rozkładu czasów oczekiwania na skok wynosi λ , $0 < \lambda < 1$, natomiast indeks stabilności rozkładu długości skoków wynosi γ , $0 < \gamma < 1$ dla przedziału $t > \omega_c^{-1}$ lub $\gamma = 2$ przy symulacjach dla przedziału $t < \omega_c^{-1}$. W tym ostatnim przypadku R_i ma rozkład normalny, przy czym średnia i wariancja rozkładu normalnego zostały wybrane tak, aby prawdopodobieństwo wystąpienia wartości ujemnej było znikome.

Symulacje dla obszaru $t > \omega_c^{-1}$ przedstawione są na Rysunku 2.10. Rozkładem czasów oczekiwania na kolejny skok był rozkład stabilny z indeksem stabilności $\lambda = 0.2$, rozkładem długości skoków - rozkład stabilny z indeksem stabilności $\gamma = 0.25$. Współczynnik w skalowania rozkładu czasów pułapkowania wynosi tutaj $w = 10^{-7}$. Na wykresie podwójnie logarytmicznym położenia $X(t)$ otrzymano trajektorię bardzo zbliżoną do prostej o nachyleniu $n_{sym} = 0.77066$, podczas gdy wynik teoretyczny wynosi $n = \lambda/\gamma = 0.8$. Również dla tego przypadku został przeprowadzony test wiarygodności symulacji. Otrzymana średnia współczynnika nachylenia wyniosła $\bar{n}_{sym} = 0.7893$, odchylenie standardowe od średniej $\sigma_n = 0.0149$, a wartości skrajne $n_{min} = 0.7541$ oraz $n_{max} = 0.8248$. Średnia jest więc bardzo bliska wynikowi teoretycznemu. Niewielki jest także rozrzut wyników, o czym świadczy wartość odchylenia standardowego. Zbadana została także zależność średniego nachylenia $\bar{n}_{sym}$ trajektorii od współczynnika w skalowania rozkładu czasów pułapkowania (Rysunek 2.5) i porównana z wynikami uzyskanymi w przypadku, gdy rozkładem długości skoków był rozkład Burra, a rozkładem czasów oczekiwania na kolejny skok rozkład Pareto. Wynik dla rozkładu stabilnego jest dosyć zbliżony do wyniku otrzymanego dla rozkładu Burra z parametrami $p = 0.6$, $k = 2.4$. Okazało się również, że maksymalną wartością współczynnika w , dla której wynik teoretyczny leżał w zakresie otrzymanych wartości nachylenia $\bar{n}_{sym}$ uśrednionej trajektorii wynosi $w = 10^{-7}$.

Wyniki symulacji dla obszaru $t < \omega_c^{-1}$ przedstawione są na Rysunku 2.11. Roz-

kładem czasów oczekiwania na kolejny skok był rozkład stabilny z indeksem stabilności $\lambda = 0.2$, rozkładem długości skoków - rozkład normalny ze średnią 100 i wariancją 1, który jest rozkładem stabilnym z indeksem stabilności $\gamma = 2$. Współczynnik w skalowania rozkładu czasów pułapkowania wynosi tutaj $w = 10^{-6}$. Na wykresie podwójnie logarytmicznym położenia $X(t)$ otrzymano trajektorię bardzo zbliżoną do prostej o nachyleniu $m_{sym} = 0.19307$, podczas gdy wynik teoretyczny wynosi $m = \lambda = 0.2$. Dla tego przypadku został także przeprowadzony test wiarygodności symulacji. Wyznaczona została wartość średnia współczynnika nachylenia, a także odchylenie standardowe od wartości średniej oraz wartości skrajne. W tym celu symulacje uśredniające trajektorię dla 1000 cząstek zostały powtórzone 50 razy, przy tych samych parametrach λ i γ . Otrzymane nachylenie średnie wyniosło $\overline{m}_{sym} = 0.1936$, odchylenie standardowe od średniej $\sigma_m = 0.0012$, a wartości skrajne $m_{min} = 0.1888$ oraz $m_{max} = 0.1936$. Otrzymana średnia jest więc bliska wynikowi teoretycznemu, jednak nie leży on w zakresie otrzymanych wartości nachylenia. Należałoby więc wybrać jeszcze mniejszy współczynnik skalowania w .

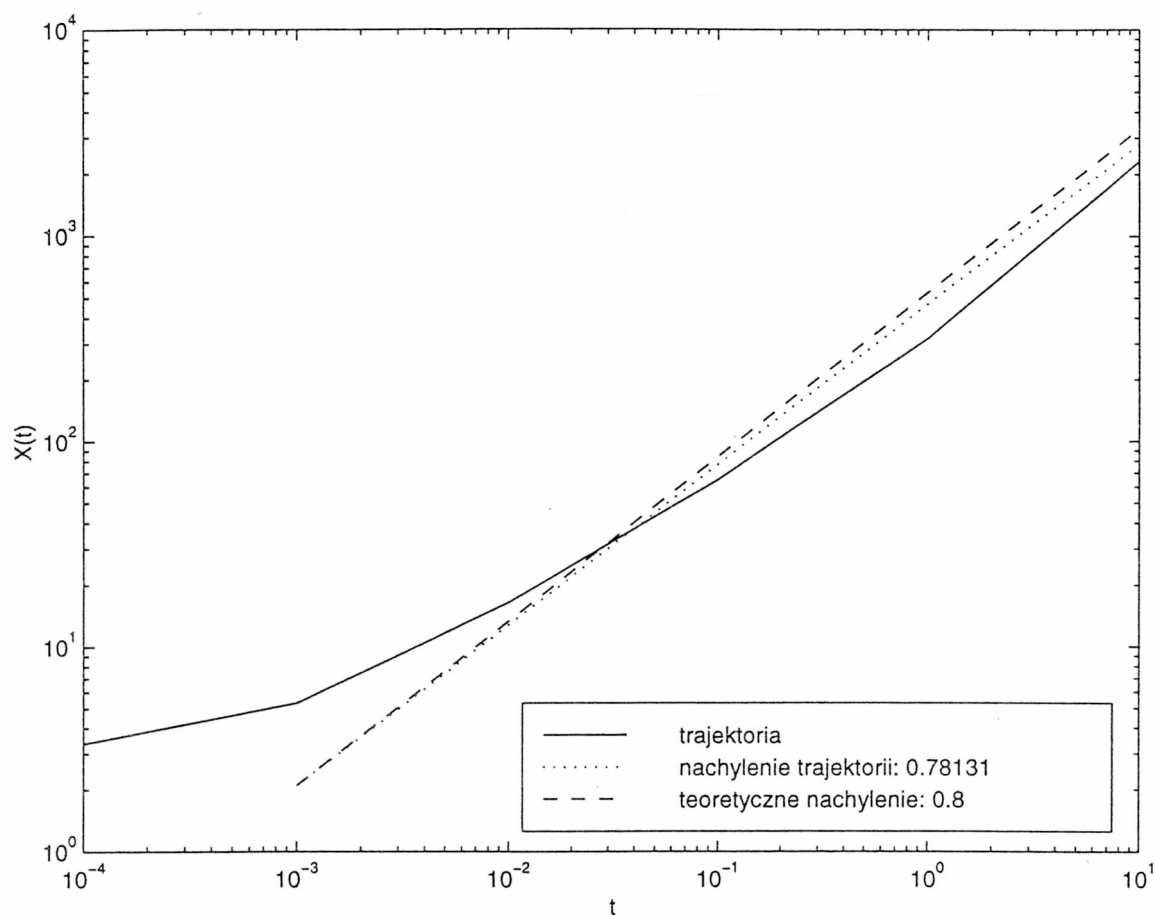
Zbadana została również zależność średniego współczynnika $\overline{m}_{sym}$ nachylenia wykresu od współczynnika w skalowania rozkładu czasów oczekiwania na skok. Wyniki przedstawione są na Rysunku 2.7. Widać, że w przypadku rozkładów stabilnych należy wybrać mniejszy współczynnik w niż w przypadku analizowanych wcześniej rozkładów z obszarów ich przyciągania. Nie zaobserwowano zależności odchylenia standardowego σ_m od współczynnika skali w , chociaż wartości odchylenia standardowego są tu dziesięciokrotnie mniejsze niż w przypadku symulacji przeprowadzonych dla niskich częstotliwości dyspersji α .

Podobnie jak w pierwszym przypadku, gdy rozkłady należały do obszaru przyciągania rozkładu stabilnego, analogiczne symulacje przeprowadzono dla innych parametrów rozkładów stabilnych, przy których teoretyczne współczynniki nachylenia wynoszą $m = 0.1$, $n = 0.9009$. Zostały one przedstawione na Rysunku 2.12 oraz Rysunku 2.13.

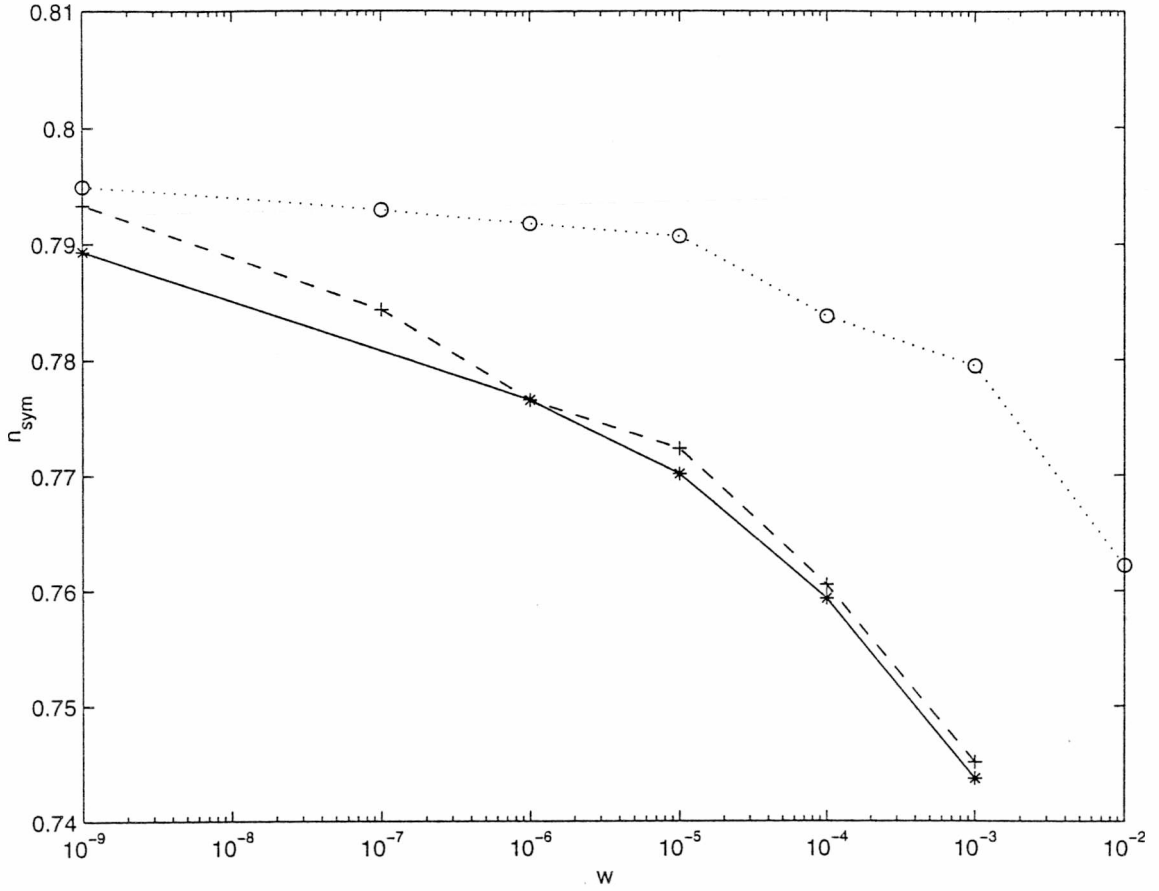
Symulacje potwierdziły, że przy odpowiednim doborze rozkładów długości skoków R_i oraz czasów pułapkowania T_i uzyskana trajektoria cząstki efektywnej, w przedziale czasu odpowiadającym dyspersji α , jest bardzo bliska trajektorii przewidzianej teoretycznie, na podstawie twierdzeń granicznych. Parametry tych rozkładów są tutaj jednoznacznie określone przez wartości eksperymentalnych parametrów m i n . W przypadku rozkładu Burra, który posiada dwa parametry (p i k) istotny jest nie tylko ich iloraz, który odpowiada parametrowi γ z (2.8), gdyż $\gamma = p/k$,

ale także wartości p i k , które mają wpływ na graniczny współczynnik skalowania w , co wykazały symulacje. Dobór współczynnika skalowania w jest bardzo istotny ze względu na zgodność wyniku teoretycznego uzyskanego dla $t \rightarrow \infty$ z wynikiem symulacji przeprowadzonych dla skończonego przedziału czasów, odpowiadającego obszarowi dyspersji α . Zbadano, że przy zadanej ilości skoków cząstki należy wybrać minimalną wartość współczynnika w , który zapewnia jeszcze wystarczającą długość trajektorii do pokrycia całego badanego obszaru charakterystyki.

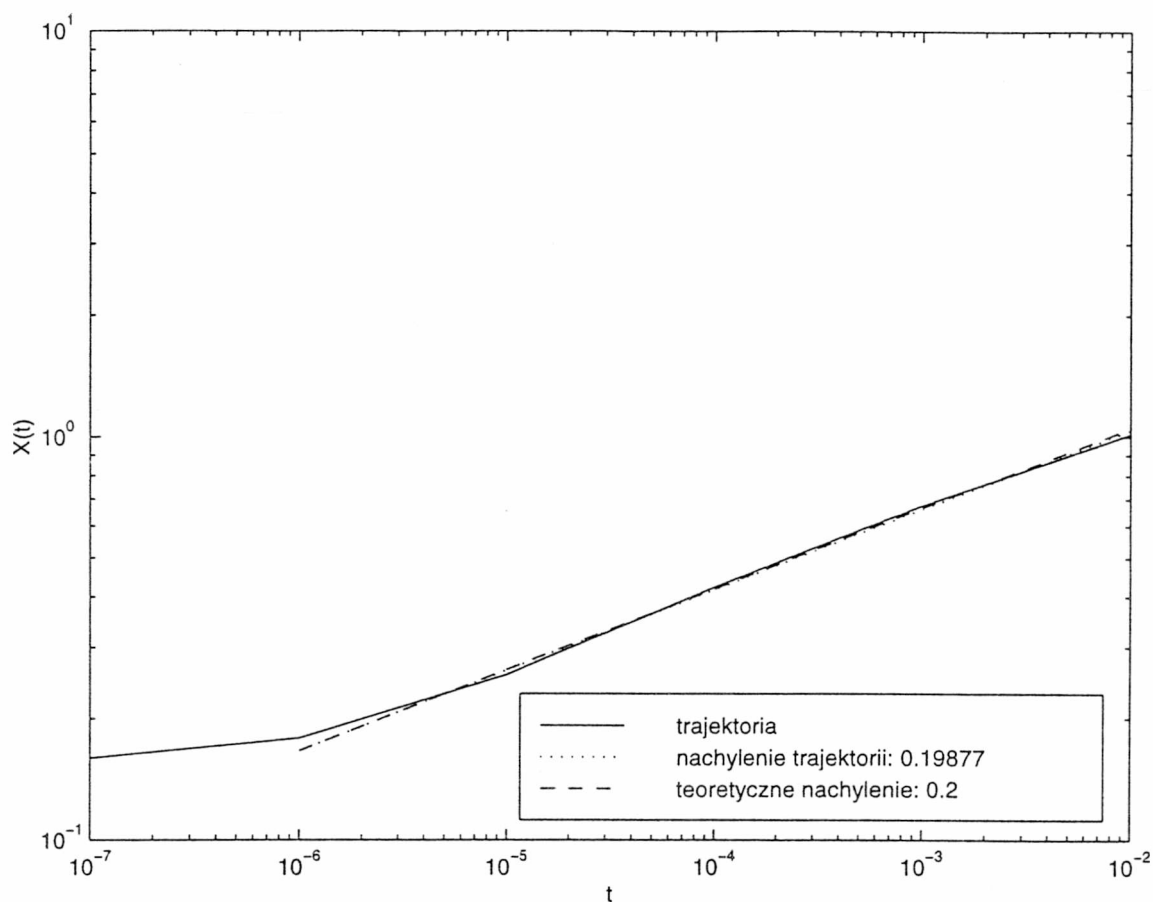
Symulacje zostały przeprowadzone dla rozkładów stabilnych oraz rozkładów z ich obszarów przyciągania. Przy doborze odpowiednich współczynników skalowania nie zauważono różnicy w jakości otrzymanych wyników pomiędzy rozkładami stabilnymi a rozkładami z obszarów ich przyciągania.



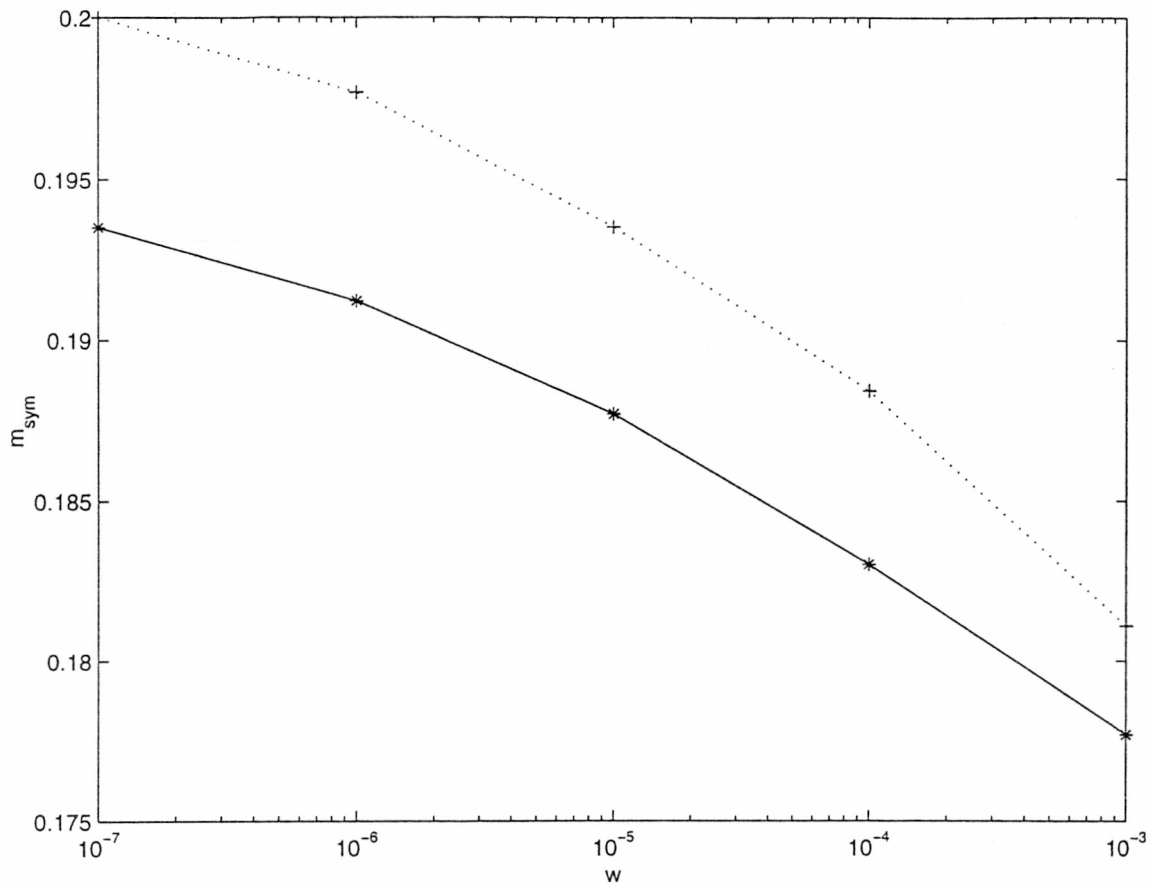
Rysunek 2.4: Zależność położenia $X(t)$ cząstki efektywnej od czasu w błędzeniu losowym CTRW, przy założeniach $t > \omega_c^{-1}$ i $n = 0.8$. Rozkład czasów oczekiwania na kolejny skok - rozkład Pareto z parametrami $k = 5$ i $w = 10^{-3}$, rozkład długości skoków - rozkład Burra z parametrami $p = 0.3$, $k = 1.2$.



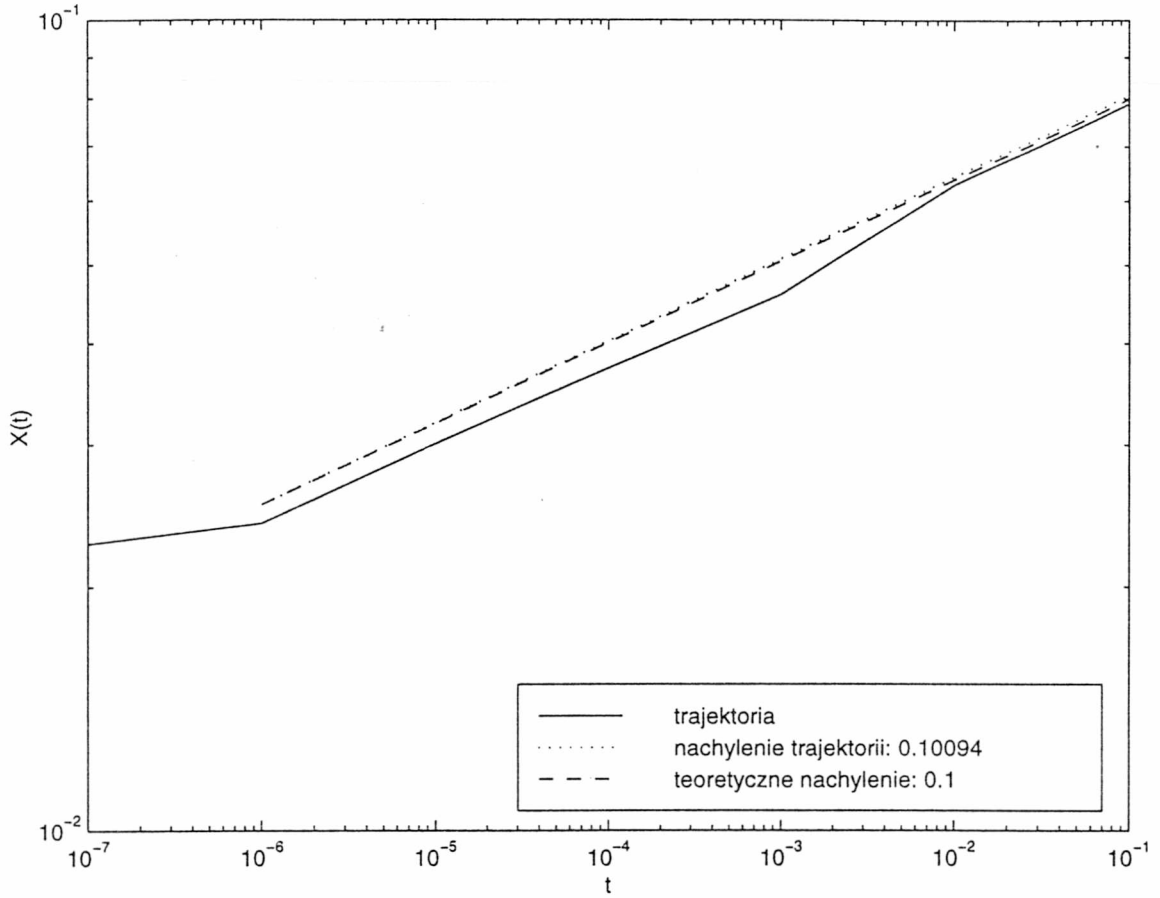
Rysunek 2.5: Zależność średniego współczynnika nachylenia $\bar{n}_{sym}$ trajektorii w zależności od wartości współczynnika skalowania w przy różnych rozkładach długości skoków cząstki i czasów oczekiwania na skok. Linia kropkowana: rozkład długości skoków - rozkład Burra z parametrami $p = 0.3$, $k = 1.2$ ($\gamma = p/k = 0.25$), rozkład czasów oczekiwania - rozkład Pareto $k = 5$ ($\lambda = 0.2$). Linia przerywana: rozkład długości skoków - rozkład Burra z parametrami $p = 0.6$, $k = 2.4$ ($\gamma = p/k = 0.25$), rozkład czasów oczekiwania - rozkład Pareto z $k = 5$ ($\lambda = 0.2$). Linia ciągła: rozkład długości skoków - rozkład stabilny z indeksem stabilności $\kappa = 0.25$, rozkład czasów oczekiwania - rozkład stabilny z indeksem stabilności $\kappa = 0.2$. Teoretyczna wartość współczynnika nachylenia wynosi $n = 0.8$.



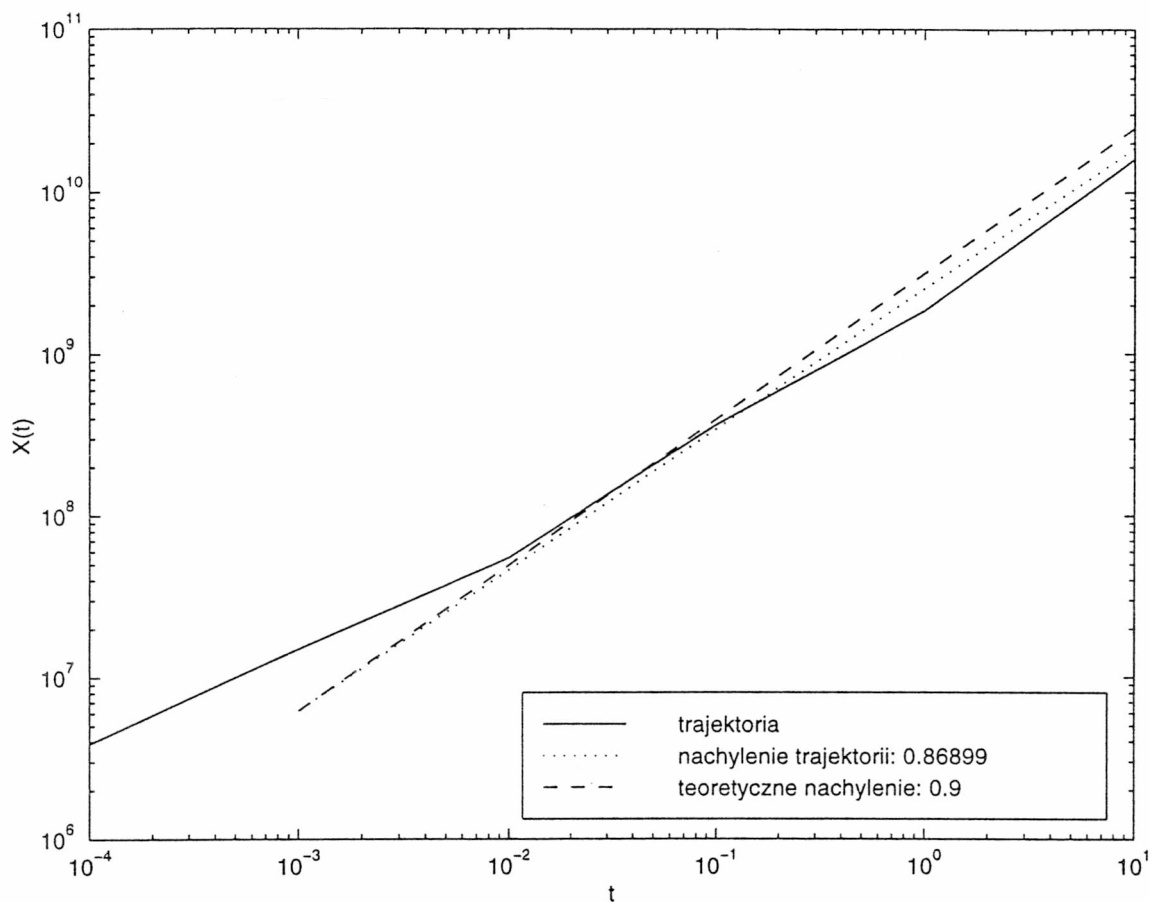
Rysunek 2.6: Zależność położenia $X(t)$ cząstki efektywnej od czasu w błędzeniu losowym CTRW, przy założeniach $t < \omega_c^{-1}$ i $m = 0.2$. Rozkład czasów oczekiwania na kolejny skok - rozkład Pareto z parametrem $k = 5$, rozkład długości skoków - rozkład Burra z parametrami $p = 0.6$, $k = 0.2$, $w = 10^{-6}$.



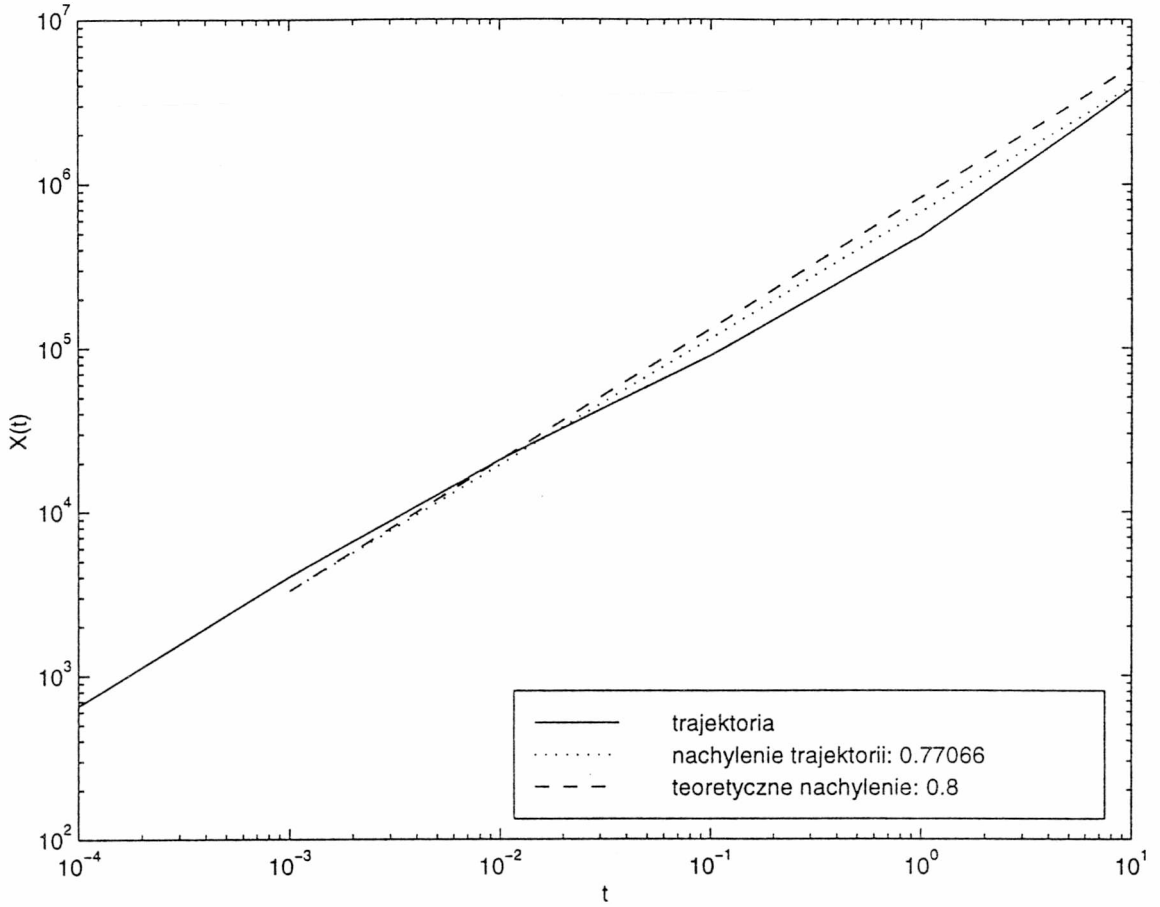
Rysunek 2.7: Zależność średniego współczynnika nachylenia $\bar{m}_{sym}$ trajektorii w zależności od wartości współczynnika skalowania w . Linia kropkowana: rozkład długości skoków - rozkład Burra z parametrami $p = 0.6$, $k = 0.2$ ($\gamma = p/k = 3$), rozkład czasów oczekiwania - rozkład Pareto z $k = 5$ ($\lambda = 0.2$). Linia ciągła: rozkład długości skoków - rozkład stabilny z indeksem stabilności $\kappa = 2$, rozkład czasów oczekiwania - rozkład stabilny z indeksem stabilności $\kappa = 0.2$. Teoretyczna wartość współczynnika nachylenia wynosi $m = 0.2$.



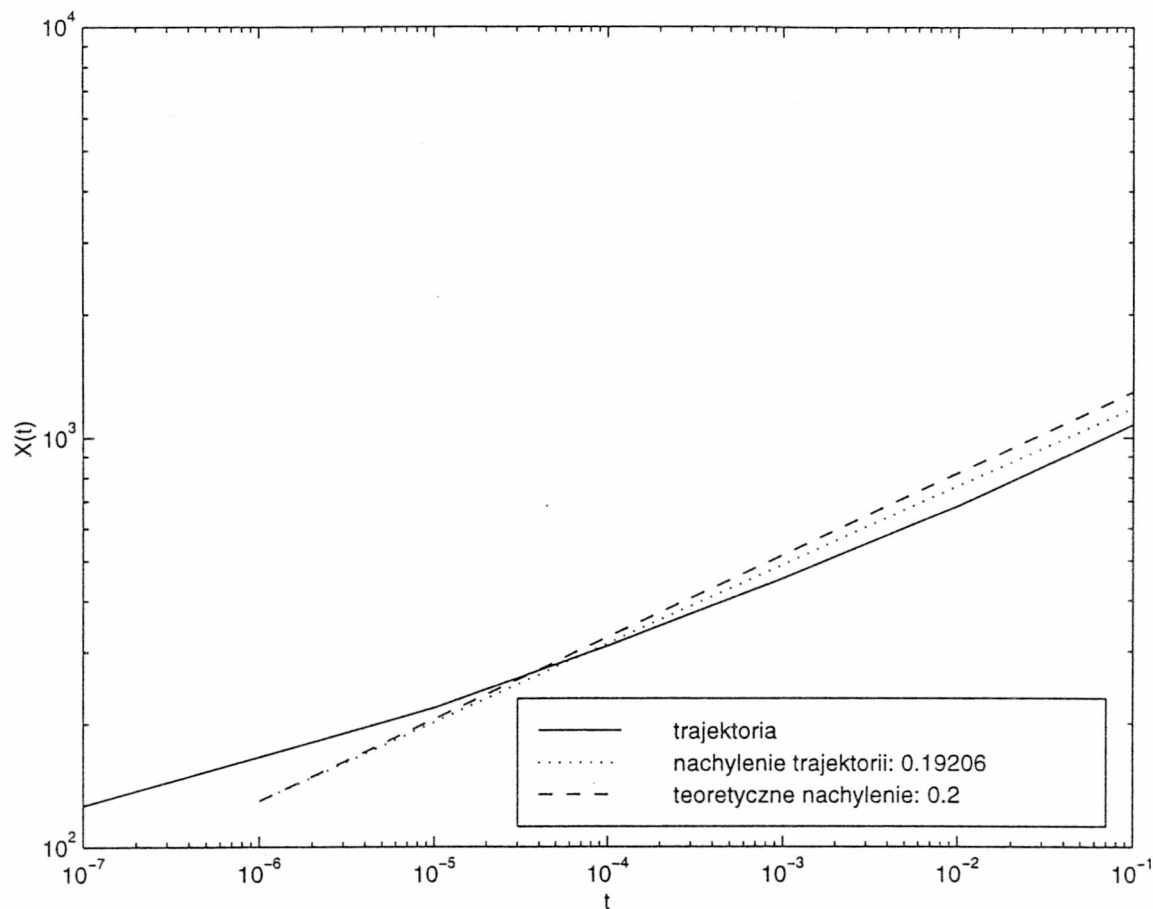
Rysunek 2.8: Zależność położenia $X(t)$ cząstki efektywnej od czasu w błędzeniu losowym CTRW, przy założeniach $t < \omega_c^{-1}$ i $m = 0.1$. Rozkład czasów oczekiwania na kolejny skok - rozkład Pareto z parametrem $k = 10$, rozkład długości skoków - rozkład Burra z parametrami $p = 0.5$, $k = 0.1$, $w = 10^{-6}$.



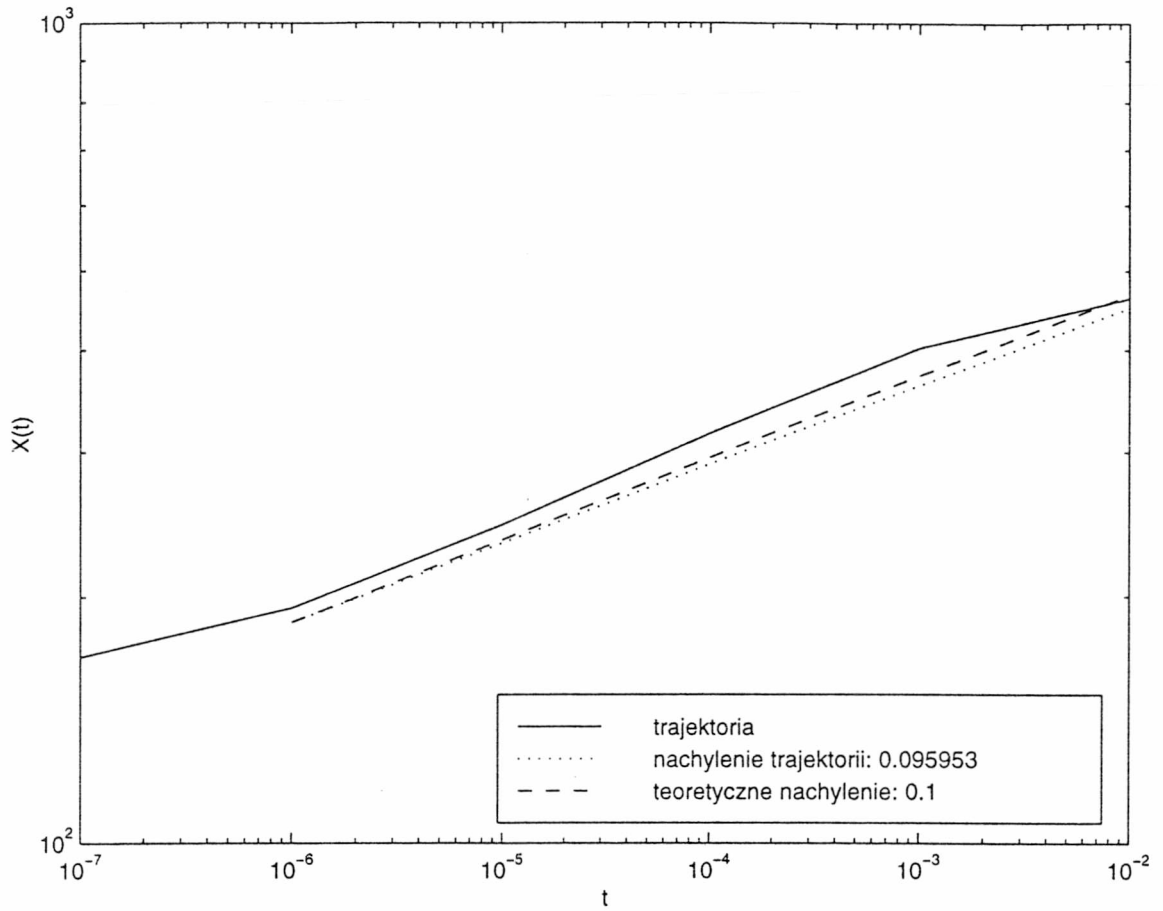
Rysunek 2.9: Zależność położenia $X(t)$ cząstki efektywnej od czasu w błędzeniu losowym CTRW, przy założeniach $t > \omega_c^{-1}$ i $n = 0.9$. Rozkład czasów oczekiwania na kolejny skok - rozkład Pareto z parametrem $k = 10$, rozkład długości skoków - rozkład Burra z parametrami $p = 0.5$, $k = 4.5$, $w = 10^{-3}$.



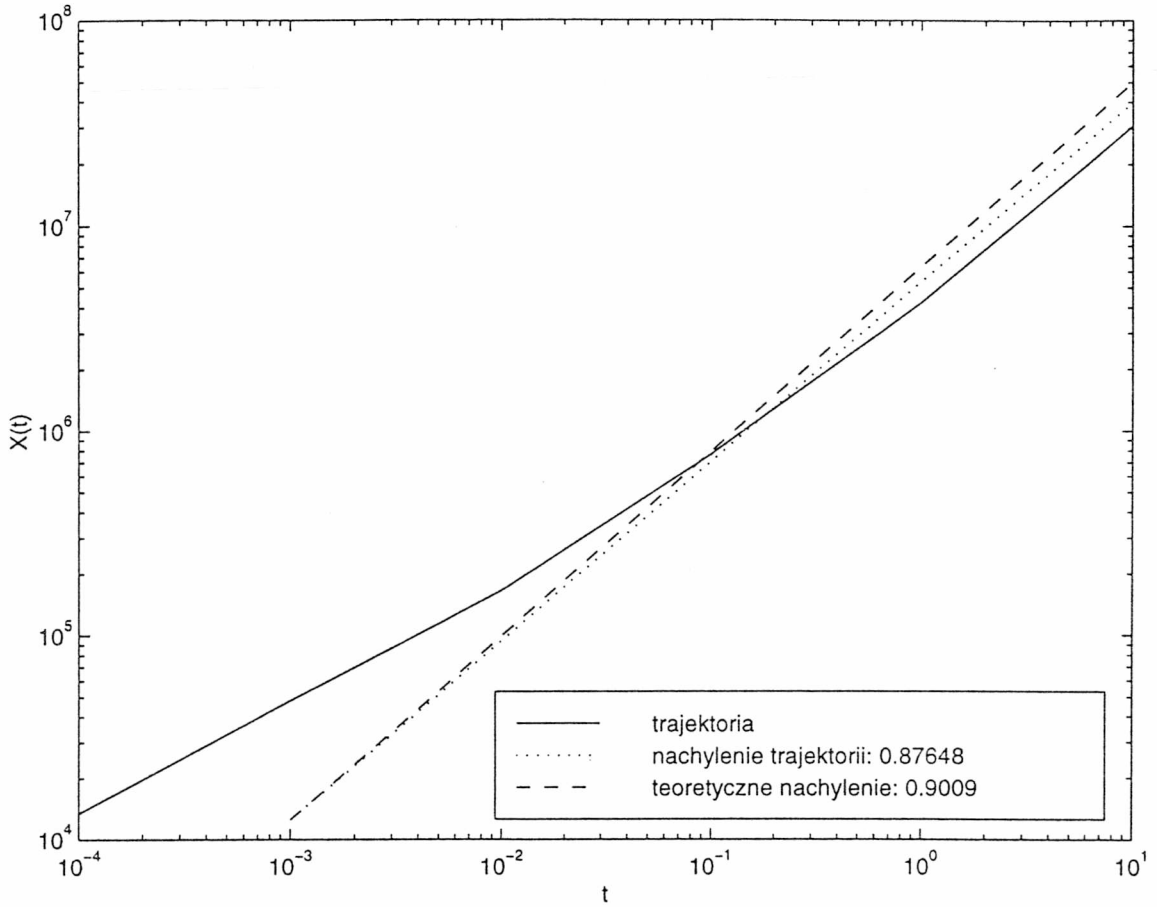
Rysunek 2.10: Zależność położenia $X(t)$ cząstki efektywnej od czasu w błędzeniu losowym CTRW, przy założeniach $t > \omega_c^{-1}$ i $n = 0.8$. Rozkład czasów oczekiwania na kolejny skok - rozkład stabilny z indeksem stabilności $\lambda = 0.2$ i parametrem skalowania $w = 10^{-7}$, rozkład długości skoków - rozkład stabilny z indeksem stabilności $\gamma = 0.25$.



Rysunek 2.11: Zależność położenia $X(t)$ cząstki efektywnej od czasu w błędzeniu losowym CTRW, przy założeniach $t < \omega_c^{-1}$ i $m = 0.2$. Rozkład czasów oczekiwania na kolejny skok - rozkład stabilny z indeksem stabilności $\lambda = 0.2$ i parametrem skalowania $w = 10^{-6}$, rozkład długości skoków - rozkład Gaussa o średniej 100 i wariancji 1.



Rysunek 2.12: Zależność położenia $X(t)$ cząstki efektywnej od czasu w błędzeniu losowym CTRW, przy założeniach $t < \omega_c^{-1}$ i $m = 0.1$. Rozkład czasów oczekiwania na kolejny skok - rozkład stabilny z indeksem stabilności $\lambda = 0.1$ i parametrem skali $w = 10^{-6}$, rozkład długości skoków - rozkład Gaussa o średniej 100 i wariancji 1.



Rysunek 2.13: Zależność położenia $X(t)$ cząstki efektywnej od czasu w błędzeniu losowym CTRW, przy założeniach $t > \omega_c^{-1}$ i $n = 0.9009$. Rozkład czasów oczekiwania na kolejny skok - rozkład stabilny z indeksem stabilności $\lambda = 0.1$ i parametrem skali $w = 10^{-7}$, rozkład długości skoków - rozkład stabilny z indeksem stabilności $\gamma = 0.111$.

2.5 Wnioski

W rozdziale 2 rozważane było zjawisko dyspersji α w charakterystyce dielektrycznej tkanki. Pokazano, że dyspersja ta wynika z przewodnictwa hoppingowego jonów i jest przypadkiem szczególnym bardziej ogólnego zjawiska, znanego pod nazwą LFD ("Low Frequency Dispersion"). Zaproponowany został opis probabilistyczny tego zjawiska, wykorzystujący jednowymiarowe błędzenie losowe z czasem ciągłym, który umożliwia powiązanie charakteru transportu cząstki efektywnej z obserwowaną charakterystyką dielektryczną materiału.

Zaproponowany opis probabilistyczny dyspersji α opiera się na założeniach klastrowego modelu zjawiska LFD. Model ten zakłada, że zjawisko typu LFD może wystąpić jedynie w materiałach o budowie klastrowej. W przedziale wysokich częstotliwości dyspersji α ($\omega_c < \omega < \omega_b$) dominujący wpływ na charakterystykę ma migracja jonów wewnątrz klastrów. Ruch cząstki może więc zachodzić w ograniczonym przestrzennie obszarze klastra o regularnej budowie wewnętrznej. W opisie probabilistycznym tego zjawiska przyjmujemy więc, że zmienna losowa reprezentująca długość skoków cząstki efektywnej charakteryzuje się skończoną wariancją (a więc należy do obszaru przyciągania rozkładu normalnego), co jest zgodne z tradycyjnymi modelami CTRW.

W przedziale niskich częstotliwości dyspersji α ($\omega_d < \omega < \omega_c$) na charakterystykę dielektryczną wpływa przede wszystkim transport jonów w medium międzyklastrowym. Długość skoków nie jest w tym przypadku ograniczona rozmiarem klastrów. Mogą więc występować skoki o bardzo zróżnicowanej długości. Na zróżnicowanie długości skoków wpływ ma również nieregularna budowa środowiska, w którym migruje cząstka. W opisie probabilistycznym proponujemy więc naturalne rozszerzenie klasy rozkładów opisujących długość skoków cząstki o rozkłady długoogonowe, tak że długość ta reprezentowana jest przez zmienną losową o rozkładzie z obszaru przyciągania pewnego rozkładu stabilnego. Zakładamy przy tym, że ze względu na duże zróżnicowanie długości skoków, opisująca je zmienna losowa nie ma skończonej wariancji, ani wartości oczekiwanej. Oznacza to, że prawdopodobieństwo wystąpienia skoku bardzo długiego jest znacznie większe niż w przedziale wysokich częstotliwości.

W obu przedziałach przyjmujemy długoogonowy rozkład czasów oczekiwania na kolejny skok, co jest zgodne ze standardowym podejściem do opisu zjawisk dyfuzji anomalnej, a także badaniami przeprowadzonymi na tkance metodą FRAP.

Teoretyczne rozważania w oparciu o twierdzenia graniczne dla CTRW pokazały,

że trajektoria cząstki efektywnej dla dużych czasów powinna mieć charakter funkcji potęgowej, co odpowiada charakterystyce dielektrycznej typowej dla dyspersji α . Parametry zastosowanych rozkładów prawdopodobieństw, charakteryzujące transport cząstki efektywnej, która reprezentuje migrujące jony, w ścisły sposób wyznaczają nachylenia charakterystyki dielektrycznej tkanki w obu przedziałach tej dyspersji. W przedziale wysokich częstotliwości dyspersji α ($\omega_c < \omega < \omega_g$) nachylenie m charakterystyki podatności dielektrycznej od częstotliwości (w skali podwójnie logarytmicznej), zależy wyłącznie od parametru λ rozkładu czasów oczekiwania na kolejny skok (założenie 2.6) i zachodzi związek $m = \lambda$. Natomiast w obszarze niskoczęstotliwościowym dyspersji α ($\omega_d < \omega < \omega_c$) nachylenie n charakterystyki (w skali podwójnie logarytmicznej) zależy zarówno od parametru λ rozkładu czasów oczekiwania na kolejny skok, jak i parametru γ rozkładu długości skoków (z założenia (2.8) i zachodzi relacja $n = \lambda/\gamma$.

Ponieważ wyniki teoretyczne dotyczą dużych czasów ($t \rightarrow \infty$), a dyspersja α zachodzi w przedziale skończonych czasów, przeprowadzono symulacje komputerowe, w których sprawdzono na ile własności asymptotyczne różnią się od wyników dokładnych otrzymanych dla czasów z przedziału dyspersji α . Zbadano więc zależność średniego położenia $X(t)$ cząstki efektywnej od czasu, dla przedziału czasu odpowiadającego dyspersji α . Symulacje te wykazały, że przy odpowiednim doborze parametrów rozkładów długości skoków oraz czasów pułapkowania rzeczywista trajektoria cząstki efektywnej jest w tym przedziale bardzo bliska trajektorii przewidzianej teoretycznie na podstawie twierdzeń granicznych. Potwierdza to tezę, że istotnie można tu stosować wzory przybliżone, poprawne dla $t \rightarrow \infty$.

Rozdział 3

Zjawiska międzyfazowe wewnątrz tkanki - dyspersja β

3.1 Własności dielektryczne tkanki w przedziale dyspersji β

Dyspersja β materiałów biologicznych została zaobserwowana już w roku 1876. Pierwsze badania prowadzili: Stewart, Kochlrausch, Bernstein, Hober i Osterhout [1]. W charakterystyce dielektrycznej tkanki dyspersja β występuje w przedziale od ω_b (ok. 10^6 Hz) do ω_g (ok. 10^9 Hz) (Rysunek 1.1). Podobnie jak w przypadku dyspersji α odpowiedź ma tu charakter CPA, tzn. część rzeczywista i urojona podatności dielektrycznej są proporcjonalne. Ponadto zależność podatności od częstotliwości jest potęgowa:

$$\chi'(\omega) \propto \chi''(\omega) \propto \omega^{s-1} \text{ dla } \omega_b < \omega < \omega_g \quad (3.1)$$

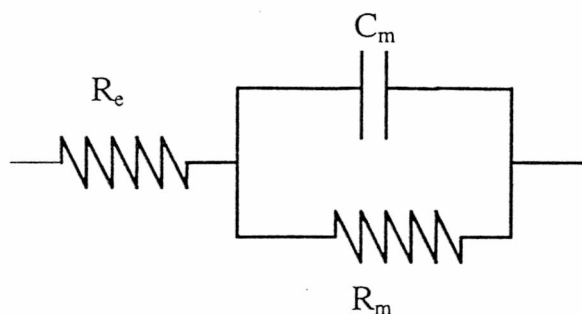
przy czym $0.3 \leq s \leq 0.5$.

O ile w zakresie niższych częstotliwości dominują zjawiska dyfuzyjne jonów, to w obszarze β ujawniają się własności pojemnościowe samych błon [1, 23]. Obserwowana tu dyspersja wynika z obecności wielu błon, których parametry dielektryczne charakteryzuje pewien rozrzut wartości [21]. W takiej sytuacji można zastosować model Maxwella-Wagnera, który opisuje zachowanie niejednorodnego układu dielektrycznego, składającego się z obszarów o różnych podatnościach dielektrycznych. Dalej do opisu zjawiska Maxwella-Wagnera, występującego w obszarze dyspersji β , zastosujemy dobrze znane [21] podejście elektryczne, ale z uwzględnieniem szczegól-

nych właściwości tkanki.

3.2 Reprezentacja elektryczna zjawisk zachodzących w tkance w przedziale dyspersji β

Od początku XX wieku podejmowano próby opisu własności dielektrycznych tkanki w języku obwodów elektrycznych. Pierwszy taki model został zaproponowany przez Philipppsona [1, 20] w latach dwudziestych. Modelował on elektryczne zachowanie komórki za pomocą układu R-C (Rysunek 3.1). W układzie tym R_m odpowiada za przewodnictwo poprzez błonę, C_m za jej zdolność do polaryzacji, natomiast R_e za przewodnictwo medium wewnątrzkomórkowego. (Philipppson przyjmował, że wewnątrz komórki wypełnia tylko elektrolit).



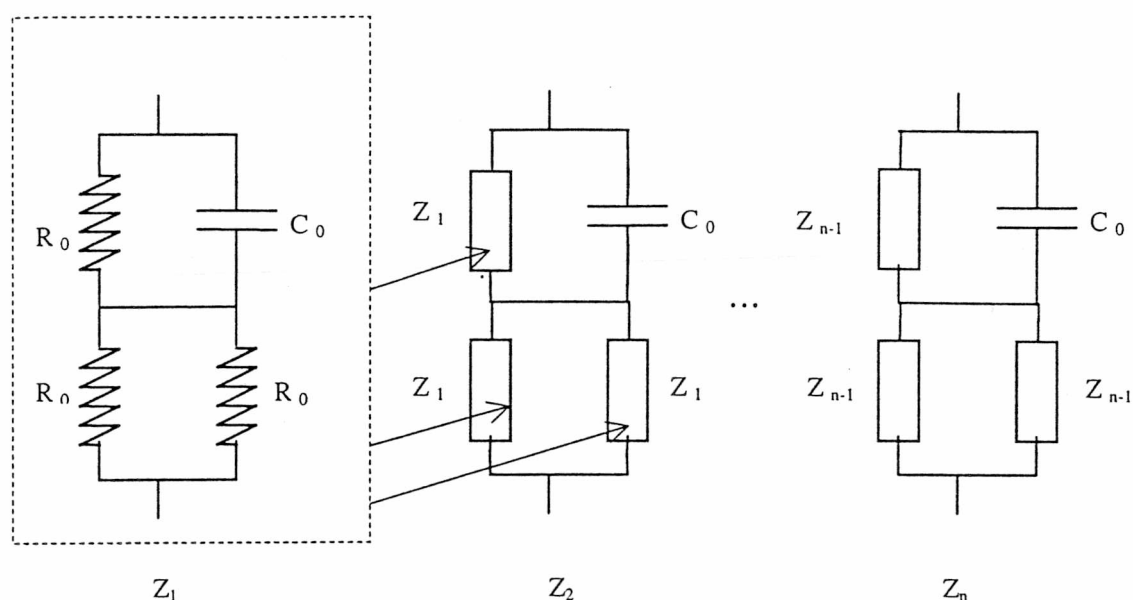
Rysunek 3.1: Model komórki Philipppsona.

Poszukiwano następnie elektrycznego schematu zastępczego całej tkanki [18]. Wydaje się jednak, że reprezentacja tkanki za pomocą jednego układu elektrycznego, który modelowałby wszystkie zjawiska zachodzące w tkance, a więc zarówno procesy dyfuzyjne, zjawiska międzyfazowe, jak i relaksację stałych dipoli, jest mocno dyskusyjna. Z drugiej strony opis elektryczny tkanki w obszarze dyspersji β jest podejściem dosyć naturalnym. Sąsiedztwo wielu faz dielektrycznych o różnej podatności jest standardowo modelowane elektrycznie jako szeregowe połączenie równoległych obwodów R-C [21]. Taka niejednorodność układu powoduje pojawienie się dodatkowej dyspersji podatności dielektrycznej w obszarze, w którym części rzeczywiste podatności poszczególnych faz są stałe. W przypadku tkanki mamy do czynienia z układem bardzo złożonym o wielu składowych. Zgodnie z przedstawionym we wstępie modelem, z punktu widzenia własności dielektrycznych tkankę możemy roz-

patrywać jako układ wielu błon otoczonych elektrolitem. Obserwowana tu dyspersja będzie zależała od własności tych elementów. Znalezienie dobrej reprezentacji elektrycznej niejednorodnej dielektrycznie budowy tkanki umożliwi więc opis obszaru β .

W literaturze proponowane były między innymi deterministyczne modele fraktalne tkanki [18]. Zakładają one hierarchiczne samopodobieństwo struktury tkanki. Oznacza to, że tkankę może reprezentować deterministyczny układ hierarchiczny, który powstaje w oparciu o jednostkę elementarną zaproponowaną w pierwszym kroku. Za jednostkę elementarną uważany jest najbardziej zagłębiony element strukturalny tkanki, otoczony błoną. Jego schemat elektryczny jest wielokrotnie powielany w wybranej konfiguracji. Otrzymany w wyniku tej konstrukcji obwód elektryczny modeluje zachowanie tkanki w wybranym obszarze częstotliwości. Przykładem może tu być propozycja L. A. Dissado [18] zaprezentowana na Rysunku 3.2. Układ ten jest przypadkiem szczególnym fraktalnego układu perkolacyjnego [77], który jest jednym z kilku proponowanych w literaturze elektrycznych modeli fraktalnych [78, 79]. W pewnym przedziale częstotliwości układy te wykazują odpowiedź typu CPA. W proponowanym przez Dissado modelu elektrycznym tkanki uzyskuje się potęgową zależność podatności dielektrycznej od częstotliwości. Zauważmy jednak, że ten typ modeli przyjmuje arbitralnie prostą zależność między impedancją błony a impedancją otaczającego go elektrolitu oraz zakłada deterministyczną fraktalność układu.

W niniejszym rozdziale przedstawiamy model elektryczny zjawiska powodującego dyspersję β , który opiera się na odmiennych założeniach: impedancję błony i jej otoczenia traktować będziemy jako wielkości niezależne od siebie, natomiast parametry elektryczne każdej błony jako niezależne od parametrów innych błon. Z natury układów biologicznych wynika, że ich parametry na ogół nie przyjmują stałych, deterministycznie określonych wartości. W naszym modelu zakładamy pewien losowy charakter poszczególnych elementów. Układ nie będzie więc stanowił idealnej, deterministycznej struktury fraktalnej, gdyż poszczególne elementy elektryczne będą przyjmowały wartości losowe. Konstrukcja takiego układu opierać się będzie na modelu Philipppsona. Obwód $R_m C_m$, podobnie jak w układzie Philipppsona, modeluje dielektryczne zachowanie błony biologicznej w tym obszarze częstotliwości, natomiast rezystancję elektrolitu R_e zastępujemy impedancją wnętrza danej błony biologicznej (tkanka składa się z całego systemu układów membranowych, które mogą się w sobie zawierać (patrz rozdział 1.2)). Zakładając użycie elektrod



Rysunek 3.2: Deterministyczny obwód fraktalny jako model tkanki.

o bardzo małym rozmiarze można, podobnie jak w modelu Dissado, przyjąć model jednowymiarowy, tak że impedancję wnętrza błony stanowić będzie suma impedancji sąsiadujących ze sobą wewnętrznych układów membranowych. Każda z tych wewnętrznych błon może zawierać układy membranowe kolejnego poziomu, co znajdzie swoje odbicie w konstrukcji hierarchicznej. Poziomem najbardziej zagłębionym jest tutaj taka błona biologiczna, której wnętrze można będzie, z punktu widzenia własności dielektrycznych, traktować jako elektrolit. Najniższy poziom zagłębienia reprezentowany jest przez niezmodyfikowany układ Philipppsona. Mimo, że podobnie jak w przedstawionym wcześniej modelu Dissado, nie zostało przyjęte żadne ograniczenie ilości poziomów, to w rzeczywistości liczba ta jest niewielka, przy czym równorzędne struktury membranowe występują głównie na poziomie komórkowym.

Stosując hierarchiczną konstrukcję obwodu modelującego niejednorodność tkanki (Rysunek 3.3), w oparciu o przyjętą jednostkę elementarną (Rysunek 3.1), otrzymujemy układ szeregowo połączonych obwodów R-C, który reprezentuje własności poszczególnych faz układu. Uzyskany układ szeregowo-równoległy odpowiada modelom elektrycznym zjawiska Maxwella-Wagnera [21] z tą różnicą, że dodatkowo uwzględniona jest rezystancja szeregową elektrolitu. Odpowiedź systemu R-C o takiej strukturze, przy założeniu deterministycznie fraktalnego charakteru wielkości R i C , była analizowana m.in. w pracy [79]. Okazało się, że przy pewnych zało-

zeniach, w określonym obszarze częstotliwości, można tu zaobserwować odpowiedź typu CPA.

Łatwo można przewidzieć zachowanie się takiego układu dla określonej liczby elementów składowych o ustalonych parametrach R, C . Jednak w przypadku tkanki mamy do czynienia z pewną dużą lecz nieznaną ilością takich elementów. Ponadto elementy R, C przyjmują swoje wartości losowo. W przypadku układów złożonych o pewnych, statystycznie tylko określonych wartościach poszczególnych elementów, bardzo pomocne jest podejście probabilistyczne. Umożliwia ono prognozę własności całego systemu bez dokładnej znajomości parametrów wszystkich jego składowych.

Chcąc porównać proponowany model elektryczny dyspersji β z danymi eksperymentalnymi opisanymi zależnością (3.1), skorzystamy ze związku między zespoloną pojemnością $C^*(\omega)$ układu a jego przenikalnością dielektryczną $\varepsilon = \varepsilon'(\omega) - i\varepsilon''(\omega)$ [27]:

$$C^*(\omega) = \frac{Y(\omega)}{i\omega} = \left(\frac{A}{d}\right) \{\varepsilon'(\omega) - i\varepsilon''(\omega)\}$$

gdzie $Y(\omega)$ oznacza admitancję, A - powierzchnię przekroju badanego materiału, d - odległość między okładkami kondensatora, przy czym admitancja $Y(\omega) = Z^{-1}(\omega)$ jest odwrotnością impedancji $Z(\omega)$. Ponieważ podatność dielektryczna $\chi(\omega) = \varepsilon(\omega) - 1$, więc dla dużych ω otrzymujemy:

$$Z(\omega) \propto (i\omega\chi(\omega))^{-1}. \quad (3.2)$$

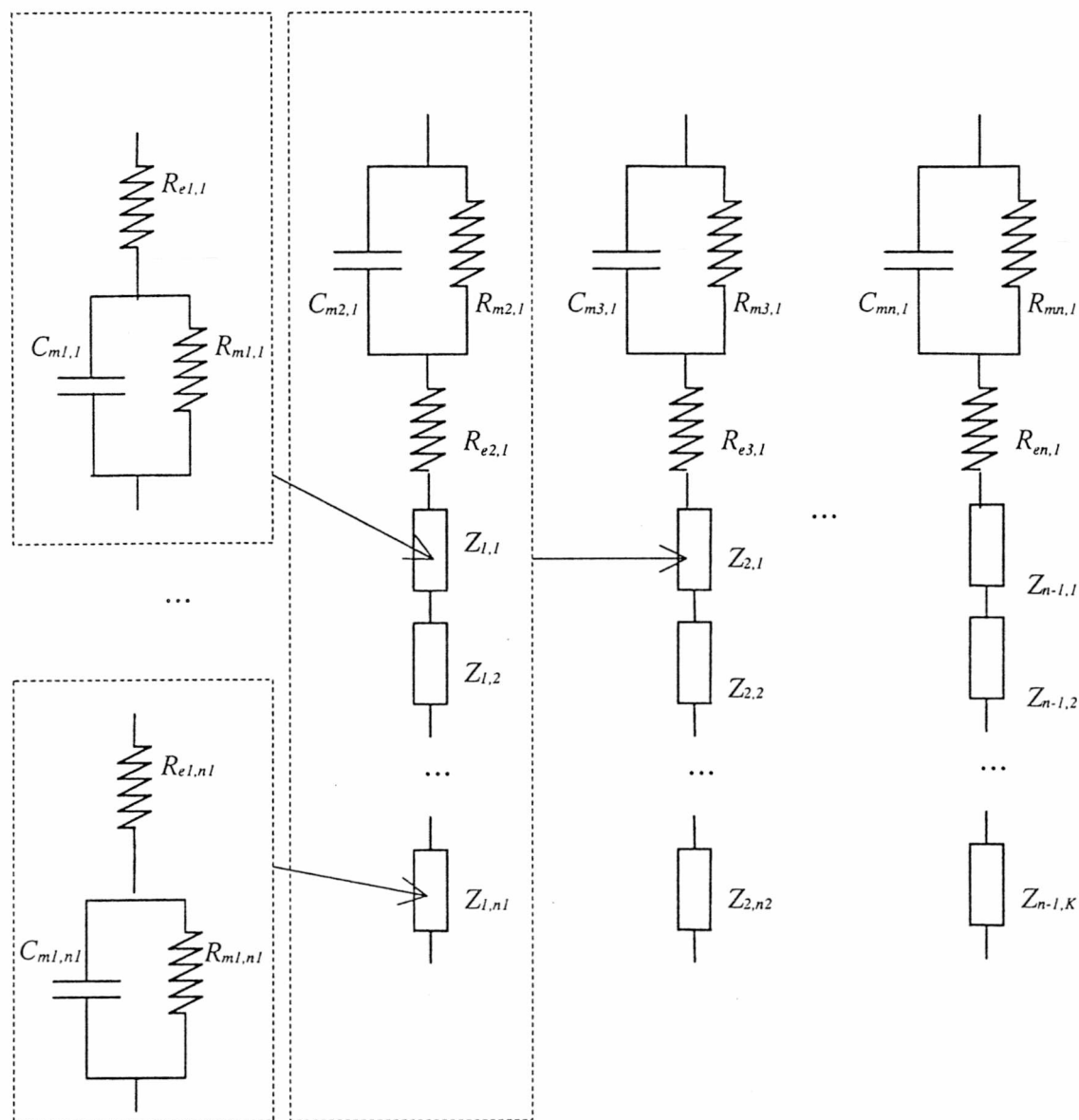
Na podstawie wyników doświadczalnych (3.1) oraz zależności (3.2) uzyskujemy empiryczną zależność impedancji od częstotliwości w obszarze dyspersji β :

$$Z'(\omega) \propto Z''(\omega) \propto \omega^{-s}. \quad (3.3)$$

Obliczając impedancję $Z(\omega)$ układu zaproponowanego w naszym modelu (Rysunek 3.3) można zaniedbać część pochodzącą od elektrolitu $R_e = \sum_{k=1}^N R_{e_k}$, która jest niezależna od częstotliwości i przy dużej liczbie obwodów elementarnych nie ma wpływu na obserwowaną dyspersję. (Wpływ rezystancji elektrolitu na charakterystykę dielektryczną tkanki zostanie dodatkowo zbadany poprzez symulacje komputerowe w rozdziale 3.3). Impedancja $Z(\omega)$ wyraża się wtedy wzorem:

$$Z(\omega) = \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{R_k} + i\omega C_k \right)^{-1} = \sum_{k=1}^N \frac{R_k}{1 + i\omega/b_k}, \quad (3.4)$$

gdzie N oznacza ilość poszczególnych obwodów R-C, R_k rezystancję, natomiast $b_k = (R_k C_k)^{-1}$ jest współczynnikiem relaksacji błony reprezentowanej przez k -ty obwód.



Rysunek 3.3: Kolejne kroki w konstrukcji hierarchicznego obwodu R-C.

Podójście probabilistyczne zakłada, że nie znamy wartości poszczególnych elementów i reprezentujemy je poprzez zmienne losowe, których realizacje odpowiadają rzeczywistej sytuacji fizycznej. Zmienna losowa R reprezentować będzie rezystancję pojedynczego obwodu elementarnego, natomiast zmienna losowa B - współczynnik relaksacji. Wówczas z prawa wielkich liczb, dla dużych N zależność (3.4) można zapisać jako:

$$Z(\omega) = N \cdot \left\langle R \frac{1}{1 + i\omega/B} \right\rangle. \quad (3.5)$$

Zatem dla bardzo dużej ilości N obwodów elementarnych impedancja $Z(\omega)$ może być przybliżona poprzez średnią, reprezentującą zachowanie całego układu.

Jeżeli założymy stochastyczną niezależność zmiennych losowych R i B , to zależność (3.5) przyjmuje postać:

$$Z(\omega) = N \cdot \langle R \rangle \cdot \left\langle \frac{1}{1 + i\omega/B} \right\rangle, \quad (3.6)$$

gdzie $\langle R \rangle$ jest wartością oczekiwaną zmiennej losowej R , niezależną od częstotliwości ω . Założenie o stochastycznej niezależności R i B nie pozostaje w sprzeczności z intuicją fizyczną zjawiska, gdyż wartość B zależy tylko od własności materiału, natomiast na wartość R duży wpływ ma geometria układu.

Impedancja $Z(\omega)$ dana wzorem (3.6) spełnia eksperymentalnie otrzymany warunek (3.3) wówczas, gdy:

$$\left\langle \frac{1}{1 + i\omega/B} \right\rangle \propto \omega^{-s} \quad \text{dla } \omega_b < \omega < \omega_g. \quad (3.7)$$

Wprowadźmy oznaczenie:

$$K(\omega) = \left\langle \frac{1}{1 + i\omega/B} \right\rangle = \int_0^\infty \frac{1}{1 + i\omega/b} f(b) db,$$

gdzie $f(b)$ jest gęstością rozkładu zmiennej losowej B . Korzystając ze wzoru:

$$\frac{1}{1 + i\omega/b} = \int_0^\infty e^{-i\omega t} b e^{-bt} dt,$$

otrzymujemy, że:

$$K(\omega) = \int_0^\infty k(t) e^{-i\omega t} dt,$$

dla

$$k(t) = \int_0^\infty f(b) b e^{-bt} db.$$

Z własności transformaty Fouriera [80] wnioskujemy, że dla $0 < \eta < 1$

$$K(\omega) \propto \omega^{-\eta} \text{ dla dużych } \omega, \quad (3.8)$$

wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$k(t) \propto t^{\eta-1} \text{ dla małych } t. \quad (3.9)$$

Natomiast z twierdzenia Taubera [81] dla transformaty Laplace'a wynika, że:

$$\left(\int_0^\infty g(b)e^{-bt}db \right) \propto t^\eta \text{ dla małych } t \quad (3.10)$$

wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$g(b) \propto b^{-\eta-1} \text{ dla dużych } b. \quad (3.11)$$

Z (3.8) - (3.11) wynika, że własność (3.7) (a tym samym (3.3)) jest równoważna następującej własności gęstości rozkładu współczynnika relaksacji B :

$$f(b) \propto b^{-s-1} \text{ dla dużych } b. \quad (3.12)$$

Warunek (3.12) jest równoważny własności $\Pr(B > b) \propto b^{-s}$ dla dużych b . Zmienna losowa B , reprezentująca współczynnik relaksacji błon modelowanych przez poszczególne obwody elementarne w przedstawionym opisie elektrycznym dyspersji β , ma zatem rozkład długoogonowy, czyli rozkład, który należy do obszaru przycięgania całkowicie asymetrycznego rozkładu stabilnego o indeksie stabilności s .

3.3 Symulacje komputerowe

Otrzymany w rozdziale 3.2 wynik teoretyczny formalnie dotyczy $\omega \rightarrow \infty$. Zbadamy teraz za pomocą symulacji komputerowych czy i dla jakich wartości parametrów rozkładu zmiennej losowej B poprawne jest zastosowanie go do opisu zjawiska dyspersji β występującego w skończonym przedziale częstotliwości.

W symulacjach podatność dielektryczną $\chi(\omega)$ w funkcji częstotliwości, w zależności od rozkładu zmiennej losowej B reprezentującej współczynnik relaksacji błon odpowiadających poszczególnym obwodom R-C oraz od ilości N obwodów w układzie, otrzymujemy na podstawie relacji:

$$\chi(\omega) = \left(i\omega \langle R \rangle \sum_{k=1}^N \frac{1}{1 + i\omega/b_k} \right)^{-1}, \quad (3.13)$$

gdzie $b_1, b_2, \dots, b_N$ są realizacjami zmiennej losowej B . Zależność (3.13) wyznaczona została na podstawie wzorów (3.2) i (3.4), przy czym przyjęto, że R_k jest stałe i równe $\langle R \rangle$. Obliczenia wykonano dla trzech typów rozkładów (jednego rozkładu stabilnego oraz dwóch rozkładów z obszaru jego przyciągania), dla dwóch wybranych indeksów stabilności s . Wyniki symulacji zostały porównane z rezultatem uzyskanym teoretycznie, zgodnie z którym w skali podwójnie logarytmicznej zależności obu części podatności dielektrycznej $\chi'(\omega)$ oraz $\chi''(\omega)$ od częstotliwości powinny mieć asymptotycznie charakter prostoliniowy o jednakowych współczynnikach nachylenia:

$$a' = a'' = s - 1, \quad (3.14)$$

gdzie a' oznacza nachylenie części rzeczywistej podatności dielektrycznej, natomiast a'' nachylenie części urojonej. Przeprowadzono również testy wiarygodności symulacji. Podobnie jak w przypadku symulacji dla obszaru dyspersji α (rozdział 2.4) wykorzystany został język programowania Matlab.

Pierwszym analizowanym rozkładem był rozkład Pareto (5.5) (rozdział 5.1) z parametrem $k = 1/s$, $0 < s < 1$, z obszaru przyciągania rozkładu stabilnego S_s . Realizacje zmiennej losowej B otrzymano w oparciu o zależność (2.23). Na Rysunkach 3.4 i 3.5 przedstawiona jest część rzeczywista i urojona podatności dielektrycznej całego układu elektrycznego, obliczona ze wzoru (3.13), dla $k = 2$ ($s = 0.5$), $w = 10^{-5}$, dla różnych ilości N obwodów elementarnych ($N = 10^3$ i $N = 10^5$). Linia pogrubiona na osi częstotliwości określa obszar występowania dyspersji β . Można zauważyć, że dla skończonej liczby elementów odpowiedź o charakterze potęgowym typu CPA jest obserwowana w ograniczonym zakresie częstotliwości. Otrzymane zależności mają w tym przedziale charakter prostoliniowy o nachyleniu zbliżonym do uzyskanego teoretycznie ($a'_{sym} = -0.49$, $a''_{sym} = -0.52$ w przypadku 10^5 elementów, podczas gdy wynik uzyskany teoretycznie wynosi $a' = a'' = -0.5$). Wraz ze wzrostem ilości elementów obszar ten rozciąga się w kierunku coraz wyższych częstotliwości.

Badanie zostało przeprowadzone również dla k odpowiadającego $s = 0.4$ i $w = 10^{-5}$, przy 10^5 elementów R-C (Rysunek 3.6). W tym przypadku przeprowadziliśmy też test wiarygodności symulacji. Obliczenia powtórzono 100 razy i wyznaczono wartości średnie nachylenia części rzeczywistej i urojonej podatności dielektrycznej $\chi(\omega)$, odchylenie standardowe od wartości średniej oraz wartości skrajne. Zgodnie z wynikiem teoretycznym nachylenia powinny wynosić $a' = a'' = -0.6000$. Uzyskana średnia z symulacji dla części rzeczywistej podatności dielektrycznej wyniosła $\bar{a}'_{sym} = -0.5989$, odchylenie standardowe $\sigma_{a'} = 0.0072$, a wartości skrajne $a'_{\min} = -0.6151$,

$a'_{\max} = -0.5817$. Dla części urojonej $\bar{a}''_{sym} = -0.6009$, odchylenie standardowe $\sigma_{a''} = 0.0043$, a wartości skrajne $a''_{\min} = -0.6130$, $a''_{\max} = -0.5817$. Otrzymane średnie są bardzo bliskie wynikowi teoretycznemu, niewielki jest także rozrzut wyników, o czym świadczy odchylenie standardowe.

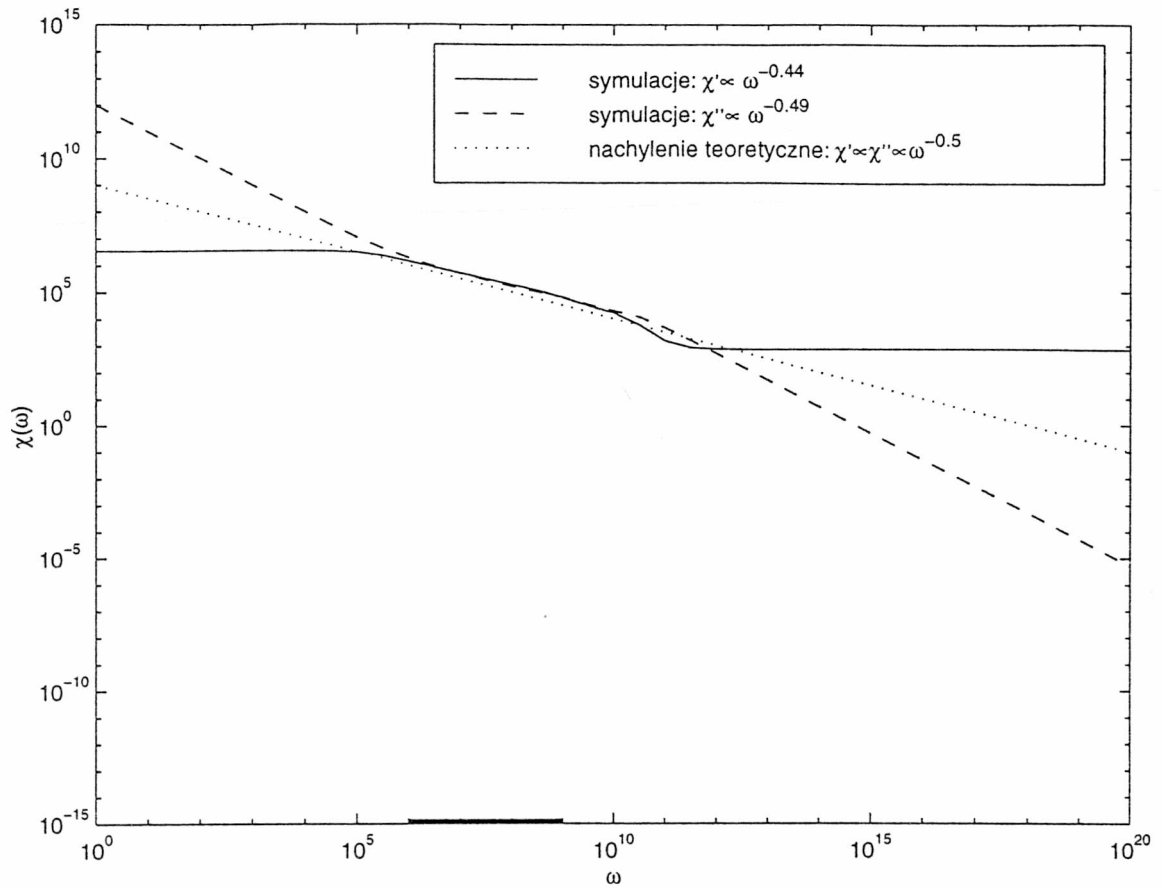
Podobne symulacje zostały przeprowadzone przy założeniu, że zmienna losowa B , reprezentująca współczynniki relaksacji poszczególnych błon, ma długoogonowy rozkład Burra (5.4) (rozdział 5.1), który należy do obszaru przyciągania rozkładu stabilnego. Realizacje zmiennej losowej B otrzymano w oparciu o zależność (2.24). Obliczenia przeprowadzone dla $p = 4$ i $k = 10$ (co daje $s = 0.4$), $w = 10^{-5}$ przedstawione są na Rysunku 3.7, natomiast dla $p = 5$ i $k = 10$ ($s = 0.5$), $w = 10^{-5}$ na Rysunku 3.8. Otrzymane wyniki nie różnią się jakościowo od tych, które uzyskano dla rozkładu Pareto. Dla rozkładu Burra o współczynnikach $p = 4$, $k = 10$ zgodnie z wynikiem teoretycznym nachylenia powinny wynosić $a' = a'' = -0.6000$. Uzyskana średnia z serii 100 symulacji dla części rzeczywistej podatności dielektrycznej wyniosła $\bar{a}'_{sym} = -0.5981$, odchylenie standardowe $\sigma_{a'} = 0.0071$, a wartości skrajne $a'_{\min} = -0.6130$, $a'_{\max} = -0.5821$. Dla części urojonej $\bar{a}''_{sym} = -0.6010$, odchylenie standardowe $\sigma_{a''} = 0.0037$, a wartości skrajne $a''_{\min} = -0.6095$, $a''_{\max} = -0.5898$. Otrzymane tu rezultaty są bardzo bliskie wynikom uzyskanym w poprzednim przypadku oraz wynikowi teoretycznemu.

Następnie przeprowadzone zostały symulacje, w których zmienna losowa reprezentująca czasy relaksacji obwodów R-C ma całkowicie asymetryczny rozkład stabilny (rozdział 5.1) z indeksem stabilności $\kappa = s$ dla $\kappa = 0.4$ i $\kappa = 0.5$ (odpowiednio Rysunek 3.9, 3.10). Realizację zmiennej losowej o rozkładzie stabilnym otrzymano zgodnie z zależnością (2.25), przy $w = 10^{-5}$. Podobnie jak w przypadku rozkładu Pareto i rozkładu Burra, dla $s = 0.4$ przeprowadzony został test wiarygodności symulacji. Zgodnie z wynikiem uzyskanym teoretycznie nachylenia powinny wynosić $a' = a'' = -0.6000$. Uzyskana średnia z serii 100 symulacji dla części rzeczywistej podatności dielektrycznej wyniosła $\bar{a}'_{sym} = -0.6001$, odchylenie standardowe $\sigma_{a'} = 0.0070$, a wartości skrajne $a'_{\min} = -0.6174$, $a'_{\max} = -0.5812$. Dla części urojonej $\bar{a}''_{sym} = -0.6069$, odchylenie standardowe $\sigma_{a''} = 0.0045$, a wartości skrajne $a''_{\min} = -0.6173$, $a''_{\max} = -0.5937$. Także tutaj otrzymane średnie są bardzo bliskie wynikowi teoretycznemu, oraz przedstawionym wcześniej результатам otrzymanym dla rozkładów z przedziałów przyciągania rozważanych tu rozkładów stabilnych.

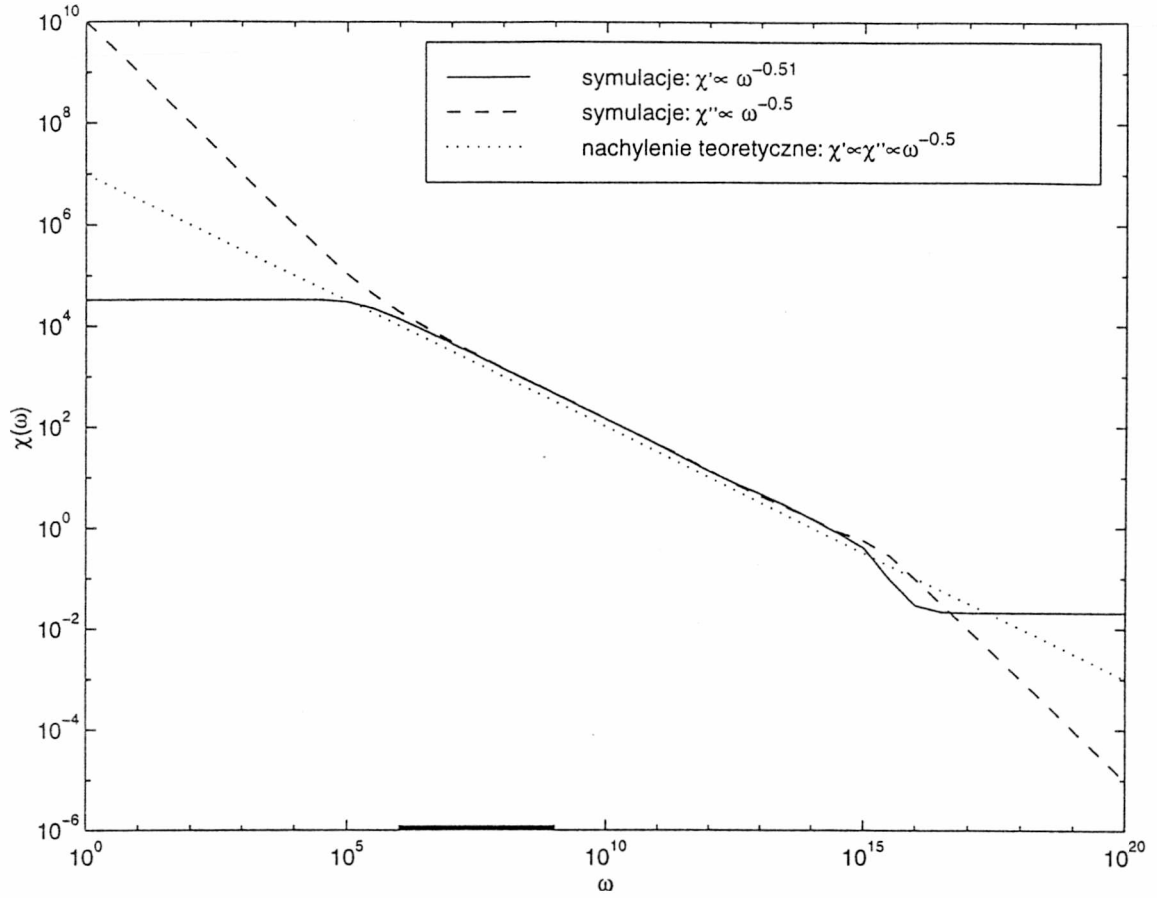
Na koniec zbadano wpływ szeregowo połączonej rezystancji elektrolitu na kształt charakterystyki $\chi(\omega)$ (Rysunek 3.11). Badanie potwierdziło, że przy dużej liczbie

elementów zmiana charakterystyki jest niewielka i nie ma wpływu na prostoliniowy obszar dyspersyjny.

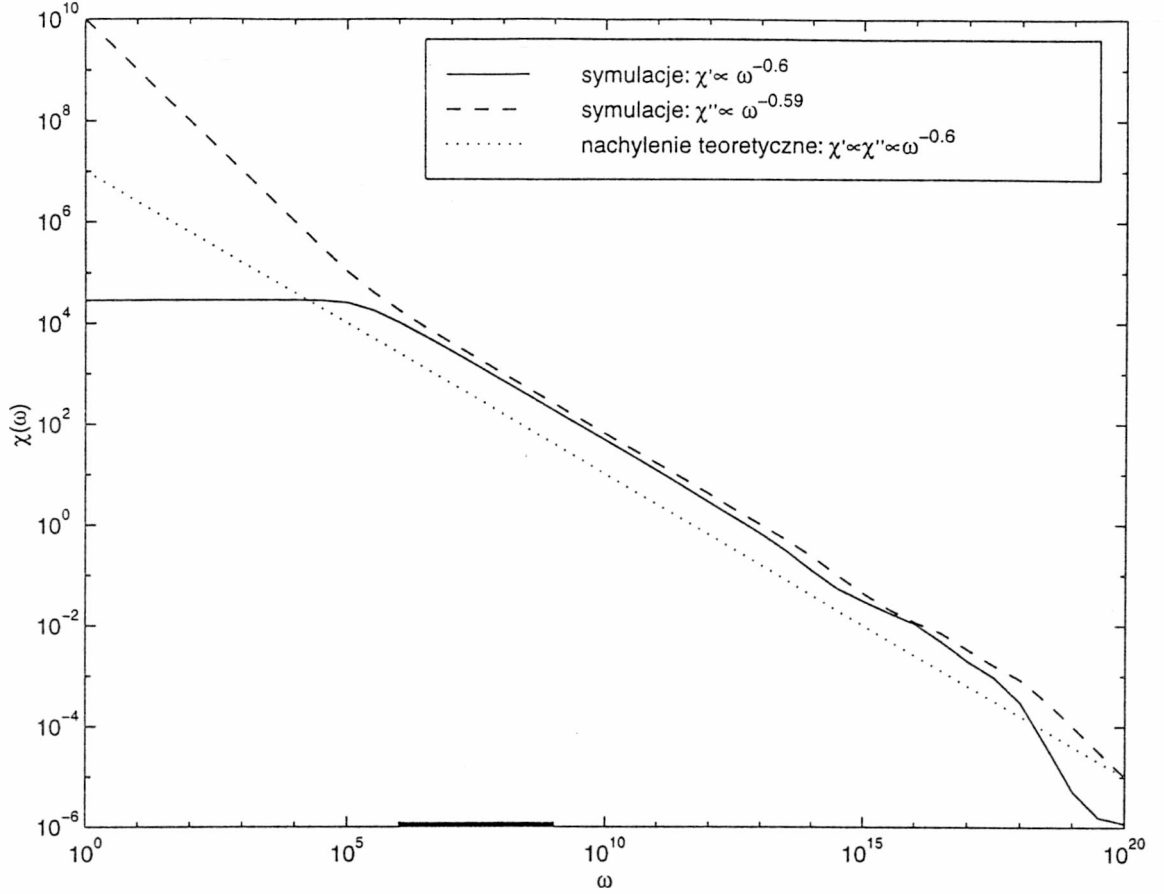
Można zauważyć, że uzyskana w wyniku symulacji część rzeczywista $\chi'(\omega)$ i urojona $\chi''(\omega)$ podatności dielektrycznej $\chi(\omega)$ zależą od częstotliwości ω w sposób potęgowy jedynie w ograniczonym przedziale częstotliwości. Ograniczenie tego przedziału od strony niskich częstotliwości jest w pełni uzasadnione przez wyprowadzenie teoretyczne, które jest poprawne tylko dla odpowiednio dużych wartości częstotliwości ω . Z rozważań teoretycznych nie wynika natomiast ograniczenie przedziału CPA od strony wysokich częstotliwości. Wyjaśnienia tego ograniczenia należy szukać w różnicy między dwoma przedstawionymi tu opisami tego samego zjawiska: probabilistycznym, przedstawionym w (3.5) i elektrycznym (3.4), zastosowanym w symulacjach. Mamy tu do czynienia z sytuacją odmienną niż w przedziale dyspersji α , gdzie symulacje oparte były dokładnie na przedstawionym opisie probabilistycznym. Tutaj podejście probabilistyczne miało na celu jedynie uzyskanie informacji o postaci rozkładu zmiennej losowej B , reprezentującej współczynnik relaksacji błon biologicznych. (Przypomnijmy, że z rozważań probabilistycznych wynikało, że powinno się brać pod uwagę jedynie rozkłady z obszaru przyciągania całkowicie asymetrycznego rozkładu stabilnego z indeksem stabilności równym wykładnikowi s). Ponadto, w opisie probabilistycznym przyjęto nieskończoną ilość N obwodów elementarnych. Umożliwiło to przedstawienie impedancji $Z(\omega)$ całego układu, jako średniej z impedancji poszczególnych obwodów elementarnych, wzór (3.5). Symulacje komputerowe prowadzimy natomiast w oparciu o model elektryczny opisany wzorem (3.13) dla skończonej liczby obwodów elementarnych, bez wprowadzonej w rozważaniach probabilistycznych operacji uśredniania, przy czym rozkład zmiennej losowej B wybrany został zgodnie z wynikiem rozważań teoretycznych. Wydaje się więc, że otrzymane w symulacjach ograniczenie obszaru typu CPA od strony wysokich częstotliwości wynika ze skończonej ilości N obwodów elementarnych. Tezę tę potwierdza rozciąganie się analizowanego obszaru w kierunku coraz wyższych częstotliwości wraz ze wzrostem liczby N obwodów (Rysunki 3.4 oraz 3.5). Dodajmy, że obustronne ograniczenie obszaru częstotliwości, w którym zgodnie z przedstawionymi rozważaniami może wystąpić odpowiedź CPA typu potęgowego nie pozostaje w sprzeczności z wynikami badań eksperymentalnych, gdyż dyspersja β również jest obserwowana w skończonym zakresie częstotliwości.



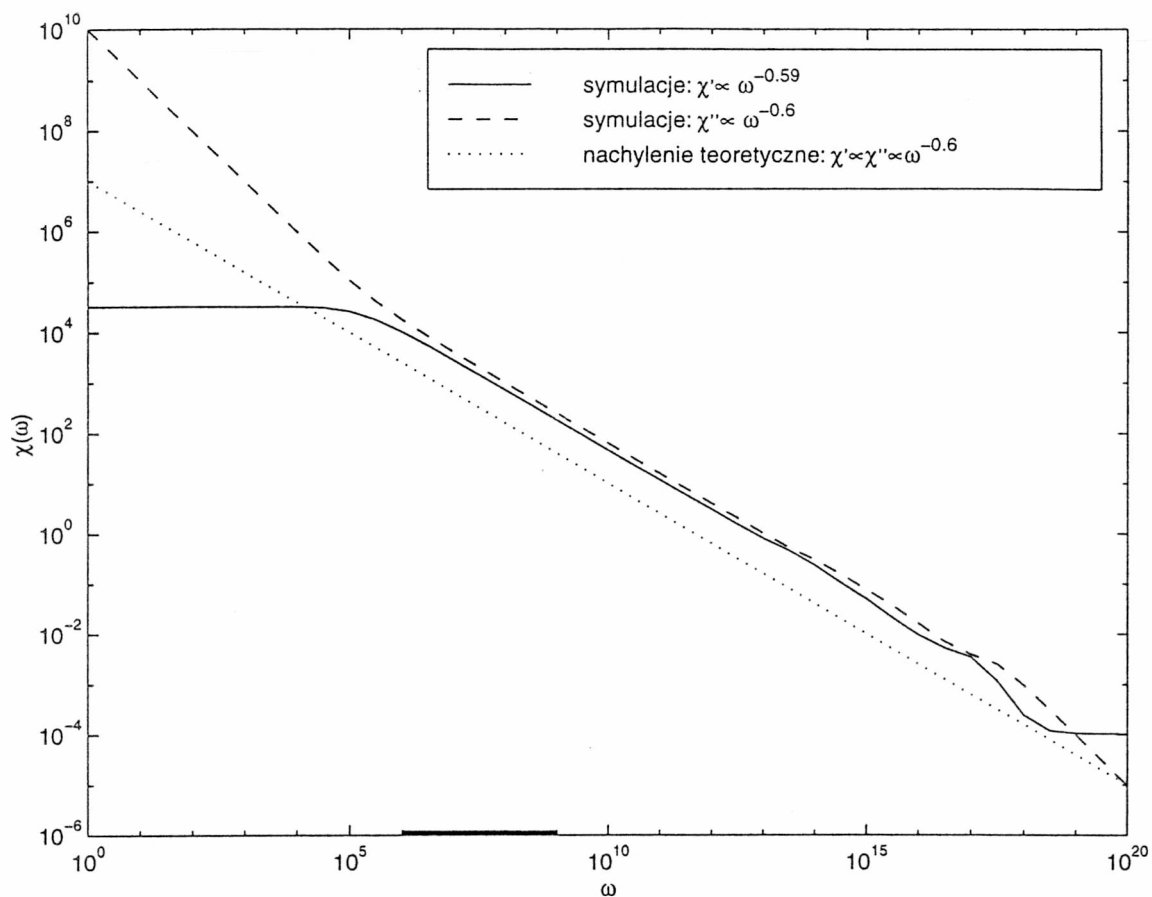
Rysunek 3.4: Zależność podatności dielektrycznej $\chi(\omega)$ układu od częstotliwości, gdy zmienna losowa reprezentująca czasy relaksacji poszczególnych obwodów R-C przyjmuje rozkład Pareto z parametrami $s = 0.5$, $w = 10^{-5}$, dla 10^3 obwodów elementarnych.



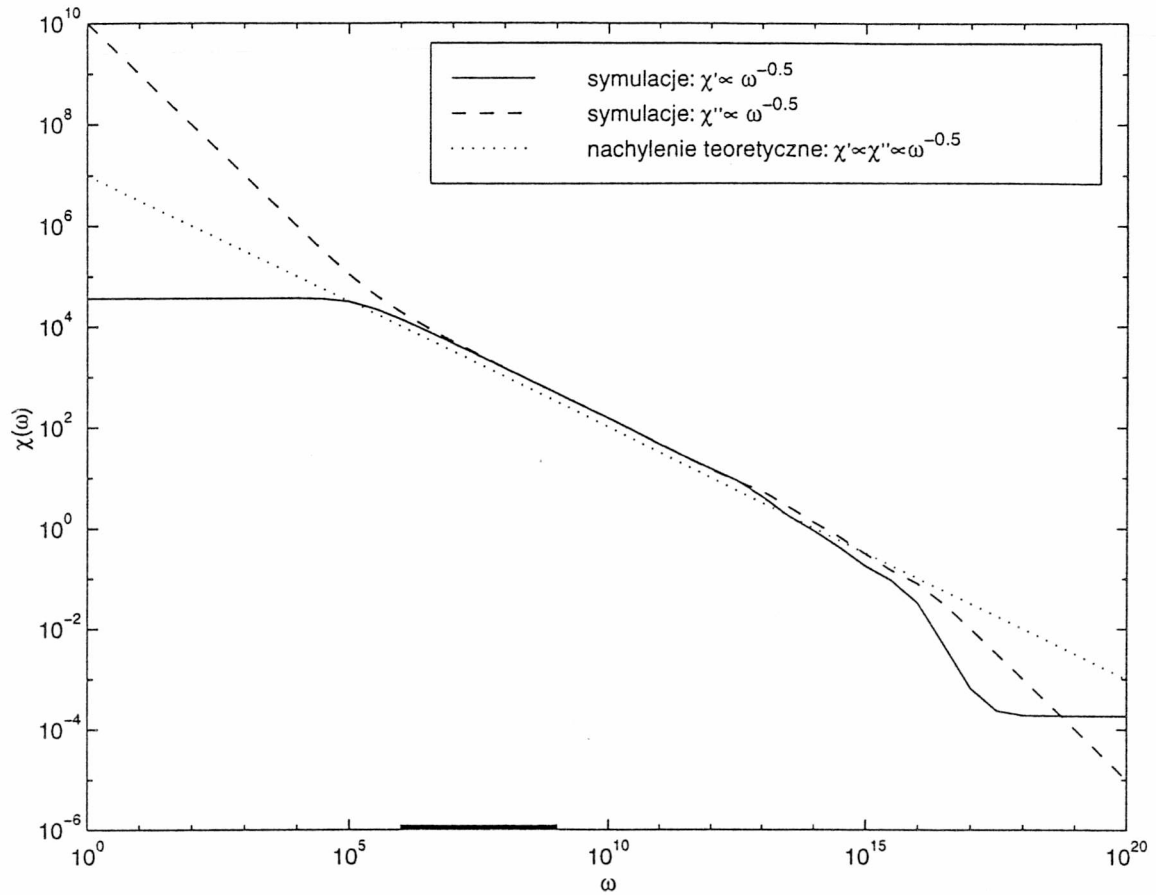
Rysunek 3.5: Zależność podatności dielektrycznej $\chi(\omega)$ układu od częstotliwości, gdy zmienna losowa reprezentująca czasy relaksacji poszczególnych obwodów R-C przyjmuje rozkład Pareto z parametrami $s = 0.5$, $w = 10^{-5}$, dla 10^5 obwodów elementarnych.



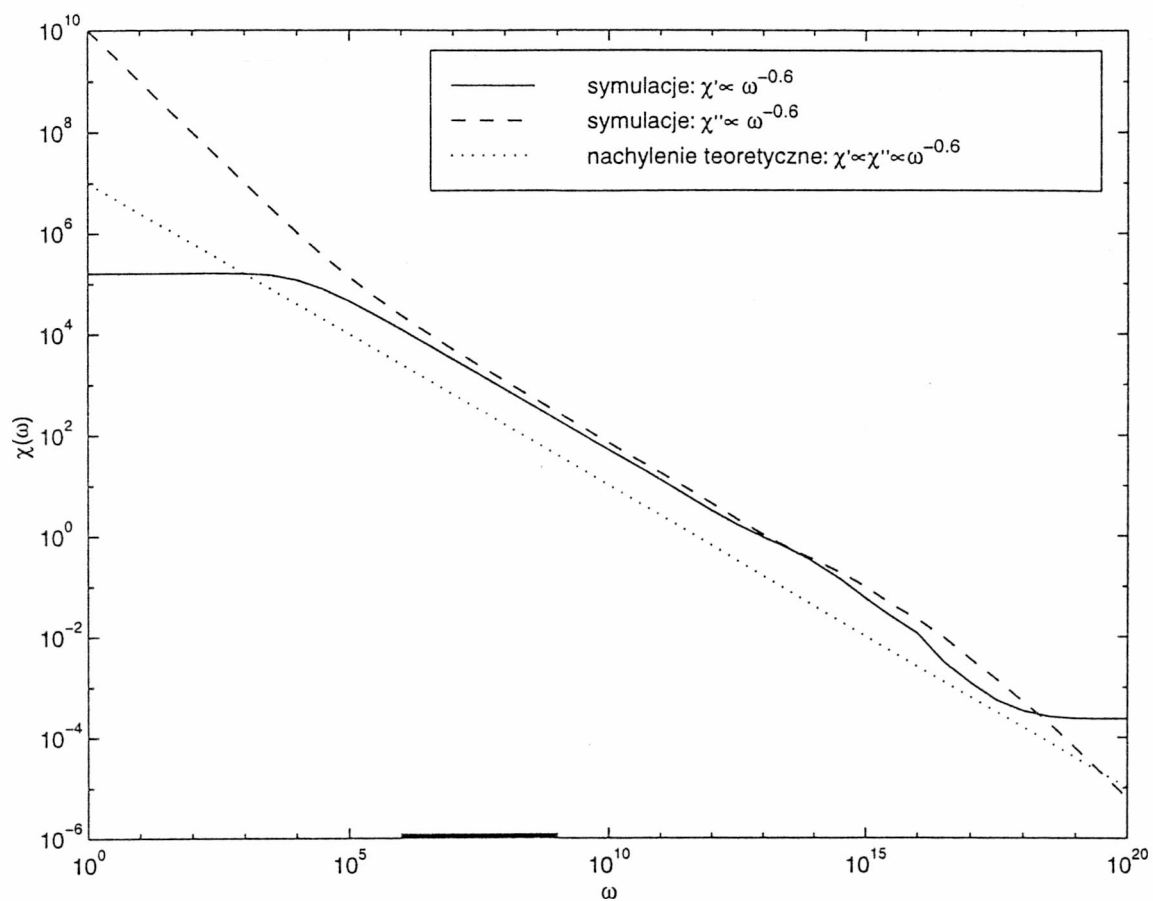
Rysunek 3.6: Zależność podatności dielektrycznej $\chi(\omega)$ układu od częstotliwości, gdy zmienna losowa reprezentująca czasy relaksacji poszczególnych obwodów R-C przyjmuje rozkład Pareto z parametrami $s = 0.4$, $w = 10^{-5}$, dla 10^5 obwodów elementarnych.



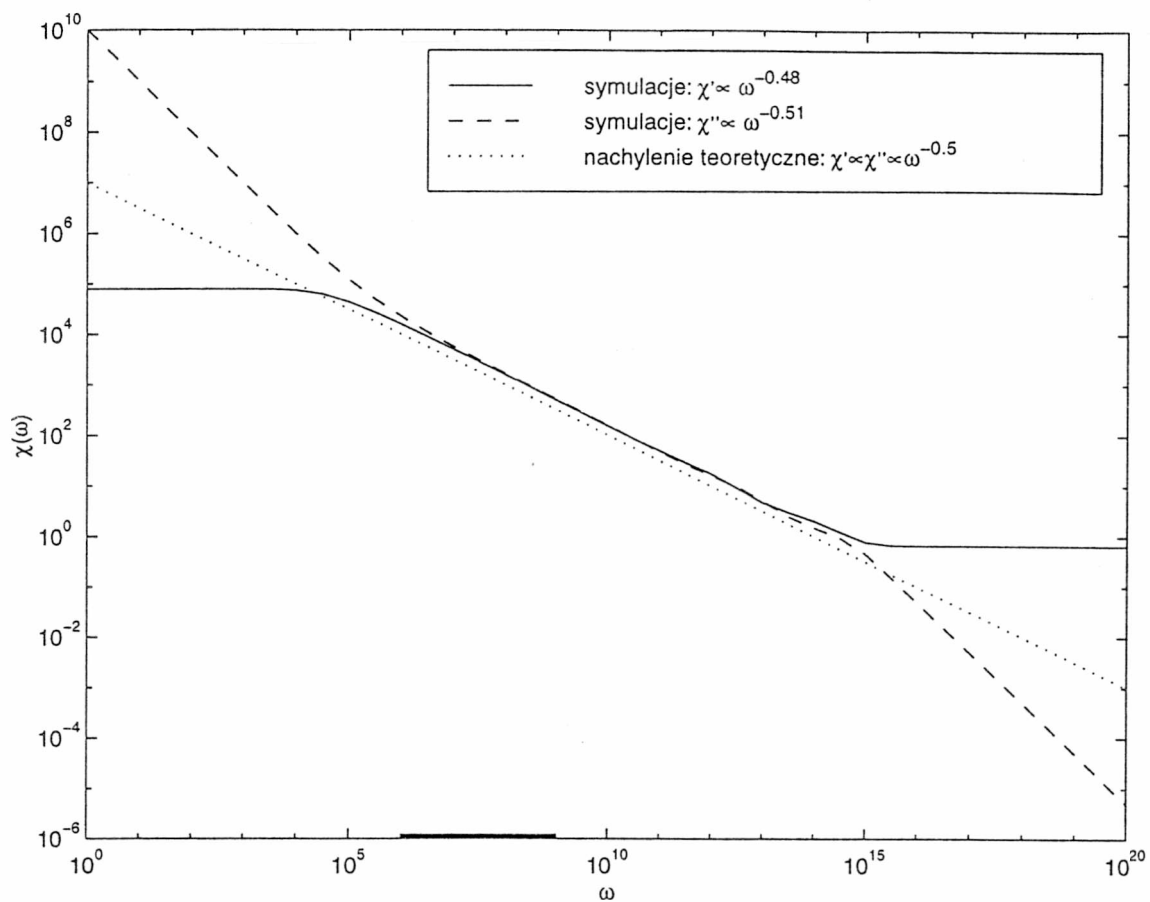
Rysunek 3.7: Zależność podatności dielektrycznej $\chi(\omega)$ układu od częstotliwości, gdy zmienna losowa reprezentująca czasy relaksacji poszczególnych obwodów R-C przyjmuje rozkład Burra z parametrami $p = 4$ i $k = 10$, $w = 10^{-5}$, dla 10^5 obwodów elementarnych.



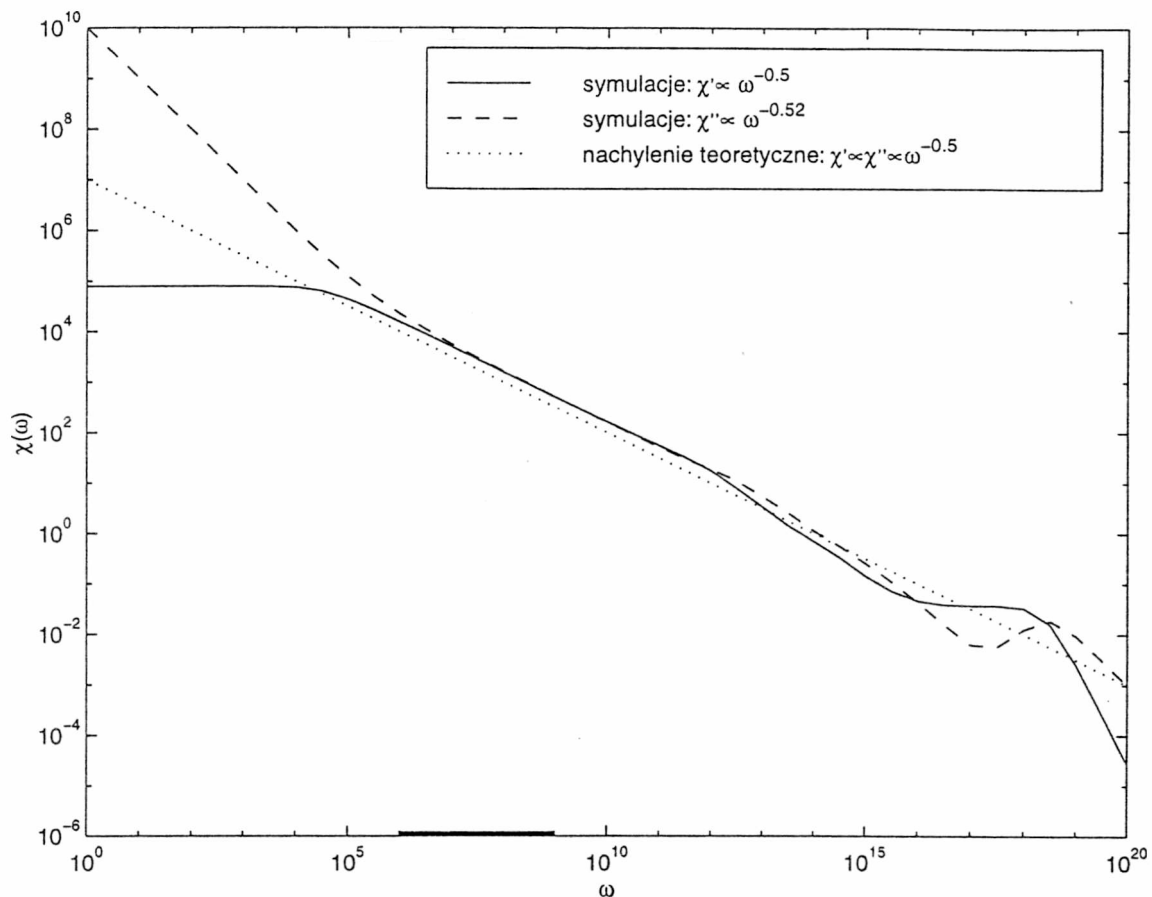
Rysunek 3.8: Zależność podatności dielektrycznej $\chi(\omega)$ układu od częstotliwości, gdy zmienna losowa reprezentująca czasy relaksacji poszczególnych obwodów R-C przyjmuje rozkład Burra z parametrami $p = 5$ i $k = 10$, $w = 10^{-5}$, dla 10^5 obwodów elementarnych.



Rysunek 3.9: Zależność podatności dielektrycznej $\chi(\omega)$ układu od częstotliwości, gdy zmienna losowa reprezentująca czasy relaksacji poszczególnych obwodów R-C przyjmuje rozkład stabilny z parametrami $s = 0.4$, $w = 10^{-5}$, dla 10^5 obwodów elementarnych.



Rysunek 3.10: Zależność podatności dielektrycznej $\chi(\omega)$ układu od częstotliwości, gdy zmienna losowa reprezentująca czasy relaksacji poszczególnych obwodów R-C przyjmuje rozkład stabilny z parametrami $s = 0.5$, $w = 10^{-5}$, dla 10^5 obwodów elementarnych.



Rysunek 3.11: Zależność podatności dielektrycznej $\chi(\omega)$ układu od częstotliwości, gdy zmienna losowa reprezentująca czasy relaksacji poszczególnych obwodów R-C przyjmuje rozkład stabilny z parametrami $s = 0.5$, $w = 10^{-5}$, z uwzględnieniem rezystancji elektrolitu reprezentowanej jako dodatkowa rezystancja szeregową R_e obwodu elementarnego.

3.4 Wnioski

W rozdziale 3 rozważane było zjawisko dyspersji β w charakterystyce dielektrycznej tkanki. Jako główne źródło tej dyspersji wskazano niejednorodną budowę tkanki, w której występuje wiele błon biologicznych o różnych stałych relaksacji. Zjawisko to zostało opisane w języku obwodów elektrycznych, założono przy tym, że elementy obwodu są wielkościami o charakterze losowym. Zaproponowano więc odejście od modeli deterministycznych, w których poszczególne elementy mają ustalone wartości, skalujące się w sposób deterministyczny. Pokazaliśmy, że skalujące własności rozkładu współczynnika relaksacji poszczególnych błon są warunkiem koniecznym i wystarczającym na wystąpienie odpowiedzi potęgowej typu CPA w przedziale β charakterystyki dielektrycznej tkanki. Wykładnik s tej charakterystyki jest równy parametrowi rozkładu współczynnika relaksacji poszczególnych błon.

Przeprowadzono też symulacje komputerowe, które badały zależność podatności dielektrycznej $\chi(\omega)$ tkanki w funkcji częstotliwości, dla przedziału częstotliwości odpowiadającego dyspersji β . Wykazały one, że przy odpowiednim doborze rozkładu współczynnika relaksacji B błon uzyskana charakterystyka jest bardzo bliska charakterystyce obserwowanej doświadczalnie.

Rozdział 4

Podsumowanie

Celem przedstawionych w pracy badań była analiza charakterystyki dielektrycznej tkanki i propozycja opisu zjawisk odpowiedzialnych za jej przebieg w przedziale dyspersji α i dyspersji β . W rozważaniach przyjęty został model elektrolitowo-membranowy tkanki, co pozwoliło skoncentrować się na jej najistotniejszych z punktu widzenia odpowiedzi dielektrycznej elementach. W pracy zastosowano podejście probabilistyczne, a wykorzystany aparat matematyczny opierał się głównie na twierdzeniach granicznych dla zmiennych losowych o rozkładach stabilnych i rozkładach z ich obszarów przyciągania oraz na zależnościach między asymptotyką funkcji i ich transformatami Laplace'a lub Fouriera (twierdzenia tauberowskie).

W wyniku przeprowadzonej analizy ustalono, że zjawiskiem dominującym w przedziale dyspersji α może być hoppingowy transport jonów wzdłuż błon biologicznych pomiędzy stanami zlokalizowanymi. Za charakter tego transportu odpowiedzialne są wiązania wodorowe tworzące się na styku błon biologicznych z elektrolitem lub zewnętrzne fragmenty białek błonowych. Dyspersja α jest przypadkiem szczególnym bardziej ogólnego zjawiska, znanego jako LFD ("Low Frequency Dispersion"), obserwowanego w materiałach o budowie klasterowej, w których występuje przewodnictwo hoppingowe. Przyjmuje się, że za charakterystykę dielektryczną w przedziale wysokich częstotliwości dyspersji α odpowiada transport jonów wewnątrz klasterów, natomiast w przedziale niskich częstotliwości dyspersji α - migracja jonów w medium międzyklasterowym. Zaproponowany opis probabilistyczny tego zjawiska wykorzystywał pewien model błędzenia losowego z czasem ciągłym. Różny charakter przestrzenny skoków cząstek w dwóch przedziałach dyspersji α został wyrażony poprzez odpowiedni dobór rozkładów zmiennych losowych reprezentujących długości

skoków. Korzystając z twierdzeń granicznych dla rozkładów stabilnych dowiedzione zostało, że rozszerzenie tradycyjnych modeli błędzenia losowego z czasem ciągłym tak, aby uwzględniały całą klasę rozkładów stabilnych i rozkładów z ich obszarów przyciągania (a nie tylko rozkład normalny) prowadzi do uzyskania opisu dyspersji typu LFD.

Z innego typu zjawiskiem spotkaliśmy się w przedziale dyspersji β . Tutaj charakterystyka dielektryczna tkanki wynika z obecności wielu faz dielektrycznych (błony biologiczne), których parametry dielektryczne mogą nie mieć identycznych wartości. Efekt ten może być opisywany za pomocą obwodów elektrycznych R-C. W oparciu o model elektrolitowo-membranowy tkanki oraz układ elektryczny Philipsona skonstruowany został obwód, który reprezentuje niejednorodną budowę tkanki. Założono także losowość poszczególnych elementów R, C wchodzących w skład tego układu. Przedstawiona analiza teoretyczna umożliwiła wyznaczenie rozkładu zmiennej losowej, która opisuje współczynnik relaksacji poszczególnych błon. Zaproponowane przez nas ujęcie probabilistyczne jest alternatywą dla znanych dotychczas deterministycznych modeli fraktalnych.

Dla obu rozważanych przedziałów charakterystyki dielektrycznej tkanki: dyspersji α i dyspersji β przeprowadzone zostały także symulacje komputerowe. Pozwoliły one znaleźć dokładne parametry wyznaczonych teoretycznie rozkładów zmiennych losowych tak, aby wyniki asymptotyczne stosowały się w skończonych przedziałach częstotliwości. W obu przypadkach symulacje potwierdziły, że można zastosować wyniki rozważań teoretycznych do opisu dyspersji α i dyspersji β .

Rezultaty pracy umożliwiły ścisły opis mechanizmów, które odpowiadają za przebieg charakterystyki dielektrycznej tkanki w przedziale dyspersji α i dyspersji β . Przedstawiona interpretacja może stanowić wstęp do dalszych badań nad aspektem medycznym omawianych zjawisk. W kontekście naszych wyników można analizować zarówno wpływ zmiennego pola elektrycznego na organizmy żywe, jak i rozważyć wynikające stąd możliwości diagnostyczne lub terapeutyczne.

Rozdział 5

Dodatek

5.1 Rozkłady stabilne

Fizyka klasyczna wywodząca się z praw Newtona opisywała prawa natury w sposób deterministyczny. Podejście probabilistyczne do badanych zjawisk zaczęto stosować znacznie później w postaci metod fizyki statystycznej. Przy analizie układów złożonych z bardzo wielu elementów i o dużej liczbie stopni swobody fizyka statystyczna celowo abstrahuje od szczegółów dotyczących mikroskopowych składowych układu. W zamian za to do rozważań wprowadza element przypadkowości, który obcy jest rozważaniom fizyki klasycznej. Przy dużej ilości elementów układu istotną rolę zaczynają odgrywać prawa statystyczne, dzięki czemu ogólne prawidłowości dotyczące układu makroskopowego można wyprowadzić bez znajomości stanu poszczególnych elementów.

Pierwszymi rozkładami probabilistycznymi, które służyły do opisywania zjawisk fizycznych, były rozkłady o skończonej wartości średniej i wariancji. Najbardziej popularnym przykładem jest tu rozkład normalny, który można otrzymać między innymi jako przypadek graniczny rozkładu dwumianowego związanego z ciągiem doświadczeń Bernoulliego. Z czasem uznano, że można budować modele również w oparciu o rozkłady, których wariancja a nawet średnia mogą nie mieć skończonej wartości. Przykładem jest tu wykorzystanie rozkładów stabilnych i rozkładów z ich obszarów przyciągania.

Rozkłady stabilne zostały zdefiniowane w latach trzydziestych XX wieku przez francuskiego matematyka Paula Lévy'ego jako rozkłady, które podobnie jak rozkład normalny, mają tę cechę, że odpowiednio unormowana suma niezależnych zmiennych

losowych $X_1, X_2, \dots, X_n$ o tym rozkładzie ma dokładnie ten sam rozkład, co można zapisać w postaci warunku:

$$\sum_{i=1}^n X_i \stackrel{d}{=} a_n X_1 + d_n,$$

gdzie $\stackrel{d}{=}$ oznacza równość rozkładu, $a_n > 0$ i d_n są pewnymi stałymi. Wiadomo, że wówczas postać stałych a_n nie jest dowolna, tylko $a_n = n^{1/\kappa}$ dla pewnego κ , $0 < \kappa \leq 2$. Parametr κ nazywamy indeksem stabilności. Od jego wartości zależą w sposób istotny własności rozkładu stabilnego. Jeśli $\kappa = 2$ to rozkład jest normalny i ma wszystkie momenty skończone. Natomiast dla $0 < \kappa < 2$ otrzymujemy rozkłady Lévy-stabilne inne niż normalny i wtedy skończone są tylko momenty rzędu mniejszego niż κ . W szczególności, wariancja jest wtedy zawsze nieskończona, a dla $\kappa \leq 1$ nie istnieje również wartość oczekiwana rozkładu. Rozkłady stabilne są rozkładami ciągłymi.

Niestety, oprócz kilku wyjątków tj. rozkładu normalnego, rozkładu Cauchy'ego (o indeksie stabilności $\kappa = 1$) i rozkładu Lévy'ego (o indeksie stabilności $\kappa = 0.5$), nie można przedstawić ich gęstości za pomocą funkcji elementarnych. Dlatego też zazwyczaj rozkład stabilny określa się podając (zamiast gęstości $f(x)$) jego funkcję charakterystyczną:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) dx \\ &= \begin{cases} \exp \left[-\sigma^\kappa |t|^\kappa \left(1 - i\xi \operatorname{sgn}(t) \operatorname{tg} \frac{\kappa\pi}{2} \right) + ict \right] & \text{dla } 0 < \kappa \leq 2, \kappa \neq 1, \\ \exp \left[-\sigma |t| \left(1 + i\xi \frac{2}{\pi} \operatorname{sgn}(t) \log |t| \right) + ict \right] & \text{dla } \kappa = 1, \end{cases} \end{aligned} \quad (5.1)$$

Występujący we wzorze (5.1) parametr ξ , $-1 \leq \xi \leq 1$, charakteryzuje skośność rozkładu, natomiast parametry $c \in R$ i $\sigma > 0$ odpowiadają odpowiednio za przesunięcie i skalę.

Wśród rozkładów stabilnych wyróżniamy rozkłady symetryczne, asymetryczne i całkowicie asymetryczne. O symetrii rozkładu świadczy występujący we wzorze (5.1) współczynnik ξ . Dla rozkładów symetrycznych $\xi = 0$, i wtedy wzór (5.1) przyjmuje postać $\varphi(t) = e^{-(\sigma|t|)^\kappa}$, $0 < \kappa \leq 2$, dla rozkładów asymetrycznych $0 < |\xi| < 1$. Rozkłady całkowicie asymetryczne, tzn. skupione na pewnej półprostej, odpowiadają $|\xi| = 1$ przy takim ograniczeniu indeksu stabilności κ , że $0 < \kappa < 1$. W przypadku rozkładów stabilnych, które stosujemy w niniejszej pracy, nośnikiem jest półprosta $(0, \infty)$, co odpowiada $0 < \kappa < 1$ i $c = 0$. Zmienne losowe o takich rozkładach przyjmują jedynie wartości nieujemne. Wzór (5.1) ma wtedy postać skomplikowanej

funkcji zespolonej, natomiast transformata Laplace'a takiego rozkładu to funkcja wykładnicza:

$$\phi(t) = \int_0^\infty e^{-tx} f(x) dx = e^{-(\sigma t)^\kappa},$$

przy czym $0 < \kappa < 1$.

Popularność rozkładu normalnego wynika przede wszystkim z faktu, że na podstawie Centralnego Twierdzenia Granicznego jest on asymptotycznym rozkładem sumy niezależnych zmiennych losowych o dowolnym, jednakowym rozkładzie, jeśli tylko rozkład ten ma skończoną wariancję. Okazuje się, że innymi asymptotycznymi rozkładami takich sum (gdy wariancja jest nieskończona) mogą być tylko rozkłady stabilne. Mówiąc dokładniej, jeżeli dla ciągu niezależnych zmiennych losowych $Y_1, Y_2, \dots$ o jednakowym rozkładzie $F(y)$ możemy dobrać stałe $b_n > 0$, d_n tak, że

$$\frac{\sum_{i=1}^n Y_i - d_n}{b_n} \rightarrow X \text{ wg rozkładu,} \quad (5.2)$$

dla pewnej, niezdegenerowanej zmiennej losowej X , to wtedy X ma rozkład stabilny z pewnym parametrem κ . Mówimy wtedy, że rozkład $F(y)$ należy do obszaru przyciągania rozkładu zmiennej losowej X . Ponieważ rozkład graniczny w (5.2) nie może być innym rozkładem (niezdegenerowanym) niż stabilny, więc tylko rozkłady stabilne, z rozkładem normalnym jako szczególnym przypadkiem, mają swoje obszary przyciągania. Ze względu na to rodzina rozkładów stabilnych uważana jest za naturalne rozszerzenie rozkładu gaussowskiego.

Wiadomo, że jeśli rozkład $F(y)$ ma skończoną wariancję to, niezależnie od pozostałych cech tego rozkładu, granica X w (5.2) ma rozkład normalny tzn. stabilny z $\kappa = 2$. Jest to treścią Centralnego Twierdzenia Granicznego. Warunki na rozkład $F(y)$, przy których otrzymujemy inne rozkłady stabilne (z $\kappa \neq 2$) jako rozkłady graniczne w (5.2), są dobrze znane i zbadane (np. [81] - [83]). Wiadomo, między innymi, że jeśli rozkład $F(y)$ nieujemnych zmiennych losowych w ciągu $Y_1, Y_2, \dots$ spełnia warunek

$$\text{dla pewnego } \kappa \ (0 < \kappa < 1), \ 1 - F(y) = \Pr(Y_i > y) \propto y^{-\kappa} \text{ dla dużych } y, \quad (5.3)$$

to granica X , otrzymana w (5.1) dla $b_n = n^{1/\kappa}$ i $d_n = 0$, ma całkowicie asymetryczny rozkład stabilny skupiony na półprostej $(0, \infty)$ z parametrem stabilności równym κ . Krótko mówiąc, rozkłady spełniające warunek (5.3), nazywane długoogonowymi, należą do obszaru przyciągania całkowicie asymetrycznego rozkładu stabilnego o indeksie stabilności κ . Ogon takich rozkładów ma własności skalujące, tzn.:

$$\text{dla dowolnego } a > 0, \ \Pr(Y_i > ay) \propto a^{-\kappa} \Pr(Y_i > y) \text{ dla dużych } y.$$

Cechą szczególną rozkładów długoogonowych jest ich zdolność do opisywania wielkości charakteryzujących się dużymi fluktuacjami. Jest to jedną z przyczyn dla których rozkłady te odgrywają dużą rolę w modelowaniu zjawisk z różnych dziedzin takich jak: fizyka, biologia, chemia, astronomia, ekonomia [53]-[76], [81]-[85]. Są one także bardzo przydatne do opisu układu o własnościach fraktalnych [85].

Najbardziej znanymi przykładami rozkładów długoogonowych są:

1. Rozkład Burra [86] o dystrybuancie zdefiniowanej jako:

$$F(y) = 1 - \left(1 + \left(\frac{y}{w}\right)^p\right)^{-\frac{1}{k}} \quad \text{dla } y > 0 \quad (5.4)$$

dla parametrów $p, k, w > 0$, o ile $0 < \frac{p}{k} < 1$. Funkcja $F(y)$ spełnia wtedy warunek (5.3) z $\kappa = \frac{p}{k}$. Parametr w to parametr skali. Gęstość $f(y)$ tego rozkładu

$$f(y) = \frac{1}{k} \left(1 + \left(\frac{y}{w}\right)^p\right)^{-\frac{1}{k}-1} \left(\frac{p}{w}\right) \left(\frac{y}{w}\right)^{p-1}, \quad y > 0.$$

przedstawiono na Rysunku 5.1 dla $p = 5$, $k = 10$ i $w = 1$.

Ogólnie rozkład Burra należy do obszaru przyciągania rozkładu stabilnego innego niż normalny wtedy i tylko wtedy, gdy $0 < \frac{p}{k} \leq 2$. Natomiast gdy $\frac{p}{k} > 2$, to rozkład ten ma skończoną wariancję i należy do obszaru przyciągania rozkładu normalnego.

2. Rozkład Pareto [81], który jest szczególnym przypadkiem rozkładu Burra z $p = 1$. Dystrybuanta tego rozkładu ma więc postać

$$F(y) = 1 - \left(1 + \frac{y}{w}\right)^{-\frac{1}{k}}, \quad y > 0, \quad (5.5)$$

dla parametru $k > 0$ i parametru skali $w > 0$. Gęstość tego rozkładu

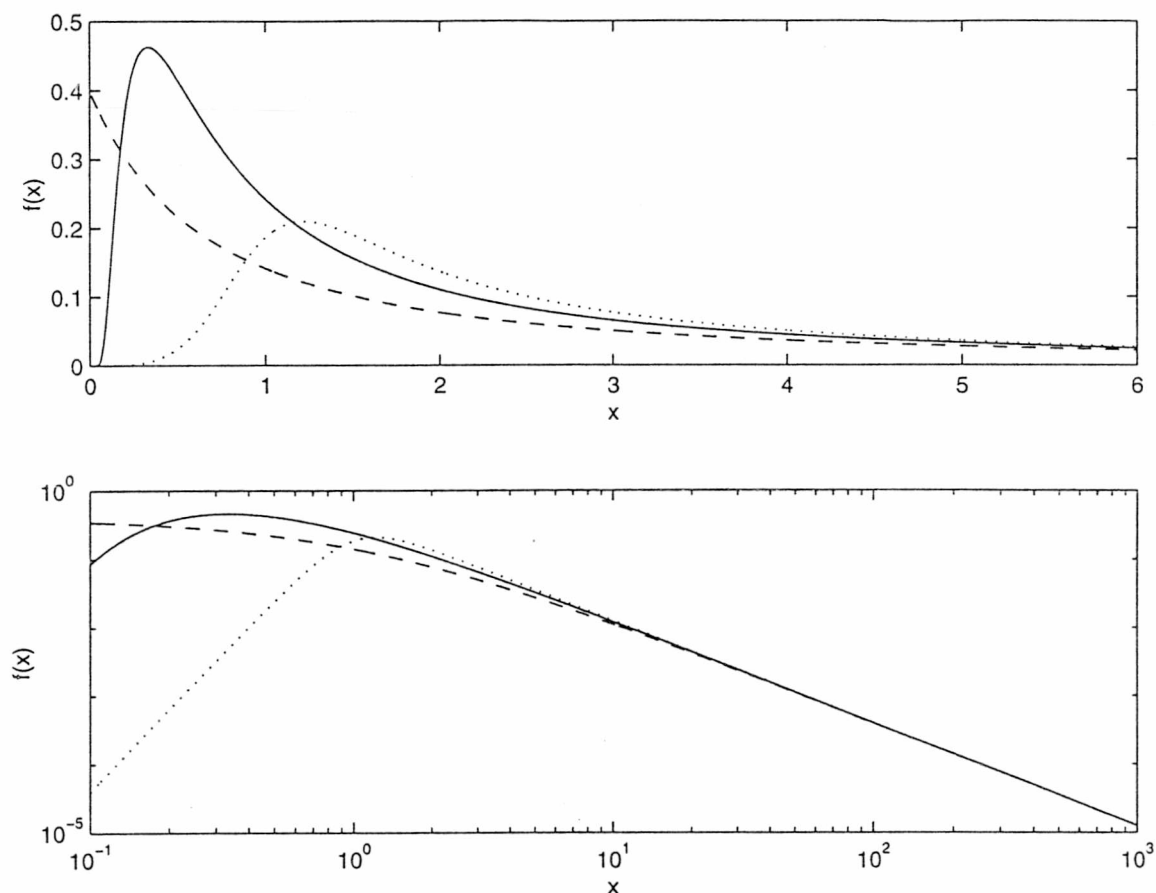
$$f(y) = \frac{1}{w} \left(1 + \frac{y}{w}\right)^{-\frac{1}{k}-1}, \quad y > 0,$$

przedstawiono na Rysunku 5.1 dla $k = 2$ i $w = 1$. Rozkład ten należy do obszaru przyciągania całkowicie asymetrycznego rozkładu stabilnego z indeksem stabilności $\kappa = 1/k$, o ile $0 < \frac{1}{k} < 1$.

3. Całkowicie asymetryczny rozkład stabilny z indeksem stabilności κ , $0 < \kappa < 1$. W przypadku $\kappa = 0.5$ jest to tzw. rozkład Lévy'ego, którego gęstość zadana jest wzorem analitycznym:

$$f(y) = (y)^{-3/2} e^{-1/(2y)}, \quad y > 0,$$

(gdy parametr skali $w = 1$). Gęstość tę również przedstawiono na Rysunku 5.1.



Rysunek 5.1: Gęstość jednostronnego rozkładu stabilnego (linia ciągła) z indeksem stabilności $\kappa = 0.5$ oraz gęstości dwóch rozkładów z obszaru przyciągania tego rozkładu stabilnego: rozkładu Pareto (linia przerywana) z parametrem $k = 2$ ($\kappa = 0.5$) i rozkładu Burra (linia kropkowana) z parametrami $p = 5$, $k = 10$ ($\kappa = a/b = 0.5$), w skali liniowej i podwójnie logarytmicznej. We wszystkich trzech przypadkach przyjęto parametr skali $w = 1$.

5.2 Przegląd typów tkanki, której charakterystyki dielektryczne zostały opublikowane w literaturze

TKANKA	ZAKRES CZE- STOTLIWOŚCI	LITERATURA
tkanka ludzka:		
jelita z zawartością	$10^6 \text{ Hz} - 10^7 \text{ Hz}$	[1]
kość	$10^6 \text{ Hz} - 10^7 \text{ Hz}$	[1]
krew	$10^6 \text{ Hz} - 10^7 \text{ Hz}$	[1]
krew	$10^4 \text{ Hz} - 10^8 \text{ Hz}$	[3]
mięśnie	$10^6 \text{ Hz} - 10^7 \text{ Hz}$	[1]
mięśnie szkieletowe	$10^5 \text{ Hz} - 10^8 \text{ Hz}$	[26]
mózg	$10^6 \text{ Hz} - 10^7 \text{ Hz}$	[1]
nerka	$10^6 \text{ Hz} - 10^7 \text{ Hz}$	[1]
oko	$10^6 \text{ Hz} - 10^7 \text{ Hz}$	[1]
pierś zdrowa	$10^0 \text{ Hz} - 10^3 \text{ Hz}$	[1]
pierś z nowotworem złośliwym	$10^0 \text{ Hz} - 10^3 \text{ Hz}$	[1]
płuco	$10^6 \text{ Hz} - 10^7 \text{ Hz}$	[1]
skóra	$10^0 \text{ Hz} - 10^{10} \text{ Hz}$	[1]
śledziona	$10^6 \text{ Hz} - 10^7 \text{ Hz}$	[1]
tętnica	$10^6 \text{ Hz} - 10^7 \text{ Hz}$	[1]
tkanka tłuszczowa	$10^6 \text{ Hz} - 10^7 \text{ Hz}$	[1]
wątroba	$10^6 \text{ Hz} - 10^7 \text{ Hz}$	[1]
wątroba	10^9 Hz	[25]

TKANKA	ZAKRES CZE- STOTLIWOŚCI	LITERATURA
tkanka zwierzęca:		
kora mózgowa - substancja szara (królik)	10^3 Hz – 10^9 Hz	[18]
kora mózgowa - substancja szara (mysz)	10^7 Hz - 10^{10} Hz	[18]
krew (królik)	ok. 10^9 Hz	[25]
mięśnie (szczur)	10^8 Hz - 10^{10} Hz	[1]
mięśnie (królik)	ok. 10^9 Hz	[25]
mięśnie (wół)	ok. 10^9 Hz	[22]
mięśnie (mysz)	10^7 Hz - 10^{10} Hz	[24]
mięśnie szkieletowe (pies, świnia, szczur)	10^5 Hz - 10^8 Hz	[26]
mięśnie szkieletowe (mysz)	10^5 Hz - 10^{10} Hz	[18]
mózg (szczur)	10^8 Hz - 10^{10} Hz	[1]
mózg - substancja szara i biała (królik)	ok. 10^9 Hz	[25]
nerka (świnia, pies, krowa)	10^5 Hz - 10^8 Hz	[26]
nerka (wół)	ok. 10^9 Hz	[22]
oko - soczewka (wół)	10^5 Hz - 10^8 Hz	[1]
oko - soczewka (królik)	ok. 10^9 Hz	[25]
skóra (królik)	ok. 10^9 Hz	[25]
śledziona (świnia, pies, krowa)	10^5 Hz - 10^8 Hz	[26]
tętnica (wół)	ok. 10^9 Hz	[22]
tkanka tłuszczowa (królik)	ok. 10^9 Hz	[25]
trzustka (pies)	10^5 Hz - 10^8 Hz	[26]
wątroba (królik)	10^3 Hz – 10^9 Hz	[18]
wątroba (świnia, pies, królik, krowa)	10^5 Hz - 10^8 Hz	[26]
wątroba (wół)	ok. 10^9 Hz	[22]
spożywcze mięso wołowe oraz drobiowe w zależności od czasu i warunków przechowywania	10^0 Hz - 10^6 Hz	[19]

specyficzne tkanki nowotworowe jelito - Hemangiopericytoma, Leimysarcoma (świnia), mięśnie - Fibrosarcoma (pies), guz KHT (mysz), śledziona - Hematoma (szczur), Hepatoma 23 (szczur)	$10^6 - 10^9$ Hz	[1]
--	------------------	-----

TKANKA	ZAKRES CZEŚCOTLIWOŚCI	LITERATURA
tkanka roślinna: Aceraceae, Agavaceae, Aquifolaceae, Araliaceae, Berberidaceae, Celastraceae, Commelinaceae, Compositae Crassula portulacaceae Curcubitaceae, Ericaceae, Geraniaceae, Gramineae, Hyperiacaceae, Iridaceae, Labiatae, Lauraceae, Leguminosae, Liliaceae, Loganiaceae, Moraceae, Myrtaceae, Oleaceae, Primulaceae, Polygonaceae, Rosaceae, Sacifragaceae, Salicaceae, Solanaeae, Theaceae	10^{-2} Hz – 10^4 Hz 10^{-2} Hz – 10^9 Hz 10^{-2} Hz – 10^4 Hz	[23] [17] [23]

Literatura

- [1] Pethig, R., IEEE Trans. EI, 19 (1984), 453-474.
- [2] Visser, K. R., Med. Biol. Comput. 30 (1992), 636-640.
- [3] de Vries, P. M., Langendijk, J. W., Kouw et al, Med. Biol. Comput. 31 (1993), 445-448.
- [4] Bone, S., Zaba, B.: *Bioelectronics*, John Wiley and Sons, New York, 1992.
- [5] Feldman, Y. D., Colloid Polymer Sci. 270 (1992), 768-780.
- [6] Shablakh, M., Dissado, L. A., Hill, R. M., J. Biol. Phys. 12 (1984), 63-78.
- [7] Laudat, J., Laudat, F., Eur. Biophys. J. 21 (1992), 233-239.
- [8] Coster, H. G. L., Simons, R., BBA 203 (1970), 17-27.
- [9] Coster, H. G. L., Smith, J. R., BBA 373 (1974), 151-164.
- [10] Gestblom, B., J. Phys. Chem. 95 (1991), 6064-6066.
- [11] Homblé, F., J. Theor. Biol. 131 (1988), 183-197.
- [12] Laver, D. R., Coster, H. G. L., BBA 772 (1984), 1-9.
- [13] Pickar, A. D., Amos, W. D., BBA 455 (1976), 36-55.
- [14] Pilla, A. A., Margules, G. S., J. Electrochem. Soc. 124 (1977), 1697-1706 .
- [15] Simons, R., BBA 203 (1969), 209-219.
- [16] Zimmermann, U., Ashcroft, R. G., et al, BBA 469 (1977), 23-32.
- [17] Broadhurst, M. G., Chiang, C.K. et al, J. Mol. Liq. 36 (1987), 65-73.

- [18] Dissado, L. A., Phys. Med. Biol. 35 (1990), 1487-1503.
- [19] Bodakin, B., Hart, F. X., IEEE Trans. Electr. Insul. 1 (1994), 181-187.
- [20] Pethig, R.: *Dielectric and Electronic Properties of Biological Materials*, John Wiley and Sons, New York, 1979.
- [21] Coster, H. G. L., Chilcott, T. C., Coster, A. C. F., Bioelectrochemistry and Bioenergetics 40 (1996), 79-98.
- [22] Brady, M. M., Symons, S. A., Stuchly, S. S., IEEE Trans. Biomed. Eng. 28 (1981), 305-307.
- [23] Hill, R. M., Dissado, L. A., Pathmanathan, K., J. of Biol. Phys. 15 (1987), 2-16.
- [24] Rogers, J. A., Sheppard, R. J. et al, Br. J. Radiol. 56 (1983), 335-338.
- [25] Steel, M. C., Sheppard, R. J., Phys. Med. Biol. 33 (1988), 467-472.
- [26] Stoy, R. D., Foster, K. R., Schwan, H. P., Phys. Med. Biol. 27 (1982) 501-513.
- [27] Jonscher, A. K.: *Dielectric Relaxation in Solids*, Chelsea Dielectric Press, London, 1983.
- [28] Schwan, H. P., Adv. Biol. Med Phys. 5 (1957), 147-209.
- [29] Schwan, H. P., IEEE Trans. EI-20 (1985), 913-922.
- [30] Hille, B.: *Ionic Channels of Excitable Membranes*, Sinauer Associates, Sunderland, Massachusetts, 1984.
- [31] Hoppe, W. (ed): *Biophysics*, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [32] Iannaccone, P. M., Khokha, M. (ed.): *Fractal Geometry in Biological Systems*, CRC Press USA, 1996.
- [33] Fuliński, A., Phys. Rev. Lett. 79 (1997), 4926-4933.
- [34] Grzywna, Z. J., Siwy, Z., Bashford, C. L., CMBL, 1 (1996), 291-301.
- [35] Maxwell, J. C.: *A Treatise on Electricity and Magnetism*, Dover Publications, New York, 1954.

- [36] Saxton, M. J., *Biophys. J.* 56 (1989), 615-622.
- [37] Jonscher, A. K.: *Universal Relaxation Law*, Chelsea Dielectric Press, London, 1996.
- [38] Bąk, G. W., *J. Phys. C: Solid State Phys.* 21 (1988), 3447-3465.
- [39] Dissado, L. A., Hill, R. M., *J. Chem. Soc., Faraday Trans. 2*, 80 (1984), 291-319.
- [40] Jonscher, A. K., *J. Mat. Sci.* 26 (1991), 1618-1626.
- [41] Dissado, L. A., Hill R. M., *J. Chem. Soc., Faraday Trans. 2*, 80 (1984), 291-319.
- [42] Lukenheimer, P., Rall, H., Alkemper, J., Fuess, H., Böhmer, R., Loidl, A., *Solid State Ionics* 81 (1995), 129-134.
- [43] Hutton, S. L. et al, *Phys. Rev. Lett.* 66 (1991), 1990-1993.
- [44] Jacobsohn, L. G. et al, *Phys. Stat. Sol. (b)* 198 (1996), 871-880.
- [45] Knebel, G. et al, *J. Alloys and Compounds* 216 (1994), 99-103.
- [46] Huang, J. S. et al, *J. Chem. Phys.* 90 (1) (1989), 25-29.
- [47] Jastrzębska, M. M, *J. Mat. Sci.* 33 (1998).
- [48] Dewey, T. G., *Fractals in Molecular Biophysics*, Oxford University Press, Oxford, 1997.
- [49] Dissado, L. A., Hill, R. M., *J. Appl. Phys.* 66 (1989), 2511-2525.
- [50] Staveren, M. P. J., Brom, H. B., Jongh, L. J., *Phys. Rep.* 208 (1991), 1-96.
- [51] Böttger, H., Bryksin, V. V., *Hopping Conduction in Solids*, Akademie Verlag, Berlin, 1985.
- [52] Mott, N. F., Davis, E. A., *Electronic processes in non-crystalline materials*, Claredon Press, Oxford, 1979.
- [53] Montroll, E. W., Weiss, G. H., *J. Math. Phys.* 6 (1965), 167-181.
- [54] Havlin, S., Avraham, D. B., *Adv. Phys.* 36 (1987), 695-798.
- [55] Tunaley, J. K. E., *J. Stat. Phys.* 12 (1975), 1-10.

- [56] Shlesinger, M. F., Klafter, J., Wong, Y. M., J. Stat. Phys. 27 (1982), 499-512.
- [57] Weissman, H., Weiss, G. H., Havlin, S., J. Stat. Phys. 57 (1989), 301-317.
- [58] Zumofen, G., Klafter, J., Blumen, A., Chem. Phys. 146 (1990), 433-444.
- [59] Araujo, M., Havlin, S., Weiss, G. H., Stanley, H. E., Phys. Rev. A 43 (1991), 5207-5213.
- [60] Mantegna, R. N., J. Stat. Phys. 70 (1993), 721-736.
- [61] Weron, K., Kotulski, M., Physica A 232 (1996), 180-188.
- [62] Bouchaud, J. P., Georges, A., Phys. Rep 195 (1990), 127-293.
- [63] Weiss, G. H., Rubin, R. J., Adv. Chem. Phys. 52 (1983), 363-501.
- [64] Weissman, H., Weiss, G. H., Havlin, S., J. Stat. Phys. 57 (1989), 301-316.
- [65] Klafter, J., Zumofen, G., J. Phys. Chem. 98 (1994), 7366-7370.
- [66] Gomi, S., Yonezawa, F., Phys. Rev. Lett. 74 (1995), 4125-4128.
- [67] Nagle, J. F., Biophys. J. 63 (1992), 366-370.
- [68] Kotulski, M., J. Stat. Phys. 81 (1995), 777-791.
- [69] Dobrusin, R. L., Uspehi Mat. Nauk 10 (1955), 157-166.
- [70] Scher, H., Shlesinger, M. F., Bendler, J. T., Phys. Today 1 (1991), 26-34.
- [71] Kotulska, M., Acta Bio-Optica, 4 (1998) 57-62.
- [72] Kotulska, M., materiały konferencyjne "Biocybernetyka i Inżynieria Biomedyczna" (1997) 361-365.
- [73] Kotulska, M., Cell. Mol. Biol. Lett. 4 (1999), 105-116.
- [74] Kotulska, M., Weron, K., praca ukaze się w Proc. SPIE (1999).
- [75] Klafter, J., Shlesinger, M. F., Zumofen, G., Phys. Today 2 (1996) 33-39.
- [76] Kotulska, M., Weron, K., Proc. SPIE, Dielectric and Related Phenomena, 3181 (1997), 11-18.

- [77] Dissado, L. A., Phys. Rev. B 37 (1988), 3434-3439.
- [78] Clerc, J. P., Giraud, G. et al, J. Phys. A.: Math. Gen. 18 (1985), 2565-2582.
- [79] Hill, R. M., Dissado, L. A., Nigmatullin, R. R., J. Phys.: Condens. Matter 3 (1991) 9773-9790.
- [80] Bingham, N, H., Goldie, C. M., Teugels, J. L.: *Regular variation*, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
- [81] Feller, W.: *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. 2, Wiley, New York, 1966.
- [82] Zolotarev, V. M.: *One-dimensional Stable Distributions*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1986.
- [83] Janicki, A., Weron, A.: *Simulation and Chaotic Behavior of α -Stable Stochastic Processes*, Marcel Dekker, New York, 1994.
- [84] Tsallis, C.: Physics World, 7 (1997) 42-45.
- [85] Takayasu, I.: *Fractals in the Physical Sciences*, Manchester University Press, Manchester, 1990.
- [86] Burr, I. W., Ann. Math. Statist. 13 (1942) 215-221.

Spis rysunków

1.1	Typowe cechy charakterystyki podatności dielektrycznej tkanki w funkcji częstotliwości.	9
2.1	Zależność podatności dielektrycznej w funkcji częstotliwości dla materiałów hoppingowych (zjawisko LFD).	13
2.2	Zależność położenia cząstki od czasu w błędzeniu losowym CTRW. .	16
2.3	Przykładowe trajektorie cząstki w błędzeniu losowym na płaszczyźnie przy założeniu skończonej wariancji rozkładu długości skoków (A) oraz długoogonowego rozkładu długości skoków (B) i kilka odpowiadających im położen cząstki w błędzeniu losowym zredukowanym do jednego wymiaru (ruch cząstki w kierunku prostopadłym do elektrod).	19
2.4	Zależność położenia $X(t)$ cząstki efektywnej od czasu w błędzeniu losowym CTRW, przy założeniach $t > \omega_c^{-1}$ i $n = 0.8$. Rozkład czasów oczekiwania na kolejny skok - rozkład Pareto z parametrami $k = 5$ i $w = 10^{-3}$, rozkład długości skoków - rozkład Burra z parametrami $p = 0.3$, $k = 1.2$	31

- 2.5 Zależność średniego współczynnika nachylenia $\bar{n}_{sym}$ trajektorii w zależności od wartości współczynnika skalowania w przy różnych rozkładach długości skoków cząstki i czasów oczekiwania na skok. Linia kropkowana: rozkład długości skoków - rozkład Burra z parametrami $p = 0.3$, $k = 1.2$ ($\gamma = p/k = 0.25$), rozkład czasów oczekiwania - rozkład Pareto $k = 5$ ($\lambda = 0.2$). Linia przerywana: rozkład długości skoków - rozkład Burra z parametrami $p = 0.6$, $k = 2.4$ ($\gamma = p/k = 0.25$), rozkład czasów oczekiwania - rozkład Pareto z $k = 5$ ($\lambda = 0.2$). Linia ciągła: rozkład długości skoków - rozkład stabilny z indeksem stabilności $\kappa = 0.25$, rozkład czasów oczekiwania - rozkład stabilny z indeksem stabilności $\kappa = 0.2$. Teoretyczna wartość współczynnika nachylenia wynosi $n = 0.8$ 32
- 2.6 Zależność położenia $X(t)$ cząstki efektywnej od czasu w błędzeniu losowym CTRW, przy założeniach $t < \omega_c^{-1}$ i $m = 0.2$. Rozkład czasów oczekiwania na kolejny skok - rozkład Pareto z parametrem $k = 5$, rozkład długości skoków - rozkład Burra z parametrami $p = 0.6$, $k = 0.2$, $w = 10^{-6}$ 33
- 2.7 Zależność średniego współczynnika nachylenia $\bar{m}_{sym}$ trajektorii w zależności od wartości współczynnika skalowania w . Linia kropkowana: rozkład długości skoków - rozkład Burra z parametrami $p = 0.6$, $k = 0.2$ ($\gamma = p/k = 3$), rozkład czasów oczekiwania - rozkład Pareto z $k = 5$ ($\lambda = 0.2$). Linia ciągła: rozkład długości skoków - rozkład stabilny z indeksem stabilności $\kappa = 2$, rozkład czasów oczekiwania - rozkład stabilny z indeksem stabilności $\kappa = 0.2$. Teoretyczna wartość współczynnika nachylenia wynosi $m = 0.2$ 34
- 2.8 Zależność położenia $X(t)$ cząstki efektywnej od czasu w błędzeniu losowym CTRW, przy założeniach $t < \omega_c^{-1}$ i $m = 0.1$. Rozkład czasów oczekiwania na kolejny skok - rozkład Pareto z parametrem $k = 10$, rozkład długości skoków - rozkład Burra z parametrami $p = 0.5$, $k = 0.1$, $w = 10^{-6}$ 35
- 2.9 Zależność położenia $X(t)$ cząstki efektywnej od czasu w błędzeniu losowym CTRW, przy założeniach $t > \omega_c^{-1}$ i $n = 0.9$. Rozkład czasów oczekiwania na kolejny skok - rozkład Pareto z parametrem $k = 10$, rozkład długości skoków - rozkład Burra z parametrami $p = 0.5$, $k = 4.5$, $w = 10^{-3}$ 36

2.10	Zależność położenia $X(t)$ cząstki efektywnej od czasu w błędzeniu losowym CTRW, przy założeniach $t > \omega_c^{-1}$ i $n = 0.8$. Rozkład czasów oczekiwania na kolejny skok - rozkład stabilny z indeksem stabilności $\lambda = 0.2$ i parametrem skalowania $w = 10^{-7}$, rozkład długości skoków - rozkład stabilny z indeksem stabilności $\gamma = 0.25$	37
2.11	Zależność położenia $X(t)$ cząstki efektywnej od czasu w błędzeniu losowym CTRW, przy założeniach $t < \omega_c^{-1}$ i $m = 0.2$. Rozkład czasów oczekiwania na kolejny skok - rozkład stabilny z indeksem stabilności $\lambda = 0.2$ i parametrem skalowania $w = 10^{-6}$, rozkład długości skoków - rozkład Gaussa o średniej 100 i wariancji 1.	38
2.12	Zależność położenia $X(t)$ cząstki efektywnej od czasu w błędzeniu losowym CTRW, przy założeniach $t < \omega_c^{-1}$ i $m = 0.1$. Rozkład czasów oczekiwania na kolejny skok - rozkład stabilny z indeksem stabilności $\lambda = 0.1$ i parametrem skali $w = 10^{-6}$, rozkład długości skoków - rozkład Gaussa o średniej 100 i wariancji 1.	39
2.13	Zależność położenia $X(t)$ cząstki efektywnej od czasu w błędzeniu losowym CTRW, przy założeniach $t > \omega_c^{-1}$ i $n = 0.9009$. Rozkład czasów oczekiwania na kolejny skok - rozkład stabilny z indeksem stabilności $\lambda = 0.1$ i parametrem skali $w = 10^{-7}$, rozkład długości skoków - rozkład stabilny z indeksem stabilności $\gamma = 0.111$	40
3.1	Model komórki Philipppsona.	44
3.2	Deterministyczny obwód fraktalny jako model tkanki.	46
3.3	Kolejne kroki w konstrukcji hierarchicznego obwodu R-C.	48
3.4	Zależność podatności dielektrycznej $\chi(\omega)$ układu od częstotliwości, gdy zmienna losowa reprezentująca czasy relaksacji poszczególnych obwodów R-C przyjmuje rozkład Pareto z parametrami $s = 0.5$, $w = 10^{-5}$, dla 10^3 obwodów elementarnych.	54
3.5	Zależność podatności dielektrycznej $\chi(\omega)$ układu od częstotliwości, gdy zmienna losowa reprezentująca czasy relaksacji poszczególnych obwodów R-C przyjmuje rozkład Pareto z parametrami $s = 0.5$, $w = 10^{-5}$, dla 10^5 obwodów elementarnych.	55

- 3.6 Zależność podatności dielektrycznej $\chi(\omega)$ układu od częstotliwości, gdy zmienna losowa reprezentująca czasy relaksacji poszczególnych obwodów R-C przyjmuje rozkład Pareto z parametrami $s = 0.4$, $w = 10^{-5}$, dla 10^5 obwodów elementarnych. 56
- 3.7 Zależność podatności dielektrycznej $\chi(\omega)$ układu od częstotliwości, gdy zmienna losowa reprezentująca czasy relaksacji poszczególnych obwodów R-C przyjmuje rozkład Burra z parametrami $p = 4$ i $k = 10$, $w = 10^{-5}$, dla 10^5 obwodów elementarnych. 57
- 3.8 Zależność podatności dielektrycznej $\chi(\omega)$ układu od częstotliwości, gdy zmienna losowa reprezentująca czasy relaksacji poszczególnych obwodów R-C przyjmuje rozkład Burra z parametrami $p = 5$ i $k = 10$, $w = 10^{-5}$, dla 10^5 obwodów elementarnych. 58
- 3.9 Zależność podatności dielektrycznej $\chi(\omega)$ układu od częstotliwości, gdy zmienna losowa reprezentująca czasy relaksacji poszczególnych obwodów R-C przyjmuje rozkład stabilny z parametrami $s = 0.4$, $w = 10^{-5}$, dla 10^5 obwodów elementarnych. 59
- 3.10 Zależność podatności dielektrycznej $\chi(\omega)$ układu od częstotliwości, gdy zmienna losowa reprezentująca czasy relaksacji poszczególnych obwodów R-C przyjmuje rozkład stabilny z parametrami $s = 0.5$, $w = 10^{-5}$, dla 10^5 obwodów elementarnych. 60
- 3.11 Zależność podatności dielektrycznej $\chi(\omega)$ układu od częstotliwości, gdy zmienna losowa reprezentująca czasy relaksacji poszczególnych obwodów R-C przyjmuje rozkład stabilny z parametrami $s = 0.5$, $w = 10^{-5}$, z uwzględnieniem rezystancji elektrolitu reprezentowanej jako dodatkowa rezystancja szeregową R_e obwodu elementarnego. . . 61
- 5.1 Gęstość jednostronnego rozkładu stabilnego (linia ciągła) z indeksem stabilności $\kappa = 0.5$ oraz gęstości dwóch rozkładów z obszaru przyciągania tego rozkładu stabilnego: rozkładu Pareto (linia przerywana) z parametrem $k = 2$ ($\kappa = 0.5$) i rozkładu Burra (linia kropkowana) z parametrami $p = 5$, $k = 10$ ($\kappa = a/b = 0.5$), w skali liniowej i podwójnie logarytmicznej. We wszystkich trzech przypadkach przyjęto parametr skali $w = 1$ 69

