

Na prawach rękopisu

INSTYTUT CYBERNETYKI TECHNICZNEJ
POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ
Raport Serii: PREPRINTY NR 11/81

ZASTOSOWANIE METODY SYMULACJI
HYBRYDOWEJ DO IDENTYFIKACJI
DYNAMICZNYCH WŁASNOŚCI OBIEKTÓW
O PARAMETRACH ROZŁOŻONYCH

/rozprawa doktorska/

Włodzimierz Solnik

Promotor:
doc. dr inż.
LUDWIK ŻEBROWSKI

Słowa kluczowe:
symulacja hybrydowa,
identyfikacja, obiekt
o parametrach rozło-
żonych

Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej
Wrocław 1981

Application of hybrid simulation method for dynamic properties identification of distributed parameter objects

The work presents a method of the dynamic properties identification of distributed parameter systems by means of hybrid simulation technique. The class of considered models is confined to second order partial differential equations in one or two space dimensions. The problem consist in evaluating of the equation's coefficients using measured /or given/ values of system state in given region.

The coefficients may depend on state function and /or spatial variables. The results of measurements are distorted by normally distributed noise with mean value equal zero and unknown standard dispersion.

The considered hybrid computational system consist of homogeneous quasianalog R-R network and digital computer. Some application possibilities of thus system and the way of solving of practical identification problems are given.

As the homology of mathematical models representing real systems is often important, the equivalence of the above network with additional current sources to the standard analogue R-R network is shown.

The work contains the analysis of accuracy and convergence of obtained solutions as well as the evaluation of solution sensitivity to random disturbances. In order to decrease the disadvantageous effect of noise on numerical results, initial smoothing of measured data is performed. A number of solved examples confirms the advantages of the proposed method. All the results were obtained by means of numerical simulation of the hybrid identifying system.

SPIS TREŚCI

1. WSTĘP	4
1.1. Wprowadzenie	4
1.2. Zakres i cel pracy	8
2. SFORMUŁOWANIE ZADANIA IDENTYFIKACJI DYNAMICZNYCH WŁASNOŚCI OBIEKTÓW W ZAGADNIENIACH BRZEGOWYCH	10
2.1. Modele matematyczne w postaci zagadnień brzegowych dla równania różniczkowego cząstkowego typu parabo- licznego	10
2.2. Klasyfikacja zagadnień brzegowych dla obiektów o parametrach rozłożonych	13
2.3. Ogólne sformułowanie problemu identyfikacji	15
2.4. Poprawność sformułowania problemu identyfikacji	16
3. MODELOWANIE SYMULACYJNE OBIEKTÓW O PARAMETRACH ROZŁOŻONYCH	17
3.1. Modelowanie symulacyjne	17
3.2. Różnicowe modele symulacyjne i ich realizacja techniczna	19
3.3. Przykład ekwiwalentności względem rozwiązywania dwóch symulatorów - analogowego i quasianalogowego	29
4. IDENTYFIKACJA PARAMETRYCZNA OBIEKTU OPISYWANEGO JEDNOWY- MIAROWYM RÓWNANIEM PRZEWODZENIA CIEPŁA	41
4.1. Sformułowanie problemu identyfikacji	41
4.2. Wybór struktury modelu symulacyjnego	43
4.3. Algorytm identyfikacji	45
4.4. Badanie metodą stopniowego zagęszczania siatki zbieżności i dokładności rozwiązywania zadania identyfikacji	53
4.5. Badanie stabilności rozwiązywania zadania identyfikacji względem danych wejściowych	70
4.5.1. Wygładzanie danych pomiarowych - metodą regulary- zacji odwrotnych zagadnień brzegowych	70
4.5.2. Przykłady testowe badania wpływu poziomu zakłó- ceń pomiarowych na wyniki identyfikacji	72
5. IDENTYFIKACJA PARAMETRYCZNA OBIEKTU OPISYWANEGO DWUWYMIARO- WYM RÓWNANIEM PRZEWODZENIA CIEPŁA	79
5.1. Sformułowanie problemu identyfikacji	79

5.2. Wybór struktury modelu symulacyjnego	81
5.3. Algorytm identyfikacji	82
5.4. Analizator pola HAF-2 w układzie identyfikacji metodą hybrydowego modelowania symulacyjnego	85
5.5. Przykłady testowe	87
6. ZAKOŃCZENIE	97
7. LITERATURA	101

W pracy przedstawiono metodę hybrydowego modelowania symulacyjnego do identyfikacji dynamicznych własności obiektów o parametrach rozłożonych. Ograniczono się do obiektów opisywanych równaniem różniczkowym o pochodnych cząstkowych drugiego rzędu typu parabolicznego w obszarach o jednym i dwóch wymiarach geometrycznych. Podlegające identyfikacji współczynniki równania mogą być zależne od współrzędnych geometrycznych oraz funkcji stanu obiektu. Zaprezentowano możliwości wykorzystania systemu hybrydowego "quasianalogowa siatka jednorodna R-R - maszyna cyfrowa"; opracowano metodykę rozwiązywania przedstawionych problemów; zwrócono uwagę na ekwiwalentność względem rozwiązywania, technicznych realizacji różnicowych modeli symulacyjnych - analogowego i quasianalogowego symulatorów. Badano zbieżność i dokładność rozwiązywania zadania oraz badano wrażliwość proponowanych algorytmów na występujące w praktyce systematyczne i przypadkowe uchyby pomiarowe. Podjęto także zagadnienie ograniczenia ujemnego wpływu zakłóceń danych pomiarowych. Badania przeprowadzono na przykładach symulując hybrydowy układ identyfikacji na maszynie cyfrowej.

1. WSTĘP

1.1. Wprowadzenie

Z problematyką identyfikacji, jako zagadnieniem określenia struktury i parametrów obiektu, spotykamy się w procesach poznawczych otaczającego środowiska oraz w procesach sterowania [7], [19], [68], [73]. W pierwszych budowane są modele obiektów /procesów, zjawisk/, które pozwalają na zbadanie ich charakteru, właściwości, zależności pomiędzy charakteryzującymi je parametrami; wykorzystywane są tylko do ogólnych celów poznawczych. Ważniejszą rolę spełnia identyfikacja w procesach sterowania, których celem jest osiągnięcie pewnych, stawianych przez człowieka kryteriów. Identyfikacja jest tu jednym z etapów sterowania, ma w stosunku do niego charakter pomocniczy i dlatego też identyfikowany model obiektu sterowania musi spełniać określone wymagania. Identyfikacja może dotyczyć zarówno obiektu już istniejącego jak i obiektu projektowanego. Na przykład, zadania projektowania i konstruowania obiektów technicznych z uwzględnieniem możliwości otrzymywania w czasie sterowania żadanego ich zachowania się mogą obejmować między innymi:

- wybór kształtu i rozmiarów ciał poruszających się w ośrodkach ciągłych;
- konstruowanie ośrodków i materiałów warstwowych, gdy wymagane

jest rozlokowanie warstw o różnych własnościach fizycznych
/w celu osiągnięcia pewnych założonych własności ogólnych/.

Konsekwencją dążenia nauki o sterowaniu do poznania coraz szerszych klas obiektów jest obserwowany rozwój badań nad systemami o parametrach rozłożonych. Badania dotyczące tych systemów są już stosunkowo dobrze rozwinięte. Specyfika obiektów o parametrach rozłożonych czyni zadanie identyfikacji ich opisów matematycznych bardziej złożonym w porównaniu z analogicznym zagadnieniem dla obiektów o parametrach skupionych. Ukazała się pewna ilość prac poświęconych identyfikacji obiektów o parametrach rozłożonych oraz podjęto próby usystematyzowania dorobku w tej dziedzinie [2], [3], [10], [13], [15], [17], [20], [29], [30], [35], [43], [44], [49], [63], [61], [64], [67], [69], [70], [84], [87], [94]. Chociaż dorobek ten jest już stosunkowo bogaty, niektóre problemy, jak znalezienie efektywnych metod rozwiązywania zadania identyfikacji w przypadku parametrów zależnych od współrzędnych geometrycznych, czasu, funkcji stanu, wymagają jeszcze dalszego opracowania. Występuje też konieczność zbliżenia do praktyki założeń o charakterze danych pomiarowych, szczególnie uwzględnienie wpływu zakłóceń pomiarowych. Spora ilość prac dotyczy obiektów opisywanych równaniem różniczkowym cząstkowym typu parabolicznego. Ta stosunkowo wąska z punktu widzenia ogólnej teorii identyfikacji klasa modeli przyciąga duże zainteresowanie ze względu na znaczenie praktyczne wobec szerokiego zastosowania rozważanych opisów matematycznych [4], [27], [39], [40], [96]. Na przykład, wiele zagadnień fizyki, elektrotechniki, hydrogeologii, techniki cieplnej i innych dziedzin nauki sprowadza się do rozpatrywania różnorodnych wektorowych i skalarnych pól, których własności bada matematyczna teoria pola - dział fizyki matematycznej. Polem nazywa się tu część przestrzeni, w której każdemu punktowi p przyporządkowano jednoznacznie pewną wielkość $\varphi(p)$. Jeżeli $\varphi(p)$ jest wielkością fizyczną, to pole nazywa się fizycznym; przy czym może być ono wektorowe lub skalarne. W celu otrzymania ogólnych wyników badań, obowiązujących dla dowolnych konkretnych pól fizycznych, każdemu polu przyporządkowuje się jego model matematyczny, w którym abstrahuje się od rozważanej wielkości fizycznej przedstawiając ją matematycznym pojęciem funkcji, a punktowi przestrzeni przypisuje się współrzędne jako argumenty. Podstawowym równaniem teorii potencjalnego pola wektorowego jest równanie:

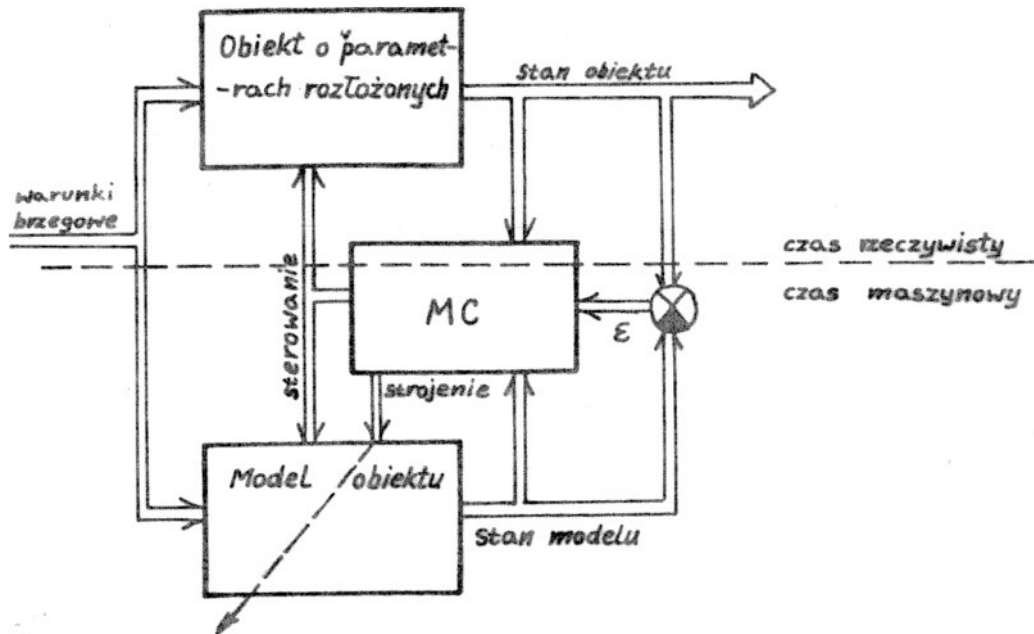
$$\operatorname{div} (A \operatorname{grad} \varphi) = B \frac{\partial \varphi}{\partial t} \pm F \quad (1.1)$$

Niestacjonarne pole opisywane równaniem (1.1) możemy uważać za obiekt badań poznawczych lub obiekt sterowania [6], [9], [45], [53], [56], [68]. Współczynniki A /np. współczynnik przewodności ciepła, współczynnik dyfuzji, współczynnik filtracji/ i B /np. współczynnik porowatości, pojemność cieplna, pojemność wodna/ określają własności ośrodka, a tym samym własności dynamiczne procesu w nim zachodzącego. Często korzystać z dokładnego rozwiązywania zagadnień pola jest nieduża ze względu na to, że przyjęte do obliczeń parametry, określone są z dużą niedokładnością /dziesiątki procentów i więcej/. Stąd bardzo odpowiedzialny i trudny jest etap związany z przeprowadzaniem pomiarów na obiekcie, obróbki statystycznej otrzymywanej informacji oraz obliczania podstawowych parametrów tego obiektu. Mała dokładność wartości współczynników pochodzących z pomiarów w równaniu (1.1) znacznie obniża jakość praktycznych opracowań. Droga laboratoryjnych badań własności ośrodka, w którym zachodzi proces, nie zawsze jest efektywna i nie zawsze może być przyjęta [57], [90], [92]. Parametry nie mogą być określone na podstawie pomiarów bezpośrednich. Powstaje wtedy problem identyfikacji parametrów na podstawie informacji o funkcji stanu obiektu. Istnieje potrzeba opracowania odpowiednich metod identyfikacji parametrów drogą pośrednią, umożliwiającą ocenę ich wartości z odpowiednią dokładnością.

Wspomniano już, że ważniejszą rolę spełnia identyfikacja w procesach sterowania. Zadaniem każdego systemu automatyzacji jest takie oddziaływanie na obiekt, aby kryterium jakości sterowania osiągnęło pewną wartość optymalną. Opis matematyczny obiektu jest podstawą do przyjęcia konkretnego systemu automatycznego sterowania obiektem i w oparciu o ten opis można wyznaczyć algorytm sterowania. Im pełniejsza jest informacja początkowa o obiekcie, tym lepsze można uzyskać wskaźniki jakości sterowania. Możliwe jest również zdobywanie informacji o obiekcie dopiero w czasie sterowania. Wymaga to jednak bardziej złożonego układu /adaptacyjnego/. Jakość sterowania obiektem przy niedostatecznej apriorycznej informacji o **własnościach** dynamicznych określa się zdolnością adaptacji organu sterowania do zmieniających się zewnętrznych warunków i parametrów dynamicznych obiektu. Przykładem może być tu problem

odwodnienia terenu, na którym prowadzi się lub zamierza się prowadzić odkrywkową eksploatację kopalin. Przygotowanie projektu eksploatacji złóż wymaga znajomości zjawisk hydrogeologicznych i przeprowadzenia badań filtracji wód podziemnych. Złóża eksploatowane oraz przewidziane do eksploatacji muszą być odwodnione. Odwodnienie terenu, ma na celu takie ukształtowanie powierzchni zwierciadła wód gruntowych, aby było ono poniżej dolnego poziomu eksploatacyjnego. Wybór systemu odwodnienia jest jednym z problemów pojawiających się przy projektowaniu lub rozbudowie kopalni odkrywkowych. Prace badawcze dotyczą prognozowania depresji zwierciadła wód podziemnych dla terenu kopalni oraz dla całego pobliskiego rejonu. Wynikami badań mogą być również zalecenia przydatne do poprawnej eksploatacji uruchamianych systemów odwodniania, a także optymalne sterowanie tymi systemami na bieżąco podczas ich działania.

Często wykorzystuje się fakt znajomości modelu z dokładnością do parametrów. Celem identyfikacji w tym przypadku jest wyznaczenie wektora parametrów, dla którego określone kryterium jakości identyfikacji przyjmuje wartość minimalną. Możliwa zależność tych parametrów od współrzędnych geometrycznych i funkcji stanu wymaga stosowania układu adaptacyjnego z identyfikacją własności dynamicznych na bieżąco tzn. w czasie funkcjonowania systemu sterowania [1], [28]. W układzie adaptacyjnym można wykorzystać strojony model obiektu do identyfikacji własności dynamicznych oraz do weryfikacji algorytmu sterowania drogą symulacji zachowania się obiektu pod wpływem oddziaływań sterujących. Skalę czasu modelu dobiera się tak, aby czas trwania symulacji umożliwił wykorzystanie zweryfikowanych decyzji sterujących w obiekcie rzeczywistym. Na rys. 1.1 przedstawiono strukturę hybrydowego układu sterowania adaptacyjnego ze strojonym modelem jako czujnikiem własności dynamicznych i stanu dynamicznego obiektu.



Rys. 1.1. Struktura układu sterowania adaptacyjnego ze strojonym modelem.

1.2. Zakres i cel pracy

Praca dotyczy identyfikacji własności dynamicznych deterministycznego obiektu o parametrach rozłożonych, opisywanego równaniem różniczkowym o pochodnych cząstkowych drugiego rzędu typu parabolicznego. Ograniczono się do procesów zachodzących w obszarach o jednym i dwóch wymiarach geometrycznych. Zagadnienie polega na określeniu współczynników równania w oparciu o zadane wartości funkcji stanu obiektu w punktach czasoprzestrzeni, w której określone jest równanie stanu dynamicznego oraz warunki początkowe i graniczne I-go rodzaju. Współczynniki równania mogą być zależne od współrzędnych geometrycznych oraz funkcji stanu a wyniki identyfikacji przedstawiane są w postaci zbioru wartości funkcji siatkowych współczynników. Zagadnienie identyfikacji własności dynamicznych ma miejsce w zadaniu konstruowania obiektu lub w zadaniu określenia własności rzeczywistych, istniejących obiektów. W tym drugim przypadku na dane pomiarowe stanu obiektu są nałożone addytywne uchyby systematyczne lub przypadkowe o rozkładzie normalnym z wartością oczekiwaną równą zeru i nieokreślonym z góry

odchyleniem standardowym.

Przy rozwiązywaniu zagadnień brzegowych dla obiektów o parametrach rozłożonych można stosować hybrydowe środki obliczeniowe jakimi są hybrydowe analizatory pola, łączące zalety maszyn analogowych /szybkość/ i cyfrowych /dokładność/. Hybrydowe analizatory pola bazujące na siatkach R-R i realizujące czysto niejawnie, stabilne i monotoniczne schematy różnicowe, wykorzystuje się głównie do zadań analizy choć możliwości tych środków technicznych są szersze [23], [31], [33], [38], [58], [100].

Zasadniczym celem pracy jest rozszerzenie klasy zadań rozwiązywanych systemem hybrydowym "quasianalogowa siatka jednorodna R-R - maszyna cyfrowa" o klasę odwrotnych zagadnień brzegowych, jakimi są zadania identyfikacji dynamicznych własności obiektów o parametrach rozłożonych. Przedstawiono realizującą ten cel metodę hybrydowego modelowania symulacyjnego i opracowano metodykę rozwiązywania przedstawionych problemów. U podstaw tej metody leży zasada quasianalogii modeli, dlatego też zwrócono szczególną uwagę na ekwiwalentność względem rozwiązania, technicznych realizacji różnicowych modeli symulacyjnych. W tym celu przedstawiono konkretny przykład ekwiwalentności dwóch symulatorów - analogowego typu siatki R-R oraz quasianalogowego typu jednorodnej siatki R-R z dodatkowymi źródłami prądowymi. Przyjęcie struktury modelu symulacyjnego bazującego na quasianalogu i jego realizacja techniczna umożliwiają opracowanie algorytmów dla hybrydowego układu identyfikacji. Przeprowadzono też badanie zbieżności i dokładności otrzymywanych wartości współczynników w porównaniu z wartościami rzeczywistymi, poszukiwanych parametrów obiektu. Takie porównanie może dać podstawę do oceny efektywności metody. Jednak ocena byłaby mało wartościowa bez uwzględnienia wrażliwości proponowanych algorytmów na występujące w praktyce systematyczne i przypadkowe uchyby pomiarowe. Dlatego też przeprowadzono analizę stabilności procedury w stosunku do możliwych zakłóceń pomiarowych oraz wrażliwości oszacowania poszukiwanych parametrów na poziom tych zakłóceń. Podjęto także zagadnienie ograniczenia ujemnego wpływu zakłóceń danych pomiarowych. Częściowego eliminowania ujemnych skutków zakłóceń dokonano poprzez wstępną obróbkę serii identyfikującej oraz uwzględnienia roli współczynnika wrażliwości stosowanej siatki quasianalogowej R-R.

Wszelkie badania związane z wymienionymi wyżej celami przeprowadzono na konkretnych przykładach drogą symulacji hybrydowego układu identyfikacji na maszynie cyfrowej za pomocą odpowiednich programów symulacyjnych.

2. SFORMUŁOWANIE ZADANIA IDENTYFIKACJI DYNAMICZNYCH WŁASNOŚCI OBIEKTÓW W ZAGADNIENIACH BRZEGOWYCH

2.1. Modele matematyczne w postaci zagadnień brzegowych dla równania różniczkowego cząstkowego typu parabolicznego

Najczęściej stosowanym narzędziem opisu własności dynamicznych deterministycznych, ciągłych obiektów o parametrach rozłożonych jest formalizm równań różniczkowych cząstkowych [21], [24], [48], [54], [91], [95]. Opis polega na skonstruowaniu zagadnienia brzegowego dla równania różniczkowego cząstkowego, rozwiązanie którego odzwierciedla stan obiektu w zależności od wymuszeń zewnętrznych, jakim obiekt podlega. Bardzo szeroką z praktycznego punktu widzenia klasę obiektów rzeczywistych można opisać zagadnieniem brzegowym dla równania różniczkowego cząstkowego II-go rzędu typu parabolicznego. Zarówno stan obiektu jak i wymuszenia są określone w pewnym podzbiorze obszaru przestrzennego R^n oraz na pewnym odcinku czasowym - odcinku obserwacji $[0, T] \subset R_+$.

Ograniczono się do trójwymiarowej czasoprzestrzeni R^{2+1} , w której dany jest obszar walcowy $\bar{\Theta}_T$ /rys. 2.1/:

$$\bar{\Theta}_T = \bar{\Omega} \times [0, T] = \{(x, y, t) : x, y \in \bar{\Omega}, t \in [0, T]\} \quad (2.1)$$

Brzeg walca Θ_T składa się z części parabolicznej brzegu:

- powierzchni bocznej /poboczniczy/

$$S_T = \partial\Omega \times (0, T) = \{(x, y, t) : x, y \in \partial\Omega, t \in (0, T)\}$$

- podstawy dolnej

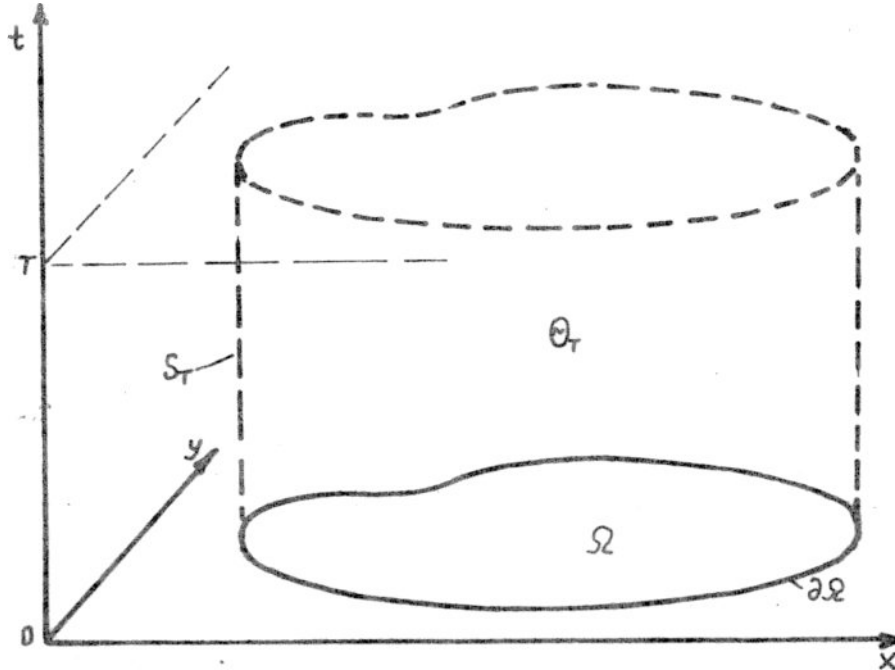
$$\bar{\Omega} \times \{0\} = \{(x, y, t) : x, y \in \bar{\Omega}, t = 0\} \quad (2.2)$$

oraz podstawy górnej

$$\bar{\Omega} \times \{T\} = \{(x, y, t) : x, y \in \bar{\Omega}, t = T\}.$$

$\bar{\Omega}$ oznacza domknięcie obszaru Ω /tzn. $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ /.

Zakłada się, że $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ jest spójnym i otwartym podzbiorem o gładkim brzegu $\partial\Omega$.



Rys. 2.1. Trójwymiarowa czasoprzestrzeń z obszarem walcowym $\bar{\Theta}_T$.

Obszar przestrzenny $\bar{\Omega}$ /nie zmieniający kształtu granicy $\partial\Omega$ w czasie/ wypełniony jest przez ośrodek fizyczny, w którym zachodzi niestacjonarny proces. Obszar Θ_T jest obszarem określenia równania opisującego badany proces. We wszystkich punktach obszaru Θ_T równanie jest tego samego, parabolicznego typu:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[A(x, y, \varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[A(x, y, \varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right] = B(x, y, \varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (2.3)$$

przy czym:

$\varphi(x, y, t) \in C^2(\Theta_T) \cap C(\bar{\Theta}_T)$ - funkcja stanu obiektu,

x, y, t - zmienne niezależne geometryczne i czasowa,

$(x, y) \in \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^2, t \in [0, T] \subset \mathbb{R}_+$

$A(x,y,\varphi)$, $B(x,y,\varphi)$ - parametry obiektu, określające własności ośrodka, które mogą zależeć od współrzędnych geometrycznych i funkcji stanu obiektu. Sens fizyczny parametrów wymaga, aby dla $\forall t \in [0, T]$ $A > 0$, $B > 0$, $B \in C(\bar{\Omega})$, $A \in C^1(\bar{\Omega})$.

W celu jednoznacznego opisu badanego procesu fizycznego należy oprócz równania (2.3) podać warunki jednoznaczności. Określone one są przez kształt obszaru przestrzennego, własności fizyczne obszaru /współczynniki A i B /, a ponadto przez warunki brzegowe, na które składają się warunek początkowy /stan początkowy procesu/ oraz warunki graniczne /stan procesu na granicy obszaru/. W ten sposób rozwiązanie równania /funkcja stanu $\varphi(x,y,t)$ / powinno spełniać równanie (2.3) w obszarze Θ_T oraz zadane warunki początkowe i graniczne na parabolicznej części brzegu obszaru.

Równanie wraz z zadanymi warunkami brzegowymi tworzy zagadnienie brzegowe, które jest najczęściej używanym modelem matematycznym obiektu o parametrach rozłożonych. W zależności od występujących rodzajów warunków brzegowych wyróżnić można:

1. Zagadnienie brzegowe Cauchy'ego /zagadnienie początkowe/, w którym obok równania podany jest warunek początkowy:

$$\varphi|_{t=0} = g_0(x, y) \quad (x, y) \in \bar{\Omega} \quad (2.4)$$

2. Zagadnienia brzegowe Fouriera /mieszane, początkowo-graniczne/, w których obok równania i warunku początkowego podany jest jeden z rodzajów warunków granicznych na pobocznicę S_T , a które można przedstawić ogólnie w postaci:

$$\alpha \varphi|_{S_T} + \beta \frac{\partial \varphi}{\partial n}|_{S_T} = g \quad (2.5)$$

przy czym:

$\alpha, \beta \in \mathcal{C}$ - funkcje ciągłe na S_T , $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha + \beta > 0$
 n - wektor normalny do pobocznicę walca $\bar{\Theta}_T$.

W zależności od wartości α i β otrzymywane są trzy rodzaje warunków granicznych:

a/ warunek I-go rodzaju - Dirichleta

$$\alpha = 1, \beta = 0 \quad \varphi|_{S_T} = g_1 \quad (2.6)$$

b/ warunek II-go rodzaju - Neumanna

$$\alpha = 0, \quad \beta = 1$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{S_T} = g_2 \quad (2.7)$$

c/ warunek III-go rodzaju-Fouriera /liniowa kombinacja dwu poprzednich warunków/

$$\alpha > 0; \quad \beta > 0$$

$$\alpha \varphi \Big|_{S_T} + \beta \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{S_T} = g_3 \quad (2.8)$$

Warunkami koniecznymi są warunki gładkości funkcji φ oraz warunek zgodności:

$$\alpha \varphi_0 \Big|_{S_T} + \beta \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} \Big|_{S_T} = g_0(x, y) \quad (2.9)$$

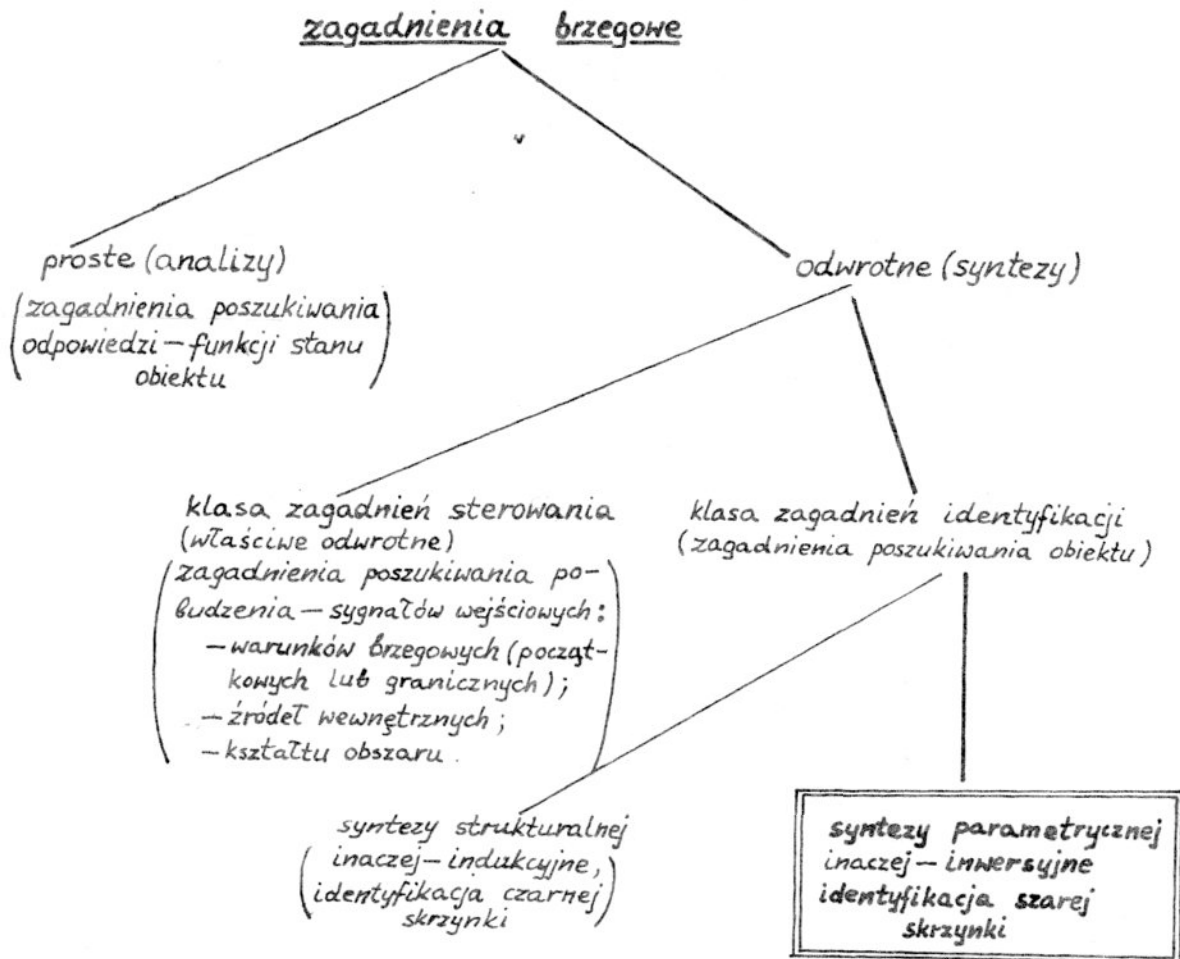
Oprócz tych trzech warunków granicznych używany jest jeszcze warunek IV-go rodzaju /sprzężenia/:

$$\varphi_1 \Big|_{S_T} = \varphi_2 \Big|_{S_T} \quad \text{lub} \quad -\alpha_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \Big|_{S_T} = -\alpha_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \Big|_{S_T} \quad (2.10)$$

Warunki sprzężenia mówią o ciągłości funkcji φ lub jej pochodnych na granicy dwóch ośrodków.

2.2. Klasyfikacja zagadnień brzegowych dla obiektów o parametrach rozłożonych

Konstruując model matematyczny obiektu o parametrach rozłożonych w postaci zagadnienia brzegowego należy określić jakie wielkości i zależności wchodzące do opisu są znane, a jakie należy wyznaczyć. W zależności od tego zagadnienia brzegowe można klasyfikować następująco:



W zagadnieniach prostych /analizy/ znane są równania opisujące zachowanie się obiektu oraz pobudzenie. Należy wyznaczyć odpowiedź obiektu - funkcję stanu. Zagadnieniami bardziej złożonymi są zagadnienia odwrotne. Gdy znane jest równanie podstawowe i odpowiedź obiektu, a wyznaczyć należy pobudzenie, które doprowadzi lub doprowadziło do danej odpowiedzi, zadanie zaliczyć można do klasy zagadnień sterowania. Do klasy zagadnień identyfikacji zaliczyć można zadanie, w którym poszukiwane jest samo równanie opisujące obiekt na podstawie znanego pobudzenia i odpowiedzi. Ze względu na to, że przedmiotem badań w pracy są obiekty, których fizyka zjawisk jest dość dobrze poznana, a klasa adekwatnego modelu matematycznego podana z dokładnością do parametrów, rozważane będzie zagadnienie inwersyjne czyli inaczej, zagadnienie identyfikacji parametrycznej.

2.3. Ogólne sformułowanie problemu identyfikacji

Identyfikacja polega na określeniu opisu matematycznego obiektu na podstawie pewnej informacji apriorycznej o stanie obiektu i jego własnościach. Obiektem zainteresowania jest proces opisywany równaniem różniczkowym o pochodnych cząstkowych typu parabolicznego, którego rozwiązanie jest funkcją współrzędnych geometrycznych i czasu. Opis matematyczny znajduje się więc w następującej klasie modeli zadanych z dokładnością do parametrów:

$$\sum_{l=1}^n \frac{\partial}{\partial x_l} \left[A(\bar{x}, \varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial x_l} \right] = B(\bar{x}, \varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (2.11)$$

przy czym:

$\varphi(\bar{x}, t)$ - funkcja stanu spełniająca równanie w
 $\Theta_T = \Omega \times [0, T]$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $[0, T] \subset \mathbb{R}_+$

$\bar{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, t - zmienne niezależne

$A(\bar{x}, \varphi)$, $B(\bar{x}, \varphi)$ - parametry określające własności dynamiczne obiektu. W zadaniu odwrotnym /inwersyjnym/ są one nieznane.

Konieczne jest podanie warunków początkowych w $\bar{\Omega} \times \{0\}$ oraz granicznych na $\partial\Omega \times [0, T]$.

Identyfikacja dowolnego procesu, którego opis matematyczny znajduje się w podanej wyżej klasie modeli określonych parametrycznie, polegać będzie na określeniu wartości współczynników

$A_{\text{opt}}(\bar{x}, \varphi)$ i $B_{\text{opt}}(\bar{x}, \varphi)$, takich, że funkcjonał:

$$J[A(\bar{x}, \varphi), B(\bar{x}, \varphi)] = \|\varphi(\bar{x}, t) - \hat{\varphi}(\bar{x}, t)\| \quad (2.12)$$

osiąga wartość najmniejszą:

$$J(\varphi_{\text{opt}}, A_{\text{opt}}, B_{\text{opt}}) = \min_{A, B \in Z} J(\varphi, A, B) \quad (2.13)$$

Zakładając, że przestrzeń Θ_T jest klasy L_2 często przyjmuje się:

$$J(A, B, \varphi) = \int_0^T \int_{\Omega} (\varphi - \hat{\varphi})^2 d\bar{x} dt \quad (2.14)$$

przy czym: $\hat{\varphi}$ - wartości funkcji stanu obiektu /żądane lub otrzymane w wyniku pomiaru/,

Z - zbiór dopuszczalnych wartości współczynników
A i B.

Tak więc współczynniki należy określić pośrednio na podstawie zadanej informacji o wartościach funkcji stanu. O "żądanych wartościach" mówi się w przypadku identyfikacji parametrów obiektu, który należy dopiero skonstruować, a którego zachowanie się jest z góry zakładane. Najczęściej jednak identyfikacja dotyczy istniejącego już obiektu i zadane wartości funkcji stanu, to wartości otrzymane w wyniku pomiarów przeprowadzonych na tym realnym obiekcie sterowania. Wyniki pomiarów obarczone są zawsze błędami wynikającymi z działania wielu czynników, między innymi z niedokładności zastosowanej metody pomiaru, użytych przyrządów, błędów popełnionych przez obserwatora. Powstaje problem, w jakim stopniu wyniki pomiarów reprezentują rzeczywistość oraz w jaki sposób winny być przetwarzane celem uzyskania wartości współczynników A_{opt} i B_{opt} możliwie najbardziej zbliżonych do rzeczywistości. Jest to zadanie "kompromisowe" - dążenie do dokładniejszego oszacowania współczynników często prowadzi do złożonych metod i realizacji ich algorytmów, co ogranicza z kolei zastosowanie.

2.4. Poprawność sformułowania problemu identyfikacji

Aby zagadnienie brzegowe było poprawnie sformułowane, co umożliwia uniknięcia przedstawiania błędnych wniosków wynikających z analizy jego rozwiązania, spełnione powinny być pewne wymagania. Nazywa się je warunkami poprawności postawienia zagadnienia brzegowego. Są one następujące:

- istnieje rozwiązanie dla dowolnych danych wejściowych w pewnej klasie funkcji M_1 ;
- rozwiązanie jest jedyne w pewnej klasie funkcji M_2 ;
- rozwiązanie powinno być w sposób ciągły zależne od danych wejściowych /dostatecznie małym zmianom danych wejściowych odpowiadają małe zmiany rozwiązania/.

Zagadnienie brzegowe spełniające te wymagania, nazywa się zagadnieniem poprawnie postawionym, a odpowiedni zbiór funkcji $M_1 \cap M_2$ - klasą poprawności. **Powyższe klasyczne warunki poprawności według Hadamarda traktowane były jako obowiązkowe warunki**, którym musiała odpowiadać zagadnienie brzegowe.

Chodziło tu jednak o zagadnienia proste /analizy/. Hipoteza o możliwości rozwiązywania wyłącznie poprawnie sformułowanych zagadnień matematycznych była kwestionowana przy rozpatrywaniu zagadnień odwrotnych /syntezy/, które w sensie klasycznym należą do zagadnień sformułowanych niepoprawnie. Na ogół trzeci warunek poprawności /stabilność/ nie jest spełniony. Prowadzi to w praktyce do utraty stabilności procesu numerycznego przy zastosowaniu przybliżonych metod rozwiązywania zagadnień odwrotnych. Jednak ważne znaczenie praktyczne zagadnień odwrotnych i istniejąca potrzeba rozwiązywania tych zagadnień wymagało odpowiedniego opracowywania podstaw matematycznych problemu. Stąd ważność podejmowania czynności związanych z regularyzacją zagadnień, możliwością sprowadzenia ich do warunkowo poprawnie postawionych. Tichonow podał warunki poprawności dla zagadnień odwrotnych wprowadzając pojęcie przestrzeni poprawności [89], [90]. Są one następujące:

- rozwiązanie istnieje dla pewnej klasy funkcji w pewnej przestrzeni,
- rozwiązanie jest jednoznaczne,
- dostatecznie małym zmianom danych wejściowych odpowiadają zmiany rozwiązań nie wychodzące poza przestrzeń poprawności.

Rozwiązanie zagadnienia niepoprawnie postawionego /w klasycznym sensie/ staje się stabilne w stosunku do zmian danych wejściowych, jeżeli nałożyć na zbiór dopuszczalnych rozwiązań pewne dodatkowe ograniczenia /ilościowe i jakościowe/. Zagadnienie tego typu nazywa się poprawnie sformułowanym warunkowo. Opracować można algorytmy obliczeniowe zapewniające otrzymywanie przybliżonych rozwiązań, które w sposób ciągły i jednoznaczny zależą od danych wejściowych i które nie wychodzą poza przestrzeń poprawności.

3. MODELOWANIE SYMULACYJNE OBIEKTÓW O PARAMETRACH ROZŁOŻONYCH

3.1. Modelowanie symulacyjne

Metody badań, projektowania i sterowania układami dynamicznymi wymagają stosowania złożonych teorii, zaawansowanego aparatu matematycznego i efektywnych środków obliczeniowych. Rozwiązywanie zagadnień brzegowych dla równań różniczkowych cząstkowych metodami eksperymentalnymi i analitycznymi napotyka na duże trudności,

dlatego też opracowano wiele metod przybliżonego rozwiązywania. Rozwój środków techniki obliczeniowej sprzyjał rozszerzaniu zakresu wykorzystywania metod modelowania. Zainteresowanie metodami modelowania, przejawiane przez liczną rzeszę badaczy różnych kierunków nauki i techniki, doprowadziło do powstania wielu, często odmiennych, pojęć i terminologii [8], [41], [42]. Niezależnie jednak od ujemnych zjawisk towarzyszących rozwojowi metod modelowania, znaczenie praktyczne tych metod jest duże.

Modelowanie symulacyjne - to proces konstruowania modelu systemu rzeczywistego i przeprowadzania eksperymentów na tym modelu, celem zrozumienia zachowania się systemu lub oceny różnych strategii zapewniających jego funkcjonowanie [79]. Tym samym pod pojęciem modelowania symulacyjnego rozumie się proces konstruowania modelu symulacyjnego oraz wykorzystanie tego modelu do rozwiązywania stojących przed badaczem problemów. Metodę modelowania symulacyjnego stosuje się z powodzeniem do badania procesów przebiegających w przyrodzie /cele poznawcze/ oraz do projektowania obiektu, czy też opracowania algorytmów sterowania. Szczególnie widoczne są jej zalety w następujących przypadkach:

- gdy obiekt rzeczywisty nie nadaje się bezpośrednio do eksperymentalnego badania,
- przy występujących trudnościach w manipulowaniu obiektem,
- jeśli koszty eksperymentów na rzeczywistym obiekcie są zbyt wysokie oraz
- gdy obiekt jeszcze nie istnieje.

Modelowanie symulacyjne zmierza do utworzenia nowego obiektu /modelu symulacyjnego/, który generowałby zjawiska identyczne do zjawisk zachodzących lub mogących zajść w obiekcie rzeczywistym [18], [25]. W zależności od technicznej realizacji modelu symulacyjnego /symulator analogowy, cyfrowy, hybrydowy/ można wyróżniać analogowe, cyfrowe czy też hybrydowe modelowanie symulacyjne. Mówiąc o modelowaniu symulacyjnym mamy na uwadze modelowanie matematyczne oparte na identyczności całkowitej /analogia/ lub częściowej /quasianalogia/ równań matematycznych opisujących zjawiska zachodzące w oryginale i w symulatorze.

3.2. Różnicowe modele symulacyjne i ich realizacja techniczna

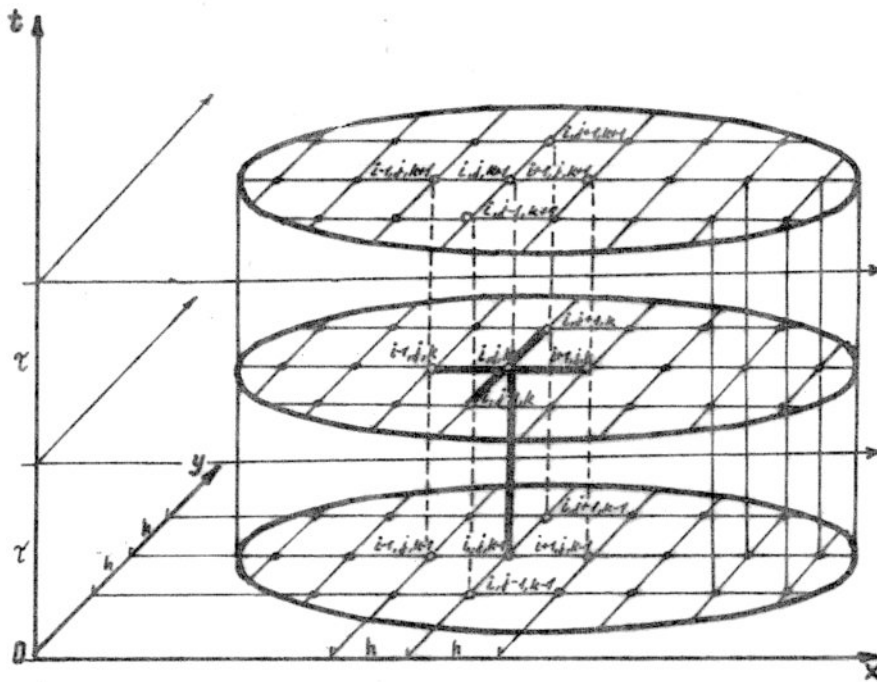
Wśród metod przybliżonego rozwiązywania zagadnień brzegowych najszerszej stosowane są metody siatkowe, realizowane między innymi za pomocą analogowych i hybrydowych analizatorów pola bazujących na elektrycznych modelach siatkowych [4], [47], [50], [51], [88]. Wadą samych elektrycznych modeli siatkowych jest długi czas przygotowywania siatki do obliczeń. Zmusiło to do prac w kierunku ich automatyzacji [46]. Takie zautomatyzowane siatki nazwano analizatorami pól. Mimo wielu zalet analogowe analizatory pola nie mają jednak szerokiego zastosowania. Dla wielu zagadnień istnieje konieczność wyliczeń rachunkowych, które należy przeprowadzać na maszynach cyfrowych. Dlatego najlepszym rozwiązaniem są układy hybrydowe. Maszyna cyfrowa służy tu do dokonywania obliczeń niemożliwych do uzyskania w analogowym analizatorze pola oraz do zarządzania organizacją pracy układu [11], [32]. Spośród metod siatkowych bazujących na dyskretyzacji ciągłych modeli matematycznych, opisujących badane procesy, można wyróżnić dwie najbardziej znane:

1. Metoda siatek oporowo-oporowych, znana pod nazwą metody Liebmana lub DSDT /discret space discret time/.
2. Metoda siatek oporowo-pojemnościowych, zwana też metodą Beukena lub DSCT /discret space continuous time/.

Podlegają one ciągłym udoskonaleniom i rozwojowi pozwalającemu na rozszerzenie zakresu zastosowań. Przedmiotem rozważań będzie metoda DSDT.

Niech obszar $\bar{\Theta}_T$ będzie trójwymiarową czasoprzestrzenią, w której określona jest ciągła funkcja φ będąca rozwiązaniem równania różniczkowego cząstkowego (2.3). Aby zamiast ciągłego zagadnienia brzegowego rozpatrywać zagadnienie brzegowe różnicowe /a do tego dążą metody siatkowe/, należy ciągły obszar zmian zmiennych niezależnych zastąpić dyskretnym zbiorem punktów /zwanych węzłami siatki/ oraz sformułować dyskretne odpowiedniki ciągłego równania, warunków początkowych i granicznych. Do dyskretyzacji obszaru $\bar{\Theta}_T$ najczęściej wykorzystywana jest siatka regularna. Składa się ona z prostopadłościanów, utworzonych zbiorem wzajemnie przecinających się płaszczyzn równoległych odpowiednio do płaszczyzn wyznaczonych osiami układu współrzędnych, tzn. do

płaszczyzn x - 0 - t , y - 0 - t , x - 0 - y /rys. 3.1/.



Rys. 3.1. Dyskretyzacja ciągłego obszaru $\bar{\Theta}_T$.

Punkty otrzymane z przecięcia się wzajemnie prostopadłych płaszczyzn /wierzchołki zbioru elementarnych sześcianów/ a zawarte w czaso-przestrzeni $\bar{\Theta}_T$, nazywa się węzłami siatki. Tym samym przyjęta siatka może być opisana zbiorem wszystkich swych węzłów

$\{(x_i, y_j, t_k) \in \bar{\Theta}_T\}$ /łącznie z węzłami leżącymi na granicy obszaru/:

$$\omega_{hh}^T = \omega_{hh} \times \omega^T = \{(x_i, y_j, t_k) : x_i, y_j \in \omega_{hh}, t_k \in \omega^T\}$$

$$\omega_{hh} = \{(x_i, y_j) \in \bar{\Omega}, h > 0, x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N; \quad (3.1)$$

$$y_j = j \cdot h, j = 0, 1, \dots, M\}$$

$$\omega^T = \{(t_k) \in [0, T], \tau > 0, t_k = k\tau, \tau = 0, 1, \dots, K\}.$$

Zbiór węzłów siatki leżących w płaszczyznach równoległych do płaszczyzny x - 0 - y nazywamy warstwą czasową. Odległości pomiędzy odpowiednimi bokami sześcianów, czyli odległości pomiędzy sąsiednimi węzłami siatki w kierunkach x i y przyjęto stałe i jednakowe:

$$\begin{aligned} (x_i, y_j, t_k) - (x_{i-1}, y_j, t_k) &= (x_{i+1}, y_j, t_k) - (x_i, y_j, t_k) = \\ &= (x_i, y_j, t_k) - (x_i, y_{j-1}, t_k) = (x_i, y_{j+1}, t_k) - (x_i, y_j, t_k) = h \end{aligned} \quad (3.2)$$

Warstwy czasowe oddalone są od siebie na odległość wyznaczoną przez przyjęcie wartości parametru τ :

$$(x_i, y_j, t_k) - (x_i, y_j, t_{k-1}) = (x_i, y_j, t_{k+1}) - (x_i, y_j, t_k) = \tau \quad (3.3)$$

Wprowadzone parametry h i τ nazywa się krokami siatki h - krok przestrzenny, τ - krok czasowy/.

Dyskretyzując w powyższy sposób obszar czasoprzestrzeni $\bar{\Theta}_T$, można zamiast określonej w nim funkcji ciągłej $\varphi(x, y, t)$ rozpatrywać funkcję siatkową $\varphi_{i,j}^k$ określoną na siatce ω_{hh}^τ . Jest to funkcja dyskretnych argumentów (x_i, y_j, t_k) .

Następny etap przechodzenia od ciągłego zagadnienia brzegowego do różnicowego, to ułożenie równań różnic skończonych, tzn. zależności arytmetycznych pomiędzy wielkościami $\varphi_{i,j}^k, \tau, h$. Stosując wzory różniczkowania numerycznego dla zamiany pochodnych cząstkowych w równaniu (2.3) różnicami skończonymi otrzymać można dla każdego węzła siatki równanie różnic skończonych. Do układania schematu różnicowego zagadnienia brzegowego /równanie różnicowe aproksymujące równanie różniczkowe cząstkowe plus zdyskretyzowane warunki początkowe i graniczne/ wykorzystywana jest pewna konfiguracja węzłów siatki zwana szablonem. Dla jednego i tego samego zadania można ułożyć dużo różnych schematów różnicowych w zależności od wybranego szablonu. Przyjęto dla węzła (x_i, y_j, t_k) szablon 6-cio węzłowy /rys. 3.1/ zapisany następująco:

$$S(x_i, y_j, t_k) = \left\{ \left[(x_i, y_j, t_k), (x_{i-1}, y_j, t_k), (x_{i+1}, y_j, t_k), (x_i, y_{j+1}, t_k), \right. \right. \\ \left. \left. ; (x_i, y_{j-1}, t_k), (x_i, y_j, t_{k-1}) \right] \in \omega_{hh}^\tau \right\} \quad (3.4)$$

Węzły wchodzące w skład szablonu znajdują się na dwu poziomach czasowych, przy czym tylko jeden na poziomie niższym $(k-1)$.

Schemat różnicowy dla przedstawionego szablonu nazywa się niejawnym. W równaniu (2.3) pochodne funkcji ciągłej $\varphi(x, y, t)$ można zastąpić różnicami skończonymi wykorzystując wartości funkcji siatkowej w węzłach należących do szablonu (3.4), aproksymując w ten sposób równanie różniczkowe schematem różnicowym. Wartości

pochodnych funkcji $\varphi(x, y, t)$ w węźle (x_i, y_j, t_k) można w przybliżeniu przedstawić w następującej postaci:

pierwsza pochodna względem współrzędnej geometrycznej -

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{i,i-1} &\approx \frac{\varphi_{i,j}^k - \varphi_{i-1,j}^k}{h} \quad i \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{i+1,i} \approx \frac{\varphi_{i+1,j}^k - \varphi_{i,j}^k}{h} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_{j,j-1} &\approx \frac{\varphi_{i,j}^k - \varphi_{i,j-1}^k}{h} \quad i \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_{j+1,j} \approx \frac{\varphi_{i,j+1}^k - \varphi_{i,j}^k}{h} \end{aligned} \quad (3.5)$$

druga pochodna względem współrzędnej geometrycznej -

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \Big|_i &\approx \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{i+1,i} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{i,i-1}}{h} = \frac{1}{h^2} (\varphi_{i-1,j}^k + \varphi_{i+1,j}^k - 2\varphi_{i,j}^k) \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \Big|_j &\approx \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_{j+1,j} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_{j,j-1}}{h} = \frac{1}{h^2} (\varphi_{i,j+1}^k + \varphi_{i,j-1}^k - 2\varphi_{i,j}^k) \end{aligned} \quad (3.6)$$

pochodna czasowa -

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \approx \frac{\varphi_{i,j}^k - \varphi_{i,j}^{k-1}}{\tau} \quad (3.7)$$

przy czym: $\varphi_{i,j}^k$ - obcięcie funkcji $\varphi(x, y, t)$ do siatki ω_{hh}^{τ} .
Aby określić błąd popełniany przy tego rodzaju aproksymacji rozłożyć można funkcję φ w węzłach (x_{i-1}, y_j, t_k) i (x_{i+1}, y_j, t_k) w szereg Taylora:

$$\begin{aligned} \varphi_{i+1,j}^k &= \varphi_{i,j}^k + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{i,j,k} \cdot h + \frac{h^2}{2!} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \Big|_{i,j,k} + \frac{h^3}{3!} \cdot \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} \Big|_{i,j,k} + \\ &\quad + \frac{h^4}{4!} \cdot \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} \Big|_{i,j,k} + \dots \\ \varphi_{i-1,j}^k &= \varphi_{i,j}^k - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{i,j,k} \cdot h + \frac{h^2}{2!} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \Big|_{i,j,k} - \frac{h^3}{3!} \cdot \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} \Big|_{i,j,k} + \\ &\quad + \frac{h^4}{4!} \cdot \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} \Big|_{i,j,k} - \dots \end{aligned} \quad (3.8)$$

Po dodaniu stronami otrzymuje się:

$$\varphi_{i+1,j}^k + \varphi_{i-1,j}^k - 2\varphi_{i,j}^k = h^2 \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \Big|_{i,j,k} + \frac{h^4}{12} \cdot \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} \Big|_{i,j,k} +$$

$$+ \frac{h^6}{360} \cdot \frac{\partial^6 \varphi}{\partial x^6} \Big|_{i,j,k} + \dots$$

lub

(3.9)

$$\frac{\varphi_{i+1,j}^k + \varphi_{i-1,j}^k - 2\varphi_{i,j}^k}{h^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \Big|_{i,j,k} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} \Big|_{i,j,k} \cdot \frac{h^2}{12} + \frac{\partial^6 \varphi}{\partial x^6} \Big|_{i,j,k} \cdot \frac{h^4}{360} +$$

$$+ \dots$$

Podobnie dla węzłów (x_i, y_{j+1}, t_k) i (x_i, y_{j-1}, t_k) otrzymuje się:

$$\frac{\varphi_{i,j+1}^k + \varphi_{i,j-1}^k - 2\varphi_{i,j}^k}{h^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \Big|_{i,j,k} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} \Big|_{i,j,k} \cdot \frac{h^2}{12} + \frac{\partial^6 \varphi}{\partial y^6} \Big|_{i,j,k} \cdot \frac{h^4}{360} +$$

$$+ \dots \quad (3.10)$$

Dla węzła (x_i, y_j, t_{k-1}) :

$$\varphi_{i,j}^{k-1} = \varphi_{i,j}^k - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{i,j,k} \cdot \tau + \frac{\tau^2}{2!} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \Big|_{i,j,k} - \frac{\tau^3}{3!} \cdot \frac{\partial^3 \varphi}{\partial t^3} \Big|_{i,j,k} +$$

$$+ \frac{\tau^4}{4!} \cdot \frac{\partial^4 \varphi}{\partial t^4} \Big|_{i,j,k} - \dots \quad (3.11)$$

skąd:

$$\frac{\varphi_{i,j}^k - \varphi_{i,j}^{k-1}}{\tau} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{i,j,k} - \frac{\tau}{2!} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \Big|_{i,j,k} + \frac{\tau^2}{3!} \cdot \frac{\partial^3 \varphi}{\partial t^3} \Big|_{i,j,k} -$$

$$- \frac{\tau^3}{4!} \cdot \frac{\partial^4 \varphi}{\partial t^4} \Big|_{i,j,k} + \dots$$

Wykorzystując otrzymane przybliżenia pochodnych przy dyskretyzacji np. równania:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (3.12)$$

otrzymuje się:

$$\frac{\varphi_{i+1,j}^k + \varphi_{i-1,j}^k - 2\varphi_{i,j}^k}{h^2} + \frac{\varphi_{i,j+1}^k + \varphi_{i,j-1}^k - 2\varphi_{i,j}^k}{h^2} = \frac{\varphi_{i,j}^k - \varphi_{i,j}^{k-1}}{\tau} +$$

$$+ \frac{\tau}{2!} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\tau^2}{3!} \cdot \frac{\partial^3 \varphi}{\partial t^3} + \frac{\tau^3}{4!} \cdot \frac{\partial^4 \varphi}{\partial t^4} + \dots + \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} \right) + \frac{h^4}{360} \left(\frac{\partial^6 \varphi}{\partial x^6} + \frac{\partial^6 \varphi}{\partial y^6} \right) + \dots$$

Widać, że aproksymując pochodne cząstkowe różnicami skończonymi popełnia się błąd równy:

$$R_0 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{\tau^n}{(n+1)!} \cdot \frac{\partial^{n+1} \varphi}{\partial t^{n+1}} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2 \cdot h^{2n-2}}{(2n)!} \left(\frac{\partial^{2n} \varphi}{\partial x^{2n}} + \frac{\partial^{2n} \varphi}{\partial y^{2n}} \right) \quad (3.14)$$

Dokładność aproksymacji może być zwiększona drogą zmniejszenia kroków siatki h i τ .

Stosując do aproksymacji różnicowej liniowego równania różniczkowego cząstkowego niejawnny schemat różnicowy, sprowadza się to równanie do układu liniowych równań różnicowych /algebraicznych/ w skończonej ilości $(N-1)(M-1)$ wybranych węzłów obszaru dla każdej chwili czasowej $t_k = k\tau$. Zatem należy rozwiązać K układów równań algebraicznych z $(N-1)(M-1)$ niewiadomymi. W przypadku różnicowej aproksymacji równania quasiliniowego (2.3) schematem niejawnym, możliwe jest otrzymywanie dwu wariantów [37]. W wariacie liniowym:

$$\frac{1}{h} \left[a_{i+\frac{1}{2},j}^{k-1} \frac{(\varphi_{i+1,j}^k - \varphi_{i,j}^k)}{h} - a_{i-\frac{1}{2},j}^{k-1} \frac{(\varphi_{i,j}^k - \varphi_{i-1,j}^k)}{h} \right] +$$

$$+ \frac{1}{h} \left[a_{i,j+\frac{1}{2}}^{k-1} \frac{(\varphi_{i,j+1}^k - \varphi_{i,j}^k)}{h} - a_{i,j-\frac{1}{2}}^{k-1} \frac{(\varphi_{i,j}^k - \varphi_{i,j-1}^k)}{h} \right] = \quad (3.15)$$

$$= B(x_i, y_j, \varphi_{i,j}^{k-1}) \cdot \frac{(\varphi_{i,j}^k - \varphi_{i,j}^{k-1})}{\tau}$$

przy czym:

$$a_{i\pm\frac{1}{2},j}^{k-1} = \frac{1}{2} \left[A(x_i, y_j, \varphi_{i,j}^{k-1}) + A(x_{i\pm 1}, y_j, \varphi_{i\pm 1,j}^{k-1}) \right]$$

$$a_{i,j\pm\frac{1}{2}}^{k-1} = \frac{1}{2} \left[A(x_i, y_j, \varphi_{i,j}^{k-1}) + A(x_i, y_{j\pm 1}, \varphi_{i,j\pm 1}^{k-1}) \right]$$

parametry a i B zależą od wartości siatkowej funkcji stanu z warstwy czasowej $k-1$ i dlatego też otrzymamy układ liniowych równań algebraicznych, chociaż samo zagadnienie różnicowe brzegowe pozostaje quasiliniowym. W wariancie nieliniowym wartości parametrów a i B zależą od wartości siatkowej funkcji stanu z warstwy czasowej k i dlatego otrzymamy układ nieliniowy względem $\varphi_{i,j}^k$:

$$\begin{aligned} a_{i\pm\frac{1}{2},j}^k &= A \left[x_{i\pm\frac{1}{2}}, y_j, \frac{1}{2} \cdot (\varphi_{i,j}^k + \varphi_{i\pm 1,j}^k) \right] \\ a_{i,j\pm\frac{1}{2}}^k &= A \left[x_i, y_{j\pm\frac{1}{2}}, \frac{1}{2} \cdot (\varphi_{i,j}^k + \varphi_{i,j\pm 1}^k) \right] \end{aligned} \quad (3.16)$$

Oba schematy na 4-krotne różniczkowalnej ciągłej funkcji mają uchyb aproksymacji rzędu $O(\tau + h^2)$.

W powyższych przykładach zagadnienia różnicowe aproksymują zagadnienia wyjściowe. Lecz spełnienie warunku aproksymacji różnicowej operatora L działającego na funkcję $\varphi(x,y,t)$ operatorem różnicowym $L_{h\tau}$ działającym na funkcję siatkową $\varphi_{h\tau}$ w węzłach należących do przyjętego szablonu nie wystarcza dla zbieżności rozwiązania zagadnienia różnicowego do rozwiązania dokładnego. Powinno być jeszcze spełnione określone wymagania warunku stabilności schematu różnicowego [74]. Można przypuszczać, że jeżeli zagadnienie odwrotne jest poprawnie postawione wg Tichonowa i schemat różnicowy aproksymuje to zagadnienie, to stabilność schematu różnicowego jest koniecznym i wystarczającym warunkiem zbieżności rozwiązania odwrotnego zagadnienia różnicowego do rozwiązania zagadnienia wyjściowego, czyli:

$$\text{zbieżność } \|A_{h\tau} - A\| \rightarrow 0 \text{ i } \|B_{h\tau} - B\| \rightarrow 0 \text{ przy } h, \tau \rightarrow 0 \quad (3.17)$$

wynika z

$$\text{aproksymacji } \|L\varphi\| \rightarrow 0 \text{ przy } h, \tau \rightarrow 0 \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \text{i stabilności } \|\varphi\| \sim \|A_{h\tau}\| \quad \text{i} \quad \|\varphi\| \sim \|B_{h\tau}\| \\ \text{tzn. } \|\varphi\| \leq \text{const} \cdot \|A_{h\tau}\| \quad \text{i} \quad \|\varphi\| \leq \text{const} \cdot \|B_{h\tau}\| \end{aligned} \quad (3.19)$$

Rząd dokładności rozwiązania powinien być wtedy taki sam jak rząd aproksymacji. Schemat niejawny jest bezwarunkowo stabilny w przypadku rozwiązywania prostych zagadnień brzegowych dla dowolnych stosunków kroków h i τ . Jednak dla różnicowego zagadnienia odwrotnego istnieje problem poprawności postawienia zadania.

Schemat różnicowy jest czuły na błędy aproksymacji, zaokrągleń w procesie obliczeniowym i błędy pomiarów, co może prowadzić do rozwiązań znacznie odbiegających od rozwiązań dokładnych. Badanie stabilności rozwiązywania zagadnień różnicowych prowadzone jest na ich modelach liniowych. Ograniczać się można do problemu liniowego o stałych współczynnikach /"zamrażanie" współczynników/ dlatego, że aproksymację różnicową scharakteryzować można jako lokalną, gdyż skupiamy się na otoczeniu jednego węzła obliczeniowego /obszar szablonu/ o rozmiarach rzędu τ , h . Zagadnienie rozpatrywane w małym otoczeniu, gdzie zmiana rozwiązania jest niewielka, można przybliżyć zagadnieniem liniowym o stałych współczynnikach [16].

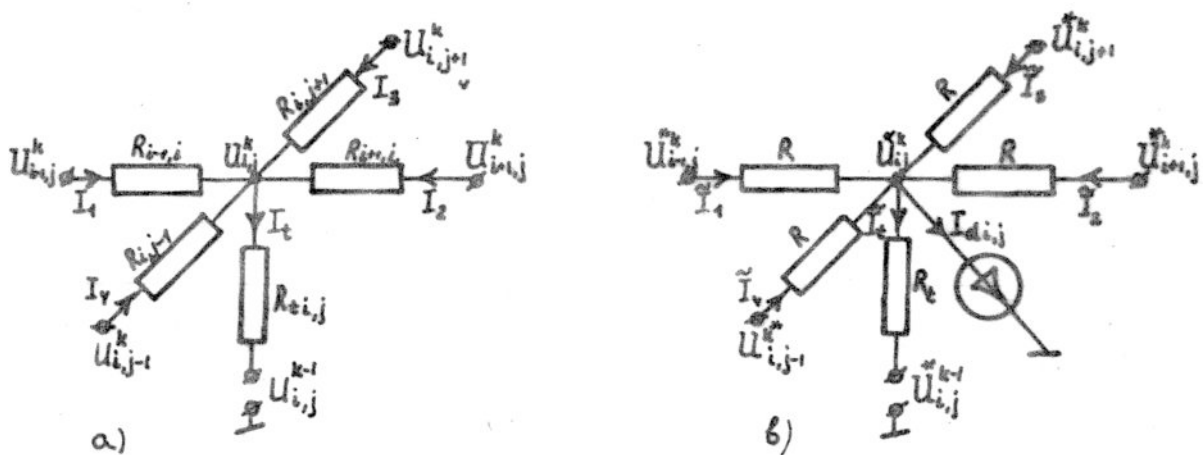
Teoria schematów różnicowych dla prostych zagadnień brzegowych jest dość dobrze opracowana [23], [71], [75]. Natomiast w przypadku zagadnień odwrotnych opracowania teoretyczne są dopiero na etapie wstępnym [14], [22], [55], [59]. Brak teorii matematycznych utrudnia lub wręcz uniemożliwia analizę i udowodnienie zbieżności rozwiązań. Dopuszczalne jest dlatego skupienie się na badaniach symulacyjnych schematów różnicowych /przeprowadzać je należy również i wtedy, gdy istnieje już dostatecznie obowiązująca teoria schematów różnicowych/. Po upewnieniu się o spełnieniu warunku lokalnej aproksymacji, dla sprawdzenia schematu różnicowego należy przeprowadzić serię testowych przykładów obliczeniowych z zagęszczaniem siatki. Chodzi o stwierdzenie że rozwiązanie różnicowe przy $h, \tau \rightarrow 0$ zbiega się do pewnej granicy i o porównanie rozwiązania różnicowego z dokładnym.

Podobnym równaniem różnicowym, jak dla węzła (x_i, y_j, t_k) z rys. 3.1. z wykorzystaniem szablonu (3.4), opisany jest rozływ prądów w jednym z wewnętrznych węzłów oporowej sieci elektrycznej z rys. 3.2 a. Dla węzła (i, j, k) można zapisać:

$$\sum_{i=1}^4 I_i = I_t$$

$$\frac{U_{i-1,j}^k - U_{i,j}^k}{R_{i-1,i}} + \frac{U_{i+1,j}^k - U_{i,j}^k}{R_{i+1,i}} + \frac{U_{i,j+1}^k - U_{i,j}^k}{R_{j+1,j}} + \frac{U_{i,j-1}^k - U_{i,j}^k}{R_{j-1,j}} =$$

$$= \frac{U_{i,j}^k - U_{i,j}^{k-1}}{R_{ti,j}} \quad (3.20)$$



Rys. 3.2. Wewnętrzny węzeł oporowej sieci elektrycznej:

a/ węzeł analogowej sieci oporowej R-R;

b/ węzeł quasianalogowej sieci oporowej R-R.

Dla zobrazowania układu równań z n niewiadomymi przy pomocy I-go prawa Kirchhoffa wymagany jest elektryczny model w postaci zamkniętego układu, posiadającego $(n+1)$ punktów węzłowych. Analogia typu elektrycznego pozwala na modelowanie zjawisk i procesów fizycznych /zagadnień brzegowych/ za pomocą elektrycznych siatek oporowych, chociaż nie ma tu żadnego podobieństwa charakteru fizycznego. Modelowanie na analogach bazuje na teorii podobieństwa zjawisk. Pomiedzy dwoma zjawiskami występuje analogia matematyczna wówczas, gdy mogą być one opisane podobnymi równaniami matematycznymi [4]. Oczywiście pomiędzy odpowiednimi wielkościami tych równań /dla konkretnych zadań/ powinny istnieć w odpowiedniej skali określone zależności opisywane kryteriami podobieństwa. Analogia występuje między równaniami (3.15) i (3.20), gdy spełnione są następujące warunki:

$$\varphi = k_u \cdot U \quad ; \quad \frac{a_{i \pm 2, j}^{k-1}}{h^2} = k_G \cdot G_{i \pm 1, i} ;$$

$$\frac{B(x_i, y_j, \varphi_{i,j}^{k-1})}{\tau} = k_t \cdot G_{ti} ; \quad \frac{a_{i, j \pm 2}^{k-1}}{h^2} = k_G \cdot G_{j \pm 1, j} ; \quad \frac{k_t}{k_G} = 1 ; \quad (3.21)$$

przy czym: k_u , k_t , k_G - stałe analogii /współczynniki skali/;

$$G_{ti} = \frac{1}{R_{ti}} ; \quad G_{j\pm 1,j} = \frac{1}{R_{j\pm 1,j}} ; \quad G_{i\pm 1,i} = \frac{1}{R_{i\pm 1,i}} .$$

Mając tak zbudowany elektryczny model siatkowy wyznaczyć można wielkości rozwiązania $U_{i,j}^k$ mierząc poszczególne napięcia w węzłach, w odniesieniu do węzła zerowego. Dokładność rozwiązania uzależniona jest od dokładności doboru oporników siatki oraz od dokładności pomiaru napięć. Rozwiązanie zagadnienia prostego otrzymuje się w wyniku realizacji procedury Liebmana [50], [51] .

Najczęściej spotyka się obiekty o własnościach w dużym stopniu zróżnicowanych /ośrodek charakteryzuje niejednorodność, anizotropowość, zmienność własności w czasie oraz ich zależność od funkcji stanu/, co zmusza do stosowania siatki oporowej R-R o różnych wartościach oporników. Powoduje to niemałe trudności w realizacji procedury rozwiązywania zagadnień brzegowych na takich analizatorach pola. Istnieje możliwość zastąpienia siatki niejednorodnej R-R quasianalogowym modelem z jednorodną siatką R-R i dodatkowymi sterowanymi źródłami prądowymi. Dąży się do tego, aby otrzymywane rozwiązanie zagadnienia brzegowego na niejednorodnej siatce R-R było identyczne z wynikiem rozwiązania przy wykorzystaniu jednorodnej siatki R-R, tzn. chcemy otrzymać quasianalog, który byłby ekwiwalentny modelowi analogowemu względem otrzymywanych wyników.

Modele quasianalogowe charakteryzują się tym, że dla nich równania modelującego urządzenia i modelowanego obiektu nie są podobne. Elementy teorii układów quasianalogowych oraz zasady budowy quasianalogów zostały opracowane przez G.E. Puchowa [65], [66]. Realizacje techniczne opisów matematycznych są modelami nie samych obiektów rzeczywistych /modelowanych/ lecz układu równań algebraicznych, otrzymywanych w wyniku określonych i dopuszczalnych uproszczeń opisu ciągłego. Model quasianalogowy jakichkolwiek równań wyjściowych jest modelem analogowym innych równań częściowo niepodobnych do zadanych, ale takich, żeby przy spełnieniu określonych warunków /kryteriów równoważności/ niewiadome tych równań odpowiadały niewiadomym równań wyjściowych. Dla siatkowego modelu quasianalogowego zadanymi układami równań są układy równań algebraicznych, otrzymywane w wyniku aproksymacji

ciągłego zagadnienia brzegowego odpowiednim zagadnieniem różnicowym. Modele quasianalogowe, dla których warunki równoważności wymagają korzystania z rozwiązań otrzymywanych z modelu nazywa się modelami równoważącymi. W takich modelach wyodrębnić można część przeznaczoną do realizacji procesu równoważenia /w celu określenia szukanych niewiadomych/. W odróżnieniu od modelu analogowego, równoważące modele quasianalogowe posiadają sprzężenia zwrotne. Rozważano modele quasianalogowe równoważące typu siatek elektrycznych składające się z jednorodnej siatki R-R oraz źródeł napięcia i prądu [60], [72], [78]. Dodatkowe źródła prądowe uwzględniają wpływ zróżnicowanych własności obiektu, tzn. odchylenia ich od pewnych przyjętych własności bazowych odzwierciedlonych wartością R siatki jednorodnej. Jeżeli np. obiekt modelowania dla modelu analogowego był opisany układem równań algebraicznych w postaci macierzowej $DU = F$, to dla modelu quasianalogowego opisem będzie układ równań $\tilde{D}U^* = F + I_d$. Równoważenie modelu polega na odpowiednim doborze wektora I_d , przy którym wektor odchylenia rozwiązania $\mathcal{E} = U - U^*$ będzie zerowy /lub $\mathcal{E} \leq \mathcal{E}_0$ /. Na rys. 3,2,b przedstawiono jeden z węzłów sieci oporowej modelu quasianalogowego. Dla tego węzła można zapisać:

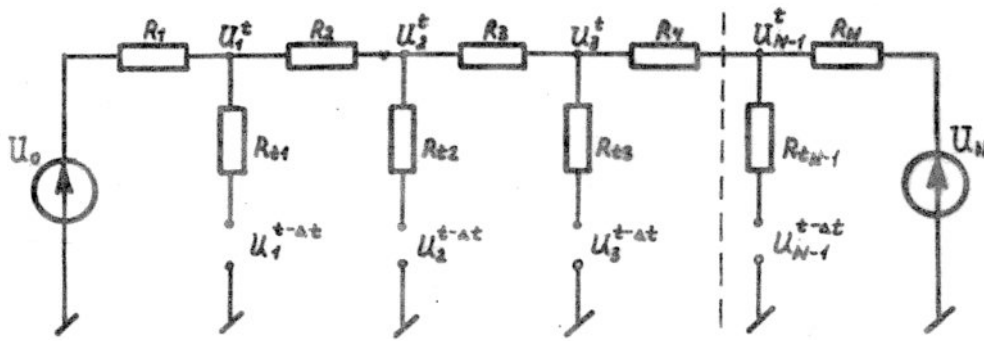
$$\frac{U_{i-1,j}^k - U_{i,j}^k}{R} + \frac{U_{i+1,j}^k - U_{i,j}^k}{R} + \frac{U_{i,j+1}^k - U_{i,j}^k}{R} + \frac{U_{i,j-1}^k - U_{i,j}^k}{R} =$$

$$\text{lub} \quad = \frac{U_{i,j}^k - U_{i,j}^{k-1}}{R_t} + I_{di,j}^k \quad (3.22)$$

$$\frac{1}{R} \left(U_{i-1,j}^k + U_{i+1,j}^k + U_{i,j+1}^k + U_{i,j-1}^k - 4U_{i,j}^k \right) = \frac{U_{i,j}^k - U_{i,j}^{k-1}}{R_t} + I_{di,j}^k$$

3.3. Przykład ekwiwalentności względem rozwiązania dwóch symulatorów - analogowego i quasianalogowego

Na rys. 3.4 przedstawiono model analogowy z niejednorodną siatką R-R [80] .

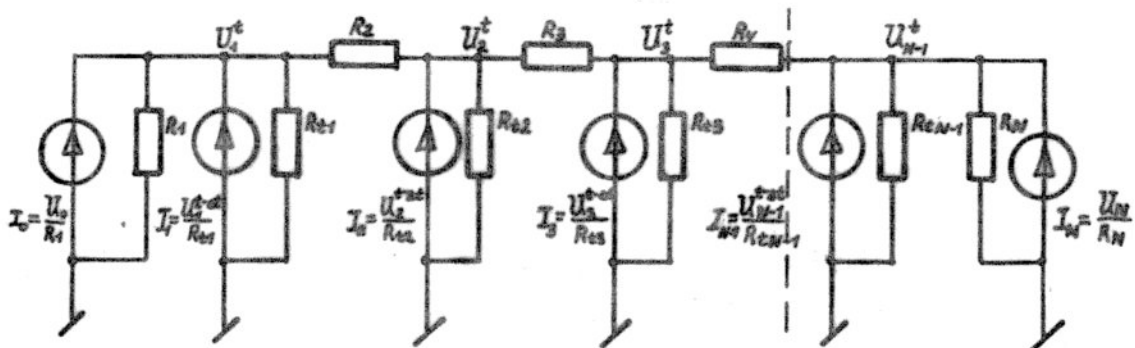


Rys. 3.4. Model analogowy z niejednorodną siatką R-R.

Przekształcając siatkę z rys. 3.4 do postaci pokazanej na rys. 3.5 można napisać, w oparciu o metodę potencjałów węzłowych, układ równań opisujących dany model analogowy:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_1} \cdot U_0 + \frac{1}{R_{t_1}} \cdot U_1^{k-1} &= \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_{t_1}} + \frac{1}{R_2} \right) \cdot U_1^k - \frac{1}{R_2} \cdot U_2^k \\ \frac{1}{R_{t_2}} \cdot U_2^{k-1} &= -\frac{1}{R_2} \cdot U_1^k + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_{t_2}} \right) \cdot U_2^k - \frac{1}{R_3} \cdot U_3^k \\ \frac{1}{R_{t_3}} \cdot U_3^{k-1} &= -\frac{1}{R_3} \cdot U_2^k + \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_{t_3}} \right) \cdot U_3^k - \frac{1}{R_4} \cdot U_4^k \quad (3.23) \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\frac{1}{R_N} \cdot U_N + \frac{1}{R_{t_{N-1}}} \cdot U_{N-1}^{k-1} = -\frac{1}{R_{N-1}} \cdot U_{N-2}^k + \left(\frac{1}{R_{N-1}} + \frac{1}{R_N} + \frac{1}{R_{t_{N-1}}} \right) \cdot U_{N-1}^k$$



Rys. 3.5. Równoważny model analogowy z niejednorodną siatką R-R

Układ równań (3.23) zapisany w postaci macierzowej jest następujący:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1}; \frac{1}{R_{t1}}; 0; \dots; 0; \\ 0; 0; \frac{1}{R_{t2}}; 0; \dots; 0; \\ 0; 0; 0; \frac{1}{R_{t3}}; 0; \dots; 0; \\ \vdots \\ 0; 0; \dots; \frac{1}{R_{tN-1}}; \frac{1}{R_N}; \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1^{k-1} \\ U_2^{k-1} \\ \vdots \\ U_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_{t1}}); -\frac{1}{R_2}; 0; \dots; 0; \\ -\frac{1}{R_2}; (\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_{t2}}); -\frac{1}{R_3}; 0; \dots; 0; \\ 0; -\frac{1}{R_3}; (\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_{t3}}); -\frac{1}{R_4}; 0; \dots; 0; \\ \vdots \\ 0; \dots; 0; -\frac{1}{R_{N-1}}; (\frac{1}{R_{N-1}} + \frac{1}{R_N} + \frac{1}{R_{tN-1}}); \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_1^k \\ U_2^k \\ U_3^k \\ \vdots \\ U_{N-1}^k \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

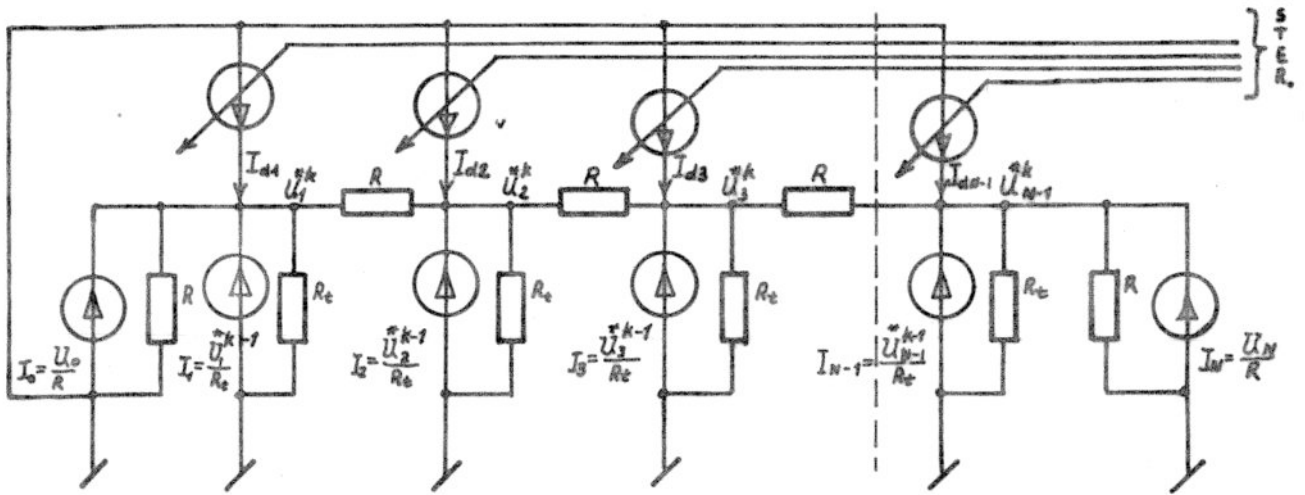
lub: $[G_{NB}] \times [U_B] = [G_{NS}] \times [U_S]$

przy czym:

- $[G_{NB}]$ - prostokątna macierz o wymiarach $(N-1, N+1)$;
- $[U_B]$ - jednowymiarowa macierz o $(N+1)$ wierszach;
- $[G_{NS}]$ - kwadratowa macierz o wymiarach $(N-1, N-1)$;
- $[U_S]$ - jednowymiarowa macierz o $(N-1)$ wierszach.

Układ równań opisujący ekwiwalentny względem rozwiązania quasiana-log /rys. 3.6/ jest następujący:

$$\begin{aligned} I_{d1} + \frac{1}{R} \cdot U_0 + \frac{1}{R_t} \cdot U_1^{*k-1} &= \left(\frac{2}{R} + \frac{1}{R_t} \right) \cdot U_1^{*k} - \frac{1}{R} \cdot U_2^{*k} \\ I_{d2} + \frac{1}{R_t} \cdot U_2^{*k-1} &= -\frac{1}{R} \cdot U_1^{*k} + \left(\frac{2}{R} + \frac{1}{R_t} \right) \cdot U_2^{*k} - \frac{1}{R} \cdot U_3^{*k} \\ I_{d3} + \frac{1}{R_t} \cdot U_3^{*k-1} &= -\frac{1}{R} \cdot U_2^{*k} + \left(\frac{2}{R} + \frac{1}{R_t} \right) \cdot U_3^{*k} - \frac{1}{R} \cdot U_4^{*k} \\ &\vdots \\ I_{dN-1} + \frac{1}{R} \cdot U_N + \frac{1}{R_t} \cdot U_{N-1}^{*k-1} &= -\frac{1}{R} \cdot U_{N-2}^{*k} + \left(\frac{2}{R} + \frac{1}{R_t} \right) \cdot U_{N-1}^{*k} \end{aligned} \quad (3.25)$$



Rys. 3.6. Model quasianalogowy /jednorodna siatka R-R i sterowane dodatkowe źródła prądowe/

Równania (3.25) można zapisać w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} I_{d1} \\ I_{d2} \\ I_{d3} \\ \vdots \\ I_{dN-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R}; \frac{1}{R_t}; 0; \dots; 0; \\ 0; 0; \frac{1}{R_t}; 0; \dots; 0; \\ 0; 0; 0; \frac{1}{R_t}; \dots; 0; \\ \vdots \\ 0; 0; \dots; \frac{1}{R_t}; \frac{1}{R} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1^{*k-1} \\ U_2^{*k-1} \\ \vdots \\ U_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\frac{2}{R} + \frac{1}{R_t}); -\frac{1}{R}; 0; \dots; 0; \\ -\frac{1}{R}; (\frac{2}{R} + \frac{1}{R_t}); -\frac{1}{R}; 0; \dots; 0; \\ 0; -\frac{1}{R}; (\frac{2}{R} + \frac{1}{R_t}); -\frac{1}{R}; 0; \dots; 0; \\ \vdots \\ 0; 0; \dots; 0; -\frac{1}{R}; (\frac{2}{R} + \frac{1}{R_t}) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_1^{*k} \\ U_2^{*k} \\ U_3^{*k} \\ \vdots \\ U_{N-1}^{*k} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

lub: $[I_d] + [G_{JB}] \times [U_B^*] = [G_{JS}] [U_S^*]$

przy czym:

$[I_d]$ - jednowymiarowa macierz o (N-1) wierszach;

$[G_{JB}] [U_B^*] [G_{JS}] [U_S^*]$ - macierze, których wymiarowość jest odpowiednio jednakowa z $[G_{NB}] [U_B^*] [G_{NS}] [U_S^*]$.

Otrzymano dwa układy równań:

$$\begin{aligned} [G_{NB}] \times [U_B] &= [G_{NS}] \times [U_S] \\ [I_d] + [G_{JB}] \times [U_B^*] &= [G_{JS}] \times [U_S^*] \end{aligned} \quad (3.27)$$

Aby otrzymać ekwiwalentność układów (3.27) względem rozwiązań, $[U_S]$ i $[U_S^*]$ muszą być sobie równe przy jednakowych warunkach brzegowych $[U_B] = [U_B^*]$. Należy więc tak zmieniać $[I_d]$, aby tym samym uwzględnić różnicę w wartościach oporności modelu analogowego i quasianalogowego. Wartości $[I_d]$ / uważane za pewnego rodzaju parametry modelu / są nastrajane do tego czasu, aż uchyb sygnałów $[U_S]$ i $[U_S^*]$ będzie nie większy od dopuszczalnej wartości $[\varepsilon_0]$. Otrzymamy wtedy rozkład $[U_S^*]$ odpowiadający, lub maksymalnie zbliżony do żadanego rozkładu $[U_S]$ w dyskretnych punktach obserwacji. Jako kryterium jakości doboru wartości $[I_d]$ może służyć wartość miary odchylenia wartości potencjału $[U_S]$ w określonych punktach przestrzeni od $[U_S^*]$, obliczonych na modelu w tych samych punktach. Za taką miarę odchylenia możemy przyjąć sumę średnich kwadratów różnic wartości potencjałów zmierzonych i obliczonych ($[U_S]$ i $[U_S^*]$) we wszystkich punktach pomiarowych:

$$J = \sum_{i=1}^{N-1} \varepsilon_i^2 \quad - \text{ w jednym kroku czasowym}$$

oraz

$$J_t = \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{N-1} \varepsilon_i^{2k} \quad - \text{ za okres K kroków czasowych} \quad (3.28)$$

przy czym:

$$\varepsilon_i^k = U_{S_i}^k - U_{S_i}^{*k} \quad - \text{ wartość uchybu w } i\text{-tym punkcie} \quad (3.29)$$

pomiarowym, w k-tym kroku czasowym.

Minimum funkcjonału J_t otrzymamy, gdy każde

$$\varepsilon_i^k = \min |U_{S_i}^k - U_{S_i}^{*k}| \quad (3.30)$$

Ogólnie:

$$[\varepsilon] = [U_S] - [U_S^*] = [G_{NS}]^{-1} \times [G_{NB}] \times [U_B] - [G_{JS}]^{-1} ([I_d] + [G_{JB}] \times [U_B^*]) \quad (3.31)$$

Każdą wartość ε_i można przedstawić w postaci szeregu uchybowego względem wartości I_{ds} :

$$\varepsilon_i = \sum_{s=1}^{N-1} \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial I_{ds}} \cdot I_{ds} \quad (3.32)$$

przy czym:

$$\left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial I_d} \right] = [G_{JS}]^{-1} \quad - \text{ macierz współczynników wrażliwości siatki} \\ \text{jednorodnej.}$$

Wartości $[G]^{-1}$ są obliczane jednorazowo dla konkretnych oporników siatki. Można wyprowadzić ogólny wzór na obliczanie wartości współczynników wrażliwości siatki w zależności od ilości węzłów siatki:

$$[G_{JS}]^{-1} = \frac{[A]^T}{|G_{JS}|} \quad (3.33)$$

przy czym:

$$|G|_{2 \times 2} = \left(\frac{2}{R} + \frac{1}{R_t} \right)^2 - \frac{1}{R^2}$$

$$|G|_{3 \times 3} = \left(\frac{2}{R} + \frac{1}{R_t} \right)^3 - \frac{2}{R^2} \left(\frac{2}{R} + \frac{1}{R_t} \right)^1$$

$$|G|_{4 \times 4} = \left(\frac{2}{R} + \frac{1}{R_t} \right)^4 - \frac{3}{R^2} \left(\frac{2}{R} + \frac{1}{R_t} \right)^2 + \frac{1}{R^4}$$

$$|G|_{5 \times 5} = \left(\frac{2}{R} + \frac{1}{R_t} \right)^5 - \frac{4}{R^2} \left(\frac{2}{R} + \frac{1}{R_t} \right)^3 + \frac{2}{R^4} \left(\frac{2}{R} + \frac{1}{R_t} \right)^1$$

$$|G|_{i \times i} = \left(\frac{2}{R} + \frac{1}{R_t} \right)^i - \frac{i-1}{R^2} \left(\frac{2}{R} + \frac{1}{R_t} \right)^{i-2} + \sum_{l=2}^{\text{entier } \frac{i}{2}} \frac{1}{2} \frac{a_l}{R^{2l}} \left(\frac{2}{R} + \frac{1}{R_t} \right)^{i-2l} \cdot (-1)^l \quad (3.34)$$

Trzecia składowa we wzorze (3.34) pojawi się gdy $i \geq 4$. Wartości współczynników a_l można wyznaczyć z tabeli 1.

Tabela 1.

i	a_2	a_3	a_4	a_5	→
4	1				
5	2				
6	6	1			
7	10	4			
8	15	10	1		
9	21	20	6		
10	28	35	16	1	
11	36	46	36	8	
12	45	74	71	24	
13	55	110	117	60	
14	66	155	191	131	
15	78	210	301	248	
...	...	...	...	...	
	$a_{2 i}$		$a_{1 i}$		

$$i \geq 8$$

$$a_{2|i} = 1 \cdot a_{2|i-1} + a_{2|i-2}$$

$$\text{dla } i \geq 3, i \geq 8 \quad (3.35)$$

$$a_{1|i} = a_{1|i-2} + a_{1|i-1}$$

$$[A]_{2 \times 2}^T = \begin{bmatrix} |G|_{1 \times 1} & -\frac{1}{R} \\ -\frac{1}{R} & |G|_{1 \times 1} \end{bmatrix}; [A]_{3 \times 3}^T = \begin{bmatrix} |G|_{2 \times 2} & -\frac{1}{R} |G|_{1 \times 1} & \frac{1}{R^2} \\ -\frac{1}{R} |G|_{1 \times 1} & |G|_{1 \times 1} |G|_{1 \times 1} & -\frac{1}{R} |G|_{1 \times 1} \\ \frac{1}{R^2} & -\frac{1}{R} |G|_{1 \times 1} & |G|_{2 \times 2} \end{bmatrix};$$

$$[A]_{4 \times 4}^T = \begin{bmatrix} |G|_{3 \times 3} & -\frac{1}{R} |G|_{2 \times 2} & \frac{1}{R^2} |G|_{1 \times 1} & -\frac{1}{R^3} \\ -\frac{1}{R} |G|_{2 \times 2} & |G|_{1 \times 1} |G|_{2 \times 2} & -\frac{1}{R} |G|_{1 \times 1} |G|_{1 \times 1} & \frac{1}{R^2} |G|_{1 \times 1} \\ \frac{1}{R^2} |G|_{1 \times 1} & -\frac{1}{R} |G|_{1 \times 1} |G|_{1 \times 1} & |G|_{2 \times 2} |G|_{1 \times 1} & -\frac{1}{R} |G|_{2 \times 2} \\ -\frac{1}{R^3} & \frac{1}{R^2} |G|_{1 \times 1} & -\frac{1}{R} |G|_{2 \times 2} & |G|_{3 \times 2} \end{bmatrix}$$

$$[A]_{5 \times 5}^T = \begin{bmatrix} |G|_{4 \times 4} & -\frac{1}{R} |G|_{3 \times 3} & \frac{1}{R^2} |G|_{2 \times 2} & -\frac{1}{R^3} |G|_{1 \times 1} & \frac{1}{R^4} \\ -\frac{1}{R} |G|_{3 \times 3} & |G|_{1 \times 1} |G|_{3 \times 3} & -\frac{1}{R} |G|_{1 \times 1} |G|_{2 \times 2} & \frac{1}{R^2} |G|_{1 \times 1} |G|_{1 \times 1} & -\frac{1}{R^3} |G|_{1 \times 1} \\ \frac{1}{R^2} |G|_{2 \times 2} & -\frac{1}{R} |G|_{1 \times 1} |G|_{2 \times 2} & |G|_{2 \times 2} |G|_{2 \times 2} & -\frac{1}{R} |G|_{2 \times 2} |G|_{1 \times 1} & \frac{1}{R^2} |G|_{2 \times 2} \\ -\frac{1}{R^3} |G|_{1 \times 1} & \frac{1}{R^2} |G|_{1 \times 1} |G|_{1 \times 1} & -\frac{1}{R} |G|_{2 \times 2} |G|_{1 \times 1} & |G|_{3 \times 3} |G|_{1 \times 1} & -\frac{1}{R} |G|_{3 \times 3} \\ \frac{1}{R^4} & -\frac{1}{R^3} |G|_{1 \times 1} & \frac{1}{R^2} |G|_{2 \times 2} & -\frac{1}{R} |G|_{3 \times 3} & |G|_{4 \times 4} \end{bmatrix}$$

.....

.....

.....

oraz ogólna postać macierzy $[A]_{n \times n}^T$:

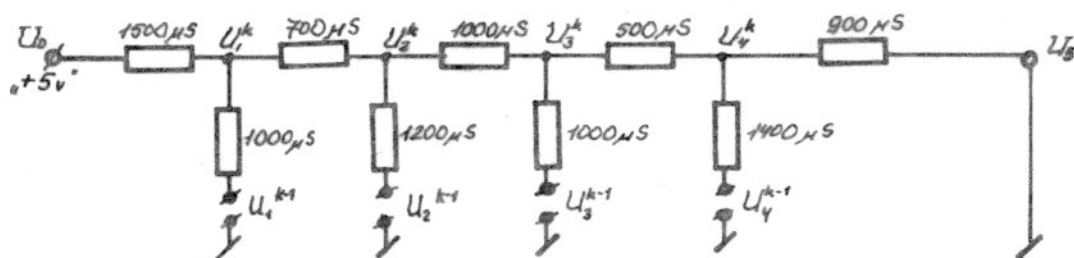
$[A]^T_{n \times n} =$

$$\begin{array}{ccccccc}
 |G|_{(n-1) \times (n-1)}; -\frac{1}{R} |G|_{(n-2) \times (n-2)}; \dots; (-1)^{l-1} \frac{1}{R^{l-1}} |G|_{(n-i) \times (n-i)}; \dots; (-1)^{l-1} \frac{1}{R^{l-1}} |G|_{(n-l) \times (n-l)}; \dots; (-1)^{(n-1)-1} \frac{1}{R^{(n-1)-1}} |G|_{1 \times 1}; & & & & & & (-1)^{(n-1)-1} \frac{1}{R^{(n-1)-1}} |G|_{1 \times 1} \\
 -\frac{1}{R} |G|_{(n-2) \times (n-2)}; |G|_{1 \times 1}; |G|_{(n-2) \times (n-2)}; & & & & & & \\
 \vdots & & & & & & \vdots \\
 (-1)^{i-1} \frac{1}{R^{i-1}} |G|_{(n-i) \times (n-i)}; & -\frac{1}{R} |G|_{(i-2) \times (i-2)}; |G|_{(n-i) \times (n-l)}; & & & & & (-1)^{l-1} \frac{1}{R^{l-1}} |G|_{(n-l) \times (n-l)} \\
 \vdots & & & & & & \vdots \\
 (-1)^{l-1} \frac{1}{R^{l-1}} |G|_{(n-l) \times (n-l)}; & (-1)^{l-1} \frac{1}{R^{l-1}} |G|_{(l-l) \times (l-l)}; |G|_{(n-l) \times (n-l)}; & & & & & (-1)^{l-1} \frac{1}{R^{l-1}} |G|_{(n-l) \times (n-l)} \\
 \vdots & & & & & & \vdots \\
 (-1)^{(n-1)-1} \frac{1}{R^{(n-1)-1}} |G|_{1 \times 1}; & & & & & & -\frac{1}{R} |G|_{(n-2) \times (n-2)}; \\
 (-1)^{n-1} \frac{1}{R^{n-1}}; & (-1)^{(n-1)-1} \frac{1}{R^{(n-1)-1}} |G|_{1 \times 1}; \dots; (-1)^{l-1} \frac{1}{R^{l-1}} |G|_{(n-l) \times (n-l)}; \dots; (-1)^{i-1} \frac{1}{R^{i-1}} |G|_{(n-i) \times (n-i)}; \dots; & & & & & (-1)^{n-1} \frac{1}{R^{n-1}}; & (-1)^{(n-1)-1} \frac{1}{R^{(n-1)-1}} |G|_{1 \times 1}; \dots; (-1)^{l-1} \frac{1}{R^{l-1}} |G|_{(n-l) \times (n-l)}; \dots; (-1)^{i-1} \frac{1}{R^{i-1}} |G|_{(n-i) \times (n-i)}; \dots; & & & & & & (-1)^{(n-1)-1} \frac{1}{R^{(n-1)-1}} |G|_{1 \times 1};
 \end{array}$$

przy czym: $i, l = 1, 2, \dots, n$;

(3.36)

Ekwiwalentność elektrycznego modelu analogowego i quasianalogowego badano na laboratoryjnym analizatorze pola typu R-R. Na rezystorowej siatce jednowymiarowej, niejednorodnej /rys. 3.7/, otrzymano, zakładając zerowe warunki początkowe, rozkład napięć w 4-ch pierwszych krokach czasowych oraz stan ustalony.



Rys. 3.7. Niejednorodna siatka rezystorowa

Dla pierwszego kroku czasowego, na przykład, otrzymano:

$$U_1^1 = 2.4920 \text{ v} ; U_2^1 = 0.7033 \text{ v} ; U_3^1 = 0.2933 \text{ v} ; U_4^1 = 0.0611 \text{ v}$$

Są to odczyty z woltomierza cyfrowego. Normalnie z tak dużą dokładnością się tych odczytów nie podaje ze względu na mniejszą dokładność realizacji warunków brzegowych, napięć podparcia rezystorów czasowych oraz realizacji rezystorów siatki. Wyniki pomiarów we wszystkich krokach czasowych przedstawiono na rys. 3.8.

Następnie utworzono siatkę jednorodną $\frac{1}{R} = 1000 \mu\text{s/}$ i zdjęto rozkład napięć przy tych samych warunkach brzegowych. W pierwszym kroku czasowym otrzymano:

$$U_1^{*1} = 1.9010 \text{ v} ; U_2^{*1} = 0.7241 \text{ v} ; U_3^{*1} = 0.2711 \text{ v} ; U_4^{*1} = 0.0905 \text{ v}.$$

Aby model jednorodny był ekwiwalentny odnośnie rezultatów modelowania **siatce niejednorodnej** w każdym kroku czasowym, należy obliczyć wartości prądów dodatkowych, które trzeba wprowadzić do węzłów siatki jednorodnej. Dla pierwszego kroku czasowego:

$$\xi_1^1 = 0.5910 \text{ v} ; \xi_2^1 = -0.0208 \text{ v} ; \xi_3^1 = 0.0222 \text{ v} ; \xi_4^1 = -0.0294 \text{ v}$$

Wartości I_{di}^1 można określić rozwiązując układ 4 równań:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1^1 &= \frac{\partial \varepsilon_1^1}{\partial I_{d1}^1} \cdot I_{d1}^1 + \frac{\partial \varepsilon_1^1}{\partial I_{d2}^1} \cdot I_{d2}^1 + \frac{\partial \varepsilon_1^1}{\partial I_{d3}^1} \cdot I_{d3}^1 + \frac{\partial \varepsilon_1^1}{\partial I_{d4}^1} \cdot I_{d4}^1 \\
\varepsilon_2^1 &= \frac{\partial \varepsilon_2^1}{\partial I_{d1}^1} \cdot I_{d1}^1 + \frac{\partial \varepsilon_2^1}{\partial I_{d2}^1} \cdot I_{d2}^1 + \frac{\partial \varepsilon_2^1}{\partial I_{d3}^1} \cdot I_{d3}^1 + \frac{\partial \varepsilon_2^1}{\partial I_{d4}^1} \cdot I_{d4}^1 \\
\varepsilon_3^1 &= \frac{\partial \varepsilon_3^1}{\partial I_{d1}^1} \cdot I_{d1}^1 + \frac{\partial \varepsilon_3^1}{\partial I_{d2}^1} \cdot I_{d2}^1 + \frac{\partial \varepsilon_3^1}{\partial I_{d3}^1} \cdot I_{d3}^1 + \frac{\partial \varepsilon_3^1}{\partial I_{d4}^1} \cdot I_{d4}^1 \\
\varepsilon_4^1 &= \frac{\partial \varepsilon_4^1}{\partial I_{d1}^1} \cdot I_{d1}^1 + \frac{\partial \varepsilon_4^1}{\partial I_{d2}^1} \cdot I_{d2}^1 + \frac{\partial \varepsilon_4^1}{\partial I_{d3}^1} \cdot I_{d3}^1 + \frac{\partial \varepsilon_4^1}{\partial I_{d4}^1} \cdot I_{d4}^1
\end{aligned} \quad (3.37)$$

przy czym:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varepsilon_1^1}{\partial I_{d1}^1} &= \frac{\partial \varepsilon_4^1}{\partial I_{d4}^1} = \frac{\left(\frac{2}{R} + \frac{1}{R_t}\right)^3 - \frac{2}{R^2} \left(\frac{2}{R} + \frac{1}{R_t}\right)}{|G_{JS}|_{4 \times 4}}; \quad \frac{\partial \varepsilon_1^1}{\partial I_{d4}^1} = \frac{\partial \varepsilon_4^1}{\partial I_{d1}^1} = \frac{\frac{1}{R^3}}{|G_{JS}|_{4 \times 4}}; \\
\frac{\partial \varepsilon_1^1}{\partial I_{d2}^1} &= \frac{\partial \varepsilon_2^1}{\partial I_{d1}^1} = \frac{\partial \varepsilon_3^1}{\partial I_{d4}^1} = \frac{\partial \varepsilon_4^1}{\partial I_{d3}^1} = \frac{-\left[-\frac{1}{R} \left(\frac{2}{R} + \frac{1}{R_t}\right)^2 + \frac{1}{R^3}\right]}{|G_{JS}|_{4 \times 4}}; \quad \frac{\partial \varepsilon_2^1}{\partial I_{d3}^1} = \frac{\partial \varepsilon_3^1}{\partial I_{d2}^1} = \\
&= \frac{\frac{1}{R} \left(\frac{2}{R} + \frac{1}{R_t}\right)^2}{|G_{JS}|_{4 \times 4}} \quad (3.38)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varepsilon_1^1}{\partial I_{d3}^1} &= \frac{\partial \varepsilon_3^1}{\partial I_{d1}^1} = \frac{\partial \varepsilon_2^1}{\partial I_{d4}^1} = \frac{\partial \varepsilon_4^1}{\partial I_{d2}^1} = \frac{\frac{1}{R^2} \left(\frac{2}{R} + \frac{1}{R_t}\right)}{|G_{JS}|_{4 \times 4}}; \quad \frac{\partial \varepsilon_2^1}{\partial I_{d3}^1} = \frac{\partial \varepsilon_3^1}{\partial I_{d2}^1} = \\
&= \frac{\left(\frac{2}{R} + \frac{1}{R_t}\right)^3 - \frac{1}{R^2} \left(\frac{2}{R} + \frac{1}{R_t}\right)}{|G_{JS}|_{4 \times 4}};
\end{aligned}$$

$$1 \quad |G_{JS}|_{4 \times 4} = \left(\frac{2}{R} + \frac{1}{R_t}\right)^4 - \frac{3}{R^2} \left(\frac{2}{R} + \frac{1}{R_t}\right) + \frac{1}{R_t}$$

Przyjmując $R = R_t = 1 \text{ k}\Omega$ otrzymuje się układ równań:

$$\begin{aligned}
 0,5910 &= \frac{21}{55} \cdot I_{d1}^1 + \frac{8}{55} \cdot I_{d2}^1 + \frac{3}{55} \cdot I_{d3}^1 + \frac{1}{55} \cdot I_{d4}^1 \\
 -0,0208 &= \frac{8}{55} \cdot I_{d1}^1 + \frac{24}{55} \cdot I_{d2}^1 + \frac{9}{55} \cdot I_{d3}^1 + \frac{3}{55} \cdot I_{d4}^1 \quad (3.39) \\
 0,0222 &= \frac{3}{55} \cdot I_{d1}^1 + \frac{9}{55} \cdot I_{d2}^1 + \frac{24}{55} \cdot I_{d3}^1 + \frac{8}{55} \cdot I_{d4}^1 \\
 -0,0294 &= \frac{1}{55} \cdot I_{d1}^1 + \frac{3}{55} \cdot I_{d2}^1 + \frac{8}{55} \cdot I_{d3}^1 + \frac{21}{55} \cdot I_{d4}^1
 \end{aligned}$$

Rozwiązując względem I_{di}^1 :

$$I_{d1}^1 = \frac{\Delta I_1}{\Delta}; \quad I_{d2}^1 = \frac{\Delta I_2}{\Delta}; \quad I_{d3}^1 = \frac{\Delta I_3}{\Delta}; \quad I_{d4}^1 = \frac{\Delta I_4}{\Delta};$$

$$\Delta = \frac{1}{55^4} \cdot \begin{vmatrix} 21 & 8 & 3 & 1 \\ 8 & 24 & 9 & 3 \\ 3 & 9 & 24 & 8 \\ 1 & 3 & 8 & 21 \end{vmatrix} = \frac{1}{55}; \quad (3.40)$$

$$\Delta I_1 = \frac{1}{55^3} \cdot \begin{vmatrix} 0,5910 & 8 & 3 & 1 \\ -0,0208 & 24 & 9 & 3 \\ 0,0222 & 9 & 24 & 8 \\ -0,0294 & 3 & 8 & 21 \end{vmatrix} = \frac{5426,245}{55^3}; \quad I_{d1}^1 = \frac{5426,245}{3025} = 1,7938 \text{ mA}$$

$$\Delta I_2 = \frac{1}{55^3} \cdot \begin{vmatrix} 21 & 0,5910 & 3 & 1 \\ 8 & -0,0208 & 9 & 3 \\ 3 & 0,0222 & 24 & 8 \\ 1 & -0,0294 & 8 & 21 \end{vmatrix} = \frac{-2043,69}{55^3}; \quad I_{d2}^1 = \frac{-2043,69}{3025} = -0,6756 \text{ mA}$$

$$\Delta I_3 = \frac{1}{55^3} \cdot \begin{vmatrix} 21 & 8 & 0,5910 & 1 \\ 8 & 24 & -0,0208 & 3 \\ 3 & 9 & 0,0222 & 8 \\ 1 & 3 & -0,0294 & 21 \end{vmatrix} = \frac{352,35}{55^3}; \quad I_{d3}^1 = \frac{352,35}{3025} = 0,1164 \text{ mA}$$

$$\Delta I_4 = \frac{1}{55^3} \begin{vmatrix} 21 & 8 & 3 & 0,5910 \\ 8 & 24 & 9 & -0,0208 \\ 3 & 9 & 24 & 0,0222 \\ 1 & 3 & 8 & -0,0294 \end{vmatrix} = \frac{-333,96}{55^3}; I_{d4}^1 = \frac{-333,96}{3025} = 0,1104 \text{ mA}$$

Jako źródła prądowe zastosowano zasilacze tranzystorowe P314.

Ze względu na niedoskonałość źródeł udało się nastawić następujące wartości prądów:

$$\tilde{I}_{d1}^1 = 1,7970 \text{ mA}; \tilde{I}_{d2}^1 = -0,6765 \text{ mA}; \tilde{I}_{d3}^1 = 0,1255 \text{ mA}; \tilde{I}_{d4}^1 = -0,1076 \text{ mA}.$$

Po wprowadzeniu prądów dodatkowych do węzłów siatki jednorodnej otrzymano następujący rozkład napięć U_i^{*1} i uchybów ε_i^1 :

$$U_1^{*1} = 2,4980 \text{ v}; U_2^{*1} = 0,7067 \text{ v}; U_3^{*1} = 0,2987 \text{ v}; U_4^{*1} = 0,0637 \text{ v}.$$

$$\varepsilon_1^1 = -0,0060 \text{ v}; \varepsilon_2^1 = -0,0034 \text{ v}; \varepsilon_3^1 = -0,0054 \text{ v}; \varepsilon_4^1 = -0,0026 \text{ v}.$$

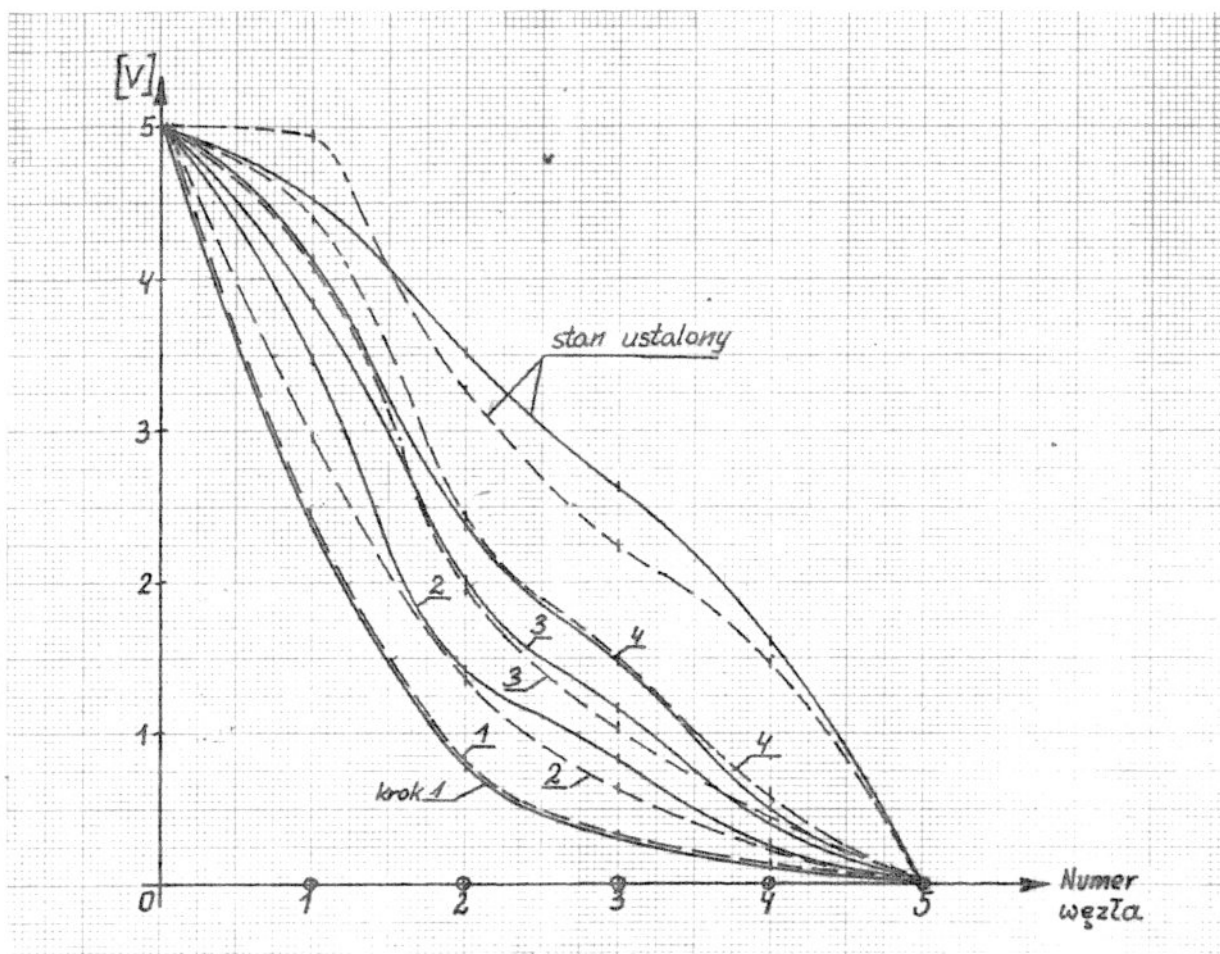
Uchyb względny ekwiwalentności rozpatrywanych dwóch symulatorów w pierwszym kroku czasowym określany jako:

$$\delta_{wzg.i}^1 = \frac{U_i^{*1} - U_i^1}{U_i^1} \cdot 100\% \quad (3.41)$$

wynosi w odpowiednich węzłach siatki:

$$\delta_{wzg.1}^1 = 0,24\%; \delta_{wzg.2}^1 = 0,48\%; \delta_{wzg.3}^1 = 1,8\%; \delta_{wzg.4}^1 = 4,1\%$$

Dla tak przygotowanej siatki zdjęto rozkłady napięć w węzłach dla 4-ch kroków czasowych oraz stanu ustalonego. Wykresy odpowiadające tym rozkładom są przedstawione na rys. 3.8. Aby otrzymać ekwiwalentność rozwiązań w krokach czasowych, prądy iniekcji należy obliczać dla każdego z tych kroków. W przeciwnym razie, przy zachowaniu obliczonych wartości prądów dodatkowych I_{di}^1 w następnych krokach czasowych, uchyby ε_i^k rosną, osiągając w stanie ustalonym dość znacznych wartości.



Rys. 3.8. Rozkład napięć w modelu analogowym i quasi-analogowym:

- dla siatki jednorodnej z prądami obliczonymi w 1-ym kroku czasowym;
- dla siatki niejednorodnej.

4. IDENTYFIKACJA PARAMETRYCZNA OBIEKTU OPISYWANEGO JEDNOWYMIAROWYM RÓWNANIEM PRZEWODZENIA CIEPŁA

4.1. Sformułowanie problemu identyfikacji

Opis matematyczny deterministycznego, ciągłego obiektu o parametrach rozłożonych należy do następującej klasy modeli określonych parametrycznie /rys. 4.1/:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[A(x, \varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] = B(x, \varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (4.1)$$

przy czym:

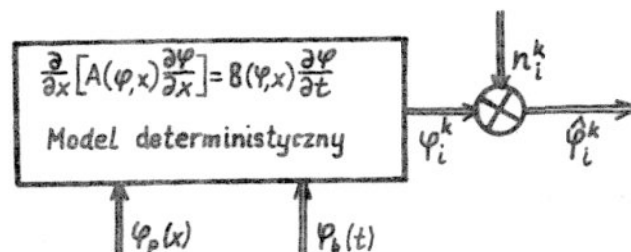
$$(x, t) \in C^2(\Theta_T); \quad \Theta_T = \{(x, t) : x \in \Omega \subset \mathbb{R}, \quad t \in (0, T)\}$$

$A(x, \varphi), \quad B(x, \varphi)$ - parametry, zależne od współrzędnych geometrycznych i stanu obiektu.

Określone są warunki początkowe i graniczne:

$$\varphi|_{x \in \bar{\Omega}} = \varphi_p(x) \qquad \varphi|_{\substack{x \in \partial\Omega \\ t \in [0, T]}} = \varphi_b(t)$$

Na podstawie znajomości klasy modeli określonych z dokładnością do parametrów oraz znanego pobudzenia i odpowiedzi ϕ_i^k w dyskretnych punktach czasoprzestrzeni Θ_T /tworzących równomierną siatkę $\omega_h^T = \{x_i, t_k\}$ / wyznaczyć należy w tych punktach wartości parametrów $A(x, \varphi), \quad B(x, \varphi)$ lub współczynnika wyrównywania potencjałów $C(x, \varphi)$. Współczynnik wyrównywania potencjałów charakteryzuje bezwładność ośrodka, w którym zachodzi proces. W przypadku liniowego równania (4.1) jest to stosunek $\frac{A}{B}$. Przyjęto oznaczenie ϕ_i^k zamiast φ_i^k z tego powodu, że podczas eksperymentu wyniki pomiarów stanu obiektu są obarczone pewnymi błędami n_i^k pochodzącymi z niedokładności zastosowanej metody, użytych przyrządów pomiarowych, błędami popełnianymi przez obserwatora lub też spowodowanymi działaniem innych, trudnych do określenia czynników. Błędy te mogą być systematyczne albo przypadkowe.



Rys. 4.1. Jednowymiarowy obiekt identyfikacji.

Zadanie identyfikacji polega więc na wyznaczeniu takich parametrów /ich wartości w węzłach siatki ω_h^T /, przy których określone kryterium jakości identyfikacji przyjmuje wartość minimalną:

$$J(A_{\text{opt}}, B_{\text{opt}}, \varphi_{\text{opt}}) = \min_{A, B \in Z} J(A, B, \varphi) \quad (4.2)$$

przy czym:

$$J(A, B, \varphi) = \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{N-1} (\hat{\varphi}_i^k - \varphi_i^k \text{ model})^2 \quad (4.2)$$

Możliwe są dwa przypadki:

- a/ wartości zadane odpowiedzi $\hat{\varphi}_i^k$ są dokładne i równe wartościom żądanym φ_i^k . Identyfikacji podlegają parametry określające własności dynamiczne obiektu jaki należy skonstruować, którego odpowiedzi na znane pobudzenie byłyby równe φ_i^k . Parametry te mogą być liniowe jednorodne, liniowe niejednorodne lub nieliniowe;
- b/ wartości zadane odpowiedzi $\hat{\varphi}_i^k$ otrzymano w wyniku pomiarów podczas eksperymentu na obiekcie istniejącym. Pomiary obarczone są błędami systematycznymi lub błędami przypadkowymi o rozkładzie normalnym gęstości prawdopodobieństwa i wartości oczekiwanej równej zero. Parametry mogą być liniowe jednorodne, liniowe niejednorodne lub nieliniowe.

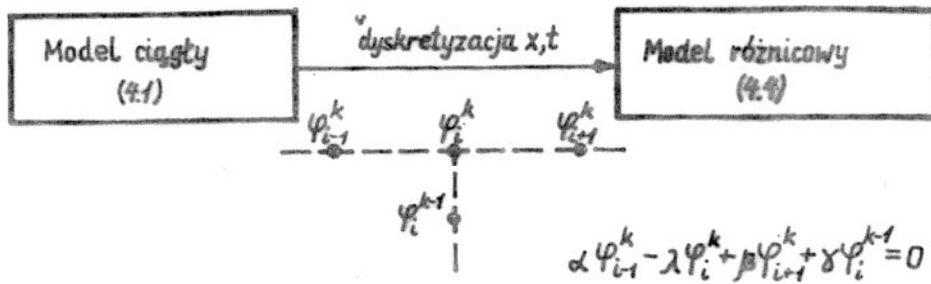
Jak wiadomo /zgodnie z warunkami Hadamarda/ zagadnienie identyfikacji jest zagadnieniem niepoprawnie sformułowanym. Niewielka odległość funkcjonału (4.2) od wartości minimalnej nie gwarantuje bliskości wyznaczanych parametrów od parametrów rzeczywistych. Można tu mówić o bliskości /w sensie np. metryki L_2 / estymowanych parametrów od wartości parametrów na empirycznej krzywej regresji. Próbką, którą jest szereg wartości danych pomiarowych $\hat{\varphi}_i^k$, to tylko realizacja określonej objętości losowego rozkładu prawdopodobieństwa. Niemożliwe jest określenie dokładnego minimum funkcjonału na podstawie takiej próbki. Wykorzystując więc próbki losowe danych pomiarowych $\hat{\varphi}_i^k$ otrzymać możemy wartości poszukiwanych parametrów, które są również wielkościami losowymi.

4.2. Wybór struktury modelu symulacyjnego

W celu otrzymania modelu matematycznego obiektu identyfikacji dogodnego do zastosowania algorytmu identyfikacji metodą hybrydowego modelowania symulacyjnego, przeprowadza się 2-krotne przekształcenie postaci wyjściowej (4.1).

I-sze przekształcenie - aproksymacja ciągłej postaci opisu matematycznego na postać różnicową. Dokonuje się dyskretyzacji

współrzędnych geometrycznych i czasu /rys. 4.2/.



Rys. 4.2. I-sze przekształcenie modelu matematycznego obiektu identyfikacji.

Stosując do różnicowej aproksymacji niejawny schemat różnicowy oraz przeprowadzając dyskretyzację według szablonu 4-węzłowego, otrzymać można układ algebraicznych równań różnicowych w skończonej ilości $(N-1)$ wybranych węzłów, dla każdej chwili czasowej $t_k = k\tau$. Węzeł i w k -tym przekroju czasowym jest opisany następującym równaniem:

$$\frac{1}{h} \left[a_{i+\frac{1}{2}}^{k-1} \cdot \frac{(\varphi_{i+1}^k - \varphi_i^k)}{h} - a_{i-\frac{1}{2}}^{k-1} \cdot \frac{(\varphi_i^k - \varphi_{i-1}^k)}{h} \right] = B(x_i, \varphi_i^{k-1}) \frac{\varphi_i^k - \varphi_i^{k-1}}{\tau} \quad (4.3)$$

przy czym:

$$a_{i \pm \frac{1}{2}}^{k-1} = \frac{1}{2} \left[A(x_i, \varphi_i^{k-1}) + A(x_{i \pm 1}, \varphi_{i \pm 1}^{k-1}) \right]$$

Równanie (4.3) można zapisać w postaci:

$$\frac{a_{i-\frac{1}{2}}^{k-1} \cdot \tau}{h^2} \cdot \varphi_{i-1}^k - \left[\frac{(a_{i+\frac{1}{2}}^{k-1} + a_{i-\frac{1}{2}}^{k-1}) \cdot \tau}{h^2} + B(x_i, \varphi_i^{k-1}) \right] \cdot \varphi_i^k + \frac{\tau \cdot a_{i+\frac{1}{2}}^{k-1}}{h^2} \cdot \varphi_{i+1}^k + B(x_i, \varphi_i^{k-1}) \cdot \varphi_i^{k-1} = 0 \quad (4.4)$$

lub

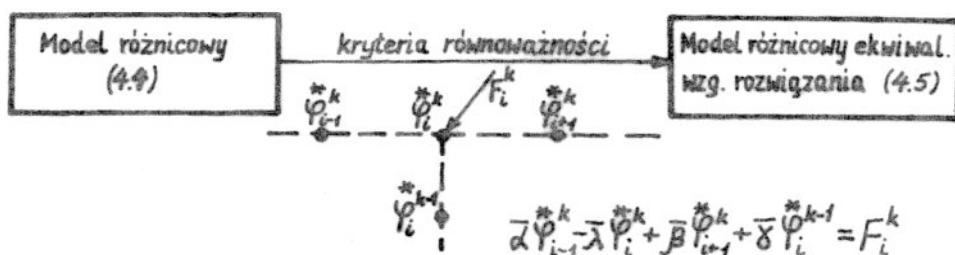
$$\alpha \varphi_{i-1}^k - \lambda \varphi_i^k + \beta \varphi_{i+1}^k + \gamma \varphi_i^{k-1} = 0$$

przy czym:

$\alpha, \lambda, \beta, \gamma$ - współczynniki, które uwzględniają parametry ośrodka, w którym zachodzi proces, oraz wartości kroków dyskretyzacji czasoprzestrzeni Θ_T .

Opis matematyczny przedstawiony za pomocą równania różnicowego (4.4) wraz ze zdyskretyzowanymi warunkami brzegowymi jest uproszczonym modelem matematycznym obiektu identyfikacji, równoważnym opisowi w postaci ciągłej (4.1) przy uwzględnieniu błędu aproksymacji.

II-gie przekształcenie polega na wykorzystaniu zasady ekwiwalentności analogowego i quasianalogowego modelu obiektu identyfikacji względem otrzymywanych wyników rozwiązania φ_i^k /rys. 4.3/.



Rys. 4.3. II-gie przekształcenie modelu matematycznego obiektu identyfikacji.

Opis matematyczny (4.4) zastąpiony jest przez opis następującej postaci:

$$\alpha \cdot \varphi_{i-1}^{*k} - \lambda \cdot \varphi_i^{*k} + \beta \cdot \varphi_{i+1}^{*k} + \delta \cdot \varphi_i^{*k-1} = F_i^k \quad (4.5)$$

przy czym:

$\alpha, \lambda, \beta, \delta$ - współczynniki, które uwzględniają założone z góry przez eksperymentatora wartości parametrów /stałe i jednorodne/ oraz wartości kroków dyskretyzacji czasoprzestrzeni;

F_i^k - wielkości poprawek, wprowadzone w celu zapewnienia ekwiwalentności opisów (4.4) i (4.5) względem rozwiązania /dobiera się je wtedy tak aby $\varphi_i^k = \varphi_i^{*k}$ /.

W ten sposób otrzymuje się uproszczoną postać (4.5) modelu symulacyjnego obiektu identyfikacji, zadaną z dokładnością do parametrów za które będą uważane wielkości F_i^k [81] .

4.3. Algorytm identyfikacji

Realizacją techniczną modelu symulacyjnego (4.5) jest jednorodna siatka elektryczna typu R-R ze źródłami prądów dodatkowych. Jeden z jej węzłów był przedstawiony na rys. 3.2. Urządzenie takie wykorzystać można do rozwiązywania rozważanego zagadnienia identyfikacji metodą hybrydowego modelowania symulacyjnego. W celu automatyzacji procesu realizacji algorytmu identyfikacji, do przeprowadzania koniecznych obliczeń i do sterowania źródłami prądów dodatkowych korzysta się z maszyny cyfrowej, która tworzy z elektrycznym modelem quasianalogowym system hybrydowy.

Algorytm identyfikacji składa się z dwóch części. W części pierwszej wyliczane są wartości poprawek prądowych I_{di}^k , przy których zachodzi ekwiwalentność względem rozwiązań pomiędzy elektrycznym modelem quasianalogowym oraz opisem matematycznym obiektu identyfikacji /z uwzględnieniem przyjmowanych współczynników skali/. Wartości poprawek prądowych I_{di}^k w modelu quasianalogowym odpowiadają wartościom F_i^k w opisie matematycznym (4.5). Sposób określenia wartości I_{di}^k przedstawiono w rozdziale 3.3 omawiającym przykład ekwiwalentności względem rozwiązania dwóch symulatorów - analogowego i quasianalogowego.

W części drugiej, na podstawie obliczonych wartości I_{di}^k , określa się wielkości odchyłeń $\Delta A(x_i, \varphi_i^{k-1})$, $\Delta B(x_i, \varphi_i^{k-1})$ lub $\Delta C(x_i, \varphi_i^{k-1})$ /identyfikowanych parametrów obiektu $A(x_i, \varphi_i^{k-1})$, $B(x_i, \varphi_i^{k-1})$ lub współczynnika wyrównywania potencjałów $C(x_i, \varphi_i^{k-1})$ / od z góry założonych przez eksperymentatora stałych, jednorodnych wartości parametrów A^* , B^* lub C^* /modelu symulacyjnego. Pozwala to obliczyć dla każdego węzła czasoprzestrzeni identyfikowane wartości parametrów:

$$\begin{aligned} A(x_i, \varphi_i^{k-1}) &= A^* + \Delta A(x_i, \varphi_i^{k-1}); \\ B(x_i, \varphi_i^{k-1}) &= B^* + \Delta B(x_i, \varphi_i^{k-1}); \\ C(x_i, \varphi_i^{k-1}) &= C^* + \Delta C(x_i, \varphi_i^{k-1}); \end{aligned} \quad (4.5 \text{ a})$$

Należy wspomnieć tu o niejednoznaczności rozwiązywania zagadnienia identyfikacji własności dynamicznych obiektu w przypadku jednoczesnego określenia parametrów $A(x_i, \varphi_i^{k-1})$ i $B(x_i, \varphi_i^{k-1})$.

Na przykład liniowe równania:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(A_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = B_1 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad \text{i} \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(A_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = B_2 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (4.6)$$

dla których współczynniki wyrównywania potencjałów są równe

$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} = C$, opisują procesy charakteryzujące się taką samą dynamiką. Również to samo można powiedzieć o równaniu quasilinowym, posiadającym po przekształceniu następującą postać:

$$\frac{\partial A(x, \varphi)}{B(x, \varphi) \cdot \partial x} \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \frac{A(x, \varphi)}{B(x, \varphi)} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial \varphi}{\partial t}; \quad \frac{A(x, \varphi)}{B(x, \varphi)} = C(x, \varphi) \quad (4.7)$$

W pewnych przypadkach [44] pierwszy człon lewej strony równania jest pomijany. Tak więc jednoznaczna identyfikacja własności dynamicznych jest możliwa, gdy określa się współczynnik wyrównywania potencjałów lub jeden z parametrów obiektu $A(x_i, \varphi_i^{k'})$ albo $B(x_i, \varphi_i^{k'})$ /pozostały jest zadany/. Identyfikowane wielkości są wtedy skupione z prawej strony równania /przy pochodnej czasowej/ lub z lewej strony /przy pochodnej względem współrzędnej geometrycznej/.

Jeżeli identyfikacji podlega wielkość skupiona przy pochodnej czasowej, to zależność pomiędzy poprawką F_i^k w modelu symulacyjnym a odchyleniem $\Delta \frac{B}{A}(x_i, \varphi_i^{k-1})$ można otrzymać rozpatrując schemat różnicowy w jednym z węzłów siatki ω_h^T dla analogowego modelu matematycznego obiektu:

$$\delta_h^2(\varphi_i^k) = \frac{B}{A}(x_i, \varphi_i^{k-1}) \cdot \delta_\tau(\varphi_i^k) \quad (4.8)$$

oraz dla quasianalogowego modelu matematycznego /modelu symulacyjnego/:

$$\delta_h^2(\varphi_i^{*k}) = \frac{B^*}{A^*} \cdot \delta_\tau(\varphi_i^{*k}) + F_i^k \quad (4.9)$$

przy czym:

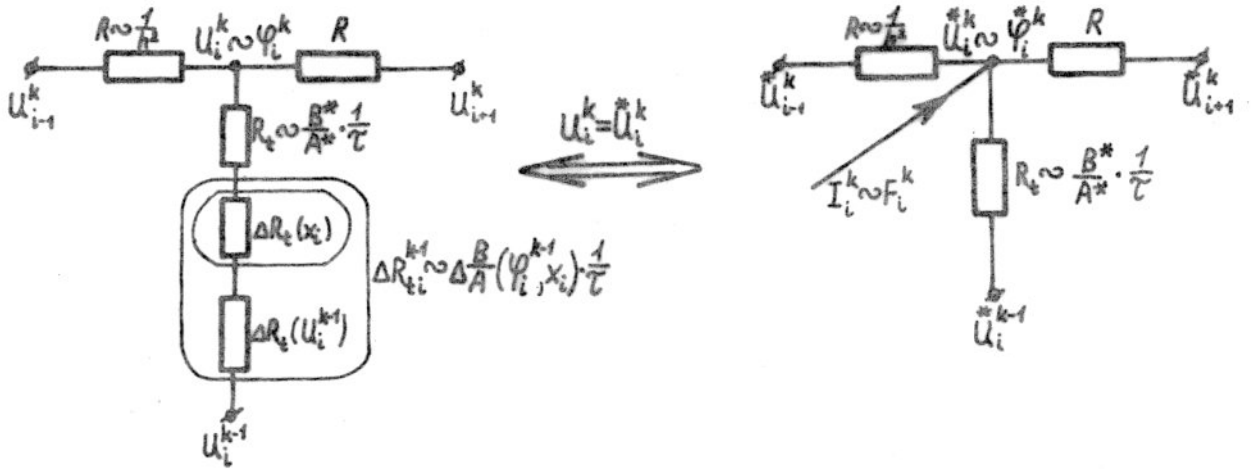
$$\delta_h^2(\varphi_i^k) = \frac{1}{h^2} (\varphi_{i-1}^k + \varphi_{i+1}^k - 2 \varphi_i^k)$$

$$\delta_\tau(\varphi_i^k) = \frac{1}{\tau} (\varphi_i^k - \varphi_i^{k-1})$$

W związku z tym, że identyfikowany parametr $\frac{B}{A}(x_i, \varphi_i^{k-1})$ w (4.8) składa się ze znanej części składowej $\frac{B^*}{A^*}$ oraz nieznanego odchylenia $\Delta \frac{B}{A}(x_i, \varphi_i^{k-1})$, to:

$$\Delta \frac{B}{A} (x_i, \varphi_i^{k-1}) \cdot \mathcal{S}_\tau(\varphi_i^k) = -F_i^k \quad (4.10)$$

Omówiona wyżej sytuacja przy operowaniu pojęciami realizacji technicznych modeli (4.8) i (4.9) zilustrowana jest na rys. 4.4. Wartość poprawki prądowej



Rys. 4.4. Rysunek wyjaśniający algorytm identyfikacji parametrów skupionych przy pochodnej czasowej.

I_{di}^k równa jest:

$$I_{di}^k = \frac{U_i^k - U_i^{k-1}}{R_t} - \frac{U_i^k - U_i^{k-1}}{R_t + \Delta R_{ti}^{k-1}} = \frac{(U_i^k - U_i^{k-1}) \cdot \Delta R_{ti}^{k-1}}{(R_t + \Delta R_{ti}^{k-1}) \cdot R_t} = \Delta_i^{k-1} \cdot (U_i^k - U_i^{k-1}) \quad (4.11)$$

Znając określone na pierwszym etapie realizacji algorytmu identyfikacji wartości poprawek prądowych I_{di}^k oraz posiadając zadane wartości U_i w odpowiednich krokach czasowych, obliczyć można

Δ_i^{k-1} a następnie:

$$\Delta R_{ti}^{k-1} = \frac{\Delta_i^{k-1} \cdot R_t^2}{1 - \Delta_i^{k-1} \cdot R_t} \quad (4.12)$$

Obliczenia przeprowadzane są dla każdego węzła czasoprzestrzeni. Uwzględniając przyjęte dla zadania przy modelowaniu współczynniki skali, można przejść od wartości ΔR_{ti}^{k-1} do wartości

$\Delta \frac{B}{A} (x_i, \varphi_i^{k-1})$, a tym samym określić wartości liczbowe identyfikowanych parametrów $\frac{B}{A} (x_i, \varphi_i^{k-1})$. Przedstawiony algorytm jest realizowany przez testujący program symulacji cyfrowej układu identyfikacji o nazwie "Kirchhoff".

Jeżeli identyfikowany parametr jest skupiony przy pochodnej względem współrzędnej geometrycznej, to zależność pomiędzy wartością F_i^k w modelu symulacyjnym a odchyleniem parametru od znanej wartości również można otrzymać rozpatrując schemat różnicowy dla analogowego modelu matematycznego obiektu:

$$\frac{1}{h} \left[\frac{a_{i+\frac{1}{2}}^{k-1}}{B} \cdot \frac{(\varphi_{i+1}^k - \varphi_i^k)}{h} - \frac{a_{i-\frac{1}{2}}^{k-1}}{B} \cdot \frac{(\varphi_i^k - \varphi_{i-1}^k)}{h} \right] = \sum_r (\varphi_i^k) \quad (4.13)$$

przy czym:

$$a_{i \pm \frac{1}{2}}^{k-1} = \frac{1}{2} \left[A(x_i, \varphi_i^{k-1}) + A(x_{i+1}, \varphi_{i+1}^{k-1}) \right]$$

oraz dla quasianalogowego modelu matematycznego:

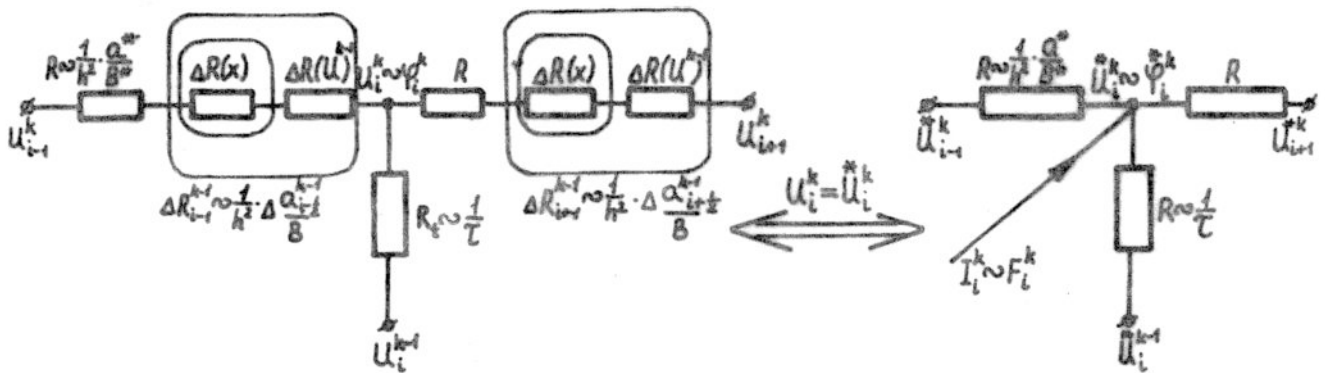
$$\frac{a^*}{B^*} \cdot \sum_h (\varphi_i^{*k}) = \sum_r (\varphi_i^{*k}) + F_i^k \quad (4.14)$$

Stąd zależność pomiędzy F_i^k a odchyleniami od przyjętych wartości $\frac{a^*}{B^*}$ jest następująca:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h^2} \cdot \Delta \frac{a_{i+\frac{1}{2}}^{k-1}}{B} \cdot (\varphi_{i+1}^k - \varphi_i^k) - \frac{1}{h^2} \Delta \frac{a_{i-\frac{1}{2}}^{k-1}}{B} \cdot (\varphi_i^k - \varphi_{i-1}^k) &= \\ &= F_i^k \quad (4.15) \\ \frac{a_{i \pm \frac{1}{2}}^{k-1}}{B} &= \frac{a^*}{B^*} + \Delta \frac{a_{i \pm \frac{1}{2}}^{k-1}}{B} (x_i, \varphi_i^{k-1}, x_{i+1}, \varphi_{i+1}^{k-1}) \end{aligned}$$

Przedstawione postępowanie zilustrowane jest /operując pojęciami realizacji technicznych/ na rys. 4.5.

Poprawka prądowa I_{di}^k równoważy zmianę prądów w gałęziach obwodów spowodowaną odchyleniem wartości oporników siatki analogowej od wartości oporników siatki quasianalogowej. W celu określenia odchyłek oporności należy rozwiązać układ 2-ch równań /drugie równanie dla $k+1$ warstwy czasowej/:



Rys. 4.5. Rysunek wyjaśniający algorytm identyfikacji parametrów skupionych przy pochodnej względem współrzędnej geometrycznej.

$$\begin{cases}
 I_{di}^k = \frac{\Delta R_{i-1}^{k-1} \cdot (U_{i-1}^k - U_i^k)}{(R + \Delta R_{i-1}^{k-1}) \cdot R} + \frac{\Delta R_{i+1}^{k-1} \cdot (U_i^k - U_{i+1}^k)}{(R + \Delta R_{i+1}^{k-1}) \cdot R} = \\
 = \Delta_1^{k-1} \cdot (U_{i-1}^k - U_i^k) + \Delta_2^{k-1} \cdot (U_i^k - U_{i+1}^k) \\
 I_{di}^{k+1} = \frac{\Delta R_{i-1}^k \cdot (U_{i-1}^{k+1} - U_i^{k+1})}{(R + \Delta R_{i-1}^k) \cdot R} + \frac{\Delta R_{i+1}^k \cdot (U_i^{k+1} - U_{i+1}^{k+1})}{(R + \Delta R_{i+1}^k) \cdot R} = \\
 = \Delta_1^k \cdot (U_{i-1}^{k+1} - U_i^{k+1}) + \Delta_2^k \cdot (U_i^{k+1} - U_{i+1}^{k+1})
 \end{cases} \quad (4.16)$$

Rozwiązując układ względem Δ otrzymuje się wartości Δ_1 i Δ_2 , a następnie:

$$\Delta R_{i-1} = \frac{\Delta_1 \cdot R^2}{1 - R \cdot \Delta_1} \quad \text{ i } \quad \Delta R_{i+1} = \frac{\Delta_2 \cdot R^2}{1 - R \cdot \Delta_2} \quad (4.17)$$

Od wartości $\Delta R_{i\pm 1}$ można przejść /przy uwzględnieniu przyjętych podczas modelowania współczynników skali/ do wartości parametrów

$\Delta \frac{a_{i\pm 1}^{k-1}}{B}$ i tym samym określić dla wszystkich węzłów wartości identyfikowanych parametrów $\frac{a_{i\pm 1}^{k-1}}{B}$. Przedstawione postępowanie

realizowane jest przez testujący program symulacji cyfrowej układu identyfikacji o nazwie "Goodmann". Układ równań (4.15) daje dokładne rozwiązanie Δ_1 i Δ_2 tylko gdy

$\Delta \frac{a^{k-1}}{B} \neq f(\varphi)$. W przeciwnym przypadku należy w drugim równaniu układu w pewien sposób uwzględnić zmianę Δ_1 i Δ_2 na $k+1$ warstwie czasowej spowodowaną zmianą φ na odcinku czasowym

$$\tau = t_{k+1} - t_k.$$

Do badań testowych przedstawionych algorytmów identyfikacji wykorzystano następującą ogólną postać równania typu przewodzenia ciepła:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(e \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = d \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (4.18)$$

przy czym:

$$e = ax^2 + bx + c + g\varphi$$

$$d = a' \cdot x^2 + bx + c' + g' \cdot \varphi + h \cdot x \cdot \varphi$$

Otrzymywane wyniki są przybliżonym rozwiązaniem zagadnienia identyfikacji na dyskretnym zbiorze punktów. Następnie zadanie związane jest z interpolacją otrzymywanych wartości na cały obszar określenia zagadnienia wyjściowego [76].

W grupie procesów o parametrach rozłożonych istotną część stanowią procesy jednoczesnej wymiany masy i ciepła. Metodę hybrydowego modelowania symulacyjnego można wykorzystać również do identyfikacji własności dynamicznych tego typu obiektów. Szczególnym przypadkiem procesu jednoczesnej wymiany masy i ciepła jest proces suszenia ciał porowatych, spotykany w przemyśle spożywczym, włókienniczym, budowlanym i innych, opisywany liniowym układem dwu równań różniczkowych, cząstkowych:

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} = a_q \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \varepsilon \cdot \frac{r}{c_q} \cdot \frac{\partial U}{\partial t} \\ \frac{\partial U}{\partial t} = a_m \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + a_m \cdot \delta_1 \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \end{cases} \quad (4.19)$$

przy czym:

T - temperatura, U - wilgotność, t - czas, a_m - współczynnik wyrównywania potencjału wilgotności, a_q - współczynnik wyrównywania temperatury wilgotnego ciała, c_q - właściwa pojemność cieplna, r - ciepło parowania, ε - współczynnik zmiany stanu skupienia, δ_1 - współczynnik termodyfuzji.

Równania te opisują proces nieustalonego przepływu ciepła oraz wilgoci z uwzględnieniem wzajemnego oddziaływania pól temperatur i wilgotności. Układ równań można przekształcić do postaci:

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} = a_{11} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + a_{12} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \\ \frac{\partial U}{\partial t} = a_{21} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + a_{22} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \end{cases} \quad (4.20)$$

przy czym:

$$\begin{aligned} a_{11} &= a_q + a_m \cdot \delta_1 \cdot \frac{r}{c_q} \cdot \varepsilon ; & a_{21} &= a_m \cdot \delta_1 \\ a_{12} &= a_m \cdot \varepsilon \cdot \frac{r}{c_q} ; & a_{22} &= a_m \end{aligned}$$

Układ równań (4.20) wraz z warunkami granicznymi i początkowymi jest modelem matematycznym rozważanego procesu. W tej postaci jest on mało przydatny do opracowywania algorytmów sterowania ze względu na znane kłopoty z rozwiązywaniem równań różniczkowych cząstkowych.

W wyniku stosowania metody schematów różnicowych otrzymać można model różnicowy procesu - układ równań różnicowych [83] :

$$\begin{cases} a_{11} [\delta_h^2 (T_i^k)] + a_{12} [\delta_h^2 (U_i^k)] = \delta_\tau (T_i^k) \\ a_{21} [\delta_h^2 (T_i^k)] + a_{22} [\delta_h^2 (U_i^k)] = \delta_\tau (U_i^k) \end{cases} \quad (4.21)$$

$i = 1, 2, \dots, N, k = 1, 2, \dots, L$

przy czym:

δ_h^2 - aproksymacja różnicowa drugiej pochodnej względem x ;
 δ_τ - aproksymacja różnicowa pochodnej czasowej.

Przyjąć tu można najprostsze niejawne schematy różnicowe, tzn.:

$$\begin{aligned} \delta_h^2 (T_i^k) &= \frac{1}{h^2} (T_{i-1}^k - 2T_i^k + T_{i+1}^k) \\ \delta_\tau (T_i^k) &= \frac{1}{\tau} (T_i^k - T_i^{k-1}) \\ \delta_h^2 (U_i^k) &= \frac{1}{h^2} (U_{i-1}^k - 2U_i^k + U_{i+1}^k) \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\delta_{\tau}(U_i^k) = \frac{1}{\tau} (U_i^k - U_i^{k-1})$$

w punktach o współrzędnych $x = ih$, $t = k\tau$ zwanych węzłami siatki. Aby wyznaczyć współczynniki a_{11} , a_{12} , a_{21} , a_{22} metodą hybrydowego modelowania symulacyjnego należy analogowy model różnicowy badanego procesu (4.21) przekształcić w ekwiwalentny mu względem otrzymywanych rozwiązań, quasianalogowy model różnicowy:

$$\begin{cases} a_{11}^* [\delta_h^2(T_i^k)] + a_{12}^* [\delta_h^2(U_i^k)] = \delta_{\tau}(T_i^k) + F_{Ti}^k \\ a_{21}^* [\delta_h^2(T_i^k)] + a_{22}^* [\delta_h^2(U_i^k)] = \delta_{\tau}(U_i^k) + F_{ui}^k \end{cases} \quad (4.23)$$

przy czym:

a_{11}^* , a_{12}^* , a_{21}^* , a_{22}^* - współczynniki, które uwzględniają założone z góry przez eksperymentatora wartości parametrów;
 F_{Ti}^k , F_{ui}^k - wielkości poprawek, wprowadzone w celu zapewnienia ekwiwalentności opisów (4.23) i (4.21) względem rozwiązania.

Jako realizację techniczną przybliżonego opisu matematycznego (4.21) wykorzystać można hybrydowy quasianalogowy model elektryczny z siatką R-R. Postępowanie przy wyznaczaniu współczynników każdego z dwóch równań układu (4.23) jest podobne do wcześniej rozpatrywanego postępowania przy identyfikacji współczynnika skupionego przy pochodnej względem współrzędnej geometrycznej.

4.4. Badanie zbieżności i dokładności rozwiązywania zadania identyfikacji metodą stopniowego zagęszczania siatki

Zbieżność metod różnicowych jest jednym z warunków ich wykorzystania do rozwiązywania zadania identyfikacji. Ze względu na obecny poziom wiedzy matematycznej w dziedzinie zagadnień odwrotnych, jedyną możliwość analizy zbieżności i dokładności rozważanej metody identyfikacji stwarzają badania testowe. Podstawą do oceny przybliżonej metody identyfikacji może być porównanie rzeczywistych wartości parametrów opisu matematycznego /gdyby istniała możliwość stosowania dokładnej metody ich określenia/

z oceną tych parametrów otrzymywaną poprzez realizację algorytmu rozważanej metody identyfikacji. Trudności w przeprowadzaniu rozważań analitycznych uniemożliwiają takie porównanie dla dowolnych parametrów obiektu, warunków brzegowych, powiązań z otoczeniem. Metodami symulacyjnymi można dokonać porównania dla pewnych przykładowych sytuacji.

Badanie zbieżności oraz oszacowanie dokładności rozwiązywania rozważanego zadania identyfikacji można przeprowadzić metodą stopniowego zagęszczania siatki ω_h^τ . Wybierając różne wielkości kroków h i τ w czasoprzestrzeni, bada się jaki wpływ mają one na zachowanie się rozwiązania odwrotnego zagadnienia różnicowego, na uchyby pomiędzy rzeczywistymi wartościami parametrów a parametrami przybliżonymi, jak zachowuje się rozwiązanie przy dążeniu wielkości kroków do wartości zerowych. Aby otrzymać rozwiązanie zadania identyfikacji wysokiego rzędu dokładności, niekonieczne jest wykorzystanie bardziej złożonych wzorów również wyższego rzędu dokładności. Obliczenia można prowadzić według wzorów niskiego rzędu dokładności na różnych, ciągle zagęszczanych siatkach i następnie uściślić wyniki metodą Runge'go [37]. Daje ona aposterioryczne oszacowanie dokładności obliczeń, które jest bardziej przydatne praktycznie niż oszacowanie aprioryczne. Regułą Runge'go stosuje się zasadniczo dla równomiernych siatek $\omega_h^\tau = \omega_h \times \omega_\tau$ o całkowitej liczbie $r = \frac{h_{l+1}}{h_l} = \frac{\tau_{l+1}}{\tau_l}$ / $l = 1, 2, 3, \dots$ /, gdy wszystkie węzły mniej gęstych siatek ω_h i ω_τ są węzłami bardziej gęstych siatek ω_h^{l+1} i ω_τ^{l+1} /rys. 4.6./ . Szczególnie wygodne jest zagęszczanie siatek przez proste zdwojenie. Praktycznie wykorzystuje się nie więcej niż 3-5 siatek. Jeżeli numery węzłów siatki mniej gęstej ω_h^τ oznaczyć - (i, k) , to wspólnymi węzłami z siatki bardziej gęstej $\omega_h^{\text{II}\tau}$ będą węzły o numerach: $(2i - 1, 2 \cdot k - 1)$ przy $r = 2$, $(4 \cdot i - 3, 4 \cdot k - 3)$ przy $r = 4$, $(8 \cdot i - 7, 8 \cdot k - 7)$ przy $r = 8, \dots, \{n \cdot i - (n-1), n \cdot k - (n-1)\}$ przy $r = n$. Oznaczając rozwiązanie zadania identyfikacji na siatce ω_h^τ z krokami h i τ , oraz na zagęszczonej siatce $\omega_h^{\text{II}\tau}$ z krokami $\frac{h}{r}$ i $\frac{\tau}{r^2}$ odpowiednio d^{I} i d^{II} , można określić, według pierwszego wzoru obliczeniowego Runge'go, wielkość uchybu rozwiązania na siatce drugiej w stosunku do rozwiązania dokładnego d /tzn. oszacować rozwiązanie różnicowe wykorzystując obliczenia na siatce pierwszej/:

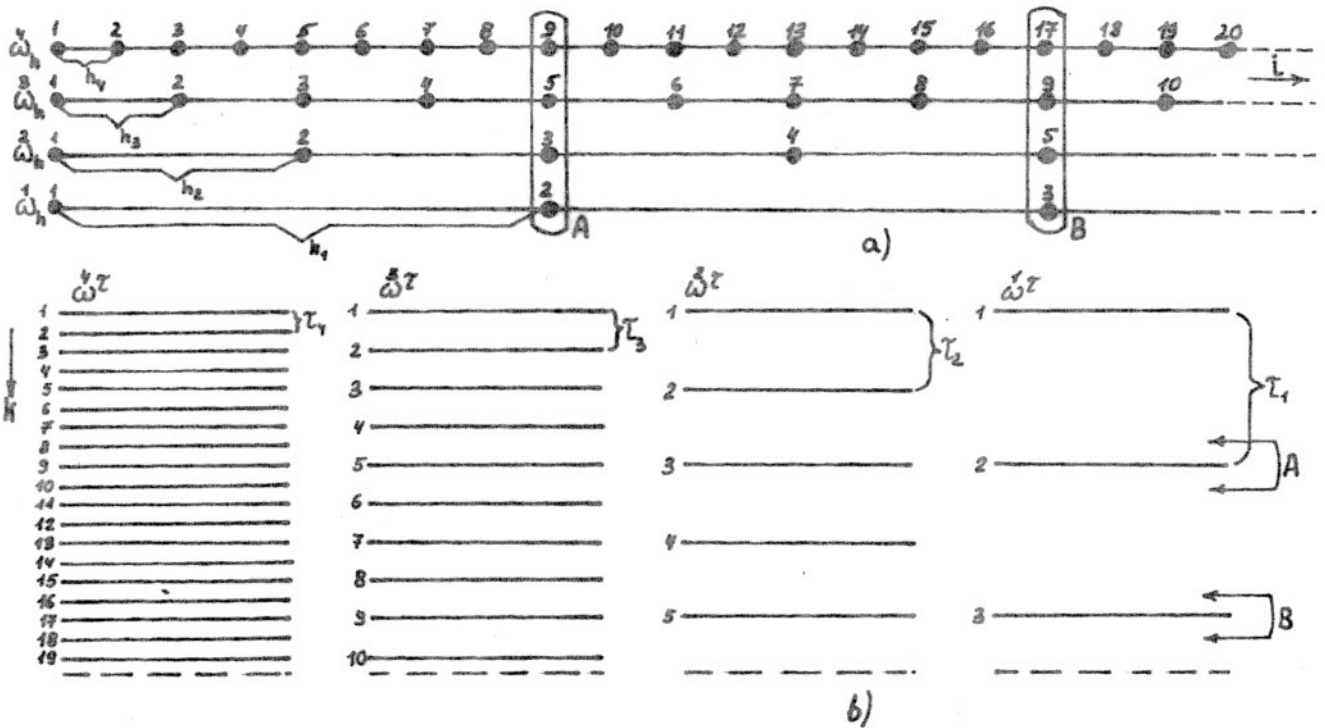
$$R^{II} = d^{II} - d \approx \frac{1}{r^2 - 1} (d^I - d^{II}) \quad (4.24)$$

Wielkość R^{II} jest, dokładnie mówiąc, główną składową uchybu i służyć może do uściślenia rozwiązania różnicowego według drugiego wzoru obliczeniowego Runge'go:

$$d_{uśc}^{II} = d^{II} - \frac{d^I - d^{II}}{r^2 - 1} \quad (4.25)$$

a wtedy:

$$d = d_{uśc}^{II} + O(\tau^2 + h^3) \quad (4.26)$$



Rys. 4.6. Równomierne zagęszczanie siatek: a/ siatki ω_h^I ; b/ siatki $\omega^{\frac{1}{\tau}}$.

Stosując wzór Runge'go można w węzłach wspólnych pary siatek zwiększyć rząd dokładności o 1. Jeżeli wykorzystuje się kilka siatek, to w każdym węźle siatki najgęstszej można zwiększyć rząd dokładności o tyle, ile węzłów siatek mniej gęstych jest z nim wspólnych. Dla węzła nie posiadającego żadnego wspólnego węzła z siatkami mniej gęstymi uściśla się rozwiązanie wykorzystując

interpolację /mając wartości poprawek w sąsiednich węzłach/. Przy wykorzystaniu większej ilości równomiernych siatek o tej samej wartości r stosuje się rekurencyjną metodę Runge'go dla par siatek $I\tau$ i $II\tau$, $II\tau$ i $III\tau$ i $III\tau$ i $IV\tau$ itd.

Do przeprowadzenia badań testowych posłużono się przykładem w postaci jednowymiarowego odwrotnego zagadnienia brzegowego z warunkiem początkowym i warunkiem granicznym I-go rodzaju dla równania typu przewodzenia ciepła:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = d \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (4.27)$$

przy czym:

$$d = c' + g' \cdot \psi$$

Takim równaniem opisywany jest m.in. w dziedzinie techniki cieplnej proces wentylacji, gdy przez kanał przedmuchiwane jest powietrze, przekazujące lub odbierające od ścianek kanału ciepło [90]:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}; \quad \alpha^2 = \left(\frac{L}{VS}\right)^2 \times a^2 \left(\frac{c_s}{c_0 s_0}\right)^2 \quad \begin{aligned} U(0,t) &= \mu(t), \\ U(x,0) &= 0, \end{aligned} \quad (4.28)$$

przy czym:

$U(x,t)$ - funkcja opisująca rozkład temperatury powietrza w kanale; L - obwód kanału; S - przekrój poprzeczny kanału; V - prędkość strumienia powietrza; c_0, s_0 - parametry cieplne powietrza; c, s - charakterystyki cieplne ścianki; a^2 - parametr cieplny ścianki.

Aby rozwiązywać zadanie sterowania optymalnego w celu określenia:

- a/ prędkości wentylacji, koniecznej do obniżenia temperatury ścianki o zadaną wielkość;
- b/ minimalnych wydatków energetycznych na przedmuchiwanie odpowiedniej ilości powietrza w celu osiągnięcia tego samego wyniku konieczna jest znajomość wartości współczynnika cieplnego α^2 . Przy wyznaczeniu współczynnika α^2 wykorzystać można otrzymane podczas eksperymentu dynamicznego wartości obserwowanej temperatury powietrza w odpowiednich przekrojach czasoprzestrzeni.

Obliczenia testowe prowadzono na M.C. serii ODRA 1300 za pomocą programu "SOLO" /napisanego w języku FORTRAN/. Jest to program symulujący hybrydowy układ identyfikacji "quasianalogowa siatka R-R - maszyna cyfrowa" oraz procedury metody hybrydowego modelowania

symulacyjnego. Na podstawie danych pomiarowych φ_i^k o stanie obiektu w węzłach równomiernej siatki pomiarowej ω_h^τ nałożonej na obszar $[0, L] \times [0, T]$ należy określić wartości współczynnika d w węzłach /ogólnie funkcję siatkową d_h^τ /. Serie pomiarowe w przekrojach czasowych symulowano rozwiązaniem przybliżonym prostego zagadnienia brzegowego dla równania (4.27), na gęstej siatce $\omega_h^\tau \times \omega^\tau$ /rys. 4.6/ metodą przejścia zwrotnego [75]. To przybliżone rozwiązanie na gęstej siatce /funkcja siatkowa/ wykorzystano jako obcięcie funkcji φ do siatek mniej gęstych $\omega_h^\tau \times \omega^\tau$, $\omega_h^\tau \times \omega^\tau$, $\omega_h^\tau \times \omega^\tau$, $\omega_h^\tau \times \omega^\tau$, $\omega_h^\tau \times \omega^\tau$, $\omega_h^\tau \times \omega^\tau$, $\omega_h^\tau \times \omega^\tau$, $\omega_h^\tau \times \omega^\tau$, użytych przy wyznaczaniu funkcji siatkowych d_h^τ . W zadaniu przyjęto $L=10$ [jednostek długości] oraz $T=48$ [jednostek czasu]. Dzieląc odcinki długości i czasu na odpowiednią ilość części N i K , otrzymano:

$$h = \frac{10}{N} = \begin{matrix} 0.25 \text{ dla siatki } \omega_h^\tau; N=40 \\ 0.5 \text{ dla siatki } \omega_h^\tau; N=20 \\ 1.0 \text{ dla siatki } \omega_h^\tau; N=10 \\ 2.0 \text{ dla siatki } \omega_h^\tau; N=5 \end{matrix} \quad \tau = \frac{48}{K} = \begin{matrix} 0.5 \text{ dla siatki } \omega^\tau; M=96 \\ 1.0 \text{ dla siatki } \omega^\tau; M=48 \\ 2.0 \text{ dla siatki } \omega^\tau; M=24 \\ 4.0 \text{ dla siatki } \omega^\tau; M=12 \end{matrix} \quad (4.29)$$

Oprócz samego rozwiązania, poszukiwanych wartości współczynników d_h^τ , drukowano również wartości względnego błędu procentowego δ_i^k zdefiniowanego następująco:

$$\delta_i^k [\%] = \frac{d_i^k - d_{(i,k)}}{d_{(i,k)}} \cdot 100 \% \quad (4.30)$$

przy czym:

$$\begin{aligned} \delta_i^k [\%] &- \text{względny błąd procentowy w węźle } (x_i = ih, t_k = k\tau); \\ d_{(i,k)} &- \text{dokładna wartość współczynnika w węźle } (x_i, t_k); \\ d_i^k &- \text{wartość rozwiązania przybliżonego w węźle } (x_i, t_k). \end{aligned}$$

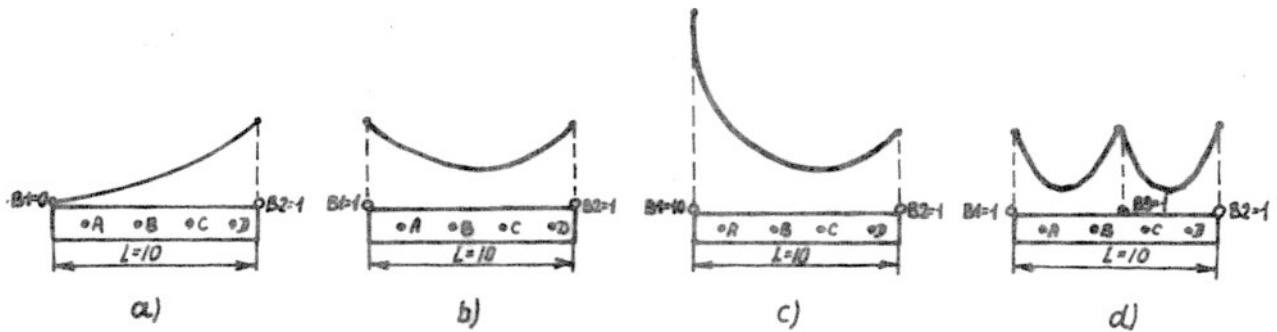
Wyniki badań testowych można przedstawić w postaci wykresów zachowania się błędu δ_i^k w zależności od czasu symulowanego procesu, wykresów zależności współczynników d_i^k od stanu obiektu oraz wykresów przedstawiających wpływ kroków dyskretyzacji h i τ na wartość błędu δ_i^k . Wykresy przebiegu błędu względnego podaje się dla

wybranych węzłów, w których można porównywać wyniki. W danym przypadku są to węzły wspólne dla wszystkich wykorzystywanych siatek /rys. 4.6/:

- jako A oznaczono jeden z węzłów zbioru $\{2,3,5,9\}$;
 jako B oznaczono jeden z węzłów zbioru $\{3,5,9,17\}$;
 jako C oznaczono jeden z węzłów zbioru $\{4,7,13,25\}$;
 jako D oznaczono jeden z węzłów zbioru $\{5,9,17,33\}$;

(4.31)

Badano wpływ na wielkość błędu δ_i^k kilku możliwych wariantów /rys. 4.7/ warunków granicznych I-go rodzaju uważanych za wymuszenia wprowadzane na obiekt przez eksperymentatora podczas przeprowadzania eksperymentu czynnego, jeżeli taki eksperyment jest możliwy. Na rys. 4.8 przedstawiono przykładowe wykresy zależności wielkości błędu δ_i^k od czasu symulowanego procesu dla czterech wariantów

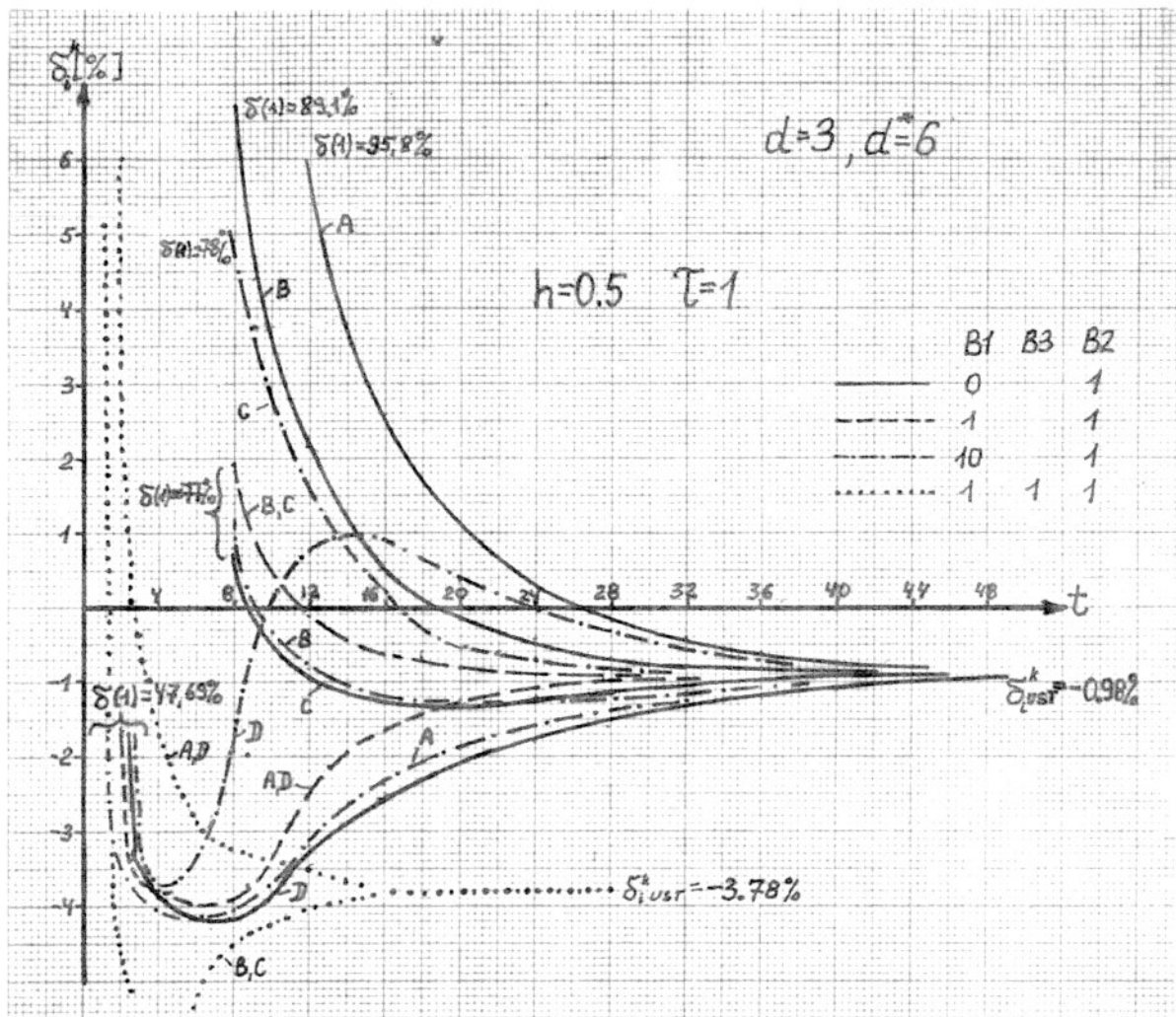


Rys. 4.7. Cztery warianty warunków granicznych I-go rodzaju.

warunków granicznych I-go rodzaju w wybranych węzłach A, B, C oraz D siatki o krokach dyskretyzacji $h = 0,5$ i $\tau = 1,0$. W tym przykładzie wyznaczano współczynnik $d = 3$ za pomocą modelu symulacyjnego w którym przyjęto $d^* = 6$. Wielkość błędu δ_i^k we wszystkich węzłach (A, B, C, D) dla wariantów a/, b/ i c/ jest zbieżna do tej samej wartości ustalonej $\delta_i^k \text{ ust.}$ jednak charakter oraz prędkość zbieżności są różne. Charakter zbieżności może być jednostajnie malejący czy też oscylacyjny. Wspólną cechą, którą można zauważyć, jest to, że zależy on /podobnie jak prędkość zbieżności/ od charakteru i szybkości zmian wartości funkcji stanu procesu w danych węzłach. Największą prędkość zbieżności osiąga się w tych węzłach oraz na

tych odcinkach czasu trwania procesu, gdzie szybkość zmian wartości funkcji stanu jest największa. Optymalnym wariantem warunku granicznego ze względu na maksymalną prędkość

zbieżności błędu δ_i^k jest wariant b/. Również badając zależność



Rys. 4.8. Zależność błędu δ_i^k od czasu symulowanego procesu przy różnych wariantach warunków granicznych I-go rodzaju.

wartości średniej błędu δ_{sr}^k , w przyjętym okresie czasu, od wybranych wariantów warunku granicznego dla różnych wartości kroków dyskretyzacji h i τ siatki ω_h^τ /tabela 2/, zauważyć można zaletę wariantu b/ / δ_{sr}^k min dla $B1=1$ i $B2 = 1$ /. Wariant d/ powoduje zbieżność błędu do innej, większej wartości błędu ustalonego

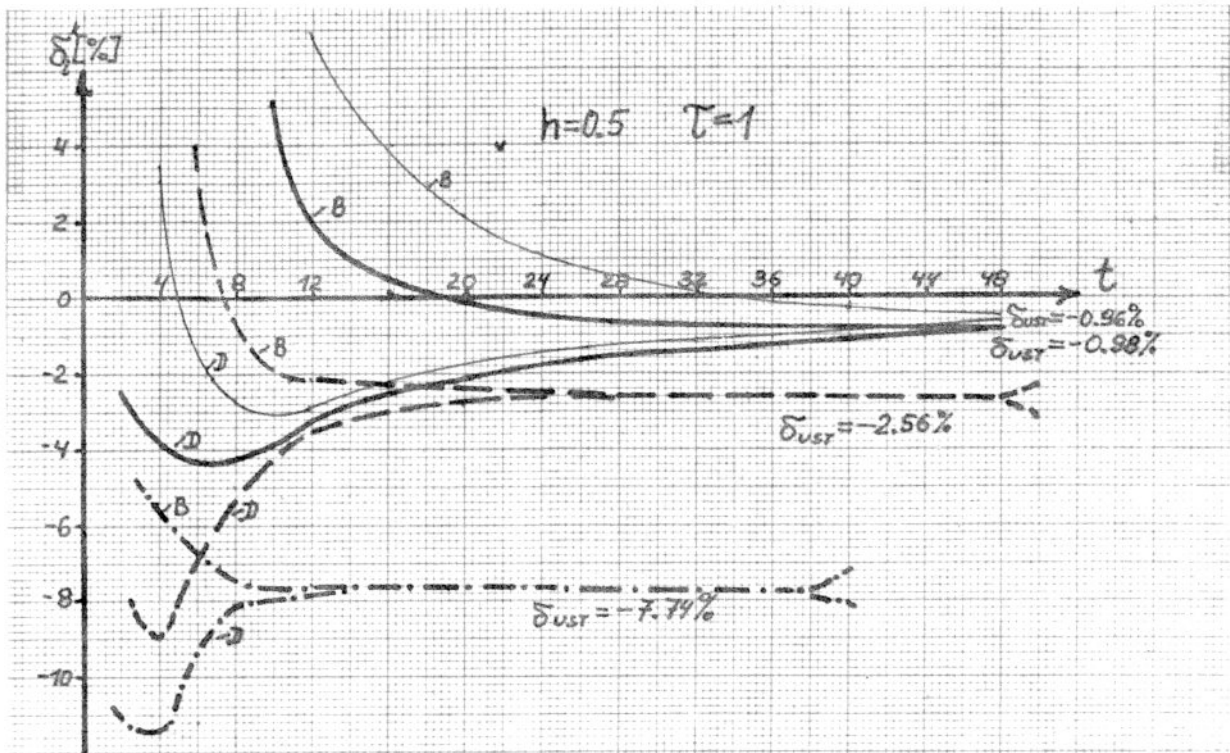
$\delta_{i,ust}^k$, chociaż przy większej szybkości zbieżności. Ten wariant podobny jest do wariantu b/ i można sytuację tę rozpatrywać tak, jak gdyby całą długość obszaru L podzielić na połowę, zadając warunki graniczne według wariantu b/ dla każdej z dwu części.

Tabela 2.

B1	$h=0.5$ $\tau=1$	$h=0.5$ $\tau=2$	$h=0.5$ $\tau=4$	$h=1$ $\tau=1$	$h=1$ $\tau=2$	$h=1$ $\tau=4$	$h=2$ $\tau=1$	$h=2$ $\tau=2$	$h=2$ $\tau=4$	B2
0	3.67%	10.43%	23.03%	6.38%	14.23%	27.45%	22.6%	34.33%	47.2%	1
1	0.51%	0.92%	-0.4%	1.41%	2.91%	1.01%	7.7%	7.75%	4.51%	1
10	0.84%	1.87%	2.12%	1.93%	3.36%	3.83%	9.01%	10.45%	9.73%	1

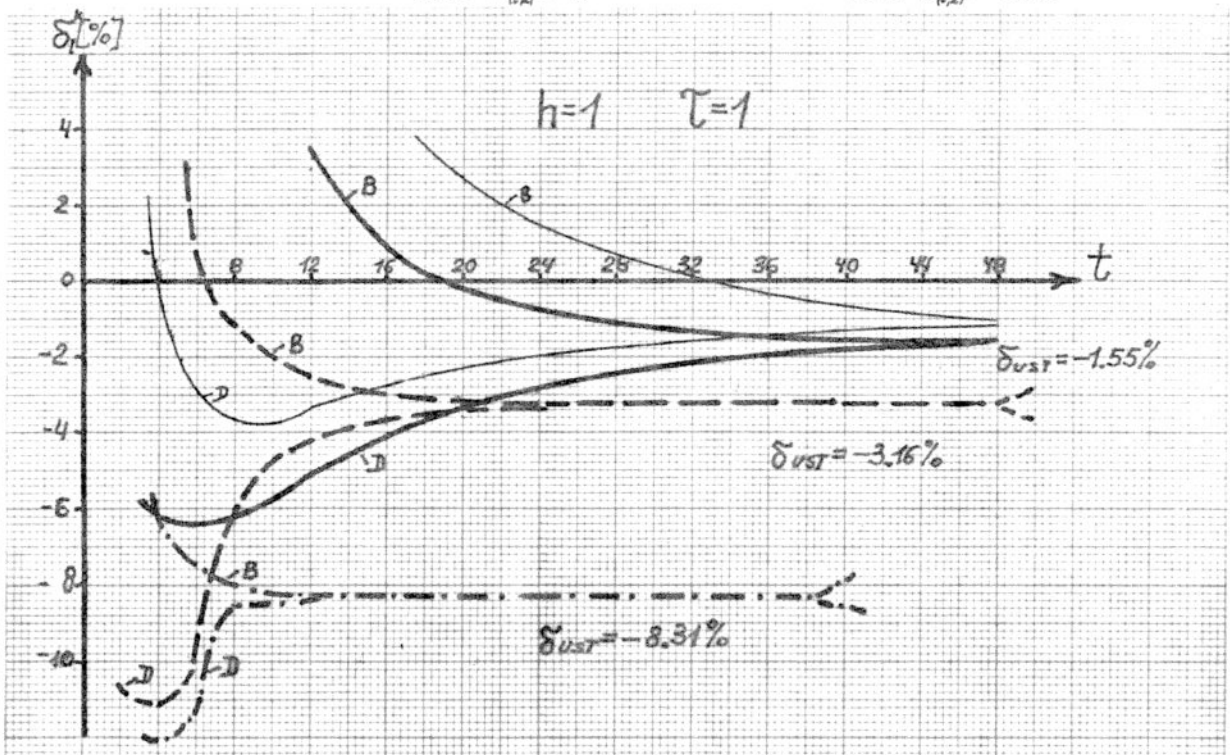
Błąd ustalony δ_i^k ust jest tu większy ze względu na to, że zachowano wartości kroku h siatki przy mniejszej długości obszaru. Posiadając możliwość przeprowadzania eksperymentu czynnego można zadawać wymuszenia w różnych punktach obszaru i kolejno wyznaczać poszukiwany współczynnik $d_{(i,k)}$ tylko w tych podobszarach, w których zmiany wartości obciążenia funkcji stanu procesu do siatki ω_h^τ są duże. Zestaw pomiarowy, o konfiguracji wykorzystywanego szablonu siatki ω_h^τ , do pomiaru wartości obciążenia funkcji stanu należałoby przemieszczać w kierunku gradientu funkcji stanu.

Na rys. 4.9 oraz 4.10 przedstawiono w postaci wykresów zależności błędu δ_i^k w węzłach siatki od czasu symulowanego procesu przy różnych wielkościach współczynnika wyrównywania potencjału. Wartość współczynnika wyrównywania potencjału jest odwrotnością wartości współczynnika $d_{(i,k)}$. Większe błędy ustalone δ_i^k ust odpowiadają większym współczynnikom wyrównywania potencjału, tzn. tym procesom, których czas dojścia do stanu ustalonego jest krótszy przy tych samych warunkach brzegowych /czego nie uwzględniono poprzez zmniejszenie kroku dyskretyzacji czasu τ /. Wielkość błędu ustala się szybciej, jednak po pewnym czasie /na rysunkach, dla $d_{(i,k)} = 0.3$ po czasie $t = 40 \cdot \tau$ / nie ma już możliwości określenia $d_{(i,k)}^k$ ust. Spowodowane jest to tym, że identyfikowany proces zbliżył się do stanu ustalonego / statycznego / i zmiany funkcji stanu są małe w porównaniu z błędami obliczeniowymi.



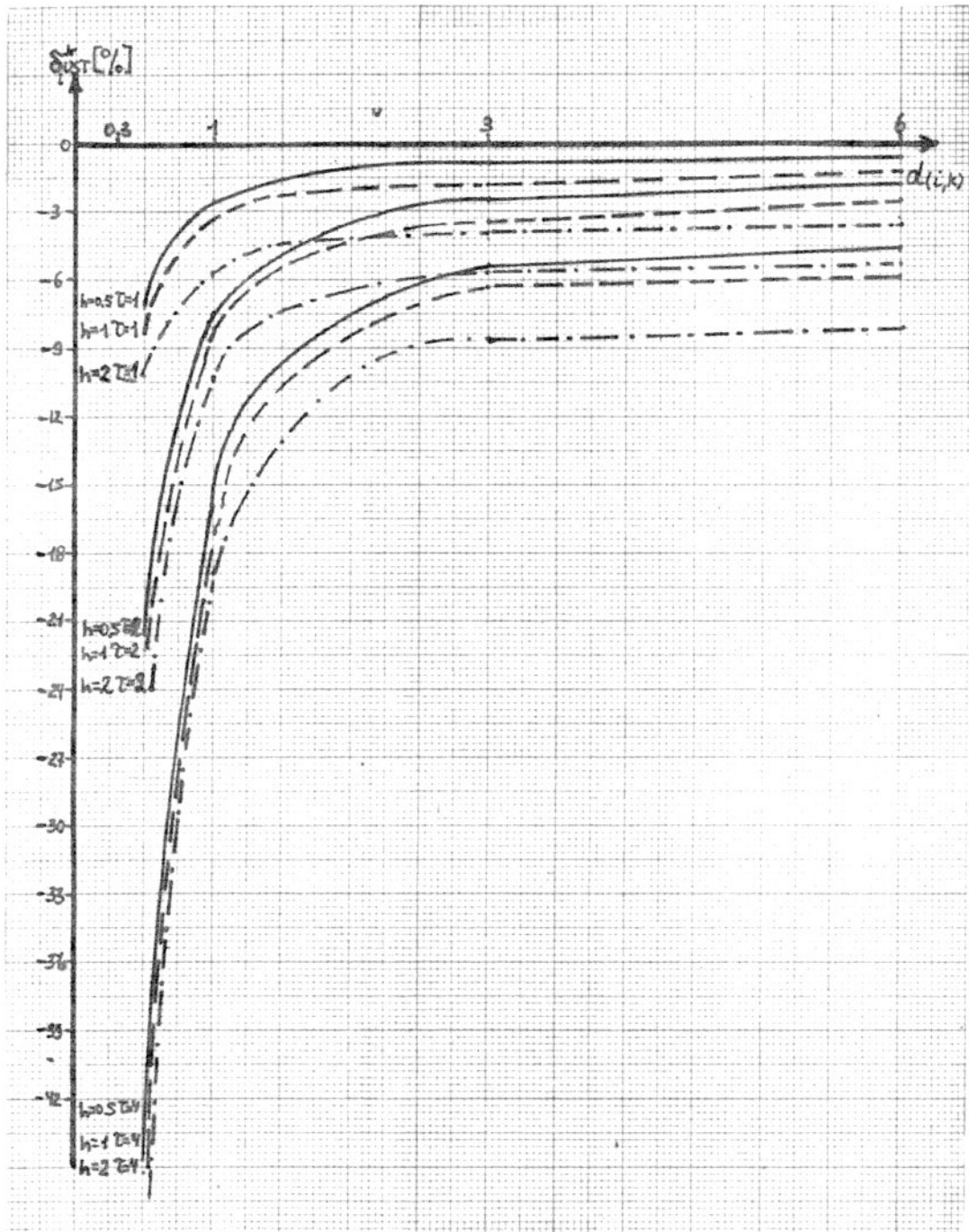
Rys. 4.9. Zależność błędu δ_i^k od czasu symulowanego procesu dla $\tau=1$, $h=0.5$ przy różnych wielkościach współczynnika wyrównywania potencjału:

— dla $d_{(i,k)}=6$ ---- dla $d_{(i,k)}=1$ $d^*=6$
 — dla $d_{(i,k)}=3$ -.-.- dla $d_{(i,k)}=0.3$



Rys. 4.10. Zależność błędu δ_i^k od czasu symulowanego procesu dla $\tau=1$, $h=1$ przy różnych wielkościach współczynnika wyrównywania potencjału:

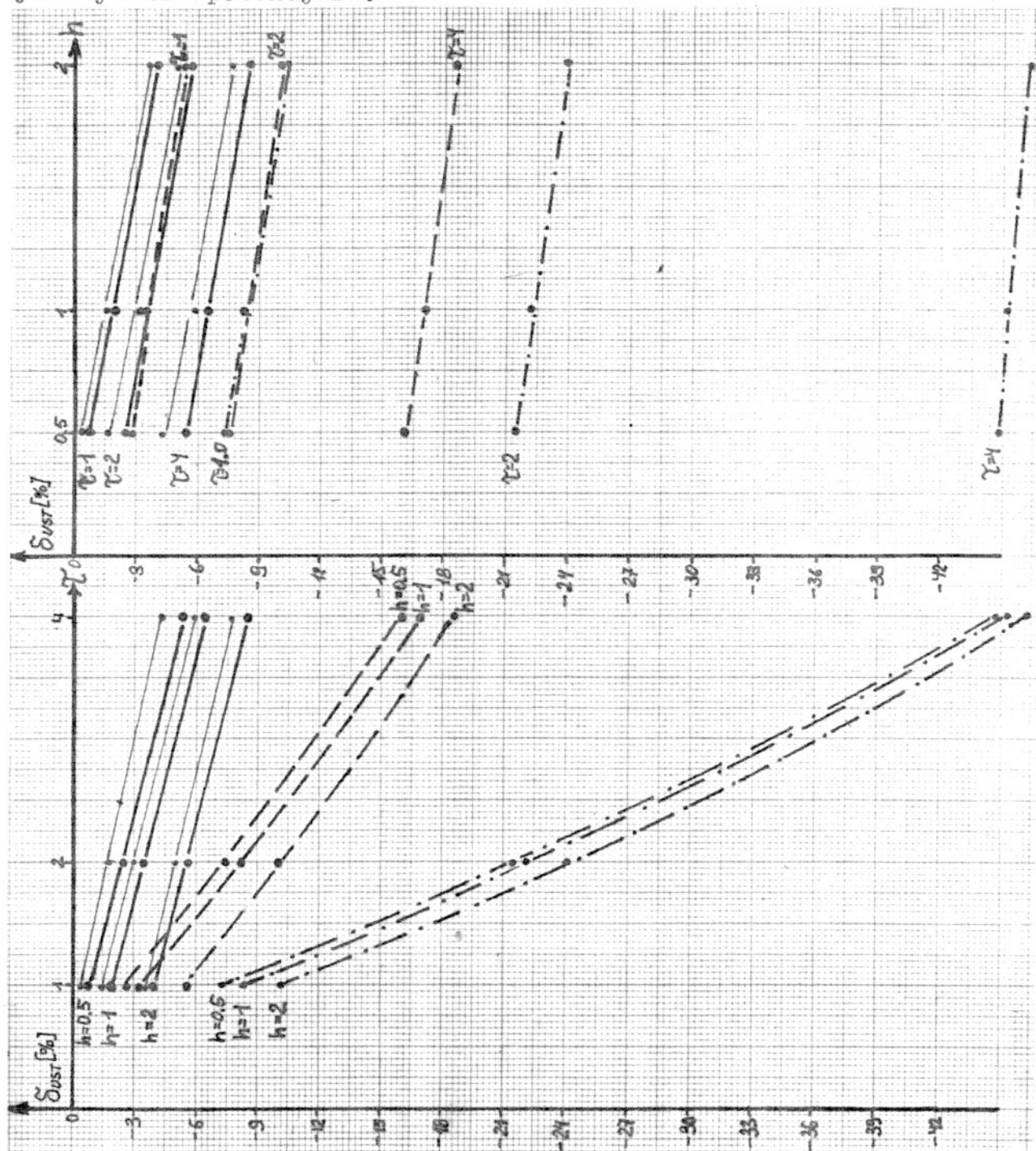
— dla $d_{(i,k)}=6$ ---- dla $d_{(i,k)}=1$ $d^*=6$
 — dla $d_{(i,k)}=3$ -.-.- dla $d_{(i,k)}=0.3$



Rys. 4.11. Zachowanie się błędu ustalonego $\delta_i^k \text{ ust}$ w zależności od wartości współczynnika wyrównywania potencjału przy różnych krokach dyskretyzacji siatki ω_h^τ .

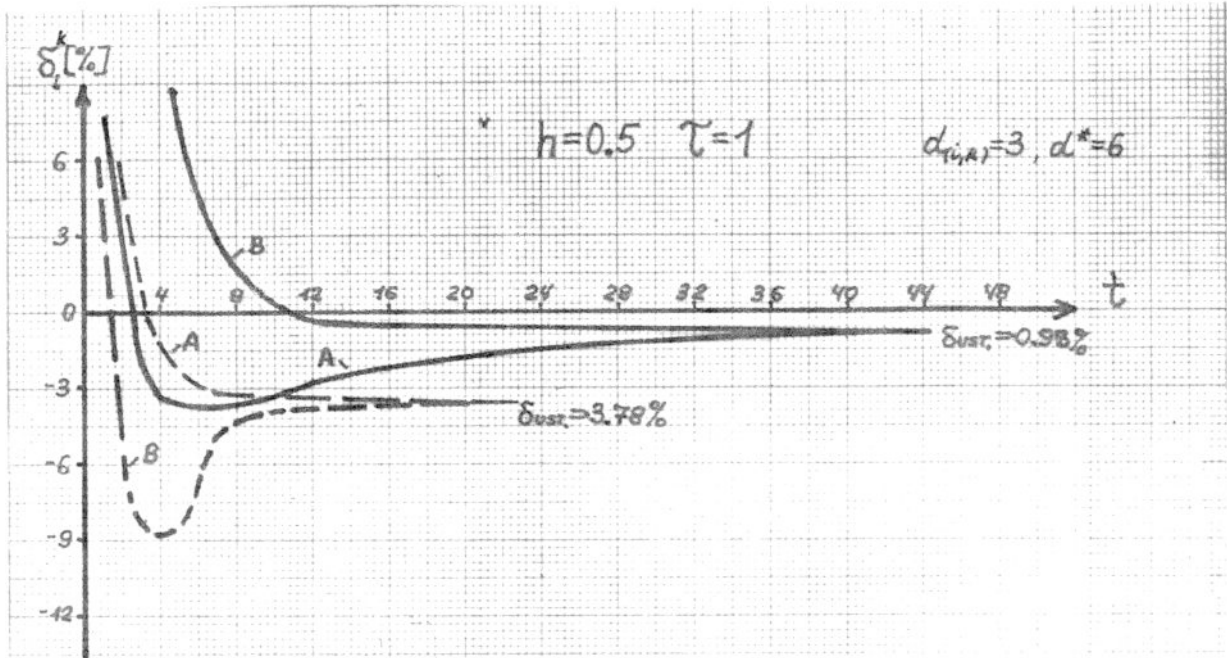
Na rys. 4.11 przedstawiono zachowanie się błędu ustalonego $\delta_i^k \text{ ust}$, w zależności od wartości poszukiwanych parametrów, dla różnych kroków siatki ω_h^τ . Widoczny jest od pewnej wartości $d(i,k)$ gwałtowny wzrost uchybu ustalonego, przy identyfikacji szybkich procesów, czemu należy przeciwdziałać poprzez zmniejszanie kroków dyskretyzacji. Na znaczny wpływ na wielkość błędu ustalonego

wartości kroku czasowego τ oraz niewielki wpływ kroku przestrzennego h wskazują przedstawione na rys. 4.12 zależności $\delta_{ust} = f(\tau)$ oraz $\delta_{ust} = f(h)$, przy różnych wielkościach współczynnika wyrównywania potencjału.

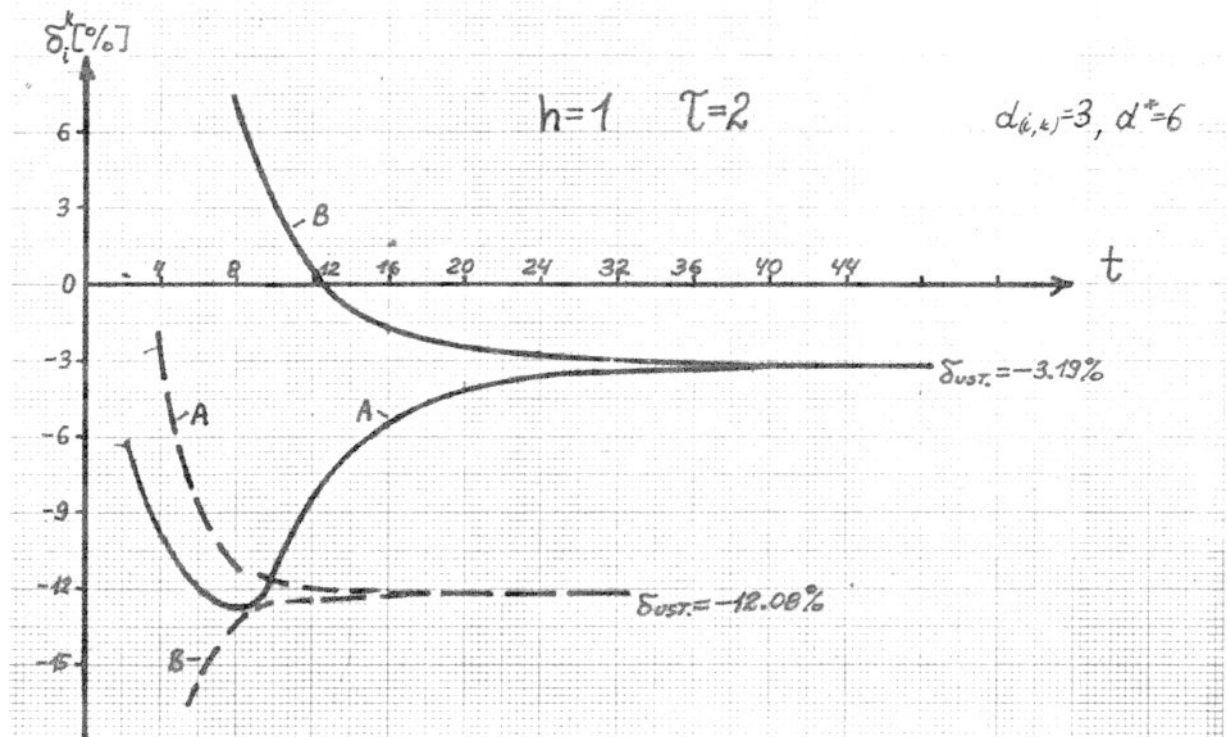


Rys. 4.12. Zależność wartości ustalonej błędu δ_{ust}^k od kroków dyskretyzacji siatki ω_h^τ przy różnych wielkościach współczynnika wyrównywania potencjału:

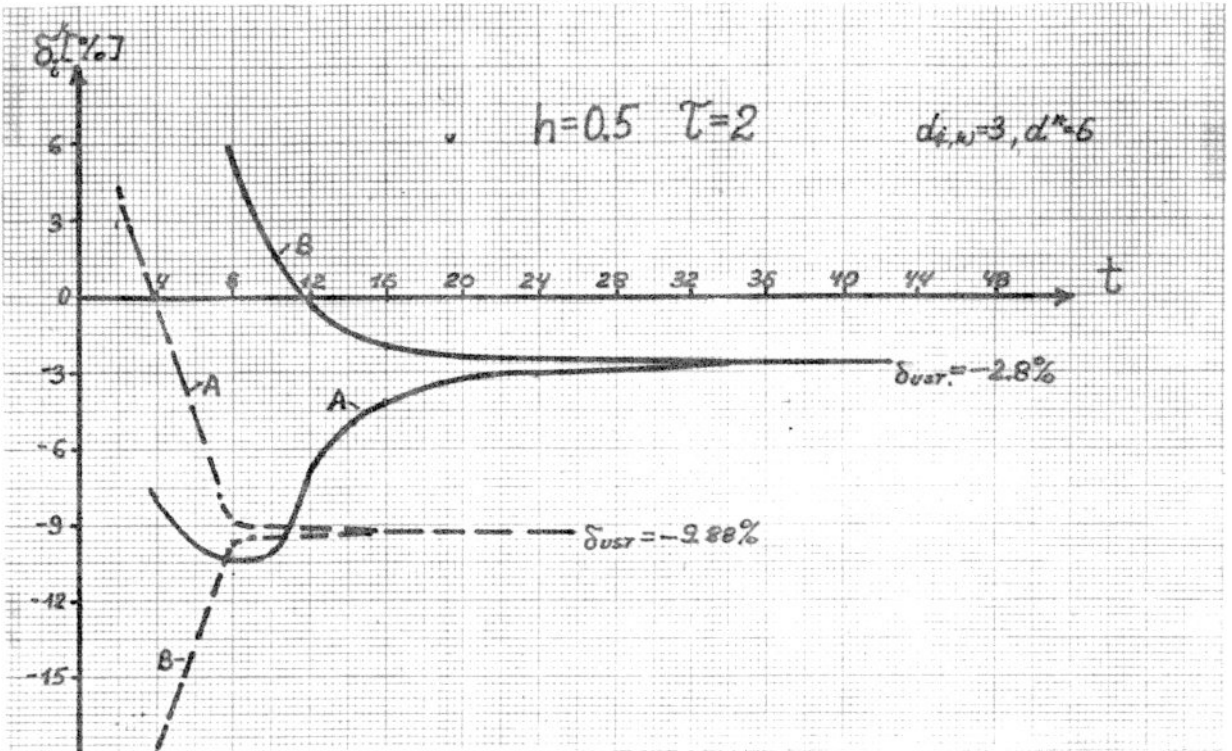
— dla $d(i,k) = 6$ - - - - dla $d(i,k) = 1$
 — dla $d(i,k) = 3$ - - - - dla $d(i,k) = 0.3$



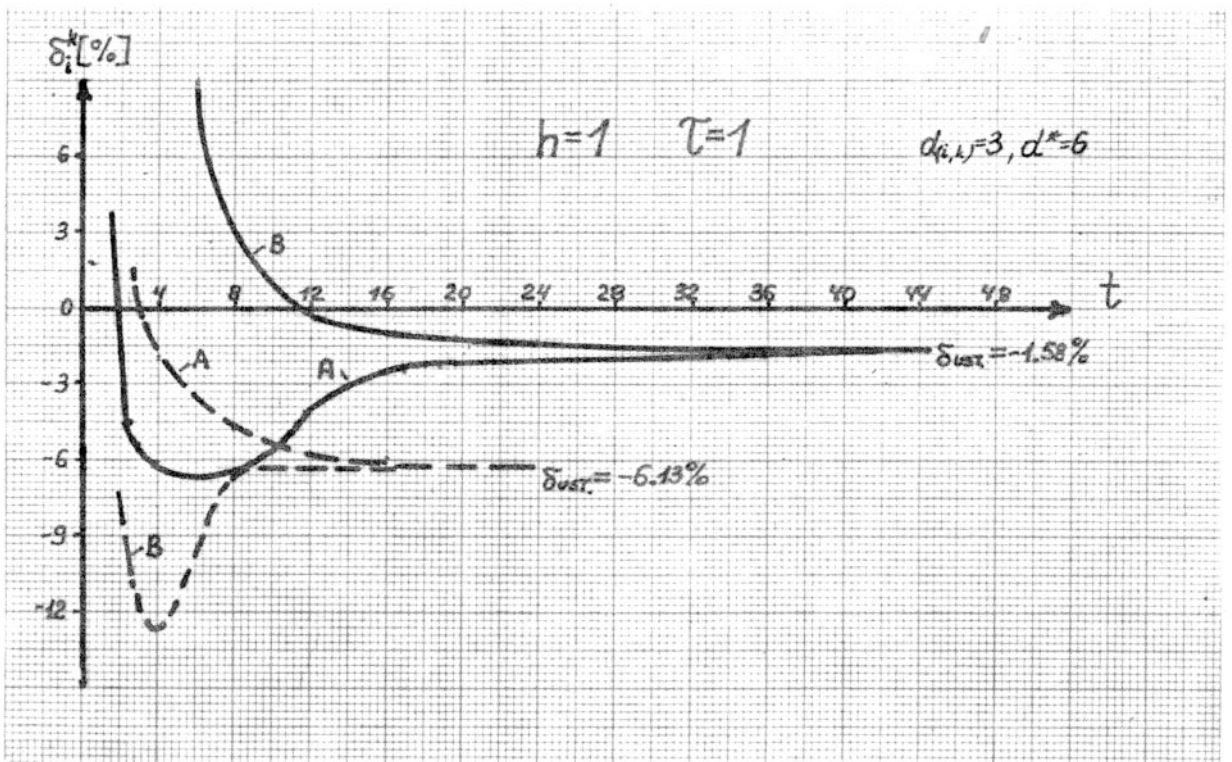
Rys. 4.13. Zależność błędu δ_i^k od czasu symulowanego procesu dla $h = 0.5$, $\tau = 1$ w węzłach A, D i B, C:
 — wariant b/ warunku granicznego,
 ---- wariant d/ warunku granicznego.



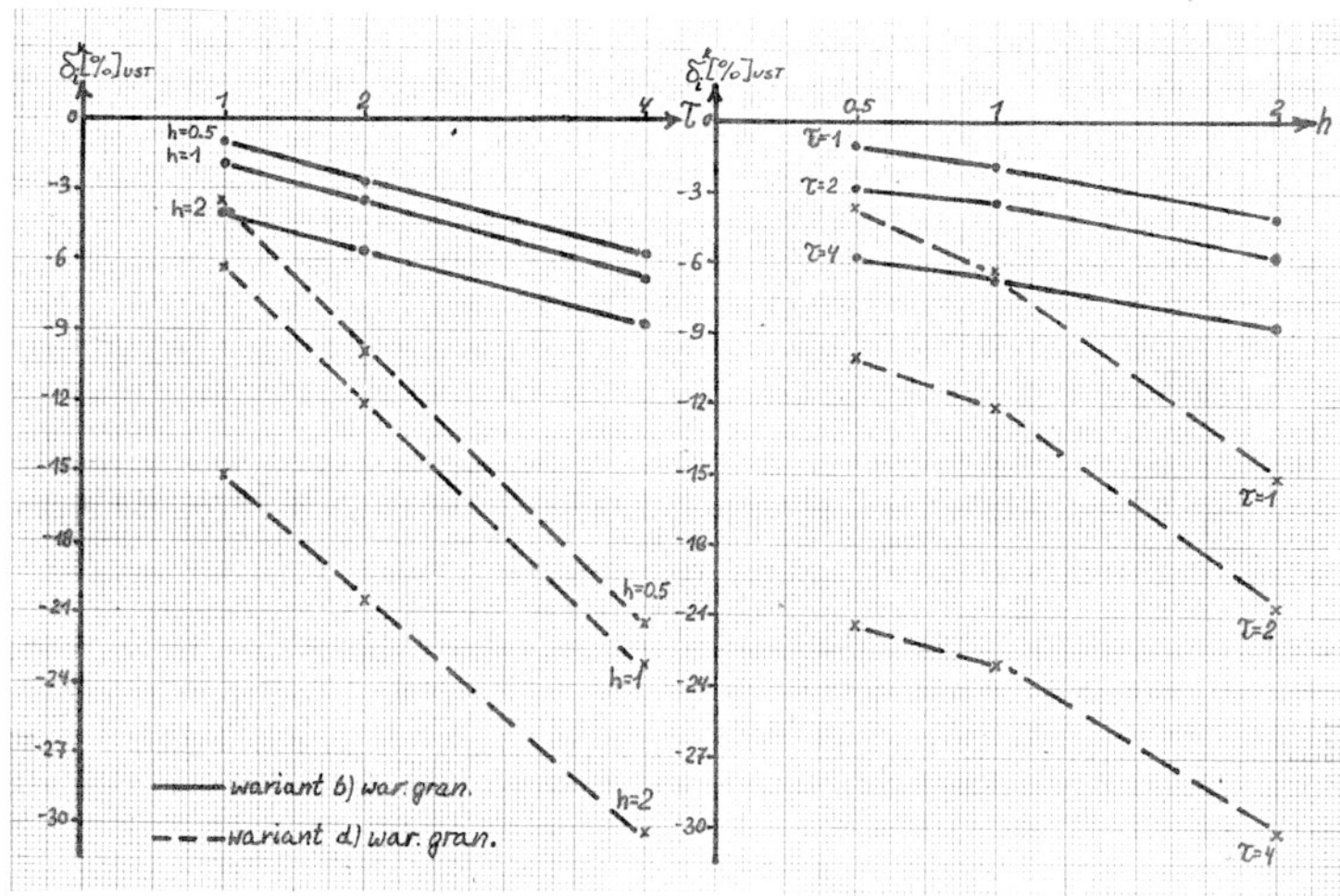
Rys. 4.14. Zależność błędu δ_i^k od czasu symulowanego procesu dla $h = 1$, $\tau = 2$ w węzłach A, D i B, C:
 — wariant b/ warunku granicznego,
 ---- wariant d/ warunku granicznego.



Rys. 4.15. Zależność błędu δ_i^k od czasu symulowanego procesu dla $h = 0,5, \tau = 1$ w węzłach A, D i B, C:
 — wariant b/ warunku granicznego,
 ---- wariant d/ warunku granicznego.



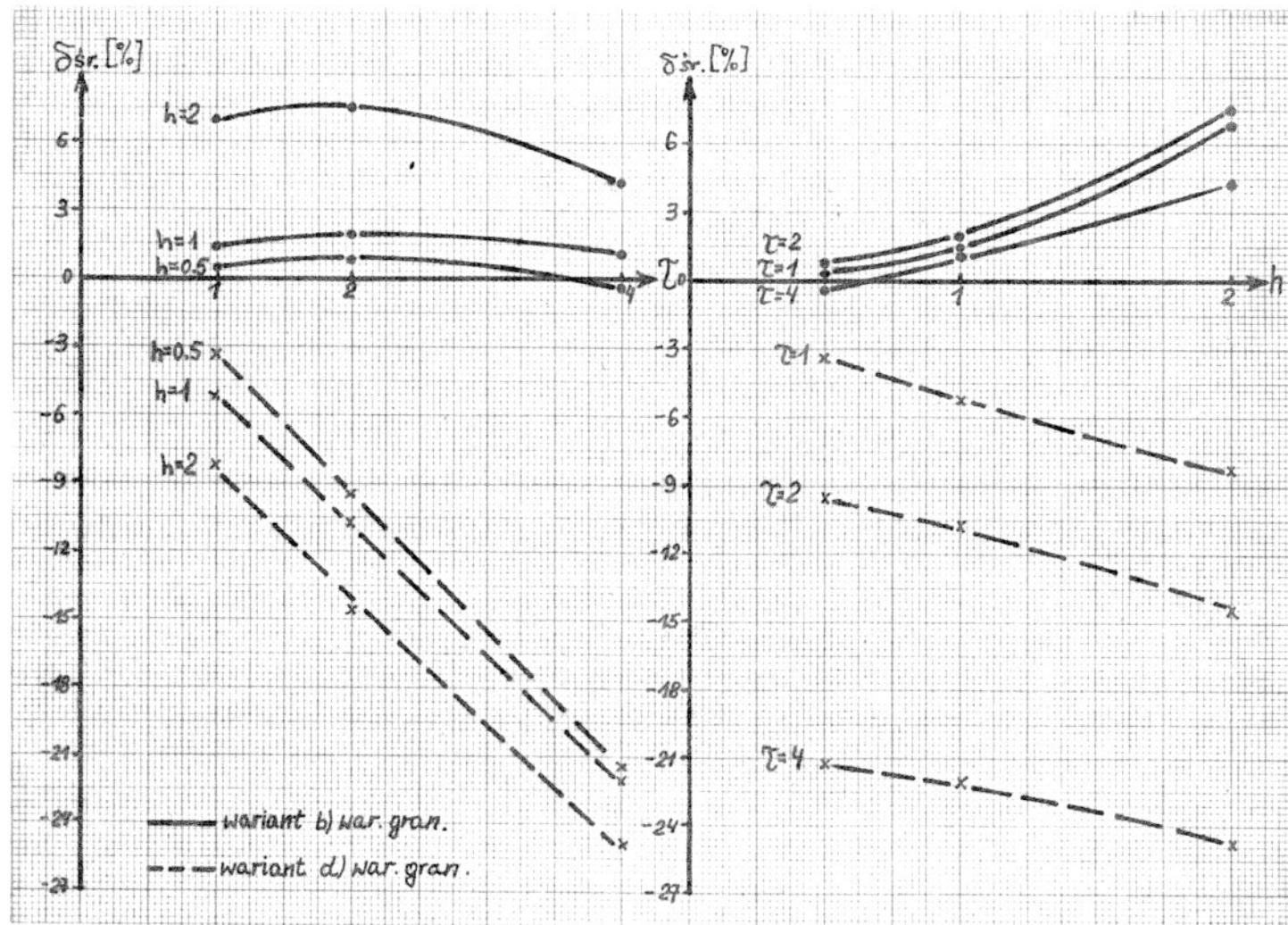
Rys. 4.16 Zależność błędu δ_i^k od czasu symulowanego procesu dla $h = 1, \tau = 1$ w węzłach A, D i B, C:
 — wariant b/ warunku granicznego,
 ---- wariant d/ warunku granicznego.



Rys. 4.17. Zależność wartości ustalonej błędu $\delta_t[\%]_{ust}$ od kroków dyskretyzacji siatki ω_h^τ :

a/ kroku czasowego τ ;

b/ kroku przestrzennego h .



Rys. 4.18. Zależność wartości średniej błęd $\delta [\%]$ δ_{sr} od kroków dyskretyzacji siatki ω_h^τ : a/ kroku czasowego τ ;
b/ kroku przestrzennego h .

Na przedstawianych wykresach uchyb względny zbieżny jest do ujemnej wartości ustalonej, tzn. przy przybliżaniu się otrzymywanych wartości współczynnika do wartości ustalonej zawsze zachodzi taka sytuacja, że $d_i^k < d_{(i,k)}$ /wartości otrzymywane są zaniżane/. Wiąże się to z wyborem parametru modelu symulacyjnego $d^* = 6 > d_{(i,k)}$. Gdy przyjmując parametr modelu symulacyjnego $d^* < d_{(i,k)}$, to uchyb względny dążyć będzie do dodatniej wartości uchybu ustalonego, a wartości otrzymywanych w wyniku obliczeń współczynników będą zawsze zawyżone w porównaniu z wartością $d_{(i,k)}$, tzn. $d_i^k > d_{(i,k)}$. Mając powyższe na uwadze można, nie czekając na ustalenie się błędu względnego, obserwować z którego kierunku rozpoczyna się proces zbieżności poszukiwanego współczynnika do wartości ustalonej. Pomoże to orientacyjnie określić przedział, w którym znajduje się wartość $d_{(i,k)}$, oraz dobrać parametr modelu symulacyjnego d^* możliwie najmniej różniący się od $d_{(i,k)}$ co, jak widać z rys. 4.9, 4.10, 4.11, ma wpływ na wartość błędu ustalonego. Wykorzystywany program symulacji cyfrowej umożliwiał otrzymywanie wydruków zależności poszukiwanych parametrów d_i^k /oznaczono - DELA/ od wartości obciążenia funkcji stanu /oznaczono - D/ do siatki ω_h^{τ} /jako przykład rys. 4.19/ dla różnych węzłów.

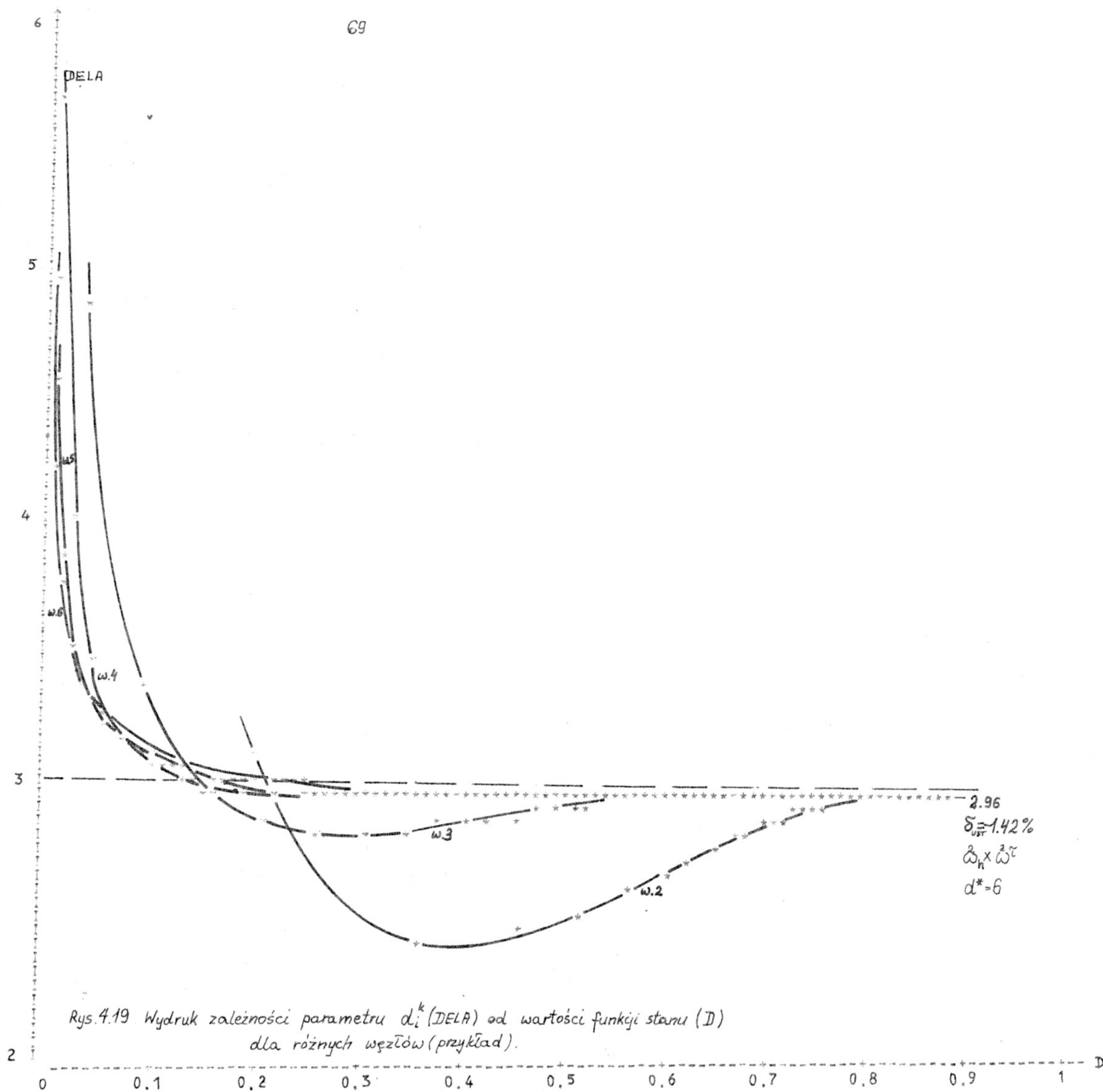
Badano również zachowanie się błędu δ_i^k od czasu trwania symulowanego procesu dla różnych par kroków dyskretyzacji h i τ /rys. 4.13, 4.14, 4.15, 4.16/ oraz wpływ tych kroków na wartość błędu /rys. 4.17 i 4.18/. Przyjęto tu wariant b/ warunku granicznego, którego wybór umożliwiał otrzymywanie większej prędkości zbieżności błędu do wartości ustalonej. Obserwowany jest wyraźny wpływ doboru kroków h i τ na dokładność wyznaczania parametrów d_i^k .

Przykład uściślenia rozwiązania różnicowego według wzoru obliczeniowego Runge'go:

$$d^{II} = 2.97 \quad - \text{wartość rozwiązania różnicowego na siatce} \\ (\delta_{ust.} = 0.98\%) \quad \text{o krokach } h = 0.5 \text{ i } \tau = 1;$$

$$d^I = 2.82 \quad - \text{wartość rozwiązania różnicowego na siatce} \\ (\delta_{ust.} = 6\%) \quad \text{o krokach } h = 1.0 \text{ i } \tau = 4.0.$$

$$d_{uśc.}^{II} = 2.97 - \frac{2.82 - 2.97}{3} = 2.97 + 0.05 = 3.02 - \text{wartość uściślona.} \\ (\delta_{ust.} = 0.66\%)$$



4.5. Badanie stabilności rozwiązywania zadania identyfikacji względem danych wejściowych

4.5.1. Wygładzanie danych pomiarowych - metodą regularyzacji odwrotnych zagadnień brzegowych

Dane pomiarowe stanu obiektu są w rzeczywistości zawsze obarczone pewnymi błędami systematycznymi oraz przypadkowymi [36], [93]. Stąd przy pomiarach tej samej wielkości w warunkach pomiaru praktycznie niezmiennych otrzymuje się różne wyniki traktowane jako zmienne losowe o normalnym rozkładzie gęstości prawdopodobieństwa. W przypadku jak na rys. 4.1 obserwacje punktowe dotyczą funkcji φ przedstawiającej przebieg rozwiązania φ w punktach (x_i, t_k) czasoprzestrzeni Θ_T , zniekształcone przez addytywne zakłócenia pomiarowe /szum pomiarowy/, będące niezależnymi realizacjami zmiennej losowej o rozkładzie normalnym. Stochastyczność obiektu o operatorze deterministycznym wiąże się więc tylko z zakłóceniami pomiaru jego stanu. Przy rozwiązywaniu zagadnienia identyfikacji /odwrotnego zagadnienia brzegowego, inwersyjnego/ wykorzystywany jest zestaw danych wyników pomiarowych /seria identyfikująca/, które otrzymywane są z pewnym błędem. Algorytm identyfikacji zawiera takie operacje, że nakładanie się na te dane niemonotonicznego szumu o bardzo małej wartości odchylenia standardowego może doprowadzić do dowolnie dużych zmian w wielkościach poszukiwanych. Dlatego też istnieje potrzeba regularyzacji tego niepoprawnie sformułowanego zagadnienia odwrotnego. Naturalnym podejściem jest filtracja uchybu i przekształcenie obserwacji $\langle \varphi_i^k \rangle$ w zbiór wartości wygładzonych $\langle \tilde{\varphi}_i^k \rangle$. Pozwala to sprowadzić zadanie stochastyczne do zadania niestochastycznego, a następnie przeprowadzić na podstawie wygładzonych pomiarów identyfikację obiektu deterministycznego. Stosowanie wygładzania do regularyzacji niepoprawnie sformułowanego odwrotnego zagadnienia brzegowego eliminuje przypadkowe wahania danych wejściowych przy jednoczesnym zachowaniu ich jakości [86]. Jedną z metod wygładzania jest tzw. metoda lokalnej aproksymacji [68]. Umożliwia ona w obrębie k-tej warstwy czasowej wyodrębnienie regularnej składowej φ_i^k z mieszaniny $\tilde{\varphi}_i^k = \varphi_i^k + n_i^k$, będącej sumą dostatecznie gładkiego regularnego szeregu φ_i^k , $i = 1, \dots, N$ i dyskretnego niezależnego procesu losowego n_i^k z wartością oczekiwaną $M(n) = 0$.

Ze względu na to, że n_i^k jest wielkością centrowaną, naturalne jest wykorzystanie uśredniania lokalnego $\tilde{\varphi}_i^k = \hat{\varphi}_i^k + \tilde{n}_i^k \approx \varphi_i^k$ realizowane drogą lokalnego ważenia:

$$\tilde{\varphi}_i = \sum_{r=-b}^b \hat{\varphi}_{i+r} \varrho_r \quad (4.32)$$

przy czym:

ϱ_r ($r=-b \dots b$) - współczynniki wagowe;

$$\sum_{r=-b}^b \varrho_r = 1.$$

Metoda polega na wyrażaniu wartości wygładzonych przez wartości pierwotne /zakłócone/ w danym węźle i węzłach sąsiednich. Wykorzystując przy tym rachunek najmniejszych kwadratów, do $2b+1$ kolejnych wartości obserwacji zmiennych $\hat{\varphi}_{i-b}^k, \hat{\varphi}_{i-b+1}^k, \dots, \hat{\varphi}_i^k, \dots, \hat{\varphi}_{i+b-1}^k, \hat{\varphi}_{i+b}^k$ należy dopasować wielomian stopnia ϱ :

$$\varphi(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots + C_\varrho x^\varrho \quad (4.33)$$

Obliczone wartości $\varphi(x_i)$ przyjmowane są jako wygładzone wartości zmiennej $\hat{\varphi}_i^k$. Istnieją gotowe algorytmy numeryczne stosowane do wyrażania wartości wygładzonej poprzez $2b+1$ wartości pierwotnych. Postać tych algorytmów zależy od stopnia wielomianu przybliżającego dane wejściowe. Na przykład, przyjmując $b = 2$, czyli stosując do obliczania $\hat{\varphi}_i^k$ pięć kolejnych wartości $\hat{\varphi}_{i+r}^k$ ($r = -2, -1, 0, +1, +2$) otrzymuje się dla wielomianu stopnia drugiego, jako funkcji przybliżającej, następujące wzory [86]:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_{i\mp 2}^k &= 1/70(69 \hat{\varphi}_{i\mp 2}^k + 4 \hat{\varphi}_{i\mp 1}^k - 6 \hat{\varphi}_i^k + 4 \hat{\varphi}_{i\pm 1}^k - \hat{\varphi}_{i\pm 2}^k) \\ \tilde{\varphi}_{i\mp 1}^k &= 1/35(2 \hat{\varphi}_{i\mp 2}^k + 27 \hat{\varphi}_{i\mp 1}^k + 12 \hat{\varphi}_i^k - 8 \hat{\varphi}_{i\pm 1}^k + 2 \hat{\varphi}_{i\pm 2}^k) \\ \tilde{\varphi}_i^k &= 1/35(-3 \hat{\varphi}_{i-2}^k + 12 \hat{\varphi}_{i-1}^k + 17 \hat{\varphi}_i^k + 12 \hat{\varphi}_{i+1}^k - 3 \hat{\varphi}_{i+2}^k) \end{aligned} \quad (4.34)$$

W celu poprawienia jakości wygładzania, wzory wygładzające można stosować kilkakrotnie do danych już wygładzonych. Z punktu widzenia teoretycznego metody wygładzania zawierają wiele elementów raczej dowolnych, niezupełnie uzasadnionych /wybór stopnia wielomianu,

liczba punktów branych pod uwagę przy wygładzaniu w metodach opartych na rachunku najmniejszych kwadratów lub też liczba powtórzeń wygładzania danych/. Jednak droga ta prowadzi do regularyzacji odwrotnych zagadnień brzegowych. Do wygładzania wyników pomiarowych można wykorzystywać również funkcje sklejące, tzw. splajny.

Oprócz omówionego wygładzania w obszarze, w obrębie k-tej warstwy czasowej, można wcześniej przeprowadzać również filtrację zakłóceń przypadkowych w i-tym punkcie pomiarowym. Jeżeli badany proces jest procesem wolnozmiennym, to wtedy na odcinku czasowym $\Delta_t \ll \tau$ / Δ_t - czas pomiaru, τ - krok dyskretyzacji czasu / w tych samych warunkach uzyskuje się większą ilość wyników pomiarowych tej samej wielkości $\hat{\varphi}_i^k$. Jako wielkość zmierzona w danym i-tym węźle dla k-tej warstwy czasowej przyjmuje się na przykład średnią wartość arytmetyczną:

$$\bar{\varphi}_i^k = \frac{1}{l} \sum_{r=1}^l (\hat{\varphi}_i^k)_r \quad (4.35)$$

Zależność średniego błędu serii pomiarów od ich liczby l wyraża się wzorem:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sigma}{\sqrt{l}} \quad (4.36)$$

Ponieważ teoretyczne odchylenie standardowe σ dla danego rozkładu prawdopodobieństwa zakłócenia pomiarowego jest stałe, to początkowo błąd $\bar{\varepsilon}$ szybko maleje ze wzrostem l , a następnie zmniejszanie się następuje bardzo wolno. Istnieje więc pewna wartość krytyczna $l_{\text{kryt.}}$, przekroczenie której prawie nie ma wpływu na $\bar{\varepsilon}$.

4.5.2. Przykłady testowe badania wpływu poziomu zakłóceń pomiarowych na wyniki identyfikacji

Do przeprowadzenia badań testowych stabilności rozwiązywania zadania identyfikacji względem danych wejściowych, posłużono się przykładem w postaci jednowymiarowego odwrotnego zagadnienia brzegowego:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(c \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = d \frac{\partial \varphi}{\partial t} ; \quad d = c' + g' \quad (4.37)$$

$$\varphi(0, t) = 0; \quad \varphi(1, t) = 1; \quad \varphi(x, 0) = 0$$

W zadaniach testowych jako dane pomiarowe traktowano odpowiedzi

założonego modelu o znanych parametrach, zakłócone błędami pomiarowymi. Symulowano dwa rodzaje zakłóceń pomiarowych - błąd systematyczny /pewna jednakowa w każdym węźle wartość stała lub stały błąd procentowy od wartości dokładnej funkcji stanu w danym węźle/ oraz błąd przypadkowy w postaci niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie normalnym $N(0, \sigma)$. Stacjonarny szum pomiarowy, nie korelowany z wartością funkcji stanu, dodawany jest do tej wartości i reprezentowany przez liczby losowe z rozkładu normalnego o różnych wartościach odchylenia standardowego $\sigma = 10^{-4}, 10^{-3}$ itd/. Jest on realizowany przez specjalny podprogram generowania liczb pseudolosowych na maszynie cyfrowej [99].

Błąd systematyczny nie powoduje błędów w wyznaczaniu poszukiwanych współczynników liniowych, skupionych czy to przy pochodnej czasowej, czy też przy pochodnej względem współrzędnej geometrycznej. Jednak w przypadku współczynników zależnych od wartości funkcji stanu występuje błąd spowodowany obecnością błędów systematycznych w danych pomiarowych. Na rys. 4.20 przedstawiono przykładowo wyniki identyfikacji współczynnika zależnego od wartości funkcji stanu ($d = 3+3\varphi$ / w przypadku obecności w danych pomiarowych błędów systematycznych).

Wyniki symulacji wskazują, że obciążenie danych pomiarowych nawet niewielkim błędem przypadkowym ma znaczny ujemny wpływ na określenie wartości poszukiwanych współczynników, powoduje duży błąd w ich wyznaczeniu. Wartości te znacznie odbiegają od rzeczywistych i są praktycznie nie do przyjęcia. Dlatego należy ostrożnie interpretować wyniki eksperymentów opartych na takich danych pomiarowych. Stwierdzono pozytywny wpływ jakości wygładzania danych pomiarowych na jakość oszacowania poszukiwanych współczynników. Należy więc zwrócić szczególną uwagę na skuteczniejsze metody wygładzania, wielokrotnie zmniejszające błędy wywołane obecnością błędów przypadkowych w danych pomiarowych. Niżej przykładowo przedstawiono ujemny wpływ błędów przypadkowych oraz jego ograniczenie drogą wygładzania danych pomiarowych podczas identyfikacji współczynnika ($d = 0.5$) przy pochodnej czasowej:

odchylenie standardowe $\sigma = 0.03$
 $h = 0.5 \quad \tau = 1.0$

bez szumu pomiarowego

- krok czasowy $9 \cdot \tau$	wartość funkcji	{ węzeł 4 - 0.5263; węzeł 7 - 0.2198; węzeł 17 - 0.4018
- krok czasowy $10 \cdot \tau$	stanu	

z szumem pomiarowym

- krok czasowy $9 \cdot \tau$	wartość funkcji	{ węzeł 4 - 0.5495; węzeł 7 - 0.2298; węzeł 17 - 0.3817
- krok czasowy $10 \cdot \tau$	stanu	
wartość współczynnika w kroku czasowym $10 \cdot \tau$		{ węzeł 4 - 0.0230; węzeł 7 - -9.3644; węzeł 17 - 1.5559 $\delta = -99.23\%$; $\delta = -412.14\%$; $\delta = -48.13\%$

z wygładzaniem danych pomiarowych

- krok czasowy $9 \cdot \tau$	wartość funkcji	{ węzeł 4 - 0.5314; węzeł 7 - 0.2310; węzeł 17 - 0.4060
- krok czasowy $10 \cdot \tau$	stanu	
wartość współczynnika w kroku czasowym $10 \cdot \tau$		{ węzeł 4 - 2.3060; węzeł 7 - 3.4928; węzeł 17 - 3.5017 $\delta = -23.13\%$; $\delta = +16.42\%$; $\delta = +16.72\%$
$h = 1.0$ $\tau = 1.0$		

z szumem pomiarowym

- krok czasowy $9 \cdot \tau$	wartość funkcji	{ węzeł 3 - 0.4074; węzeł 6 - 0.0993; węzeł 10 - 0.6570
- krok czasowy $10 \cdot \tau$	stanu	
wartość współczynnika w kroku czasowym $10 \cdot \tau$		{ węzeł 3 - 2.2203; węzeł 6 - 3.3893; węzeł 10 - 1.9807 $\delta = -25.99\%$; $\delta = 12.97\%$; $\delta = -33.97\%$

z wygładzaniem danych pomiarowych

- krok czasowy $9 \cdot \tau$	wartość funkcji	{ węzeł 3 - 0.4061; węzeł 6 - 0.0945; węzeł 10 - 0.6663
- krok czasowy $10 \cdot \tau$	stanu	

wartość współczynnika w kroku
czasowym 10τ

węzeł 3 - 2.7515; węzeł 6 - -3.0353; węzeł 10 - 3.1384
 $\delta = -8.28\%$; $\delta = 1.17\%$; $\delta = 4.61\%$

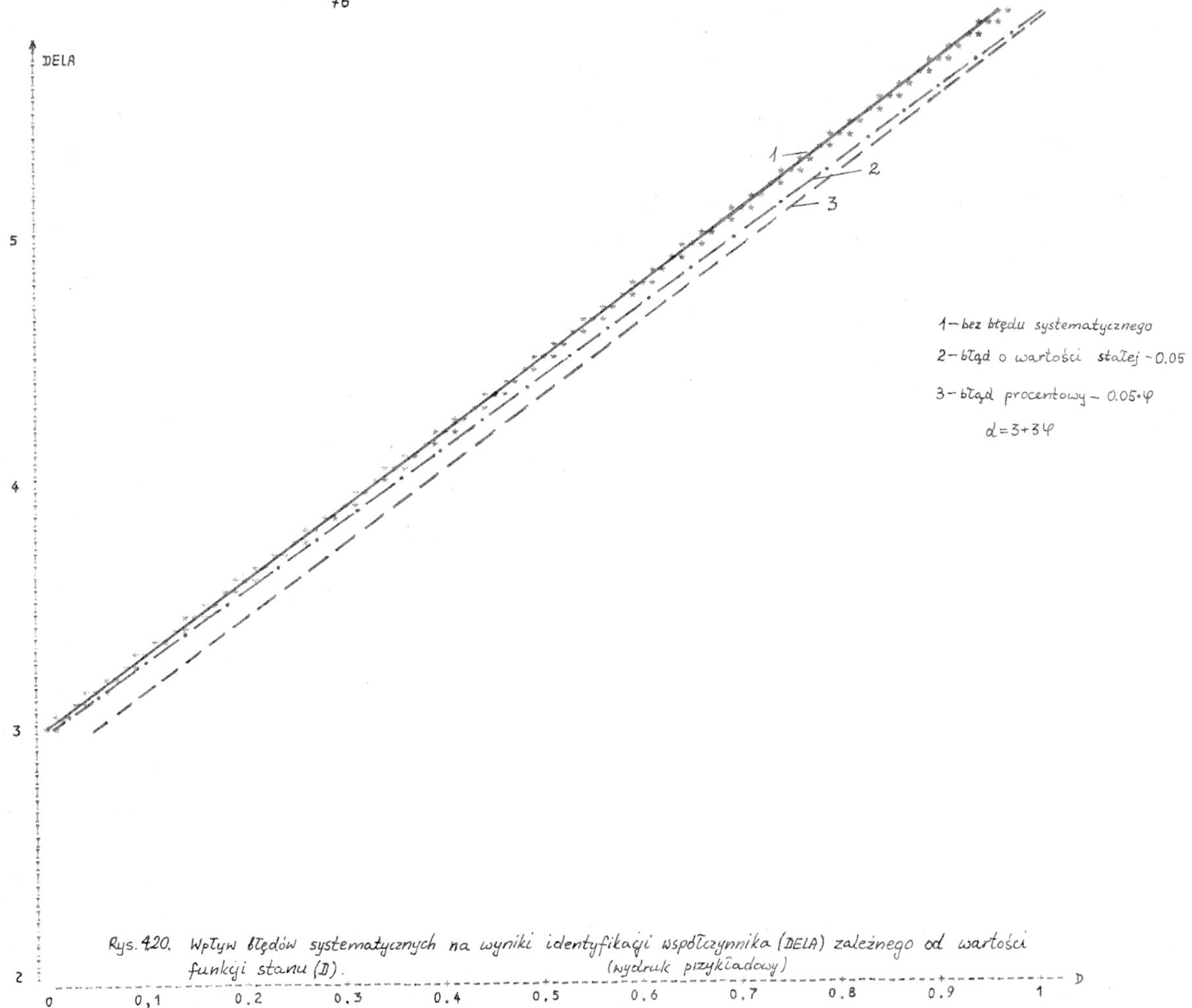
$h = 1.0$ $= 0.5$

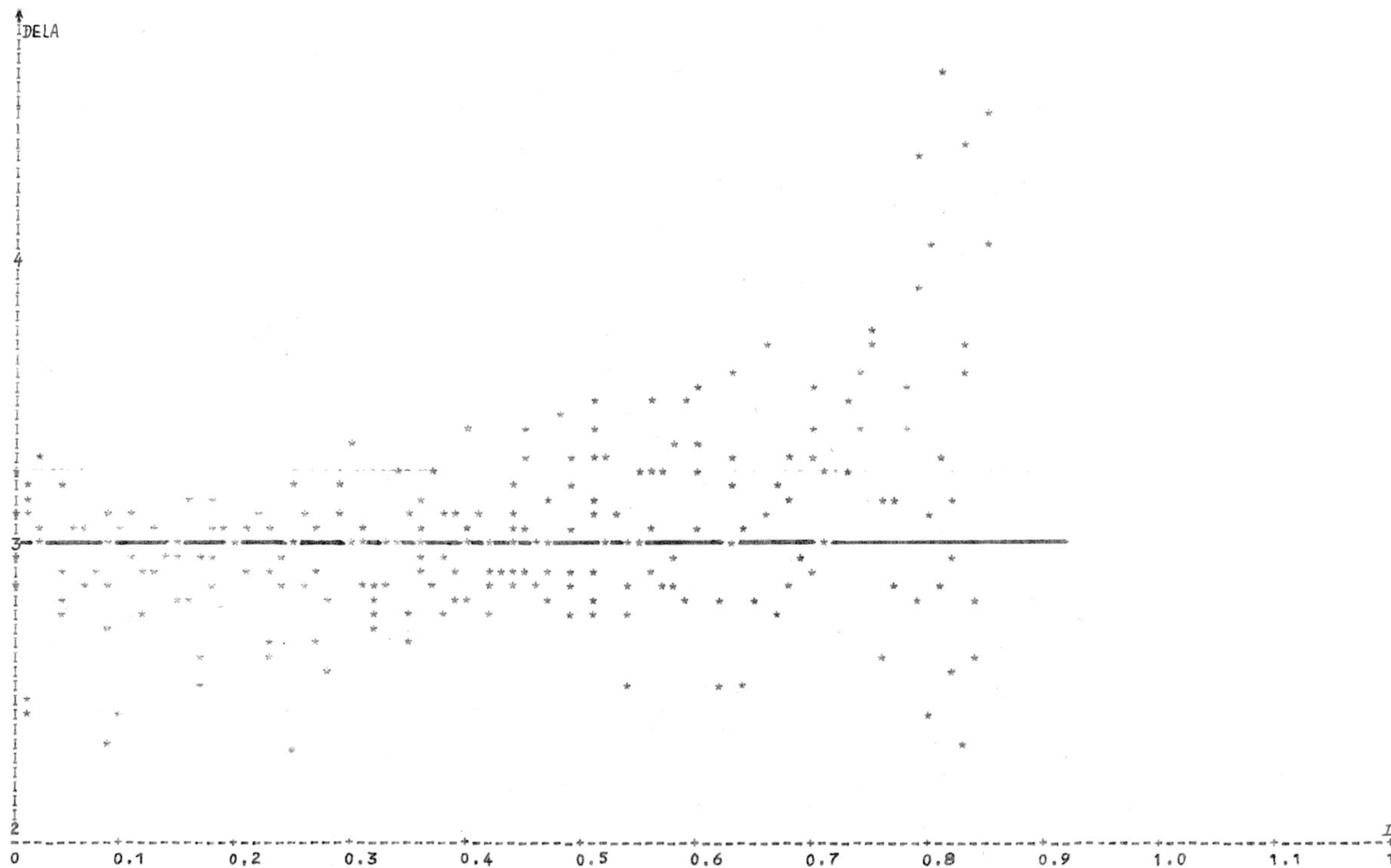
z szumem pomiarowym

- krok czasowy $2 \cdot 9\tau$	wartość funkcji	węzeł 3 - 0.4125; węzeł 6 - 0.0985 ; węzeł 10 - 0.6778
- krok czasowy $2 \cdot 10\tau$	stanu	węzeł 3 - 0.4317; węzeł 6 - 0.1161 ; węzeł 10 - 0.6846
wartość współczynnika w kroku		węzeł 3 - 69.0121; węzeł 6 - 2.9027; węzeł 10 - 13.2752
czasowym $2 \cdot 10\tau$		$\delta = 2200.42\%$; $\delta = -3.24\%$; $\delta = 342.5\%$

z wygładzaniem danych pomiarowych

- krok czasowy $2 \cdot 9\tau$	wartość funkcji	węzeł 3 - 0.4114 ; węzeł 6 - 0.0939; węzeł 10 - 0.6789
- krok czasowy $2 \cdot 10\tau$	stanu	węzeł 3 - 0.4298 ; węzeł 6 - 0.1147; węzeł 10 - 0.6823
wartość współczynnika w kroku		węzeł 3 - 2.1131 ; węzeł 6 - 2.6020; węzeł 10 - 3.4654
czasowym $2 \cdot 10\tau$		$\delta = -29.56\%$; $\delta = -13.27\%$; $\delta = 17.82\%$





Rys. 4.21. Pole korelacji pomiędzy identyfikowanym współczynnikiem (DELA) a wartością funkcji stanu (D).
(wydruk przykładowy).

Korelację między dwiema zmiennymi losowymi /a za takie można uważać nawet wygładzone wartości funkcji stanu oraz określone na ich podstawie wartości poszukiwanych współczynników/ przedstawia się prosto za pomocą wykresu punktowego korelacji - pola korelacji /rys. 4.21/. Pole korelacji daje poglądowe wyobrażenie o zależności pomiędzy wielkościami. W przypadku potrzeby analitycznego scharakteryzowania tej zależności należałoby określić funkcję regresji oraz jej wykres - linię regresji. Na rys. 4.21 ciągłą linią przedstawiono rzeczywistą zależność poszukiwanego współczynnika od wartości funkcji stanu. Zwiększenie się rozrzutu wartości współczynnika od poziomu $d = 3$, przy większych wartościach funkcji stanu, wywoływane jest mniejszymi zmianami funkcji stanu przy przejściu z jednego poziomu czasowego na drugi /o krok czasowy τ /. Wyniki symulacji wskazują na zwiększenie się ujemnego wpływu uchybów przypadkowych podczas zagęszczania siatki pomiarowej. W związku z tym, że zmniejszenie się kroków dyskretyzacji h i τ prowadzi do zmniejszania się uchybu ustalonego związanego z aproksymacją ciągłego modelu obiektu modelem różnicowym, musi istnieć kompromis w wyborze wartości kroków dyskretyzacji czasoprzestrzeni.

Ujemny wpływ zakłóceń pomiarowych jest znacznie większy w przypadku identyfikacji współczynników skupionych przy pochodnej względem współrzędnej geometrycznej /pkt. 4.3/. Przy rozwiązywaniu zgodnie z algorytmem układu równań (4.16) należy obliczyć wyznacznik macierzy E , której elementami są różnice wartości funkcji stanu /pomiarów/ w sąsiednich węzłach:

$$\begin{vmatrix} E & k \\ & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (\hat{\varphi}_{i-1}^k - \hat{\varphi}_i^k); & (\hat{\varphi}_i^k - \hat{\varphi}_{i+1}^k) \\ (\hat{\varphi}_{i-1}^{k+1} - \hat{\varphi}_i^{k+1}); & (\hat{\varphi}_i^{k+1} - \hat{\varphi}_{i+1}^{k+1}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{vmatrix} \quad (4.38)$$

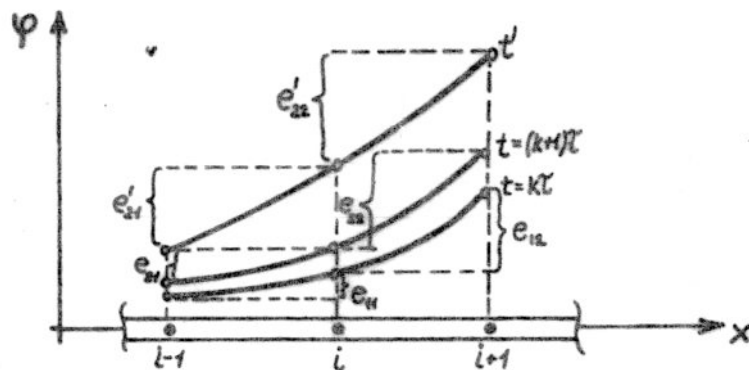
Jak widać /rys. 4.22/, elementy macierzy e_{11} i e_{21} oraz e_{12} i e_{22} mało różnią się od siebie, gdyż są to różnice wartości funkcji stanu /zakłócone/ w tych samych punktach i w dwóch, niezbyt od siebie odległych, chwilach czasowych $[k\tau$ i $(k+1)\tau]$. Można założyć, że

$$e_{21} = e_{11} + \Delta e_1 \quad e_{22} = e_{12} + \Delta e_2 \quad (4.39)$$

przy czym:

Δe_1 i Δe_2 - niewielkie zmiany różnic wartości

funkcji stanu w sąsiednich węzłach.



Rys. 4.22. Określenie elementów macierzy $\begin{bmatrix} E & k \\ i \end{bmatrix}$

Wynika stąd, że:

$$\begin{vmatrix} E & k \\ i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{11} + \Delta e_1 & e_{12} + \Delta e_2 \end{vmatrix} = e_{11} \cdot \Delta e_2 - e_{12} \cdot \Delta e_1 \quad (4.40)$$

przyjmuje niezbyt duże wartości i macierz E można zaliczyć do słabo uwarunkowanych. A więc niewielkie zmiany wartości elementów macierzy /zakłócenia pomiarowe/ powodują znaczne zmiany wartości rozwiązań układu równań. Poprawę sytuacji można osiągnąć stosując wstępne wygładzanie danych pomiarowych, zwiększając odległość pomiędzy dwiema warstwami czasowymi k i k+1 oraz prowadząc eksperyment czynny. Podczas eksperymentu czynnego zadaje się wymuszenia kolejno w różnych punktach obszaru i wyznacza się parametry tylko w tych podobszarach, gdzie zmiany funkcji stanu są duże.

5. IDENTYFIKACJA PARAMETRYCZNA OBIEKTU OPISYWANEGO DWUWYMIAROWYM RÓWNANIEM PRZEWODZENIA CIEPŁA

5.1. Sformułowanie problemu identyfikacji

Rozpatrywany model matematyczny deterministycznego, obiektu ciągłego /rys. 5.1/ należy do następującej klasy modeli określonych parametrycznie:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[A(\varphi, x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[A(\varphi, x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right] = B(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (5.1)$$

przy czym:

$$\varphi(x, y, t) \in C^2(\Theta_T); \quad \Theta_T = \{(x, y, t) : (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, t \in (0, T)\}$$

$A(x, y, \varphi), B(x, y, \varphi)$ - parametry, zależne od współrzędnych geometrycznych i stanu obiektu.

z warunkiem początkowym:

$$\varphi|_{(x, y) \in \bar{\Omega}} = \varphi_p(x, y) \quad (5.2)$$

oraz granicznym:

$$\left. \begin{aligned} \varphi|_{(x, y) \in \partial\Omega} &= \varphi_b(t) \\ t &\in [0, T] \end{aligned} \right\}$$

Problem sformułowany jest następująco: na podstawie znajomości klasy modeli określonych parametrycznie, znanego pobudzenia obiektu i odpowiedzi $\varphi_{i,j}^k$ w dyskretnych punktach czasoprzestrzeni Θ_T należących do siatki:

$$\begin{aligned} \omega_{hh}^T = \{ (x_i, y_j, t_k) \in \Theta_T; & x_i = i \cdot h; i = 0, 1, \dots, N; y_j = j \cdot h; \\ & j = 0, 1, \dots, M; \\ t_k = k \cdot \tau; k = 0, 1, \dots, K \} \end{aligned} \quad (5.3)$$

h - krok dyskretyzacji w kierunku x i y ,

τ - krok dyskretyzacji w kierunku t ,

należy wyznaczyć w tych punktach wartości parametrów $A(x, y, \varphi)$, $B(x, y, \varphi)$ lub współczynnika wyrównania potencjałów $C(x, y, \varphi)$. Współczynnik wyrównywania potencjałów charakteryzuje dynamikę procesu i w przypadku liniowym jest on równy A/B .

Kryterium jakości identyfikacji można przyjąć następująco:

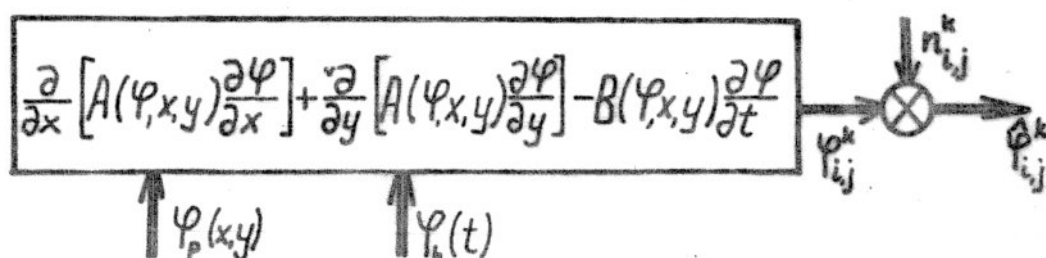
$$J^k(A, B, \varphi) = \sum_{i,j=1}^{N-1, M-1} (\hat{\varphi}_{i,j}^k - \varphi_{i,j}^k \text{ model})^2 \quad (5.4)$$

Również i tu, jak w przypadku obiektu jednowymiarowego rozpatrywanego w p.4.1, możliwe są dwa warianty sformułowanego zadania:

- model matematyczny obiektu (5.1)÷(5.2) deterministyczny, zadane wartości odpowiedzi $\varphi_{i,j}^k$ są dokładne i równe wartościom żądanym $\varphi_{i,j}^k$;

- model matematyczny obiektu (5.1)÷(5.2) deterministyczny, wartości odpowiedzi $\varphi_{i,j}^k$ pochodzą z pomiarów eksperymentalnych na obiekcie, są zakłócone błędami systematycznymi lub szumem pomiarowym o rozkładzie normalnym gęstości prawdopodobieństwa

i wartości oczekiwanej równej zero.



Rys. 5.1. Dwuwymiarowy obiekt identyfikacji

5.2. Wybór struktury modelu symulacyjnego

Stosując metodę schematów różnicowych w celu otrzymania postaci modelu matematycznego obiektu identyfikacji, dogodnej do zastosowania algorytmu identyfikacji, dokonuje się dyskretyzacji współrzędnych geometrycznych i czasu. W wyniku dyskretyzacji postaci ciągłej modelu (5.1) ÷ (5.2), można opis matematyczny obiektu przedstawić za pomocą układu równań algebraicznych, różnicowych dla każdej k -tej warstwy czasowej:

$$[P_k] \times [\varphi_k] = [Z_k] \quad , \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (5.5)$$

przy czym:

- $[\varphi_k]$ - macierz funkcji stanu obiektu o wymiarach $(M-1, N-1)$
- $[P_k]$ - macierz o wymiarach $\{(M-1) \cdot (N-1), (M-1) \cdot (N-1)\}$,
której elementami są w ogólnym przypadku kombinacje parametrów $A(x, y, \varphi)$, $B(x, y, \varphi)$ oraz wartości kroków dyskretyzacji h i τ . Elementy macierzy mogą być liniowe, zależne od x, y jak również i od stanu φ_k .
- $[Z_k]$ - macierz warunków początkowych i granicznych, a także innych znanych i możliwych oddziaływań na obiekt.

Opis matematyczny (5.5) wraz ze zdyskretyzowanymi warunkami brzegowymi jest uproszczonym modelem matematycznym obiektu identyfikacji, równoważnym opisowi w postaci ciągłej (5.1) ÷ (5.2) przy uwzględnieniu błędu aproksymacji.

Wykorzystując zasadę ekwiwalentności opisów matematycznych analogowego i quasianalogowego modelu obiektu identyfikacji względem otrzymywanych wyników rozwiązania φ_k , można przejść od opisu

(5.5) do opisu następującej postaci:

$$[P_k^*] \times [\varphi_k^*] = [Z_k] + [F_k]; \quad k = 1, 2, \dots, K. \quad (5.6)$$

przy czym:

$[P_k^*]$ - macierz o wymiarach $\{(M-1) \cdot (N-1), (M-1) \cdot (N-1)\}$, elementami której są przyjęte przez eksperymentatora kombinacje parametrów stałych, jednorodnych A^* , B^* oraz wartości kroków dyskretyzacji h i τ .

$[F_k]$ - macierz poprawek, wprowadzonych w celu zapewnienia ekwiwalentności opisów (5.5) i (5.6) względem rozwiązania. Można tak dobrać $[F_k]$ aby

$$[\varphi_k] = [\varphi_k^*].$$

Przeprowadzając powyższe przekształcenia postaci ciągłej opisu matematycznego (5.1) - (5.2) obiektu, otrzymuje się postać uproszczoną - model symulacyjny z dokładnością do "parametrów" $[F_k]$ [97]. Dany model symulacyjny można wykorzystać przy rozwiązywaniu zagadnienia identyfikacji metodą hybrydowego modelowania symulacyjnego.

5.3. Algorytm identyfikacji

Algorytm identyfikacji składa się z dwóch części. Najpierw wylicza się wartości poprawek $[F_k]$, przy których zachodzi ekwiwalentność matematycznych opisów (5.5) i (5.6) względem rozwiązań. W tym celu określa się różnice:

$$[\varepsilon^k] = [\varphi_k] - [\varphi_k^*] = [Z_k] \times [P_k]^{-1} - [Z_k] \times [P_k^*]^{-1} - [F_k] \times [P_k^*]^{-1} \quad (5.7)$$

oraz tworzy się układ równań dla rozkładu tych różnic w szereg uchybowy w każdej k -tej warstwie czasowej:

$$\varepsilon_{i,j}^k = \sum_{n,m=1}^{N-1, M-1} \frac{\partial \varepsilon_{i,j}^k}{\partial F_{n,m}^k} \cdot F_{n,m}^k \quad \begin{matrix} k=1, 2, \dots, K \\ i, n = 1, 2, \dots, N-1 \\ j, m = 1, 2, \dots, M-1 \end{matrix} \quad (5.8)$$

przy czym:

$\frac{\partial \varepsilon_{i,j}^k}{\partial F_{n,m}^k}$ - współczynniki wrażliwości modelu symulacyjnego /elementy macierzy $[P_k^*]^{-1}$ /.

Macierz $\left[\frac{\partial \varepsilon^k}{\partial F}\right]$ jest macierzą o przeważających wartościach elementów przekątnej. Rozwiązując układ równań (5.8) można określić

wartości $[F_k]$.

W drugiej części, na podstawie obliczonych wartości $[F_k]$, przy których zachodzi ekwiwalentność opisów matematycznych, oblicza się wielkości odchyień poszukiwanych parametrów obiektu od przyjętych z góry przez eksperymentatora parametrów w modelu symulacyjnym. Zależność pomiędzy $[F_k]$, a tymi odchyleniami można otrzymać rozpatrując schemat różnicowy w jednym z węzłów siatki ω_{hh}^{τ} dla obiektu:

$$\delta_{hh}^2(\varphi_{i,j}^k) = \frac{B}{A}(x_i, y_j, \varphi_{i,j}^{k-1}) \cdot \delta_{\tau}(\varphi_{i,j}^k) \quad (5.9)$$

i dla modelu symulacyjnego:

$$\delta_{hh}^2(\varphi_{i,j}^k) = \frac{B^*}{A^*} \delta_{\tau}(\varphi_{i,j}^k) + F_{i,j}^k \quad (5.10)$$

przy czym:

$$\delta_{hh}^2(\varphi_{i,j}^k) = \frac{1}{h^2} (\varphi_{i-1,j}^k + \varphi_{i+1,j}^k + \varphi_{i,j-1}^k + \varphi_{i,j+1}^k - 4\varphi_{i,j}^k) \quad (5.11)$$

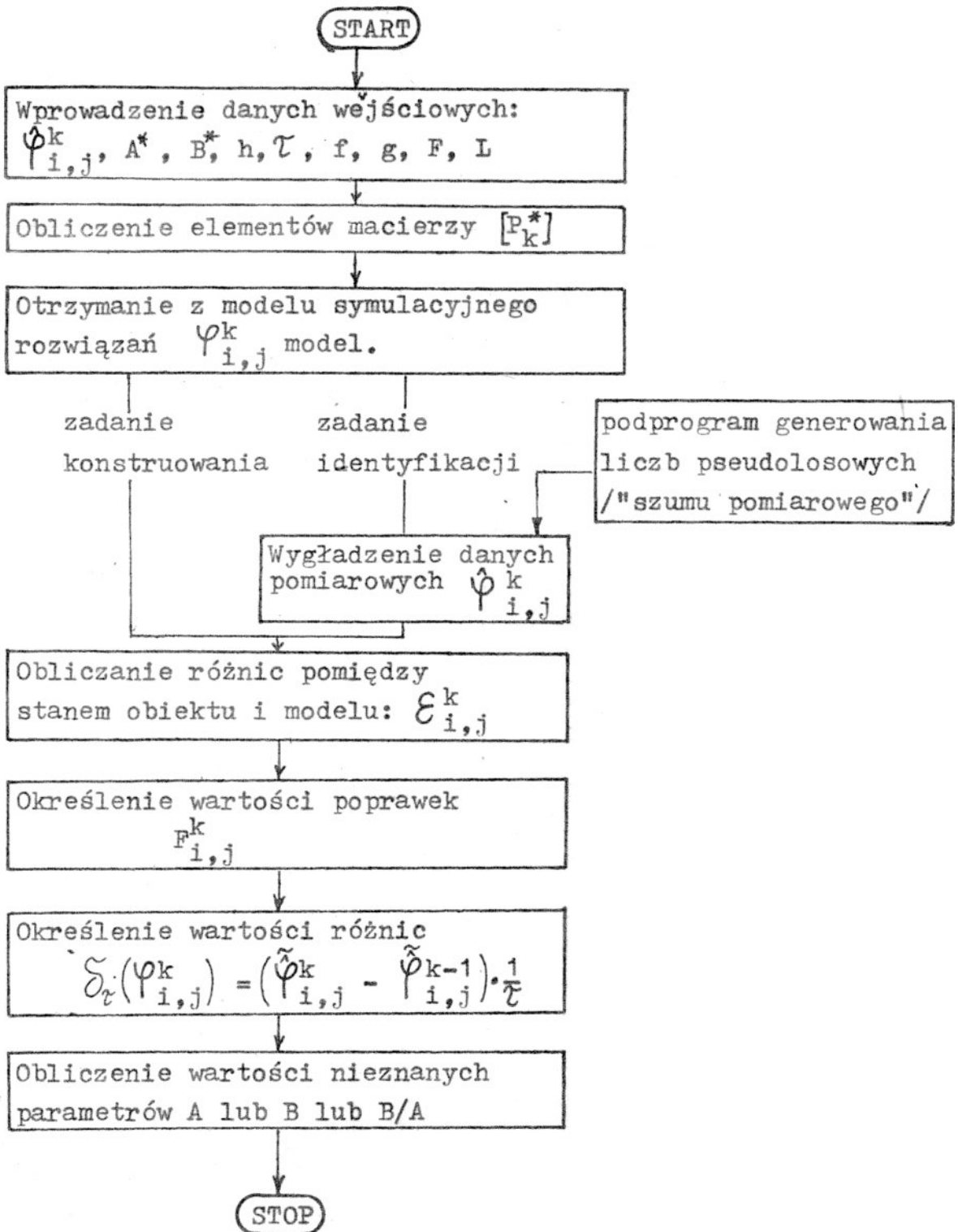
$$\delta_{\tau}(\varphi_{i,j}^k) = \frac{1}{\tau} (\varphi_{i,j}^k - \varphi_{i,j}^{k-1})$$

W związku z tym, że nieznaną parametr $B/A(x_i, y_j, \varphi_{i,j}^{k-1})$ składa się ze znanej części składowej B^*/A^* oraz nieznanego odchylenia $\Delta_{\frac{B}{A}}^B(x_i, y_j, \varphi_{i,j}^{k-1})$, to:

$$\Delta_{\frac{B}{A}}^B(x_i, y_j, \varphi_{i,j}^{k-1}) \cdot \delta_{\tau}(\varphi_{i,j}^k) = F_{i,j}^k \quad (5.12)$$

Obliczając z (5.12) wartości $\Delta_{\frac{B}{A}}^B(x_i, y_j, \varphi_{i,j}^{k-1})$ i znając wcześniej przyjęte parametry modelu symulacyjnego B^*, A^* , można dla każdego punktu siatki ω_{hh}^{τ} , w którym dokonywane są pomiary stanu dynamicznego obiektu, określić wartości liczbowe identyfikowanych parametrów. Na rys. 5.2 przedstawiono schemat blokowy algorytmu modelującego.

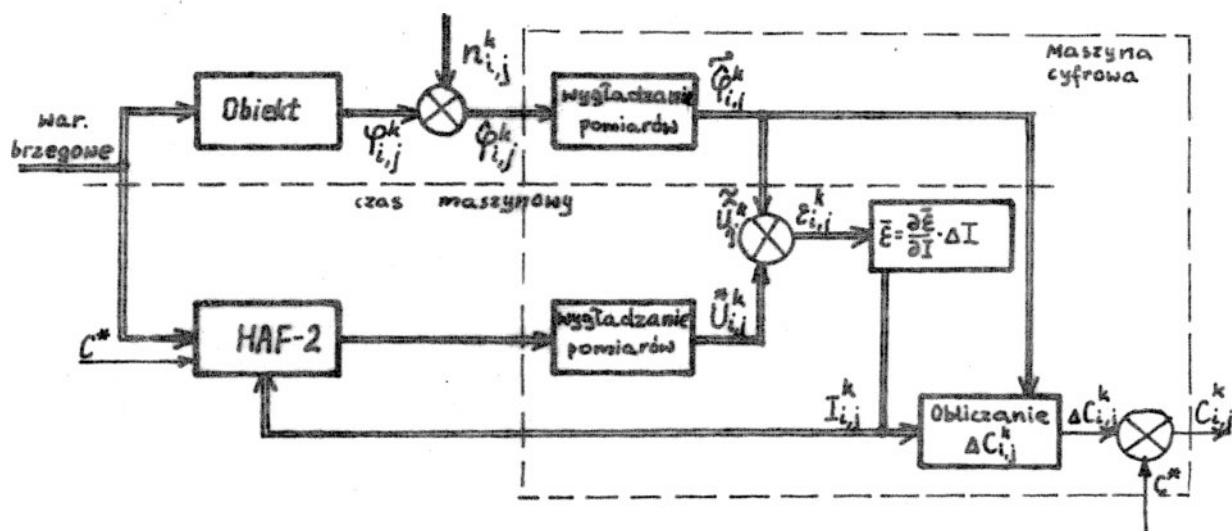
W następnym punkcie rozdziału rozpatrzony będzie proces realizacji algorytmu identyfikacji z wykorzystaniem urządzeń technicznych.



Rys. 5.2. Schemat blokowy algorytmu modelującego

5.4. Analizator pola HAF-2 w układzie identyfikacji metoda hybrydowego modelowania symulacyjnego

Zadanie identyfikacji własności dynamicznych obiektu opisywanego dwuwymiarowym równaniem przewodzenia ciepła można rozwiązywać wykorzystując do tego celu analizatory pola, będące ogólnie rzecz biorąc realizacją techniczną modelu symulacyjnego (5.6). Takim analizatorem pola umożliwiającym jego zastosowanie do rozpatrywania danego odwrotnego zagadnienia brzegowego jest również Hybrydowy Analizator Filtracji HAF-2, zaprojektowany i wykonany w Instytucie Cybernetyki Technicznej Politechniki Wrocławskiej [32]. Na rys. 5.3 przedstawiono proponowany schemat układu rozwiązywania zadania identyfikacji z wykorzystaniem HAF-2 [82].



Rys. 5.3. Schemat układu rozwiązywania zadania identyfikacji z wykorzystaniem analizatora pola HAF-2.

Zaznaczona na rysunku potrzeba wygładzania danych pomiarowych konieczna jest nie tylko w stosunku do danych uzyskiwanych z obiektu, ale także w stosunku do danych uzyskiwanych z pomiarów na HAF-2. Niepowtarzalność pomiarów na modelu wynika z niedoskonałości systemu pomiarowego oraz z zakłóceń w pracy HAF-2 powstałych między innymi w wyniku fluktuacji zera wzmacniaczy operacyjnych, a także termicznych zmian parametrów tranzystorów polowych stosowanych w HAF-2. Wstępne wygładzanie danych jest, jak już wcześniej

wspomniano, jedną z metod regularyzacji niepoprawnie sformułowanych zagadnień brzegowych /niestabilność wyników rozwiązywania względem danych wejściowych/. Można i tu również korzystać z numerycznych metod wygładzania opartych na rachunku najmniejszych kwadratów lub wykorzystujących funkcje sklejące.

Kolejność postępowania w procesie realizacji algorytmu rozwiązywania zadania jest następująca:

a/ przygotowanie modelu siatkowego na HAF-2:

- dobranie kroku czasowego, przestrzennego i skali modelu zgodnie z zasadami modelowania i uwzględnieniem przestrzenno-czasowej "siatki pomiarowej" nałożonej na obiekt;
- zestawienie jednorodnej siatki z rezystorów o założonej wartości /przy czym w zależności od tego czy szukany jest parametr A czy B; założona i jednakowa jest tylko wartość rezystorów, odpowiednio "przestrzennych" lub "czasowych", a pozostałe dobierane są zgodnie z zasadami modelowania/;
- zadanie warunków początkowych i granicznych;

b/ uruchomienie modelu siatkowego i rejestracja wyników modelowania /w punktach odpowiadających węzłom siatki (5.3) /. W tym celu dla każdego kroku czasowego w każdym węźle wolny koniec oporu "czasowego" zasilany jest potencjałem o wartości równej wartości zmierzonej w węźle w poprzednim kroku, a na brzegach modelu — wartością potencjału w momencie obliczania. Po włączeniu źródeł elektrycznych w każdym węźle w danej chwili czasowej ustala się wartość potencjału, którą można zmierzyć. Dla następnego kroku czasowego konieczna jest tylko zamiana na końcach rezystorów "czasowych" potencjałów podparcia /zmierzonych i przeniesionych z odpowiednich węzłów siatki/ i po załączeniu źródeł elektrycznych w węzłach otrzymuje się wartości potencjałów w danym przekroju czasowym;

c/ wygładzanie wyników modelowania oraz wygładzanie danych pomiarowych z obiektu jedną z metod numerycznych;

d/ wyznaczenie różnic między odpowiedzią modelu, a zadaną odpowiedzią obiektu:

$$\varepsilon_{i,j}^k = \tilde{U}_{i,j}^k - U_{i,j}^{*k} \quad (5.13)$$

Wartość tej różnicy można zmieniać poprzez zmianę $U_{i,j}^{*k}$ drogą wprowadzania na modelu poprawek w postaci prądów wymuszanych

w węzłach siatki. Stąd uchyby $\varepsilon_{i,j}^k$ można rozłożyć w szereg uchybowy:

$$\varepsilon_{i,j}^k = \sum_{n,m=1}^{N-1, M-1} \frac{\partial \varepsilon_{i,j}^k}{\partial I_{n,m}^k} \cdot I_{dn,m}^k \quad \text{w każdej } k\text{-tej warstwie} \\ \text{czasowej;} \quad (5.14)$$

przy czym:

$$k = 1, 2, \dots, K$$

$$i, n = 1, 2, \dots, N-1$$

$$j, m = 1, 2, \dots, M-1$$

$I_{dn,m}^k$ - prąd doprowadzany do węzła (n, m, k) .

e/ wyznaczanie współczynników wrażliwości modelu:

$$[W^k] = \left[\frac{\partial \varepsilon_{i,j}^k}{\partial I_{dn,m}^k} \right] \quad i, n = 1, 2, \dots, N-1, \quad j, m = 1, 2, \dots, M-1: \\ [W^k] = [G]^{-1} \quad (5.15)$$

przy czym:

$[W^k]$ - macierz współczynników wrażliwości;

$[G]$ - macierz przewodności siatki R-R modelu quasianalogowego.

f/ na podstawie obliczonych wartości różnic $[\varepsilon^k]$ oraz współczynników wrażliwości $[W^k]$ wyznaczenie z równania (5.14) poprawek prądowych do każdego węzła modelu. Jeśli nowe wartości $[\varepsilon^k]$ są mniejsze od założonych wartości dopuszczalnych $[\varepsilon_0^k]$, to model quasianalogowy i obiekt są ekwiwalentnymi względem rozwiązania. Jeśli wartości $[\varepsilon^k] > [\varepsilon_0^k]$, wyznacza się iteracyjnie poprawki prądowe, aż do osiągnięcia tego warunku;

g/ na podstawie obliczonych poprawek prądowych i przy uwzględnieniu przyjętej skali oporności, wyznaczanie poprawek do założonych parametrów obiektu;

h/ powtórzenie przedstawionej procedury dla następnych kroków czasowych.

5.5. Przykłady testowe

W rozdziale I podano jako przykład zadanie automatyzacji procesu odwodnienia kopalni odkrywkowej, w którym występuje problem identyfikacji własności dynamicznych obiektu o parametrach rozłożonych. Posiadana w wyniku identyfikacji informacja potrzebna jest

do wyznaczenia algorytmu sterowania oraz uzyskiwania prognozy o stanie lustra wód badanych obszarów wodonośnych, aby móc prowadzić sterowanie na bieżąco i przewidywać jego skutki uboczne. Obiektem o parametrach rozłożonych jest tu proces odwodnienia - proces filtracji wód gruntowych, który najczęściej można sprowadzić do problemu dwuwymiarowego płasko-warstwowego. Równanie dynamiki opisujące beznaporowy przepływ wód ma postać [101]:

$$\mu \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial H}{\partial y} \right) \pm \omega \quad (5.16)$$

przy czym:

- $H(x, y, t)$ - ciśnienie piezometryczne;
- $\mu(x, y, H)$ - współczynnik przejmowania wody;
- $\omega(x, y, H)$ - intensywność zasilania /odpływu/;
- $T = k \cdot m$ - przewodność warstwy wodonośnej;
- $k(x, y, H)$ - współczynnik filtracji;
- m - miąższość warstwy wodonośnej.

Jeżeli spąg zalega poziomo i warstwa wodonośna jest jednorodna w kierunku osi prostopadłej do płaszczyzny spągu - to można przyjąć, że $H = h$, gdzie h - poziom swobodnego lustra wody. Równanie (5.16) przyjmie wtedy postać:

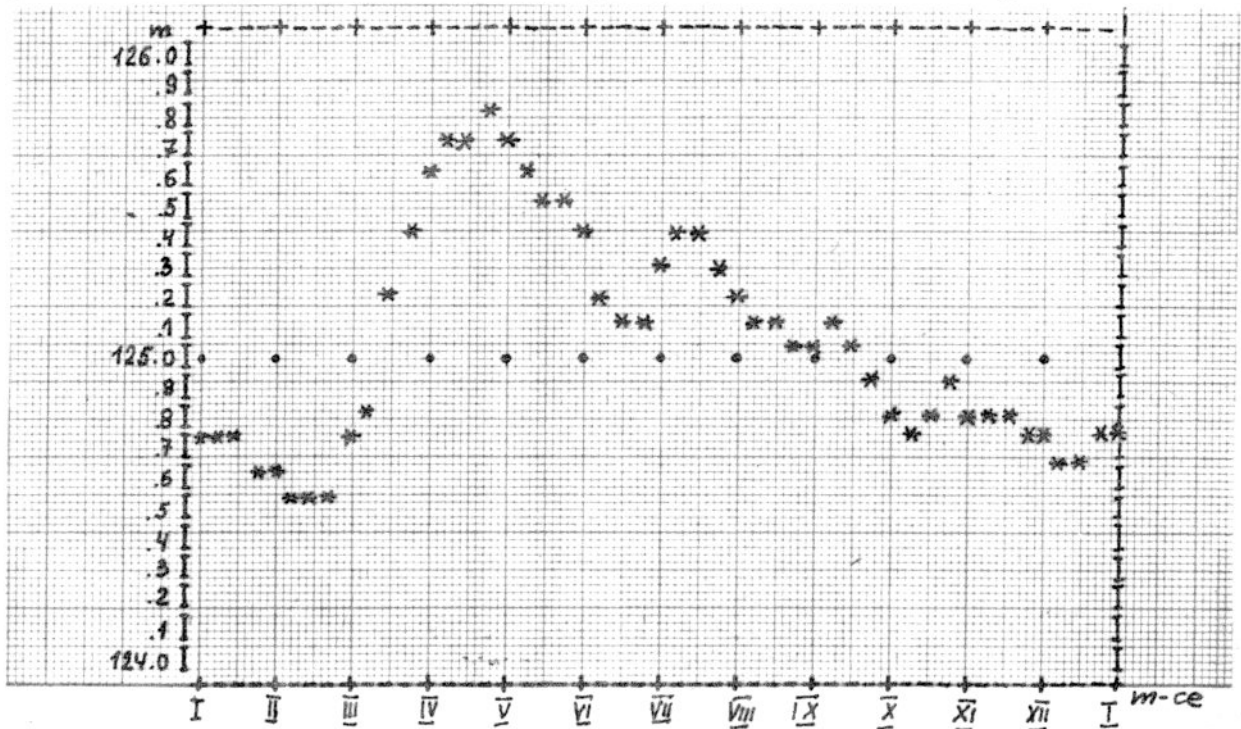
$$\mu \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(kh \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(kh \frac{\partial h}{\partial y} \right) \pm \omega \quad (5.17)$$

Wraz z warunkami początkowymi i granicznymi równania powyższe prezentują model matematyczny rozpatrywanego obiektu identyfikacji.

Identyfikacja własności dynamicznych procesu filtracji wiąże się z określeniem własności filtracyjnych obszaru. Rozpatrywane horyzonty wodonośne mogą być bardzo niejednorodne pod względem tych własności. Współczynniki filtracji np. różnią się dość znacznie nawet w obszarach odległych od siebie o kilka metrów. W hydrogeologii stosuje się różne metody określenia tego parametru. Można współczynnik filtracji obliczać na podstawie próbnych pompo-
wań z otworów badawczych, badania prób utworów sypkich w permea-
metrach, na podstawie analiz granulometrycznych średnicy efektyw-
nej, szczyptywania wody lub zalewania wodą utworów studziennych [77].
Metody te dają jednak duże rozbieżności wartości współczynnika
filtracji, a uśrednienie tego podstawowego parametru hydrogeolo-
gicznego wpływa na wielkość różnic pomiędzy wynikami modelowania
a faktycznymi wielkościami ciśnień mierzonymi w terenie. Można

również, przy wykorzystywaniu metody analogii elektrohydrodynamicznej, drogą tarowania modelu skorygować wielkości parametrów hydrogeologicznych. Tarowanie modelu jest jednak procedurą żmudną i czasochłonną.

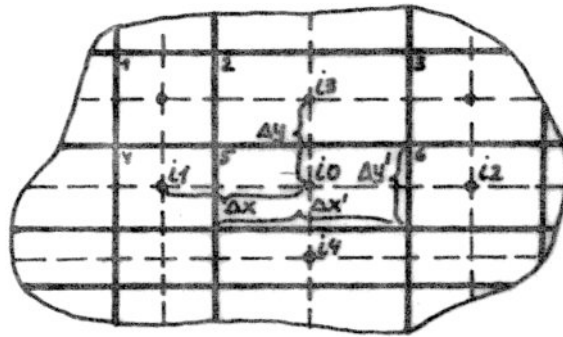
Przy wykorzystaniu do określenia własności filtracyjnych metody hybrydowego modelowania symulacyjnego konieczne jest posiadanie pewnej wiarygodnej informacji apriorycznej dotyczącej m.in. geometrii badanego obszaru, warunków zasilania, warunków brzegowych. Podstawową informacją jest stan bieżący procesu w określonych przekrojach czasowych, który często podany jest graficznie w postaci zmiennej w czasie siatki ruchu złożonej z linii jednakowego ciśnienia i linii prądu. W otrzymaniu tych wszystkich informacji pomagają specjalne mapy hydrogeologiczne, które są opracowywane w oparciu o przeprowadzane wiercenia badawcze i eksploatacyjne. W ramach tworzonych systemów informatycznych w związku z automatyzacją prac w dziedzinie geofiltracji przewidziane są również stałe punkty kontrolne stanu lustra wody, przesyłające co pewien czas informację do dyspozytorni. Informacja ta jest przekazywana urządzeniom drukującym. Na rys. 5.4 przedstawiono za [52] wykres wahań poziomu lustra wody w odwiercie badawczym.



Rys. 5.4. Wykres wahań poziomu lustra wody w odwiercie badawczym otrzymywany z urządzenia drukującego.

Obliczeniowy model filtracyjny może być mniej złożony w porównaniu z naturalnym schematem ale musi zachować najważniejsze rysy charakterystyczne, warunkujące rozwój procesu filtracyjnego tzn. odpowiadać funkcjonalnie naturalnemu procesowi filtracji.

Modelując na analizatorze pola z siatką R-R płaski obszar filtracji należy ten ciągły obszar zastąpić obszarem dyskretnym. W hydrogeologii zwykle siatka ze względu na charakter obszaru jest nierównomierna tzn. wielkości bloków nie są jednakowe /rys. 5.5/



Rys. 5.5. Budowa siatki nierównomiernej we współrzędnych x i y : $\Delta y'$, $\Delta x'$ - długość i szerokość bloku obliczeniowego; Δx , Δy - odległość między centrami bloków.

Węzły siatki są centrami bloków, na które rozbijamy obszar filtracji. Przeprowadzając dyskretyzację procesu filtracji w czasoprzestrzeni, zamiast równania różniczkowego o pochodnych cząstkowych (5.16) otrzymuje się układ $(M-1)(N-1)$ równań różnicowych dla danego układu $(M-1)(N-1)$ dyskretnych węzłów siatki. Dla dowolnego węzła /rys. 5.5/ równanie różnicowe ma postać [101]:

$$\frac{H_{i0}^k - H_{i0}^{k-1}}{\phi_t} = \frac{H_{i1}^k - H_{i0}^k}{\phi_{1-0}} + \frac{H_{i2}^k - H_{i0}^k}{\phi_{2-0}} + \frac{H_{i3}^k - H_{i0}^k}{\phi_{3-0}} + \frac{H_{i4}^k - H_{i0}^k}{\phi_{4-0}} + Q_{wi0} \quad (5.18)$$

przy czym:

- H_{i0}^k - wartość ciśnienia w węźle $i0$ dla chwili t_k ,
- H_{ij}^k - wartości ciśnienia w węzłach sąsiednich z węzłem $i0$ dla chwili t_k , $/j = 1, 2, 3, 4/$,

$$\phi_{j-0} = \frac{\Delta x_{j-0}}{T \cdot \Delta y'_0} \quad - \text{opory filtracyjne } /j = 1,2/;$$

$$\phi_{j-0} = \frac{\Delta y_{j-0}}{T \cdot \Delta x'_0} \quad - \text{opory filtracyjne } /j = 3,4/;$$

$$\phi_t = \frac{\tau}{\mu \cdot \Delta x'_0 \cdot \Delta y'_0} = \frac{\tau}{\mu \cdot F_{i0}} \quad - \text{opór czasowy filtracji, } \tau - \text{krok czasowy /w dobach/}.$$

$$Q_{i0} = \omega_{i0} \cdot \Delta x'_0 \cdot \Delta y'_0 = \omega_{i0} \cdot F_{i0} \quad - \text{wydatek infiltracji w węźle } i0.$$

Przy modelowaniu procesu filtracji na elektrycznym modelu siatkowym musi być spełnione podobieństwo równań różnicowych opisujących węzły siatki złożone z oporów filtracyjnych i oporów elektrycznych. Każdy węzeł siatki elektrycznej opisywany jest następującym równaniem:

$$\begin{aligned} \frac{U_{i0}^k - U_{i0}^{k-1}}{R_t} &= \frac{U_{i1}^k - U_{i0}^k}{R_{1-0}} + \frac{U_{i2}^k - U_{i0}^k}{R_{2-0}} + \frac{U_{i3}^k - U_{i0}^k}{R_{3-0}} + \\ &+ \frac{U_{i4}^k - U_{i0}^k}{R_{4-0}} + I \omega_{i0}; \quad i = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (5.19)$$

przy czym:

U_{i0}^k - wartość napięcia w węźle $i0$ dla chwili t_k ;

U_{ij}^k - wartości napięcia w węzłach sąsiednich z węzłem $i0$ dla chwili t_k $/j = 1, 2, 3, 4/$;

R_t - rezystor "czasowy"; τ_m - wartość kroku czasowego /modelowego/;

R_{j-0} - rezystory "przestrzenne"; $j = /1, 2, 3, 4/$.

W tym celu wprowadza się stałe podobieństwa:

$$- a_H = \frac{\Delta H}{\Delta U} \left[\frac{m}{v} \right] - \text{współczynnik skali ciśnień wybiera się tak, aby maksymalnej zmianie ciśnień odpowiadało } \Delta U_{\max} \text{ na analizatorze pola.}$$

$$- a_\phi = \frac{\phi}{R} \left[\frac{\text{dobę}}{m^2 \Omega} \right]; \quad a_Q = \frac{Q}{I} = \frac{\Delta H \cdot R}{\Delta U \cdot \phi} \left[\frac{m^3}{\text{dobę} \cdot A} \right] \quad (5.20)$$

Podstawiając do równania różnicowego (5.18) odpowiednie wielkości wyrażone przez stałe podobieństwa otrzymuje się:

$$\frac{a_H}{a_\phi} \cdot \frac{U_{i0}^k - U_{i0}^{k-1}}{R_t} = \frac{a_H}{a_\phi} \left[\frac{U_{i1}^k - U_{i0}^k}{R_{1-0}} + \frac{U_{i2}^k - U_{i0}^k}{R_{2-0}} + \frac{U_{i3}^k - U_{i0}^k}{R_{3-0}} + \right. \\ \left. + \frac{U_{i4}^k - U_{i0}^k}{R_{4-0}} \right] + a_Q \cdot I_{\omega_{i0}} ; \quad (5.21)$$

Gdy $a_Q = \frac{a_H}{a_\phi}$, to równania (5.21) i (5.19) są tożsamościowe. Proces infiltracji modeluje się na analizatorze pola włączeniem do wszystkich węzłów oporów infiltracji R_ω , przez które płynie prąd I_ω . Wielkość prądu I_ω modeluje wartość wydatku strumienia infiltracji Q_ω . Różnica potencjału ΔU na oporniku R_ω równa się:

$$\Delta U_{\omega_{i0}} = I_{\omega_{i0}} \cdot R_{\omega_{i0}} = \frac{\omega_{i0} \cdot F_{i0}}{a_Q} \cdot R_{\omega_{i0}} ; \quad F_{i0} - \text{pole bloku} \quad (5.22)$$

Przykładowo, jeżeli maksymalna wartość różnicy ciśnień ma miejsce na brzegu obszaru i wynosi 20 m, a dzielnik analizatora pola /do zadawania warunków brzegowych/ wykonano na napięcie w zakresie $0 \div 1V$, to współczynnik skali ciśnień wynosi:

$$a_H = \frac{20 \text{ m}}{1V} = 20 \left[\frac{\text{m}}{V} \right] ,$$

Jeżeli oporowi hydraulicznemu $\phi = 1 \left[\frac{\text{doba}}{\text{m}^2} \right]$ przyporządkować opór elektryczny $R = 100 \left[k\Omega \right]$, to przyjmuje się tym samym skalę oporności:

$$\bar{a}_\phi = \frac{1 \left[\frac{\text{doba}}{\text{m}^2} \right]}{100 \left[k\Omega \right]} = 10^{-5} \left[\frac{\text{doba}}{\text{m}^2 \Omega} \right]$$

W pkt.5.4 przedstawiono sposób postępowania przy rozwiązywaniu zadania identyfikacji współczynników równania opisującego dynamikę obiektu o parametrach rozłożonych. Obiektem takim jest również proces filtracji wód gruntowych. Omawiana metoda hybrydowego modelowania symulacyjnego wykorzystuje układ "quasianalogowa siatka R-R - maszyna cyfrowa", będący realizacją techniczną wybranego modelu symulacyjnego. Uwzględniając przyjętą skalę oporności, można zestawić siatkę układu hybrydowego /w przypadku identyfikacji współczynnika przy pochodnej czasowej/ z rezystorów R_t^* oraz R_{j-0} . Rezystory R_t^* modelują założone z góry wartości oporów filtracyjnych czasowych ϕ_t^* /powiązanych ze współczynnikiem

przejmowania wody μ^* /. Rezystory R_{j-0} modelują natomiast opory filtracyjne ϕ_{j-0} . Niżej przytoczono przykład obliczania ϕ_{j-0} , wyboru wartości ϕ_t^* i przejścia na opory elektryczne R_{j-0} oraz R_t^* :

	(5)	(6)
- nr bloku obliczeniowego /patrz rys. 5.5/		
- szerokość bloku obliczeniowego $\Delta y'$ [m]	200.0	200.0
- długość bloku obliczeniowego $\Delta x'$ [m]	325.0	250.0
- ogólna pojemność wodna $c^* = \mu^* \cdot \Delta x \cdot \Delta y$	13000.0	10000.0
/założono $\mu^* = 0,2/$		
- odległość między centrami bloków Δx [m]	$\frac{275.0}{\text{blok4-blok5}}$	$\frac{287.5}{\text{blok5-blok6}}$
- odległość między centrami bloków Δy [m]	$\frac{225.0}{\text{blok2-blok5}}$	$\frac{225.0}{\text{blok3-blok6}}$
- miąższość warstwy m w kierunku x [m]	28.6	30.0
- miąższość warstwy m w kierunku y [m]	27.1	29.0
- współczynnik filtracji $k \left[\frac{m}{\text{dobę}} \right]$	48.2	48.2
- przewodność warstwy $km \left[\frac{m^2}{\text{dobę}} \right]$	1378.52	1446.0
w kierunku x		
- przewodność warstwy $km \left[\frac{m^2}{\text{dobę}} \right]$	1306.22	1397.8
w kierunku y		
- opór hydrauliczny $\phi_x = \frac{\Delta x}{km \cdot \Delta y'} \left[\frac{\text{doba}}{m^2} \right]$	0,00093	0,00069
- opór hydrauliczny $\phi_y = \frac{\Delta y}{km \cdot \Delta x'} \left[\frac{\text{doba}}{m^2} \right]$	0.0006	0.0005
- opór czasowy $\phi_t^* = \frac{\Delta t}{\mu^* \cdot \Delta x \cdot \Delta y} \left[\frac{\text{doba}}{m^2} \right]$	0.00077	0.001
/dla $\Delta t = 10 \text{ dob}/$		
- odwrotność oporów hydraulicznych $\frac{1}{\phi_x} \left[\frac{m^2}{\text{doba}} \right]$	1075.0	1069.0
- odwrotność oporów hydraulicznych $\frac{1}{\phi_y} \left[\frac{m^2}{\text{doba}} \right]$	1667.0	2000.0
- odwrotność oporów hydraulicznych czasowych $\frac{1}{\phi_t^*} \left[\frac{m^2}{\text{doba}} \right]$	1299.0	1000.0
- przewodność elektryczna obliczona $G_x [\mu S]$ przyjęta /znormalizowana/	10750 11000	Przyjęto $a_\phi = 10^{-5} \left[\frac{\text{doba}}{m^2} \right] \left\{ \begin{array}{l} 10690 \\ 10500 \\ 20000 \\ 20500 \end{array} \right.$
- przewodność elektryczna obliczona $G_y [\mu S]$ przyjęta /znormalizowana/	16670 16500	

- przewodność elektryczna obliczona G_t^* 12990 } Przyjęto $\left. \begin{matrix} 10000 \\ 10000 \end{matrix} \right\}$
 G_t^* /przyjęta /znormalizowana/ $[MS]$ 13000 } $a_\phi = 10^{-5} \left[\frac{\text{doba}}{m^2} \right]$

Testowanie metody hybrydowego modelowania symulacyjnego, wykorzystywanej do identyfikacji własności dynamicznych dwuwymiarowego obiektu o parametrach rozłożonych, przeprowadzano za pomocą symulacji cyfrowej. W zadaniu testowym nie badano wpływu na wyniki identyfikacji błędu aproksymacji ciągłej postaci modelu matematycznego obiektu, modelem różnicowym.

Dynamikę obiektu opisywało następujące równanie różniczkowe, cząstkowe drugiego rzędu:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = (c' + g'\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (5.23)$$

określone w kwadracie $\Omega = \{0 < x < 7, 0 < y < 7\}$. Zadane były warunki początkowe i graniczne:

$$\begin{aligned} - \varphi(x, y, 0) &= 0 & (x, y) \in \Omega \\ - \varphi(x, 7, t) &= \frac{10}{7} \cdot x^2; & \varphi(x, 0, t) &= 0 \\ - \varphi(7, y, t) &= 10y & ; & \varphi(0, y, t) = 0 \end{aligned} \quad (5.24)$$

oraz rozwiązania $\hat{\varphi}_{i,j}^k$ w węzłach przyjętej siatki ω_{hh}^τ z krokami $h = 1$, $\tau = 1$ i $M = N = 7$. Wartości funkcji $\varphi(x, y, t)$ w węzłach podczas symulacji cyfrowej określono rozwiązując proste zagadnienie brzegowe metodą schematów różnicowych, przyjmując w przypadku liniowym $c' = 10$, $g' = 0$, a w przypadku nieliniowym $c = 10'$, $g = 3'$. Następnie określono, zgodnie z algorytmem identyfikacji, parametry $\hat{c}_{i,j}^k$ i $\hat{g}_{i,j}^k$ w węzłach siatki, wykorzystując przy tym model symulacyjny o różnych wartościach założonych z góry parametrów c^* i g'^* . Zadanie rozwiązywano w czterech wariantach, przyjmując następujące założenia odnośnie danych wejściowych /symulujących pomiary/:

- dane wejściowe są dokładne, tzn. $\hat{\varphi}_{i,j}^k = \varphi_{i,j}^k$,
- na dane wejściowe nakłada się jednocentowy uchyb systematyczny w jednym węźle siatki;
- na dane wejściowe, we wszystkich węzłach siatki, nakłada się jednocentowy uchyb systematyczny;
- na dane wejściowe nakłada się szum pomiarowy $n_{i,j}^k$ o rozkładzie normalnym, wartości oczekiwanej równej zero i założonych odchyleniach standardowych.

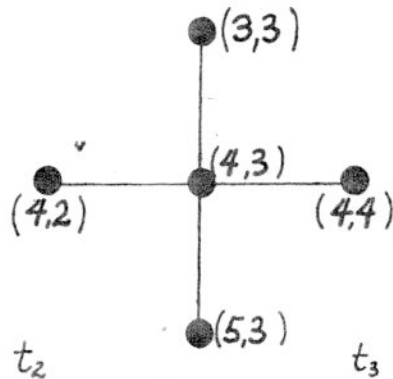
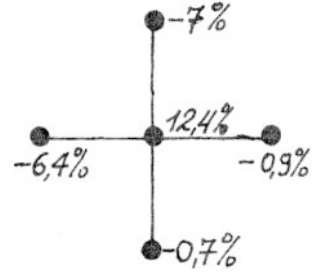
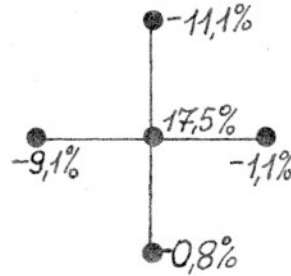
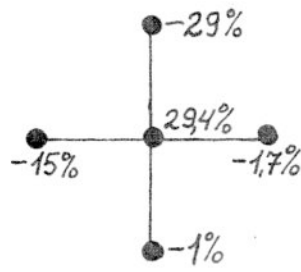
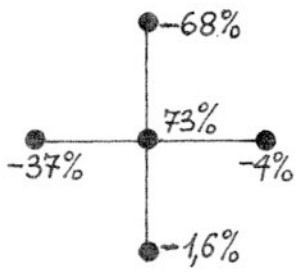
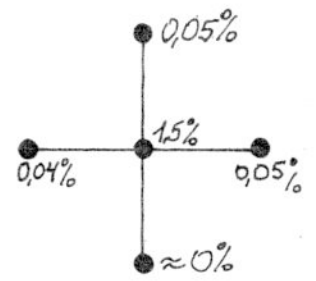
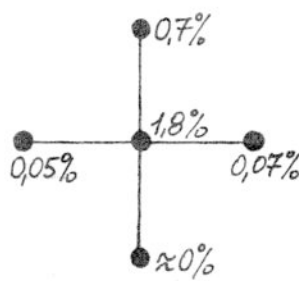
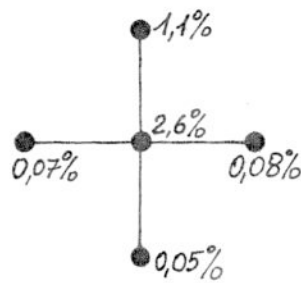
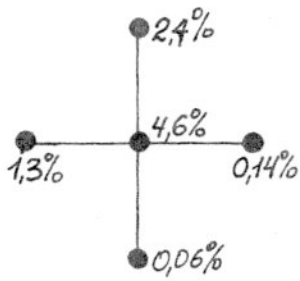
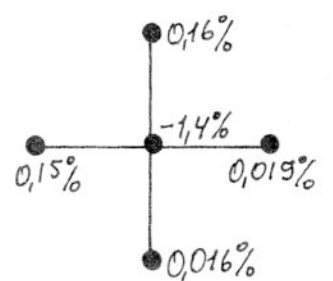
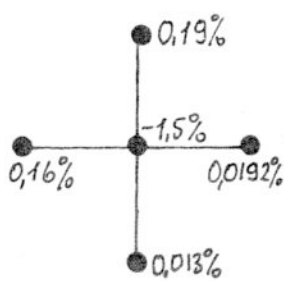
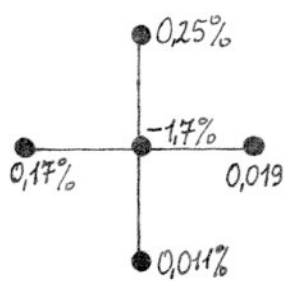
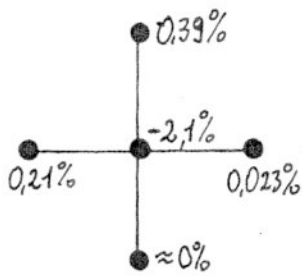
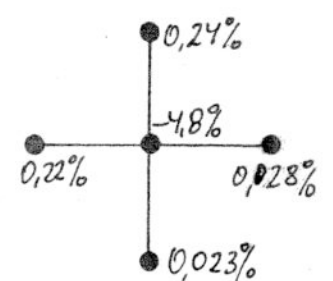
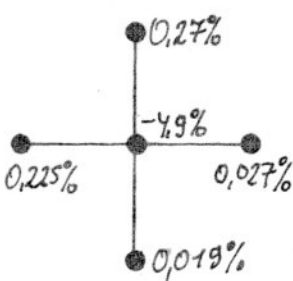
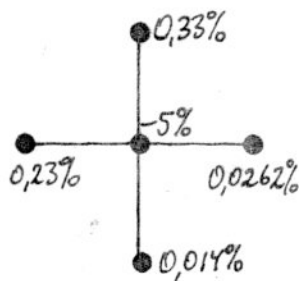
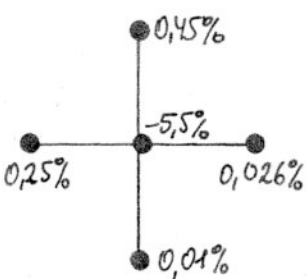
Dla przypadku pierwszego otrzymano w wyniku identyfikacji dokładne wartości parametrów c' i g' w węzłach siatki /w przypadku liniowym jak i nieliniowym/.

Warianty b/, c/, d/ zadania uwzględniały możliwe uchyby pomiarowe, które mogą powstawać podczas eksperymentu. W przypadku b/ ma miejsce stosunkowo duży wpływ uchybu na wyniki identyfikacji w punkcie, w którym on się pojawił i znacznie mniejszy w sąsiednich punktach. Zależy ten wpływ od parametrów modelu symulacyjnego, określających współczynnik wrażliwości modelu. Test przeprowadzono dla parametrów $c'^* = 1, 5, 20$ i 50 . W tabeli 3 zamieszczono wartości błędów względnych identyfikacji współczynnika c' w węźle z zakłóconym pomiarem / $i = 4, j = 3$ / w zależności od wartości c'^* oraz kroku czasowego.

Tabela 3

$\begin{matrix} t \\ c'^* \end{matrix}$	1	2	3	4	c	g
1	73%	29,4%	17,5%	12,4%	10	0
5	4,6%	2,6%	1,8%	1,5%	10	0
20	-2,1%	-1,7%	-1,5%	-1,4%	10	0
50	-5,5%	-5,0%	-4,9%	-4,8%	10	0
5	4,2%	2,2%	1,1%	-0,2%	10	3
5	4,6%	2,89%	1,91%	1,73%	10	1

Gdy przyjęto $c'^* < c'$, to wartości otrzymywanych w wyniku identyfikacji parametrów $C'_{4,3}^k$ były większe niż wartości rzeczywiste i na odwrót, gdy $c'^* > c'$, to wartości otrzymywane były mniejsze od rzeczywistych. Uchyb względny zmniejszał się z czasem, jak również był mniejszy w tej części obszaru, w której wartości funkcji stanu są większe. Korzystniejsze wyniki otrzymano przy wykorzystywaniu modelu symulacyjnego z parametrami c'^* bliskimi c' . Wielkość uchybu identyfikacji posiada duży zakres zmian. Na przykład, maksymalny błąd przy $c'^* = 1$ wynosił 73%, a przy $c'^* = 20$ już tylko -2,1%, zmniejszając się po 4-ch krokach w czasie odpowiednio do 12,4% i -1,4%. Poniżej przedstawiono przykładowe rozkłady uchybu względnego w węźle z zakłóconym pomiarem oraz w węzłach z nim sąsiadujących, tzn. dla układu węzłów:

 $C^{I*}=1$ t_1 t_2 t_3 t_4  $C^{I*}=5$  $C^{I*}=20$  $C^{I*}=50$ 

Nakładanie się uchybu systematycznego na dane pomiarowe w sposób jaki ma miejsce w wariancie c/, daje rozkład regularny uchybów względnych identyfikacji o wartościach nie większych kilku procent. Wariant d/ jest najczęściej spotykanym wariantem w praktyce. Dobre wyniki otrzymano w pobliżu granic o dużych wartościach warunków granicznych, tzn. tam gdzie stosunek wartości realizacji szumu pomiarowego n_{ij}^k do wartości funkcji stanu $\varphi_{i,j}^k$ jest nieduży. W przeciwnym przypadku, wpływ szumu pomiarowego jest na tyle wielki, że wyniki identyfikacji w ogóle są nie do przyjęcia. Na przykład uchyby w węźle (6,6) są rzędu $10^{-1}\% \div 10^{-2}\%$ a w węźle (1,1) rzędu kilkuset procent /przyjęto tu $\sigma = 0.03/$. Dlatego też należy, jeżeli to możliwe, przeprowadzać eksperyment czynny ze zmianą warunków granicznych oraz wstępne wygładzanie danych pomiarowych. Testowanie przeprowadzano za pomocą programów symulacyjnych na maszynie cyfrowej /symulacja cyfrowa metody hybrydowego modelowania symulacyjnego/ o nazwach SOLTZAJD1 /wariant a,b,c/ oraz SOLTZAJD2 /wariant d/.

6. ZAKOŃCZENIE

Tematyka pracy związana jest z identyfikacją dynamicznych własności obiektów o parametrach rozłożonych, opisywanych równaniami różniczkowymi cząstkowymi typu parabolicznego. Rozważano problem wyznaczania wartości współczynników równania /identyfikacja parametryczna, inwersyjne zagadnienie brzegowe/. Klasa omawianych modeli, chociaż jest stosunkowo wąska z punktu widzenia teorii sterowania, ma duże znaczenie praktyczne. Podczas klasyfikowania zagadnień brzegowych dla obiektów o parametrach rozłożonych pokazano, że niektóre problemy fizyki matematycznej oraz teorii sterowania są podobne do siebie, choć przedstawiane przy pomocy odmiennej terminologii. Odmienność terminologii nie przeszkadza w wykorzystywaniu osiągnięć obu dziedzin do rozwiązywania rozważanych zagadnień.

Zasadniczym celem pracy było rozszerzenie klasy zadań rozwiązywanych przy pomocy hybrydowych środków obliczeniowych /hybrydowych analizatorów pól/ o klasę zagadnień odwrotnych. Możliwości efektywnego rozwiązywania omawianych problemów daje przedstawiona metoda hybrydowego modelowania symulacyjnego, wykorzystująca zasadę quasi-

analogii modeli. Przedstawiono wybór struktury modelu symulacyjnego obiektu identyfikacji /poprzez 2-krotne przekształcenie postaci ciągłej modelu matematycznego obiektu/, algorytmy identyfikacji oraz realizację techniczną modelu symulacyjnego. Przy dyskretyzacji ciągłej czasoprzestrzeni przyjęto podział równomierny. Często nie jest możliwe w praktyce, aby taką siatkę pomiarową można było bez przeszkód wykorzystać. Można ją jednak otrzymać stosując metody ekstrapolacyjne do określenia obcięcia funkcji stanu obiektu do węzłów siatki równomiernej. Zasadę quasianalogii rozpatrywano na przykładzie ekwiwalentności dwóch symulatorów - analogowego typu siatki R-R oraz quasianalogowego typu jednorodnej siatki R-R z dodatkowymi źródłami prądowymi. Otrzymano przy tym ogólne wzory na obliczanie wartości współczynników wrażliwości jednowymiarowej siatki jednorodnej w zależności od ilości węzłów siatki. Znajomość współczynników wrażliwości siatki wymagana jest przy określaniu poprawek prądowych wprowadzanych do modelu quasianalogowego zapewniających ekwiwalentność symulatorów. Ekwiwalentność symulatorów elektrycznych badano na laboratoryjnym analizatorze pola typu R-R.

Ze względu na stawiany warunek jednoznaczności rozwiązania, niemożliwa jest jednoczesna identyfikacja współczynników przy pochodnej czasowej oraz przy pochodnej względem współrzędnych geometrycznych. Stąd algorytm identyfikacji jest podany dla przypadków, gdy identyfikowane wielkości są skupione z lewej lub prawej strony równania.

Wspomniano już, że brak jeszcze teorii matematycznych dotyczących rozważanej w pracy problematyki, m.in. zagadnienia zbieżności rozwiązania różnicowego do rozwiązania dokładnego. Dlatego skupiono się na badaniach symulacyjnych zbieżności i stabilności rozwiązań.

Ze względu na ograniczenia w otrzymywaniu dokładnych rozwiązań analitycznych, z którymi można byłoby porównać rozwiązania przybliżone, wykorzystano do badań zbieżności metodę stopniowego zagęszczania siatki. Metodami symulacyjnymi można dokonać porównania dla pewnych przykładowych sytuacji. Przy interpretacji wszystkich wyników badań testujących należy pamiętać o szczególności wyboru przykładów. Przyjmowanie w pracy warunków tylko I-go rodzaju oraz regularnych prostokątnych brzegów nie było spowodowane ograniczeniami proponowanej metody hybrydowego modelowania symulacyjnego. Wykorzystanie metody stopniowego zagęszczania siatki pozwala, prowadząc obliczenia według wzorów niskiego rzędu dokładności,

otrzymywać rozwiązania zadania wysokiego rzędu dokładności. Uściślenie wyników identyfikacji umożliwiając stosowane już w prostych zagadnieniach brzegowych wzory Runge'go /z uwzględnianiem analizy błędów odwzorowania obiektu identyfikacji przez przyjęty model symulacyjny/.

Wyniki badań testowych zbieżności rozwiązania przedstawiono w postaci wykresów zachowania się błędu względnego procentowego określenia współczynników w zależności od czasu symulowanego procesu, wartości kroków dyskretyzacji obszaru oraz wartości współczynników. Badano również wpływ na wielkość błędu kilku możliwych wariantów warunków granicznych I-go rodzaju. Chociaż wielkość błędu jest zbieżna do tej samej wartości ustalonej, to jednak charakter oraz prędkość zbieżności znacznie się różnią. Optymalnym wariantem jest taki, który zapewnia największą szybkość zmian wartości funkcji stanu. Otrzymane wyniki pomagają w opracowaniu sposobu rozmieszczania czujników pomiarowych w obserwowanym obszarze oraz prowadzenia eksperymentu w celu uzyskania reprezentatywnej serii identyfikującej. A więc posiadając możliwość przeprowadzania eksperymentu czynnego można zadawać wymuszenia w różnych punktach obszaru i kolejno wyznaczać poszukiwany współczynnik $d_{(i,k)}$ tylko w tych podobszarach, w których zmiany wartości obciążenia funkcji stanu do siatki ω_h^T są duże. Zestaw pomiarowy, o konfiguracji wykorzystywanego szablonu siatki, należałoby przemieszczać w kierunku gradientu funkcji stanu.

Zaobserwowano znaczny wpływ na wielkość błędu ustalonego wartości kroku czasowego τ oraz niewielki wpływ kroku przestrzennego przy różnych wartościach identyfikowanego współczynnika. Zauważono możliwość orientacyjnego określenia przedziału, w którym znajduje się poszukiwany współczynnik, nie czekając na ustalenie się błędu względnego /obserwując z którego kierunku rozpoczyna się proces zbieżności/. Pozwala to dobrać parametr modelu symulacyjnego d^* możliwie najmniej różniący się od wartości $d_{(i,k)}$ co ma duży wpływ na wartość błędu ustalonego.

Badano wrażliwość algorytmu identyfikacji na występujące w praktyce systematyczne i przypadkowe uchyby pomiarowe. Obciążenie danych pomiarowych nawet niewielkim błędem przypadkowym /w przeciwieństwie do błędów systematycznych/ powoduje duże błędy w wyznaczaniu współczynników. Ujemny wpływ zakłóceń pomiarowych jest znacznie większy w przypadku identyfikacji współczynnika skupionego przy pochodnych względem współrzędnych geometrycznych. Wyniki symulacji

wskazują na zwiększenie się ujemnego wpływu przypadkowego podczas zagęszczania siatki pomiarowej. Dlatego też musi istnieć kompromis w wyborze wartości kroków dyskretyzacji czasoprzestrzeni /mając na uwadze fakt, że ze zmniejszaniem się wartości kroków dyskretyzacji zmniejsza się błąd aproksymacji/.

Badano skuteczność eliminowania ujemnych skutków zakłóceń poprzez wstępną obróbkę serii identyfikującej oraz uwzględnienie roli współczynnika wrażliwości stosowanej jednorodnej siatki modelu quasianalogowego. Regularyzację odwrotnego zagadnienia brzegowego przeprowadzano prostą metodą wygładzania danych wejściowych /metodą lokalnej aproksymacji/. Chociaż z teoretycznego punktu widzenia metody wygładzania zawierają wiele elementów niezupełnie uzasadnionych, to jednak ich stosowanie skutecznie eliminuje przypadkowe wahania danych wejściowych przy jednoczesnym zachowaniu ich jakości.

W pracy przedstawiono możliwość wykorzystania w układzie identyfikacji analizatora pola typu HAF-2 /zaprojektowanego i wykonanego w Instytucie Cybernetyki Technicznej Politechniki Wrocławskiej/. Stosowanie hybrydowego systemu typu "jednorodna siatka quasianalogowa R-R - maszyna cyfrowa" umożliwia znaczny poziom automatyzacji procedur algorytmu identyfikacji. Brak systemu hybrydowego w pełni przygotowanego /wykonany HAF-2 nie posiada wymaganej ilości źródeł prądowych/ do wykorzystania omawianej metody powodował, że działanie hybrydowego układu identyfikacji symulowano na maszynie cyfrowej.

Istnieje możliwość rozszerzenia zakresu stosowania omówionej metody o procesy jednoczesnej wymiany masy i ciepła, których modelem matematycznym jest liniowy układ równań różniczkowych cząstkowych wraz z warunkami brzegowymi. Rozwój metod modelowania umożliwia pełniejsze stosowanie hybrydowych analizatorów pól do badania zjawisk polowych, rozwiązywania problemów identyfikacji i sterowania obiektami o parametrach rozłożonych.

Wyrażam podziękowanie swojemu Promotorowi pracy doc.dr inż. Ludwikowi Żebrowskiemu za opiekę i cenne spostrzeżenia oraz Kolegom z Instytutu Cybernetyki Technicznej, których uwagi były pomocne w czasie powstawania rozprawy doktorskiej. Szczególne podziękowanie pragnę wyrazić Koledze Zbigniewowi Zajdzie i Koleżance Aleksandrze Nowocien.

mgr inż. Włodzimierz Solnik

Raport złożono w Redakcji I-6

II 1981 r.

7. LITERATURA

- [1] ALEKSANDRO SKIJ N.M., EGOROV S.W., KUZIN R.E.: Adaptivnyje sistemy avtomatičeskogo upravlenija složnymi technologičeski-mi processami. Izd. Energia, Moskva 1973.
- [2] ALIFANOV O.M.: Graničnye obraznye zadači teploprovodnosti. IFŽ T. XXIX No 1, 1975.
- [3] ARTJUCHIN E.A.: Opređenje koeficienta temperaturoprovodnosti po dannym eksperimenta. IFŽ T. XXIX No 1, 1975.
- [4] AUER A.: Modelowanie analogowe procesów o stałych rozłożonych. PWN, Warszawa 1976.
- [5] BEKEY G.A., KARPLUS W.J.: Obliczenia hybrydowe. WNT, Warszawa 1976.
- [6] BIELAJEV N.M., RJADNO A.A.: Metody nestacionarnoj teploprovodnosti. Wyssšaja Škola, Moskva 1978.
- [7] BUBNICKI Z.: Identyfikacja obiektów sterowania. PWN, Warszawa 1974.
- [8] BUSLENKO N.P.: Modelirowanie složnych sistem. Nauka, Moskwa 1978.
- [9] BUTKOVSKIJ A.G.: Metody upravlenija sistemami s raspredelennymi parametrami. Nauka, Moskva 1975.
- [10] CHÓROWSKI B.: Metoda wyznaczania dynamicznych własności ciep-lynych bloków energetycznych. Prace naukowe Instytutu Techniki Ciepłnej i Mechaniki Płynów Politechniki Wrocławskiej, nr 21, Seria: Monografie nr 5, Wrocław 1978.
- [11] CZARNECKI S.: Podstawowe problemy rozwoju hybrydowych anali-zatorów pól. Modelowanie zagadnień brzegowych. Ossolineum, Wrocław 1974, ss. 7-16.
- [12] CZERWIŃSKA A.: Metoda modelowania analogowego dla rozwiązywa-nia zagadnień odwrotnych. Modelowanie zagadnień brzegowych. Ossolineum, Wrocław 1974, ss. 104-116.
- [13] CZERWIŃSKA A.: Zadania identyfikacji w inżynierskich badaniach ukłádów o stałych rozłożonych. Materiały IV Konferencji "Modelowanie zagadnień brzegowych", Warszawa 1978.

- [14] ČUDOV L.A.: Raznostnye schemy i nekorrektnye zadači dlja uravnenij s častnymi proizvodnymi. Vyčisl. matem. i programirovanie, VIII izd. MGU 1967.
- [15] DI PILLO G., GRIPPO L.: Application of ε -technique to distributed parameter system identification. Jour. Optim. Theory and Appl., vol. 11, No 1, 1973.
- [16] DJAČENKO W.F.: Osnovnye ponjatija vyčislitelnoj matematiki. Nauka. Moskva 1977.
- [17] DREWNIAK J., MRÓZEK A.: Metoda identyfikacji układów opisanych równaniami różniczkowymi cząstkowymi typu parabolicznego. Podstawy sterowania, t.1, z.2, 1971.
- [18] EVANS G.W., WALLACE G.F., SUTHERLAND G.L.: Symulacja na maszynach cyfrowych. WNT, Warszawa 1973.
- [19] EYKHOFF P.: Osnovy identifikacii sistem upravlenija. Izd. Mir, Moskva 1975.
- [20] FAIRMANF W., SHEN D.W.: Parameter identification for a class of distributed systems. Int. Jour. Contr., No 11, 1970.
- [21] FRIEDMAN A.: Uravnenija s častnymi proizvodnymi parabolického tipa. Izd. Mir, Moskva 1968.
- [22] FROLOV V.V.: Teoremy edinstvennosti rešenija obratnoj zadači teploprovodnosti. IFŽ, t. XXIX No.1, 1975.
- [23] GODUNOV S.K., RJABENKIJ W.S.: Raznostnye schemy - vvedenie v teoriju. Nauka, Moskva 1977.
- [24] GODUNOV S.K.: Uravnenija matematičeskoj fiziki. Nauka, Moskva 1971.
- [25] GORDON G.: Symulacja systemów. WNT, Warszawa 1974.
- [26] GRANDEK K.: Badanie zbieżności procedur iteracyjnych w układzie maszyna cyfrowa - siatka rezystorowa dla procesów o parametrach rozłożonych. Praca doktorska. ICT PWr., Komunikat No 393, Wrocław 1976.
- [27] GRUDER H.: Wyznaczenie wymuszeń punktowych dla obiektów opisanych quasiliniowym równaniem dyfuzji. Praca doktorska. ICT PWr., Komunikat No 647, Wrocław 1978.
- [28] GRUSZECKI J.: Adaptacyjne modele matematyczne obiektów o

- stałych rozłożonych. Podstawy sterowania, t.3. z.4. 1973.
- [29] GRUSZECKI J., CHŁĘDOWSKI M.: Identyfikacja a wrażliwość obiektów o rozłożonych parametrach. Prace VI KKA, T.1, Poznań 1974.
 - [30] HAMZA M.H., SHEIRAH M.A.: On-line identification of distributed parameter systems, Automatica, vol. 9, 1973.
 - [31] JABŁOŃSKI A.: Modelowanie metodami siatek R-C i R-R wybranych procesów o stałych rozłożonych opisywanych quasiliniowym równaniem różniczkowym cząstkowym. Praca doktorska. ICT PWr., Komunikat No 285 Wrocław 1975.
 - [32] JABŁOŃSKI A., JABŁOŃSKI J., KOZIEŻ J.: Hybrydowy analizator filtracji HAF-2 do modelowania procesów o parametrach rozłożonych. Wyd. Pol. Wr. 1979.
 - [33] JABŁOŃSKI J., KLIMESZ J., SOLNIK WŁ.: Hybrydowe systemy typu HAF do symulacji procesów filtracji wód podziemnych. VI Międzynarodowa Konferencja Automatyzacji Górnictwa ICAMC-80.
 - [34] JANENKO N.N.: Metod drobnych šagov rešenija mnogomernych zadač matematičeskoj fiziki. Nauka, Novosibirsk 1967.
 - [35] JANKELEV L.F., GUSEVA L.I.: Metod odnoveennogo opredelenija koeficienta teploprovodnosti i ob'emnoj teploemkosti zavisjaščich ot temperatury. IFŽ, T. XXVIII No 4, 1975.
 - [36] JAWORSKI J.: Matematyczne podstawy metrologii" WNT, Warszawa 1979.
 - [37] KALITKIN N.N.: Čislennye metody. Nauka, Moskva 1978.
 - [38] KARPLUS W.J., VERMUTI V.: Heuristic optimization and identification in hybrid field simulation. Actes proceedings AICA 1968.
 - [39] KĄCKI E.: Termokinetika. WNT, Warszawa 1967.
 - [40] KĄCKI E.: Równania różniczkowe cząstkowe w elektrotechnice. WNT, Warszawa 1971.
 - [41] KOGAN B.J., TETELBAUM U.M.: Metody modelirovanija v naučnych issledovanijach. Avtomatika i Telemechanika, No 6, 1979.
 - [42] KONDRATOWICZ L.: Modelowanie symulacyjne systemów, WNT,

Warszawa 1978.

- [43] KOZDOBA L.A., LEGENČUK V.I.: Rešenie obratnych i inversnych zadač metallurgičeskoj teplotechniki s pomoščju električeskich modelej. IFŽ, T. XV, No 6, 1968.
- [44] KOZDOBA L.A.: Električeskoe modelirovanie javlenij teplo - i massoperenosa. Energia, Moskva 1972.
- [45] KOZDOBA L.A.: Metody rešenja nelinejnych zadač teploprovodnosti. Nauka, Moskva 1975.
- [46] KOZLOV E.S., SERGEEV N.P., NIKOLAEV N.S.: Avtomatizacija processov rešenja kraevych zadač s pomoščju sietočnych ACVM. Energia, Moskva 1974.
- [47] KUŽMIN M.P.: Električeskoe modelirovanie nestacionarnych processov teploobmena. Energia, Moskva 1974.
- [48] LADYŽENSKAJA O.A.: Kraevye zadači matematičeskoj fiziki. Nauka, Moskva 1973.
- [49] LEONČUK M.P.: Primenenie principa maksimuma L.S. Pontrjagina k rešeniju obratnoj zadači teploprovodnosti. II Meždunarodnyj Kongress IFAC No 5, 1968.
- [50] LIEBMANN G.: New Electrical Analog Method for the Solution of Transient Heat - Conduction Problems. Trans of ASME, April 1956.
- [51] LIEBMANN G.: Solution of Transient heat-transfer problems by the resistance-network analog method. Trans of the ASME, August 1956.
- [52] LUKNER L., ŠESTAKOV V.M.: Modelirovanie geofiltracii. Nedra, Moskva 1976.
- [53] MACEVITYJ J.M.: Elektromodelirovanie nelinejnych zadač techničeskoj teplofizyki. Naukova Dumka, Kiev 1977.
- [54] MARCINKOWSKA H.: Wstęp do teorii równań różniczkowych cząstkowych. PWN, Warszawa 1972.
- [55] MARČUK G.T.: Metody vyčislitelnoj matematiki. Novosibirsk 1973.
- [56] Materiały III Konf. "Modelowanie zagadnień brzegowych", Jabłonna 1975.

- [57] Metody opredelenija teploprovodnosti i temperaturoprovodnosti. Pod red. Lykova A.V. Energia, Moskva 1973.
- [58] Modelowanie systemów opisywanych równaniami różniczkowymi cząstkowymi. Praca zbiorowa, Prace Inst. Org. i Kierow. s.B, z. 13, Warszawa 1974.
- [59] MOROZOV V.A.: Ob odnom klasse obratnykh zadač i metodach ich rešenija. IFŽ, T. XXIX No 1, 1975.
- [60] NICECKIJ L.V., OVSJUKOV S.V., SPALVIN A.P.: Modelirovanie prikladnykh zadač teorii polja metodom setok na gibridnykh vyčislitelnykh mašinach. Doklady 5-j Mežvuzovskoj Konferencii po matematičeskomu modelirovaniju. MEI 1968.
- [61] OMELČENKO K.G., PČELKINA V.G.: Rešenje obratnoj zadači nelinejnoj teploprovodnosti po opredeleniju teplofizičeskich charakteristik. IFŽ, T. XXIX No 1, 1975.
- [62] PETROV A.A.: Gibridnyj metod rešenija diffuravnenij v častnykh proizvodnykh paraboličeskogo tipa. Avtomatika i telemekhanika, No 3, 1975.
- [63] POLIS M.P., GOODSON R.E., WOZNY M.J.: On parameter identification for distributed systems using Galerkins criterion. Automatica, v. 9, 1973.
- [64] POLIS M.P., GOODSON R.E.: **Parameter** identification in Distributed Systems: A Synthesizing Overview. Proc. IEEE, vol.64, No 1, 1976.
- [65] PUCHOV G.A.: Načala teorii kvazianalogovykh sistem. Izd. Elektromechanika No 9, Moskva 1961.
- [66] PUCHOV G.E.; SAMOJLOV V.D., ARISTOV V.V.: Avtomatizirovannye analogo-cifrovye ustrojstva modelirovanija. Kiev 1974.
- [67] RAFAJŁOWICZ J.: Nekotorye zamečanja k differencial'nomu, raznostnomu i integral'nomu metodu izmierenija temperaturnoj zavisimosti koeficienta teploprovodnosti. IFŽ, T.XVIII, No 5, 1974.
- [68] RASTRIGIN L.A., MADŽAROV N.E.: Vvedenie v identifikaciju ob"ektov upravlenija. Energia, Moskva 1977.
- [69] PERDREAUVILLE F.J., GOODSON R.E.: Identification of systems described by partial differential equations Trans. ASME, Jour. Basic Eng., vol 88, No 2 1966.

- [70] PHILLIPSON G.A.: Identification of distributed systems. Elsevier Publishing, New York 1971.
- [71] RICHTMYER R., MORTON K.: Raznostnye metody rešenija kraevych zadač. Mir, Moskva, 1972.
- [72] RODE E.E., SPALVIN A.P.: Gibridnye vyčislitelnye sistemy "Setka -CVM". Avtomatika i Telemekhanika No 9, 1972.
- [73] SAGE A.P., MELSA J.L.: Identifikacija sistem upravlenija. Nauka, Moskva 1974.
- [74] SAMARSKIJ A.A., GULIN A.B.: Ustojčivost raznostnyh schem. Nauka, Moskva 1973.
- [75] SAMARSKIJ A.A.: Teorija raznostnyh schem. Nauka, Moskva 1977.
- [76] SENDOW B.: Stare i nowe w metodach numerycznych. PWN, Warszawa 1976.
- [78] SPALVIN A.P.: Modelirovanie neodnorodnyh sred na setke postojannyh soprotivlenij s tokovvodami. Učenyje zapiski RPI, T.XX vyp. 3, Riga 1967.
- [79] SHANNON R.E.: Imitacionnoe modelirovanie sistem - iskusstvo i nauka. Mir, Moskva 1978.
- [80] SOLNIK Wł.: Identyfikacja procesów o parametrach rozłożonych z wykorzystaniem adaptacyjnej metody modelowania quasiana-logowego. Prace VII KKA, T.1, Rzeszów 1977.
- [81] SOLNIK Wł.: Identyfikacja własności dynamicznych obiektu o parametrach rozłożonych opisywanego równaniem przewodzenia ciepła. Materiały IV Konferencji "Modelowanie zagadnień brzegowych". Warszawa 1978.
- [82] SOLNIK Wł., ZAJDA Z.: Metoda modelowania hybrydowego z wykorzystaniem analizatora HAF-2 do rozwiązywania inwersyjnego zagadnienia brzegowego. Materiały IV Konferencji "Modelowanie zagadnień brzegowych", Warszawa 1978.
- [83] SOLNIK Wł., ZAJDA Z.: Badania symulacyjne algorytmu identyfikacji parametrów liniowego modelu wymiany masy i ciepła. Prace VIII KKA T.1, Szczecin 1980 /komunikat/.
- [84] STEPANOV A.E.: O modelirovanii inversnoj zadači teploprovodnosti. Mat - modelirovanie i teoria elektrocepiej, No 12,

1974.

- [85] STEPANOV A.E.: Kusočno-neprerывnaja approksimacia eksperimentalnych danych pri modelirovanii OZ matfiziki. Modelirovanie i teoria elektrocepiej, No 13, 1975.
- [86] STRZAŁKOWSKI A., SLIŻYŃSKI A.: Matematyczne metody opracowywania wyników pomiarów. PWN, Warszawa 1978.
- [87] SUFLETA Z.: Identyfikacja obiektów o parametrach rozłożonych ze współczynnikami zależnymi od położenia. Praca doktorska, ICT PWr., 1979.
- [88] TETELBAUM I.M., TETELBAUM J.I.: Modeli prjamoj analogii. Nauka, Moskva 1979.
- [89] TICHONOV A.N., ARSENIN V.J.: Metody rešenija nekorrektnych zadač. Nauka, Moskva 1974.
- [90] TICHONOV A.N.: Obratnye zadači teploprovodnosti. IFŽ, T. XXIX No 1, 1975.
- [91] TICHONOV A.N., SAMARSKIJ A.A.: Uravnenija matematičeskoj fiziki. Nauka, Moskva 1977.
- [92] TIOMKIN A.G.: Obratnye metody teploprovodnosti. Energia, Moskva 1973.
- [93] TOMASZEWSKI A.: Podstawy nowoczesnej metrologii. NT, Warszawa 1978.
- [94] TZAFESTAS G.G.: Identification of stochastic distributed parameter systems. Int. J. Control, 11, No 4, 1970.
- [95] VLADIMIROV V.S.: Uravnenija matematičeskoj fiziki. Nauka, Moskva 1976.
- [96] ZAJDA Z.: Symulacja cyfrowa procesów o stałych rozłożonych opisywanych quasiliniowym równaniem przewodnictwa ciepła. Praca doktorska. Komunikat No 263 ICT PWr, Wrocław 1975.
- [97] ZAJDA Z., SOLNIK Wł.: Identyfikacja ob'ektov s raspredelennymi parametrami s ispolzovaniem metoda imitacionnogo modelirovanija. Materiały Międz. Sympozjum SMC w Zakopanem, Łódź 1979.
- [98] ZAJDA Z., SOLNIK Wł., JABLONSKI A.: Rešenje inversnoj kvazi-linejnoj kraevoj zadači metodom imitacionnogo modelirovanija.

International Symposium on Systems Analysis and Simulation,
Berlin /komunikat/ 1980.

- [99] ZIELIŃSKI R.: Generatory liczb losowych. WNT, Warszawa 1972.
- [100] ŻEBROWSKI L., JABŁOŃSKI A., KLIMESZ J., WASILEWSKI S.: Możliwości modelowania oraz symulacji procesów odwodnieniowych w górnictwie odkrywkowym. Prace Naukowe Inst. Górnictwa Pwr. No 18, Konferencje No 2, Wrocław 1975.
- [101] ŽERNOV I.E., ŠESTAKOV V.M.: Modelirovanie filtracii podzemnykh vod. Nedra, Moskva 1971.
- [102] SICIŃSKI W.: Określenie współczynnika filtracji na podstawie próbnych pompowań i analiz granulometrycznych (rejon Bełchatowa). Górnictwo Odkrywkowe, W-W 77 No 1-2 COBPGO POLTEGOR.



Niniejszy raport otrzymują:

1. OINT - Biblioteka Międzyinstytutowa I-6, I-25	1 egz.
2. Biblioteka Główna Politechniki Wr.	1 egz.
3. Zastępca Dyrektora I-6 d/s Kształcenia Kadry Naukowej	1 egz.
4. Promotor: doc. dr inż. Ludwik Żebrowski	1 egz.
5. Recenzenci	2 egz.
6. Zespół Automatyki i Modelowania	1 egz.
7. Autor	<u>5 egz.</u>
Razem	12 egz.