

INSTYTUT TELEKOMUNIKACJI I AKUSTYKI

POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ

Raport nr I28/P-036/83

Uogólnienie małosygnałowej
analizy nieliniowej dla wielo-
otworowych układów elektronicz-
nych.

Jerzy S. Witkowski

Rozprawa doktorska

Promotor: prof.dr hab.inż. M.Grobelny

Słowa kluczowe:

uogólniony szereg Volterry,
nieliniowy układ elektroniczny,
nieliniowy układ wielootworowy,
nieliniowa analiza częstotliwo-
ściowa,
kompatybilność elektromagnetyczna.

Wrocław, październik 1983.

Pragnę wyrazić podziękowanie
Panu profesorowi M.Grobelnemu za
stworzenie odpowiednich warunków
do napisania niniejszej pracy oraz
wiele trafnych uwag dotyczących
prezentowanego tematu.

Dziękuję również dr. A.Sowie
za pomoc okazaną przy przeprowadza-
niu prezentowanych w pracy pomiarów.

autor

mgr inż. Jerzy S. Witkowski

Instytut Telekomunikacji i Akustyki

Politechniki Wrocławskiej

Wrocław, Wybrzeże Wyspiańskiego 27

Spis treści:

WAŻNIEJSZE OZNACZENIA	7
1. WSTĘP	9
1.1. Cel pracy	11
1.2. Układ pracy	12
2. REPREZENTACJA ODPOWIEDZI NIELINIOWEGO UKŁADU ELEKTRO- NICZNEGO PRZEZ FUNKCJONAŁ NIELINIOWY	14
2.1. Funkcjonały nieliniowe	14
2.2. Aproksymacja funkcyjonałów ciągłych	17
2.3. Różniczkowanie w przestrzeniach Banacha	19
2.4. Szeregi w przestrzeniach Banacha	23
2.5. Uogólniony szereg Volterry	29
3. SZEREG VOLTERRY W OPISIE UKŁADU ELEKTRONICZNEGO	38
3.1. Obliczanie jąder Volterry w dziedzinie czasu	38
3.2. Obliczanie promienia zbieżności szeregu Volterry będącego rozwiązaniem równania różniczkowego /3.5/	49
4. UOGÓLNIONY SZEREG VOLTERRY W DZIEDZINIE CZĘSTOTLI- WOŚCI	58
4.1. Transformata Fouriera uogólnionego szeregu Volterry	58
4.2. Odpowiedź układu opisanego uogólnionym szeregiem Volterry na wymuszenie harmoniczne	62
4.3. Niektóre własności nieliniowych funkcji trans- mitancji	66

5.OBLICZANIE NIELINIOWYCH FUNKCJI TRANSMITANCJI UKŁADÓW ELEKTRONICZNYCH	75
5.1.Metoda potencjałów węzłowych obliczania nieliniowych funkcji transmitancji	75
5.1.1.Programy komputerowe WIVO i VOLT obliczania nie- liniowych funkcji transmitancji	83
5.1.2.Model układu elektronicznego dostosowany do ana- lizy programami WIVO i VOLT	86
5.2.Metoda transmitancji układu linearyzowanego oblicza- nia nieliniowych funkcji transmitancji.	89
5.2.1.Realizacja programowa metody transmitancji ukła- du linearyzowanego.	95
6.PRZYKŁADY ANALIZY STANU USTALONEGO NIELINIOWYCH UKŁADÓW ELEKTRONICZNYCH METODĄ SZEREGÓW VOLTERRY.	97
6.1.Bezpośredni sposób pomiaru nieliniowych funkcji trans- mitancji.	97
6.2.Wzmacniacz selektywny	103
6.2.1.Szacowanie promienia zbieżności szeregu Volterry reprezentującego odpowiedź wzmacniacza selektyw- nego.	106
6.2.2.Wyniki analizy wzmacniacza selektywnego	108
6.3.Analiza mieszacza radiowego	115
6.4.Analiza obwodów rezonansowych z diodami pojemności- owymi.	131
6.4.1.Modelowanie diody pojemnościowej.	134
6.4.2.Wyniki analizy obwodów rezonansowych z diodami pojemnościowymi	137
7.METODA SZEREGÓW VOLTERRY W ANALIZIE UKŁADÓW ELEKTRONICZ- NYCH.	150

8. WNIOSKI I UWAGI KOŃCOWE	161
--------------------------------------	-----

DODATKI:

A. Modele zastępcze złącza półprzewodnikowego i tranzysto- ra bipolarnego	166
--	-----

B. Współczynnik modulacji skrośnej dla układu opisanego wielomianem Volterry trzeciego stopnia	171
---	-----

C. Porównanie połączenia antyszeregowego i antyrównoległego diod /rozdz. 6.4/ ze względu na zniekształcenia drugiego rzędu	172
--	-----

LITERATURA	177
----------------------	-----

WAŻNIEJSZE OZNACZENIA.

$\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{R}$ - zbiory, przestrzenie.

$\{\emptyset\}$ - zbiór pusty.

$\mathbb{R}$ - zbiór liczb rzeczywistych.

$\mathbb{C}$ - zbiór liczb zespolonych.

$C\langle a, b \rangle$ - zbiór funkcji ciągłych na odcinku $\langle a, b \rangle$.

$F(\cdot)$ - funkcjonał.

$f(\cdot)$ - odwzorowanie.

$(C\langle a, b \rangle, \mathbb{R}^n)$ - n -wymiarowa przestrzeń wektorowa taka, że każda składowa wektora jest elementem $C\langle a, b \rangle$.

$\mathbb{R}^n\langle a, b \rangle = \{(x_1, \dots, x_n); a \leq x_i \leq b, i=1, 2, \dots, n\}$

$\bar{x}, \bar{y}, \bar{a}$ - kreska nad literą oznacza wektor np. $[x_1, \dots, x_n]^T$

/ T oznacza transpozycję /

$\bar{1} = [1, 1, \dots, 1]^T$

$\bar{0} = [0, 0, \dots, 0]^T$

$o(x^k)$ - nieskończenie mała wyższego rzędu niż k .

$\underline{L}$ - macierz operatorów liniowych.

$0 \dots a_\alpha \dots b_\xi \dots 0$ - ciąg zer z wyjątkiem miejsca α , gdzie występuje a , miejsca ξ , gdzie występuje b itd.

$\mathcal{F}^{(m)}$ - m -wymiarowa transformata Fouriera.

$\delta(\cdot)$ - dystrybucja delta Diraca.

A^* - wartość sprzężona do A .

$\bar{a} * \bar{b}$ - działanie /wzór /3.8//, tzw. iloczyn tensorowy.

$\underline{Z}, \underline{z}, \underline{Y} \dots$ - litera podkreślona oznacza macierz.

$\underline{D}^{(i)}(\cdot)$ - operator różniczkowy /wzór /3.9//.

$\underline{\Delta}^{(.)}(\cdot)$ - operator /wzór /5.8//.

$\underline{G}^{(.)}(\cdot)$ - operator /wzór /3.13/ lub /5.10//.

$\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{E}}, \underline{\underline{U}}$ - litera podkreślona dwukrotnie oznacza amplitudę zespoloną sygnału harmonicznego.

$$\omega = 2\pi f = 2\pi/T$$

$\oplus$ - suma prosta przestrzeni.

1. WSTĘP.

Konieczność badania układów nieliniowych wydaje się oczywista, gdyż praktycznie każdy rzeczywisty układ elektroniczny jest ze swej natury nieliniowy. W jednych układach efekty nieliniowe traktuje się jako zjawisko niepożądane, a w innych są one podstawą ich działania. Istnieje wiele sposobów, bardziej lub mniej ogólnych, analizy tych układów, zarówno analitycznych jak i numerycznych w większości wykorzystujących, pośrednio lub bezpośrednio, analizę w dziedzinie czasu. Ogólne metody są podane np. w [23, 27, 30, 57, 61, 75, 116].

W chwili obecnej nie ma w zasadzie systematycznych i pełnych metod analizy tych układów, szczególnie w dziedzinie częstotliwości.

Rozpowszechnienie metod analizy układów liniowych, opartych na transformacjach Fouriera i Laplace'a /a też i przekształcaniu Z/, łączących się w sposób naturalny z pojęciem częstotliwości drgań, funkcją transmitancji oraz charakterystykami częstotliwościowymi, spowodowało chęć przeniesienia tych metod na układy nieliniowe, do czego często znajdowano uzasadnienie teoretyczne [61].

Rozwiązanie takie nie może być jednak zadowalające i w dalszym ciągu poszukuje się metod ogólniejszych. Wydaje się, że korzystne pod tym względem jest zastosowanie szeregów Volterry mających reprezentację zarówno w dziedzinie czasu, jak i częstotliwości.

Odpowiedź układu nieliniowego w postaci szeregu Volterry opisał po raz pierwszy N.Wiener w 1942r. [110], choć podstawy matematyczne tej teorii sięgają lat 1880 do 1920 i należą do V.Volterry oraz M.Frecheta [33,115]. W dalszych latach metoda szeregów Volterry została szeroko rozpowszechniona do badań nad zjawiskami nieliniowymi, zarówno w układach elektronicznych, jak i innych zjawiskach fizycznych. Miarą tego rozpowszechnienia jest duża ilość publikacji, które, z grubsza, można podzielić na dwie grupy przenikające się nawzajem. Pierwszą z nich są publikacje mające aspekt bardziej teoretyczny i zajmujące się takimi zagadnieniami jak istnienie reprezentacji danego problemu w postaci szeregu Volterry i wiążący się z tym problem jego zbieżności [7,10,18,29,39,41,50,64,66,67,109,117,120,121,122,123]. Do drugiej grupy należą prace wykorzystujące szereg Volterry w konkretnych zastosowaniach /aczkolwiek często uzupełniają rozważania teoretyczne/, przy czym można tu wydzielić takie /również się przenikające/ grupy zainteresowań, jak:

- układy nieliniowe z sygnałami deterministycznymi [2,3,12,13,14,15,16,17,20,22,25,31,43,44,45,52,53,62,68,69,71,72,76,77,78,79,82,83,84,85,86,89,90,97,98,99,100,101,102,103,107,108,114,115],
- procesy stochastyczne w układach nieliniowych [4,5,8,26,28,37,40,42,58,59,60,74,118,119],
- nieliniowe układy sterowania [1,24,32,34,35,36,38,63,65,91,92,93,94,95,96,105,106],
- inne zjawiska fizyczne mające reprezentację w postaci szeregu Volterry np. [6,55,124].

Nas będzie interesowała pierwsza z tych grup, w odniesieniu do nieliniowych układów elektronicznych. W przytoczonych publikacjach na ten temat szeregiem Volterry opisywano układy o jednym

wejściu i jednym wyjściu /choć w [85,115] zastosowano go do opisu trójwrotnika, ale w sposób mało ogólny/.

Bogatą bibliografię dotyczącą szeregów Volterry można znaleźć również w monografiach [95,107], gdzie omówiono możliwości zastosowania szeregów Volterry w analizie układów elektronicznych jednowejściowych i układów sterowania.

1.1. Cel pracy.

Celem pracy jest podanie metody małosygnałowej analizy wielootworowych układów elektronicznych oraz stworzenie praktycznego narzędzia takiej analizy w postaci uniwersalnego programu komputerowego. Dla osiągnięcia powyższego celu wykorzystana zostanie metoda szeregów Volterry, przy czym cel będzie zrealizowany

1/ w zakresie rozważań teoretycznych przez:

- wyprowadzenie zależności w postaci szeregu Volterry opisującej nieliniowy układ elektroniczny o wielu wejściach i wielu wyjściach. Zależności takich nie spotkano w znanej autorowi literaturze,
- przeanalizowanie interpretacji fizycznej oraz pewnych cech nieliniowych funkcji transmitancji opisujących wielootworowe, nieliniowe układy elektroniczne,
- zrealizowanie, opartego na wyprowadzonych zależnościach, uniwersalnego programu komputerowego analizy wielootworowych układów elektronicznych z małymi nieliniowościami. Istnienie takiego programu nie jest autorowi znane,

2/ w zakresie badań eksperymentalnych przez:

- pokazanie praktycznych możliwości zastosowania opracowanego

programu komputerowego,

- rozpatrzenie zakresu stosowalności opracowanej metody w analizie układów elektronicznych.

Pomyślna realizacja tak sformułowanego celu będzie kolejnym krokiem do znalezienia ogólnych i systematycznych metod analizy nieliniowych układów elektronicznych, których brak sygnalizowano na wstępie tego rozdziału.

1.2. Układ pracy.

W rozdziale drugim wychodząc od pojęcia odwzorowania na zbiorach dowolnych, poprzez twierdzenie Frecheta, analizę w przestrzeniach Banacha, dochodzi się do uogólnionego szeregu Volterry będącego rozwinięciem odwzorowania $F: (C\langle a, b \rangle, R^1) \rightarrow (C\langle a, b \rangle, R^1)$. Pokazano przy tym, że istnieje pewien niezerowy obszar zbieżności tego szeregu. Rozważania teoretyczne przeprowadzone w tym rozdziale są niezbędne do wyprowadzenia zależności /2.61/-/2.64/ zaproponowanych przez autora do opisu wielootworowych, nieliniowych układów elektronicznych.

Rozdział trzeci prezentuje sposób obliczania wyrazów uogólnionego szeregu Volterry będącego rozwiązaniem pewnego równania różniczkowego opisującego wielootworowy układ elektroniczny. Wprowadzenie przez autora operatorów /3.9/ i /3.13/ pozwoliło sformalizować zapis poszczególnych wzorów. Twierdzenia 3.5 i 3.6 zostały podane przez autora.

W rozdziale czwartym przedstawiono reprezentację uogólnionego szeregu Volterry w dziedzinie częstotliwości podając interpretację fizyczną nieliniowych funkcji transmitancji oraz ich istotne własności. Rozdział ten zawiera szereg uwag niespot-

kanych przez autora w znanej mu literaturze.

Rozdział piąty podaje dwa sposoby obliczania nieliniowych funkcji transmitancji uogólnionego szeregu Volterry dla elektronicznych układów wielootworowych. Wprowadzenie niespotykanych dotychczas w literaturze operatorów /5.8/ i /5.9/ pozwoliło na zwarty zapis wzorów. W rozdziale tym przedstawiono również możliwość obliczania wielowymiarowych funkcji transmitancji za pomocą napisanych przez autora programów komputerowych.

Szósty rozdział zawiera w całości, wyniki uzyskane przez autora. Prezentuje on przykłady analizy układów elektronicznych za pomocą szeregu Volterry, wraz z weryfikacją pomiarową. Podano tam wiele wniosków, dotyczących prezentowanych układów, trudnych do wyciągnięcia w innej niż szereg Volterry metodzie analizy. Do istotnych zagadnień zawartych w tym rozdziale zaliczyć można szacowanie promienia zbieżności szeregu Volterry oraz określenie zakresu aproksymacji sygnału wyjściowego układu elektronicznego przez wielomian Volterry.

Opracowany przez autora rozdział siódmy pozwala spojrzeć na metodę analizy układów elektronicznych za pomocą szeregów Volterry przez pryzmat problemu modelowania układu elektronicznego, z czego wyciągnięto również interesujące konkluzje.

Wnioski dotyczące całej pracy zebrano w rozdziale ósmym.



2. REPREZENTACJA ODPOWIEDZI NIELINIOWEGO UKŁADU ELEKTRONICZNEGO PRZEZ FUNKCJONAŁ NIELINIOWY.

2.1. Funkcjonały nieliniowe. [81]

Wprowadzimy na początek pojęcie odwzorowania na zbiorach dowolnych:

Def.2.1. Niech dane będą dwa zbiory $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$. Przez-odwzorowanie, którego argumenty przebiegają zbiór $\mathcal{M}$, wartości zaś należą do zbioru $\mathcal{N}$, rozumiemy każdy podzbiór f iloczynu kartezjańskiego $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ o tej własności, że dla każdego $x \in \mathcal{M}$ istnieje jeden i tylko jeden element $y \in \mathcal{N}$ taki, że $(x, y) \in f$.

Zamiast pisać $(x, y) \in f$ będziemy używali zapisu $y = f(x)$ lub $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$.

Jeżeli w przytoczonej definicji zbiór $\mathcal{N}$ zastąpimy zbiorem liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$, a zbiór $\mathcal{M}$ będzie funkcyjną przestrzenią metryczną, to odwzorowanie $f(\cdot)$ nazwiemy funkcjonałem [81].

Natomiast jeżeli $\mathcal{M}$ jest przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{R}$ /lub $\mathbb{C}$ / oraz spełnione są dla $f(\cdot)$ warunki:

$$a/ f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) \quad ; \quad x_1, x_2$$

$$b/ f(ax) = af(x) \quad ; \quad x \in \mathcal{M}, a \in \mathbb{R} \text{ /lub } \mathbb{C}/,$$

to $f(\cdot)$ nazywamy odwzorowaniem liniowym.

Przykładem odwzorowania liniowego jest operator postaci

$$y(t) = \int_{R\langle a, b \rangle} k(t, \tau) x(\tau) d\tau \quad /2.1/$$

określony na zbiorze funkcji ciągłych $C\langle a, b \rangle$. We wzorze tym $k(t, \tau)$ jest funkcją ciągłą dwóch argumentów t i τ . Jeżeli rozpatrywać argument t jako parametr funkcjonału przekształcającego funkcję $x(\tau) \in C\langle a, b \rangle$ w liczbę $y(t)$, to można zapisać operator /2.1/ jako rodzinę jednoparametrowych funkcjonałów liniowych

$$y(t) = F(x(t), t). \quad /2.2/$$

Niech dalej $\mathcal{X}$ oznacza liniową przestrzeń metryczną.

Def.2.2. Odwzorowanie $f(x_1, \dots, x_n)$ o n argumentach określone na iloczynie kartezjańskim $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \dots \times \mathcal{X}_n$ nazywamy n -liniowym, jeżeli jest ono liniowe ze względu na każdy argument.

Np. funkcjonał w przestrzeni $(C\langle a, b \rangle, R^n)$ o postaci

$$F(x_1(\tau_1), \dots, x_n(\tau_n)) = \int_{R^n\langle a, b \rangle} k_n(\tau_1, \dots, \tau_n) x_1(\tau_1) \dots x_n(\tau_n) d\tau_{v_n} \quad /2.3/$$

jest odwzorowaniem n -liniowym.

W szczególności dla tego typu odwzorowania mamy

$$\|f(x_1, \dots, x_n)\| = \|f\| \|x_1\| \dots \|x_n\|. \quad /2.4/$$

Jeżeli w odwzorowaniu n -liniowym dokonamy podstawienia $x_1 = x_2 = \dots = x_n = x$, to $f(x) = f(x, \dots, x)$ będzie jednorodnym odwzorowaniem rzędu n , tzn. będzie spełniać warunek

$$f(ax) = a^n f(x) \quad ; a \in R \text{ /lub } C/. \quad /2.5/$$

Tak więc funkcjonał liniowy

$$F_1(x(\tau)) = \int_{R\langle a, b \rangle} k_1(\tau) x(\tau) d\tau \quad /2.6/$$

jest jednorodnym funkcjonałem rzędu 1, a wyrażenie

$$F_2(x(\tau)) = \int_{R^2\langle a, b \rangle} k_2(\tau_1, \tau_2) x(\tau_1) x(\tau_2) d\tau_{v_2} \quad /2.7/$$

jest jednorodnym funkcjonałem rzędu 2. Jednorodny funkcjonał rzędu n będzie wyrażał się wzorem

$$F_n(x(\tau)) = \int_{R^n\langle a, b \rangle} k_n(\tau_1, \dots, \tau_n) x(\tau_1) \dots x(\tau_n) d\tau_{v_n}. \quad /2.8/$$

Funkcję $k_n(\cdot)$ w /2.8/ nazywamy jądrem funkcjonału $F_n(\cdot)$. Jeżeli dodatkowo $k_n(\cdot)$ jest symetryczną funkcją swoich argumentów, to funkcjonał /2.8/ nazywamy jednorodnym i regularnym funkcjonałem rzędu n .

Sumę regularnych, jednorodnych funkcjonałów $F_n(\cdot)$ rzędu $n \leq N$ będziemy nazywali jednorodnym wielomianem funkcjonalnym stopnia N .

$$G_N(x(\tau)) = F_0 + F_1(x(\tau)) + \dots + F_N(x(\tau)), \quad /2.9/$$

gdzie F_0 jest stałą. Wielomiany tej postaci wykorzystywane są do aproksymacji funkcjonałów nieliniowych, podobnie jak wielomiany rzeczywiste wykorzystuje się do aproksymacji funkcji zmiennej rzeczywistej /tw. Weierstrassa/.

Do opisu nieliniowych systemów dynamicznych wykorzystuje się

wielomiany Volterry , których składniki są funkcjonalami jednorodnymi , zależnymi od parametru t ,

$$v_n(x(\tau), t) = \int_{R^n \langle a, b \rangle} k_n(t, \tau_1, \dots, \tau_n) x(\tau_1) \dots x(\tau_n) d\tau_{v_n}. \quad /2.10/$$

Regularność tych funkcjonalów rozumieć należy tak samo jak poprzednio , tzn., że jądro $k_n(t, \cdot)$ jest symetryczne względem $\tau_1, \dots, \tau_n$ dla dowolnego t . Poza tym zakłada się , że

$$k_n(t, \tau_1, \dots, \tau_n) = 0 \quad \text{dla } \tau_i \notin \langle a, b \rangle; i=1, \dots, n. \quad /2.11/$$

Jeżeli t w wyrażeniu /2.10/ będziemy rozpatrywać jako zmienną , to wielomian Volterry

$$G_N(x(\tau), t) = \sum_{n=0}^N v_n(x(\tau), t) \quad /2.12/$$

będzie jednorodnym odwzorowaniem zbioru $\mathcal{X}$ funkcji $x(t)$, w przestrzeń $\mathcal{Y}$ funkcji $y(t)$. /W szczególności przestrzenie $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ mogą pokrywać się z przestrzenią $C \langle a, b \rangle$ /.

2.2.Aproksymacja funkcjonalów ciągłych. [81, 117]

Jak już wspomniano, aproksymacja funkcjonalów ciągłych wiąże się przez analogię , z twierdzeniem Weierstrassa o aproksymacji funkcji zmiennej rzeczywistej określonej na przedziale domkniętym za pomocą wielomianów.

Dla funkcyjonałów istnieje analogiczne twierdzenie Frecheta [11]:
Tw.2.1. Jeżeli funkcyjonał $F(x(t))$ jest określony i ciągły w przestrzeni $C\langle a, b \rangle$, to na dowolnym obszarze $\mathcal{D} \subset C\langle a, b \rangle$ można go przedstawić w postaci granicy regularnych wielomianów funkcyjonałnych

$$F(x(t)) = \lim_{n \rightarrow \infty} G_{r_n}(x(t)). \quad /2.13/$$

Wykorzystując /2.8/ i /2.9/ można ten wzór zapisać jako

$$\begin{aligned} F(x(t)) = \lim_{n \rightarrow \infty} & \left(k_0^n + \int_{R\langle a, b \rangle} k_1^n(\tau) x(\tau) d\tau + \dots + \right. \\ & \left. + \dots + \int_{R^{r_n}\langle a, b \rangle} k_{r_n}^n(\tau_1, \dots, \tau_{r_n}) x(\tau_1) \dots x(\tau_{r_n}) d\tau_{r_n}, \right) \end{aligned} \quad /2.14/$$

gdzie $k_p^n(\cdot)$ są funkcjami symetrycznymi i ciągłymi swoich argumentów.

Ponadto, wykorzystując własności funkcyjonałów na przestrzeniach zwartych, można pokazać [81], że jeżeli $\mathcal{D}$ w tw.2.1. jest zbiorem zwartym, to zbieżność w /2.13/ i /2.14/ ma charakter jednostajny.

W ogólniejszym przypadku, kiedy funkcyjonał zależy od parametru $t \in \langle a, b \rangle$, jego aproksymacja na odcinku $\langle a, b \rangle$ odbywa się za pomocą wielomianów postaci

$$y(t) = F(x(t), t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(k_0^n(t) + \int_{R\langle a, b \rangle} k_1^n(t, \tau) x(\tau) d\tau + \dots + \right) \quad /2.15/$$

$$+ \dots + \int_{R^n \langle a, b \rangle} k_{r_n}^n(t, \tau_1, \dots, \tau_{r_n}) x(\tau_1) \dots x(\tau_{r_n}) d\tau_{v_{r_n}} \Big). \quad /2.15/$$

Warto tu zauważyć , że granica funkcji $k_p^n(\cdot)$ przy $n \rightarrow \infty$ może nie istnieć w zwykłym sensie , lecz będzie nią dystrybucja.

2.3. Różniczkowanie w przestrzeniach Banacha. [51, 70, 81, 117]

Oznaczmy dalej przez $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ przestrzeń Banacha /rzeczywiste bądź zespolone/. Niech dane będzie odwzorowanie $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ określone na pewnym obszarze $\mathcal{D} \subset \mathcal{X}$. Wybierzmy dowolny punkt $x \in \mathcal{D}$ i taki element $\delta x \in \mathcal{D}$, że $x + \delta x \in \mathcal{D}$.

Def.2.3. Odwzorowanie $f(x)$ nazywamy różniczkowalnym w sensie Frecheta , jeżeli istnieje ograniczony i-liniowy operator $f': \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ taki , że

$$f(x, \delta x) = f(x + \delta x) - f(x) = f'(x)\delta x + \alpha(x, \delta x), \quad /2.16/$$

przy czym,

$$\lim_{\|\delta x\| \rightarrow 0} \frac{\|\alpha(x, \delta x)\|}{\|\delta x\|} = 0. \quad /2.17/$$

Wyrażenie $f'(x)\delta x$ nazywamy różniczką Frecheta , a $f'(x)$ pochodną Frecheta odwzorowania $f(x)$. Mówimy również , że $f(x)$ jest różniczkowalne w sensie Frecheta , jeżeli $f'(x)$ jest określona jednoznacznie.

Powyższa definicja należy do klasy tzw. definicji niekonstru-

ktywnych, tzn. nie mówi, w jaki sposób obliczać pochodną $f'(x)$.
Możliwość obliczania $f'(x)$ uzyskamy, gdy podstawimy $\delta x = \gamma h$, gdzie $h \in \mathcal{D}$ i $\gamma \in \mathbb{R}$ /lub $\mathbb{C}$ /. Wtedy, przy $\gamma \rightarrow 0$, $\|\delta x\| = \|\gamma h\| \rightarrow 0$ i ostatecznie /2.16/ można zapisać w postaci

$$f(x, \gamma h) = f(x + \gamma h) - f(x) = f'(x) \gamma h + \alpha(x, \gamma h) \quad /2.18/$$

oraz

$$\lim_{\|\gamma h\| \rightarrow 0} \frac{\|\alpha(x, \gamma h)\|}{\|\gamma h\|} = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{\|\alpha(x, \gamma h)\|}{\|\gamma h\|} = 0. \quad /2.19/$$

Def.2.4. Granicę /w sensie normy/

$$df(x, h) = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{f(x, \gamma h)}{\gamma} = \left. \frac{d}{d\gamma} f(x + \gamma h) \right|_{\gamma=0} \quad /2.20/$$

nazywamy różniczką Gateaux odwzorowania $f(x)$ w punkcie x i kierunku h . Jeżeli różniczka ta określa jednoznacznie liniowy operator $f': \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ taki, że

$$df(x, h) = f'(x)h, \quad /2.21/$$

to $f'(x)$ nazywamy pochodną Gateaux odwzorowania $f(x)$.

Należy w tym miejscu zauważyć, że definicje różniczek w sensie Frecheta i Gateaux nie są równoważne. Zachodzi między nimi następujący związek [70]:

Tw.2.2. Jeżeli $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ są przestrzeniami Banacha oraz odwzorowanie $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ jest określone w pewnym obszarze $\mathcal{D} \subset \mathcal{X}$ oraz jeżeli $f(\cdot)$ jest różniczkowalne w sensie Gateaux w $\mathcal{D}$ w sposób ciągły /pochodna Gateaux jest ciągła w $\mathcal{D}$ / , to istnieje pochodna Frecheta

w $\mathcal{D}$ i obie pochodne są sobie równe. Jeżeli natomiast w $\mathcal{D}$ istnieje pochodna Frecheta, to istnieje też pochodna Gateaux i pochodne te są sobie równe.

Można pokazać, że różniczka pierwszego rzędu funkcjonału $\mathcal{F}$ zastępujemy tu przez $C(a, b)$ i $\mathcal{Y}$ przez R jest jednorodnym funkcjonałem rzędu pierwszego [117] względem przyrostu argumentu δx i ma postać

$$\mathcal{F}(x(t), \delta x) = \int_{R(a, b)} \mathcal{F}'(x(t), \xi) \delta x(\xi) d\xi, \quad /2.22/$$

co przy podstawieniu $\delta x(t) = \varphi(t)$ daje

$$\mathcal{F}(x(t), \varphi(t)) = \int_{R(a, b)} \mathcal{F}'(x(t), \xi) \varphi(\xi) d\xi. \quad /2.23/$$

Należy zwrócić uwagę, że pochodna $\mathcal{F}'(\cdot)$ pod całką w dwóch ostatnich wyrażeniach jest zwykłą pochodną funkcji zmiennej rzeczywistej /lub zespolonej/ - naprzód ustalamy $t = \xi$ i pochodną obliczamy po $x(\xi)$ w ustalonym punkcie ξ .

Potrzebne nam będą jeszcze definicje różniczek wyższych rzędów.

Def.2.5. Mówimy, że odwzorowanie $f(x)$ jest n razy różniczkowalne w sensie Frecheta jeżeli $\delta f(x) = f(x + \delta x) - f(x)$ można przedstawić w postaci

$$\delta f(x) = \mathcal{F}'(x) \delta x + \dots + \frac{1}{n!} \mathcal{F}^{(n)}(x) (\delta x)^n + \alpha(x, \delta x), \quad /2.24/$$

przy czym,

$$\lim_{\|\delta x\| \rightarrow 0} \frac{\|\alpha(x, \delta x)\|}{\|\delta x\|^n} = 0. \quad /2.25/$$

Operator $f^{(n)}(x)$, jeżeli istnieje, nazywamy n-tą pochodną Frecheta odwzorowania $f(x)$.

Podobnie jak poprzednio:

Def.2.6. Granicę /w sensie normy/

$$d^n f(x, h) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\delta^n f(x)}{y^n} = \left. \frac{d^n}{dy^n} f(x + yh) \right|_{y=0} \quad /2.26/$$

nazywamy różniczką Gateaux n-tego rzędu odwzorowania $f(x)$ w punkcie x i kierunku h .

Jeżeli istnieje operator n-tego rzędu $f^{(n)}(x)$ taki, że

$$d^n f(x, h) = f^{(n)}(x) h^n, \quad /2.27/$$

to nazywamy go n-tą pochodną Gateaux odwzorowania $f(x)$.

Analogicznie do tw.2.2. istnieje następująca zależność [70]:

Tw.2.3. Jeżeli $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ są przestrzeniami Banacha oraz $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ jest n-krotnie różniczkowalne w sposób ciągły w pewnym obszarze $\mathcal{D} \subset \mathcal{X}$ w sensie Gateaux , to $f(\cdot)$ jest również n-krotnie różniczkowalne w sensie Frecheta w $\mathcal{D}$. Jeżeli natomiast odwzorowanie $f(\cdot)$ jest n-krotnie różniczkowalne w sensie Frecheta w $\mathcal{D}$, to jest też n-krotnie różniczkowalne w sensie Gateaux w $\mathcal{D}$.

W przypadku funkcjonału $F: C\langle a, b \rangle \rightarrow R$, podobnie jak dla różniczek pierwszego rzędu , można napisać:

$$S^2_F(x(t), \varphi(t)) = \int_{R^2 \langle a, b \rangle} F^{(2)}(x(t), \xi_1, \xi_2) \varphi(\xi_1) \varphi(\xi_2) d\xi_{v_2},$$

⋮

/2.28/

$$S^n_F(x(t), \varphi(t)) = \int_{R^n \langle a, b \rangle} F^{(n)}(x(t), \xi_1, \dots, \xi_n) \varphi(\xi_1) \dots \varphi(\xi_n) d\xi_{v_n}.$$

Należy zauważyć, że jądra całkowe $F^{(i)}(x(t), \xi_1, \dots, \xi_i)$, $i=2, \dots, n$, są funkcjami symetrycznymi argumentów $\xi_1, \dots, \xi_n$ ponieważ kolejność ich zależy od kolejności obliczania pochodnych $F^{(i)}(\cdot)$ /naprzód różniczkujemy $F(x)$ w punkcie $t=\xi_1$, potem w $t=\xi_2$ itd./ w punktach $x(\xi_1), \dots, x(\xi_i)$, ale wynik obliczania pochodnych cząstkowych nie zależy od kolejności różniczkowania /ściślej należy założyć dodatkowo ciągłość $F^{(i)}(\cdot)$ względem $x(\xi_1), \dots, x(\xi_i)$ /.

Jeżeli $f(x)$ ma n pochodnych Gateaux w punkcie x , to zachodzi następująca równość analogiczna do /2.24/

$$f(x+gh) = f(x) + g f'(x)h + \dots + \frac{g^n}{n!} f^{(n)}(x)h^n + \alpha(x, gh), \quad /2.29/$$

przy czym,

$$\lim_{g \rightarrow 0} \frac{\|\alpha(x, gh)\|}{g^n} = 0 \quad /2.30/$$

2.4. Szeregi w przestrzeniach Banacha. [51, 70]

Można zauważyć, że wzory /2.24/ i /2.29/ są uogólnieniem

wzoru Taylora na przypadek odwzorowań w przestrzeniach Banacha. Istnieje pytanie, czy przy przejściu granicznym w tych wzorach, $n \rightarrow \infty$, szeregi te są zbieżne. Odpowiedź na to pytanie daje ogólna teoria analizy w przestrzeniach Banacha. Tu przytoczymy tylko dwa twierdzenia pomijając ich dowody [39,51].

Niech, w dalszym ciągu, $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ oznaczają zespolone przestrzenie Banacha.

Def.2.7. Niech $\mathcal{D} \subset \mathcal{X}$ będzie obszarem. Odwzorowanie $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{Y}$ nazywamy analitycznym w $\mathcal{D}$ jeżeli:

a/ istnieje różniczka Gateaux pierwszego rzędu

$$\left. \frac{d}{dy} f(x+yh) \right|_{y=0} = df(x,h) \quad /2.31/$$

dla dowolnych $x \in \mathcal{D}$ i $h \in \mathcal{X}$,

b/ operator $f(\cdot)$ jest lokalnie ograniczony, tzn. dla każdego $p \in \mathcal{D}$ istnieje niezerowa kula $\mathcal{K} = \{x; x \in \mathcal{D}, \|x-p\| < r > 0\}$ i skończona liczba $M(p) > 0$ taka, że

$$\|f(x)\| < M(p) \quad \text{dla } x \in \mathcal{K}. \quad /2.32/$$

Tw.2.4. Jeżeli odwzorowanie $f(\cdot)$ jest analityczne w pewnym obszarze $\mathcal{D} \subset \mathcal{X}$, wtedy $d^k f(x,h)$ istnieje dla dowolnego k naturalnego i $x \in \mathcal{D}$. Ponadto $d^k f(x,h)$ jest lokalnie ograniczonym operatorem rzędu k względem h .

Tw.2.5. Jeżeli spełnione są założenia twierdzenia poprzedniego, wtedy dla dowolnego $x \in \mathcal{D}$ istnieje liczba $r > 0$ taka, że rozwinięcie Taylora

$$f(x+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} d^n f(x,h) \quad /2.33/$$

jest zbieżne jednostajnie dla $\|h\| < r$. Poza tym odwzorowanie $f(\cdot)$ jest różniczkowalne w sensie Frecheta w $\mathcal{D}$.

Należy tu zwrócić uwagę, że gdy $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ są rzeczywistymi przestrzeniami Banacha, wtedy zależność /2.33/ staje się niejako tożsamością, ponieważ definicja analityczności w tych przestrzeniach zakłada istnienie pochodnej dowolnego stopnia. Wtedy wzór /2.33/ definiuje analityczność odwzorowania $f(\cdot)$ w obszarze $\mathcal{D}$.

Najważniejszym przytoczonym tu faktem jest pokazanie zbieżności /2.33/ w pewnym niezerowym otoczeniu punktu x o promieniu r . Zbieżność ta mówi, że każde analityczne odwzorowanie $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ określone w pewnym obszarze $\mathcal{D}$ można aproksymować sumą funkcjonałów jednorodnych względem h

$$f(x+h) = \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} d^n f(x, h) + \alpha(x, h) \quad /2.34/$$

przy czym reszta $\alpha(x, h)$ jest rzędu wyższego niż N względem h , tzn. istnieje $\mu > 0$ takie, że

$$\|\alpha(x, h)\| \leq \frac{\mu}{(N+1)!} \|h\|^{N+1} \quad /2.35/$$

dla $\|h\| < r > 0$.

Stosując /2.33/ do funkcjonału analitycznego $F: C\langle a, b \rangle \rightarrow R$ zgodnie z /2.28/ otrzymamy

$$F(x(t) + \varphi(t)) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{R^n \langle a, b \rangle} F^{(n)}(x(t), \xi_1, \dots, \xi_n) \varphi(\xi_1) \dots \varphi(\xi_n) d\xi_{v_n} \quad /2.36/$$

Szereg ten będzie zbieżny dla $x(t)$ z pewnego obszaru $\mathcal{D} \subset C\langle a, b \rangle$ i dla $\varphi(t) \in \{\varphi(t); \varphi(t) + x(t) \in \mathcal{D}, \|\varphi(t)\| < r > 0\}$, gdzie r jest pewną liczbą większą od zera i zależną od $x(t)$ oraz $F(\cdot)$.

Stosując /2.34/ i /2.35/ do /2.36/ otrzymamy

$$F(x(t) + \varphi(t)) = F_0 + \sum_{n=1}^N \frac{1}{n!} \int_{R^n\langle a, b \rangle} F^{(n)}(x(t), \xi_1, \dots, \xi_n) \varphi(\xi_1) \cdot \varphi(\xi_n) d\xi_{v_n} + A(x(t), \varphi(t)), \quad /2.37/$$

gdzie

$$\|A(x(t), \varphi(t))\| \leq \frac{M}{(N+1)!} \|\varphi(t)\|^{N+1}; \quad M > 0 \quad /2.38/$$

dla $x(t) \in \mathcal{D} \subset C\langle a, b \rangle$ oraz $\|\varphi(t)\| < r > 0$.

Pokazaliśmy w ten sposób możliwość aproksymacji funkcjonału analitycznego $F: C\langle a, b \rangle \rightarrow R$ za pomocą wielomianu postaci /2.37/.

Powróćmy do twierdzenia 2.5. Jak już stwierdziliśmy, składniki szeregu /2.33/ są jednorodnymi odwzorowaniami, względem h , przestrzeni Banacha $\mathcal{X}$ w przestrzeń Banacha $\mathcal{Y}$ i są kolejnymi różniczkami Gateaux odwzorowania $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$. Istnieje pytanie, czy wniosek wynikający z tego twierdzenia w postaci wzoru /2.34/ jest jednoznaczną aproksymacją odwzorowania $f(\cdot)$ za pomocą sumy odwzorowań jednorodnych.

Założmy, że odwzorowanie $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ chcemy aproksymować przez sumę postaci

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{n=1}^N Q_n(x, h) + \beta(x, h) \quad /2.39/$$

w pewnym obszarze $\mathcal{D} \subset \mathcal{X}$, gdzie $Q_n: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ są jednorodnymi odwzorowaniami rzędu n względem h /suma ta nie musi być wielomianem [39] /

Zachodzi następujące twierdzenie:

Tw.2.6. 1/ Niech $Q_n: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ będzie jednorodnym odwzorowaniem rzędu n . Niech $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ ma ciągłą k -tą pochodną Gateaux dla wszystkich $\hat{x} = x+h \in \mathcal{K} = \{x+h; \|h\| < r > 0\}$ oraz niech istnieje dla każdego $\varepsilon > 0$ takie $\varphi(\varepsilon)$, że spełniony jest warunek

$$\|d^k f(x+h) - d^k f(x)\| < \varepsilon \|h\|^k \quad /2.40/$$

dla $\|h\| < \varphi(\varepsilon)$ i $0 < \varphi(\varepsilon) < r$ oraz

$$\left\| f(x+h) - f(x) - \sum_{n=1}^k Q_n(x,h) \right\| < \frac{\varepsilon}{N!} \|h\|^N \quad ; \quad \|h\| < \varphi(\varepsilon), \quad /2.41/$$

to

$$Q_n(x,h) = \frac{1}{n!} d^n f(x,h) \quad ; \quad i=1, \dots, k. \quad /2.42/$$

2/ Jeżeli, jak poprzednio, $Q_n: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ będzie jednorodnym odwzorowaniem rzędu n oraz $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ ma ciągłą $k+1$ pochodną Gateaux dla $\hat{x} = x+h \in \mathcal{K} = \{x+h; \|h\| < r > 0\}$ oraz istnieje $M > 0$ oraz $0 < \varphi < r$ takie, że

$$\|d^{k+1} f(x,h)\| < M \|h\|^{k+1} \quad /2.43/$$

dla $\|h\| < \varphi$, a ponadto dla tych samych h zachodzi

$$\left\| f(x+h) - f(x) - \sum_{n=1}^k Q_n(x,h) \right\| < \frac{M}{(k+1)!} \|h\|^{k+1}, \quad /2.44/$$

to równość /2.42/ też jest spełniona.

Tak więc rozwinięcie /2.33/ jest, przy założeniach powyższego twierdzenia, jednoznaczne.

Powróćmy jeszcze raz do przykładu funkcjonału $F: C\langle a, b \rangle \rightarrow R$, ale zależnego od parametru t , tzn. $y(t) = F(x(t), t)$, który można traktować jako odwzorowanie $F: C\langle a, b \rangle \rightarrow C\langle a, b \rangle$ /przy założeniu, że zachowuje ono ciągłość funkcji/. Załóżmy ponadto, że $F(\cdot)$ jest różniczkowalny n razy w sensie Frecheta. Wtedy /por./2.28// można napisać

$$\delta^n F(x(t), t, \varphi(t)) = \int_{R^n\langle a, b \rangle} k_n(t, \tau_1, \dots, \tau_n, x(t)) \varphi(\tau_1) \dots \varphi(\tau_n) d\tau_{v_n}, \quad /2.45/$$

gdzie $k_n(t, \dots, x(t))$ jest symetryczną funkcją $\tau_1, \dots, \tau_n$. Porównując ten wzór z /2.29/ można zapisać

$$F(x(t) + \delta \varphi(t), t) = F_0(x(t), t) + \sum_{n=1}^N \frac{\delta^n}{n!} \int_{R^n\langle a, b \rangle} k_n(t, \tau_1, \dots, \tau_n, x(t)) \times$$

$$\times \varphi(\tau_1) \dots \varphi(\tau_n) d\tau_{v_n} + \alpha(x(t), \delta \varphi(t)). \quad /2.46/$$

Przy tym, jeżeli $k_n(t, \tau_1, \dots, \tau_n, x(t)) = 0$ dla $\tau_i > t$, to wzór ten nazywamy wzorem Volterry. Ponadto, jeżeli $F(\cdot)$ spełnia założenia tw.2.5, to szereg Volterry postaci

$$F(x(t) + \delta \varphi(t), t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\delta^n}{n!} \int_{R^n\langle a, b \rangle} k_n(t, \tau_1, \dots, \tau_n, x(t)) \varphi(\tau_1) \dots \varphi(\tau_n) d\tau_{v_n} \quad /2.47/$$

będzie zbieżny jednostajnie w pewnej kuli $\mathcal{K} = \{x(t) + y\varphi(t); \|y\varphi(t)\| < r > 0\} \subset C\langle a, b \rangle$, przy czym o promieniu r wiadomo tylko, że jest większy od zera. W pewnych przypadkach można go jednak obliczyć.

Założmy mianowicie, że znane są jądra $k_n(\cdot)$ oraz, że określono w przestrzeni $C\langle a, b \rangle$ normę $\|\varphi(t)\| = \sup_t |\varphi(t)|$. Wtedy

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{R^n\langle a, b \rangle} k_n(t, \tau_1, \dots, \tau_n, x(t)) \varphi(\tau_1) \dots \varphi(\tau_n) d\tau_{v_n} \right\| &\leq \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} a_n \|\varphi(t)\|^n, \end{aligned} \quad /2.48/$$

gdzie

$$a_n = \sup_t \frac{1}{n!} \int_{R^n\langle a, b \rangle} |k_n(t, \tau_1, \dots, \tau_n, x(t))| d\tau_{v_n} \quad /2.49/$$

i promień zbieżności można określić z kryteriów Cauchy'ego lub d'Alemberta

$$\|\varphi(t)\| < \left(\limsup \sqrt[n]{a_n} \right)^{-1} = r \quad /2.50a/$$

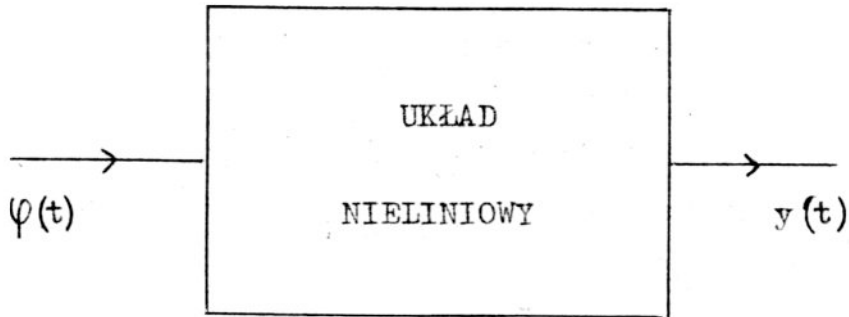
lub

$$\|\varphi(t)\| < \left(\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} \right)^{-1} = r; \quad a_n > 0. \quad /2.50b/$$

2.5. Uogólniony szereg Volterry.

Przedstawione wcześniej wyrażenia na rozwinięcie funkcjonału

w szereg /2.47/ jest określone, jak napisano, dla $\mathcal{X} = C\langle a, b \rangle$ oraz $\mathcal{Y} = C\langle a, b \rangle$. Tego rodzaju odwzorowanie może być podstawą do analizy układów /systemów/ o jednym wejściu i jednym wyjściu /rys.2.1/.



Rys.2.1. Układ jednowejściowy o jednym wyjściu opisany wzorem /2.51/.

Gdy w /2.46/ i /2.47/ przyjmimy $x(t) = \text{const}$ oraz $\ell=1$, wtedy zależność $k_n(\cdot)$ od $x(\cdot)$ może zawierać się w samym symbolu $k_n(\cdot)$ i otrzymamy

$$y(t) = F(\varphi(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{R^n\langle a, b \rangle} k_n(t, \tau_1, \dots, \tau_n) \varphi(\tau_1) \dots \varphi(\tau_n) d\tau_{v_n}. \quad /2.51/$$

Zachodzi jednak potrzeba analizowania układów o wielu wejściach i wielu wyjściach /rys.2.2/. Wtedy należy przyjąć $\mathcal{X} = (C\langle a, b \rangle, R^1)$ oraz $\mathcal{Y} = (C\langle a, b \rangle, R^1)$. Elementy zbioru $\mathcal{X}$ będą miały postać $\mathcal{X} \ni \bar{x}(t) = [x_1(t), \dots, x_l(t)]^T$ /T oznacza transpozycję/ i podobnie $\mathcal{Y} \ni \bar{y}(t) = [y_1(t), \dots, y_l(t)]^T$. Normę w takich przestrzeniach można zdefiniować na wiele sposobów. My przyjmujemy

$$\|\bar{x}(t)\| = \max_{\xi} \left(\sup_t |x_{\xi}(t)| \right). \quad /2.52/$$

Z tak określoną normą powyższe przestrzenie będą przestrzeniami Banacha. Oczywiście pochodne Frecheta i Gateaux są określone dla tych przestrzeni, jednak ogólne wzory /2.24/ i /2.26/ oraz z nich wyprowadzone należy uściślić.

Przyjmijmy na początek definicję [70]:

Def.2.8. Różniczką cząstkową Frecheta dla odwzorowania $f: \mathcal{R}^i \rightarrow \mathcal{R} / \mathcal{R}$ jest dowolną przestrzenią Banacha/ względem ξ -tego argumentu nazywamy odwzorowanie rzędu pierwszego względem h_ξ , $\delta_\xi f(\bar{x}, h_\xi)$, gdy

$$f([x_1, \dots, x_\xi + h_\xi, \dots, x_i]^T) - f(\bar{x}) = \delta_\xi f(\bar{x}, h_\xi) + \alpha_\xi(\bar{x}, h_\xi), \quad /2.53/$$

gdzie

$$\lim_{\|h_\xi\| \rightarrow 0} \frac{\|\alpha_\xi(\bar{x}, h_\xi)\|}{\|h_\xi\|} = 0. \quad /2.54/$$

Wtedy, przy założeniu, że $\delta_\xi f(\bar{x}, h_\xi)$, $\xi=1, \dots, i$ są ciągłe w pewnym otoczeniu punktu $\bar{x} \in \mathcal{R}^i$, suma

$$\delta f(\bar{x}, \bar{h}) = \sum_{\xi=1}^i \delta_\xi f(\bar{x}, h_\xi) \quad /2.55/$$

będzie różniczką Frecheta według definicji 2.3. Istotnie

$$\begin{aligned} & \|f(\bar{x} + \bar{h}) - f(\bar{x}) - \sum_{\xi=1}^i \delta_\xi f(\bar{x}, h_\xi)\| = \\ & = \|f([x_1 + h_1, \dots, x_i + h_i]^T) - f([x_1, x_2 + h_2, \dots, x_i + h_i]^T) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + f([x_1, x_2+h_2, \dots, x_i+h_i]^T) - \dots - f([x_1, \dots, x_{\xi-1}, x_{\xi}+h_{\xi}, \dots, x_i+h_i]^T) + \\
 & + f([x_1, \dots, x_{\xi-1}, x_{\xi}+h_{\xi}, \dots, x_i+h_i]^T) - \dots - f(\bar{x}) - \sum_{\xi=1}^i \delta_{\xi} f(\bar{x}, h_{\xi}) \parallel \leq \\
 & \leq \sum_{\xi=1}^i \parallel \alpha_{\xi}(\bar{x} + [0, \dots, h_{\xi}, \dots, h_i]^T, h_{\xi}) \parallel \leq \quad /2.56/ \\
 & \leq i o(\max_{\xi} \|h_{\xi}\|) \leq i o(\|h\|).
 \end{aligned}$$

Analogicznie zdefiniować można różniczkę w sensie Gateaux.

Def.2.9. Różniczką cząstkową w sensie Gateaux będzie /przyjmujemy przestrzeń jak w def.2.8./

$$d_{\xi} f(\bar{x}, h_{\xi}) = \left. \frac{\partial}{\partial y^{\xi}} f(\bar{x} + [0, \dots, y^{\xi} h_{\xi}, \dots, 0]^T) \right|_{y^{\xi}=0} \quad /2.57/$$

Analogicznie do /2.55/ można napisać

$$df(\bar{x}, \bar{h}) = \sum_{\xi=1}^i d_{\xi} f(\bar{x}, h_{\xi}) \quad /2.58/$$

Wykorzystując /2.58/ przejdziemy od razu do zapisu wzoru /2.33/ dla $\mathcal{X} = \mathcal{R}^i$ i $\mathcal{Y} = \mathcal{R}$. Będzie on wyglądał następująco:

$$f(\bar{x} + y \bar{h}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\xi=1}^i d_{\xi}^{(n)} f(\bar{x}, y \bar{h}) = \quad /2.59/$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{\xi=1}^i f_{\xi}^{(1)}(\bar{x}, y_{\xi}^{h_1}) \right)^{(n)}, \quad /2.59/$$

przy czym zapis ten jest zapisem symbolicznym. Np. dla $i=2$ należy go rozumieć następująco

$$\begin{aligned} & \left(f_1^{(1)}(\bar{x}, y_{h_1}^{h_1}) + f_1^{(1)}(x, y_{h_2}^{h_2}) \right)^{(2)} = \\ & = f_{1,1}^{(2)}(x, y_{h_1}^{h_1}, y_{h_1}^{h_1}) + 2f_{1,2}^{(2)}(x, y_{h_1}^{h_1}, y_{h_2}^{h_2}) + f_{2,2}^{(2)}(x, y_{h_2}^{h_2}, y_{h_2}^{h_2}). \end{aligned} \quad /2.60/$$

Stosując dalej analogie do przejścia od /2.33/ do /2.36/ otrzymamy dla $F: (C\langle a, b \rangle, R^i) \rightarrow R$

$$\begin{aligned} & F(x(t) + \varphi(t)) = k_0(x(t)) + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{k_1 \geq 0 \\ k_1 + \dots + k_i = n}} \frac{1}{k_1! \dots k_i!} \int_{R^n \langle a, b \rangle} k_{k_1, \dots, k_i}^{(n)}(x(t), \xi_{1,1}, \dots, \xi_{1,k_1}; \dots; \\ & \dots; \xi_{i,1}, \dots, \xi_{i,k_i}) \varphi_1(\xi_{1,1}) \dots \varphi_1(\xi_{1,k_1}) \dots \varphi_i(\xi_{i,1}) \dots \varphi_i(\xi_{i,k_i}) d\xi_{V_n}, \end{aligned} \quad /2.61/$$

gdzie całka w powyższym wzorze jest różniczką Gateaux n -tego stopnia funkcjonału $F(\cdot)$, przy czym jest to różniczka k_1 -ego stopnia po pierwszej zmiennej, k_2 -ego stopnia po drugiej zmiennej i k_i -tego stopnia po i -tej zmiennej.

Jeżeli jeszcze założymy, że $F(\cdot)$ zależy od parametru $t \in \langle a, b \rangle$, to wszystkie funkcje $k_{\cdot}^{(\cdot)}(\cdot)$ również zależne będą od tego parametru i analogicznie do /2.47/ otrzymamy

$$F(\bar{x}(t) + \bar{\varphi}(t), t) = k_0(t, \bar{x}(t)) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{k_p \geq 0 \\ k_1 + \dots + k_i = n}} \int_{R^n \langle a, b \rangle} \frac{1}{k_1! \dots k_i!} \times \quad /2.62/$$

$$\times k_{k_1, \dots, k_i}^{(n)}(t, \tau_{1,1}, \dots; \dots; \dots, \tau_{i,k_i}, x(t)) \varphi_1(\tau_{1,1}) \dots \varphi_i(\tau_{i,k_i}) d\tau_{v_n},$$

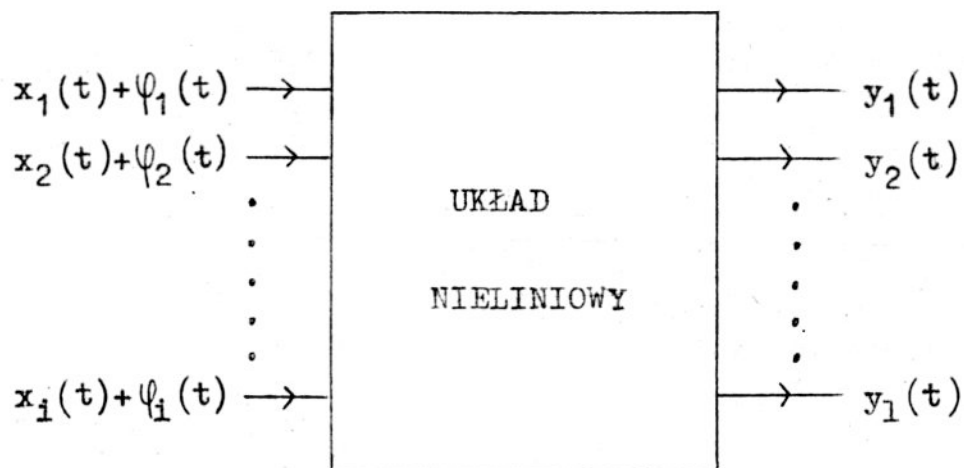
przez co dostaniemy, przy założeniu jednostajnej zbieżności /2.62/, odwzorowanie $F: (C \langle a, b \rangle, R^1) \rightarrow C \langle a, b \rangle$. Dalej traktując /2.62/ nie jako równanie lecz układ 1 równań

$$y^\alpha(t) = F^\alpha(\bar{x}(t) + \bar{\varphi}(t), t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{k_p \geq 0 \\ k_1 + \dots + k_i = n}} \frac{1}{k_1! \dots k_i!} \times \quad /2.63/$$

$$\times \int_{R^n \langle a, b \rangle} k_{k_1, \dots, k_i}^{(n), \alpha}(t, \tau_{1,1}, \dots; \dots; \dots, \tau_{i,k_i}, x(t)) \varphi_1(\tau_{1,1}) \dots \varphi_i(\tau_{i,k_i}) d\tau_{v_n} \\ \alpha = 1, \dots, l$$

otrzymamy funkcjonał $\bar{F} = [F^1(\cdot), \dots, F^l(\cdot)]^T$ będący odwzorowaniem $\bar{F}: (C \langle a, b \rangle, R^1) \rightarrow (C \langle a, b \rangle, R^l)$, którego można użyć do opisu układu /systemu/ wielootworowego jak na rys.2.2.

Jeżeli w opisanym wyrażeniu założymy, że $k_{\cdot}^{(\cdot)}(\cdot) = 0$ przy $\tau_{\xi, \nu} > t$,



Rys.2.2. Układ wielootworowy opisany równaniem /2.63/.

to wzór /2.63/ możemy nazwać uogólnionym szeregiem Volterry. Zauważymy przy tym, że $k^{(\cdot)}(\cdot)$ jest funkcją częściowo symetryczną. Jest ona symetryczna względem argumentów τ_{ξ, k_ν} nie różniących się pierwszym indeksem, co koresponduje z uwagami o wzorze /2.28/ oraz pozwala nazwać powyższy funkcjonal regularnym. Nie jest natomiast symetryczną funkcją /na ogół/ argumentów o różnych pierwszych indeksach, co wiąże się z tym, że odwzorowanie nieliniowe $F: (C\langle a, b \rangle, R^1) \rightarrow (C\langle a, b \rangle, R^1)$ nie musi być symetryczne względem składowych wektora $\bar{x}(t) = [x_1(t), \dots, x_i(t)]^T$.

Z wyrażenia /2.63/ zauważyć można, że składnik opisany indeksami $k_1, \dots, k_i$ przy warunku $k_1 + \dots + k_i = n$, jest jednomianem rzędu n względem wektora $\bar{\psi}(t)$ i jest rzędu k_ξ względem składowej $\varphi_\xi(t)$ tego wektora.

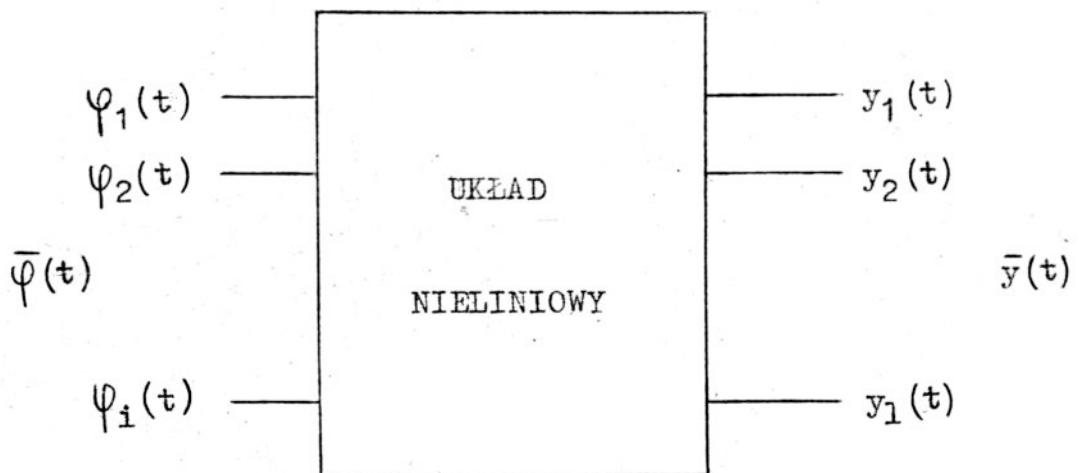
W dalszych rozważaniach zakładając będziemy, że $x(t)$ w /2.63/ jest równe tożsamościowo zeru, co odpowiada rozwinięciu funkcjo-

nału wokół punktu zerowego oraz, że $\bar{F}(\bar{\psi}(t), t) = 0$ dla $\bar{\psi}(t) = 0$ /czyli $\bar{k}_0^{(0)}(\cdot) = 0$ /, co odpowiada założeniu, iż system opisany wzorem /2.63/ będziemy traktowali jako nieautonomiczny system dynamiczny. W sumie rozważać będziemy system /układ/ jak na rys.2.3. opisany zależnością

$$\bar{y}(t) = \bar{F}(\bar{\psi}(t), t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{k_i \geq 0 \\ k_1 + \dots + k_i = n}} \frac{1}{k_1! \dots k_i!} \times$$

/2.64/

$$\times \int_{R^n \langle a, b \rangle} k_{k_1, \dots, k_i}^{(n)}(t, \tau_{1,1}, \dots, \tau_{i,k_i}) \varphi_1(\tau_{1,1}) \dots \varphi_i(\tau_{i,k_i}) d\tau_{v_n}$$



Rys.2.3. Dynamiczny układ wielootworowy opisany równaniem /2.64/.

Wnioski wynikające z powyższego rozdziału możemy sformułować następująco:

- rozważania teoretyczne przeprowadzone w rozdziałach 2.1 do 2.4 dotyczące opisu układów nieliniowych przez funkcjonały ciągłe oraz aparat matematyczny podany na początku rozdziału 2.5 pozwoliły na uogólnienie szeregu Volterry do postaci /2.61/ - /2.64/ dotychczas w literaturze niespotykanej,
- wyprowadzone zależności /2.61/ - /2.64/ mogą być użyte do opisu wielootworowych, nieliniowych układów elektronicznych.

3. SZEREG VOLTERRY W OPISIE UKŁADU ELEKTRONICZNEGO.

3.1. Obliczanie jąder Volterry w dziedzinie czasu.

W poprzednim rozdziale stwierdziliśmy, że podany tam wzór /2.64/ może opisywać nieliniowy układ elektroniczny. Jednak by go wykorzystać musimy umieć znajdować poszczególne funkcje $k_{..}^{(i)}(\cdot)$ /jądra Volterry/ dla konkretnych układów elektronicznych.

Założmy, że układ jak na rys.3.1 można opisać równaniem

$$\underline{L}' \bar{y}'(t) + \bar{g}(\bar{y}'(t)) = \bar{\varphi}'(t); \quad \bar{y}(a) = \bar{0}, \quad /3.1/$$

gdzie $\bar{y}'(t) = [y_1(t), \dots, y_l(t)]^T \in (C(a, b), R^1)$,

$\bar{\varphi}'(t) = [\varphi_1(t), \dots, \varphi_i(t)]^T \in (C(a, b), R^1)$,

$\underline{L}'$ jest operatorem różniczkowo-całkowym, liniowym w postaci macierzy,

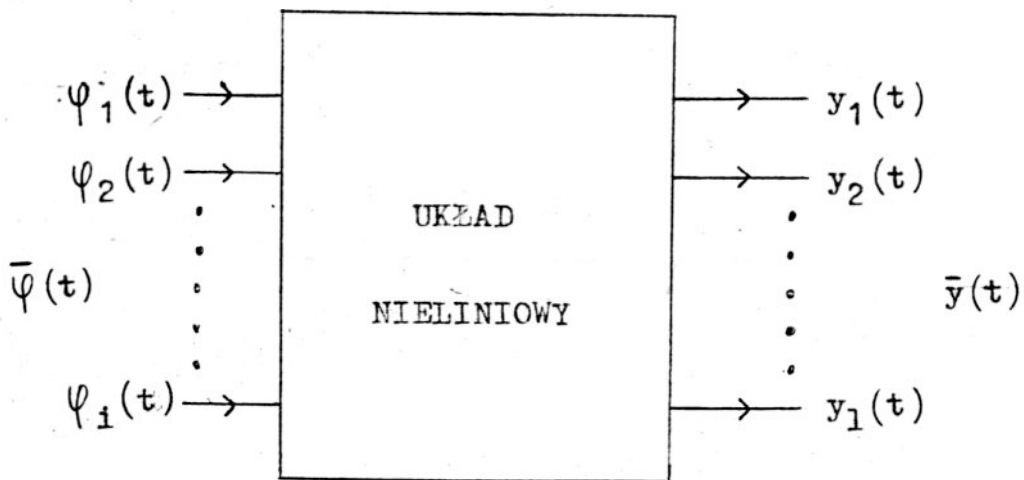
$\bar{g}(\bar{y}'(t))$ jest funkcją nieliniową spełniającą warunek

$$\lim_{\|\bar{y}'\| \rightarrow 0} \frac{\|\bar{g}_\alpha(\bar{y}'(t))\|}{\|\bar{y}'(t)\|} = 0, \quad /3.2/$$

$\alpha = 1, \dots, i,$

tzn. nie zawiera części liniowej, którą można zawsze włączyć do $\underline{L}'$.

Oczywiście równanie to nie jest najogólniejszym przypadkiem opisu układu elektronicznego. Nieco ogólniej równanie to



Rys.3.1. Układ opisany równaniem /3.1/.

może wyglądać następująco

/3.3/

$$\underline{\hat{L}} \hat{\bar{y}}(t) + \hat{g}(\hat{\bar{y}}(t), \hat{\bar{y}}^{(1)}(t), \dots, \hat{\bar{y}}^{(m)}(t)) = \hat{\bar{\varphi}}(t); \quad \hat{\bar{y}}^{(\bar{z})}(a) = \bar{0},$$

$\bar{z} = 1, \dots, m,$

gdzie $\hat{\bar{y}}^{(i)}(t)$ jest i-tą pochodną po czasie wektora $\hat{\bar{y}}(t)$.

Przyjmując jednak $\bar{y}'(t) = [\hat{\bar{y}}(t), \hat{\bar{y}}^{(1)}(t), \dots, \hat{\bar{y}}^{(m)}(t)]^T$, $\hat{\bar{\varphi}}(t) = [\bar{\varphi}(t), 0, 0, \dots, 0]^T$ oraz

$$\underline{\hat{L}}' = \begin{bmatrix} \underline{\hat{L}} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 \left\{ \frac{d}{dt} & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \right. \\ 1 \left\{ \frac{d}{dt} & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \right. \\ \vdots & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ 1 \left\{ \frac{d}{dt} & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \right\} \end{bmatrix}$$

/3.4/

otrzymamy /3.1/ przy nowych $l' = (m+1)l$ i $i' = (m+1)i$. Podobnie można postąpić w przypadku, gdy $\hat{g}(\cdot)$ zależałoby od całek postaci $\int \hat{y}(t) dt$.

Łatwiej nam będzie analizować powyższe równanie, gdy wektory $\bar{y}(t)$ i $\bar{\varphi}(t)$ będą tych samych wymiarów, a $\underline{L}'$ będzie macierzą kwadratową. W tym celu utworzymy sumę prostą przestrzeni $(C\langle a, b \rangle, R^{l'}) \oplus (C\langle a, b \rangle, R^{i'})$ i przyjmiemy $i' + l' = n$. Dla takiej przestrzeni równanie /3.1/ zapiszemy w postaci

$$\underline{L}\bar{y}(t) + \bar{g}(\bar{y}(t)) = \bar{\varphi}(t); \quad \bar{y}(a) = \bar{0} \quad /3.5/$$

w którym poszczególne symbole nie wymagają już objaśnień.

Założmy, że odpowiedź $\bar{y}(t)$ układu opisanego równaniem /3.5/ będzie funkcjonalem $\bar{y}(t) = \bar{F}(\bar{\varphi}(t))$ mającym wszystkie pochodne cząstkowe Gateaux. Wprowadźmy funkcje

$$\bar{z}(t, \bar{y}) = \bar{F}(\bar{y}\bar{\varphi}(t)); \quad \bar{y}\bar{\varphi}(t) = [\bar{y}_1\varphi_1, \dots, \bar{y}_n\varphi_n]^T \quad /3.6a/$$

$$\bar{z}_{k_1, \dots, k_n}^{(k_1 + \dots + k_n)}(t, \bar{y}) = \frac{\partial^{k_1 + \dots + k_n}}{\partial \bar{y}_1^{k_1} \dots \partial \bar{y}_n^{k_n}} \bar{F}(\bar{y}\bar{\varphi}(t)) \frac{1}{k_1! \dots k_n!} \quad /3.6b/$$

i poszukajmy rozwiązania /3.5/ w postaci /3.6/

$$\underline{L}\bar{z} + \bar{g}(\bar{z}) = \bar{y}\bar{\varphi}(t); \quad \bar{z}(a, \bar{y}) = \bar{0} \quad /3.7/$$

Wprowadźmy jeszcze następujące oznaczenie

$$\begin{aligned} [a_1, \dots, a_n]^T \otimes [b_1, \dots, b_n]^T &= \\ &= [a_1b_1, \dots, a_1b_n, a_2b_1, \dots, a_2b_n, \dots, a_nb_1, \dots, a_nb_n]^T \end{aligned} \quad /3.8/$$

oraz operator różniczkowy działający na $\bar{g}(\cdot)$

$$\begin{aligned}
 D^{(1)}(\bar{g}) &= \frac{1}{1!} \left\{ \left(\left[\frac{\partial}{\partial \bar{y}} \right]^{(1)} \right) \bar{g}(\bar{y})^T \right\}_{\bar{y}=\bar{0}}^T = \\
 &= \frac{1}{1!} \left\{ \underbrace{\left(\left[\frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_n} \right]^T * \dots * \left[\frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_n} \right]^T \right)}_{i \text{ czynników}} \bar{g}^T(\bar{y}) \right\}_{\bar{y}=\bar{0}}^T = \\
 &= \frac{1}{1!} \left[\begin{array}{cccccccc} \frac{\partial^1 g_1}{\partial y_1^1} & \frac{\partial^1 g_1}{\partial y_1^{1-1} \partial y_2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial^1 g_1}{\partial y_n^1} \\ \frac{\partial^1 g_2}{\partial y_1^1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial^1 g_2}{\partial y_n^1} \\ \cdot & & & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & & & \cdot \\ \frac{\partial^1 g_n}{\partial y_1^1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial^1 g_n}{\partial y_n^1} \end{array} \right]_{\bar{y}=\bar{0}}, \quad /3.9/
 \end{aligned}$$

gdzie każda składowa powyższej macierzy jest pochodną cząstkową Gateaux $\bar{g}(\bar{y})$.

Obliczając kolejne pochodne cząstkowe Gateaux obu stron /3.7/, co odpowiada różniczkowaniu po kolejnych y_ξ , możemy zapisać

$$\begin{aligned}
 \underline{L} \bar{z}_{0, \dots, 1_\alpha, \dots, 0}^{(1)} &= \varphi_\alpha(t); \quad \bar{z}(a, \bar{y}) = \bar{0}, \quad /3.10/ \\
 \alpha &= 1, 2, \dots, n,
 \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{L}}\bar{z}_{0,..,1_{\alpha}.1_{\beta}.0}^{(2)} = 2\underline{D}^{(2)}(\bar{g})\left(\bar{z}_{0,..,1_{\alpha}..0}^{(1)} \# \bar{z}_{0,..,1_{\beta}..0}^{(1)}\right), \quad /3.11a/$$

$$\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n,$$

$$\alpha \neq \beta.$$

$$\underline{\underline{L}}\bar{z}_{0,..,2_{\alpha}.0}^{(2)} = \underline{D}^{(2)}(\bar{g})\left(\bar{z}_{0,..,1_{\alpha}..0}^{(1)} \# \bar{z}_{0,..,1_{\alpha}..0}^{(1)}\right), \quad /3.11b/$$

$$\alpha = 1, 2, \dots, n.$$

$$\underline{\underline{L}}\bar{z}_{0..1_{\alpha}.1_{\beta}.1_{\varepsilon}.0}^{(3)} = 3!\underline{D}^{(3)}(\bar{g})\left(\bar{z}_{0,..,1_{\alpha}..0}^{(1)} \# \bar{z}_{0,..,1_{\beta}..0}^{(1)} \# \bar{z}_{0,..,1_{\varepsilon}..0}^{(1)}\right) +$$

$$/3.12a/$$

$$+ 2G_t^{(3)}\left\{\underline{D}^{(2)}(\bar{g})\left(\bar{z}_{0,..,1_{\alpha}..0}^{(1)} \# \bar{z}_{0,..,1_{\beta}.1_{\varepsilon}..0}^{(2)}\right)\right\},$$

$$\alpha, \beta, \varepsilon = 1, 2, \dots, n,$$

$$\alpha < \beta < \varepsilon.$$

$$\underline{\underline{L}}\bar{z}_{0,..,2_{\alpha}.1_{\beta}.0}^{(3)} = 3\underline{D}^{(3)}(\bar{g})\left(\bar{z}_{0,..,1_{\alpha}..0}^{(1)} \# \bar{z}_{0,..,1_{\alpha}..0}^{(1)} \# \bar{z}_{0,..,1_{\beta}..0}^{(1)}\right) +$$

$$/3.12b/$$

$$+ 2G_t^{(3)}\left\{\underline{D}^{(2)}(\bar{g})\left(\bar{z}_{0,..,2_{\alpha}..0}^{(2)} \# \bar{z}_{0,..,1_{\beta}..0}^{(1)}\right)\right\},$$

$$\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n,$$

$$\alpha \neq \beta.$$

$$\underline{\underline{L}}\bar{z}_{0,..,3_{\alpha}.0}^{(3)} = \underline{D}^{(3)}(\bar{g})\left(\bar{z}_{0,..,1_{\alpha}..0}^{(1)} \# \bar{z}_{0,..,1_{\alpha}..0}^{(1)} \# \bar{z}_{0,..,1_{\alpha}..0}^{(1)}\right) +$$

$$/3.12c/$$

$$+ 2\underline{D}^{(2)}(\bar{g})\left(\bar{z}_{0,..,2_{\alpha}..0}^{(2)} \# \bar{z}_{0,..,1_{\alpha}..0}^{(1)}\right),$$

$$\alpha = 1, 2, \dots, n,$$

gdzie pominięto, dla uproszczenia, argumenty funkcji $\bar{z}_{\dots}^{(\cdot)}(t, \bar{0})$

oraz oznaczono

$$G_t^{(m)} \left\{ \underline{D}^{(a)}(\bar{g}) (\bar{z}_{\dots}^{(a)} * \bar{z}_{\dots}^{(b)} * \dots * \bar{z}_{\dots}^{(m-a-b)}) \right\} = \quad /3.13/$$

$$= \underline{D}^{(m)}(\bar{g}) \left\{ \text{suma wszystkich iloczynów funkcji postaci } \bar{z}_{\dots}^{(a)} * \bar{z}_{\dots}^{(b)} * \dots * \bar{z}_{\dots}^{(m-a-b)} \text{ takich, żeby rząd funkcji wypadkowej, względem każdej składowej wektora } \bar{\varphi}(t), \text{ był zgodny z rzędem funkcji } \bar{z}_{\dots}^{(a)}(\cdot) \text{ po lewej stronie równości} \right\}.$$

Można zauważyć, że

$$\begin{aligned} \bar{z}(t, \bar{1}) = \bar{F}(\bar{\varphi}(t)) &= \sum_{k_j \geq 0}^{\infty} \frac{1}{k_1! \dots k_n!} \frac{\partial^{k_1 + \dots + k_n}}{\partial \bar{y}_1^{k_1} \dots \partial \bar{y}_n^{k_n}} \bar{z}(t, \bar{y}) \Big|_{\bar{y}=0} = \\ &= \sum_{k_j \geq 0}^{\infty} \bar{z}_{k_1, \dots, k_n}^{(k_1 + \dots + k_n)}(t, \bar{0}) = \sum_{k_j \geq 0}^{\infty} \bar{y}_{k_1, \dots, k_n}^{(k_1 + \dots + k_n)}(t) = \bar{y}(t) \quad /3.14/ \end{aligned}$$

i uwzględniając, że rozwiązaniem /3.10/ jest całka splotu otrzymamy

$$\bar{y}_{0 \dots 1 \alpha \dots 0}^{(1)}(t) = \int_{R(a, b)} \underline{h}^{(1)}(\tau_{\alpha, 1}) [0 \dots \varphi_{\alpha}(t - \tau_{\alpha, 1}) \dots 0]^T d\tau, \quad /3.15/$$

$$\alpha = 1, 2, \dots, n,$$

gdzie $\underline{h}(\cdot)$ jest macierzą odpowiadającą operatorowi odwrotnemu do $\underline{L}$, tzn. $\underline{L}^{-1} \bar{\varphi}(t) = \int \underline{h}(t - \tau) \bar{\varphi}(\tau) d\tau$.

Z /3.11/ będziemy mieli

$$\begin{aligned} \bar{y}_{0 \dots 1_{\alpha} \dots 1_{\beta} \dots 0}^{(2)}(t) &= 2 \int_{R^3 \langle a, b \rangle} \underline{h}^{(1)}(t-\tau) \underline{D}^{(2)}(\bar{g}) \left\{ \underline{h}^{(1)}(\tau-\tau_{\alpha,1}) [0 \dots \psi_{\alpha}(\tau_{\alpha,1}) \dots 0]^T \right. \\ &\quad \left. \times \underline{h}^{(1)}(\tau-\tau_{\beta,1}) [0 \dots \psi_{\beta}(\tau_{\beta,1}) \dots 0]^T \right\} d\tau_{v_2} d\tau_1 \quad /3.16/ \\ &\quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, n, \\ &\quad \alpha \neq \beta. \end{aligned}$$

Podstawiając

$$\begin{aligned} 2 \int_{R \langle a, b \rangle} \underline{h}^{(1)}(t-\tau) \underline{D}^{(2)}(\bar{g}) \left\{ \underline{h}^{(1)}(\tau-\tau_{\alpha,1}) [0 \dots \psi_{\alpha}(\tau_{\alpha,1}) \dots 0]^T \right. \\ \left. \times \underline{h}^{(1)}(\tau-\tau_{\beta,1}) [0 \dots \psi_{\beta}(\tau_{\beta,1}) \dots 0]^T \right\} d\tau &= \quad /3.17/ \\ &= \bar{h}_{0 \dots 1_{\alpha} \dots 1_{\beta} \dots 0}^{(2)}(t-\tau_{\alpha,1}; t-\tau_{\beta,1}) \psi_{\alpha}(\tau_{\alpha,1}) \psi_{\beta}(\tau_{\beta,1}) \end{aligned}$$

otrzymamy

$$\begin{aligned} \bar{y}_{0 \dots 1_{\alpha} \dots 1_{\beta} \dots 0}^{(2)}(t) &= \int_{R^2 \langle a, b \rangle} \bar{h}_{0 \dots 1_{\alpha} \dots 1_{\beta} \dots 0}^{(2)}(t-\tau_{\alpha,1}; t-\tau_{\beta,1}) \times \\ &\quad \times \psi_{\alpha}(\tau_{\alpha,1}) \psi_{\beta}(\tau_{\beta,1}) d\tau_{v_2} \quad /3.18a/ \\ &\quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, n; \alpha \neq \beta \end{aligned}$$

oraz analogicznie

$$\begin{aligned} \bar{y}_{0 \dots 2_{\alpha} \dots 0}^{(2)}(t) &= \int_{R^2 \langle a, b \rangle} \bar{h}_{0 \dots 2_{\alpha} \dots 0}^{(2)}(t-\tau_{\alpha,1}, t-\tau_{\alpha,2}) \times \\ &\quad \times \psi_{\alpha}(\tau_{\alpha,1}) \psi_{\alpha}(\tau_{\alpha,2}) d\tau_{v_2} \quad ; \alpha = 1, \dots, n \quad /3.18b/ \end{aligned}$$

i dalej

$$\bar{y}_{0 \dots 1_{\alpha} \cdot 1_{\beta} \cdot 1_{\varepsilon} \cdot 0}^{(3)}(t) = \int_{R^3 \langle a, b \rangle} \bar{h}_{0 \cdot 1_{\alpha} \cdot 1_{\beta} \cdot 1_{\varepsilon} \cdot 0}^{(3)}(t - \tau_{\alpha, 1}; t - \tau_{\beta, 1}; t - \tau_{\varepsilon, 1}) \times \\ \times \psi_{\alpha}(\tau_{\alpha, 1}) \psi_{\beta}(\tau_{\beta, 1}) \psi_{\varepsilon}(\tau_{\varepsilon, 1}) d\tau_{v_3},$$

/3.19a/

$$\alpha, \beta, \varepsilon = 1, 2, \dots, n$$

$$\alpha \neq \beta \neq \varepsilon \neq \alpha$$

$$\bar{y}_{0 \dots 2_{\alpha} \cdot 1_{\beta} \cdot 0}^{(3)}(t) = \int_{R^3 \langle a, b \rangle} \bar{h}_{0 \dots 2_{\alpha} \cdot 1_{\beta} \cdot 0}^{(3)}(t - \tau_{\alpha, 1}, t - \tau_{\alpha, 2}; t - \tau_{\beta, 1}) \times$$

/3.19b/

$$\times \psi_{\alpha}(\tau_{\alpha, 1}) \psi_{\alpha}(\tau_{\alpha, 2}) \psi_{\beta}(\tau_{\beta, 1}) d\tau_{v_3},$$

$$\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n$$

$$\alpha \neq \beta$$

$$\bar{y}_{0 \dots 3_{\alpha} \cdot 0}^{(3)}(t) = \int_{R^3 \langle a, b \rangle} \bar{h}_{0 \dots 3_{\alpha} \cdot 0}^{(3)}(t - \tau_{\alpha, 1}, t - \tau_{\alpha, 2}, t - \tau_{\alpha, 3}) \times$$

/3.19c/

$$\times \psi_{\alpha}(\tau_{\alpha, 1}) \psi_{\alpha}(\tau_{\alpha, 2}) \psi_{\alpha}(\tau_{\alpha, 3}) d\tau_{v_3}$$

$$\alpha = 1, 2, \dots, n$$

itd...

Oczywiście

$$\bar{y}(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{k_j \geq 0 \\ k_1 + \dots + k_n = m}} \bar{y}_{k_1, \dots, k_n}^{(m)}(t) =$$

/3.20/

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{k_j \geq 0 \\ k_1 + \dots + k_n = m}} \int_{R^m \langle a, b \rangle} \bar{h}_{k_1, \dots, k_n}^{(m)}(t - \tau_{1,1}, \dots, t - \tau_{1,k_1}; \dots; \\ ; t - \tau_{n,1}, \dots, t - \tau_{n,k_n}) \times \quad -/3.20/ \\ \times \varphi_1(\tau_{1,1}) \dots \varphi_1(\tau_{1,k_1}) \dots \varphi_n(\tau_{n,1}) \dots \varphi_n(\tau_{n,k_n}) d\tau_{v_m},$$

co odpowiada wzorowi /2.63/ przy podstawieniu

$$\frac{1}{k_1! \dots k_n!} k_{k_1, \dots, k_n}^{(m)}(\cdot) = h_{k_1, \dots, k_n}^{(m)}(\cdot) \quad /3.21/$$

i założeniu szczególnej zależności $k_{\cdot}^{(\cdot)}(\cdot)$ od t , co wynika z tego, iż $\bar{g}(\cdot)$ nie zależy wprost od t [39] i układ jest układem stacjonarnym.

Można też zapisać, analogicznie do /2.46/,

$$\bar{y}(t) = \sum_{m=1}^N \sum_{\substack{k_j \geq 0 \\ k_1 + \dots + k_n = m}} \bar{y}_{k_1, \dots, k_n}^{(m)}(t) + \alpha(\bar{\varphi}(t)), \quad /3.22/$$

gdzie

$$\|\alpha(\bar{\varphi}(t))\| < A \frac{\|\bar{\varphi}(t)\|^{N+1}}{(N+1)!} \quad ; A > 0 \quad /3.23/$$

dla pewnych $\|\bar{\varphi}(t)\| < \rho > 0$.

Co do poprawności i jednoznaczności podanej powyżej postaci rozwiązania równania /3.5/ istnieją następujące twierdzenia dowodzone w [39] dla bardziej ogólnych równań różniczkowych.

Przyjęcie rozwiązania w postaci /3.23/, choć nieco innej niż w [39], nie zmienia dowodów tych twierdzeń. Podamy je tu bez uzasadnienia, gdyż wymagałoby to wprowadzenia wielu dodatkowych pojęć z analizy w przestrzeniach Banacha.

Tw.3.1. Jeżeli $\bar{g}(\cdot)$ z /3.5/ ma ciągłe pochodne cząstkowe Gateaux do N-tego rzędu włącznie oraz równanie /3.5/ ma rozwiązanie dla $t \in \langle a, b \rangle$ tożsamościowo równe zero dla $\bar{\varphi}(t) = 0$, to istnieje obszar $(C(\langle a, b \rangle, R^n) \supset \mathcal{D} \neq \{\emptyset\}$ taki, że funkcjonal $\bar{F}(\cdot)$ z /3.6/ jest w nim określony i ma ciągłe pochodne Gateaux do N-tego rzędu włącznie. Poza tym dla dowolnych $k_1, \dots, k_n$ oraz $\bar{\varphi}(t) \in \mathcal{D}$ różniczki $d_{k_1, \dots, k_n}^{(k_1 + \dots + k_n)} \bar{F}(\cdot) / k_1 + \dots + k_n = N/$ są dane przez /3.15/ do /3.19/, a jądra $\bar{h}^{(u)}(\cdot)$ można obliczyć tak, jak podaje przykład /3.17/ lub z /3.15/ do /3.19/ przez podstawienie $\bar{\varphi}(t) = \bar{\delta}(t) / \delta(t)$ - dystrybucja Diraca /. Obliczone jądra są ciągłe ze względu na wszystkie zmienne, z wyjątkiem punktów $t = \tau_{1,1}, \tau_{1,1} = \tau_{1,2}, \text{ itd. } \dots$

Tw.3.2. Niech $\bar{g}(\cdot)$ ma ciągłe pochodne cząstkowe Gateaux do N-tego rzędu włącznie i niech /3.5/ ma rozwiązanie tożsamościowo równe zero na odcinku $\langle a, b \rangle$ dla $\bar{\varphi}(t) = 0$, wtedy /w związku z /3.22// istnieją $\varrho > 0$ i $\mu > 0$ takie, że

$$\|\alpha(\bar{\varphi}(t))\| < \mu \|\bar{\varphi}(t)\|^N \quad /3.24/$$

dla $\|\bar{\varphi}(t)\| < \varrho$.

Tw.3.3. Niech $\bar{g}(\cdot)$, jak poprzednio, ma ciągłe pochodne Gateaux do N-tego rzędu włącznie i niech /3.5/ ma rozwiązanie tożsamościowo równe zero dla $t \in \langle a, b \rangle$ i $\bar{\varphi}(t) = 0$. Wtedy dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $\gamma(\varepsilon)$ takie, że

$$\|\alpha(\bar{\varphi}(t))\| < \varepsilon \|\bar{\varphi}(t)\|^N \quad /3.25/$$

dla $\|\bar{\varphi}(t)\| < \delta(\varepsilon)$.

Tw.3.4. Niech funkcja $\bar{g}(\cdot)$ będzie analityczna. Niech, jak poprzednio /3.5/ ma rozwiązanie tożsamościowo równe zero na odcinku $\langle a, b \rangle$ dla $\bar{\varphi}(t) = 0$. Wtedy różniczki $d_{k_1, \dots, k_n}^{(k_1 + \dots + k_n)} \bar{F}(\cdot)$ są zdefiniowane przez /3.15/ do /3.19/ dla dowolnych k_ν oraz szereg /3.22/ jest zbieżny jednostajnie przy $N \rightarrow \infty$ w pewnym niezerowym otoczeniu zera tzn. dla $\|\bar{\varphi}(t)\| < \varrho$, gdzie ϱ jest pewną liczbą większą od zera.

Zinterpretujemy wnioski wynikające z tych twierdzeń.

Wszystkie one zakładają istnienie rozwiązania równania /3.5/ tożsamościowo równego zero dla $\bar{\varphi}(t) = 0$. Dalej pierwsze trzy twierdzenia zakładają istnienie ciągłych pochodnych Gateaux funkcji $\bar{g}(\cdot)$ z /3.5/ do N-tego stopnia włącznie, co implikuje:

- istnienie rozwiązania równania /3.5/ w postaci funkcjonału $\bar{y}(t) = \bar{F}(\bar{\varphi}(t))$ posiadającego różniczki Gateaux do N-tego rzędu włącznie, danych przez odpowiednie wyrażenia,
- reszta we wzorze /3.22/ jest wtedy nieskończenie małą rzędu N w pewnym otoczeniu zera tzn. dla $\|\bar{\varphi}(t)\| < \varrho > 0$,
- resztę tą można uczynić dostatecznie małą dla $\|\bar{\varphi}(t)\|$ dostatecznie małą,
- jeżeli /tw.3.4/ $\bar{g}(\cdot)$ będzie analityczna, to funkcjonał $\bar{y}(t) = \bar{F}(\bar{\varphi}(t))$ będzie również analityczny, co pociąga za sobą jednostajną zbieżność szeregu /3.20/ w pewnym niezerowym otoczeniu zera, co z kolei daje możliwość uczynienia reszty we wzorze /3.22/ dostatecznie małą przy N dostatecznie dużym.

3.2. Obliczanie promienia zbieżności szeregu Volterry będącego rozwiązaniem równania różniczkowego /3.5/.

W poprzednim rozdziale wykazano, że szereg Volterry, będący rozwiązaniem równania różniczkowego /3.5/, jest zbieżny w pewnym niezerowym obszarze przestrzeni $(C\langle a, b \rangle, R^n)$. Twierdzenie tam przytoczone nie daje jednak możliwości określenia miary tego obszaru, co pozwoliłoby oszacować rząd wielkości normy sygnałów na wejściu układu elektronicznego opisanego równaniem /3.5/, dla których istnieje reprezentacja odpowiedzi tego układu w postaci zbieżnego szeregu Volterry.

Udowodnimy twierdzenie, które pozwoli w pewnych przypadkach określić promień bezwzględnej zbieżności szeregu Volterry. Twierdzenie to uogólnia rezultaty z [7].

Tw.3.5. Jeżeli część liniowa równania /3.5/ o postaci

$$\underline{L}\bar{y}(t) = \bar{\varphi}(t); \quad \bar{y}(a) = \bar{0} \quad /3.26/$$

ma rozwiązanie stabilne, to $y(t)$ będące rozwiązaniem równania /3.5/ można przedstawić w postaci szeregu /3.14/ zbieżnego bezwzględnie i jednostajnie dla

$$\|\bar{\varphi}(t)\| \leq \frac{\vartheta}{\|\underline{L}^{-1}\|} - \sum_{i=2}^P G_i \vartheta^i = X_R, \quad /3.27/$$

gdzie ϑ jest pierwiastkiem równania

$$\|\underline{L}^{-1}\| \sum_{i=2}^P i G_i \|\bar{y}\|^{i-1} = 1 \quad /3.28/$$

oraz

$$G_1 = \| \underline{D}^{(1)}(\bar{g}) \|.$$

Widać więc, że funkcję $\bar{g}(\cdot)$ z /3.5/ aproksymuje się wielomianem Taylora P-tego stopnia. W szczególności P może być nie skończone, pod warunkiem, że szeregi we wzorach /3.27/ i /3.28/ będą wtedy zbieżne.

Dowód:

Rozwiązania równania /3.5/ szukać będziemy w postaci /3.14/, którą zapiszemy w skrócie

$$\bar{y}(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \bar{y}^{(m)}(t) \quad /3.29/$$

i postępując podobnie jak w rozdziale poprzednim otrzymamy

$$\bar{y}^{(1)}(t) = \underline{L}^{-1} \bar{\varphi}(t) \quad /3.30/$$

skąd /normę dla $\bar{y}(t) \in (C(a, b), R^n)$ określamy jak w /2.52//

$$\| \bar{y}^{(1)}(t) \| \leq \| \underline{L}^{-1} \| \| \bar{\varphi}(t) \|. \quad /3.31/$$

$$\begin{aligned} \bar{y}^{(2)}(t) &= -\underline{L}^{-1} \underline{D}^{(2)}(\bar{g}) \left(\bar{y}^{(1)}(t) * \bar{y}^{(1)}(t) \right) = \\ &= -\underline{L}^{-1} \underline{D}^{(2)}(\bar{g}) \left((\underline{L}^{-1} \bar{\varphi}(t)) * (\underline{L}^{-1} \bar{\varphi}(t)) \right), \end{aligned} \quad /3.32/$$

zatem

$$\| \bar{y}^{(2)}(t) \| \leq \| \underline{L}^{-1} \| \| \underline{D}^{(2)}(\bar{g}) \| \| \bar{y}^{(1)}(t) \| \| \bar{y}^{(1)}(t) \| \leq$$

$$\leq \|L^{-1}\|^3 G_2 \|\bar{\varphi}(t)\|^2 = \|L^{-1}\|^3 A_2 \|\bar{\varphi}(t)\|^2. \quad /3.33/$$

$$\begin{aligned} \bar{y}^{(3)}(t) = & -L^{-1} \left\{ 2D^{(2)}(\bar{g}) (\bar{y}^{(1)}(t) \otimes \bar{y}^{(2)}(t)) + \right. \\ & \left. + D^{(3)}(\bar{g}) (\bar{y}^{(1)}(t) \otimes \bar{y}^{(1)}(t) \otimes \bar{y}^{(1)}(t)) \right\}, \end{aligned} \quad /3.34/$$

a więc

$$\|\bar{y}^{(3)}(t)\| \leq \|L^{-1}\|^5 (2G_2 + G_3) \|\bar{\varphi}(t)\|^3 = \|L^{-1}\|^5 A_3 \|\bar{\varphi}(t)\|^3 \quad /3.35/$$

i ogólnie

$$\|\bar{y}^{(m)}(t)\| \leq \|L^{-1}\|^{2m-1} A_m \|\bar{\varphi}(t)\|^m, \quad /3.36/$$

gdzie A_m są pewnymi liczbami nieujemnymi.

Stąd rozwiązanie przybliżone

$$\bar{y}_N(t) = \sum_{i=1}^N \bar{y}^{(i)}(t) \quad /3.37/$$

można majoryzować przez

$$\begin{aligned} \|\bar{y}_N(t)\| &= \left\| \sum_{i=1}^N \bar{y}^{(i)}(t) \right\| \leq \sum_{i=1}^N \|\bar{y}^{(i)}(t)\| = \\ &= \sum_{i=1}^N \|L^{-1}\|^{2i-1} A_i \|\bar{\varphi}(t)\|^i = \tilde{Y} = \Theta(\|\bar{\varphi}(t)\|), \end{aligned} \quad /3.38/$$

gdzie $\Theta(\|\bar{\varphi}(t)\|)$ jest pewnym wielomianem stopnia N .

Można zauważyć, że powyższa suma da się majoryzować przez

rozwiązanie równania

$$Y = \|\underline{L}^{-1}\| \sum_{i=2}^P G_i Y^i + \|\underline{L}^{-1}\| X, \quad /3.39/$$

gdzie oznaczono $X = \|\bar{\psi}(t)\|$ i $Y = \|\bar{y}(t)\|$.

Poszukajmy rozwiązania tego równania metodą kolejnych przybliżeń

$$\begin{aligned} Y_1 &= \|\underline{L}^{-1}\| X, \\ Y_2 &= \|\underline{L}^{-1}\| \left(X + \sum_{i=2}^P G_i Y_1^i \right), \\ &\cdot \\ &\cdot \\ Y_n &= \|\underline{L}^{-1}\| \left(X + \sum_{i=2}^P G_i Y_{n-1}^i \right). \end{aligned} \quad /3.40/$$

Zbadajmy zbieżność tych iteracji

$$\begin{aligned} |Y_{n+1} - Y_n| &= \|\underline{L}^{-1}\| \sum_{i=2}^P G_i |Y_n^i - Y_{n-1}^i| \leq \\ &\leq \|\underline{L}^{-1}\| \left(\sup_Y \sum_{i=2}^P i G_i Y^{i-1} \right) |Y_n - Y_{n-1}|, \end{aligned} \quad /3.41/$$

ale ze względu na /3.28/, dla $Y < \vartheta$ mamy

$$\|\underline{L}^{-1}\| \sum_{i=2}^P i G_i Y^{i-1} < K < 1, \quad /3.42/$$

więc

$$|Y_{n+1} - Y_n| < K |Y_n - Y_{n-1}| ; K < 1. \quad /3.43/$$

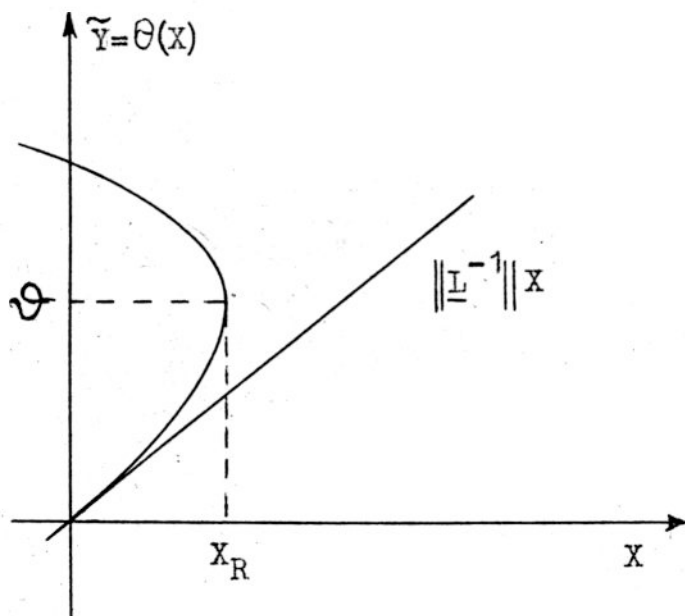
Widać więc, że iteracje będą zbieżne dla $Y < \vartheta$, co implikuje zbieżność /3.29/.

Należy zauważyć, że żadna z iteracji /3.40/ nie wyjdzie poza ϑ , gdy spełniony będzie warunek

$$\|\underline{L}^{-1}\| X + \|\underline{L}^{-1}\| \sum_{i=2}^P G_i \vartheta^i < \vartheta, \quad /3.44/$$

skąd otrzymamy bezpośrednio /3.27/, co kończy dowód.

Zależność między $\Theta(X)$, X oraz X_R pokazuje rys.3.2, z którego widać, że X_R jest zawsze dodatnie.



Rys.3.2. Ilustracja związku między $\Theta(X)$, X oraz X_R .

Należy również zaznaczyć, że przytoczone twierdzenie nie wyklucza zbieżności warunkowej szeregu Volterry dla $\|\bar{\varphi}(t)\| \geq X_R$.

Pokażemy teraz trzy proste przykłady korzystania z tego

twierdzenia.

a/ Niech dane będzie równanie skalarne

$$Ly(t) + ay^2(t) = \varphi(t), \quad , \quad - /3.45/$$

gdzie L jest pewnym liniowym operatorem różniczkowym, wtedy wzór /3.39/ przyjmie postać

$$Y - |a| \|L^{-1}\| Y^2 = \|L^{-1}\| X, \quad /3.46/$$

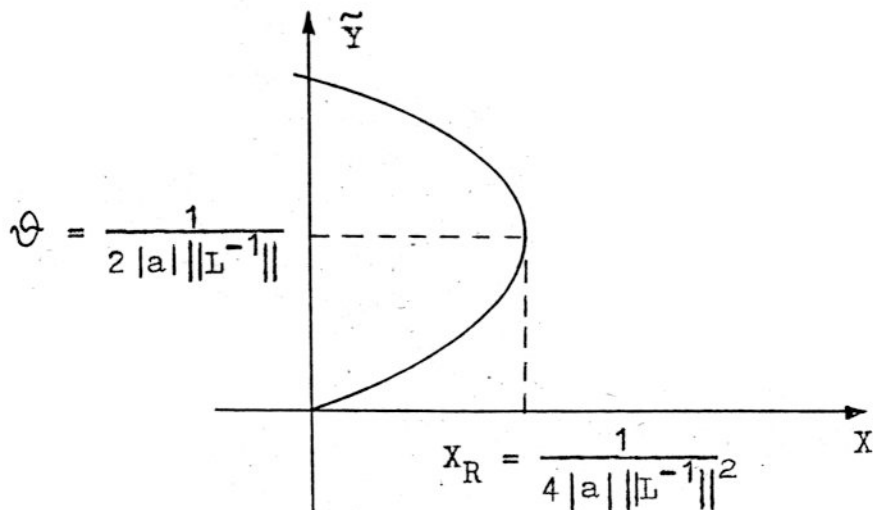
skąd otrzymamy

$$\Theta = \frac{1}{2|a| \|L^{-1}\|} \quad /3.47/$$

oraz

$$X_R = \frac{1}{4|a| \|L^{-1}\|^2}, \quad /3.48/$$

co ilustruje rys.3.3.



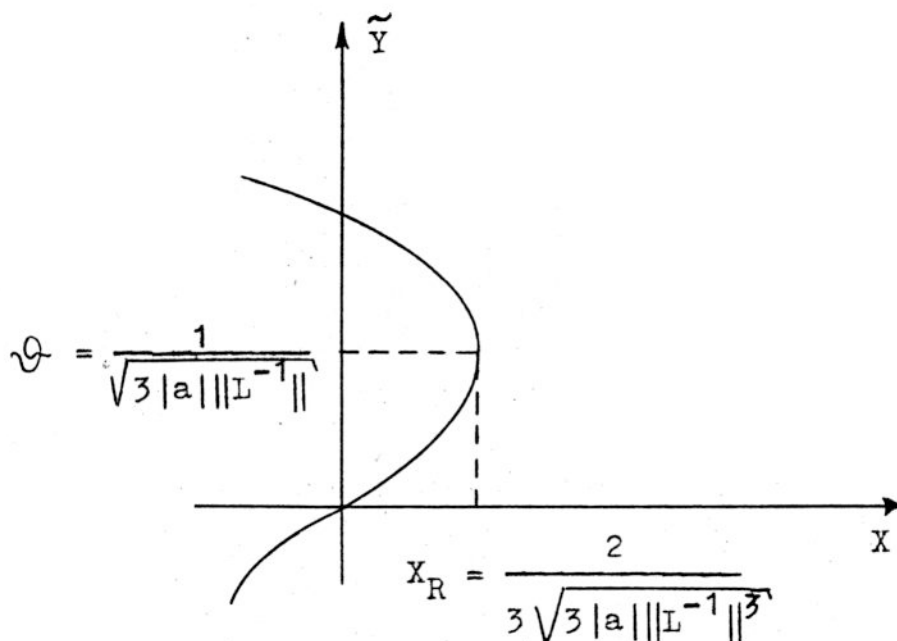
Rys.3.3. Ilustracja obliczania promienia zbieżności szeregu Volterry będącego rozwiązaniem równania

/3.45/

b/ Podobnie można rozważyć równanie

$$Ly(t) + ay^3(t) = \varphi(t). \quad /3.49/$$

Wyniki obliczeń w tym przypadku pokazuje rys.3.4.



Rys.3.4. Obliczony promień zbieżności szeregu Volterry dla równania /3.49/.

c/ Rozważmy jeszcze jedno, bardziej skomplikowane równanie

$$Ly(t) + g_2 y^2(t) + g_3 y^3(t) = \varphi(t), \quad /3.50/$$

dla którego otrzymamy

$$\varrho = -\left| \frac{g_2}{3g_3} \right| + \sqrt{\left| \frac{g_2}{3g_3} \right|^2 + \frac{1}{3|g_3| \|L^{-1}\|}}, \quad /3.51/$$

$$X_R = \frac{\varrho}{\|L^{-1}\|} - |g_2| \varrho^2 - |g_3| \varrho^3. \quad /3.52/$$

Bardziej złożony przykład wykorzystania udowodnionego twierdzenia podany zostanie w rozdziale 6.2.1.

Pokażemy jeszcze prostą zależność, którą wykorzystywać będziemy w rozdziale 6.2.1:

Tw.3.6. Jeżeli w równaniu

$$\underline{L}\bar{y}(t) + \bar{g}(\bar{y}(t)) = \bar{\varphi}(t) \quad /3.53/$$

funkcja $\bar{g}(\cdot)$ zależy tylko od części $\bar{y}_a(t)$ wektora $\bar{y}(t)$, to równanie powyższe zapisać można w postaci

$$\begin{bmatrix} \underline{L}_{11} & \underline{L}_{12} \\ \underline{L}_{21} & \underline{L}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{y}_a(t) \\ \bar{y}_b(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{g}_a(\bar{y}_a(t)) \\ \bar{g}_b(\bar{y}_a(t)) \end{bmatrix} = \bar{\varphi}(t), \quad /3.54/$$

skąd

$$\begin{bmatrix} \bar{y}_a(t) \\ \bar{y}_b(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\underline{L}^{-1})_{11} & (\underline{L}^{-1})_{12} \\ (\underline{L}^{-1})_{21} & (\underline{L}^{-1})_{22} \end{bmatrix} \left(\bar{\varphi}(t) + \begin{bmatrix} \bar{g}_a(\bar{y}_a(t)) \\ \bar{g}_b(\bar{y}_a(t)) \end{bmatrix} \right) \quad /3.55/$$

oraz dalej

$$\bar{y}_a(t) = [(\underline{L}^{-1})_{11} \ (\underline{L}^{-1})_{12}] \left(\bar{\varphi}(t) + [\bar{g}_a(\bar{y}_a(t)), \bar{g}_b(\bar{y}_a(t))]^T \right), \quad /3.56a/$$

$$\bar{y}_b(t) = [(\underline{L}^{-1})_{21} \ (\underline{L}^{-1})_{22}] \left(\bar{\varphi}(t) + [\bar{g}_a(\bar{y}_a(t)), \bar{g}_b(\bar{y}_a(t))]^T \right) \quad /3.56b/$$

i zauważymy, że przy obliczaniu promienia zbieżności szeregu Volterry dla takiego równania można brać pod uwagę tylko /3.56a/, co pozwala czasami lepiej oszacować promień zbieżności X_R , gdyż

$$\|\underline{L}^{-1}\| \geq \|[(\underline{L}^{-1})_{11} \ (\underline{L}^{-1})_{12}]\| \quad /3.57/$$

Reasumując rezultaty tego rozdziału możemy powiedzieć, że:

- rozwiązanie równania różniczkowego 3.5, które może stanowić opis wielootworowego, nieliniowego układu elektronicznego można przedstawić w postaci uogólnionego szeregu Volterry /3.20/. Przytoczone twierdzenia 3.1 - 3.5 uzasadniają ten wniosek.
- wprowadzone przez autora działanie /3.8/ oraz operatory /3.9/ i /3.13/ pozwalają na sformalizowanie zapisu poszczególnych zależności,
- udowodnione przez autora twierdzenia 3.5 i 3.6 umożliwiają szacowanie promienia zbieżności szeregu Volterry, co prezentują przedstawione przykłady.

4. UOGÓLNIONY SZEREG VOLTERRY W DZIEDZINIE CZĘSTOTLIWOŚCI.

4.1. Transformata Fouriera uogólnionego szeregu Volterra.

Przepiszmy wzór /3.20/ w postaci skalarnej oraz zamiast przestrzeni $(C\langle a, b \rangle, R^n)$ przyjmijmy $(C(-\infty, +\infty), R^n)$ /załóżmy dalej, że zbiór $C(-\infty, +\infty)$ jest zbiorem funkcji ograniczonych/.

$$y_\alpha(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{k_p \geq 0 \\ k_1 + \dots + k_n = m}} y_{k_1, \dots, k_n}^{(m), \alpha}(t) =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{k_p \geq 0 \\ k_1 + \dots + k_n = m}} \int_{R^m} h_{k_1, \dots, k_n}^{(m), \alpha}(t - \tau_{1,1}, \dots, t - \tau_{n,k_n}) \times$$

$$\times \varphi_1(\tau_{1,1}) \dots \varphi_n(\tau_{n,k_n}) d\tau_{v_m}; \quad \alpha = 1, \dots, n. \quad /4.1/$$

Wprowadźmy nową funkcję m argumentów taką, że

$$y_{k_1, \dots, k_n}^{(m), \alpha}(t_{1,1}, \dots, t_{1,k_1}; \dots; t_{n,1}, \dots, t_{n,k_n}) \Big|_{t_p, \xi = t} =$$

$$= y_{k_1, \dots, k_n}^{(m), \alpha}(t) = \int_{R^m} h_{k_1, \dots, k_n}^{(m), \alpha}(t_{1,1} - \tau_{1,1}, \dots, t_{n,k_n} - \tau_{n,k_n}) \times$$

$$\times \varphi_1(\tau_{1,1}) \dots \varphi_n(\tau_{n,k_n}) d\tau_{v_m}, \quad /4.2/$$

o której założymy, że jest bezwzględnie całkowalna ~~.....~~
~~.....~~ tzn.

$$\int_{R^m} |y_{k_1, \dots, k_n}^{(m), \alpha}(t_{1,1}, \dots, t_{n, k_n})| dt_{v_m} \leq M < \infty. \quad /4.3/$$

Zdefiniowana jest więc dla niej m-wymiarowa transformata Fouriera, którą oznaczymy przez $\mathcal{F}^{(m)}(\cdot)$ /jeżeli transformata Fouriera nie istnieje w sensie powyższym, to można to pojęcie rozszerzyć na tzw. dystrybucyjną transformatę Fouriera [116], co będzie wykorzystane do określenia transformaty Fouriera funkcji bezwzględnie całkowalnych w okresie/.

Mamy więc

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{(m)} \left\{ y_{k_1, \dots, k_n}^{(m), \alpha}(t_{1,1}, \dots, t_{n, k_n}) \right\} &= \quad /4.4/ \\ &= \int_{R^m} y_{k_1, \dots, k_n}^{(m), \alpha}(t_{1,1}, \dots, t_{n, k_n}) \times \\ &\quad \times e^{j2\pi(f_{1,1}t_{1,1} + \dots + f_{n, k_n}t_{n, k_n})} dt_{v_m} = \\ &= Y_{k_1, \dots, k_n}^{(m), \alpha}(f_{1,1}, \dots, f_{n, k_n}); \quad m=1, 2, \dots \end{aligned}$$

oraz odwrotnie

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{(-m)} \left\{ Y_{k_1, \dots, k_n}^{(m), \alpha}(f_{1,1}, \dots, f_{n, k_n}) \right\} &= \quad /4.5/ \\ &= \int_{R^m} Y_{k_1, \dots, k_n}^{(m), \alpha}(f_{1,1}, \dots, f_{n, k_n}) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times e^{-j2\pi(f_{1,1}t_{1,1} + \dots + f_{n,k_n}t_{n,k_n})} df_{v_m} = \\ & = y_{k_1, \dots, k_n}^{(m), \alpha}(t_{1,1}, \dots; \dots; \dots, t_{n,k_n}) \end{aligned}$$

gdzie $\mathcal{F}^{(-m)}(\cdot)$ oznacza odwrotną transformatę Fouriera.

Obliczmy teraz

$$\begin{aligned} Y_{\alpha}(f) &= \mathcal{F}^{(1)}\{y_{\alpha}(t)\} = & /4.6/ \\ &= \mathcal{F}^{(1)}\left\{\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{k_p \geq 0 \\ k_1 + \dots + k_n = m}} y_{k_1, \dots, k_n}^{(m), \alpha}(t_{1,1}, \dots; \dots; \dots, t_{n,k_n}) \Big|_{t_{\nu, \xi} = t}\right\} = \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{k_p \geq 0 \\ k_1 + \dots + k_n = m}} \mathcal{F}^{(1)}\left\{y_{k_1, \dots, k_n}^{(m), \alpha}(t_{1,1}, \dots; \dots; \dots, t_{n,k_n}) \Big|_{t_{\nu, \xi} = t}\right\} = \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{k_p \geq 0 \\ k_1 + \dots + k_n = m}} \mathcal{F}^{(1)}\left\{\int_{R^m} y_{k_1, \dots, k_n}^{(m), \alpha}(f_{1,1}, \dots; \dots; \dots, f_{n,k_n}) \times \right. \\ & \quad \left. \times e^{-j2\pi(f_{1,1} + \dots + f_{n,k_n})t} \right\} df_{v_m} = \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{k_p \geq 0 \\ k_1 + \dots + k_n = m}} \int_{R^m} y_{k_1, \dots, k_n}^{(m), \alpha}(f_{1,1}, \dots; \dots; \dots, f_{n,k_n}) \times \\ & \quad \times \mathcal{F}^{(1)}\left\{e^{j2\pi(f_{1,1} + \dots + f_{n,k_n})t}\right\} df_{v_m} = \end{aligned}$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{k_\nu \geq 0 \\ k_1 + \dots + k_n = m}} \int_{R^m} Y_{k_1, \dots, k_n}^{(m), \alpha}(f_{1,1}, \dots, f_{n, k_n}) \times \\ \times \delta(f - f_{1,1} - \dots - f_{n, k_n}) df_{v_m}. \quad /4.6/$$

Biorąc pod uwagę /4.2/ i /4.4/ otrzymamy

$$Y_{k_1, \dots, k_n}^{(m), \alpha}(f_{1,1}, \dots, f_{n, k_n}) = \quad /4.7/ \\ = H_{k_1, \dots, k_n}^{(m), \alpha}(f_{1,1}, \dots, f_{n, k_n}) \phi_1(f_{1,1}) \dots \phi_n(f_{n, k_n}),$$

gdzie $H_{k_1, \dots, k_n}^{(m), \alpha}(\cdot)$ jest m-wymiarową transformatą Fouriera funkcji $h_{k_1, \dots, k_n}^{(m), \alpha}(\cdot)$ oraz $\phi_\nu(f_\nu, \xi)$ jest transformatą Fouriera $\varphi_\nu(\tau_\nu, \xi)$.

Stosując /4.7/ do /4.6/ otrzymamy wzór

$$Y_\alpha(f) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{k_\nu \geq 0 \\ k_1 + \dots + k_n = m}} \int_{R^m} H_{k_1, \dots, k_n}^{(m), \alpha}(f_{1,1}, \dots, f_{n, k_n}) \times \\ \times \phi_1(f_{1,1}) \dots \phi_n(f_{n, k_n}) \delta(f - f_{1,1} - \dots - f_{n, k_n}) df_{v_m}, \quad /4.8/$$

który nazwać możemy uogólnionym szeregiem Volterra w dziedzinie częstotliwości.

Ze wzoru /4.6/ możemy zinterpretować $Y_{k_1, \dots, k_n}^{(m), \alpha}(\cdot)$ jako składową sygnału na wyjściu α układu elektronicznego o częstotliwości będącej sumą jej argumentów. Biorąc pod uwagę /4.7/ można napisać

$$H_{k_1, \dots, k_n}^{(m), \alpha}(f_{1,1}, \dots, f_{n,k_n}) = \quad /4.9/$$

$$= \frac{Y_{k_1, \dots, k_n}^{(m), \alpha}(f_{1,1}, \dots, f_{n,k_n})}{\phi_1(f_{1,1}) \dots \phi_n(f_{n,k_n})},$$

co pozwala zinterpretować $H_{k_1, \dots, k_n}^{(m), \alpha}(\cdot)$ jako transmitancję wielowymiarową od wszystkich wejść do wyjścia α .

4.2. Odpowiedź układu opisanego uogólnionym szeregiem Volterry na wymuszenie harmoniczne.

Niech wymuszenie na ν -tym wejściu układu ma postać

$$\varphi_\nu(t) = \sum_{\xi=1}^{M_\nu} \frac{A_{\nu, \xi}}{2} e^{j2\pi f_{\nu, \xi} t} \quad /4.10/$$

gdzie wszystkie $f_{\nu, \xi}$ są niewspółmierne.

Biorąc odwrotną transformatę Fouriera w postaci

$$y_\alpha(t) = \mathcal{F}^{(-\nu)} y_\alpha(f) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{k_\nu \geq 0 \\ k_1 + \dots + k_n = m}} \int_{R^m} H_{k_1, \dots, k_n}^{(m), \alpha}(f_{1,1}, \dots, f_{n,k_n}) \times \\ \times \phi_1(f_{1,1}) \dots \phi_n(f_{n,k_n}) e^{j2\pi(f_{1,1} + \dots + f_{n,k_n})t} df_{\nu_m} \quad /4.11/$$

i uwzględniając

$$\phi_\nu(f) = \mathcal{F}^{(1)}\{\varphi_\nu(t)\} = \sum_{\xi=1}^{M_\nu} \frac{A_{\nu, \xi}}{2} \delta(f - f_{\nu, \xi}) \quad /4.12/$$

dostaniemy

$$y_{\alpha}(t) = \frac{1}{2} \sum_{k_{\nu}=0}^{\infty} \sum_{\substack{k_1+\dots+k_n \\ l_{\nu,1}+\dots+l_{\nu,M_{\nu}}=k}}^{k_1+\dots+k_n} \frac{k_1! \dots k_n!}{2^{(k_1+\dots+k_n-1)}} \prod_{\nu=1}^n \prod_{\xi=1}^{M_{\nu}} \frac{(A_{\nu,\xi})^{l_{\nu,\xi}}}{(l_{\nu,\xi})!} \times$$

$$\times H_{k_1, \dots, k_n}^{(k_1+\dots+k_n), \alpha} \left([f_{1,1}]^{l_{1,1}}, \dots, [f_{1,M_1}]^{l_{1,M_1}}; \dots; [f_{n,1}]^{l_{n,1}}, \dots, [f_{n,M_n}]^{l_{n,M_n}} \right)$$

$$\times \exp j2\pi \left(\sum_{\nu=1}^n \sum_{\xi=1}^{M_{\nu}} l_{\nu,\xi} f_{\nu,\xi} \right) t, \quad /4.13a/$$

$$\alpha = 1, 2, \dots, n.$$

gdzie wprowadzono oznaczenie

$$[f_{\nu,\xi}]^{l_{\nu,\xi}} = \overbrace{f_{\nu,\xi}, \dots, f_{\nu,\xi}}^{l_{\nu,\xi}} \quad /4.13b/$$

W dalszej części pracy będziemy używali tego wzoru w postaci skróconej

$$y_{\alpha}(t) = \frac{1}{2} \sum_{k_{\nu}} \sum_{l_{\nu,\xi}} B(A_{\nu,\xi}, k_{\nu}, l_{\nu,\xi}) H_{k_1, \dots, k_n}^{(m), \alpha}(\cdot; \cdot; \cdot) e^{j2\pi \sum_{\nu} \sum_{\xi} l_{\nu,\xi} f_{\nu,\xi} t};$$

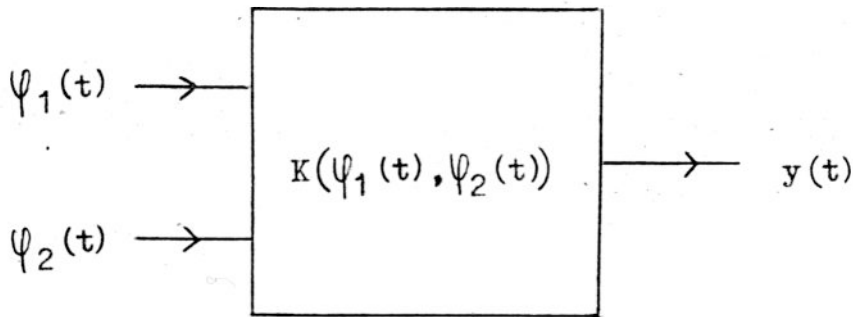
/4.13c/

gdzie znaczenie symbolu $B(\cdot)$ jest widoczne z /4.13a/

Wyrażenia powyższe będą również słuszne dla $f_{\nu,\xi}$ współmier-
nych, a więc i wymuszeń sinusoidalnych, należy jednak pamiętać,
że wtedy składowa sygnału o danej częstotliwości nie będzie
reprezentowana przez jeden składnik, a przez sumę pewnego szere-
gu o składnikach różnych rzędów będących wyrazami /4.13c/.
/Przykład takiego przypadku prezentuje rozdział 6.1/.

Wzór /4.13/ pozwala wyraźniej zinterpretować funkcję przenoszenia $\bar{H}^{(\bullet)}(\bullet)$ jako nieliniową funkcję transmitancji układu nieliniowego.

Dla lepszego zilustrowania weźmy, jako przykład, układ dwuwejściowy jak na rys.4.1. Jeżeli na wejścia tego układu



Rys.4.1. Układ trójtworowy opisany równaniem /4.15/

podamy sygnały

$$\psi_1(t) = \frac{A_{11}}{2} e^{j2\pi f_{11}t} + \frac{A_{12}}{2} e^{j2\pi f_{12}t},$$

/4.14/

$$\psi_2(t) = \frac{A_{21}}{2} e^{j2\pi f_{21}t} + \frac{A_{22}}{2} e^{j2\pi f_{22}t},$$

gdzie liczby $f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22}$ są niewspółmierne, to na wyjściu otrzymamy sygnał postaci

$$y(t) = K(\psi_1(t), \psi_2(t)) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{k_1, k_2=0 \\ k_1+k_2 \geq 1}}^{\infty} \sum_{\substack{l_{11}, l_{12} \geq 0 \\ l_{21}, l_{22} \geq 0 \\ l_{11}+l_{12}=k_1 \\ l_{21}+l_{22}=k_2}}^{k_1+k_2} \frac{(k_1! k_2!) A_{11}^{l_{11}} A_{12}^{l_{12}} A_{21}^{l_{21}} A_{22}^{l_{22}}}{2^{(k_1+k_2-1)} l_{11}! l_{12}! l_{21}! l_{22}!} \times \\ \times H_{k_1, k_2}^{(k_1+k_2)}(\underbrace{f_{11}, \dots, f_{11}}_{l_{11}}, \underbrace{f_{12}, \dots, f_{12}}_{l_{12}}, \underbrace{f_{21}, \dots, f_{21}}_{l_{21}}, \underbrace{f_{22}, \dots, f_{22}}_{l_{22}}) e^{j2\pi (f_{11} l_{11} + \dots + f_{22} l_{22})t} =$$

/4.15/

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \left\{ A_{11} H_{1,0}^{(1)}(f_{11}) e^{j2\pi f_{11}t} + A_{12} H_{1,0}^{(1)}(f_{12}) e^{j2\pi f_{12}t} + \right. \\
 &\quad A_{21} H_{0,1}^{(1)}(f_{21}) e^{j2\pi f_{21}t} + A_{22} H_{0,1}^{(1)}(f_{22}) e^{j2\pi f_{22}t} + \\
 &+ \frac{1}{2} A_{11}^2 H_{2,0}^{(2)}(f_{1,1}, f_{1,1}) e^{j4\pi f_{11}t} + \frac{1}{2} A_{12} A_{21} H_{1,1}^{(2)}(f_{12}, f_{21}) e^{j2\pi(f_{12}+f_{21})t} + \\
 &+ \dots + \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} A_{11} A_{12} A_{21} H_{2,1}^{(3)}(f_{11}, f_{12}, f_{21}) e^{j2\pi(f_{11}+f_{12}+f_{21})t} + \dots \right\},
 \end{aligned}$$

przy czym, w ostatniej równości, wypisano tylko niektóre wyrazy pokazujące sens fizyczny wielowymiarowych funkcji transmitancji. Np. funkcja $H_{1,0}^{(1)}(\cdot)$ opisuje klasyczną transmitancję liniową z wejścia pierwszego na wyjście; $H_{0,1}^{(1)}(\cdot)$ jest transmitancją liniową z wejścia drugiego do wyjścia; $H_{2,0}^{(2)}(\cdot)$ reprezentuje wytwarzanie drugiej harmonicznej sygnału podawanego na wejście pierwsze; $H_{1,1}^{(2)}(\cdot)$ odpowiada za mieszanie częstotliwości sygnałów wejścia pierwszego i drugiego; $H_{2,1}^{(3)}(\cdot)$ odpowiada natomiast za mieszanie obu częstotliwości wejścia pierwszego z jedną częstotliwością wejścia drugiego itd...

Zauważymy, że istotne było założenie o niewspółmierności wszystkich częstotliwości $f_{\nu, \xi}$, gdyż inaczej, jak już wspomniiano, we wzorze /4.15/ składowe sygnału o danej częstotliwości byłyby sumą składowych o różnych rzędach/tak jak w rozdziale 6.1/.

4.3. Niektóre własności wielowymiarowych funkcji transmitancji.

Przytoczymy tu pewne własności nieliniowych funkcji transmitancji $H_{..}^{(*)}(\cdot)$, które pozwolą lepiej zrozumieć ich interpretację fizyczną oraz pozwalają, w pewnych przypadkach, na zmniejszenie ilości punktów częstotliwościowych do niezbędnego minimum określającego daną funkcję w sposób pełny.

Własność 1/ Funkcja $H_{k_1, \dots, k_n}^{(m), \alpha}(f_{1,1}, \dots, f_{n,k_n})$ jest sprzężona do funkcji $H_{k_1, \dots, k_n}^{(m), \alpha}(-f_{1,1}, \dots, -f_{n,k_n})$.

Istotnie

$$H_{k_1, \dots, k_n}^{(m), \alpha}(-f_{1,1}, \dots, -f_{n,k_n}) = \quad /4.16/$$

$$= \left\{ \int_{R^m} h_{k_1, \dots, k_n}^{(m), \alpha}(t_{1,1}, \dots, t_{n,k_n}) e^{-j2\pi(f_{1,1}t_{1,1} + \dots + f_{n,k_n}t_{n,k_n})} dt_v \right\}^*$$

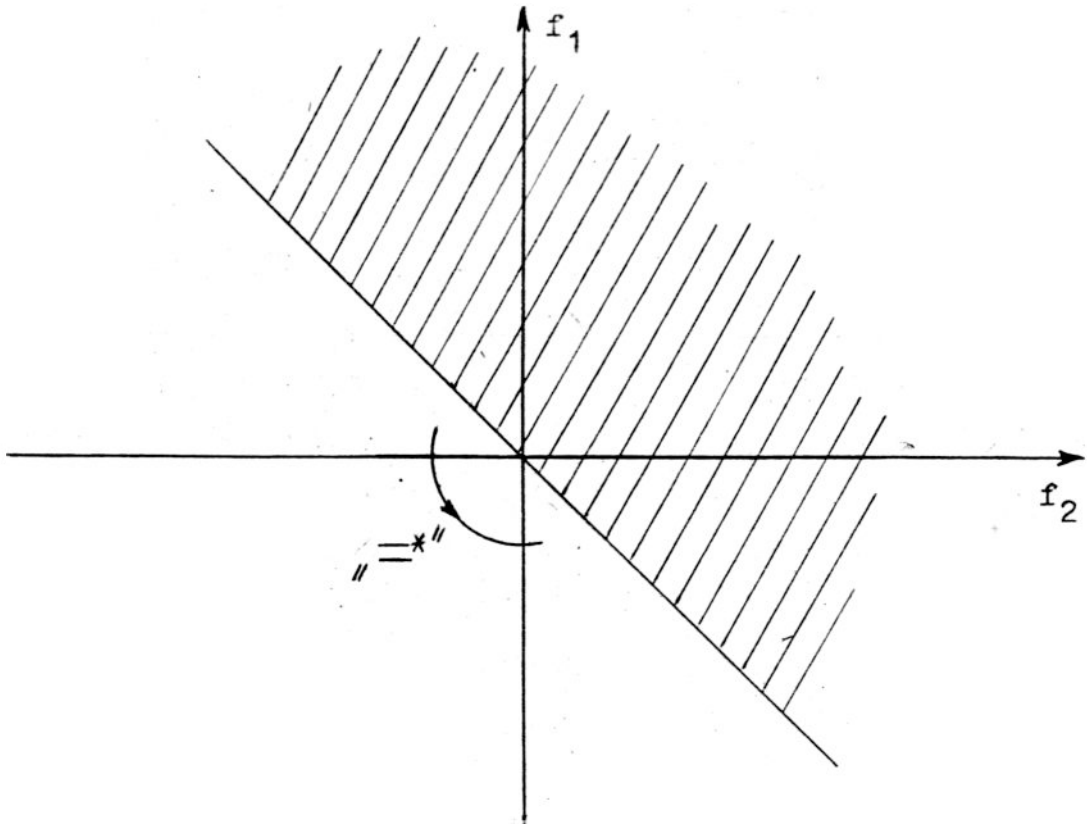
$$= \left\{ H_{k_1, \dots, k_n}^{(m), \alpha}(f_{1,1}, \dots, f_{n,k_n}) \right\}^*.$$

Stąd wnioskujemy, że wielowymiarowe funkcje transmitancji $H_{k_1, \dots, k_n}^{(m), \alpha}(\cdot)$ można obliczać tylko dla częstotliwości takich, że

$$\bar{f} \in \left\{ \bar{f}; R^m, f_{1,1} + \dots + f_{1,k_1} + \dots + f_{n,k_n} \geq 0 \right\}, \quad /4.17/$$

a dla wszystkich pozostałych przyjmować wartość sprzężoną do wartości funkcji o argumentach przeciwnego znaku.

Np. dla funkcji dwuwymiarowej $H_{..}^{(2)}(f_1, f_2)$ wystarczy obliczenie jej dla półpłaszczyzny z brzegiem $f_1 + f_2 \geq 0$ /rys.4.2/.



Rys.4.2. Ograniczenie dziedziny obliczania funkcji drugiego rzędu $H_{..}^{(2)}(f_1, f_2)$.

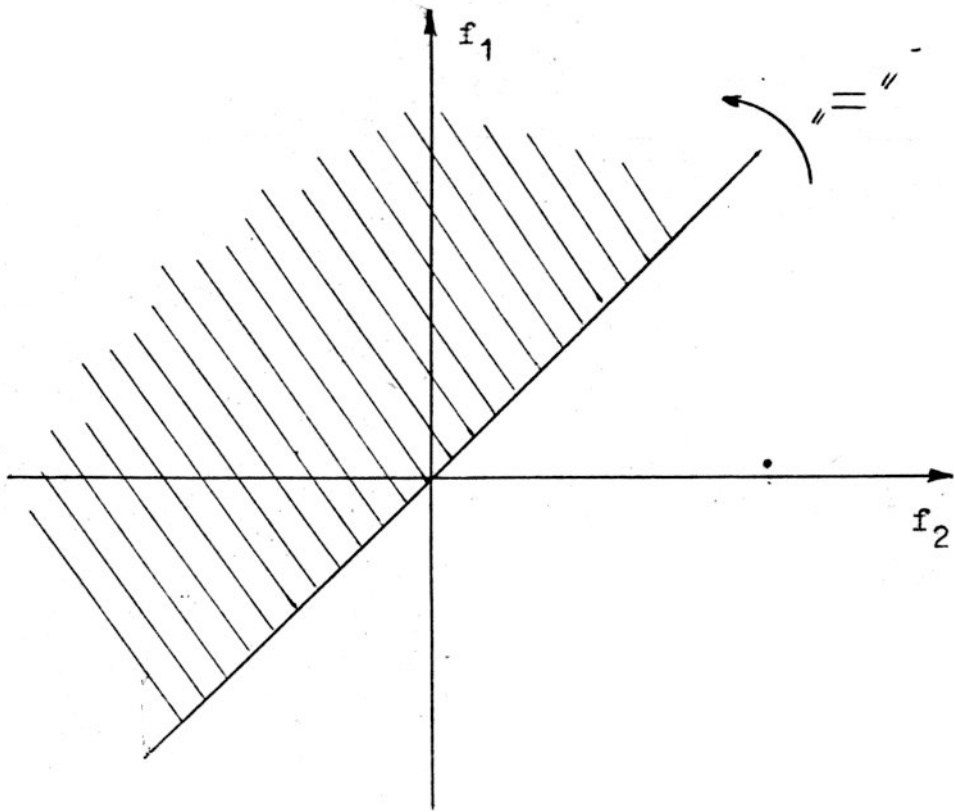
Własność 2/ Funkcje $H_{k_1, \dots, k_n}^{(m), \alpha}(f_{1,1}, \dots, f_{1,k_1}, \dots, f_{n,1}, \dots, f_{n,k_n})$ są symetryczne względem argumentów o tych samych pierwszych indeksach.

Wiąże się to bezpośrednio z symetrią odpowiadających im funkcji $h_{k_1, \dots, k_n}^{(m), \alpha}(t-\tau_{1,1}, \dots, t-\tau_{1,k_1}, \dots, t-\tau_{n,1}, \dots, t-\tau_{n,k_n})$ względem odpowiednich argumentów /rozdz.2.3, wzór /2.28/ i komentarz do niego/.

Własność ta pozwala na zwężenie dziedziny obliczania funkcji $H_{..}^{(\cdot), \cdot}(\cdot)$ do takich częstotliwości, że

$$\bar{f} \in \left\{ \bar{f}; R^m, f_{1,1} \leq f_{1,2} \leq \dots \leq f_{1,k_1}; \dots; f_{n,1} \leq f_{n,2} \leq \dots \leq f_{n,k_n} \right\}.$$

Obszar ten, dla funkcji drugiego rzędu $H_{2,0}^{(2)}(f_1, f_2)$, ilustruje rys.4.3.

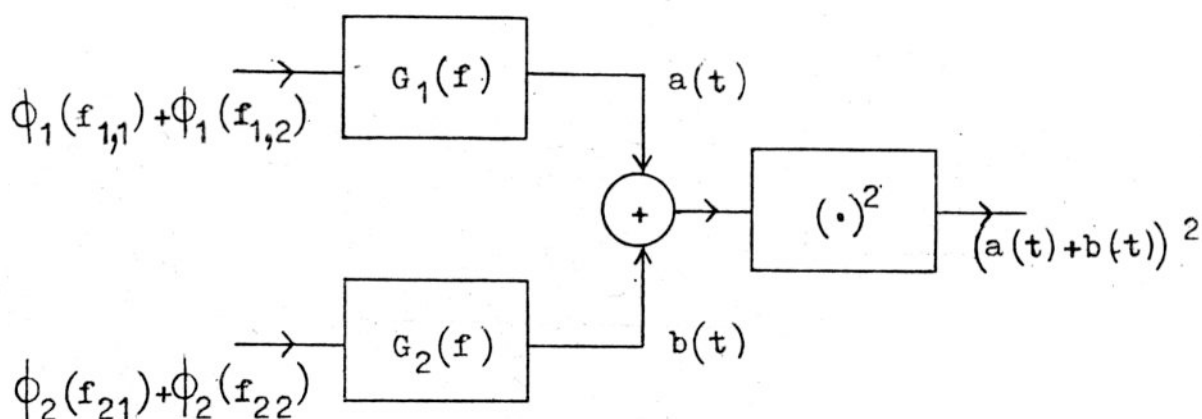


Rys.4.3. Symetria funkcji $H_{2,0}^{(2)}(f_1, f_2)$.

Własność 3/ Funkcje $H_{k_1, \dots, k_n}^{(m), \infty}(f_{1,1}, \dots, f_{n,k_n})$ nie są symetryczne względem argumentów różniących się pierwszymi indeksami.

Pokażemy to na przykładzie funkcji drugiego rzędu. Weźmy pod uwagę układ, jak na rys.4.4 składający się z dwóch elementów liniowych opisanych transmitancjami $G_1(f)$ i $G_2(f)$ oraz idealnych elementów, dodającego i podnoszącego do kwadratu. Łatwo obliczyć, że

$$H_{2,0}^{(2)}(f_{1,1}, f_{1,2}) = G_1(f_{1,1})G_1(f_{1,2}) = \quad /4.19/$$



Rys.4.4. Układ objaśniający interpretację symetrii funkcji drugiego rzędu.

$$= G_1(f_{1,2})G_1(f_{1,1}) = H_{2,0}^{(2)}(f_{1,2}, f_{1,1}), \quad /4.19/$$

co można zinterpretować jako możliwość zamiany miejscami źródeł $\phi_1(f_{1,1})$ i $\phi_1(f_{1,2})$, co nie wpłynie na zmianę sygnału wyjściowego. Ten sam wniosek dotyczy $H_{0,2}^{(2)}(f_{2,1}, f_{2,2})$.

Obliczmy teraz

$$H_{1,1}^{(2)}(f_{1,1}; f_{2,1}) = 2G_1(f_{1,1})G_2(f_{2,1}) \quad /4.20/$$

Gdyby ta funkcja była symetryczna musiałoby być, dla dowolnych $f_{1,1}$ i $f_{2,1}$

$$G_1(f_{1,1})G_2(f_{2,1}) = G_1(f_{2,1})G_2(f_{1,1}), \quad /4.21/$$

co nie musi zachodzić. Można to zinterpretować jako zmianę wartości sygnału wyjściowego przy zmianie miejscami źródeł $\phi_1(f_{1,1})$ i $\phi_2(f_{2,1})$, gdyż kolejność argumentów funkcji $H_{1,1}^{(2)}(\cdot)$ uzależniono od pozycji tych źródeł.

Symetryzacja, proponowana czasami i stosowana przez autorów piszących o sposobach obliczania nieliniowych funkcji transmitancji np. [9,79,108] polegająca na znalezieniu funkcji

$$\hat{H}_{1,1}^{(2)}(f_{1,1}; f_{2,1}) = \frac{1}{2} \{ H_{1,1}^{(2)}(f_{1,1}; f_{2,1}) + H_{1,1}^{(2)}(f_{2,1}; f_{1,1}) \} \quad /4.22/$$

nie ma w tym wypadku żadnego uzasadnienia w interpretacji fizycznej.

Własność 4/ Ograniczenie pasma częstotliwości przenoszenia układu elektronicznego.

Jest to własność nieliniowych funkcji transmitancji opisujących układ elektroniczny polegająca na tym, że dla niektórych częstotliwości wartość ich modułu jest pomijalnie mała, lub znika zupełnie.

Wiadomo, że każdy układ elektroniczny pracuje przy ograniczonych częstotliwościach wejściowych i wyjściowych. Załóżmy mianowicie, że dla każdego z n wejść ograniczamy pasmo częstotliwości sygnałów do wartości z przedziałów od f_{ν}^d do $f_{\nu}^g, \nu=1, \dots, n$ tzn.

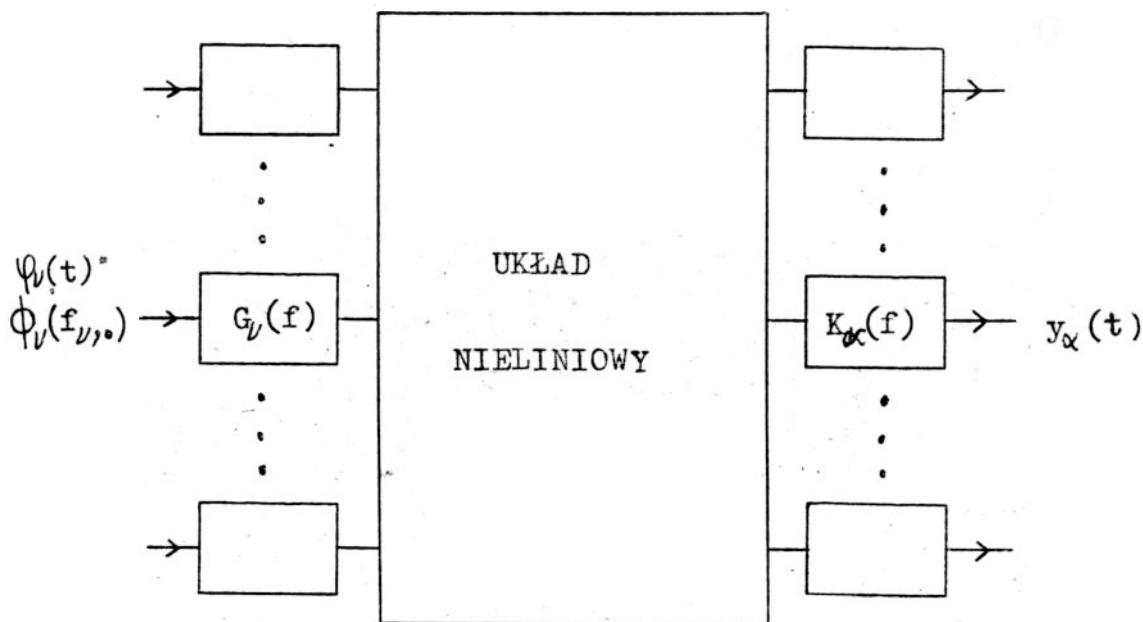
$$\bar{f} \in \{ \bar{f}; R^m, f_{\nu}^d \leq f_{\nu} \leq f_{\nu}^g, \nu=1, 2, \dots, n \}. \quad /4.23/$$

Można to zinterpretować, jako brak na ν -tym wejściu sygnału o częstotliwości spoza tego pasma lub jako ograniczenie zakresu częstotliwości sygnałów przez stopnie wejściowe danego układu elektronicznego, tak iż można uznać, że sygnały spoza tego przedziału nie wpływają na sposób pracy danego układu nieliniowego.

Podobnie można ograniczyć pasmo częstotliwości sygnału wyjściowego dla danego wyjścia α , co wiązać się może z ograniczeniem tegoż pasma przez stopnie wyjściowe danego układu, bądź z tym, że częstotliwości spoza tego przedziału nas nie interesują

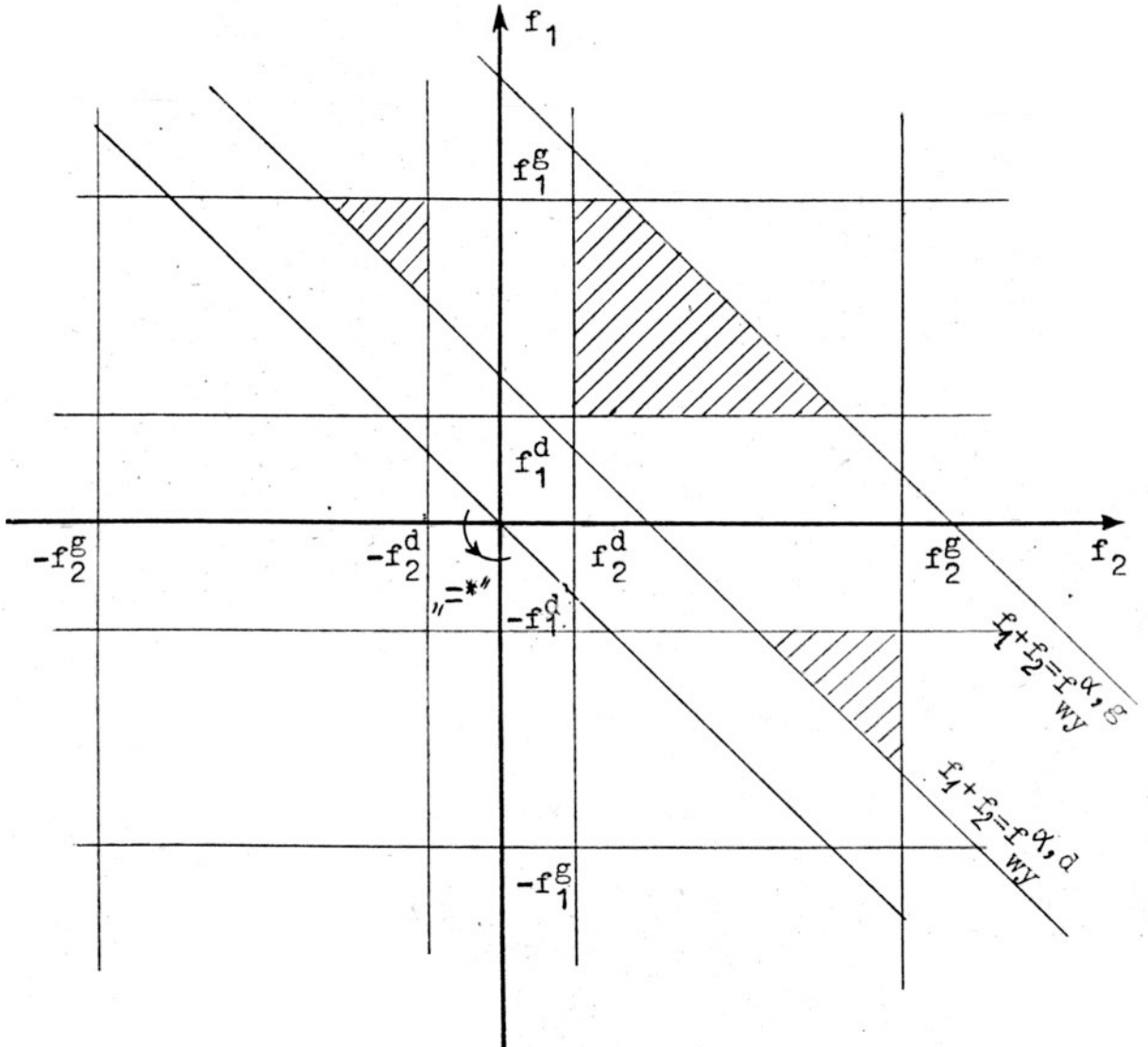
$$\bar{f} \in \left\{ \bar{f}; R^m, f_{wy}^{\alpha, d} \leq |f_{1,1} + f_{1,2} + \dots + f_{n,k_n}| \leq f_{wy}^{\alpha, g} \right\}. \quad /4.24/$$

Zilustrujemy te rozważania przykładem jak na rys.4.5, gdzie poszczególne częstotliwości f_v^d i f_v^g mogą być częstotliwościami granicznymi podukładów liniowych $G_v(f)$ oraz $f_{wy}^{\alpha, d}$ i $f_{wy}^{\alpha, g}$ mogą być częstotliwościami granicznymi podukładów $K_\alpha(f)$.



Rys.4.5. Objaśnienie ograniczeń częstotliwości sygnałów wejściowych i wyjściowych układu nieliniowego.

Na rys.4.6 przedstawiono interpretację powyższych rozważań dla funkcji $H_{1,1}^{(2)}(f_1; f_2)$.



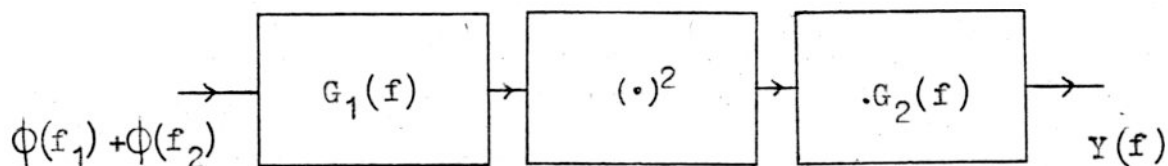
Rys.4.6. Ilustracja ograniczenia dziedziny obliczania funkcji $H_{1,1}^{(2)}(f_1; f_2)$ ze względu na własności 1, 2 i 4.

Należy zauważyć, że wnioski tego punktu są różne od wyników w pracach [37,40,119], gdzie definicję pasma częstotliwości przenoszenia układu liniowego stosowano do układów nieliniowych, czego robić nie wolno. Podano tam również, że moduł wielowy-

miarowych funkcji transmitancji /dla układu jednowejściowego/
 $H_m^{(m)}(f_1, \dots, f_m)$ jest parzysty ze względu na każdą zmienną, co
 można zapisać

$$|H_m^{(m)}(f_1, \dots, f_m)| = |H_m^{(m)}(-f_1, f_2, \dots, f_m)| = |H_m^{(m)}(|f_1|, \dots, |f_m|)| \quad /4.25/$$

W ogólnym przypadku równość ta, pozwalająca jeszcze bardziej ograniczyć dziedzinę obliczania funkcji $H_m^{(m)}(\cdot)$ /jeśli interesuje nas tylko jej moduł - co się często zdarza/, nie zachodzi. Ilustruje to przykład jak na rys.4.7, gdzie mamy do czynienia z układem nieliniowym podnoszącym do kwadratu i dwoma



Rys.4.7. Układ ilustrujący niepoprawność wzoru /4.25/.

układami liniowymi o transmitancjach $G_1(f)$ i $G_2(f)$. Łatwo obliczyć, że

$$H_2^{(2)}(f_1, f_2) = G_1(f_1) G_1(f_2) G_2(f_1 + f_2) \quad /4.26/$$

oraz

$$H_2^{(2)}(f_1, -f_2) = G_1(f_1) G_1(-f_2) G_2(f_1 - f_2) \quad /4.27/$$

i gdyby było

$$|H_2^{(2)}(f_1, f_2)| = |H_2^{(2)}(f_1, -f_2)| \quad /4.28/$$

byłoby też

$$|G_2(f_1 + f_2)| = |G_2(f_1 - f_2)|, \quad /4.29/$$

co nie musi zachodzić.

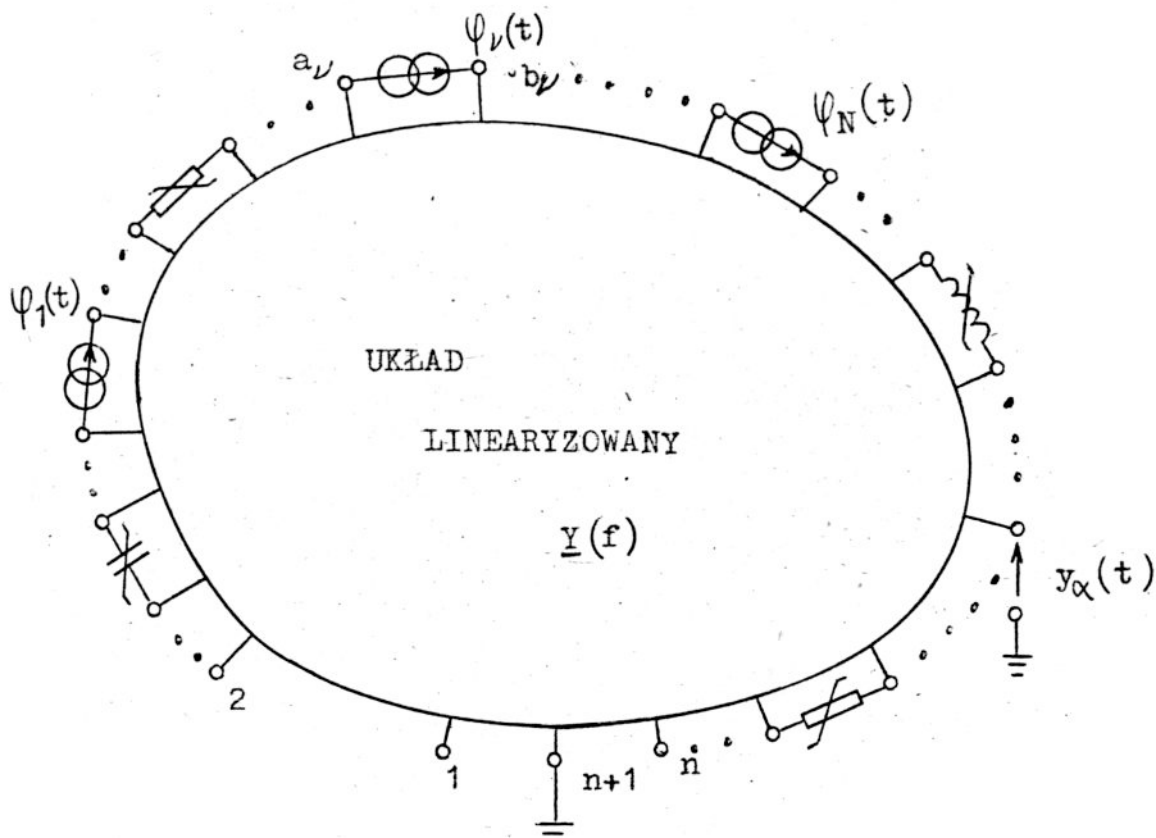
Podsumowując rozdział czwarty możemy stwierdzić, że:

- stosując do wyprowadzonych w rozdziale trzecim zależności wielowymiarową transformatę Fouriera uzyskuje się postać uogólnionego szeregu Volterry w dziedzinie częstotliwości /4.8/,
- uzyskane wielowymiarowe funkcje transmitancji mają prostą interpretację fizyczną - /4.9/,
- pokazane, istotne własności nieliniowych funkcji transmitancji umożliwiają ograniczenie dziedziny ich obliczania do części wspólnej zbiorów /4.17/, /4.18/, /4.23/ i /4.24/. Jak się okaże w rozdziale piątym, częściowa symetria nieliniowych funkcji transmitancji, ma znaczenie zasadnicze,
- podawana w literaturze / [37, 40, 119] / zależność /4.25/ nie jest w ogólnym przypadku słuszna.

5. OBLICZANIE NIELINIOWYCH FUNKCJI TRANSMITANCJI UKŁADÓW ELEKTRONICZNYCH.

5.1. Metoda potencjałów węzłowych obliczania nieliniowych funkcji transmitancji.

Do obliczania nieliniowych funkcji transmitancji układu elektronicznego zastosujemy metodę potencjałów węzłowych. Niech $\bar{y}(t) = [y_1(t), \dots, y_n(t)]^T$ oznacza wektor potencjałów węzłowych, a $\bar{\varphi}(t) = [\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)]^T$ wektor wymuszeń prądomotorycznych, gdzie $n+1$ jest ilością węzłów układu /rys.5.1/.



Rys.5.1. Ogólny schemat zastępczy układu elektronicznego stosowany do obliczania nieliniowych funkcji transmitancji.

Niech $\underline{L}$ będzie operatorem liniowym różniczkowo-całkowym w postaci macierzy, która odpowiada nieosobliwej /zakładamy istnienie $\underline{L}^{-1}$ / macierzy admitancyjnej $\underline{Y}(f)$ układu linearyzowanego. Załóżmy dalej, że nieliniowy układ elektroniczny da się opisać równaniem

$$\underline{L}y(t) = \bar{\varphi}(t) - \bar{g}_g(\bar{y}(t)) - \int_{-\infty}^t \bar{g}_1(\bar{y}(t)) dt - \frac{d}{dt} \bar{g}_c(\bar{y}(t)), \quad /5.1/$$

gdzie $\bar{g}_g(\cdot)$, $\bar{g}_1(\cdot)$ i $\bar{g}_c(\cdot)$ są funkcjami nieliniowymi, które odpowiadają nieliniowej konduktancji, indukcyjności i pojemności. Ponadto spełniają one warunek

$$\lim_{\|\bar{y}\| \rightarrow 0} \frac{\|\bar{g}_\bullet(\bar{y}(t))\|}{\|\bar{y}(t)\|} = 0, \quad /5.2/$$

tzn. nie zawierają części liniowych, które włączono do $\underline{L}$.

Jak można zauważyć równanie to jest uproszczone w stosunku do /3.3/, ale mimo to opisać nim można szeroką klasę układów elektronicznych /zakładamy tu, że układ nie zawiera elementów nieliniowych o opisie mieszanym, tzn. np. konduktancyjno-pojemnościowych, których prąd wyraża się wzorem $i = au_1 \cdot du_2/dt$, gdzie u_1 i u_2 są napięciami na różnych gałęziach układu/.

Stosując do /5.1/ transformatę Fouriera oznaczoną przez $\mathcal{F}$ otrzymamy

$$\begin{aligned} \underline{Y}(f)\bar{Y}(f) = \bar{\Phi}(f) - \mathcal{F}\{\bar{g}_g(\bar{y}(t))\} - \frac{1}{j2\pi f} \mathcal{F}\{\bar{g}_1(\bar{y}(t))\} + \\ - j2\pi f \mathcal{F}\{\bar{g}_c(\bar{y}(t))\}, \end{aligned} \quad /5.3/$$

gdzie

$$\begin{aligned}\bar{Y}(f) &= \mathcal{F}\{\bar{y}(t)\}, \\ \bar{\Phi}(f) &= \mathcal{F}\{\bar{\varphi}(t)\}, \\ \underline{Y}(f)\bar{Y}(f) &= \mathcal{F}\{\underline{L}\bar{y}(t)\}.\end{aligned}$$

Dalej, do każdej funkcji $\bar{g}_g(\cdot)$, $\bar{g}_1(\cdot)$, $\bar{g}_c(\cdot)$, zastosujemy rozwinięcie Taylora /zakładamy, że ono istnieje/ w postaci

$$\bar{g}_g(\bar{y}(t)) = \sum_{i=2}^{\infty} \underline{D}^{(i)}(\bar{g}_g(\bar{y}(t))) \bigg|_{\bar{y}=\bar{0}} \underbrace{\bar{y} * \bar{y} * \dots * \bar{y}}_i, \quad /5.4a/$$

$$\bar{g}_1(\bar{y}(t)) = \sum_{i=2}^{\infty} \underline{D}^{(i)}(\bar{g}_1(\bar{y}(t))) \bigg|_{\bar{y}=\bar{0}} \underbrace{\bar{y} * \bar{y} * \dots * \bar{y}}_i, \quad /5.4b/$$

$$\bar{g}_c(\bar{y}(t)) = \sum_{i=2}^{\infty} \underline{D}^{(i)}(\bar{g}_c(\bar{y}(t))) \bigg|_{\bar{y}=\bar{0}} \underbrace{\bar{y} * \bar{y} * \dots * \bar{y}}_i, \quad /5.4c/$$

gdzie $\underline{D}^{(i)}(\cdot)$ oraz działanie $*$ zdefiniowano w rozdz. 3.1 /wzory /3.8/ i /3.9//.

Podstawmy do /5.3/ $\bar{y}(t)$ w postaci /4.13/ oraz

$$\varphi_\nu(t) = \frac{1}{2} \sum_{\xi=1}^{M_\nu} e^{j2\pi f_\nu \xi t}, \quad \nu=1,2,\dots,N, \quad /5.5/$$

gdzie wszystkie $f_{\nu\xi}$ są niewspółmierne.

W tak otrzymanym równaniu porównajmy ze sobą składniki tych samych rzędów względem poszczególnych składowych wektora $\bar{y}(t)$ i o tych samych częstotliwościach, co da:

- dla funkcji pierwszego rzędu

$$\underline{Y}(f_{\nu}, \xi) \bar{H}_{0 \dots 1_{\nu} \dots 0}^{(1)}(f_{\nu}, \xi) = \bar{I}_{0 \dots 1_{\nu} \dots 0}^{(1)}(f_{\nu}, \xi) \quad /5.6a/$$

$$\bar{I}_{0 \dots 1_{\nu} \dots 0}^{(1)}(f_{\nu}, \xi) = [0, \dots, 1_{a_{\nu}}, \dots, 1_{b_{\nu}}, \dots, 0]^T,$$

$$\nu = 1, 2, \dots, N,$$

$$\xi = 1, 2, \dots, M_{\nu}$$

skąd

$$\bar{H}_{0 \dots 1_{\nu} \dots 0}^{(1)}(f_{\nu}, \xi) = \underline{Y}^{-1}(f_{\nu}, \xi) \bar{I}_{0 \dots 1_{\nu} \dots 0}^{(1)}(f_{\nu}, \xi) \quad /5.6b/$$

- dla funkcji drugiego rzędu

$$\bar{H}_{0 \dots 2_{\nu} \dots 0}^{(2)}(f_{\nu}, \xi_1, f_{\nu}, \xi_2) = \underline{Y}^{-1}(f_{\nu}, \xi_1 + f_{\nu}, \xi_2) \bar{I}_{0 \dots 2_{\nu} \dots 0}^{(2)}(f_{\nu}, \xi_1, f_{\nu}, \xi_2), \quad /5.7a/$$

$$\begin{aligned} \bar{I}_{0 \dots 2_{\nu} \dots 0}^{(2)}(f_{\nu}, \xi_1, f_{\nu}, \xi_2) = & -\underline{\Delta}^{(2)}(g, f_{\nu}, \xi_1 + f_{\nu}, \xi_2) \bar{H}_{0 \dots 1_{\nu} \dots 0}^{(1)}(f_{\nu}, \xi_1) * \\ & * \bar{H}_{0 \dots 1_{\nu} \dots 0}^{(1)}(f_{\nu}, \xi_2), \end{aligned}$$

$$\nu = 1, 2, \dots, N,$$

$$\xi_1, \xi_2 = 1, 2, \dots, M_{\nu}$$

$$\begin{aligned} \bar{H}_{0 \dots 1_{\nu} \dots 1_{\eta} \dots 0}^{(2)}(f_{\nu}, \xi_1; f_{\eta}, \xi_2) = & \underline{Y}^{-1}(f_{\nu}, \xi_1 + f_{\eta}, \xi_2) \bar{I}_{0 \dots 1_{\nu} \dots 1_{\eta} \dots 0}^{(2)}(\\ & f_{\nu}, \xi_1; f_{\eta}, \xi_2), \end{aligned} \quad /5.7b/$$

$$\begin{aligned} \bar{I}_{0 \dots 1_{\nu} \dots 1_{\eta} \dots 0}^{(2)}(f_{\nu}, \xi_1; f_{\eta}, \xi_2) = & -2 \underline{\Delta}^{(2)}(g, f_{\nu}, \xi_1 + f_{\eta}, \xi_2) \times \\ & \times \bar{H}_{0 \dots 1_{\nu} \dots 0}^{(1)}(f_{\nu}, \xi_1) * \bar{H}_{0 \dots 1_{\eta} \dots 0}^{(1)}(f_{\eta}, \xi_2), \end{aligned}$$

$$\eta, \nu = 1, 2, \dots, N, \quad \nu < \eta$$

$$\xi_1 = 1, 2, \dots, M_{\nu},$$

$$\xi_2 = 1, 2, \dots, M_{\eta},$$

gdzie wprowadzono oznaczenie

$$\underline{\Delta}^{(1)}(\bar{g}, f) = \underline{D}^{(1)}(\bar{g}_g(\cdot)) + \frac{1}{j2\pi f} \underline{D}^{(1)}(\bar{g}_1(\cdot)) + j2\pi f \underline{D}^{(1)}(\bar{g}_c(\cdot)), \quad /5.8/$$

- dla funkcji trzeciego rzędu

$$\begin{aligned} \bar{H}_{0...3\nu \cdot 0}^{(3)}(f_{\nu, \xi_1}, f_{\nu, \xi_2}, f_{\nu, \xi_3}) &= \underline{Y}^{-1}(f_{\nu, \xi_1} + f_{\nu, \xi_2} + f_{\nu, \xi_3}) \times \\ &\times \bar{I}_{0...3\nu \cdot 0}^{(3)}(f_{\nu, \xi_1}, f_{\nu, \xi_2}, f_{\nu, \xi_3}), \end{aligned} \quad /5.9a/$$

$$\begin{aligned} \bar{I}_{0...3\nu \cdot 0}^{(3)}(f_{\nu, \xi_1}, f_{\nu, \xi_2}, f_{\nu, \xi_3}) &= \\ &= -\underline{\Delta}^{(3)}(\bar{g}, f_{\nu, \xi_1} + f_{\nu, \xi_2} + f_{\nu, \xi_3}) \bar{H}_{0...1\nu \cdot 0}^{(1)}(f_{\nu, \xi_1}) * \bar{H}_{0...1\nu \cdot 0}^{(1)}(f_{\nu, \xi_2}) * \\ &\quad * \bar{H}_{0...1\nu \cdot 0}^{(1)}(f_{\nu, \xi_3}) + \\ &\quad + 2\underline{\Delta}^{(2)}(\bar{g}, f_{\nu, \xi_1} + f_{\nu, \xi_2} + f_{\nu, \xi_3}) \underline{G}_f^{(3)} \left\{ \bar{H}_{\dots}^{(2)}(\cdot) * \bar{H}_{\dots}^{(1)}(\cdot); f_{\nu, \xi_1}, f_{\nu, \xi_2}, f_{\nu, \xi_3} \right\}, \\ &\quad \nu = 1, 2, \dots, N, \\ &\quad \xi_1, \xi_2, \xi_3 = 1, 2, \dots, M_\nu, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{H}_{0...2\nu \cdot 1\eta \cdot 0}^{(3)}(f_{\nu, \xi_1}, f_{\nu, \xi_2}; f_{\eta, \xi_3}) &= \underline{Y}^{-1}(f_{\nu, \xi_1} + f_{\nu, \xi_2} + f_{\eta, \xi_3}) \times \\ &\times \bar{I}_{0...2\nu \cdot 1\eta \cdot 0}^{(3)}(f_{\nu, \xi_1}, f_{\nu, \xi_2}, f_{\eta, \xi_3}), \end{aligned} \quad /5.9b/$$

$$\begin{aligned} \bar{I}_{0...2\nu \cdot 1\eta \cdot 0}^{(3)}(f_{\nu, \xi_1}, f_{\nu, \xi_2}; f_{\eta, \xi_3}) &= \\ &= -3\underline{\Delta}^{(3)}(\bar{g}, f_{\nu, \xi_1} + f_{\nu, \xi_2} + f_{\eta, \xi_3}) \bar{H}_{0...1\nu \cdot 0}^{(1)}(f_{\nu, \xi_1}) * \bar{H}_{0...1\nu \cdot 0}^{(1)}(f_{\nu, \xi_2}) * \\ &\quad * \bar{H}_{0...1\eta \cdot 0}^{(1)}(f_{\eta, \xi_3}) + \\ &\quad + 2\underline{\Delta}^{(2)}(\bar{g}, f_{\nu, \xi_1} + f_{\nu, \xi_2} + f_{\eta, \xi_3}) \underline{G}_f^{(3)} \left\{ \bar{H}_{\dots}^{(2)}(\cdot) * \bar{H}_{\dots}^{(1)}(\cdot); f_{\nu, \xi_1}, f_{\nu, \xi_2}, f_{\eta, \xi_3} \right\}, \\ &\quad \eta, \nu = 1, 2, \dots, N; \nu < \eta; \xi_1, \xi_2 = 1, 2, \dots, M_\nu; \xi_3 = 1, 2, \dots, M_\eta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{H}_{0 \dots 1\nu \dots 1\eta \dots 1\varepsilon \dots 0}^{(3)}(f_{\nu, \xi_1}; f_{\eta, \xi_2}; f_{\varepsilon, \xi_3}) &= \underline{Y}^{-1}(f_{\nu, \xi_1} + f_{\eta, \xi_2} + f_{\varepsilon, \xi_3}) \times \\ &\times \bar{I}_{0 \dots 1\nu \dots 1\eta \dots 1\varepsilon \dots 0}^{(3)}(f_{\nu, \xi_1}; f_{\eta, \xi_2}; f_{\varepsilon, \xi_3}), \quad /5.9c/ \\ \bar{I}_{0 \dots 1\nu \dots 1\eta \dots 1\varepsilon \dots 0}^{(3)}(f_{\nu, \xi_1}; f_{\eta, \xi_2}; f_{\varepsilon, \xi_3}) &= \\ &= -6 \underline{\Delta}^{(3)}(\bar{g}, f_{\nu, \xi_1} + f_{\eta, \xi_2} + f_{\varepsilon, \xi_3}) \bar{H}_{0 \dots 1\nu \dots 0}^{(1)}(f_{\nu, \xi_1}) \bar{H}_{0 \dots 1\eta \dots 0}^{(1)}(f_{\eta, \xi_2}) \bar{H}_{0 \dots 1\varepsilon \dots 0}^{(1)}(f_{\varepsilon, \xi_3}) + \\ &+ 2 \underline{\Delta}^{(2)}(\bar{g}, f_{\nu, \xi_1} + f_{\eta, \xi_2} + f_{\varepsilon, \xi_3}) \bar{G}_f^{(3)}\left\{ \bar{H}^{(2)}(\cdot) \bar{H}^{(1)}(\cdot); f_{\nu, \xi_1}, f_{\eta, \xi_2}, f_{\varepsilon, \xi_3} \right\}, \end{aligned}$$

$$\nu, \eta, \varepsilon = 1, 2, \dots, N,$$

$$\nu < \eta < \varepsilon,$$

$$\xi_1 = 1, 2, \dots, M_\nu,$$

$$\xi_2 = 1, 2, \dots, M_\eta,$$

$$\xi_3 = 1, 2, \dots, M_\varepsilon$$

itd...

W ostatnich wzorach wprowadzono oznaczenie

$$\begin{aligned} \bar{G}_f^{(m)}\left\{ \bar{H}^{(a)}(\cdot) \bar{H}^{(b)}(\cdot) \bar{H}^{(c)}(\cdot) \dots \bar{H}^{(m-a-b)}(\cdot); \overbrace{f_{\nu, \xi_1}, f_{\eta, \xi_2}, \dots, f_{\varepsilon, \xi_3}}^m \right\} &= \\ &= \left\{ \sum_{k_{\xi_1, \nu}, \dots, k_{\xi_n, \nu}} \bar{H}_{k_{a,1}, \dots, k_{a,n}}^{(a)}(\cdot) \bar{H}_{k_{b,1}, \dots, k_{b,n}}^{(b)}(\cdot) \dots \bar{H}_{k_{m-a-b,1}, \dots, k_{m-a-b,n}}^{(m-a-b)}(\cdot) \times \right. \\ &\times \left. \prod_{\nu=1}^n \frac{k_{a,\nu}! \dots k_{m-a-b,\nu}!}{k_{\nu}!}; k_{a,\nu} + \dots + k_{m-a-b,\nu} = k_{\nu}; \nu = 1, \dots, n \right\} \quad /5.10/ \end{aligned}$$

W ten sposób uzyskuje się wybranie wszystkich iloczynów funkcji $\bar{H}^{(c)}(\cdot)$, które oddziaływując na siebie w elementach nieliniowych, dadzą sygnał o częstotliwości $f_{\nu, \xi_1} + f_{\eta, \xi_2} + \dots + f_{\varepsilon, \xi_3}$.

Na przykład

$$\begin{aligned} \zeta_f^{(3)} \left\{ \bar{H}_{0..}^{(2)}(\cdot) * \bar{H}_{0..}^{(1)}(\cdot); f_{\nu, \xi_1}, f_{\nu, \xi_2}, f_{\nu, \xi_3} \right\} = & \quad /5.11/ \\ = \left\{ \bar{H}_{0..2\nu..}^{(2)}(f_{\nu, \xi_1}, f_{\nu, \xi_2}) * \bar{H}_{0..1\eta..}^{(1)}(f_{\eta, \xi_3}) + \right. \\ + \left[\bar{H}_{0..1\nu..1\eta..}^{(2)}(f_{\nu, \xi_1}; f_{\eta, \xi_3}) * \bar{H}_{0..1\nu..}^{(1)}(f_{\nu, \xi_2}) \right] \frac{1}{2} + \\ + \frac{1}{2} \bar{H}_{0..1\nu..1\eta..}^{(2)}(f_{\nu, \xi_2}; f_{\eta, \xi_3}) * \bar{H}_{0..1\nu..}^{(1)}(f_{\nu, \xi_1}) \left. \right\} ; \\ \nu < \eta ; \xi_1 < \xi_2 < \xi_3 . \end{aligned}$$

Powyższa zależność jest odpowiednikiem symetryzacji wprowadzanej przez różnych autorów, np. [9, 79, 108], piszących na temat obliczania nieliniowych funkcji transmitancji. Symetryzacja ta polega na obliczaniu średniej arytmetycznej wszystkich iloczynów funkcji, dających częstotliwość wypadkową będącą sumą argumentów obliczanej nieliniowej funkcji transmitancji, przy czym sumowanie zachodzi po wszystkich możliwych przestawieniach częstotliwości składowych. Tak opisana symetryzacja i wzór /5.10/ dadzą ten sam wynik w przypadku układów jednowejściowych. Natomiast dla układów wielowejściowych wynik byłby niepoprawny. Na przykład wzór /5.11/ wyglądałby następująco

$$\begin{aligned} S^{(3)} \{ \cdot \} = & \left\{ \bar{H}_{0..2\nu..}^{(2)}(f_{\nu, \xi_1}, f_{\nu, \xi_2}) * \bar{H}_{0..1\eta..}^{(1)}(f_{\eta, \xi_3}) + \right. & /5.12/ \\ + \bar{H}_{0..2\nu..}^{(2)}(f_{\nu, \xi_2}, f_{\nu, \xi_1}) * \bar{H}_{0..1\eta..}^{(1)}(f_{\eta, \xi_3}) + \\ + \bar{H}_{0..1\nu..1\eta..}^{(2)}(f_{\nu, \xi_1}; f_{\eta, \xi_3}) * \bar{H}_{0..1\eta..}^{(1)}(f_{\nu, \xi_2}) + \\ + \bar{H}_{0..1\nu..1\eta..}^{(2)}(f_{\eta, \xi_3}; f_{\nu, \xi_1}) * \bar{H}_{0..1\nu..}^{(1)}(f_{\nu, \xi_2}) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \bar{H}_{0...1\nu.1\eta.o}^{(2)}(f_{\nu,\xi_2}; f_{\eta,\xi_3}) * \bar{H}_{0...1\nu.o}^{(1)}(f_{\nu,\xi_1}) + \\
 & + \bar{H}_{0...1\nu.1\eta.o}^{(2)}(f_{\eta,\xi_3}; f_{\nu,\xi_2}) * \bar{H}_{0...1\nu.o}^{(1)}(f_{\nu,\xi_1}) \Big\} / 6.
 \end{aligned}$$

Widać, że ostatnia zależność nie będzie poprawna, co wiąże się z własnością nieliniowych funkcji transmitancji przedstawioną w rozdziale 4.3 /wzór /4.22/ i uwaga o nim/.

Równania /5.6/ do /5.10/ pokazują, że analiza układu nieliniowego, oparta na obliczaniu nieliniowych funkcji transmitancji, polega na wielokrotnym rozwiązywaniu równań liniowych, co niewątpliwie jest jej zaletą. Równania te pokazują także, że przy obliczaniu nieliniowych funkcji transmitancji wyższych rzędów złożoność wyrażeń wzrasta tak, że stają się one trudne do interpretacji, a ich obliczanie zaczyna być uciążliwe. Jest to bezpośrednią przyczyną faktu, że obliczeń tych nie przeprowadza się w praktyce dla funkcji wyższego rzędu niż trzeci, np. $[20, 103]$, co powoduje, że modelem układu elektronicznego staje się wielomian, a nie szereg Volterry. W niniejszej pracy obliczono również funkcje rzędu czwartego i piątego, co pozwoliło na wyciągnięcie pewnych ogólniejszych wniosków /rozd.7/.

Kończąc ten rozdział warto zauważyć, że podobne rozważania można by przeprowadzić interpretując $\bar{y}(t)$ w /3.3/ jako wektor prądów oczkowych czy wektor stanu, bądź inny zespół zmiennych opisujących układ elektroniczny. Należałoby wtedy oczywiście odpowiednio inaczej zinterpretować pozostałe wielkości w równaniu /5.1/.

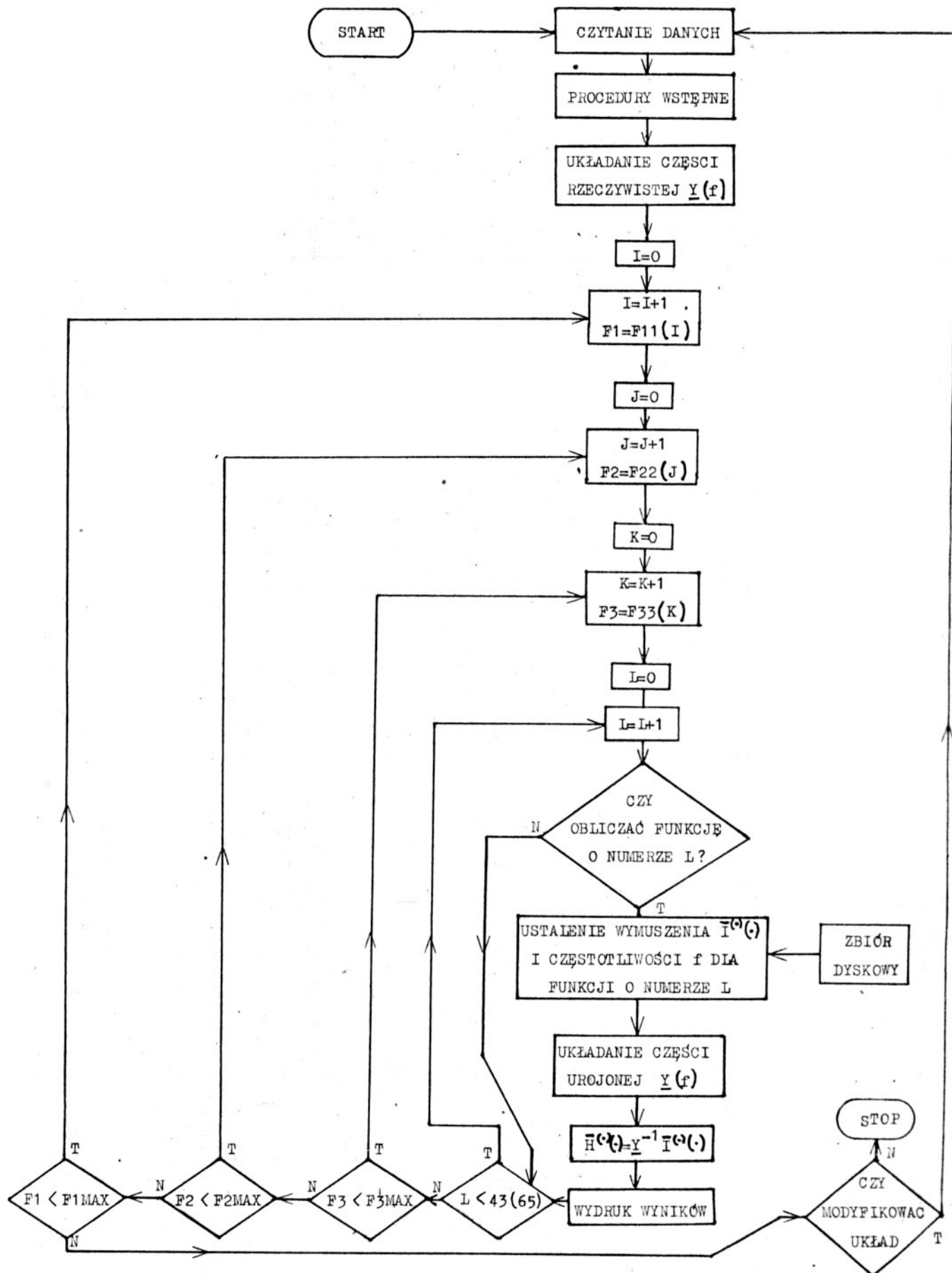
5.1.1. Programy komputerowe WIVO i VOLT obliczania nieliniowych funkcji transmitancji.

Metodę obliczania nieliniowych funkcji transmitancji według sposobu pokazanego w rozdz. 5.1 zrealizowano w programach komputerowych WIVO i VOLT [111, 112]. Pierwszy z nich umożliwia obliczanie funkcji $\bar{H}^{(l)}(\cdot)$ do piątego rzędu włącznie dla dwóch źródeł sygnału, a drugi pozwala obliczać te funkcje do trzeciego rzędu dla trzech źródeł sygnału.

Ogólny schemat algorytmu obu programów przedstawia rys. 5.2 /szczegółowy opis algorytmu znaleźć można w [112] /.

Pierwszą procedurą obu programów jest czytanie danych o układzie. Przeczytane w niej zostają dane dotyczące elementów nieliniowych i liniowych, struktury sieci, częstotliwości, dla których dokonać należy analizy układu oraz listy funkcji $\bar{H}^{(l)}(\cdot)$, które mają być obliczane. Numeruje się je w obu programach indeksem L /w programie VOLT przy trzech wymuszeniach możliwych jest do obliczenia 43, a w programie WIVO przy dwóch wymuszeniach 65 różnych funkcji $\bar{H}^{(l)}(\cdot)$ /.

Zaznaczone na rys. 5.2 procedury wstępne obejmują takie czynności jak znalezienie, na podstawie danych, ilości węzłów układu i ustalenie węzła odniesienia. Ze względu na to, że programy wykorzystują metodę macierzy rzadkich rozwiązywania układu równań liniowych, dokonuje się tu również ułożenia wektorów zapamiętujących strukturę macierzy admitancyjnej układu, tzn. położenie jej elementów nieliniowych. Wykorzystano do tego celu tzw. metodę łańcuchową [27]. Na procedury wstępne składa się również podprogram optymalnego przenumerowania węzłów układu



RYS.5.2. UPROSZCZONY SCHEMAT ALGORYTMU PROGRAMÓW WIVO I VOLT /W PROGRAMIE WIVO NIE WYSTĘPUJE ZMIENNA F3 I Z NIĄ ZWIĄZANE, A W PROGRAMIE VOLT BRAK JEST ZBIÓRU DYSKOWEGO/.

zaczepnięty z [11,19], którego celem jest minimalizacja ilości elementów niezerowych macierzy admitancyjnej $\underline{Y}(f)$, a co za tym idzie, skrócenie czasu działania programów.

W dalszej części programów układu się część rzeczywistą macierzy $\underline{Y}(f)$. Następnie ustala się częstotliwości poszczególnych źródeł sygnału /w programie WIVO instrukcje związane z F3 - rys. 5.2 - nie występują/. Zwiększywszy indeks numeru funkcji L sprawdza się, czy funkcję tę należy obliczać i jeżeli tak, to dla danego L oblicza się częstotliwość wypadkową dla funkcji $\bar{H}^{(L)}(\cdot)$ jako sumę jej argumentów oraz /jeżeli dana funkcja $\bar{H}^{(L)}(\cdot)$ nie jest akurat funkcją liniową/ ustala się wymuszenie $\bar{I}^{(L)}(\cdot)$ zgodnie ze wzorami /5.7/ do /5.11/, co jest najważniejszą procedurą obu programów. Nie dokonuje się jednak tego dokładnie jak podano w tych zależnościach, gdyż nie opłaca się układać macierzy $\underline{D}^{(L)}(\cdot)$ oraz wektorów $\bar{Y} * \bar{Y} * \dots * \bar{Y}$ jako wymagających dużej pamięci komputera, a wykonuje się to przez bezpośrednie obliczanie składowych wektora $\underline{D}^{(L)}(\cdot) \bar{Y} * \bar{Y} * \dots * \bar{Y}$ [112].

Jak widać ze wzorów /5.7/ - /5.11/ do ustalenia wektora $\bar{I}^{(L)}(\cdot)$ niezbędna jest znajomość poprzednio obliczonych wektorów $\bar{H}^{(L)}(\cdot)$ niższych rzędów. Aby zapamiętać, które z funkcji $\bar{H}^{(L)}(\cdot)$, w oddziaływaniu na siebie w elementach nieliniowych, dadzą składową o częstotliwości obliczanej właśnie funkcji o numerze L, w programie WIVO użyto roboczego zbioru dyskowego otwartego do czytania. W programie VOLT, ze względu na mniejszą ilość obliczanych funkcji $\bar{H}^{(L)}(\cdot)$, wykorzystuje się do tego celu pamięć operacyjną, co z kolei przyspiesza przebieg programu w stosunku do metody poprzedniej.

W następnej części programów dokonuje się, dla obliczonej już poprzednio częstotliwości f , ułożenia części urojonej macierzy $\underline{Y}(f)$, a następnie rozwiązuje liniowy układ równań

$$\underline{Y}(f) \bar{H}^{(i)}(\cdot) = \bar{I}^{(i)}(\cdot)$$

będący odpowiednikiem wzorów /5.6/ - /5.11/. W programach wykorzystano, do rozwiązywania liniowego układu równań, algorytm Crouta, rozkładu na czynniki trójkątne [27,30] LU o dużej szybkości działania.

W dalszej części programów sprawdza się, czy obliczono już wszystkie żądane funkcje $\bar{H}^{(i)}(\cdot)$ i jeżeli nie, to oblicza się następne, a jeżeli tak, to sprawdza się, czy wyczerpano listę punktów częstotliwościowych sygnałów wejściowych. W przypadku jej niewyczerpania następuje podstawienie kolejnej częstotliwości danego źródła sygnału i ponowna analiza układu.

W programach przewidziano również możliwość, po zakończeniu jednej analizy, zmian prawie wszystkich parametrów układu i powtórzenia jego analizy.

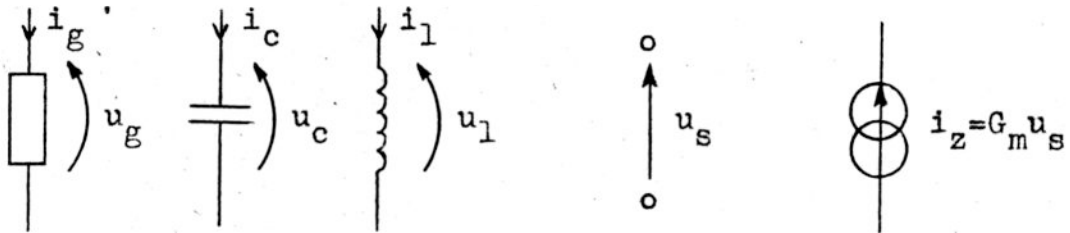
5.1.2. Model układu elektronicznego dostosowany do analizy programami WIVO i VOLT.

Jak już wcześniej zaznaczono, aby zanalizować układ elektroniczny metodą proponowaną w rozdz.5.1 powinien on dać się opisać równaniem /5.1/ /lub /5.3//, gdzie założono nieosobliwość macierzy $\underline{Y}(f)$ /istnienie operatora $\underline{L}^{-1}$ /. Należy tu zaznaczyć, że model układu elektronicznego powinien być słuszny dla szerokiego pasma częstotliwości włączając częstotliwość zerową

/gdy oblicza się np. funkcję $\bar{H}_2^{(2)}(f, -f)$ częstotliwość wypadkowa wynosi zero, a gdy obliczamy $\bar{H}_5^{(5)}(f, f, f, f, f)$, to częstotliwość wypadkowa wynosi $5f$ /.

Lista elementów układu elektronicznego akceptowana przez programy WIVO i VOLT jest następująca:

a/ elementy liniowe /rys.5.3/:



Rys.5.3. Elementy liniowe wykorzystane w programach WIVO i VOLT.

1/ konduktancje liniowe opisane równaniem

$$i_g = G u_g, \quad /5.13/$$

2/ kondensatory liniowe opisane równaniem

$$i_c = C \frac{d}{dt} u_c, \quad /5.14/$$

3/ indukcyjności liniowe opisane zależnością

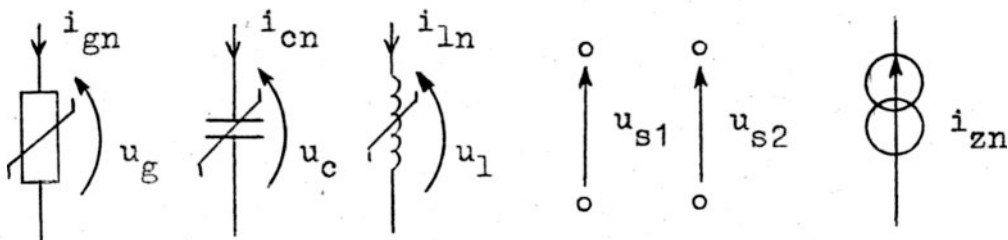
$$i_l = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u_l dt, \quad /5.15/$$

4/ źródła prądowe sterowane napięciem opisane zależnością

$$i_z = G_m u_s, \quad /5.16/$$

- 5/ autonomiczne źródło prądowe jako źródło sygnału harmonicznego,
- b/ elementy nieliniowe /rys.5.4/ - dla programu VOLT podane poniżej wielomiany obcina się do trzech wyrazów; sposób uzyskania poniższych zależności dla kilku przypadków elementów nieliniowych podaje dodatek A - :
- 6/ konduktancje nieliniowe o równaniu

$$i_{gn} = G u_g + G_2 u_g^2 + G_3 u_g^3 + G_4 u_g^4 + G_5 u_g^5, \quad /5.17/$$



Rys.5.4. Elementy nieliniowe używane w programach WIVO i VOLT.

- 7/ pojemności nieliniowe opisane zależnością

$$i_{cn} = \frac{d}{dt} (C u_c + C_2 u_c^2 + C_3 u_c^3 + C_4 u_c^4 + C_5 u_c^5), \quad /5.18/$$

- 8/ indukcyjności nieliniowe opisane wzorem [20, 25]

$$i_{ln} = \int_{-\infty}^t \left(\frac{1}{L} u_1 + D_2 u_1^2 + D_3 u_1^3 + D_4 u_1^4 + D_5 u_1^5 \right) dt, \quad /5.19/$$

- 9/ źródła prądowe sterowane dwoma napięciami o równaniu

$$i_{zn} = \sum_{\substack{i+j \leq 5 \\ i,j=0 \\ i+j \geq 1}} G_{ij} u_{s1}^i u_{s2}^j \quad /5.20/$$

Programy akceptują również takie elementy jak złącze półprzewodnikowe, czy złącze Zenera, ale należy mieć świadomość, że elementy te zostaną zawsze zastąpione modelami zgodnymi ze wzorami /5.17/ - /5.20/.

Jeżeli w danym układzie elektronicznym występują inne elementy, nie przedstawione wyżej, to należy starać się o ich zastąpienie elementami tu opisanymi np. transformator zastępuje się kilkoma indukcyjnościami, z których część ma wartość ujemną [47,48] itp.

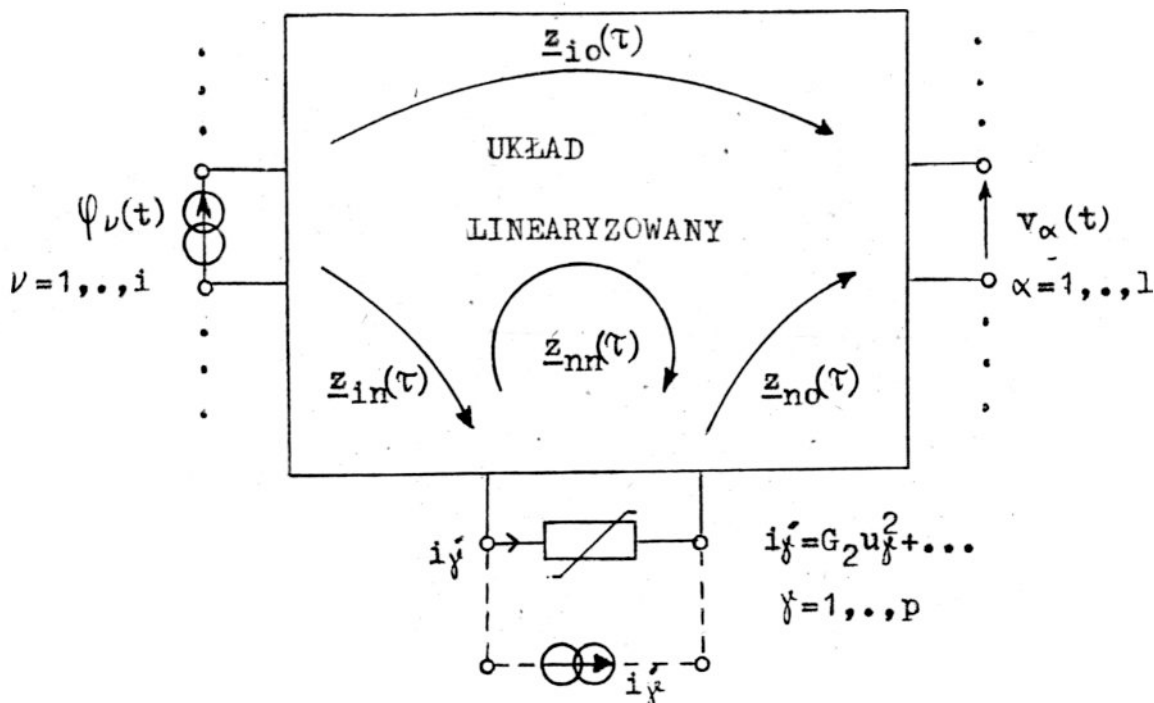
5.2. Metoda transmitancji układu linearyzowanego obliczania nieliniowych funkcji transmitancji.

W pracy [17] zaproponowano metodę obliczania nieliniowych funkcji transmitancji wykorzystującą opis układu liniowych funkcji transmitancji zmiennej s . Metodę tę wykorzystano do analizy układów jednowejściowych.

Koncepcję opisu układu w postaci symbolicznej wykorzystamy i tu, stosując ją do opracowania nowej metody obliczania nieliniowych funkcji transmitancji umożliwiającej analizę układów wielootworowych.

Postąpimy jak poprzednio wydzielając z układu nieliniowego część liniową wraz z linearyzowanymi elementami nieliniowymi. Wyodrębnimy również otwory wejściowe, wyjściowe oraz elementy nieliniowe /rys.5.5/.

Założmy dalej, że znamy opis układu linearyzowanego w postaci macierzy napięciowo-prądowych odpowiedzi impulsowych:



Rys.5.5. Ogólny schemat zastępczy układu elektronicznego do obliczania nieliniowych funkcji transmitancji metodą transmitancji układu linearyzowanego.

- $\underline{z}_{io}(\tau)$ o wymiarze $i \times l$, której składowe opisują odpowiedzi impulsowe na wyjściach układu, gdy pobudzone są jego wejścia,
- $\underline{z}_{in}(\tau)$ o wymiarze $i \times p$, składającej się z odpowiedzi impulsowych na elementach nieliniowych, gdy pobudzone są wejścia układu,
- $\underline{z}_{no}(\tau)$ o wymiarze $p \times l$ odpowiedzi impulsowych na wyjściach układu, gdy pobudzenia podano na wrota elementów nieliniowych,
- $\underline{z}_{nn}(\tau)$ o wymiarze $p \times p$ odpowiedzi impulsowych na elementach nieliniowych, gdy pobudzone są wrota elementów nieliniowych.

Przyjmując, że każde napięcie na elemencie nieliniowym można przedstawić w postaci szeregu Volterry /4.13/ oraz zakładając, że wymuszenia mają postać

$$\varphi_\nu(t) = \sum_{\xi=1}^{M_\nu} \frac{1}{2} e^{j2\xi f_\nu t} \xi^\nu \quad /5.21/$$

gdzie $f_{\nu, \xi}$ są niewspółmierne, będziemy mieli

$$u_{\mu}(t) = \frac{1}{2} \sum_{k_{\nu}} \sum_{l_{\nu, \xi}} B(1, k_{\nu}, l_{\nu, \xi}) H_{k_1, \dots, k_n}^{(m), \mu}(\dots) e^{j2\pi \left(\sum_{\nu} \sum_{\xi} l_{\nu, \xi} f_{\nu, \xi} \right) t} \quad /5.22/$$

$\mu = 1, 2, \dots, p$

i podobnie dla napięć wyjściowych

$$v_{\alpha}(t) = \frac{1}{2} \sum_{k_{\nu}} \sum_{l_{\nu, \xi}} B(1, k_{\nu}, l_{\nu, \xi}) K_{k_1, \dots, k_n}^{(m), \alpha}(\dots) e^{j2\pi \left(\sum_{\nu} \sum_{\xi} l_{\nu, \xi} f_{\nu, \xi} \right) t}, \quad /5.23/$$

$\alpha = 1, 2, \dots, l$

Przy tych założeniach spełnione będą równania

$$\bar{v}^{(1)}(t) = \int_{-\infty}^t \underline{z}_{io}(t-\tau) \bar{\varphi}(\tau) d\tau, \quad /5.24/$$

$$\bar{u}^{(1)}(t) = \int_{-\infty}^t \underline{z}_{in}(t-\tau) \bar{\varphi}(\tau) d\tau, \quad /5.25/$$

$$\begin{aligned} \bar{v}'(t) = \int_{-\infty}^t \underline{z}_{no}(t-\tau) \left\{ \sum_{i=2}^{\infty} \left[\underline{D}^{(i)}(\bar{g}_g) + \frac{d}{d\tau} \underline{D}^{(i)}(\bar{g}_c) + \right. \right. \\ \left. \left. + \int_{-\infty}^{\tau} d\tau' \underline{D}^{(i)}(\bar{g}_1) \right] \underbrace{\bar{u}(\tau) * \bar{u}(\tau) * \dots * \bar{u}(\tau)}_i \right\} d\tau, \quad /5.26/ \end{aligned}$$

$$\bar{u}(t) = \int_{-\infty}^t \underline{z}_{nn}(t-\tau) \left\{ \sum_{i=2}^{\infty} \left[\underline{D}^{(i)}(\bar{g}_g) + \frac{d}{d\tau} \underline{D}^{(i)}(\bar{g}_o) + \right. \right. \\ \left. \left. + \int_{-\infty}^{\tau} d\tau \underline{D}^{(i)}(\bar{g}_1) \right] \underbrace{\bar{u}(\tau) * \bar{u}(\tau) * \dots * \bar{u}(\tau)}_i \right\} d\tau, \quad /5.27/$$

gdzie $\bar{g}_g(\cdot)$, $\bar{g}_1(\cdot)$, $\bar{g}_o(\cdot)$ określono jak w /5.1/, z tym, że ich argumentem jest tu $\bar{u}(t)$, a nie $\bar{y}(t)$, a $\bar{v}^{(1)}(t)$ oznacza składnik rzędu pierwszego z /5.23/. Poza tym $\bar{v}'(t) = \bar{v}(t) - \bar{v}^{(1)}(t)$ i podobnie rzecz się ma z /5.22/ i /5.25/ oraz /5.27/.

Podstawiając /5.21/ - /5.23/ do /5.24/ - /5.27/ oraz, we wszystkich równaniach, porównując składniki o tych samych rzędach, a co za tym idzie, o tych samych czynnikach $\exp(j2\pi ft)$ oraz stosując przekształcenie Fouriera /przez $\underline{z}_{i0}(f)$ oznaczmy transformatę Fouriera $\underline{z}_{i0}(\tau)$ - i podobnie pozostałe macierze/ otrzymamy

- dla funkcji rzędu pierwszego

$$\bar{H}_{0 \dots 1\nu \dots 0}^{(1)}(f_{\nu, \xi}) = \underline{z}_{i0}(f_{\nu, \xi}) [0, \dots, 1_{\nu}, \dots, 0]^T, \quad /5.28a/$$

$$\bar{K}_{0 \dots 1\nu \dots 0}^{(1)}(f_{\nu, \xi}) = \underline{z}_{in}(f_{\nu, \xi}) [0, \dots, 1_{\nu}, \dots, 0]^T, \quad /5.28b/$$

$$\nu = 1, 2, \dots, i,$$

$$\xi = 1, 2, \dots, M_{\nu},$$

- dla funkcji drugiego rzędu /napiszemy tu tylko jedną/

$$\bar{H}_{0 \dots 1\nu \dots 1\eta \dots 0}^{(2)}(f_{\nu, \xi_1}; f_{\eta, \xi_2}) = \underline{z}_{n0}(f_{\nu, \xi_1} + f_{\eta, \xi_2}) \bar{I}_{0 \dots 1\nu \dots 1\eta \dots 0}^{(2)}(f_{\nu, \xi_1}; \\ ; f_{\eta, \xi_2}) \quad /5.29a/$$

$$\bar{K}_{0 \dots 1\nu \cdot 1\eta \cdot 0}^{(2)}(f_{\nu, \xi_1}; f_{\eta, \xi_2}) = \underline{Z}_{nn}(f_{\nu, \xi_1} + f_{\eta, \xi_2}) \bar{I}_{0 \dots 1\nu \cdot 1\eta \cdot 0}^{(2)}(f_{\nu, \xi_1}; f_{\eta, \xi_2}), \quad /5.29b/$$

gdzie

$$\begin{aligned} \bar{I}_{0 \dots 1\nu \cdot 1\eta \cdot 0}^{(2)}(f_{\nu, \xi_1}; f_{\eta, \xi_2}) = \\ = 2 \Delta^{(2)}(\bar{g}, f_{\nu, \xi_1} + f_{\eta, \xi_2}) \bar{K}_{0 \dots 1\nu \cdot 0}^{(1)}(f_{\nu, \xi_1}) * \bar{K}_{0 \dots 1\eta \cdot 0}^{(1)}(f_{\eta, \xi_2}), \quad /5.29c/ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta, \nu &= 1, 2, \dots, i, \\ \eta &< \nu, \\ \xi_1 &= 1, 2, \dots, M_\nu, \\ \xi_2 &= 1, 2, \dots, M_\eta, \end{aligned}$$

- dla funkcji trzeciego rzędu /również wypiszemy tu tylko jedną funkcję/

$$\begin{aligned} \bar{H}_{0 \dots 1\nu \cdot 1\eta \cdot 1\varepsilon \cdot 0}^{(3)}(f_{\nu, \xi_1}; f_{\eta, \xi_2}; f_{\varepsilon, \xi_3}) = \underline{Z}_{no}(f_{\nu, \xi_1} + f_{\eta, \xi_2} + f_{\varepsilon, \xi_3}) \times \quad /5.30a/ \\ \times \bar{I}_{0 \dots 1\nu \cdot 1\eta \cdot 1\varepsilon \cdot 0}^{(3)}(f_{\nu, \xi_1}; f_{\eta, \xi_2}; f_{\varepsilon, \xi_3}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{K}_{0 \dots 1\nu \cdot 1\eta \cdot 1\varepsilon \cdot 0}^{(3)}(f_{\nu, \xi_1}; f_{\eta, \xi_2}; f_{\varepsilon, \xi_3}) = \underline{Z}_{nn}(f_{\nu, \xi_1} + f_{\eta, \xi_2} + f_{\varepsilon, \xi_3}) \times \quad /5.30b/ \\ \times \bar{I}_{0 \dots 1\nu \cdot 1\eta \cdot 1\varepsilon \cdot 0}^{(3)}(f_{\nu, \xi_1}; f_{\eta, \xi_2}; f_{\varepsilon, \xi_3}), \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} \bar{I}_{0 \dots 1\nu \cdot 1\eta \cdot 1\varepsilon \cdot 0}^{(3)}(f_{\nu, \xi_1}; f_{\eta, \xi_2}; f_{\varepsilon, \xi_3}) = \\ = 2 \Delta^{(2)}(\bar{g}, f_{\nu, \xi_1} + f_{\eta, \xi_2} + f_{\varepsilon, \xi_3}) \bigcup_f^{(3)} \left\{ \bar{K}_{\dots}^{(1)}(\cdot) * \bar{K}^{(2)}(\cdot); f_{\nu, \xi_1}, f_{\eta, \xi_2}, f_{\varepsilon, \xi_3} \right\} + \\ + 6 \Delta^{(3)}(\bar{g}, f_{\nu, \xi_1} + f_{\eta, \xi_2} + f_{\varepsilon, \xi_3}) \bar{K}_{0 \dots 1\nu \cdot 0}^{(1)}(f_{\nu, \xi_1}) * \bar{K}_{0 \dots 1\eta \cdot 0}^{(1)}(f_{\eta, \xi_2}) * \\ * \bar{K}_{0 \dots 1\varepsilon \cdot 0}^{(1)}(f_{\varepsilon, \xi_3}), \quad /5.30c/ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon, \eta, \nu &= 1, 2, \dots, 1, \\ \varepsilon &< \eta < \nu, \quad /5.30c/ \\ \xi_1 &= 1, 2, \dots, M_\nu, \\ \xi_2 &= 1, 2, \dots, M_\eta, \\ \xi_3 &= 1, 2, \dots, M_\varepsilon, \end{aligned}$$

Symbole $\underline{D}^{(\cdot)}(\cdot)$, $\underline{\Delta}^{(\cdot)}(\cdot)$ i $\underline{G}_i^{(\cdot)}\{\cdot\}$ zdefiniowano wcześniej.

Opuścimy wypisywanie funkcji wyższych rzędów. Nadmienimy tylko, że w ogólnym przypadku

$$\begin{aligned} \overline{H}_{k_1, \dots, k_i}^{(m)}(f_{1,1}, \dots; \dots; \dots, f_{1,k_i}) &= \quad /5.31a/ \\ &= \underline{Z}_{no} \left(\sum_{\nu=1}^1 \sum_{\substack{k_\nu \geq 0 \\ k_1 + \dots + k_i = m}}^{M_\nu} f_{\nu, k_\nu} \right) \overline{I}_{k_1, \dots, k_i}^{(m)}(f_{1,1}, \dots; \dots; \dots, f_{1,k_i}) \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} \overline{K}_{k_1, \dots, k_i}^{(m)}(f_{1,1}, \dots; \dots; \dots, f_{1,k_i}) &= \quad /5.31b/ \\ &= \underline{Z}_{nn} \left(\sum_{\nu=1}^1 \sum_{\substack{k_\nu \geq 0 \\ k_1 + \dots + k_i = m}}^{M_\nu} f_{\nu, k_\nu} \right) \overline{I}_{k_1, \dots, k_i}^{(m)}(f_{1,1}, \dots; \dots; \dots, f_{1,k_i}), \end{aligned}$$

gdzie

$$\overline{I}_{k_1, \dots, k_i}^{(m)}(f_{1,1}, \dots; \dots; \dots, f_{1,k_i}) = \Psi \left\{ \overline{K}^{(a)}(\cdot) \times \overline{K}^{(b)}(\cdot) \times \dots \times \overline{K}^{(m-a-b)}(\cdot) \right\}, \quad /5.31c/$$

a $\Psi(\cdot)$ jest pewną funkcją, której argumentami są wielowymiarowe funkcje transmitancji $\overline{K}^{(c)}(\cdot)$ do rzędu $m-1$ włącznie, przy czym każdy składnik $\Psi(\cdot)$ zawiera iloczyn takich funkcji, że suma

ich rzędów względem każdej składowej $\varphi_\nu(t)$ wektora $\bar{\varphi}(t)$ wynosi odpowiednio k_ν . Należy również zauważyć, że $\Psi(\cdot)$ zawiera wszystkie składniki będące iloczynami takich funkcji, że ich wypadkowa częstotliwość jest równa $f_{1,1} + \dots + f_{i,k_i}$.

Na zakończenie warto podkreślić, że przytoczone wzory słuszne będą też przy innej interpretacji $\underline{z}(\cdot)$. Na przykład mogą one opisywać transmitancje prądowo-napięciowe, ale wtedy również wymuszenia należy zastąpić źródłami sił elektromotorycznych, elementy nieliniowe opisać zależnościami $u=z(i)$ zamiast $i=g(u)$, a odpowiedź układu będzie prądem którejś z gałęzi układu.

5.2.1. Realizacja programowa metody transmitancji układu linearyzowanego.

Stosując sposób obliczania nieliniowych funkcji transmitancji podany w rozdz. 5.2 napisano program komputerowy VITO /szczegółowy algorytm prezentuje [113]/.

Danymi wejściowymi tego programu są macierze $\underline{Z}_{io}(f)$, $\underline{Z}_{no}(f)$, $\underline{Z}_{in}(f)$ i $\underline{Z}_{nn}(f)$ o składowych w postaci funkcji wymiernych do trzydziestego stopnia /muszą one być obliczone innym programem/, a obliczenia przebiegają zgodnie ze wzorami /5.28/ - /5.30/ i nie wymagają stosowania tak dużego aparatu metod numerycznych jak programy z rozdz. 5.1.1.

Program VITO oblicza funkcje $\bar{H}^{(j)}(\cdot)$ do piątego rzędu włącznie dla układu pięciowejsciowego o jednym wyjściu. W przypadku układów wielowyjściowych należy zastosować analizę wielokrotną dla każdego wyjścia osobno.

Podobnie jak w programach opisanych w rozdz. 5.1.1 wektora

$\bar{I}^{(i)}(\cdot)$ nie oblicza się korzystając z ogólnych zależności, co wymagałoby m.in. układania macierzy $\underline{D}^{(i)}(\cdot)$, lecz przez bezpośrednie obliczanie składowych wektora $\bar{I}^{(i)}(\cdot)$ pochodzących od poszczególnych nieliniowości, co skraca czas obliczeń i zmniejsza niezbędny obszar pamięci operacyjnej komputera.

Rezultaty tego rozdziału można sformułować następująco:

- podano dwie metody obliczania nieliniowych funkcji transmitancji dla wielootworowych, nieliniowych układów elektronicznych,
- wykazano, że własność tylko częściowej symetrii nieliniowych funkcji transmitancji /rozd.4.3/ zmienia w sposób istotny /wzory /5.11/ i /5.12// metodę analizy układów wielootworowych w porównaniu do układów jednowejściowych,
- prezentując oba sposoby obliczania nieliniowych funkcji transmitancji użyto operatorów $\underline{D}^{(i)}(\cdot)$, $\underline{\Delta}^{(i)}(\cdot)$ i $\underline{G}_f^{(i)}(\cdot)$ niespotkanych przez autora w znanej mu literaturze, a ułatwiających opis formalny obu metod,
- sposób obliczania nieliniowych funkcji transmitancji metodą potencjałów węzłowych podaną w rozdz.5.1 zrealizowano w programach komputerowych WIVO i VOLT. Natomiast metoda zaproponowana przez autora w rozdz.5.2 została wykorzystana do napisania programu o symbolicznej nazwie VITO.

6. PRZYKŁADY ANALIZY STANU USTALONEGO NIELINIOWYCH UKŁADÓW ELEKTRONICZNYCH METODĄ SZEREGÓW VOLTERRY.

Poniżej przedstawiono wyniki analizy trzech układów wielkiej częstotliwości za pomocą szeregu Volterry wykorzystując do tego celu przedstawione w rozdziale 5.2 programy komputerowe. W analizie zastosowano modele elementów biernych o wartościach parametrów określonych na podstawie pomiarów. Parametry modeli zastępczych tranzystorów zidentyfikowano na podstawie danych katalogowych i pomiarowych wykorzystując metody podane w [108].

Wyniki analizy numerycznej porównano, w większości przypadków, z wynikami pomiarów nieliniowych funkcji transmitancji dokonanymi według sposobu opisanego poniżej.

6.1. Bezpośredni sposób pomiaru nieliniowych funkcji transmitancji.

Zajmiemy się bezpośrednią metodą częstotliwościową pomiaru nieliniowych funkcji transmitancji pomijając metody czasowe [65, 91].

Jak pokazano w rozdziale 4.2 odpowiedź układu nieliniowego na wymuszenie

$$\varphi_{\nu}(t) = \sum_{\xi=1}^{M_{\nu}} \frac{A_{\nu, \xi}}{2} e^{j2\pi f_{\nu, \xi} t}, \quad /6.1/$$

$\nu = 1, 2, \dots, n,$

gdzie wszystkie $f_{\nu, \xi}$ są niewspółmierne, ma postać

$$y_{\alpha}(t) = \frac{1}{2} \sum_{k_{\nu}} \sum_{l_{\nu\xi}} B(\underline{A}_{\nu\xi}, k_{\nu}, l_{\nu\xi}) H_{k_1, \dots, k_n}^{(m), \alpha}(\dots) e^{j2\pi(\sum_{\nu} \sum_{\xi} l_{\nu\xi} f_{\nu\xi})t}, \quad /6.2/$$

$$\nu = 1, 2, \dots, n.$$

W tym wypadku pomiar odpowiedniej funkcji $H_{k_1, \dots, k_n}^{(m), \alpha}(f_{1,1}, \dots; \dots, f_{n,k_n})$ polega na pomiarze składowej sygnału $y_{\alpha}(t)$ /uwzględniając współczynnik $B(\cdot)$ / o częstotliwości będącej sumą jej argumentów, co jest bezpośrednim wynikiem interpretacji fizycznej tej funkcji.

W rzeczywistości jednak, sprawa ta nie jest taka prosta, gdyż wymuszenie w postaci /6.1/ w praktyce nie występuje. Najczęściej stosowany, harmoniczny sygnał pomiarowy ma postać

$$\psi(t) = |\underline{A}| \cos(\omega t + \psi) = \frac{1}{2}(\underline{A} e^{j2\pi f t} + \underline{A}^* e^{-j2\pi f t}), \quad /6.3/$$

a tu f i $-f$ są wymiennie zależne.

Problem ten można jednak rozwiązać. Wyjaśnimy to na przykładzie układu dwuwęściowego o jednym wyjściu.

Niech wymuszenie w tym przypadku ma postać

$$\begin{aligned} \psi_1(t) = & \frac{1}{2}(\underline{A}_{1,1} e^{j2\pi f_{1,1} t} + \underline{A}_{1,1}^* e^{-j2\pi f_{1,1} t}) + \\ & + \frac{1}{2}(\underline{A}_{1,2} e^{j2\pi f_{1,2} t} + \underline{A}_{1,2}^* e^{-j2\pi f_{1,2} t}), \end{aligned} \quad /6.4/$$

$$\psi_2(t) = \frac{1}{2}(\underline{A}_{2,1} e^{j2\pi f_{2,1} t} + \underline{A}_{2,1}^* e^{-j2\pi f_{2,1} t}).$$

i przypuścmy, że chcemy zmierzyć funkcję $H_{2,1}^{(3)}(f_{1,1}, f_{1,2}; f_{2,1})$.

Amplituda składowej sygnału $y(t)$ takiego układu o częstotliwości $f_{1,1}+f_{1,2}+f_{2,1}$ będzie wynosić

$$\begin{aligned} \underline{U}(f_{1,1}+f_{1,2}+f_{2,1}) = & \frac{1}{2} H_{2,1}^{(3)}(f_{1,1}, f_{1,2}; f_{2,1}) \underline{A}_{1,1} \underline{A}_{1,2} \underline{A}_{2,1} + /6.5/ \\ & + \frac{3}{4} H_{4,1}^{(5)}(f_{1,1}, f_{1,1}, -f_{1,1}, f_{1,2}; f_{2,1}) \underline{A}_{1,1}^2 \underline{A}_{1,1}^* \underline{A}_{1,2} \underline{A}_{2,1} + \\ & + \frac{3}{4} H_{4,1}^{(5)}(f_{1,1}, f_{1,2}, f_{1,2}, -f_{1,2}; f_{2,1}) \underline{A}_{1,1} \underline{A}_{1,2}^2 \underline{A}_{1,2}^* \underline{A}_{2,1} + \\ & + \frac{3}{8} H_{2,3}^{(5)}(f_{1,1}, f_{1,2}; f_{2,1}, f_{2,1}, -f_{2,1}) \underline{A}_{1,1} \underline{A}_{1,2} \underline{A}_{2,1}^2 \underline{A}_{2,1}^* + \dots \end{aligned}$$

Jak widać mierząc tą składową uzyskamy informację o sumie pewnego szeregu, a nie interesującej nas funkcji. Zauważymy jednak, że tylko pierwszy składnik we wzorze /6.5/ jest rzędu trzeciego, a pozostałe rzędu piątego i wyższych. Można więc dobrać tak amplitudy $\underline{A}_{1,1}, \underline{A}_{1,2}$ i $\underline{A}_{2,1}$, żeby składniki wyższych rzędów niż trzeci były pomijalnie małe /tw.3.2/. Można wtedy napisać

$$\underline{U}(f_{1,1}+f_{1,2}+f_{2,1}) \approx \frac{1}{2} H_{2,1}^{(3)}(f_{1,1}, f_{1,2}; f_{2,1}) \underline{A}_{1,1} \underline{A}_{1,2} \underline{A}_{2,1}, /6.6/$$

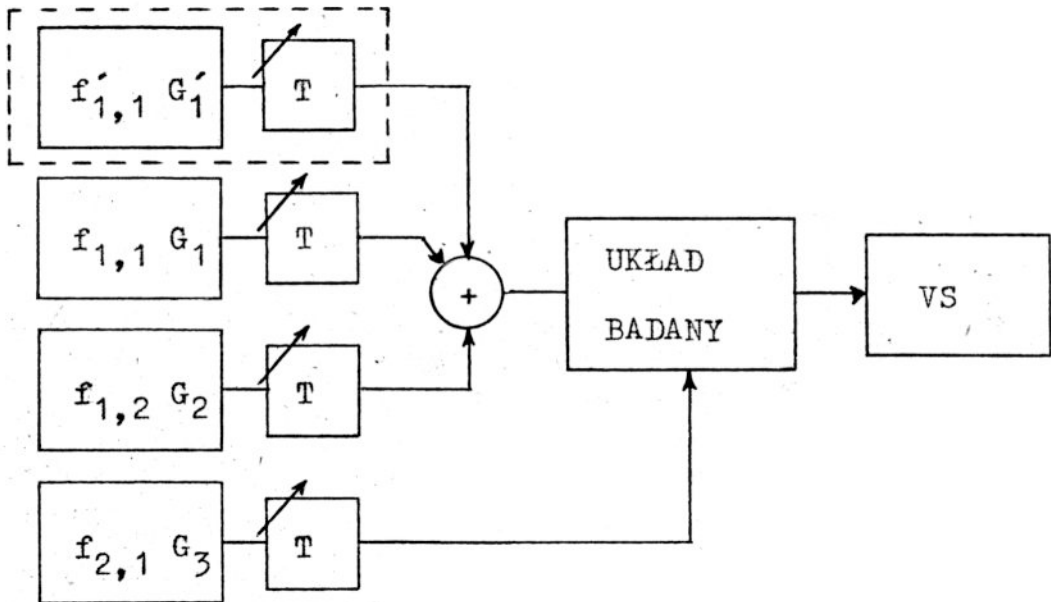
tak więc pomiar składowej o częstotliwości $f_{1,1}+f_{1,2}+f_{2,1}$ przy dostatecznie małych amplitudach $\underline{A}_{1,1}$, $\underline{A}_{1,2}$ i $\underline{A}_{2,1}$ pozwoli wyznaczyć, z dowolnie małym błędem, funkcję $H_{2,1}^{(3)}(f_{1,1}, f_{1,2}; f_{2,1})$.

W praktyce pomiary w tym przypadku /ogólniej jest to pomiar funkcji $H^{(*)}(\cdot)$, dla której występują składowe o tej samej częstotliwości wyższych rzędów/ przeprowadzamy następująco:

- budujemy układ pomiarowy jak na rys.6.1,

- dobieramy tak amplitudy generatorów $A_{1,1}$, $A_{1,2}$ i $A_{2,1}$, żeby mierzona składowa sygnału $y(t)$ o częstotliwości $f_{1,1} + f_{1,2} + f_{2,1}$ była proporcjonalna do $A_{1,1}A_{1,2}A_{2,1}$, co pozwoli założyć poprawność wzoru /6.6/. W przypadku braku tej proporcjonalności należy sądzić, że składowe wyższych rzędów w /6.5/ odgrywają znaczącą rolę i należy zmniejszyć amplitudy wymu-
szeń,
- obliczyć

$$\frac{1}{2}H_{2,1}^{(3)}(f_{1,1}, f_{1,2}; f_{2,1}) \approx \frac{U(f_{1,1} + f_{1,2} + f_{2,1})}{A_{1,1}A_{1,2}A_{2,1}} \quad /6.7/$$



Rys.6.1. Układ do pomiaru nieliniowej funkcji transmitancji

$H_{2,1}^{(3)}(f_{1,1}, f_{1,2}; f_{2,1})$ / G_i - generatory, T - tłumiki regulowane, VS - woltomierz selektywny/

Zastanówmy się jeszcze, jak zmierzyć np. wartość funkcji $H_{4,1}^{(5)}(f_{1,1}, f_{1,1}, -f_{1,1}, f_{1,2}; f_{2,1})$ /ogólniej chodzi o pomiar funkcji, której częstotliwość wypadkowa pokrywa się z częstotliwością funkcji niższego rzędu/. Wyodrębnienie składnika szeregu /6,5/, zawierającego tę funkcję nie jest na ogół możliwe, a więc pomiar składowej sygnału wyjściowego o tej częstotliwości nic nie da.

Proponujemy postąpić następująco:

- do układu z rys.6.1 dołączyć dodatkowy generator o częstotliwości $f'_{1,1} = f_{1,1} + \Delta f_{1,1}$ i amplitudzie $A'_{1,1}$,
- zmierzyć składową sygnału wyjściowego $y(t)$ o częstotliwości $f_{1,1} + f_{1,1} + f_{1,2} + f_{2,1} - f'_{1,1} = f_{1,1} - \Delta f_{1,1} + f_{1,2} + f_{2,1}$, dobierając tak amplitudy wszystkich czterech generatorów, aby sygnał o tej częstotliwości był proporcjonalny do $A_{1,1}(A_{1,1})^* A_{1,2} A_{2,1}$,
- wyznaczyć

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} H_{4,1}^{(5)}(f_{1,1}, f_{1,1}, -f'_{1,1}, f_{1,2}; f_{2,1}) &\approx \quad \quad \quad /6.8/ \\ &\approx \frac{U(f_{1,1} - \Delta f_{1,1} + f_{1,2} + f_{2,1})}{A_{1,1}^2 (A_{1,2})^* A_{1,2} A_{2,1}} \end{aligned}$$

- powyższe trzy punkty powtórzyć dla częstotliwości generatora dodatkowego $f'_{1,1} = f_{1,1} - \Delta f_{1,1}$ i wyznaczyć

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} H_{4,1}^{(5)}(f_{1,1}, f_{1,1}, -f'_{1,1}, f_{1,2}; f_{2,1}) &\approx \quad \quad \quad /6.9/ \\ &\approx \frac{U(f_{1,1} + \Delta f_{1,1} + f_{1,2} + f_{2,1})}{A_{1,1} (A_{1,1})^* A_{1,2} A_{2,1}} \end{aligned}$$

/wzory ostatnie są poprawne, gdyż w zależności analogicznej do /6.5/ na $\underline{U}(f_{1,1} \pm \Delta f_{1,1} + f_{1,2} + f_{2,1})$ funkcje piątego rzędu z równań /6.8/ i /6.9/ są składnikami najniższych rzędów/,
 - zakładając ciągłość funkcji $H_{4,1}^{(5)}(f_{1,1}, f_{1,1}, -f_{1,1}, f_{1,2}; f_{2,1})$ możemy interpolować

$$\begin{aligned} H_{4,1}^{(5)}(f_{1,1}, f_{1,1}, -f_{1,1}, f_{1,2}; f_{2,1}) &= \quad \quad \quad /6.10/ \\ &= \frac{1}{2} \left\{ H_{4,1}^{(5)}(f_{1,1}, f_{1,1}, -f'_{1,1}, f_{1,2}; f_{2,1}) + \right. \\ &\quad \left. + H_{4,1}^{(5)}(f_{1,1}, f_{1,1}, -f''_{1,1}, f_{1,2}; f_{2,1}) \right\}. \end{aligned}$$

Interpolacja ta będzie lepsza, gdy $\Delta f_{1,1}$ będzie małe, co zmusza do korzystania z miernika o dużej selektywności. Trudno jednak określić jakie powinno być $\Delta f_{1,1}$, aby popełniany błąd był dostatecznie mały.

Kontynuując podobne rozważania dla funkcji wyższych rzędów, w których następuje kompensacja częstotliwości składowych dochodzi się do wniosku, że na każdą parę częstotliwości kompensujących się należy użyć, w pokazanej metodzie pomiarowej, dodatkowego generatora.

Poza przedstawionymi, bezpośrednimi, metodami pomiarowymi nieliniowych funkcji transmitancji istnieją również metody pośrednie wykorzystujące sygnały zmodulowane. Np. pomiar współczynnika modulacji skrośnej odbiornika radiowego pozwala na określenie nieliniowej funkcji transmitancji postaci $H^{(3)}(f_1, f_2, -f_2)$ /dodatek B/. W niniejszej pracy takich metod jednak nie wykorzystano i dlatego ich opis pominiemy.

W powyższych rozważaniach zakładano możliwość pomiaru wielkości $\underline{U}(\cdot)$ jako wielkości zespolonej. Ze względu na to, że jest

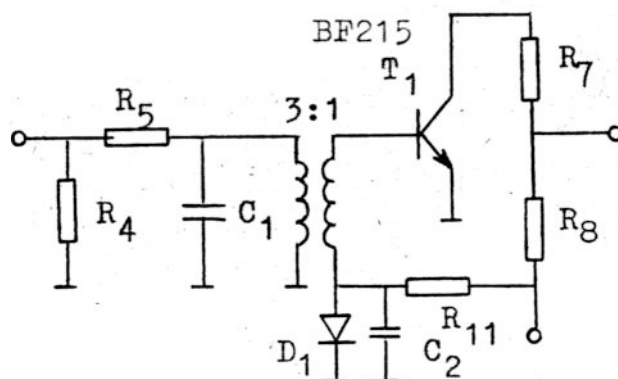
to trudne, mierzy się zazwyczaj tylko moduł $\underline{U}(\cdot)$, a w konsekwencji nie wyznacza się wartości funkcji $H^{(1)}(\cdot)$, a jej moduł, co w wielu praktycznych przypadkach jest wystarczające.

Prezentowane w dalszej części tego rozdziału wyniki pomiarów, uzyskane opisanymi metodami, są obarczone błędem mniejszym niż 1dB, z wyjątkiem funkcji $|H^{(3)}(f_1, f_2, -f_2)|$, dla której błąd ten oszacowano na 4dB.

W rozdziale tym nie dyskutowano szerzej rozbieżności wyników pomiarów i obliczeń, gdyż ich przyczyny omówiono dokładnie w rozdziale 7.

6.2. Wzmacniacz selektywny.

Pierwszym przykładem zastosowania szeregu Volterry do analizy nieliniowych układów elektronicznych będzie prosty wzmacniacz selektywny nastrojony na częstotliwość $f_0 = 200\text{kHz}$, którego schemat ideowy pokazano na rys.6.2.

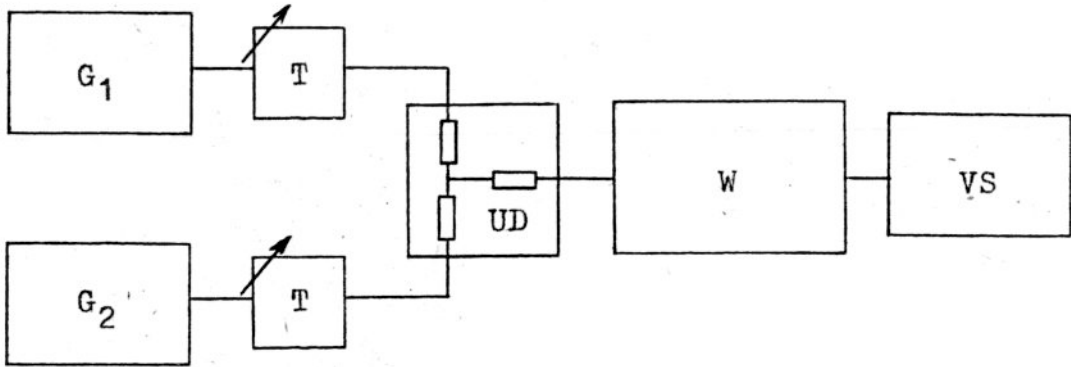


Rys.6.2. Schemat ideowy wzmacniacza selektywnego.

Wszystkich pomiarów dokonano w układzie z rys.6.3.

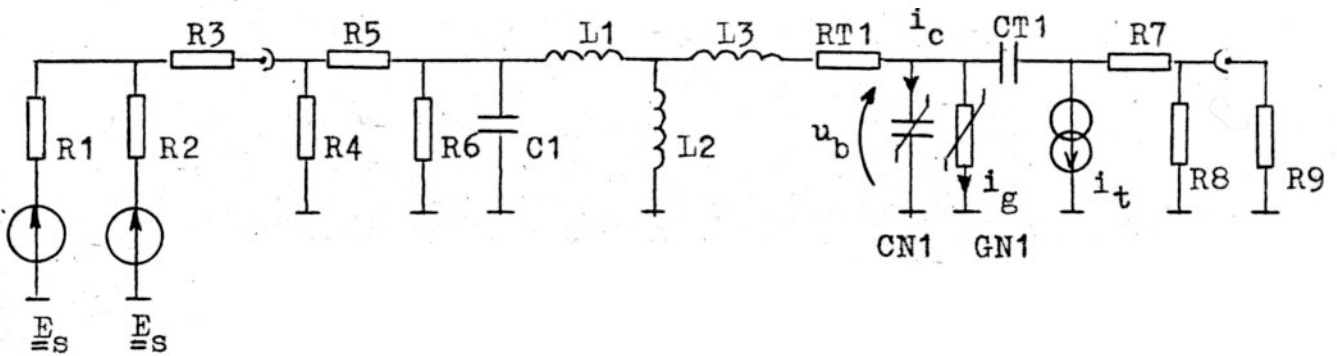
Dla celów analizy numerycznej wzmacniacz wraz z generatorami i obciążeniem /woltomierz selektywny/ zastąpiono układem

z rys.6.4. Zastosowano model tranzystora słuszny przy założeniu, że pracuje on w obszarze aktywnym.



Rys.6.3. Układ pomiarowy wzmacniacza z rys6.2. / G_1 - generatory, T_1 - tłumiki regulowane, W -układ badany, VS - woltomierz selektywny/.

Wartości elementów schematu zastępczego wzmacniacza podaje tablica 6.1.



Rys.6.4. Układ zastępczy wzmacniacza z rys.6.2.

Jak widać przyjęto tu uproszczony model zastępczy tranzystora, ograniczając się do jednej konduktancji nieliniowej, jednej pojemności nieliniowej i nieliniowego źródła prądowego sterowanego jednym napięciem. Sposób obliczania współczynników wielomianów opisujących elementy nieliniowe podaje dodatek A.

Tablica 6.1.

Wartości elementów układu z rys.6.4.

Elementy liniowe:			
R_1	100Ω	R_9	75Ω
R_2	100Ω	R_{T1}	30Ω
R_3	25Ω	C_1	$10nF$
R_4	75Ω	C_{T1}	$0.4pF$
R_5	$2.2k \Omega$	L_1	$42.12\mu H$
R_6	$10k \Omega$	L_2	$21.2\mu H$
R_7	$2.2k \Omega$	L_3	$-14.1\mu H$
R_8	75Ω		
Elementy nieliniowe:			
$i_g = 7,8 \cdot 10^{-4} u_b + 1,52 \cdot 10^{-2} u_b^2 + 0,198 u_b^3 + 1,93 u_b^4 + 15,1 u_b^5$			
$i_c = \frac{d}{dt} \left(24,6 \cdot 10^{-12} u_b - 4,61 \cdot 10^{-10} u_b^2 + 5,58 \cdot 10^{-9} u_b^3 + \right.$ $\left. - 5,34 \cdot 10^{-8} u_b^4 + 4,17 \cdot 10^{-7} u_b^5 \right)$			
$i_t = 3,8 \cdot 10^{-2} u_b + 0,745 u_b^2 + 9,69 u_b^3 + 94,4 u_b^4 + 736,8 u_b^5$			

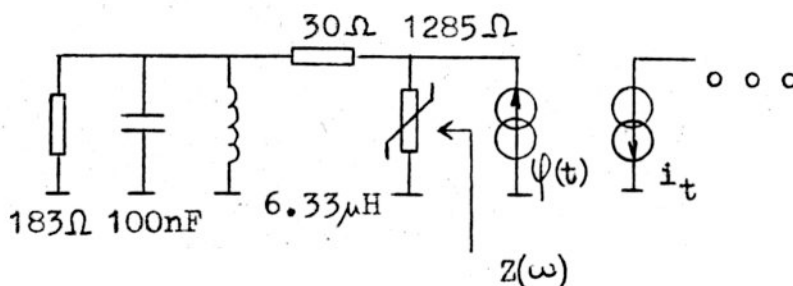
6.2.1. Szacowanie promienia zbieżności szeregu Volterry reprezentującego odpowiedź wzmacniacza selektywnego.

Przy szacowaniu promienia zbieżności szeregu Volterry korzystać będziemy z twierdzeń 3.5 i 3.6. Rozumowanie poprowadzimy w sposób następujący:

a/ zauważymy, że główną nieliniowością wzmacniacza w zakresie interesujących nas częstotliwości /50 - 2000kHz/ jest konduktancja nieliniowa GN1 i źródło prądowe sterowane napięciem i_t /rys.6.4/. Pominiemy natomiast nieliniową pojemność CN1. Nie popełnimy też dużego błędu, jeżeli pominiemy kondensator CT1, co spowoduje, że na mocy tw.3.6 nie będziemy musieli uwzględniać źródła prądowego i_t .

b/ przyjmujemy, że interesuje nas odpowiedź układu w stanie ustalonym na pobudzenie przebiegiem ciągłym i okresowym o częstotliwości $f_0=200\text{kHz}$.

c/ przyjmujemy, że układ pobudzany jest przez źródło prądowe o wydajności $\varphi(t)$ bezpośrednio na bazę idealną tranzystora tak, jak na rys.6.5.



Rys.6.5. Uproszczony układ zastępczy wzmacniacza do obliczania promienia zbieżności szeregu Volterry.

d/ ze względu na założenia o $\varphi(t)$ przyjęte w punktach b/ i c/

mamy

$$\begin{aligned} \|y(t)\| &= \sup_t \left| \int_{-\infty}^t h(\tau) \varphi(t-\tau) d\tau \right| \leq \\ &\leq \int_R |h(\tau)| d\tau \|\varphi(t)\|, \end{aligned} \quad /6.11/$$

skąd, jeżeli część linearyzowaną układu opiszemy równaniem

$$\underline{L}y(t) = \varphi(t), \quad /6.12/$$

to / [61] /

$$\|\underline{L}^{-1}\| = \sup_{\|\varphi\|=1} |y(t)| = \int_R |h(\tau)| d\tau. \quad /6.13/$$

$h(\tau)$ znajdziemy jako transformatę odwrotną impedancji linearyzowanej $Z(\omega)$ /rys.6.5/. Łatwo obliczyć

$$Z(\omega) = 29,3 + \frac{j9449000,0 \omega}{j62249,6 \omega + 157976 \cdot 10^{12} - \omega^2} \quad [\Omega], \quad /6.14/$$

skąd

$$\begin{aligned} h(\tau) &= \int_R Z(2\pi f) e^{-j2\pi f \tau} df = \\ &= 29,3 \delta(t) + \left(9449000,0 \cos 1256889,0t - 233988,8 \sin 1256889,0t \right) \times \\ &\quad \times \exp(-31124,8t) \quad [\Omega/s] \end{aligned} \quad /6.15/$$

i dalej /obliczenia wykonano numerycznie/

$$\|\underline{L}^{-1}\| = \int_R |h(\tau)| d\tau = 222,33 \quad [\Omega], \quad /6.16/$$

e/ podstawiając tą wartość do /3.27/ oraz przyjmując w tym wzorze G_i jako współczynniki wielomianu opisującego prąd konduktancji nieliniowej GN1 /tablica 6.1/ otrzymamy

$$222,33(0,0304Y + 0,594Y^2 + 7,72Y^3 + 75,29Y^4) = 1. \quad /6.17/$$

Pierwiastek tego równania wynosi $Y \approx 0,051 [V]$ i z /3.28/ otrzymujemy

$$X_R = \frac{Y}{222,3} = 0,0152Y^2 + 0,198Y^3 + 1,93Y^4 + 15,1Y^5 =$$

$$= 1,4535 \cdot 10^{-4} [A], \quad /6.18/$$

co odpowiada maksymalnemu napięciu jakie może wystąpić na bazie tranzystora

$$\|L^{-1}\| X_R = 0,0326 V = 32,6 [mV]. \quad /6.19/$$

Można stwierdzić, że dla sygnałów ciągłych i okresowych o dowolnym kształcie, których amplituda napięcia na bazie tranzystora nie przekroczy 32,6mV szereg Volterry reprezentujący sygnał będzie zbieżny bezwzględnie /nie wyklucza się, że obszar zbieżności warunkowej jest szerszy/.

6.2.2. Wyniki analizy wzmacniacza.

Jak już wspomniano wszystkich pomiarów wzmacniacza dokonano w układzie z rys.6.3. W celu określenia zakresu napięć wejściowych, dla których aproksymacja sygnału wyjściowego za pomocą wielomianu Volterry jest skuteczna, pomierzono i obliczono przebieg amplitudy napięcia pierwszej, drugiej i trzeciej

harmonicznej sygnału wyjściowego w funkcji amplitudy $\underline{E}_s(f_o)$ harmonicznego sygnału wejściowego o częstotliwości $f_o=200\text{kHz}$. Wyniki przedstawiono na rys.6.6.

Na wykresie tym aproksymowano sygnał wyjściowy wielomianem Volterry piątego stopnia, którego współczynniki obliczono programem WIVO. Wielomiany te mają postać:

- dla składowej o częstotliwości podstawowej

$$\begin{aligned} |\underline{U}(f_o)| = & \left| H_1^{(1)}(f_o) \underline{E}_s(f_o) + \frac{3}{4} H_3^{(3)}(f_o, f_o, -f_o) \underline{E}_s^2(f_o) \underline{E}_s^*(f_o) + \right. \\ & \left. + \frac{5}{8} H_5^{(5)}(f_o, f_o, f_o, -f_o, -f_o) \underline{E}_s^3(f_o) (\underline{E}_s^*(f_o))^2 \right|, \quad /6.20/ \end{aligned}$$

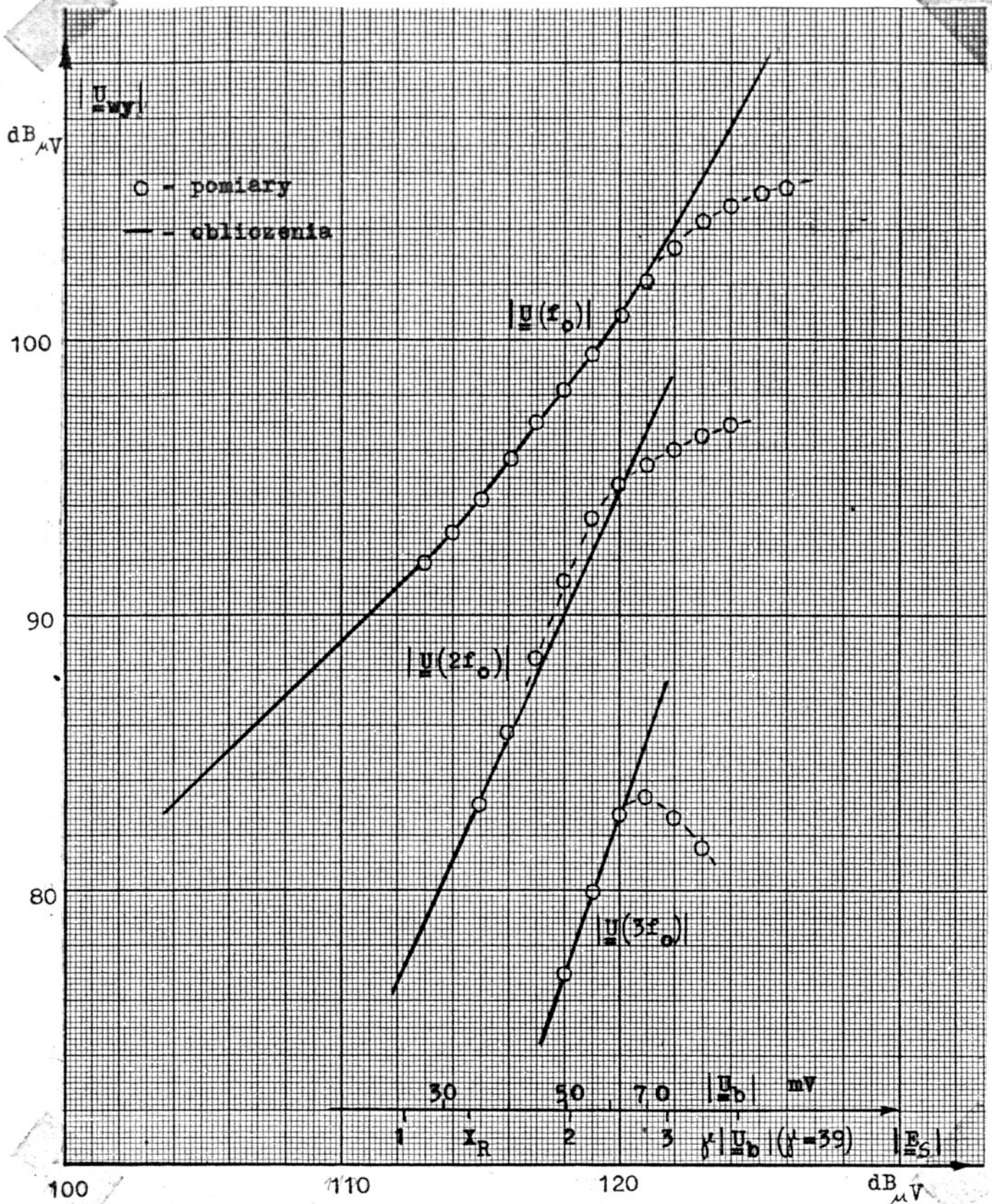
- dla drugiej harmonicznej

$$|\underline{U}(2f_o)| = \frac{1}{2} \left| H_2^{(2)}(f_o, f_o) \underline{E}_s^2(f_o) + H_4^{(4)}(f_o, f_o, f_o, -f_o) \underline{E}_s^3(f_o) \underline{E}_s^*(f_o) \right|, \quad /6.21/$$

- dla trzeciej harmonicznej

$$\begin{aligned} |\underline{U}(3f_o)| = & \frac{1}{4} \left| H_3^{(3)}(f_o, f_o, f_o) \underline{E}_s^3(f_o) + \right. \\ & \left. + \frac{5}{4} H_5^{(5)}(f_o, f_o, f_o, f_o, -f_o) \underline{E}_s^4(f_o) \underline{E}_s^*(f_o) \right|. \quad /6.22/ \end{aligned}$$

Jak widać różnica wyników pomiarów i obliczeń nie przekracza błędu pomiarowego /1dB/, jeśli amplituda napięcia sinusoidalnego o częstotliwości podstawowej $f_o=200\text{kHz}$ na złączu baza-emiter tranzystora jest mniejsza od około 50mV. Jest to, wartość większa niż uzyskiwano wcześniej [25, 103], przy aproksymacji sygnału wyjściowego wielomianem Volterry trzeciego



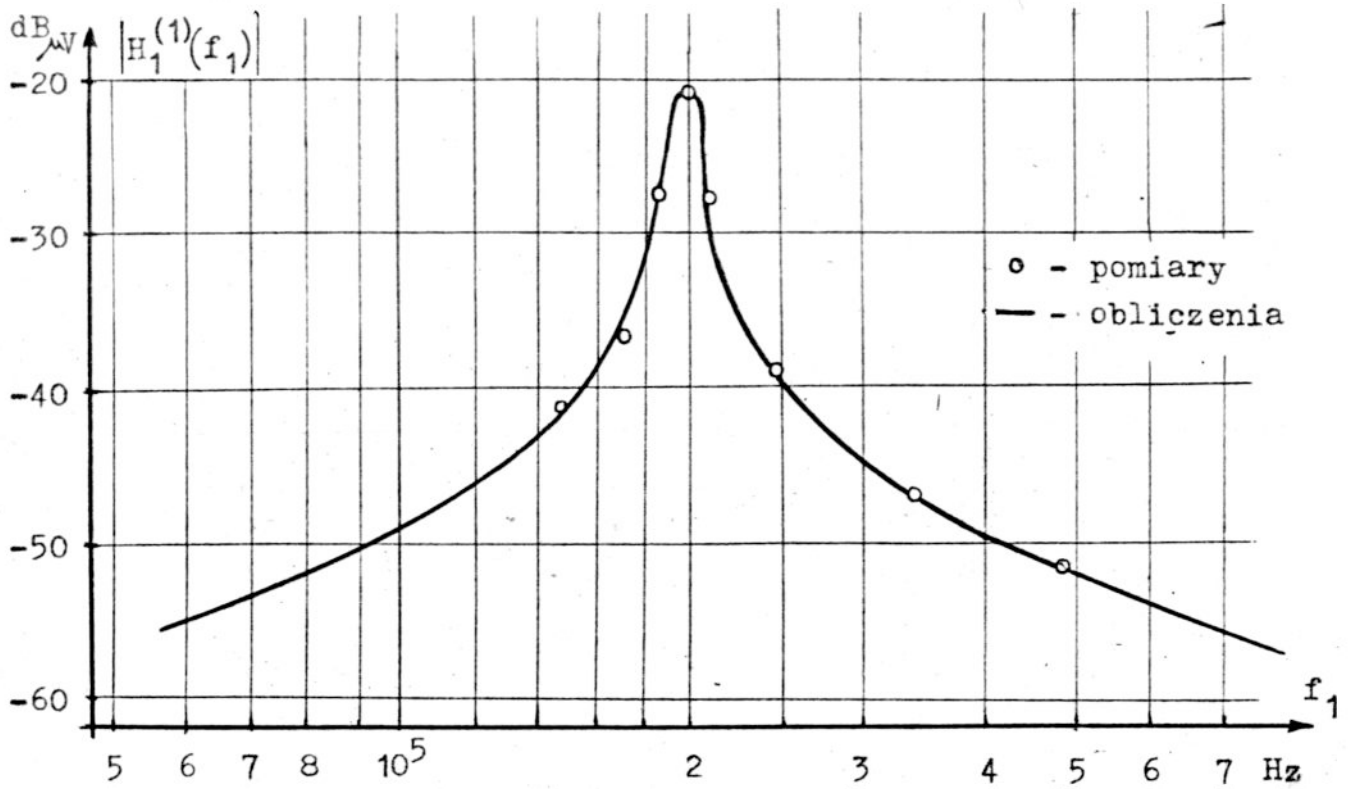
Rys.6.6. Określenie zakresu poprawności opisu układu wzmacnia-
 cza przez wielomian Volterra piątego stopnia. U_b - am-
 plituda napięcia harmonicznego o częstotliwości $f_0=200kHz$
 na złączu baza-emiter tranzystora.

stopnia. Wartość ta jest większa o około 36% od obliczonego w rozdziale poprzednim promienia zbieżności szeregu Volterra.

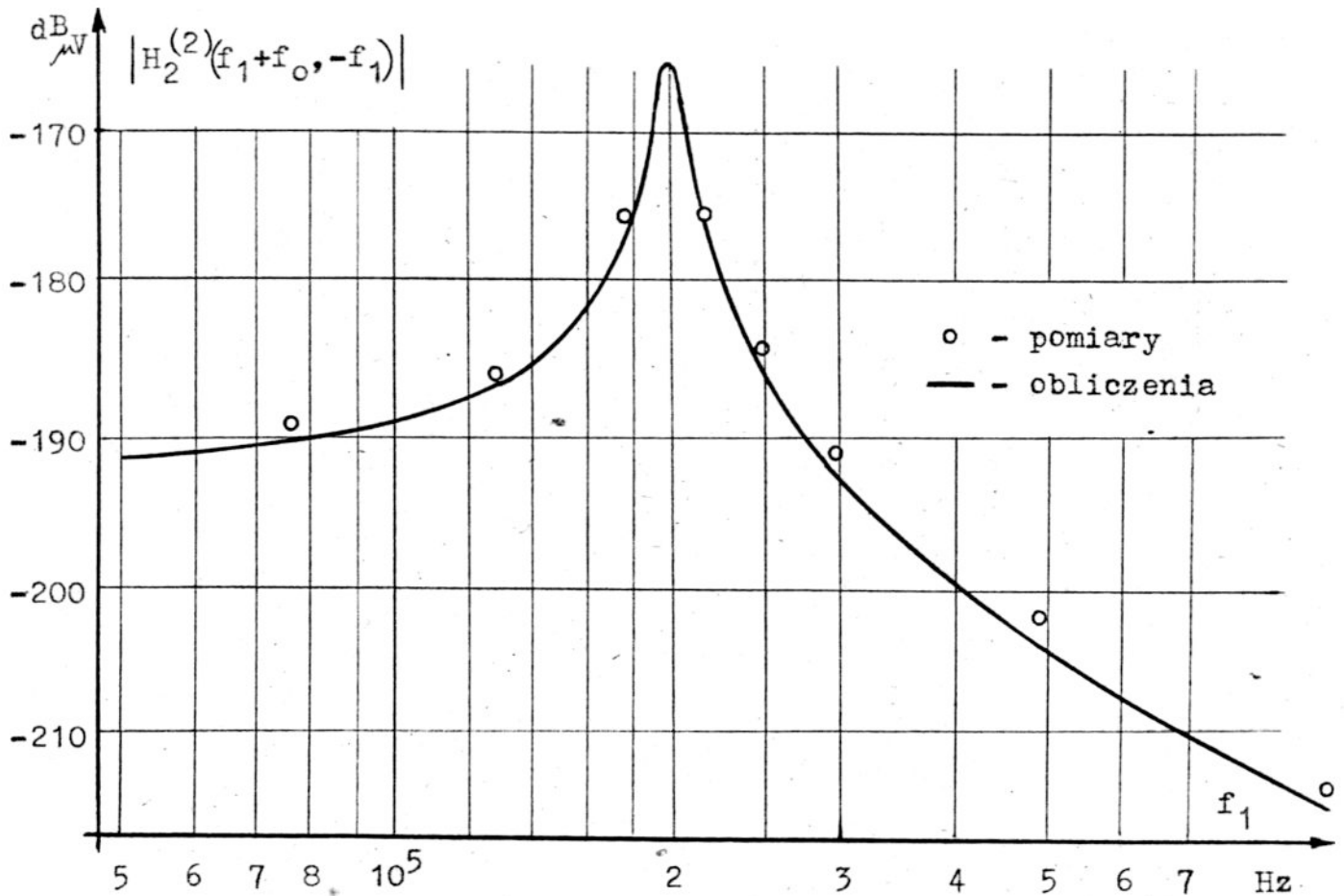
Na wykresie 6.6 zaobserwować można zjawisko zwiększania się sygnału o częstotliwości podstawowej ponad wartość $|H_1^{(1)}(f_0) \times X_{E_s}(f_0)|$ przy pewnym zakresie napięć sygnału wejściowego na skutek oddziaływania nieliniowości trzeciego i piątego rzędu /wzór/6.20//. Dalszy spadek tego sygnału przy wzroście amplitudy sygnału wejściowego spowodowany jest oddziaływaniem nieliniowości wyższych rzędów. Podobne wnioski można wysunąć dla pozostałych harmonicznych sygnału wyjściowego.

Jako przykładowe charakterystyki wzmacniacza pomierzono i obliczono moduł transmitancji liniowej $H_1^{(1)}(f_1)$ oraz moduły funkcji drugiego i trzeciego rzędu - $H_2^{(2)}(f_1+f_0, -f_1)$ oraz $H_3^{(3)}(2f_1+f_0, -f_1, -f_1)$, w funkcji częstotliwości /częstotliwość wypadkowa dwóch ostatnich funkcji jest częstotliwością rezonansową wzmacniacza, podczas gdy wszystkie ich argumenty są różne od częstotliwości f_0 , czyli funkcje te opisują zjawisko intermodulacji dwóch sygnałów na nieliniowościach drugiego i trzeciego rzędu/. Zastosowane wielkości napięć pomiarowych sygnałów wejściowych były takie, że amplituda sygnału na złączu baza-emiter tranzystora nie przekraczała 25mV /zgodnie z warunkami z rozdz.6.1/. Jak widać z wykresów na rys.6.7,6.8 i 6.9 rozbieżność między wynikami pomiarów i obliczeń zarówno dla transmitancji liniowej, jak i dla funkcji drugiego i trzeciego rzędu nie przekracza trzech decybeli.

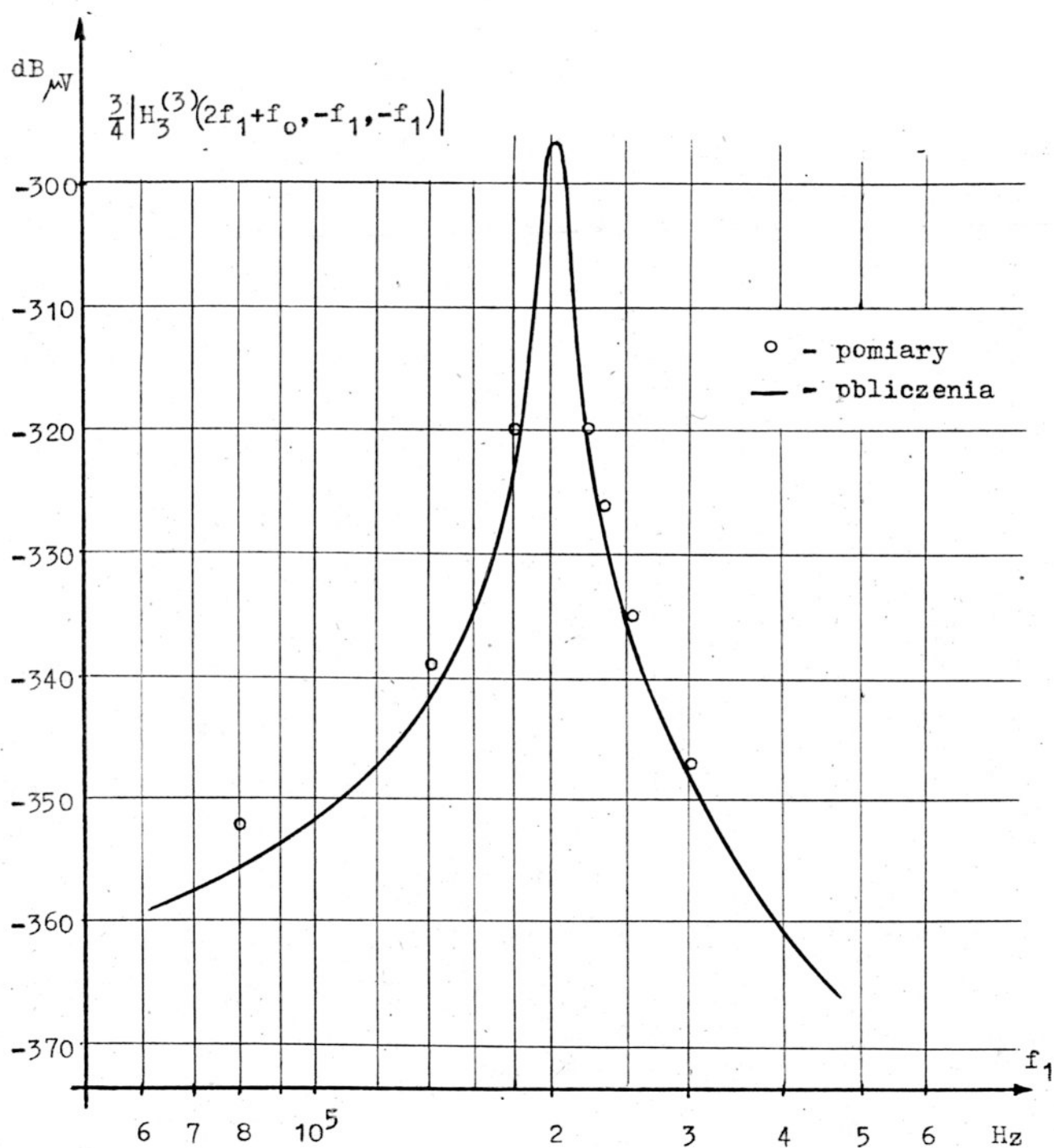
Kolejny wykres na rys.6.10 pokazuje przebieg modułu funkcji transmitancji trzeciego rzędu $H_3^{(3)}(f_0, f_1, -f_1)$ odpowiada-



Rys.6.7. Przebieg $|H_1^{(1)}(f_1)|$ dla wzmacniacza z rys.6.2.

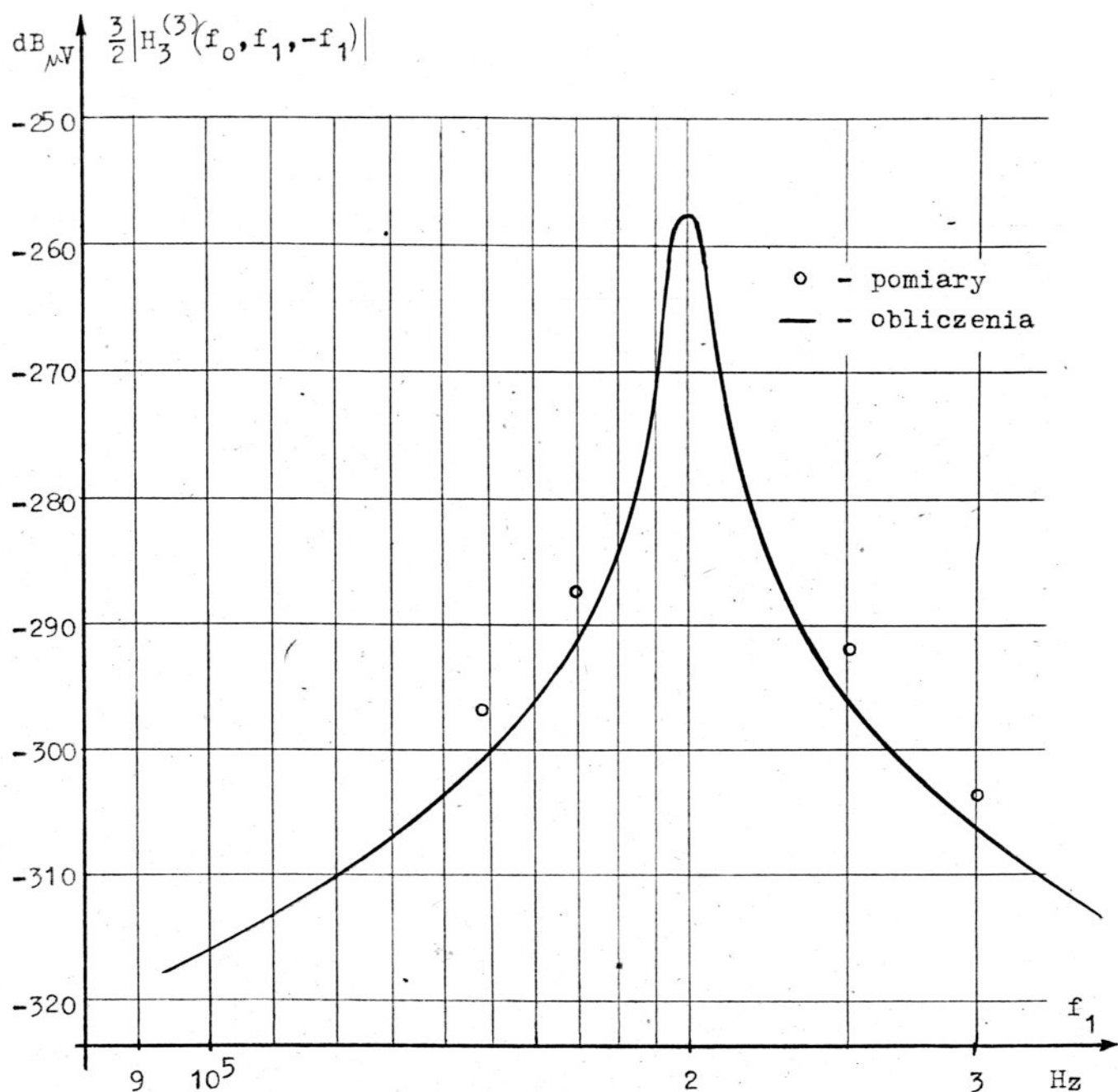


Rys.6.8. Przebieg $|H_2^{(2)}(f_1+f_0, -f_1)|$ dla wzmacniacza z rys.6.2.



Rys.6.9. Przebieg modułu funkcji trzeciego rzędu

$H_3^{(3)}(2f_1 + f_0, -f_1, -f_1)$ dla wzmacniacza rezonansowego
z rys.6.2.



Rys.6.10. Przebieg $|H_3^{(3)}(f_0, f_1, -f_1)|$ dla wzmacniacza z rys.6.2.

jącej za modulację skrośną /zależność współczynnika modulacji skrośnej od funkcji transmitancji trzeciego rzędu podaje dodatek B/.

Aby określić amplitudy napięć wyjściowych wzmacniacza, pochodzące od różnych nieliniowych funkcji transmitancji drugiego i trzeciego rzędu korzystamy ze wzorów /odpowiednio do /6.2//

$$\underline{U}(f_1+f_2) = B_2 H_2^{(2)}(f_1+f_2) \underline{E}_{s1}(f_1) \underline{E}_{s2}(f_2), \quad /6.23/$$

gdzie $B_2=1$, gdy $f_1=f_2$ i $B_2=\frac{1}{2}$, gdy $f_1 \neq f_2$ oraz

$$\underline{U}(f_1+f_2+f_3) = B_3 H_3^{(3)}(f_1, f_2, f_3) \underline{E}_{s1}(f_1) \underline{E}_{s2}(f_2) \underline{E}_{s3}(f_3), \quad /6.24/$$

gdzie $B_3=\frac{3}{4}$, gdy $f_1 \neq f_2=f_3$ i $B_3=\frac{3}{2}$, gdy $f_1 \neq f_2 \neq f_3 \neq f_1$ oraz $B_3=\frac{1}{4}$,
gdy $f_1=f_2=f_3$.

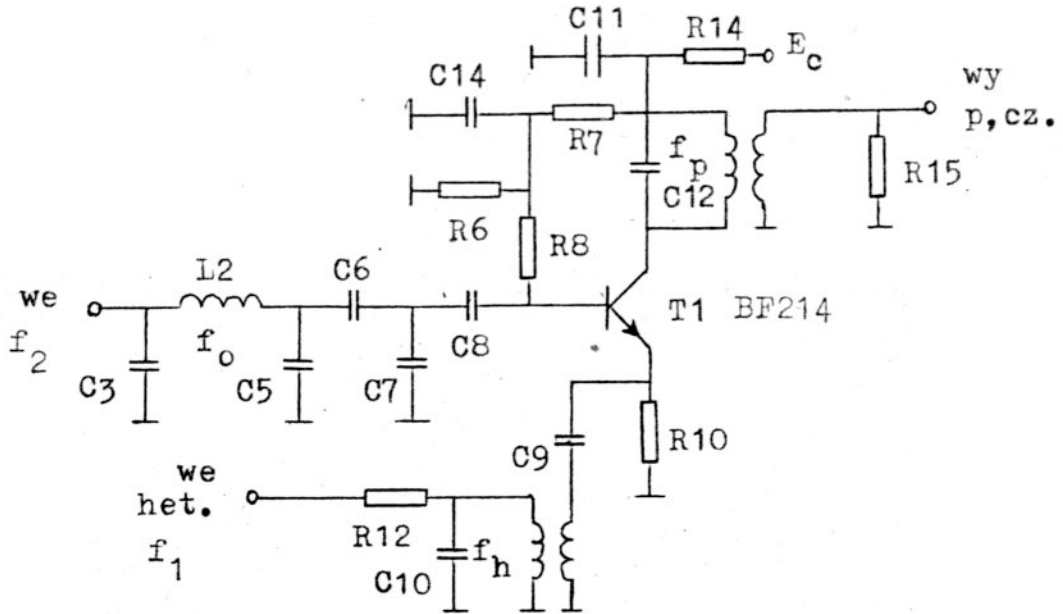
Należy zwrócić uwagę, że wszystkie wykresy wielowymiarowych funkcji transmitancji, w tym i w pozostałych rozdziałach, sporządzono w decybelach w stosunku do jednego mikrowolta $/dB_{\mu V}/$, co oznacza, że podstawiając we wzorach /6.23/ lub /6.24/ $\underline{E}_{si}(f_i)$ w $dB_{\mu V}$ oraz wartość funkcji $H^{(*)}(\cdot)$ w $dB_{\mu V}$ uzyskamy wynik w $dB_{\mu V}$.

6.3. Analiza mieszacza radiowego.

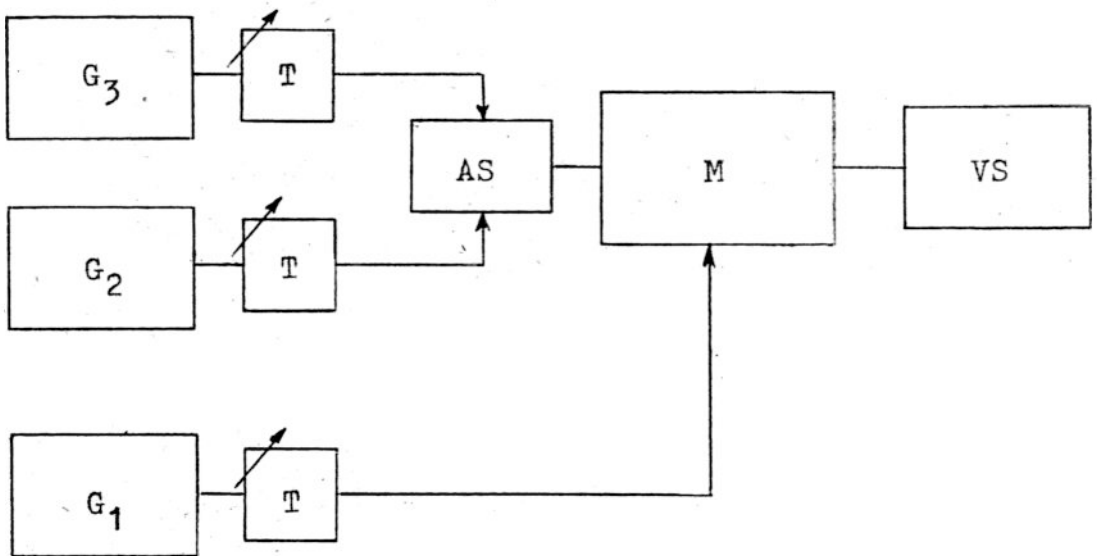
Jako bardziej złożony przykład przeanalizowano mieszacz pracujący jako stopień wejściowy odbiornika radiofonicznego na falach długich. Schemat ideowy mieszacza pokazano na rys.6.11. Układ o takiej konfiguracji jest praktycznie stosowany w odbiornikach radiowych dostosowanych do współpracy z anteną zewnętrzną.

Do analizy wybrano częstotliwość kanału użytecznego $f_0=200kHz$, częstotliwość heterodyny $f_h=665kHz$ i częstotliwość pośrednią $f_p=465kHz$.

Pomiary mieszacza przeprowadzono w układzie z rys. 6.12 zawierającym dwusygnałową antenę sztuczną [80]. W analizie

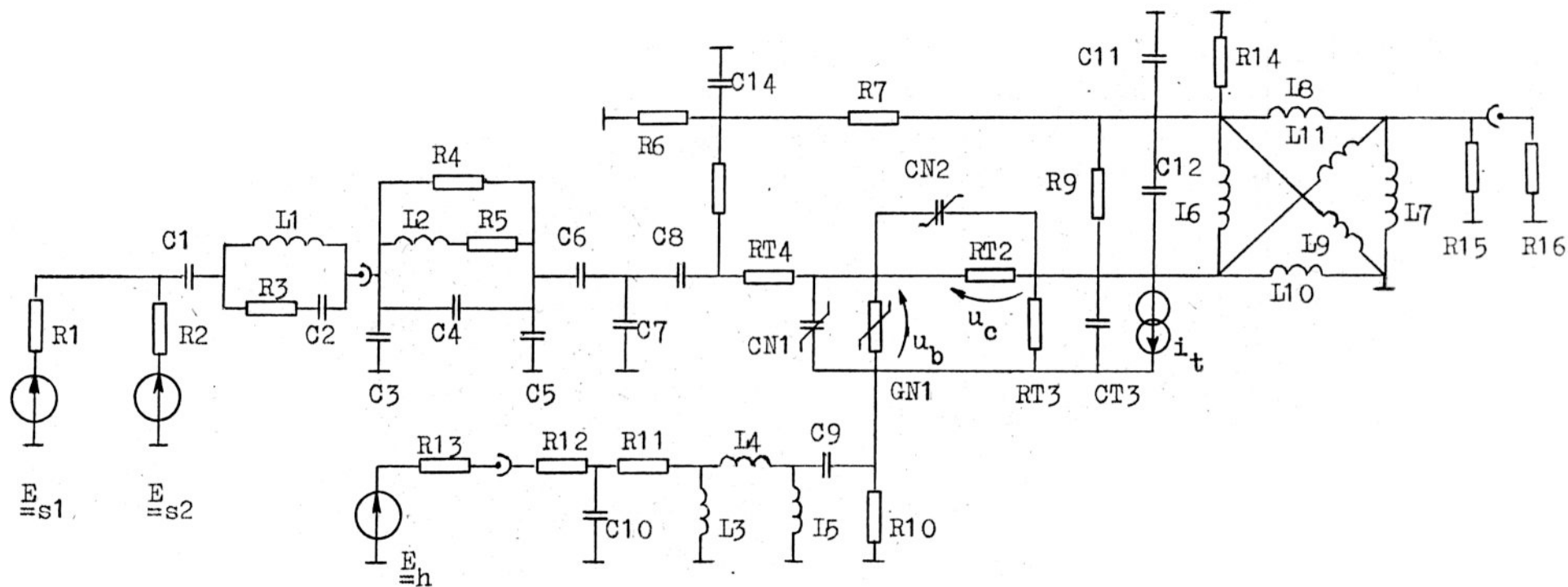


Rys.6.11. Schemat ideowy analizowanego mieszacza.



Rys.6.12. Układ pomiarowy mieszacza / G_i - generatory, T_i - tłumiki, AS - antena sztuczna, M - badany mieszacz, VS - woltomierz selektywny/.

numerycznej mieszacz wraz z generatorami pomiarowymi, anteną sztuczną i obciążeniem /woltomierz selektywny/ przedstawiono w postaci jak na rys.6.13. Tranzystor zastąpiono, jak poprzednio,



Rys.6.13. Schemat zastępczy mieszacza z rys.6.11.

Tablica 6.2.

Wartości elementów układu z rys.6.13.

Elementy liniowe:			
R_1	160Ω	R_{15}	75Ω
R_2	160Ω	R_{16}	75Ω
R_3	320Ω	R_{T4}	22Ω
R_4	$130k \Omega$	R_{T2}	$50M \Omega$
R_5	80Ω	R_{T3}	$78k \Omega$
R_6	$3,3k \Omega$	C_1	$125pF$
R_7	$16k \Omega$	C_2	$400pF$
R_8	$33k \Omega$	C_3	$1,6nF$
R_9	$17k \Omega$	C_4	$10,5pF$
R_{10}	$1k \Omega$	C_5	$120pF$
R_{11}	$13,3 \Omega$	C_6	$68pF$
R_{12}	$39k \Omega$	C_7	$680pF$
R_{13}	75Ω	C_8	$22nF$
R_{14}	220Ω	C_9	$22nF$
		C_{10}	$47nF$
		C_{11}	$47nF$
		C_{12}	$1,8nF$
		C_{T3}	$2,3pF$
		L_1	$10\mu H$
		L_2	$3,6mH$
		L_3	$8,113\mu H$
		L_4	$-8,425\mu H$
		L_5	$0,135\mu H$
		L_6	$3,846\mu H$
		L_7	$2,27 \cdot 10^{-2}\mu H$
		L_8	$-0,305\mu H$
		L_9	$-0,305\mu H$
		L_{10}	$0,305\mu H$
Elementy nieliniowe:			
$i_{g1} = 3 \cdot 10^{-4} u_b + 5,85 \cdot 10^{-3} u_b^2 + 7,71 \cdot 10^{-2} u_b^3 + 0,724 u_b^4 + 5,787 u_b^5$			
$i_{c1} = \frac{d}{dt} \left(15 \cdot 10^{-12} u_b + 2,9 \cdot 10^{-10} u_b^2 + 3,8 \cdot 10^{-9} u_b^3 + 3,7 \cdot 10^{-8} u_b^4 + 2,89 \cdot 10^{-7} u_b^5 \right)$			
$i_{c2} = \frac{d}{dt} \left(7 \cdot 10^{-13} u_c - 9,1 \cdot 10^{-15} u_c^2 + 3,13 \cdot 10^{-16} u_c^3 - 9,89 \cdot 10^{-18} u_c^4 + \right.$			
$\left. + 3,05 \cdot 10^{-20} u_c^5 \right)$			
$i_t = 3,2 \cdot 10^{-2} u_b + 0,624 u_b^2 + 8,11 u_b^3 + 79,1 u_b^4 + 617 u_b^5$			

modelem słusznym przy pracy w obszarze aktywnym /przyjęto uproszczony model zastępczy tranzystora Ebersa-Molla - dodatek A/. Wartości elementów układu z rys.6.13 podaje tablica 6.2.

Zakładając, że w praktyce napięcia sygnałów trafiających z anteny na wejście tranzystora są znacznie mniejsze od napięcia heterodyny, można określić maksymalne napięcie baza-emiter /niezależne od wielkości sygnałów z anteny/ pochodzące od heterodyny, dla którego błąd aproksymacji sygnału wyjściowego wielomianem Volterry nie przekracza błędu pomiarowego. Dla jego określenia pomierzono i obliczono przebieg amplitudy pierwszej harmonicznej napięcia heterodyny na obciążeniu w funkcji amplitudy $\underline{E}_h(f_h)$ SEM heterodyny o częstotliwości $f_h=665\text{kHz}$ /przenikanie bezpośrednie heterodyny na wyjście/. Zmierzono i obliczono też przebieg amplitudy napięcia pośredniej częstotliwości $/f_p=f_h - f_o=465\text{kHz}/$ w funkcji $\underline{E}_h(f_h)$ SEM heterodyny /przemiana/, przy amplitudzie napięcia sygnału użytecznego $\underline{E}_s(f_o)$ takiej, że na złączu baza-emiter tranzystora było ono znacznie mniejsze od napięcia pochodzącego z heterodyny. Wyniki przedstawiono na rys.6.14, na którym wykreślono również zależność amplitudy napięcia sygnału heterodyny i sygnału o częstotliwości pośredniej aproksymowane wielomianami Volterry rzędu piątego, przy założeniu $\underline{E}_s \ll \underline{E}_h$, co pozwala pominąć składniki z kompensacją częstotliwości sygnału użytecznego f_o

$$\begin{aligned} |\underline{U}(f_h)| &= \left| H_{1,0}^{(1)}(f_h) \underline{E}_h + \frac{3}{4} H_{3,0}^{(3)}(f_h, f_h, -f_h) \underline{E}_h^2 \underline{E}_h^* + \right. & /6.25/ \\ &+ \left. \frac{1}{2} H_{1,2}^{(3)}(f_h; f_o, -f_o) \underline{E}_h \underline{E}_s \underline{E}_s^* + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{5}{8} H_{5,0}^{(5)}(f_h, f_h, f_h, -f_h, -f_h) E_{h=h}^3 E_h^{*2} + \\
 & + \frac{13}{8} H_{3,2}^{(5)}(f_h, f_h, -f_h; f_o, -f_o) E_{h=h}^2 E_h^* E_s^* + \\
 & + \frac{3}{8} H_{1,4}^{(5)}(f_h; f_o, f_o, -f_o, -f_o) E_{h=h} E_s^2 E_s^{*2} \Big| \approx
 \end{aligned}$$

$$\approx \left| H_{1,0}^{(1)}(f_h) E_h + \frac{3}{4} H_{3,0}^{(3)}(f_h, f_h, -f_h) E_{h=h}^2 E_h^* + \right. \quad /6.25/$$

$$\left. + \frac{5}{8} H_{5,0}^{(5)}(f_h, f_h, f_h, -f_h, -f_h) E_{h=h}^3 E_h^{*2} \right|,$$

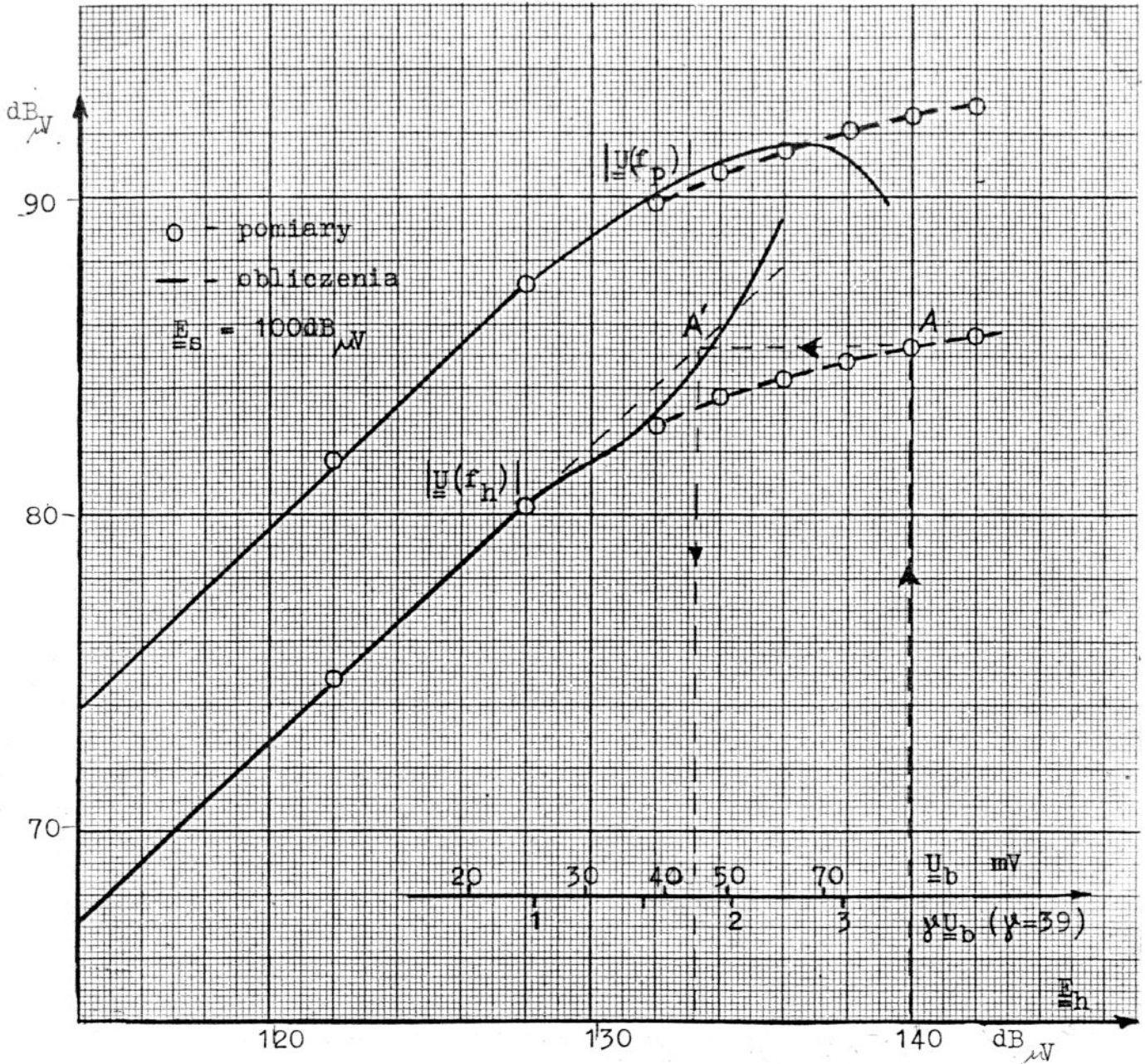
$$\left| U(f_p) \right| = \frac{1}{2} \left| H_{1,1}^{(2)}(f_h; -f_o) E_{h=h} E_s^* + \frac{3}{4} H_{3,1}^{(4)}(f_h, f_h, -f_h; -f_o) E_{h=h}^2 E_h^* E_s^* + \right. \quad /6.26/$$

$$\left. + \frac{3}{4} H_{1,3}^{(4)}(f_h; f_o, -f_o, -f_o) E_{h=h} E_s E_s^{*2} \right| \approx$$

$$\approx \frac{1}{2} \left| H_{1,1}^{(2)}(f_h; -f_o) E_{h=h} E_s^* + \frac{3}{4} H_{3,1}^{(4)}(f_h, f_h, -f_h; -f_o) E_{h=h}^2 E_h^* E_s^* \right|.$$

Jak widać z rys.6.14 błąd aproksymacji sygnału wyjściowego mieszacza przez zależności /6.26/ i /6.26/ nie przekracza 1dB dla amplitud napięcia sinusoidalnego heterodyny o częstotliwości $f_h=665\text{kHz}$ na złączu baza-emiter tranzystora $/U_b$ na rys.6.14/ mniejszych niż 40mV.

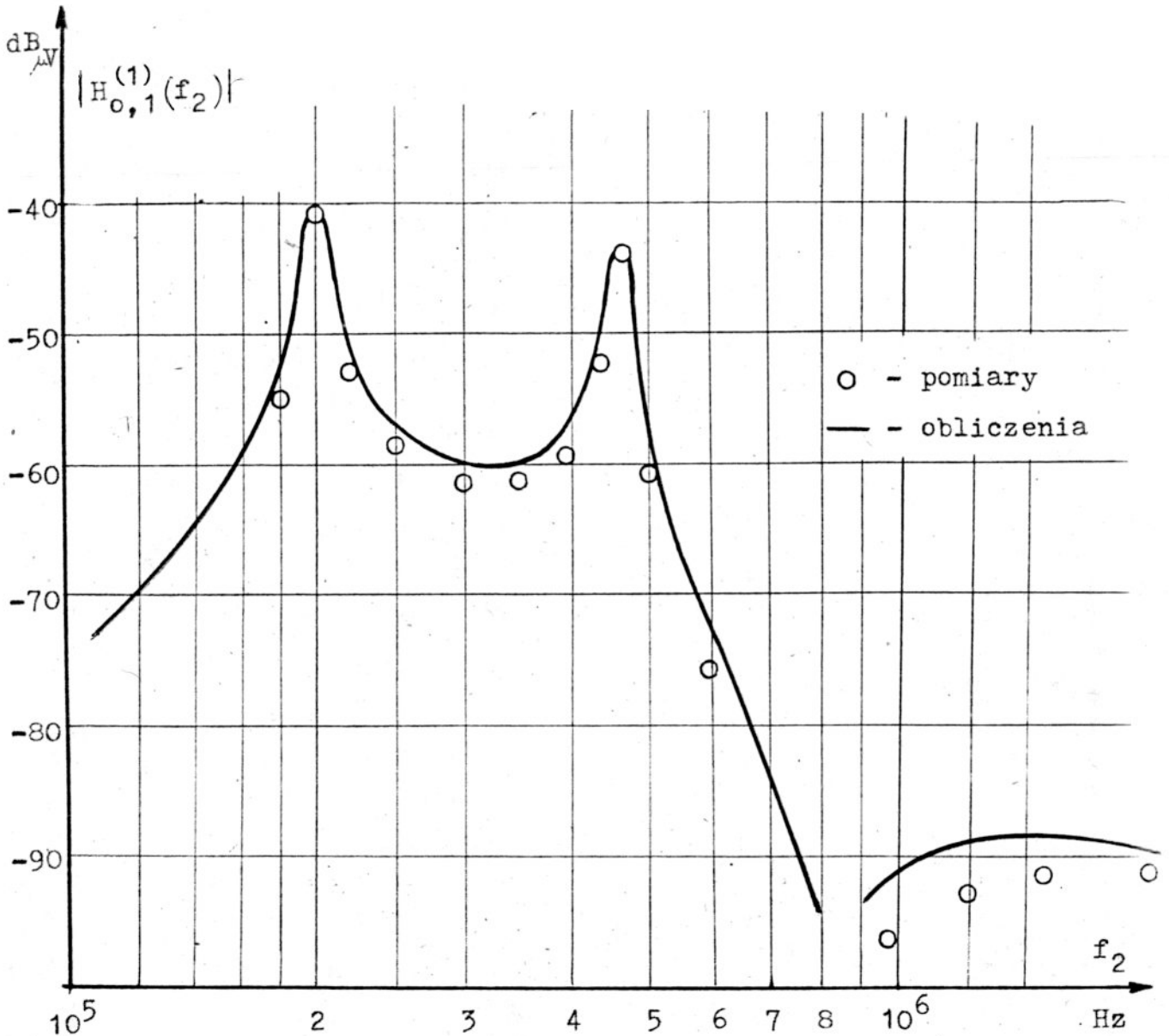
Dla analizowanego mieszacza pomierzono i obliczono, podobnie jak dla wzmacniacza, kilka przykładowych funkcji przenoszenia do rzędu trzeciego. Rys.6.15 ilustruje przebieg modułu liniowej transmitancji z wejścia układu do wyjścia $H_{0,1}^{(1)}(f_2)$. Na wykresie tym widoczne są maksima przy częstotliwości dostrojenia $f_o=200\text{kHz}$ i częstotliwości pośredniej $f_p=465\text{kHz}$. Minimum



Rys.6.14. Zależność amplitudy napięcia heterodyny i sygnału o częstotliwości pośredniej w funkcji amplitudy E_h SEM heterodyny.

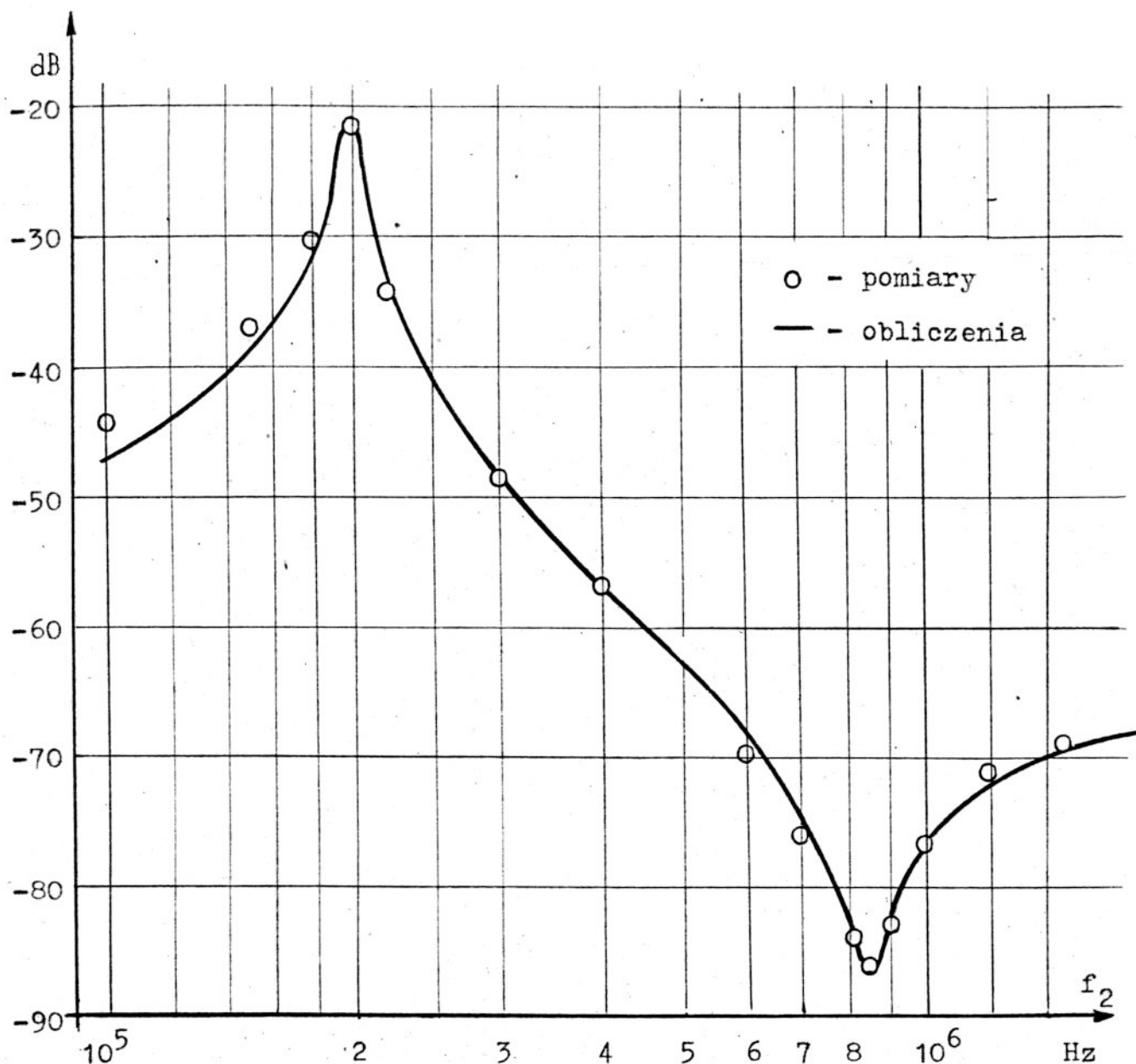
między 800 a 900kHz spowodowane jest rezonansem własnym cewki L_2 . Na rys.6.16 pokazano przebieg transmitancji liniowej obwodów wejściowych między generatorem sygnału a wejściem tranzys-

tora, na którym widoczny jest wyraźny rezonans w tym miejscu.



Rys.6.15. Transmitancja liniowa $|H_{0,1}^{(1)}(f_2)|$ mieszacza.

Na rys.6.17 /wkładka/ przedstawiono wykres warstwiczny modułu funkcji $|H_{1,1}^{(2)}(f_1; f_2)|$ /zauważyć można, że funkcja ta nie jest symetryczna względem prostej $f_1 = f_2$, zgodnie z własnością 3 z rozdziału 4.3/. Na rysunku tym widocznych jest sześć maksimów. Dwa z nich - B i C - wynikają odpowiednio, z istnienia wspomnianego wcześniej rezonansu pasożytniczego cewki L_2 oraz rezonansu obwo-



Rys.6.16. Transmitancja obwodów wejściowych mieszacza od wejścia sygnału do bazy tranzystora.

du wejściowego. Pozostałe cztery odpowiadają:

A - kanałowi lustrzanemu $f_2 = f_h + f_p = 1130 \text{ kHz}$, $f_1 = -f_h = -665 \text{ kHz}$
oraz częstotliwości wypadkowej $f_{wy} = f_1 + f_2 = f_p = 465 \text{ kHz}$,

D - kanałowi sumacyjnemu przy odstrojeniu heterodyny $f_1 = 265 \text{ kHz}$
 $f_2 = f_o = 200 \text{ kHz}$ i $f_{wy} = f_1 + f_2 = 465 \text{ kHz}$,

E - kanałowi sumacyjnemu tłumionemu przez filtr p.cz. $f_1=f_h=665\text{kHz}$, $f_2=f_o=200\text{kHz}$ i $f_{wy}=f_1+f_2=865\text{kHz}$,

F - kanałowi użytecznemu $f_1=-f_o=-200\text{kHz}$, $f_2=f_h=665\text{kHz}$ i $f_{wy}=f_1+f_2=f_p=465\text{kHz}$.

Aczkolwiek pomiary i obliczenia pełnej funkcji $|H_{1,1}^{(2)}(f_1; f_2)|$ są możliwe, to w praktyce często ogranicza się je do znalezienia przekrojów tej funkcji dla $f_1 = \pm f_h = \pm 665\text{kHz}$ /na rys.6.17 przekroje te zaznaczono jako a-a i a'-a'/. co pozwala określić charakterystyki funkcji $|H_{1,1}^{(2)}(f_1; f_2)|$ w pobliżu kanału użytecznego /przekrój a-a/ i kanału lustrzanego /przekrój a'-a'/. Wyniki obliczeń i pomiarów tych przekrojów pokazuje rys.6.18.

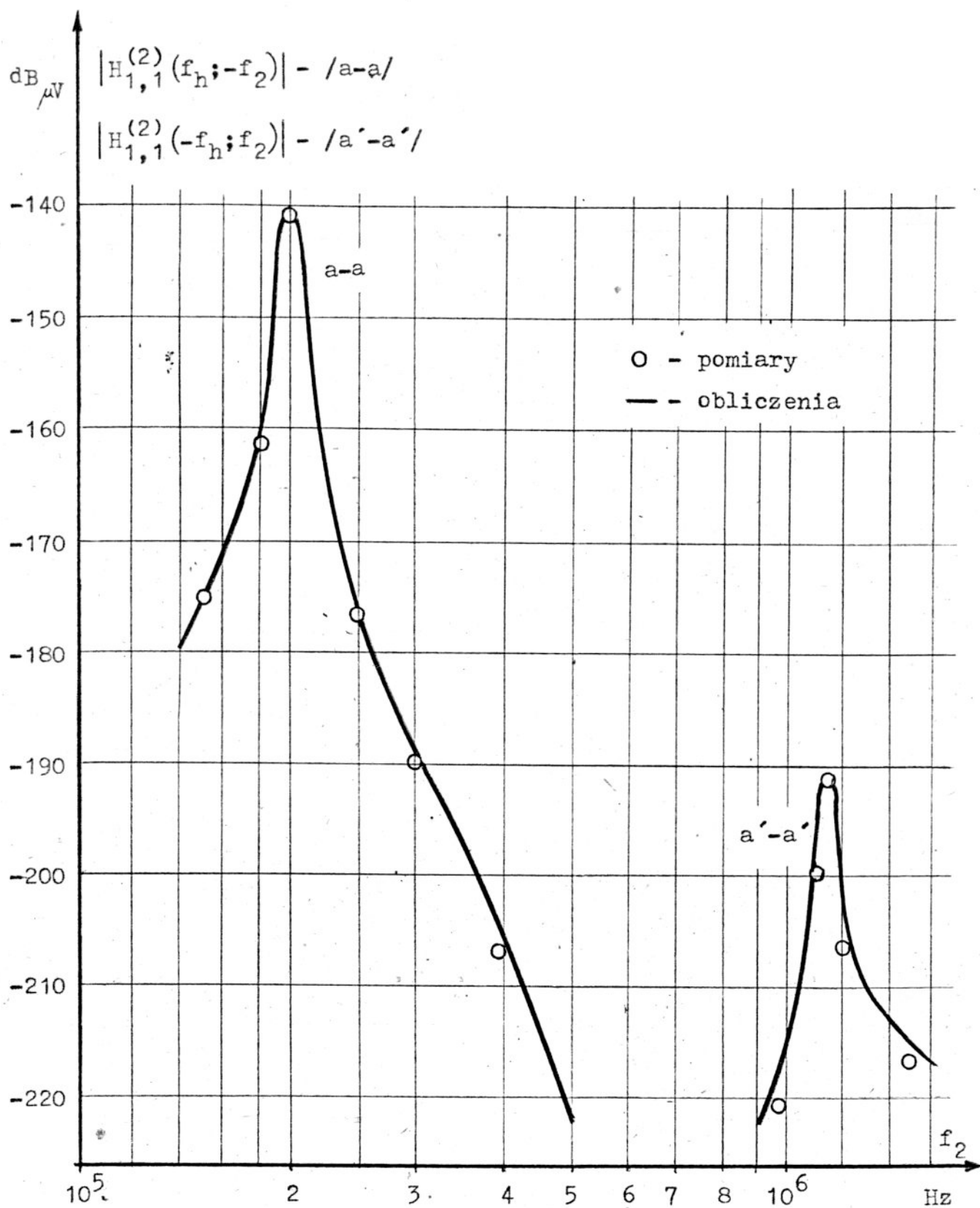
Na kolejnych rysunkach /rys.6.19, 6.20 i 6.21/ pokazano charakterystyki niektórych rodzajów transmitancji $|H^{(3)}(\cdot)|$. Pomiary i obliczenia dotyczą przypadków, gdy sygnał wyjściowy jest sygnałem o częstotliwości pośredniej $f_p=465\text{kHz}$. Na podstawie wykresów 6.19, 6.20 i 6.21 można stwierdzić, że uzyskano dobrą zgodność wyników pomiarów i obliczeń.

Określenia amplitud napięć wyjściowych pochodzących od poszczególnych transmitancji $H^{(i)}(\cdot)$ dokonuje się analogicznie jak w przypadku wzmacniacza /wzory /6.23/ i /6.24//.

Zakładając idealną selektywność i liniowość toru wzmacniacza pośredniej częstotliwości, można określić wpływ wszystkich interesujących kanałów odbioru na sygnał wyjściowy odbiornika.

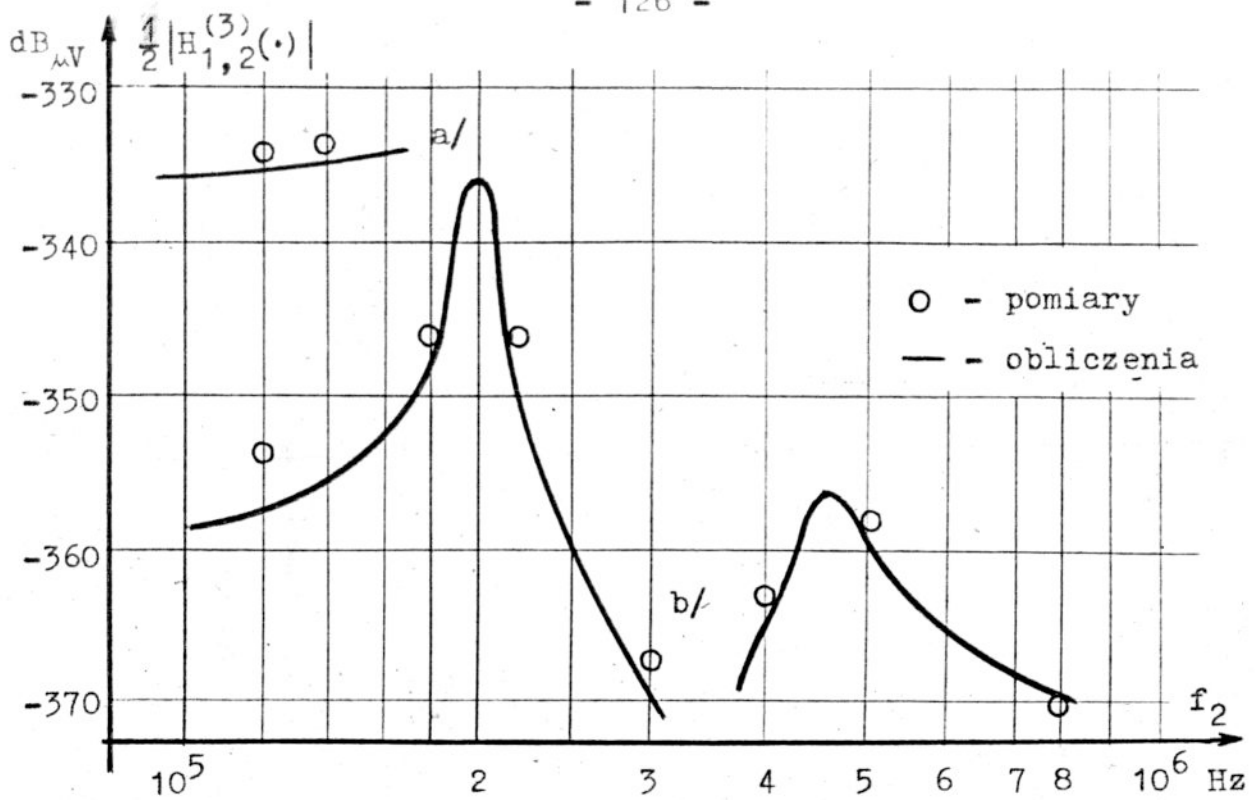
Wielkość transmitancji sygnału pożądanego charakteryzuje

$|H_{1,1}^{(2)}(f_h; -f_o)|$ - rys.6.18 /pomińmy w tym miejscu nieliniowe funkcje transmitancji rzędów wyższych niż trzeci/. Dla przyjętej wielkości amplitudy SEM heterodyny E_h można obliczyć

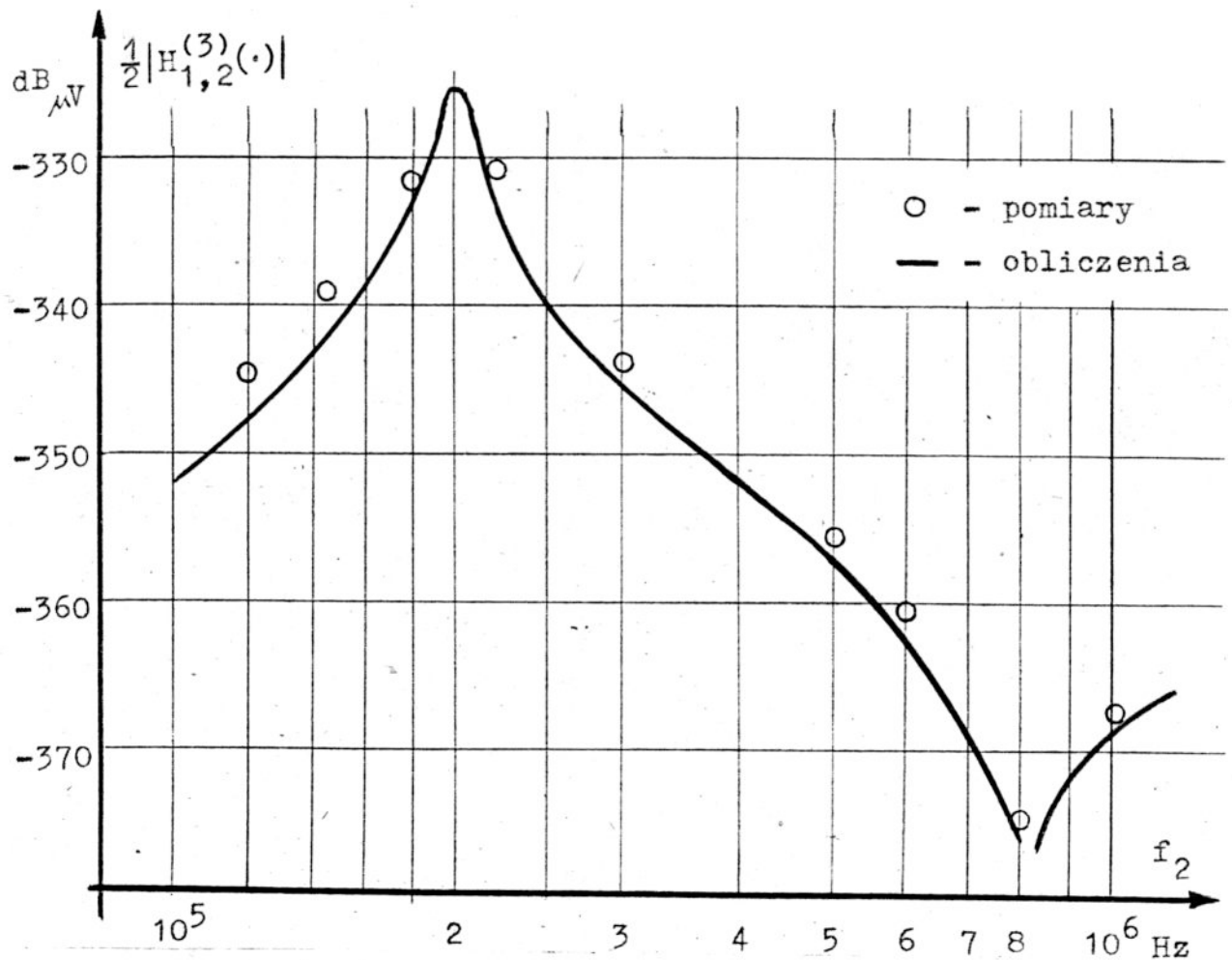


Rys.6.18. Przebieg nieliniowej funkcji transmitancji

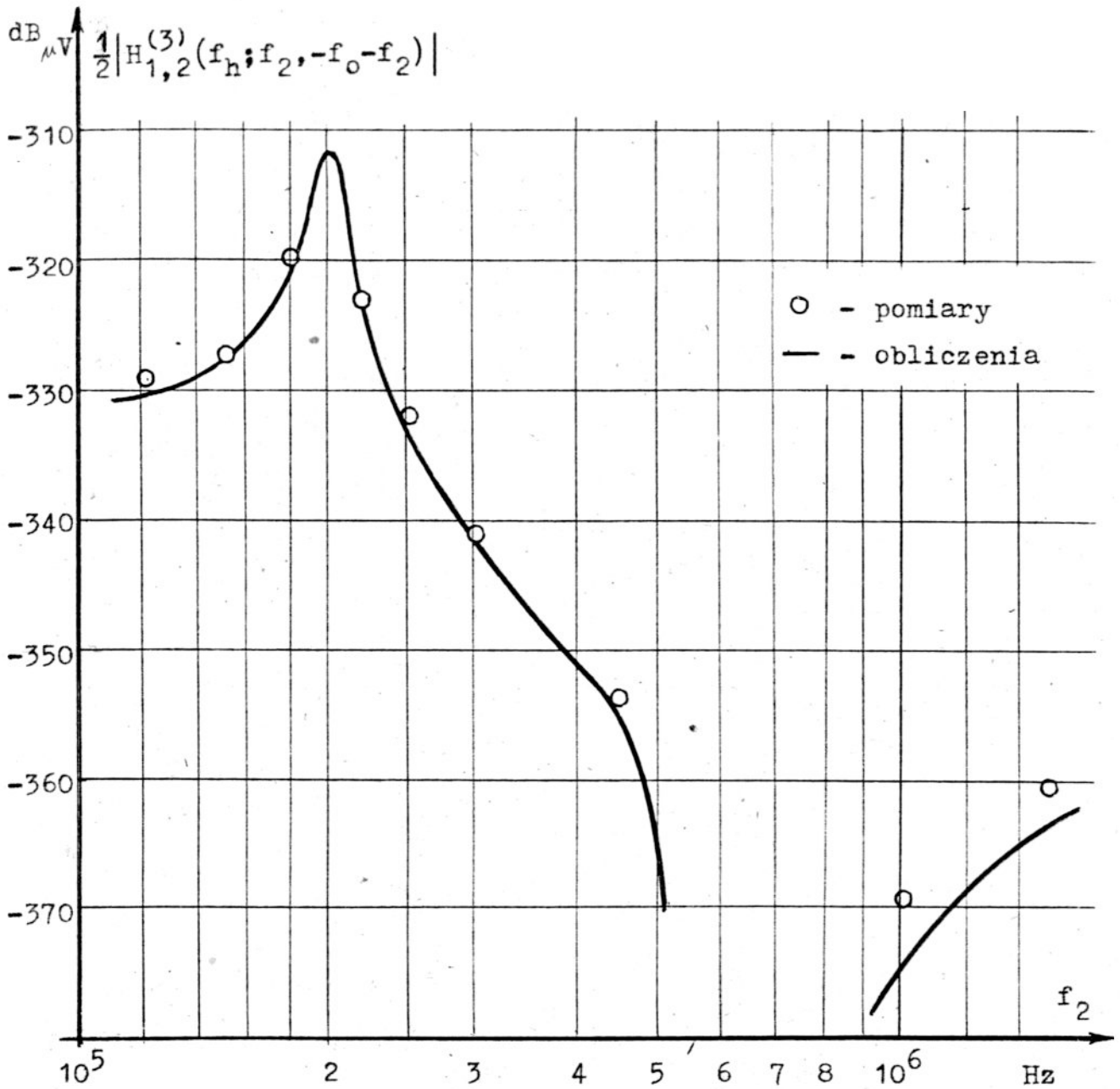
mieszacza $|H_{1,1}^{(2)}(\pm f_h; \mp f_2)|$.



Rys.6.19. Przebieg funkcji $a/ |H_{1,2}^{(3)}(f_h; -f_2, f_2 - f_o)|$,
 $b/ |H_{1,2}^{(3)}(f_h; -f_2, f_2 - f_h - f_p)|$.



Rys.6.20. Przebieg funkcji $|H_{1,2}^{(3)}(f_h; f_2, -f_2 - f_h - f_p)|$.



Rys.6.21. Nieliniowa funkcja transmitancji mieszacza

$$|H_{1,2}^{(3)}(f_h; f_2, -f_2 + f_o)|.$$

wpływ różnych kanałów zakłócających na sygnał wyjściowy odbiornika.

Kanał charakteryzujący przenikanie bezpośrednie sygnału o częstotliwości pośredniej określa $H_{o,1}^{(1)}(f_p)$ /rys.6.15/.

Tłumienie sygnałów z tego kanału można wyznaczyć ze wzoru

$$T_p = \left| \frac{2H_{o,1}^{(1)}(f_p)}{H_{1,1}^{(2)}(f_h; -f_o)E_h} \right|. \quad /6.27/$$

Kanał o częstotliwości lustrzanej opisuje transmitancja $H_{1,1}^{(2)}(f_h; -f_h - f_p)$. Tłumienie sygnałów lustrzanych można wyznaczyć z zależności

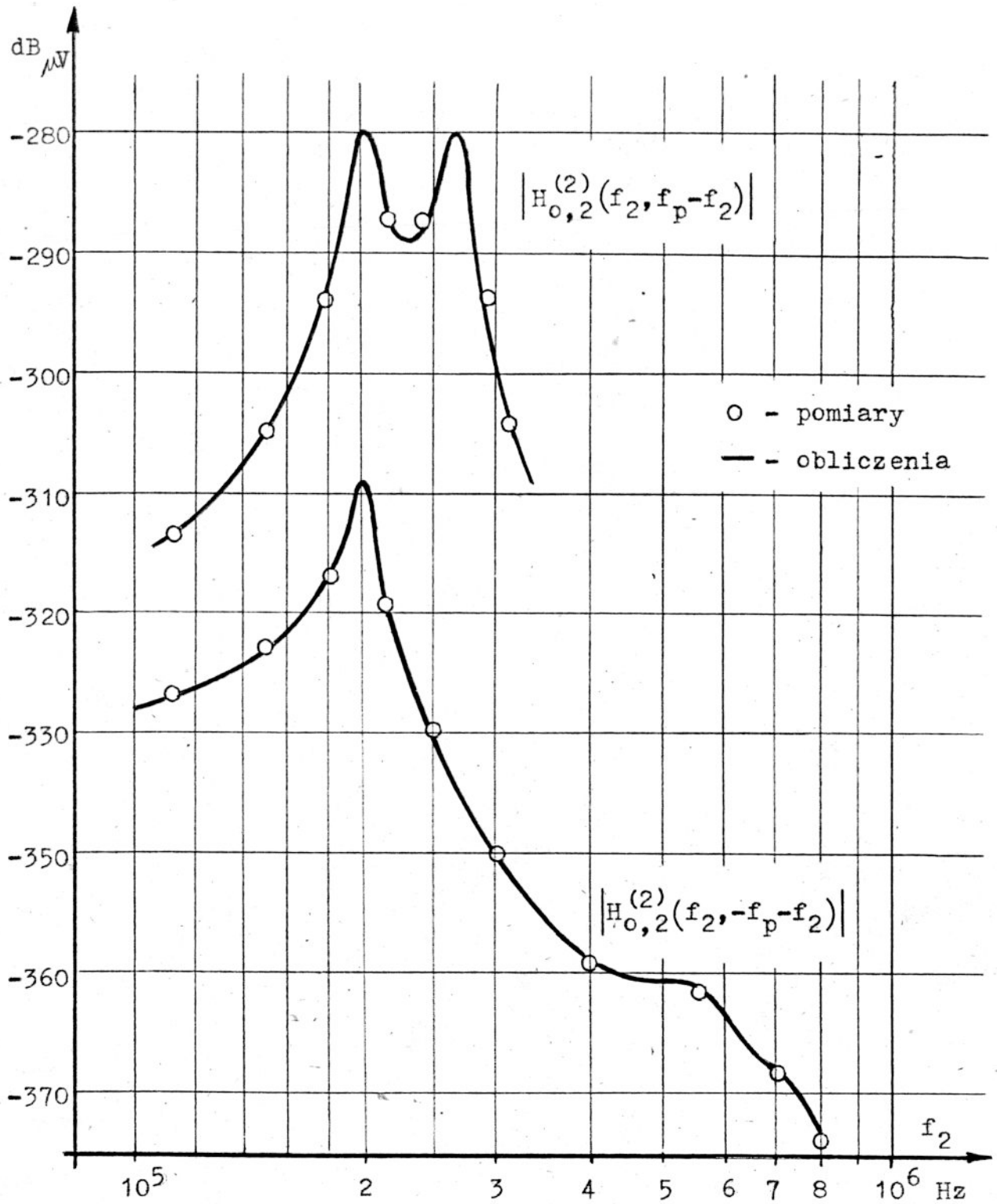
$$T_l = \left| \frac{H_{1,1}^{(2)}(f_h; -f_h - f_p)}{H_{1,1}^{(2)}(f_h; -f_o)} \right|. \quad /6.28/$$

Poza tymi podstawowymi kanałami zakłócającymi można określić wpływ innych sygnałów niepożądanych opisanych przez funkcje trzeciego rzędu /rys.6.19 , 6.20 , 6.21/. Tłumienie tych sygnałów można wyznaczyć ze wzoru

$$T_{ih} = \left| \frac{H_{1,2}^{(3)}(f_h; f_{2,1}, f_{2,2})E_z(f_{2,1})E_z(f_{2,2})}{H_{1,1}^{(2)}(f_h; -f_o)E_s(f_o)} \right|, \quad /6.29/$$

gdzie $f_{2,1} + f_{2,2} = -f_o$, a E_z oznacza amplitudę napięcia sygnału zakłócającego /wzór ten opisuje tłumienie intermodulacji z udziałem heterodyny/.

Kanały zakłócające wyższych rzędów opisane przez transmitancje drugiego i trzeciego rzędu mogą również powstać bez udziału heterodyny, analogicznie jak w rozważanym wcześniej wzmacniaczu. Częstotliwości kanałów zakłócających muszą być takie, by częstotliwość wypadkowa była równa $f_p = 465 \text{ kHz}$. Funkcję drugiego rzędu $|H_{o,2}^{(2)}(f_2, \pm f_p - f_2)|$ odpowiadające tym kanałom przedstawia rys.6.22. Tłumienie tych kanałów można obliczyć ze wzoru /tłumienie intermodulacji drugiego rzędu bez udziału heterodyny/



Rys.6.22. Moduł funkcji transmitancji drugiego rzędu

$$H_{o,2}^{(2)}(f_2, \pm f_p - f_2).$$

$$T_1 = 2 \left| \frac{H_{0,2}^{(2)}(f_{2,1}, f_{2,2}) E_z(f_{2,1}) E_z(f_{2,2})}{H_{1,1}^{(2)}(f_h; -f_o) E_h(f_h) E_s(f_o)} \right|. \quad /6.30/$$

Inną grupę kanałów zakłócających stanowią kanały powstające przy udziale harmonicznych heterodyny. Tą grupę można oczywiście analizować analogicznie jak rozważane powyżej.

Ograniczeniem prezentowanej analizy mieszacza jest zakres napięć heterodyny, dla których uzyskuje się dobrą zgodność obliczeń z eksperymentem /rys.6.14/. Użyteczny zakres amplitud napięcia heterodyny na złączu baza-emiter tranzystora /około 40mV, a w przypadku wzorów /6.27/ - /6.30/, ze względu na ograniczenie rozważań do funkcji najwyższej trzeciego rzędu około 25mV/ leży poniżej typowych wartości /100 do 200mV/. W celu rozszerzenia tego zakresu zastosowano następującą procedurę: w miejsce rzeczywistej /zmierzonej/ amplitudy napięcia heterodyny - pkt.A /rys.6.14/ podstawiono wartość uzyskaną w wyniku przerzutowania punktu A z charakterystyki zmierzonej na charakterystykę liniową $|H_{1,0}^{(1)}(f_h) E_h|$ - pkt.A' /zamiast $140dB_{\mu V}$ należy podstawić $133dB_{\mu V}^X$. Sprawdzone, że obliczenia poziomu sygnałów opisanych wielowymiarowymi funkcjami transmitancji zawierającymi częstotliwość heterodyny, przy zastosowaniu powyższej procedury, zapewniają dobrą zgodność z wynikami pomiarów dla amplitud napięcia heterodyny na złączu baza-emiter tranzystora do ok. 150mV i amplitud sygnałów z anteny ok. 25mV.

^X Jest to słuszne w przypadku mieszaczy jednotranzystorowych, dla których sygnał przenikania heterodyny i sygnały powstałe w wyniku oddziaływania pierwszej harmonicznej heterodyny są proporcjonalne do $I_1(E_h)/I_0(E_h)$, gdzie $I_1(\cdot)$ i $I_0(\cdot)$ są funkcjami Bessela pierwszego i zerowego rzędu dla argumentów zespolonych [54].

6.4. Analiza obwodów rezonansowych z diodami pojemnościowymi.

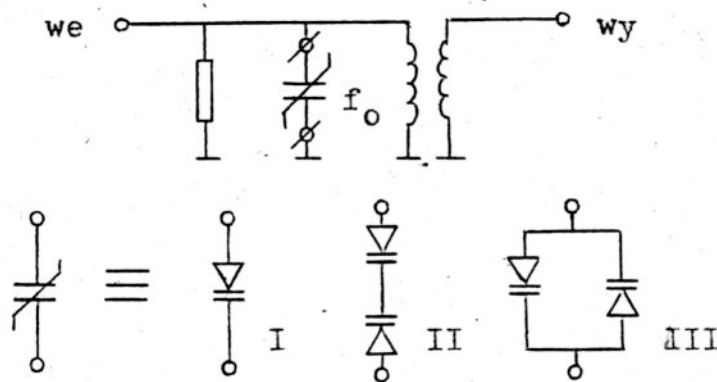
Ponieważ oba rozważane wcześniej przykłady dotyczyły przypadków z nieliniowościami konduktancyjnymi, tu rozważono przykład, gdy główną nieliniowością jest admitancja pojemnościowa.

W przykładzie tym rozważono obwody rezonansowe strojone diodami pojemnościowymi typu BB113 w trzech wersjach /rys.6.23/:

I - z pojedynczą diodą

II - z dwiema diodami włączonymi antyszeregowo

III - z dwiema diodami włączonymi antyrównolegle



Rys.6.23 Obwód rezonansowy strojony diodami pojemnościowymi.

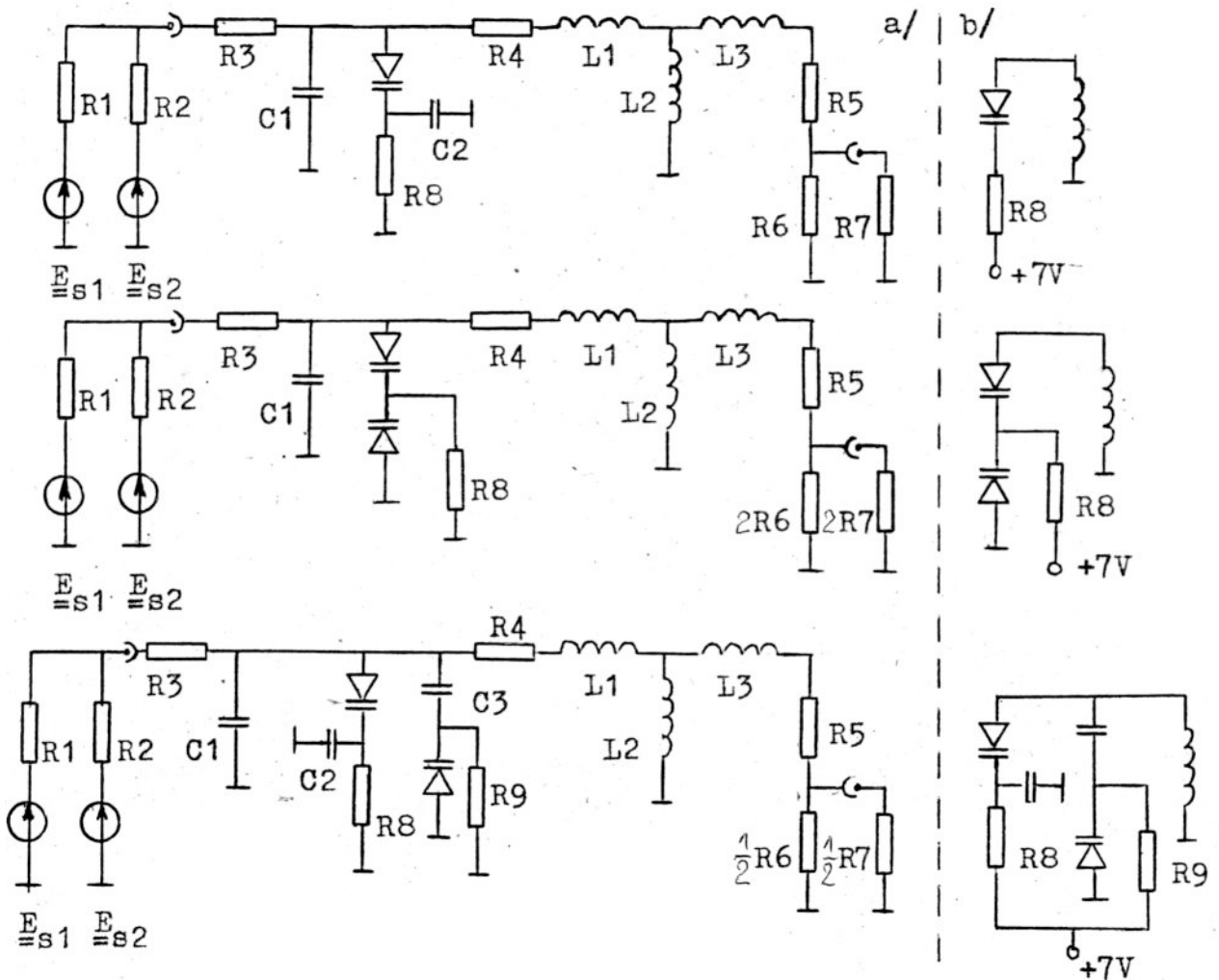
W niniejszym przykładzie zastosowano, taki sam układ pomiarowy jak w przypadku wzmacniacza /rys.6.3/.

We wszystkich trzech przypadkach obwodów rezonansowych jako stałe parametry przyjęto:

- dobroć $Q=18,5$,
- zakres strojenia obwodów 150kHz do 285kHz /fale długie/ przy zmianie napięcia polaryzacji diod 1,4V do 24V,
- częstotliwość dostrojenia obwodów $f_0=200\text{kHz}$ przy polaryzacji

napięciem stałym $E_c = 7V$.

Schematy zastępcze obwodów przystosowane do analizy komputerowej wraz z generatorami i obciążeniem pokazuje rys.6.24, na którym naszkicowano również sposób polaryzacji diod pojemnościowych. Dane o elementach poszczególnych obwodów podaje tabela 6.3. /sposób znalezienia zależności opisującej diodę pojemnościową podaje rozdział następny/.



Rys.6.24. a/ Schematy zastępcze analizowanych obwodów rezonansowych.

b/ Sposób polaryzacji diod pojemnościowych.

Tablica 6.3.

Wartości elementów układów z rys.6.24.

Elementy liniowe:			
	I	II	III
R_1	100Ω	100Ω	100Ω
R_2	100Ω	100Ω	100Ω
R_3	$150 k \Omega$	$300 k \Omega$	$75 k \Omega$
R_4	80Ω	160Ω	40Ω
R_5	$2,6 k \Omega$	$5,2 k \Omega$	$1,3 k \Omega$
R_6	75Ω	75Ω	75Ω
R_7	75Ω	75Ω	75Ω
R_8	$1 M \Omega$	$1 M \Omega$	$1 M \Omega$
R_9	-	-	$1 M \Omega$
C_1	$62,7 pF$	$31,3 pF$	$125,4 pF$
C_2	$33 nF$	-	$33 nF$
C_3	-	-	$33 nF$
L_1	$3,66 mH$	$7,32 mH$	$1,83 mH$
L_2	$-0,193 mH$	$-0,386 mH$	$-0,0965 mH$
L_3	$0,208 mH$	$0,416 mH$	$0,104 mH$
Elementy nieliniowe:			
 $i_c = \frac{d}{dt} (101 u_c + 5,62 u_c^2 + 0,283 u_c^3 + 0,0225 u_c^4 + 0,00272 u_c^5) \cdot 10^{-12}$			

6.4.1. Modelowanie diody pojemnościowej BB113.

W niniejszym przykładzie, jak zaznaczono, użyto diod pojemnościowych BB113. Jak się okazało w tym przypadku, aproksymacja zależności pojemności od napięcia $C=C(U)$ równaniem opisującym nieliniową pojemność złączową o postaci [46,56]

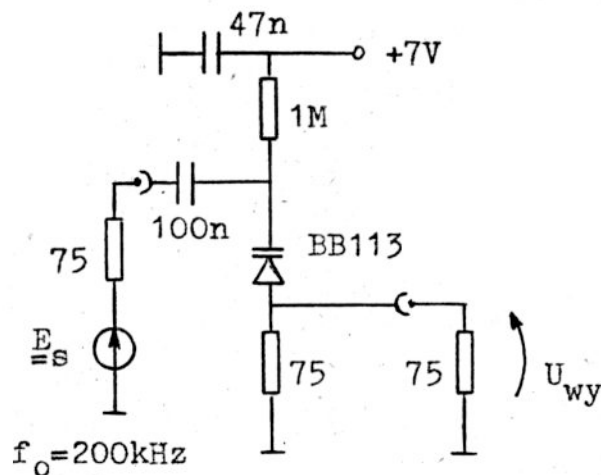
$$C = \frac{C_0}{\left(1 + \frac{U}{U_D}\right)^\eta} \quad /6.31/$$

gdzie U_D jest napięciem dyfuzyjnym, a η współczynnikiem, nie daje rezultatu. W związku z tym, aby prąd diody opisać, zgodnie z wymaganiami, wielomianem

$$i_c = \frac{d}{dt} (\alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3 + \alpha_4 u^4 + \alpha_5 u^5) \quad /6.32a/$$

postąpiono w sposób następujący.

Zbudowano układ pomocniczy jak na rys.6.25 i zmierzono,



Rys.6.25. Układ pomocniczy do identyfikacji parametrów diody pojemnościowej opisanej równaniem /6.32a/

przy pobudzeniu sygnałem sinusoidalnym o częstotliwości $f_0 = 200 \text{ kHz}$ i amplitudzie do 3V oraz napięciu polaryzującym +7V, zawartość pięciu pierwszych harmonicznych sygnału wyjściowego. Następnie tak dobrano współczynniki wielomianu /6.32a/, aby w analizie komputerowej układu z rys.6.25 uzyskać ten sam wynik. Innymi słowy, zastosowano metodę szeregów Volterra do identyfikacji parametrów elementu nieliniowego. Uzyskano następujące wyniki /z dokładnością ok. 5%/

$$\alpha_1 = 101 \text{ pF}$$

$$\alpha_2 = 5,62 \text{ pF/V}$$

$$\alpha_3 = 0,285 \text{ pF/V}^2 \quad /6.32b/$$

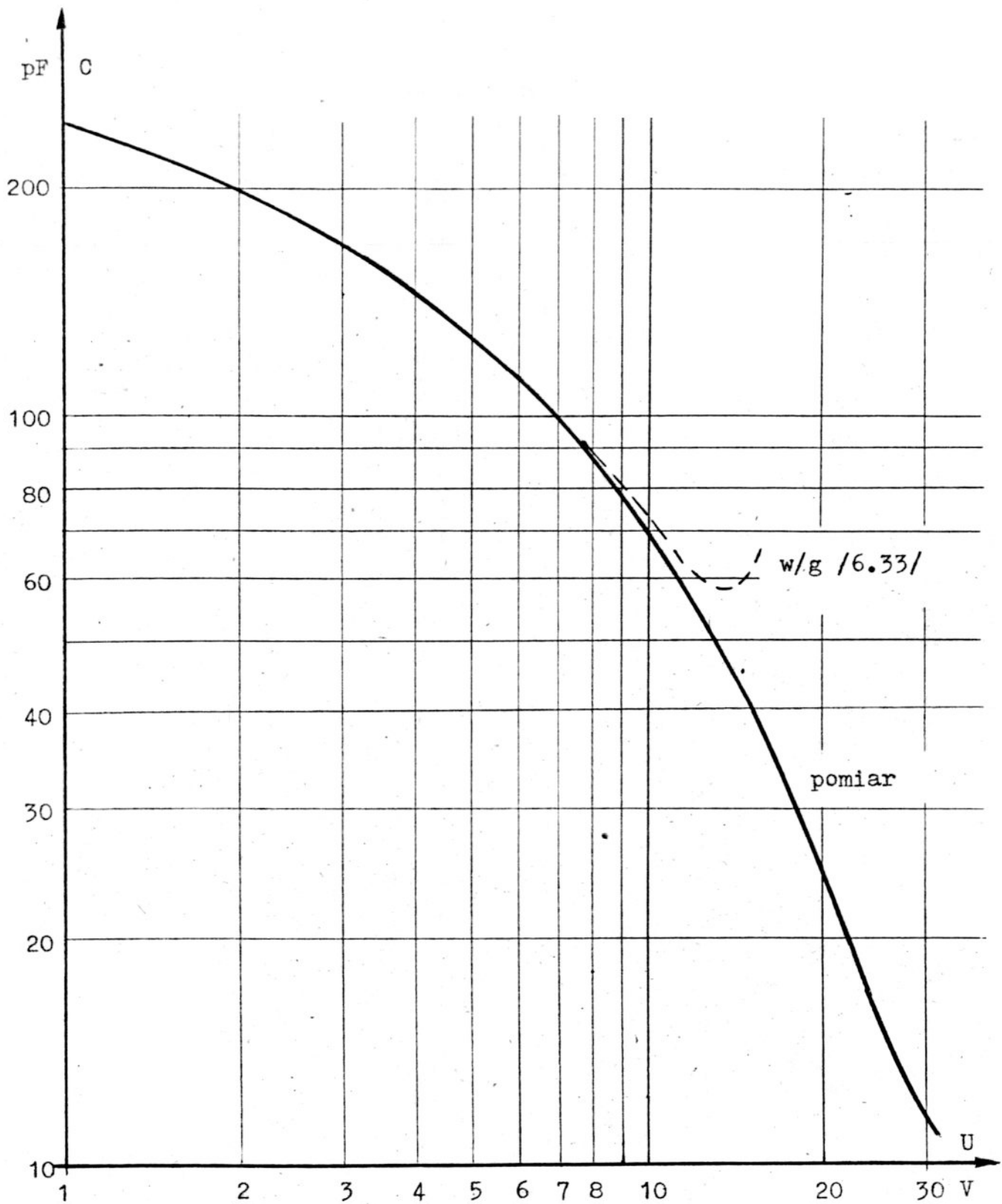
$$\alpha_4 = 0,0235 \text{ pF/V}^3$$

$$\alpha_5 = 0,00272 \text{ pF/V}^4$$

Ze wzoru /6.32/ można uzyskać zależność pojemności różniczkowej od napięcia

$$C = \frac{dQ}{du} = \frac{dQ}{dt} \frac{dt}{du} = i_c \frac{dt}{du} = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^5 \alpha_k u^k \frac{dt}{du} = \sum_{k=1}^5 k \alpha_k u^{k-1} \quad /6.33/$$

Zależność powyższą naniesiono na wykres zmierzonej, metodą klasyczną, zależności $C = C(U)$ /rys.6.26/. Jak widać wielomian /6.33/ o współczynnikach /6.32b/ dobrze opisuje pojemność diody w zakresie 1 do 12V /błąd jest mniejszy od 10%/.



Rys.6.26. Pojemność diody BB113 w funkcji napięcia polaryzującego.

6.4.2. Wyniki analizy obwodów rezonansowych z diodami pojemnościowymi.

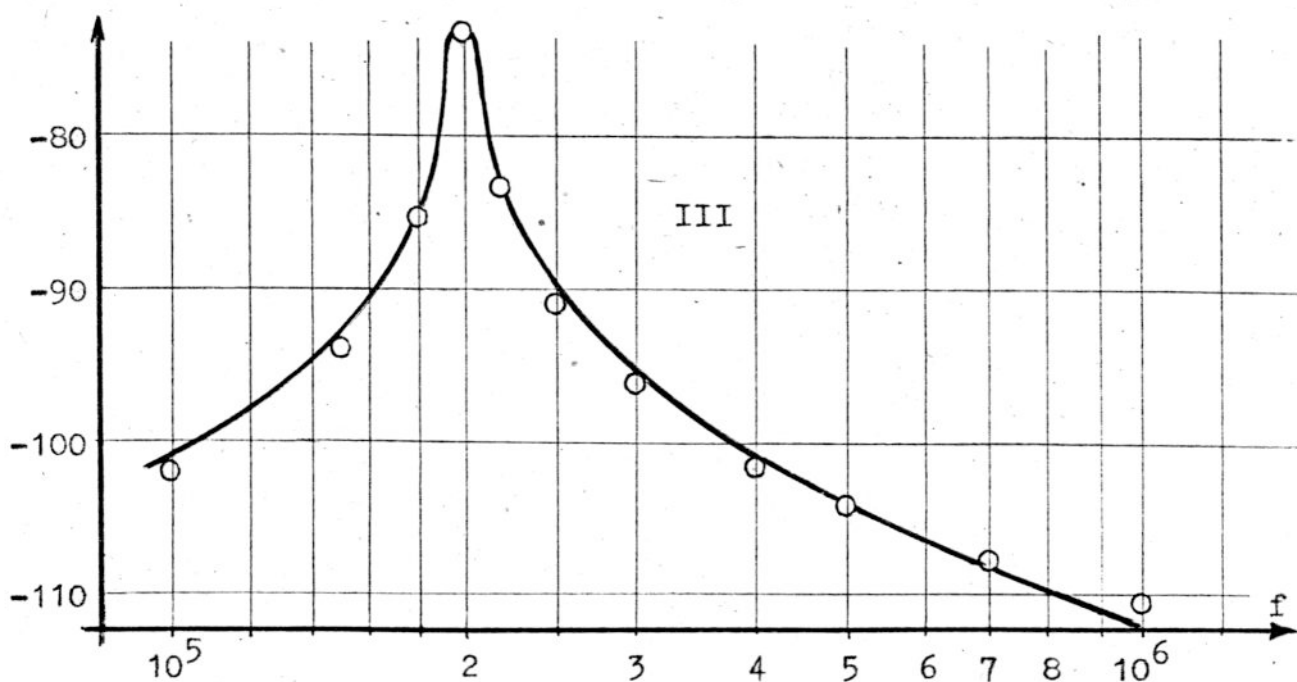
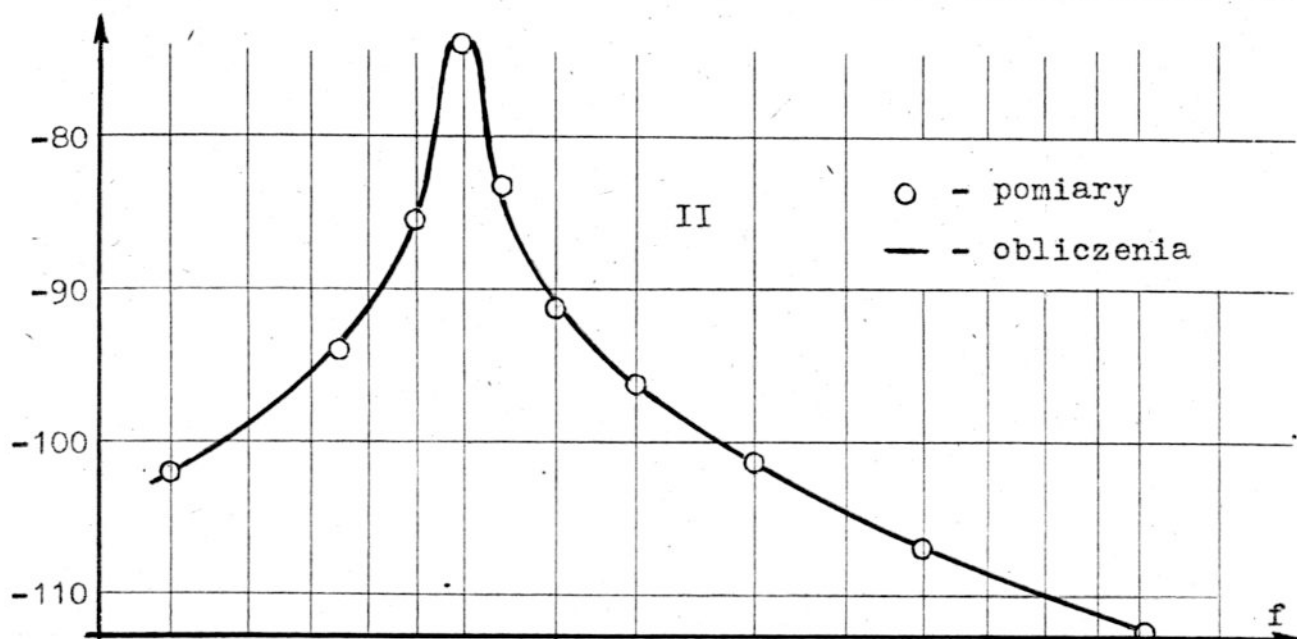
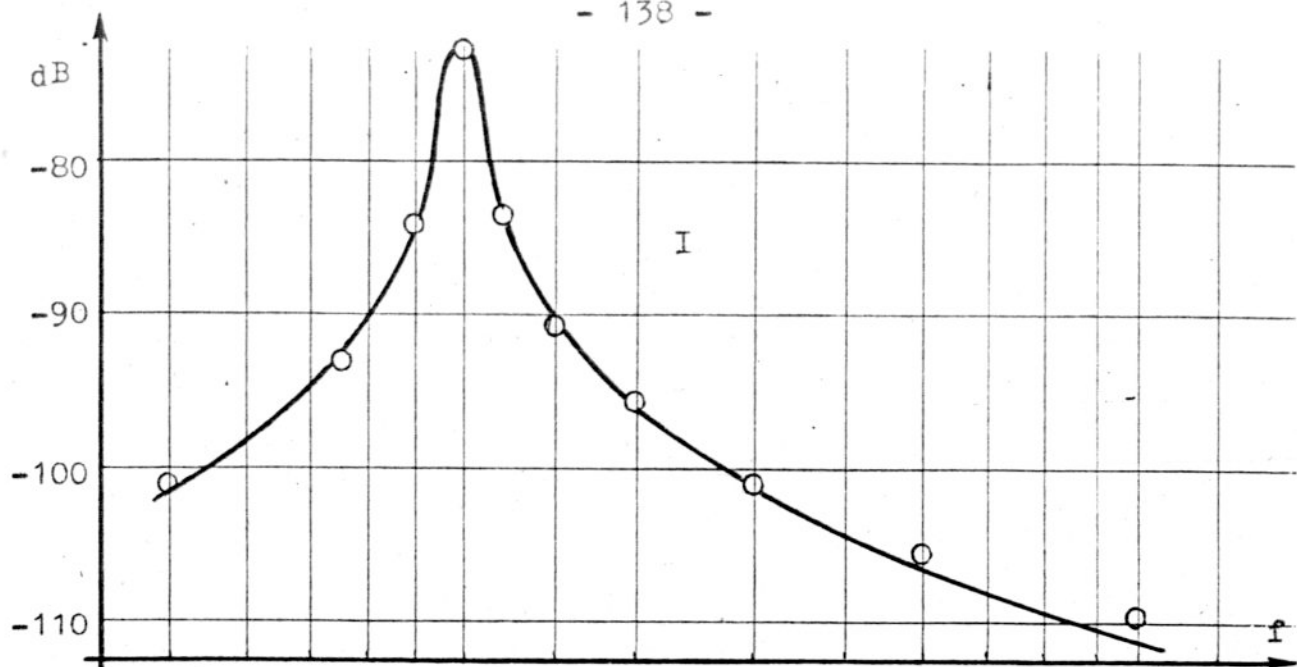
Zgodnie z założeniem o stałości dobroci i częstotliwości dostrojenia wszystkich trzech obwodów, powinno się uzyskać dla nich niezmienną transmitancję liniową $H_1^{(1)}(f)$. W celu sprawdzenia, czy rzeczywiście ma to miejsce, obliczono przebieg modułu funkcji transmitancji $H_1^{(1)}(f)$ i sprawdzono ją pomiarowo w kilku punktach częstotliwościowych. Wyniki przedstawiono na rys.6.27.

Jak poprzednio, sprawdzono zakres napięć, dla których aproksymacja sygnału wyjściowego za pomocą wielomianu Volterry piątego stopnia daje dobre rezultaty. W tym celu zmierzono i obliczono zależność amplitudy trzech pierwszych harmonicznych, dla $f_0=200\text{kHz}$, na wyjściu układu I w zależności od amplitudy $\underline{E}_S$ sygnału wejściowego. Jak można zauważyć /rys.6.28/ rozbieżność wyników jest mniejsza od 1dB dla amplitud napięcia na obwodzie rezonansowym /a tym samym na diodzie pojemnościowej/ do ok.5V. Na wykresie tym amplitudy poszczególnych harmonicznych aproksymowano za pomocą wielomianów Volterry postaci

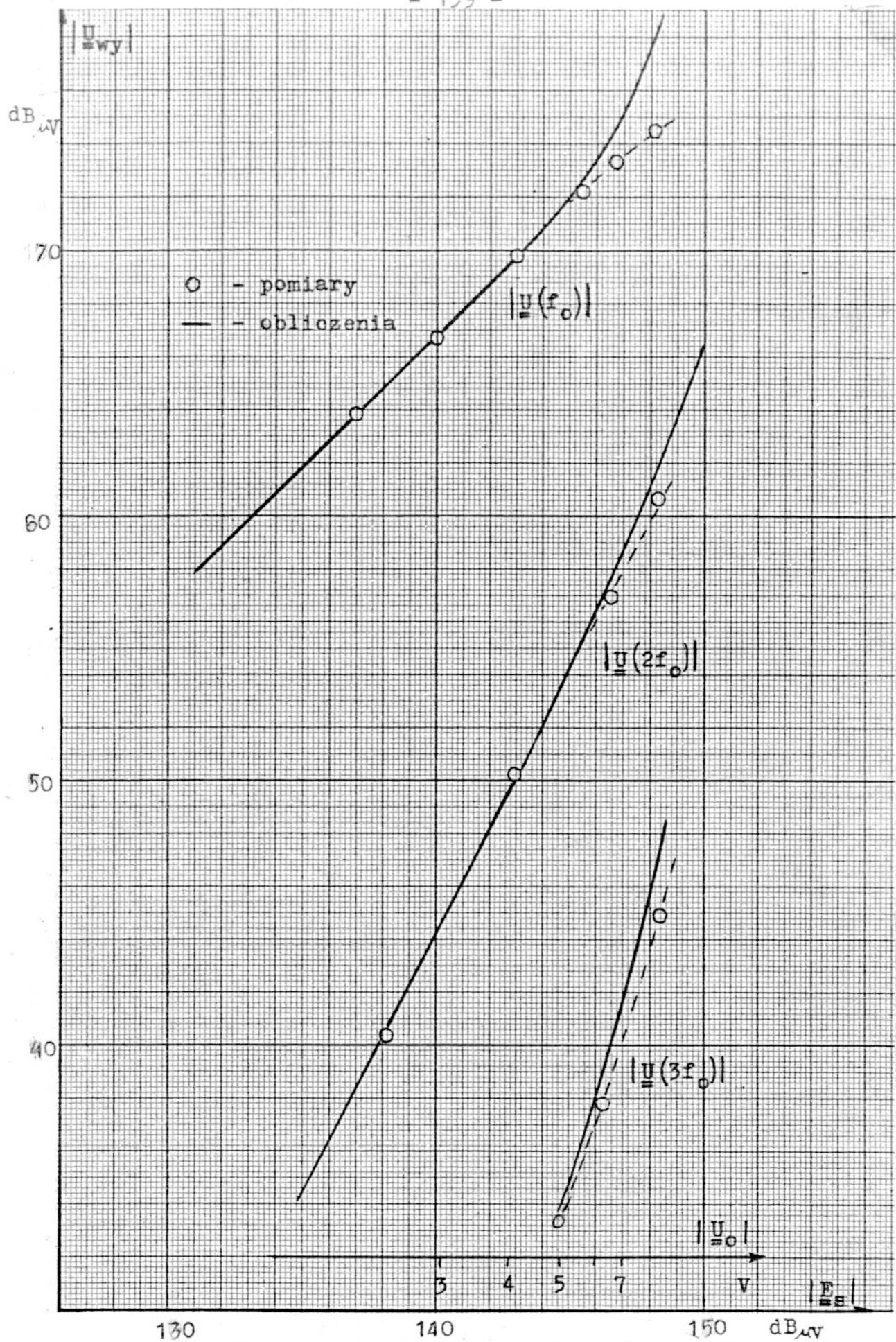
$$\begin{aligned} |\underline{U}(f_0)| = & \left| H_1^{(1)}(f_0) \underline{E}_S + \frac{3}{4} H_3^{(3)}(f_0, f_0, -f_0) \underline{E}_S^2 \underline{E}_S^* + \right. \\ & \left. + \frac{5}{8} H_5^{(5)}(f_0, f_0, f_0, -f_0, -f_0) \underline{E}_S^3 \underline{E}_S^{*2} \right|, \end{aligned} \quad /6.34a/$$

$$|\underline{U}(2f_0)| = \frac{1}{2} \left| H_2^{(2)}(f_0, f_0) \underline{E}_S^2 + H_4^{(4)}(f_0, f_0, f_0, -f_0) \underline{E}_S^3 \underline{E}_S^* \right|, \quad /6.34b/$$

$$|\underline{U}(3f_0)| = \frac{1}{4} \left| H_3^{(3)}(f_0, f_0, f_0) \underline{E}_S^3 + \frac{5}{4} H_5^{(5)}(f_0, f_0, f_0, f_0, -f_0) \underline{E}_S^4 \underline{E}_S^* \right|. \quad /6.34c/$$

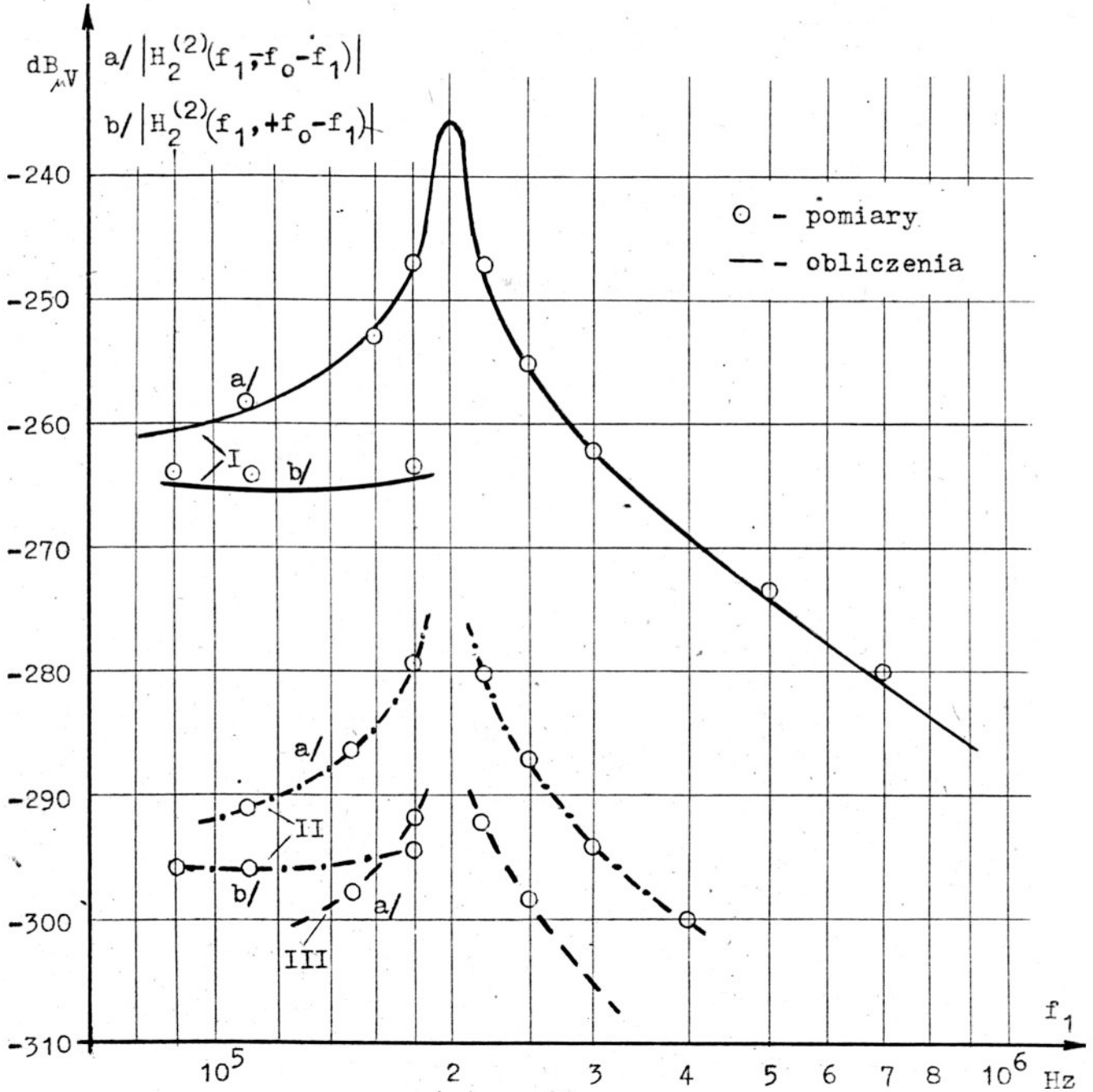


Rys.6.27. Liniowa funkcja transmitancji $|H_1^{(1)}(f)|$ dla trzech obwodów rezonansowych.



Rys.6.28. Określenie zakresu poprawnej aproksymacji sygnału wyjściowego obwodu I przez wzory /6.34/; $f_o = 200\text{kHz}$; U_o - amplituda napięcia harmonicznego na diodzie pojemnościowej.

Podobnie jak w poprzednich przykładach i tu obliczono oraz zweryfikowano pomiarowo kilka nieliniowych funkcji transmitancji rzędu drugiego i trzeciego. Rys.6.29 przedstawia moduł funkcji $H_2^{(2)}(f_1, f_2)$ przy $f_2 = -f_1 \pm f_0$ opisującej intermodulację

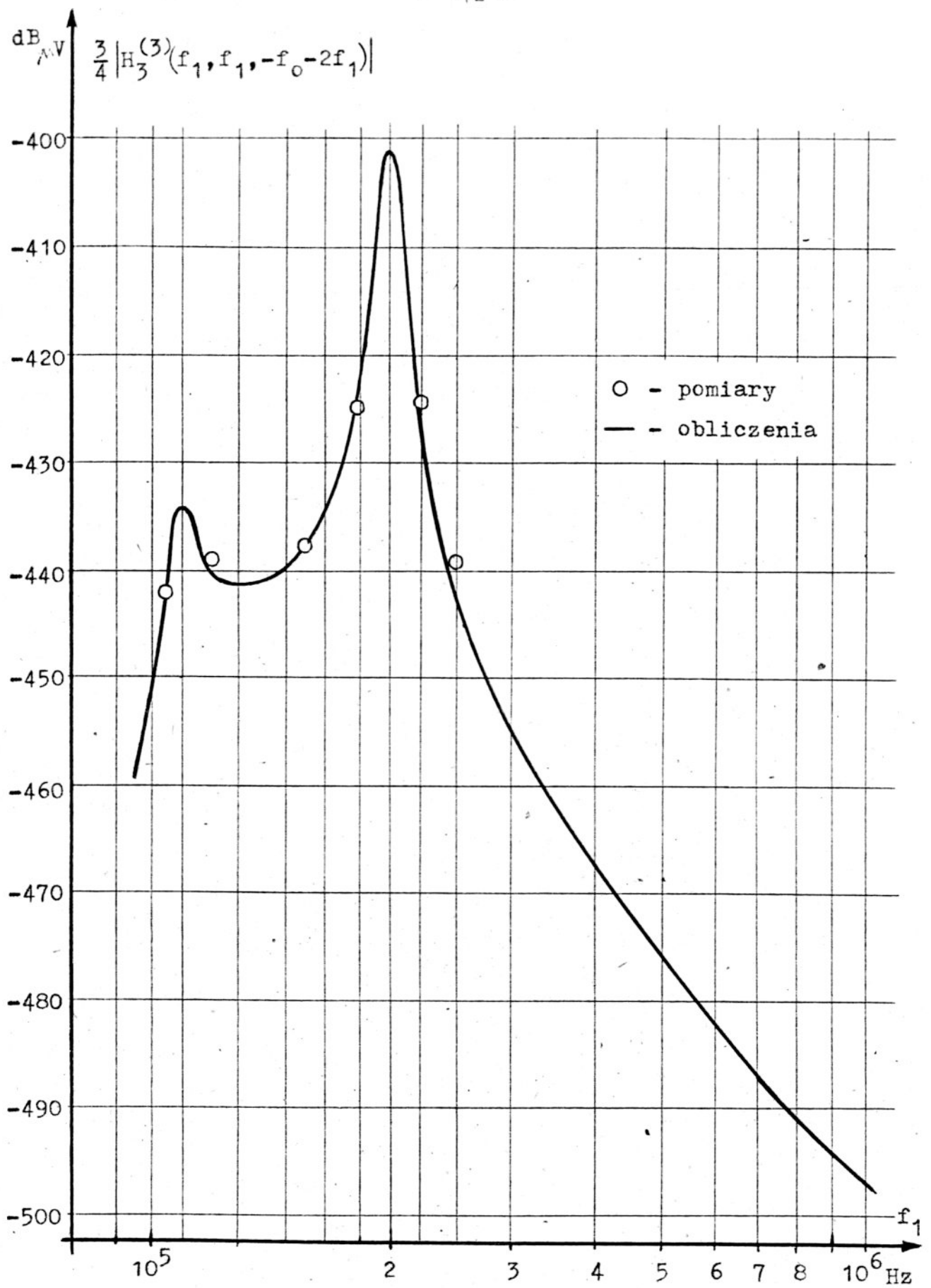


Rys.6.29. Moduł funkcji $H_2^{(2)}(f_1, -f_1 \pm f_0)$ dla obwodów rezonansowych I, II i III.

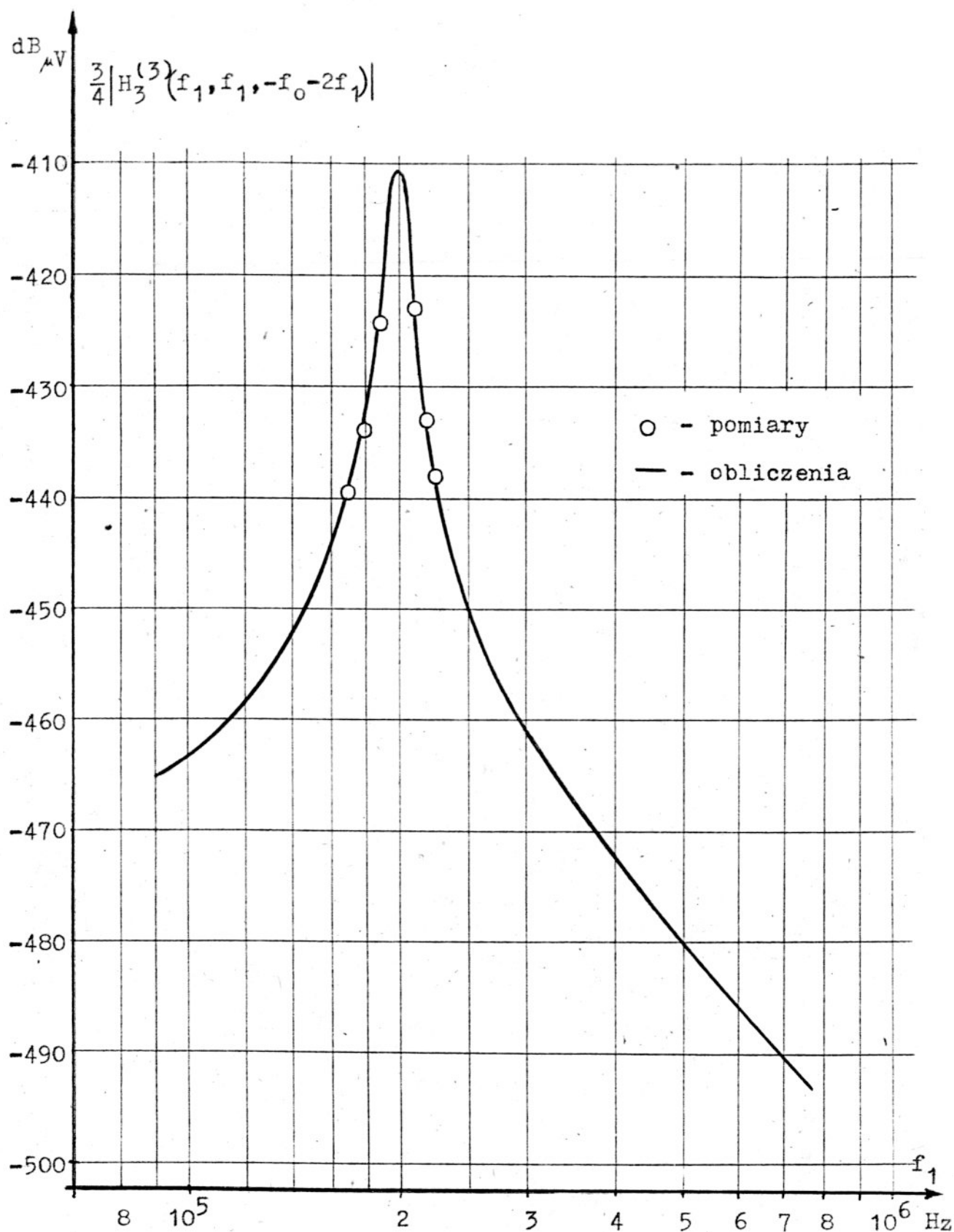
drugiego rzędu z tym, że dla układów II i III są to tylko przebiegi mierzone, gdyż teoretycznie, w tych przypadkach, zniekształcenia drugiego rzędu pochodzące od obu diod powinny się kompensować. Jak widać kompensacja ta zachodzi lepiej dla układu III niż w przypadku układu II, co wiąże się z mniejszą wrażliwością tego układu na różnice charakterystyk pojemności nieliniowej diody /szczegółowo rozważono to w dodatku C/.

Dla wszystkich trzech obwodów obliczono również moduł funkcji trzeciego rzędu $H_3^{(3)}(f_1, f_1, -f_2)$ $/f_2=f_0+2f_1/$ reprezentującej intermodulację trzeciego rzędu dwóch sygnałów /rys.6.30 6.31 i 6.32/. Jak widać największą wartość funkcja ta osiąga dla obwodów I i III, przy czym w pierwszym przypadku występuje lokalne maksimum dla $f_1=100\text{kHz}$ /oddziaływanie drugiej harmonicznej/, które nie ma miejsca dla obwodów II i III, gdzie zniekształcenia drugiego rzędu ulegają kompensacji. Najmniejsza wartość tej funkcji dla układu II wiąże się z występowaniem w tym układzie podziału napięcia na obwodzie rezonansowym na dwie diody połączone antyszeregowo.

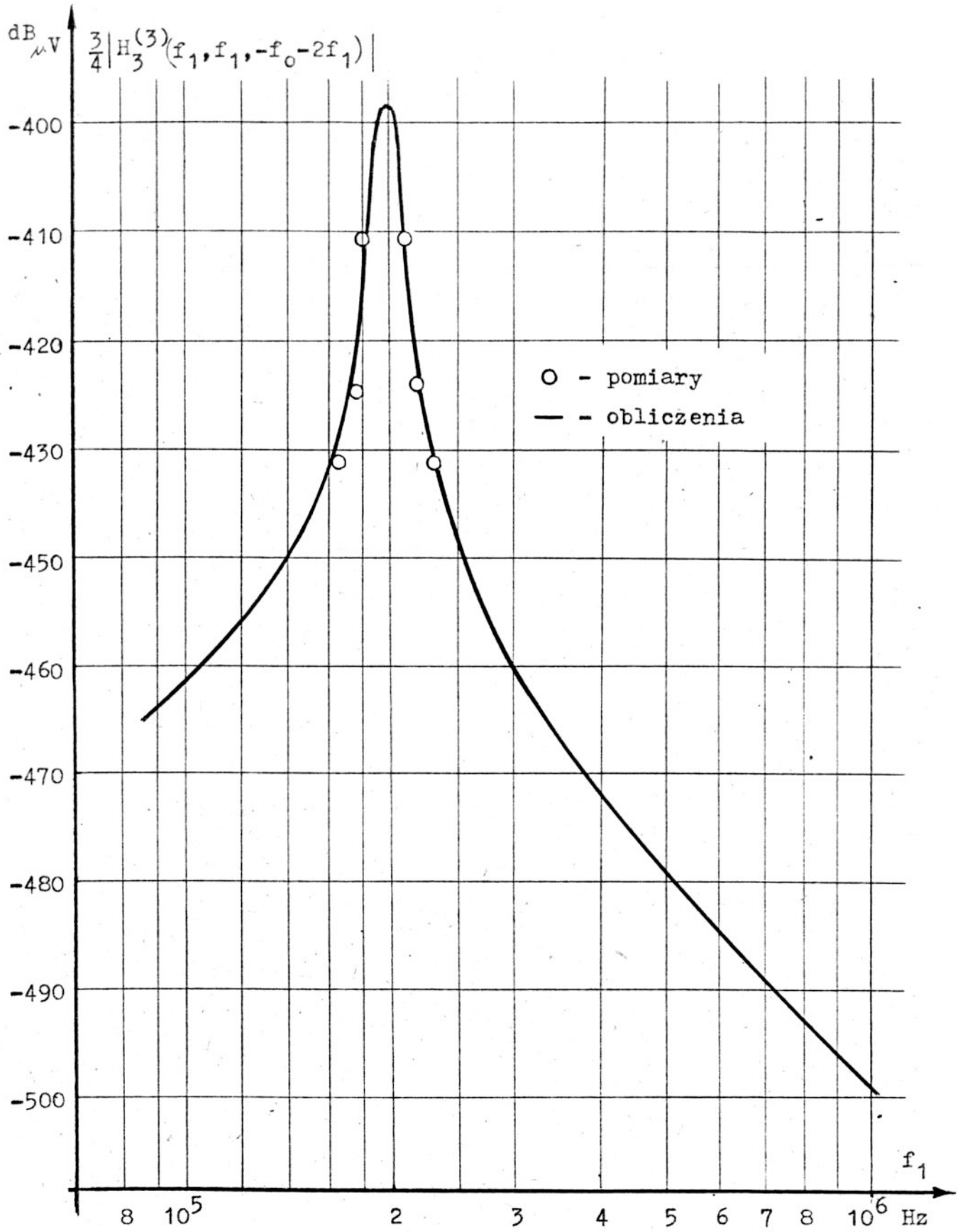
Obliczono również moduł funkcji trzeciego rzędu $H_3^{(3)}(f_0, f_1, -f_1)$ /rys.6.33 , 6.34 i 6.35/ odpowiadającej za modulację skrośną trzeciego rzędu. Jak widać największą wartość funkcja ta przyjmuje dla układu III /zniekształcenia drugiego rzędu się kompensują, ale trzeciego dodają i dlatego jest ona większa niż w układzie II/. Nieco niższą wartość osiąga ta funkcja dla układu I, ale jej przebieg w funkcji częstotliwości jest skomplikowany: występuje maksimum dla $f_1=400\text{kHz}$ /oddziaływanie zniekształceń drugiego rzędu o częstotliwości $f_1-f_0=f_0=200\text{kHz}/$ oraz lokalne minimum między 750 a 800kHz. Jak stwierdzono,



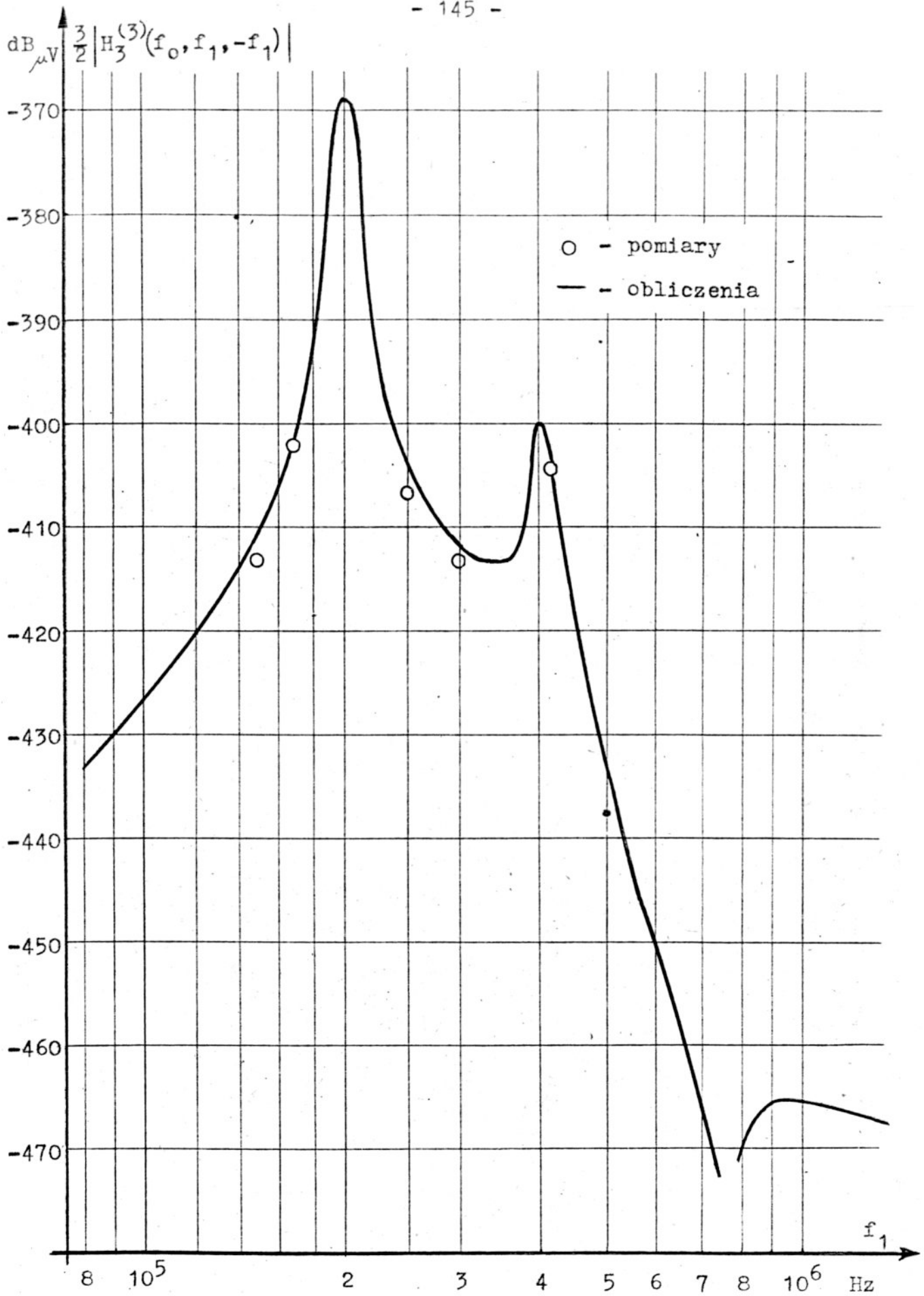
Rys.6.30. Przebieg funkcji $|H_3^{(3)}(f_1, f_1, -f_0 - 2f_1)|$ dla obwodu I.



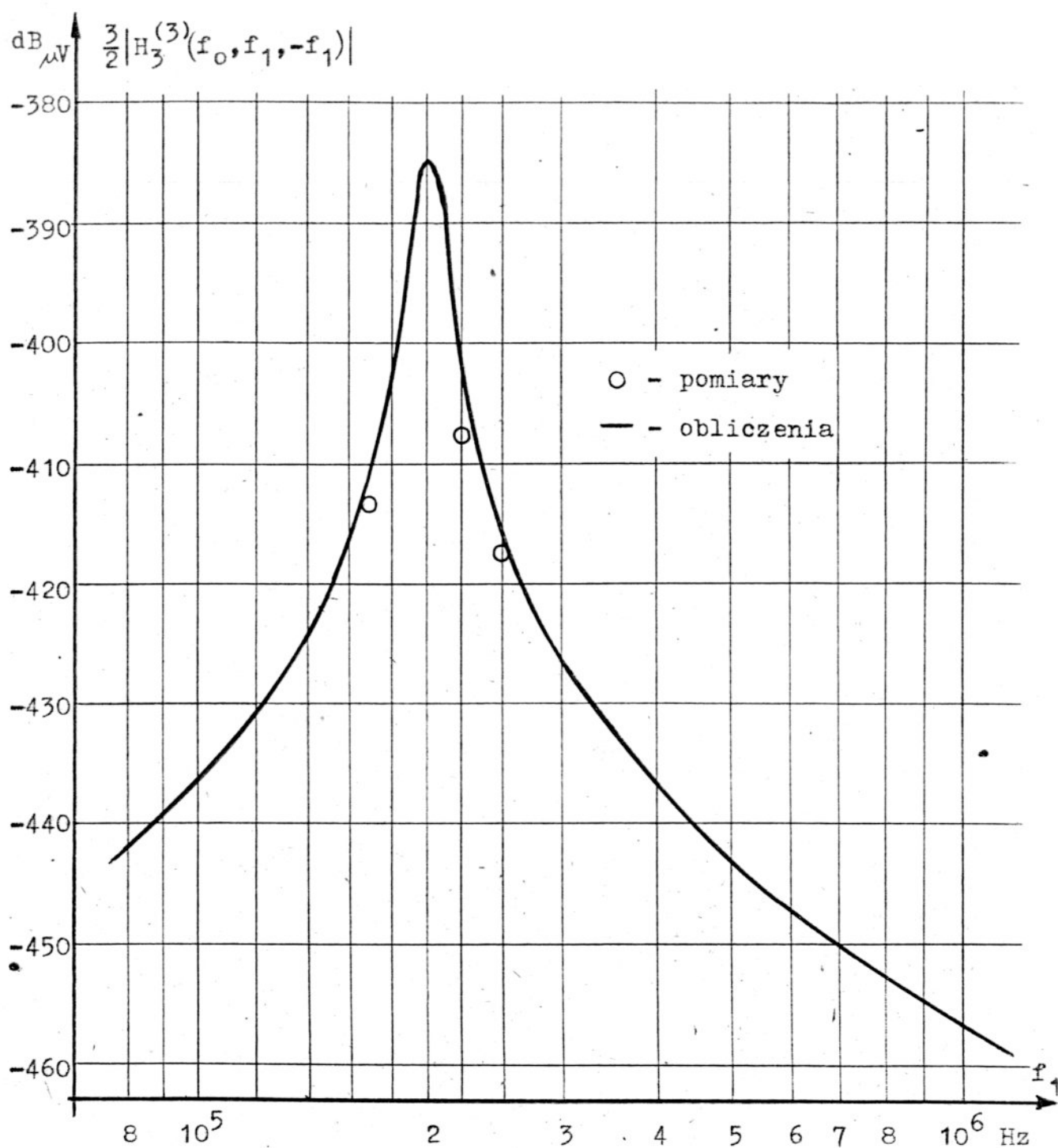
Rys.6.31. Przebieg funkcji $|H_3^{(3)}(f_1, f_1, -f_0 - 2f_1)|$ dla obwodu II.



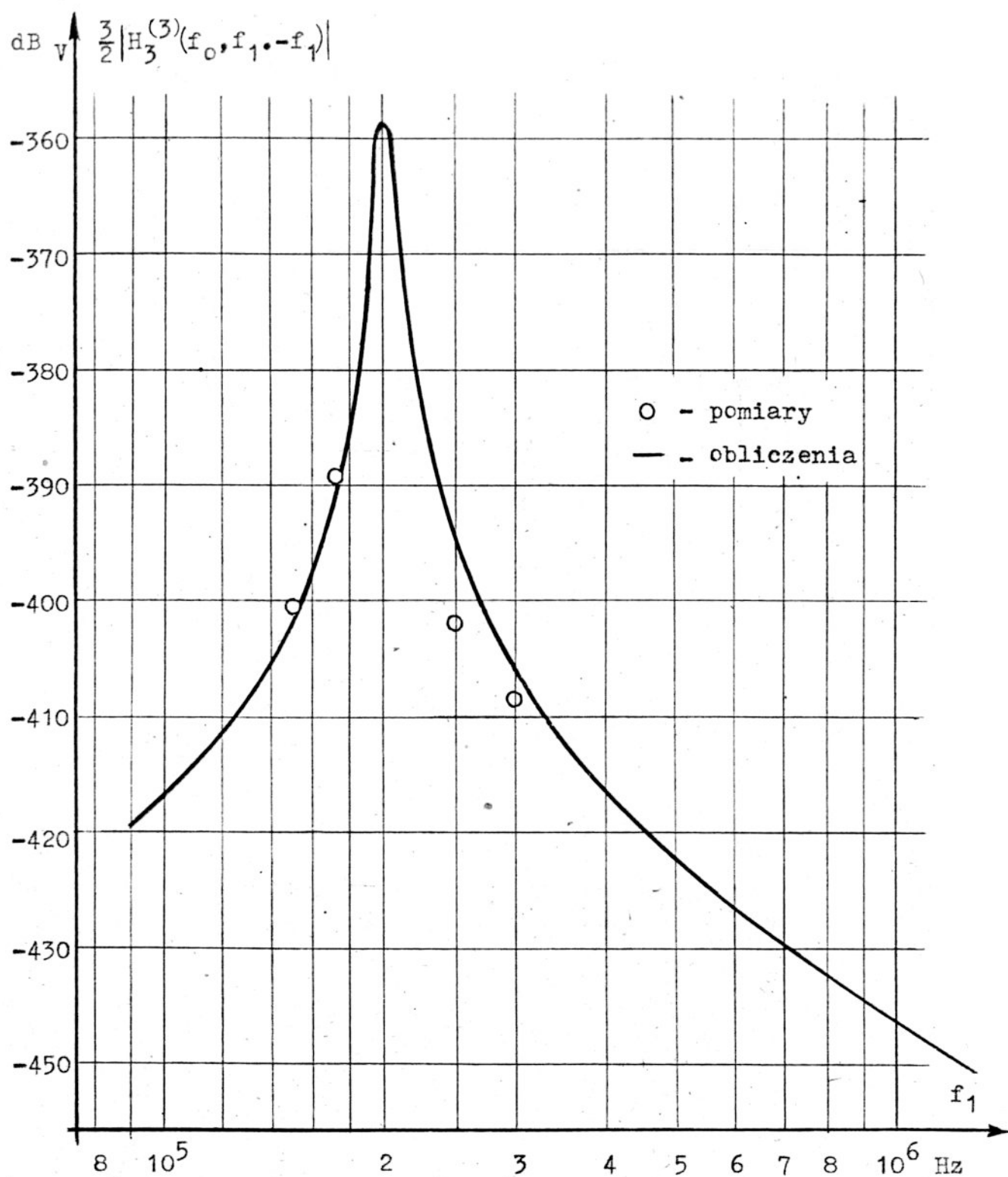
Rys.6.32. Przebieg funkcji $|H_3^{(3)}(f_1, f_1, -f_0 - 2f_1)|$ dla układu III.



Rys.6.33. Przebieg funkcji $|H_3^{(3)}(f_0, f_1, -f_1)|$ dla obwodu I.



Rys.6.34. Przebieg funkcji $\frac{3}{2} |H_3^{(3)}(f_0, f_1, -f_1)|$ dla obwodu II.



Rys.6.35. Przebieg funkcji $|H_3^{(3)}(f_0, f_1, -f_1)|$ dla obwodu III.

w toku dokładniejszej analizy, mechanizm powstawania tego minimum jest następujący:

- wymuszenie do obliczania funkcji $H_3^{(3)}(f_0, f_1, -f_1)$ ma postać /zgodnie ze wzorami /5.9//

$$I_3^{(3)}(f_0, f_1, -f_1) = j2\pi(f_0 + f_1 - f_1) \left\{ \left[2H_1^{(1)}(f_0)H_2^{(2)}(f_1, -f_1) + \right. \right. \\ \left. + 2H_1^{(1)}(f_1)H_2^{(2)}(f_0, -f_1) + 2H_1^{(1)}(-f_1)H_2^{(2)}(f_0, f_1) \right] \mathcal{K}_2/3 + \\ \left. + \left[H_1^{(1)}(f_0)H_1^{(1)}(f_1)H_1^{(1)}(-f_1) \right] \mathcal{K}_3 \right\} \quad /6.34/$$

- w zależności tej, dla częstotliwości między 750 a 800kHz następuje kompensacja składników drugiego rzędu /mnożonych przez $\mathcal{K}_2/$ ze składnikiem trzeciego rzędu /mnożonym przez $\mathcal{K}_3/$. Należy stwierdzić, że wniosek taki byłby trudny do wysnucia przy stosowaniu innej niż szeregi Volterry, metodzie analizy, gdyż nie byłoby możliwe zrekonstruowanie równania /6.34/.

Jak widać z przytoczonych analiz, układy II i III są korzystniejsze do stosowania ze względu na znacznie mniejsze zniekształcenia drugiego rzędu. Wybór między układami II i III jest trudniejszy:

- układ II ma mniejsze zniekształcenia trzeciego rzędu ze względu na podział napięcia na obwodzie rezonansowym na dwie diody połączone antyszeregowo,
- układ III jest mniej wrażliwy na różnice charakterystyk diod składowych /będzie miał, na ogół, mniejsze zniekształcenia drugiego rzędu - dodatek C/,
- całkowita pojemność diod w układzie III jest czterokrotnie większa niż w układzie II, co pozwala, w przypadku obwodów

rezonansowych, na stosowanie czterokrotnie mniejszej indukcyjności.

Rezultaty rozdziału szóstego można sprowadzić do następujących punktów:

- możliwe jest szacowanie za pomocą twierdzeń 3.5 i 3.6 promienia zbieżności szeregu Volterry dla rzeczywistych układów elektronicznych /rozd.6.2.1/,
- aproksymacja sygnału wyjściowego układu elektronicznego przez wielomian Volterry piątego stopnia jest lepsza niż stosowana, np. przez $[23,103]$, aproksymacja wielomianem trzeciego stopnia, aczkolwiek wielkość sygnałów, dla których dokładność aproksymacji jest zadowalająca jest, w niektórych przypadkach, jeszcze zbyt mała /np. mieszacz z rozdz.6.3/,
- możliwe jest zastosowanie metody szeregów Volterry do identyfikacji nieliniowych elementów układu elektronicznego - rozdz. 6.4.1. Podobnego eksperymentu nie spotkano dotychczas w literaturze,
- istnieje pewna klasa układów elektronicznych, a w tym układów wielootworowych, o dostatecznie małych nieliniowościach, dla których metoda analizy za pomocą szeregów Volterry jest wystarczająco dokładna, co zweryfikowano eksperymentalnie metodą pomiarową przedstawioną w rozdz.6.1.
- stosowanie metody analizy układów nieliniowych za pomocą szeregów Volterry pozwala wyciągnąć szereg wniosków trudnych do przewidzenia w innej metodzie analizy /np. wnioski dotyczące obwodów rezonansowych z rozdz.6.4/.

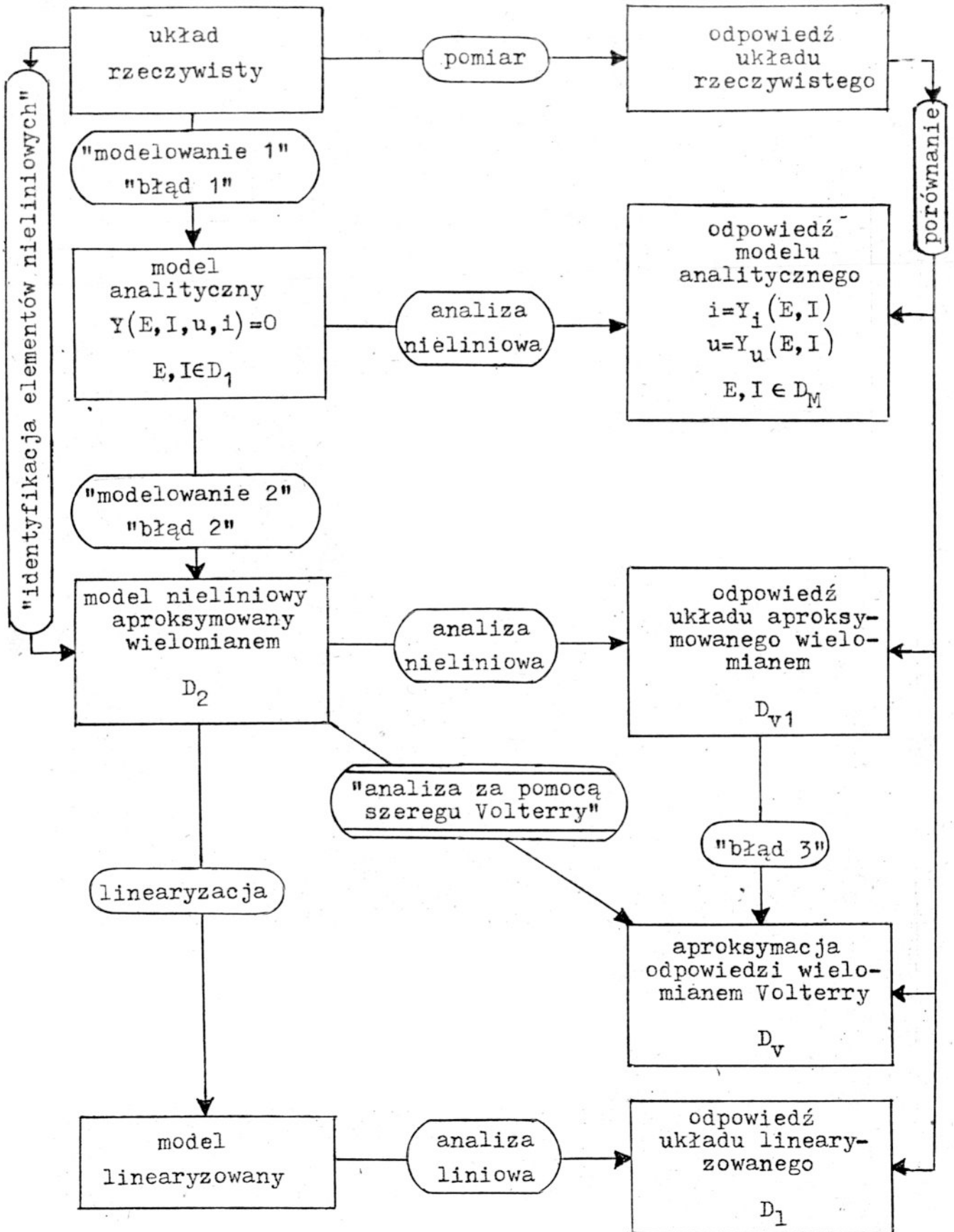
7. METODA SZEREGÓW VOLTERRY W ANALIZIE UKŁADÓW ELEKTRONICZNYCH.

W rozdziale tym postaramy się określić miejsce metody szeregów Volterra w analizie układów elektronicznych. Nie będziemy tu metody tej porównywać z metodami podobnymi lub pokrewnymi /np. metodą zaburzeń [30] /, a wyjdziemy od pojęcia modelu układu elektronicznego.

Ilustracją rozważań będzie rys.7.1.

Założmy, że mamy do czynienia z pewnym układem elektronicznym /układem rzeczywistym/ i badamy /mierzymy/ jego odpowiedź na określone wymuszenie /pobudzenie i sam układ traktujemy tu jako jedną całość/. Oczywiście w badanym sygnale wyjściowym zawarta będzie pewna część informacji o budowie samego układu i od konkretnego problemu zależy, czy kwestia ta nas interesuje czy nie. Zazwyczaj jednak, w pracach projektowych, na podstawie tej informacji staramy się zmienić układ tak, aby odpowiedź jego była zgodna z wymaganiami projektowymi. Już tu w rzeczywistości korzystamy z modelu układu, którym jest "koncepcja projektanta o sposobie jego działania". Stąd poprzez staranie się o zapis tej koncepcji za pomocą symboli matematycznych dochodzimy do pojęcia modelu układu elektronicznego /"modelowanie 1" na rys.7.1/, który nazwiemy tu modelem analitycznym, a symbolicznie opiszemy go równaniem uwikłanym

$$Y(E, I, u, i) = 0 \quad ; \quad E, I \in D_1, \quad /7.1/$$



Rys.7.1. Metoda szeregów Volterry w analizie układów elektronicznych.

gdzie u oraz i są napięciami i prądami występującymi w układzie, a E oraz I są wymuszeniami elektro- i prądomotorycznymi.

Konieczne jest również określenie dziedziny napięć i prądów wymuszających /np. pasma częstotliwości, amplitudy, kształtu itp./, dla których model ten będzie słuszny i oznaczmy tę dziedzinę przez D_1 /co zaznaczono już we wzorze /7.1//. Dziedzinę tę można określić w dwojaki sposób:

- a/ przez przyjęcie założeń o danym modelu /np. zakładamy, że prąd płynący przez złącze półprzewodnikowe określa wzór $i = I_0(\exp u - 1)$ w zakresie napięć $u \in (u_1, u_2)$, wtedy $D_1 = (u_1, u_2)$ /,
- b/ przez porównanie odpowiedzi rzeczywistej układu z odpowiedzią wynikającą z rozwiązania równania /7.1/ o postaci

$$u = Y_u(E, I),$$

$$i = Y_i(E, I)$$

/7.2/

i przyjęcie dziedziny modelu D_M takiej, że dla $E, I \in D_M$ różnica między odpowiedzią układu rzeczywistego a modelem /7.2/ jest dostatecznie mała /kryterium można określić na wiele sposobów/.

Oczywiście powinno zachodzić $D_M = D_1$, a jeżeli tak nie jest, to powinniśmy uznać to za przypadek /jeżeli D_M jest szersza niż D_1 / lub błąd w określeniu D_1 .

Następnym krokiem niech będzie przyjęcie modeli elementów układu elektronicznego tak, jak podaje rozdział 5.2.1, gdzie najistotniejszym założeniem jest przyjęcie opisu elementów nieliniowych w postaci wielomianów piątego bądź trzeciego stopnia /"modelowanie 2" na rys.7.1/. Przyjmijmy, że modele takie

są prawdziwe dla pewnej dziedziny $D_2 \ni E, I$.

Na przykład w rozdziale 6 /jeżeli powołujemy się na przykłady z rozdz.6, to za dziedzinę rozumiemy wielkość amplitud napięć i prądów/ przyjęto model złącza półprzewodnikowego w postaci /porównaj dodatek A/

$$i_2 = I_0 \left(\gamma u + \frac{\gamma^2}{2} u^2 + \frac{\gamma^3}{6} u^3 + \frac{\gamma^4}{24} u^4 + \frac{\gamma^5}{120} u^5 \right), \quad /7.3/$$

który to wzór miał aproksymować zależność

$$i_1 = I_0 (e^{\gamma u} - 1). \quad /7.4/$$

Zbadajmy, jak dokładna jest ta aproksymacja.

Na rys.7.2 wykreślono błąd względny

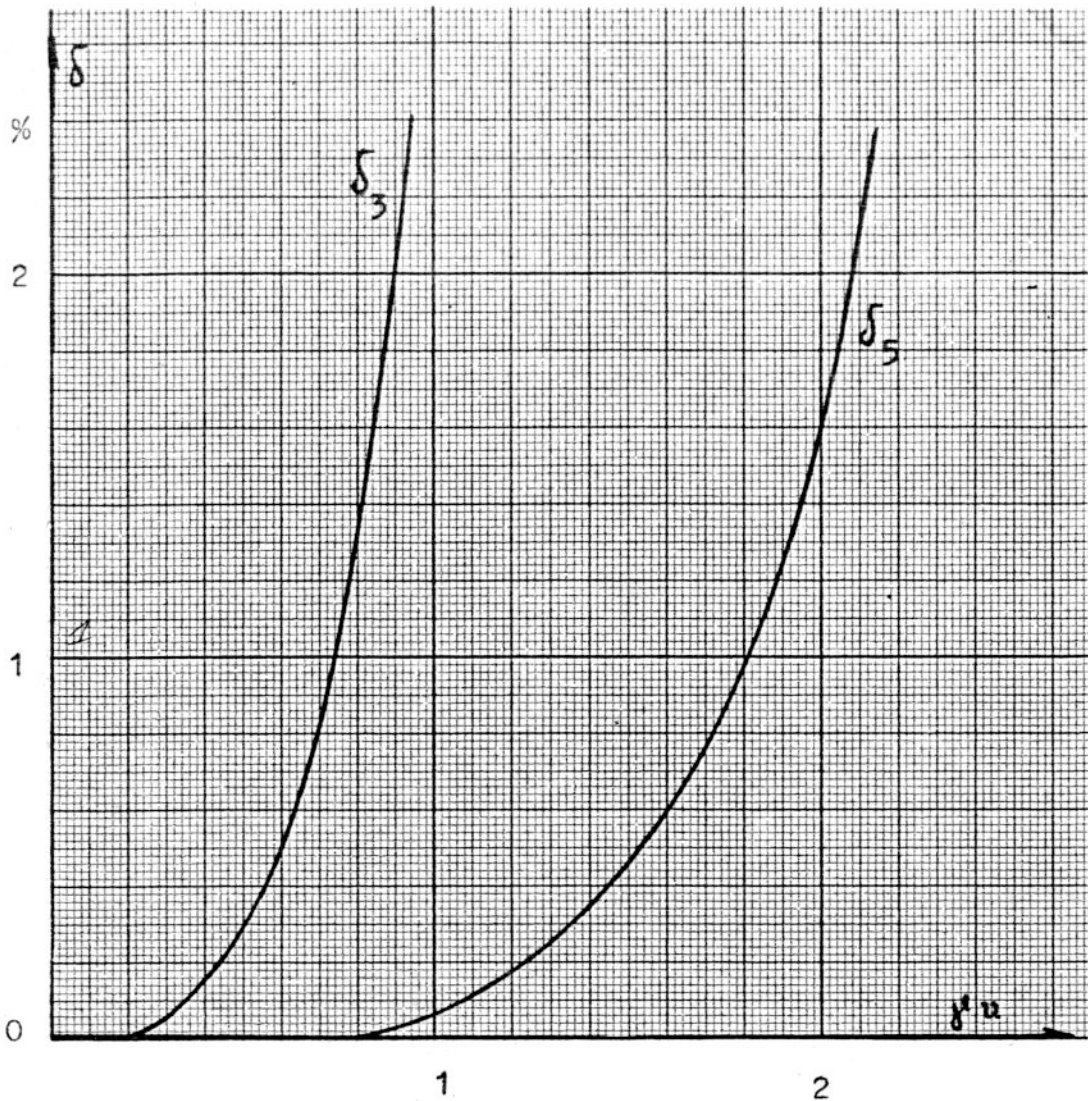
$$\delta_5 = \left| \frac{i_1 - i_2}{i_1} \right| 100\% \quad /7.5/$$

oraz

$$\delta_3 = \left| \frac{i_1 - i_2'}{i_1} \right| 100\%, \quad /7.6/$$

gdzie i_2' jest aproksymacją zależności /7.4/ przez wielomian jak /7.3/, lecz zawierający tylko trzy pierwsze wyrazy.

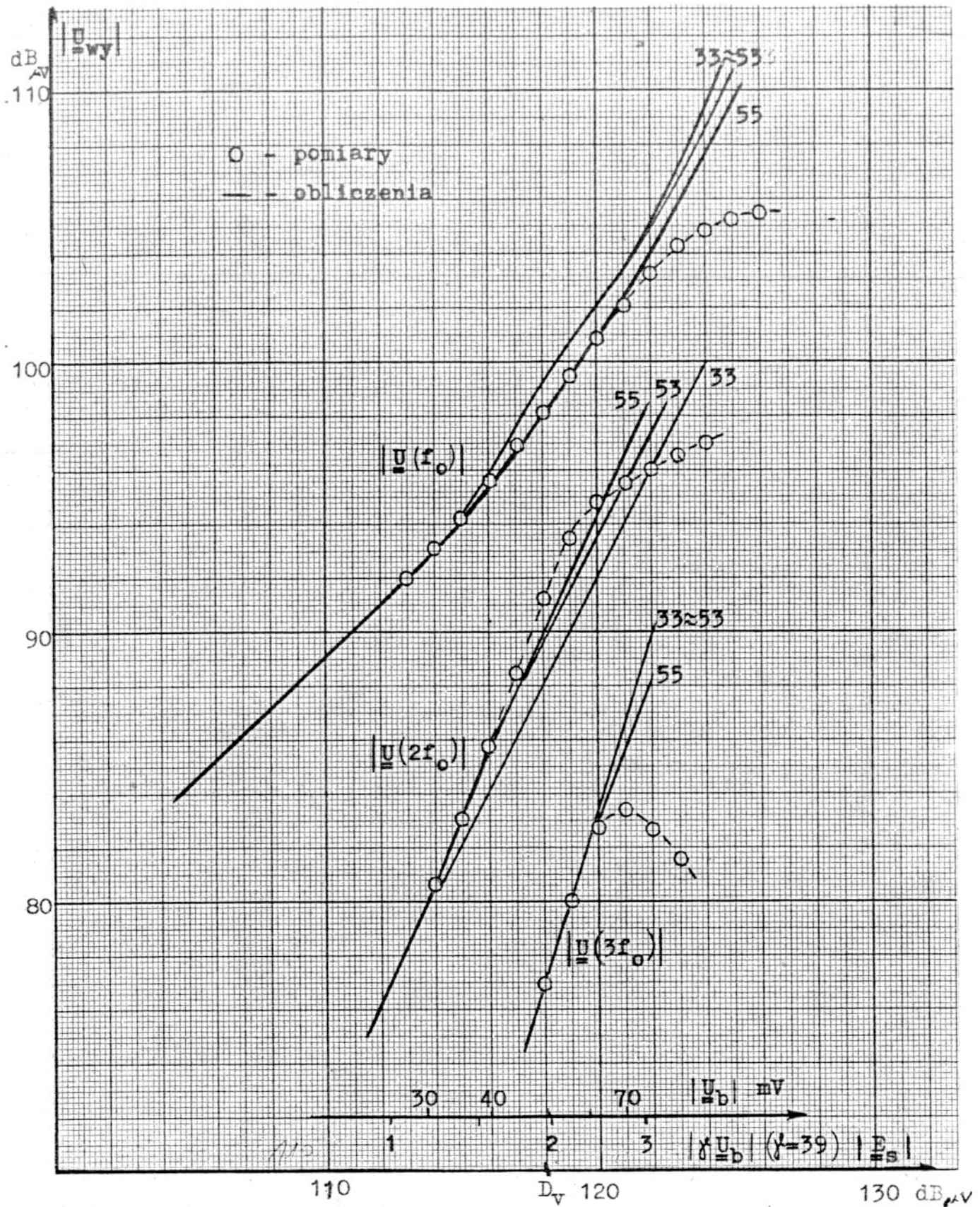
Z wykresu tego widać, że aproksymacja równania /7.4/ przez równanie /7.3/ zachodzi dla szerszej dziedziny niż aproksymacja wielomianem trzeciego stopnia. Przyjmując arbitralnie, że błąd aproksymacji nie powinien przekroczyć np.2% możemy powiedzieć, że dziedzina D_2 przy aproksymacji wielomianem trzeciego stopnia wynosi $D_2 = (0; 0,9) \ni \gamma u$, a w przypadku wielomianu piątego stopnia



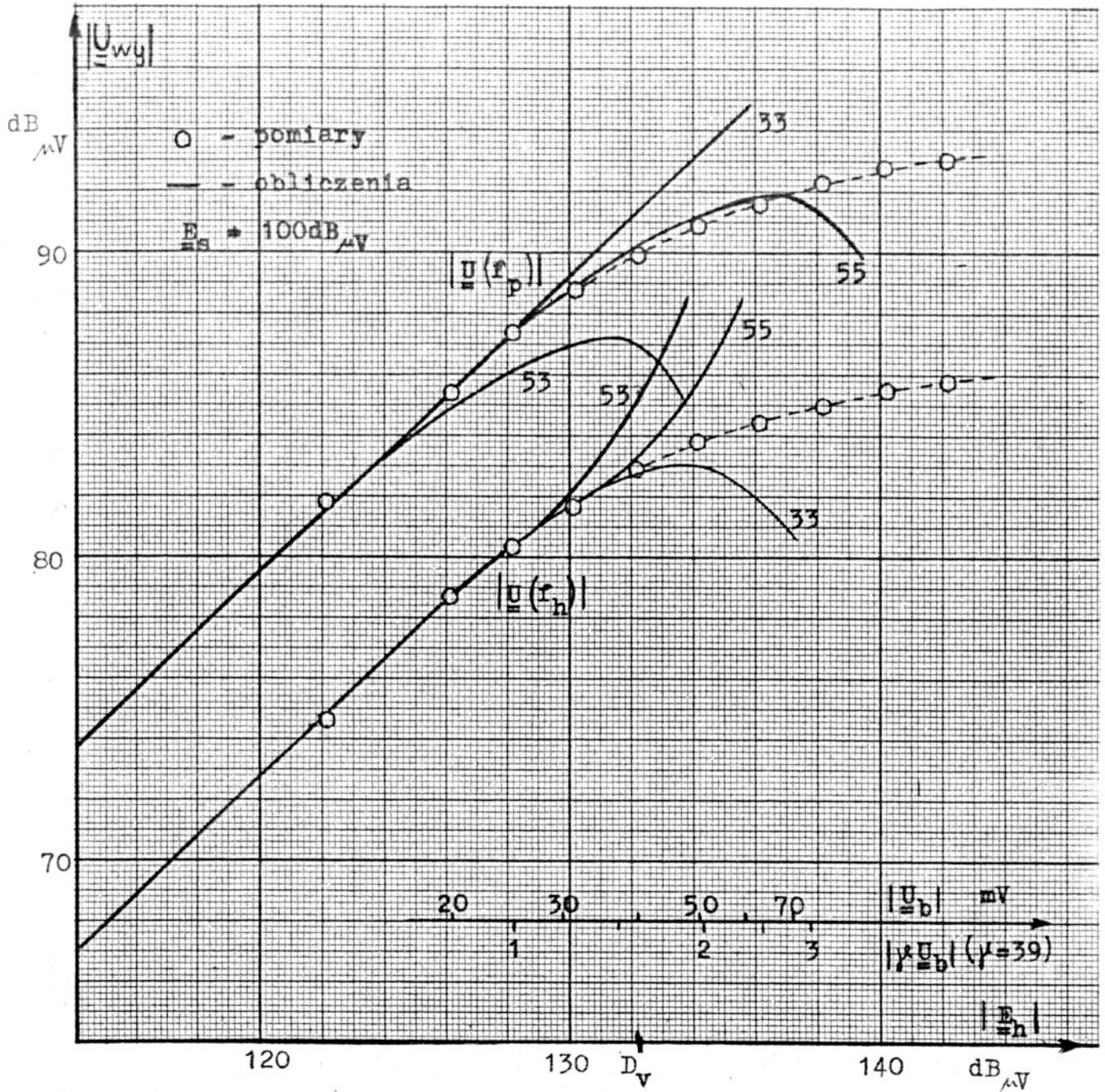
Rys.7.2. Błąd aproksymacji wyrażenia /7.4/ przez wielomiany Taylora trzeciego i piątego stopnia.

$D_2 = (0; 2, 1) \ni y'u$. Potwierdzeniem poszerzenia dziedziny D_2 przez zwiększenie stopnia wielomianu aproksymującego są wykresy na rys.7.3 i 7.4, które są powtórzeniem wykresów 6.6 i 6.14, przy czym naniesiono tam również wyniki analizy uzyskane przy aproksymacji elementów nieliniowych wielomianem trzeciego stopnia. Oczywiście zakładamy tu, że D_1 , - a więc obszar słuszności zależności /7.4/, jest szerszy niż D_2 oraz, że w "modelowaniu 1" nie popełniono dużego błędu.

Nieco inaczej postąpiono w przykładzie z rozdziału 6.4.



Rys.7.3. Przebieg zależności trzech pierwszych harmoniczných sygnału wyjściowego wzmacniacza z rozdz.6.2. Pierwsza cyfra przy rezultatach obliczeń oznacza stopień wielomianu Volterry aproksymującego sygnał wyjściowy, druga zaś stopień wielomianów aproksymujących elementy nieliniowe układu.

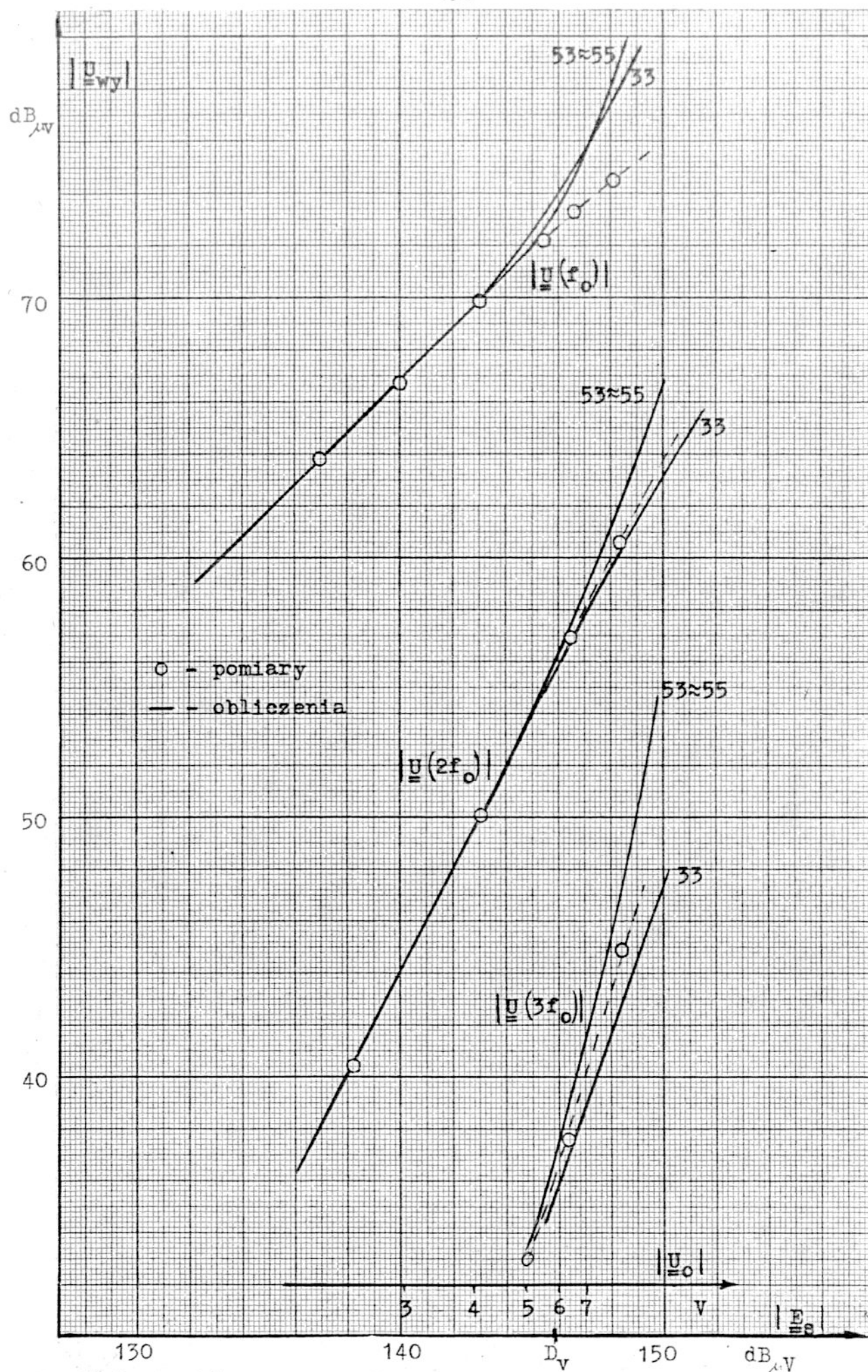


Rys.7.4. Przebieg zależności sygnału heterodyny oraz sygnału częstotliwości pośredniej w zależności od poziomu SEM heterodyny. Oznaczenia jak na rys.7.3.

Tam nie dysponowano analitycznym modelem opisującym element nieliniowy, w związku z czym współczynniki wielomianu opisującego zależność prądu diody od napięcia

$$i_c = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^5 \alpha_k u^k,$$

/7.7/



Rys.7.5. Powtórzenie rys.6.28 z oznaczeniami jak na rys.7.3.

znaleziono przez przeprowadzenie dodatkowych pomiarów, co na rys.7.1 odpowiada przejściu "identyfikacja elementów nieliniowych", a co, jak widać, omija błąd związany z "modelowaniem 1". Aby określić dziedzinę D_2 w tym wypadku, wykreślono zależność pojemności od napięcia $C=C(U)$ na podstawie pomiarów bezpośrednich oraz wykorzystując /7.7/ -/rys.6.26/

$$C' = \sum_{k=1}^5 k \alpha_k u^{k-1} \quad /7.8/$$

Z wykresu tego widać, że zgodność obu zależności zachodzi dla napięć $u \in (1,0;12)[V]$ /przy błędzie mniejszym niż 10%/ i taką można przyjąć dziedzinę D_2 w tym przypadku.

Powróćmy do wykresu 7.1, na którym, wykorzystując przykłady, określiliśmy jak należy rozumieć model układu elektronicznego z elementami nieliniowymi opisanymi wielomianami oraz dziedzinę D_2 , dla której model ten jest słuszny.

Oczywiście model ten ma pewne swoje rozwiązanie dokładne określone w dziedzinie D_{v1} , ale na podstawie poprzednich rozważań nad zależnością D_1 i D_M możemy przyjąć, że powinno być $D_2 = D_{v1}$. W niniejszej pracy wspomniane rozwiązanie dokładne aproksymuje się z kolei wielomianem Volterry piątego, bądź trzeciego stopnia /rys.7.1/. Aproksymacja ta jest słuszna w dziedzinie $D_v \subseteq D_2$, a przykłady z rozdz.6 /rys.7.3, 7.4 i 7.5/ potwierdzają to.

Należy w tym miejscu powiedzieć o problemie zbieżności szeregu Volterry. Pokazaliśmy na przykładach, że dziedzina modelowania układu elektronicznego wielomianem Volterry /można tak nazwać

aproxymację sygnału wyjściowego wielomianem Volterry/ D_V zawiera się w D_2 . Nie uwzględniono jednak promienia zbieżności szeregu Volterry, który oszacowano w przykładzie 6.2, a które to szacowanie jest węższe niż przyjęta dziedziła D_V dla tego przykładu /rys.7.3 - na rys.7.3, 7.4 i 7.5 D_V oznaczono przyjmując opcjonalnie, że błąd aproxymacji nie powinien przekraczać 1dB/. Aby być więc ścisłym należałoby zawęzić D_V dla tego przykładu, do obszaru zbieżności szeregu Volterry. Można mieć jednak zastrzeżenia, czy szacowanie to nie jest zbyt grube /określa ono zbieżność bezwzględną oraz zachodzi dla dowolnego ograniczonego wymuszenia, co wynika z przyjętej normy $\|L^{-1}\|$ /rozdz.6.2.1//. W związku z powyższym oraz ze względu na zmniejszanie się niedokładności aproxymacji sygnału wyjściowego układu przy zwiększeniu stopnia wielomianu Volterry z trzeciego do piątego /rys.7.3-7.5/ pomińmy to ograniczenie.

Dla pełności obrazu na rys.7.1 zaznaczono też miejsce metody analizy układu linearyzowanego w powyższych rozważaniach. Oczywiście na rys.7.1 D_3 powinno pokrywać się z D_1 oraz powinno zawierać się w D_2 .

Podsumowując, możemy stwierdzić:

- wskazano miejsce metody szeregów Volterry w analizie układów elektronicznych,
- z rozważań wynika, że błędy tej metody mogą powstać w wyniku:
 - złego przyjęcia "modelu analitycznego", a więc z niedokładności modelowania elementów liniowych i nieliniowych-"błąd 1",
 - redukcji modelu analitycznego do modelu z opisem elementów nieliniowych za pomocą wielomianów skończonego stopnia - "błąd 2",
 - przez aproxymację odpowiedzi układu wielomianem Volterry

/zamiast szeregiem/ - "błąd 3",

- z wymienionych trzech przyczyn błędów, jak pokazują przykłady, największe znaczenie ma druga z nich, co jest w pewnym stopniu sprzeczne z konkluzjami innych autorów, np. [20].

8. PODSUMOWANIE I UWAGI KOŃCOWE.

Rozważania teoretyczne, wynikające z postawionego celu przeprowadzone w pracy pozwalają wysunąć następujące wnioski:

- Skorzystanie z metod analizy w przestrzeniach Banacha /rozd.2/ pozwoliło podać związek między szeregiem Taylora w tych przestrzeniach, a szeregiem Volterry. Wyprowadzono również rozwinięcie odwzorowania $F: (C(a,b), R^1) \rightarrow (C(a,b), R^1)$ w uogólniony szereg Volterry o postaci /2.64/ dotychczas w literaturze nie spotykanej, który zaproponowano do opisu nieliniowego, wielootworowego układu elektronicznego.
- Podano metodę /rozd.3/ znajdowania rozwiązania pewnego równania różniczkowego /3.5/, które może stanowić opis wielootworowego układu elektronicznego, w postaci uogólnionego szeregu Volterry. W obliczeniach wprowadzono działanie /3.8/ oraz operatory /3.9/ i /3.13/, co pozwoliło sformalizować zapis równań w postaci dotychczas nieznanej. Przytoczono również twierdzenia /rozd.3.1/ dowodzące poprawności tej metody.
- Udowodnione twierdzenia 3.5 i 3.6 /rozd.3.2/ pozwalające w pewnych przypadkach oszacować promień zbieżności szeregu Volterry.
- Ze względu na potrzebę analizy nieliniowych układów elektronicznych pobudzanych sygnałami harmonicznymi w stanie ustalonym, zastosowano do wielowymiarowych uogólnionych odpowiedzi impulsowych transformatę Fouriera uzyskując nieliniowe funkcje transmitancji opisujące dany, wielootworowy układ elektroniczny w dziedzinie częstotliwości. Nieliniowe funkcje transmitancji są, jak pokazano, łatwe do interpretacji i wygodne do opisu odpowiedzi

wielootworowego, nieliniowego układu elektronicznego na pobudzenie harmoniczne /rozdz.4.1 i 4.2/.

- Pokazano dalej kilka istotnych własności wielowymiarowych funkcji transmitancji /rozdz.4.3/, które pozwalają na zmniejszenie ilości punktów częstotliwościowych potrzebnych do określenia, w sposób pełny, danej funkcji transmitancji. Pokazano, że wysuwane czasem / $[37, 40, 119]$ / poglądy na własności nieliniowych funkcji transmitancji były błędne.
- Opisując metodę obliczania nieliniowych funkcji transmitancji /rozdz.5.1/ opartą na metodzie potencjałów węzłowych wprowadzono, niespotykane dotychczas w literaturze, operatory $\underline{D}^{(i)}(\cdot)$, $\underline{\Delta}^{(i)}(\cdot)$ i $\underline{\Sigma}_f^{(i)}(\cdot)$, które pozwoliły na zwarty zapis wzorów. Pokazano też, powołując się na rezultaty z rozdz.4.3, że metoda obliczania nieliniowych funkcji transmitancji, dla układów wielootworowych jest inna, niż stosowana dotychczas w przypadku układów jednowejściowych. Zaproponowano również /rozdz.5.2/ nowy sposób obliczania nieliniowych funkcji transmitancji dla układów wielootworowych oparty na znajomości liniowych funkcji transmitancji układu linearyzowanego.
- Rozważania teoretyczne pozwoliły stworzyć narzędzie w postaci uniwersalnych programów komputerowych /rozdz.5.1.1 i 5.2.1/, opartych na metodach wspomnianych w punkcie poprzednim, służących do obliczania nieliniowych funkcji transmitancji układów wielootworowych, podczas gdy dotychczas znane programy analizy układów elektronicznych za pomocą szeregów Volterry /np. $[20]$ / ograniczały się do układów jednowejściowych.
- Główną zaletą przedstawionej metody analizy wielootworowych układów nieliniowych jest podanie jawnego związku między sygnałami wejściowymi i wyjściowymi z jednoczesnym uwzględnieniem

nieliniowości i inercyjności układu. Natomiast podstawową wadą metody jest duża złożoność rozwiązania, co ogranicza w sposób istotny rząd nieliniowych funkcji transmitancji możliwych do efektywnego obliczania.

Powyższe wnioski wskazują, że cel postawiony w punkcie 1/ rozdziału 1.1 został zrealizowany.

Opisany w rozdziale szóstym eksperyment polegający na analizie pewnych układów elektronicznych za pomocą szeregu Volterry i porównanie uzyskanych wyników z rezultatami pomiarów układów rzeczywistych prowadzonymi według podanych w rozdz.6.1 metod pozwala stwierdzić, że:

- możliwe jest szacowanie, za pomocą twierdzeń z rozdz.3.2, promienia zbieżności szeregu Volterry konkretnego układu elektronicznego /rozdz.6.2.1/,
- aproksymacja sygnału wyjściowego układu elektronicznego za pomocą wielomianu Volterry piątego stopnia jest lepsza niż aproksymacja wielomianem stopnia trzeciego stosowana np. przez [23, 103], aczkolwiek zakres wielkości sygnałów, dla których dokładność aproksymacji jest zadowalająca, jest w niektórych przypadkach jeszcze zbyt mały /np. mieszacz z rozdz.6.3/,
- w pewnych przypadkach możliwe jest /rozdz.6.4.1/ zastosowanie metody szeregów Volterry do identyfikacji elementów nieliniowych /podobnego eksperymentu nie spotkano dotychczas w literaturze/,
- istnieje pewna klasa układów /o dostatecznie małych nieliniowościach/, dla których metoda analizy za pomocą szeregów Volterry jest wystarczająco dokładna, a nawet, w pewnym sensie, odpowiednia, gdyż pozwala wyciągnąć wnioski nie dające się

przewidzieć w innej metodzie analizy /np. wnioski dotyczące obwodów rezonansowych z rozdz.6.4.2/.

Przedstawione w rozdziale siódmym rozumowanie pozwala umiejscowić metodę analizy za pomocą szeregów Volterry w metodach analizy układów elektronicznych, a przede wszystkim zwraca uwagę na przyczyny błędów tej metody, na co, w znanej autorowi literaturze nie zwracano należytej uwagi, np. w [20].

Podsumowując można stwierdzić, że wnioski wyprowadzone z rozdz.6 i 7 dowodzą spełnienia celu pracy postawionego w punkcie 2/ rozdz.1.1.

Porównując wyniki otrzymane w niniejszej pracy ze znanymi z literatury problemami opisu nieliniowych układów elektronicznych należy podkreślić, że zastosowanie szeregów Volterry do opisu wielootworowych układów elektronicznych jest przydatne i stanowi pewien krok naprzód w stosunku do dotychczasowej wiedzy. Wyjście od analizy w przestrzeniach Banacha, poprzez opracowanie metody obliczania nieliniowych funkcji transmitancji oraz wykazanie istnienia niezerowego promienia zbieżności szeregu Volterry, a nawet pokazanie możliwości jego szacowania i stworzenie praktycznych narzędzi analizy w postaci uniwersalnych programów komputerowych, pozwala stwierdzić, że cel postawiony w rozdziale 1.1 starano się zrealizować w sposób pełny i wszechstronny.

Omówione wyniki wyznaczają następujące perspektywy:

- podniesienie dokładności aproksymacji sygnału wyjściowego układu elektronicznego za pomocą wielomianu Volterry, co w świetle wniosków z rozdz.7 może odbyć się przez zwiększenie rzędu obliczanych nieliniowych funkcji transmitancji oraz szukanie lepszych modeli układów elektronicznych,

- opracowanie algorytmów obliczania nieliniowych funkcji transmitancji z wykorzystaniem innych metod niż prezentowane w rozdziale 5 np. zmiennych stanu , impedancji oczkowych itp,
- znalezienie związków /częściowo opisane w [108] / między nieliniowymi funkcjami transmitancji, a zniekształceniami w systemach telekomunikacyjnych, w tym ewentualne znajdowanie innych miar tych zniekształceń wykorzystujących nieliniowe funkcje transmitancji,
- przeniesienie przedstawionego tu aparatu na sygnały losowe, co może mieć duże znaczenie w telekomunikacji.

DODATEK A.

Modele zastępcze złącza półprzewodnikowego i tranzystora bipolarnego.

W dodatku tym podamy tylko model złącza półprzewodnikowego oraz uproszczony model tranzystora bipolarnego Ebersa-Molla, gdyż tylko tych modeli użyto w prezentowanych w pracy przykładach. Inne modele tych i innych przyrządów elektronowych znaleźć można np. w [21,46,49,56],

W rozdz.5 powiedziano, że modele elementów nieliniowych w analizie metodą szeregów Volterry są opisywane wielomianami trzeciego lub wyższego stopnia. Wielomiany te opisują elementy dynamiczne, tzn. jeżeli dany element ma charakterystykę prądowo-napięciową postaci $I = I(U)$ oraz można napisać $I = I_0 + i$, $U = V_0 + u$, gdzie I_0 i V_0 są prądem i napięciem stałym /stanowią punkt pracy/, to interesuje nas zależność $i = i(u)$.

a/ model złącza półprzewodnikowego:

- konduktancja nieliniowa złącza.

Zakładamy, że złącze półprzewodnikowe opisane jest zależnością

$$I = I_s \left(e^{\frac{qU}{kT}} - 1 \right), \quad /A.1/$$

gdzie I_s - prąd nasycenia,

$\frac{1}{\lambda} = \varphi_t$ - potencjał elektrotermiczny.

W tym przypadku zależność $i = i(u)$ ma postać

$$i_g = I_s e^{\gamma V_o} e^{\gamma u} = I_s e^{\gamma V_o} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (\gamma u)^n, \quad /A.2/$$

- pojemność dyfuzyjna opisana zależnością

$$C_d = \frac{dQ}{du} = \frac{1}{2} I_s \tau \gamma e^{\gamma U}, \quad /A.3/$$

gdzie τ jest czasem życia nośników mniejszościowych. W tym wypadku zależność $i = i(u)$ przyjmie postać

$$i_d = \frac{d}{dt} C_d u = \frac{d}{dt} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_s \gamma}{n!} e^{\gamma V_o} (\gamma u)^n, \quad /A.4/$$

- pojemność złączowa opisana zależnością

$$C_z = \frac{dQ}{du} = \frac{C_o}{\left(1 - \frac{U}{U_D}\right)^2}; \quad U < U_D^*, \quad /A.5/$$

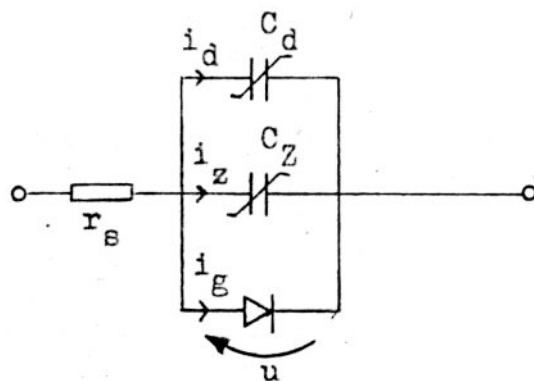
gdzie U_D jest napięciem dyfuzyjnym, a η współczynnikiem zależnym od rodzaju złącza. Podobnie do zależności /A.4/ mamy

$$i_z = C_z \frac{du}{dt} = \frac{d}{dt} \left(C_o + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\eta(\eta+1) \cdot (\eta+n-2)}{(n+1)! \left(1 - \frac{U_o}{U_D}\right)^{(\eta+n+1)}} u^n \right). \quad /A.6/$$

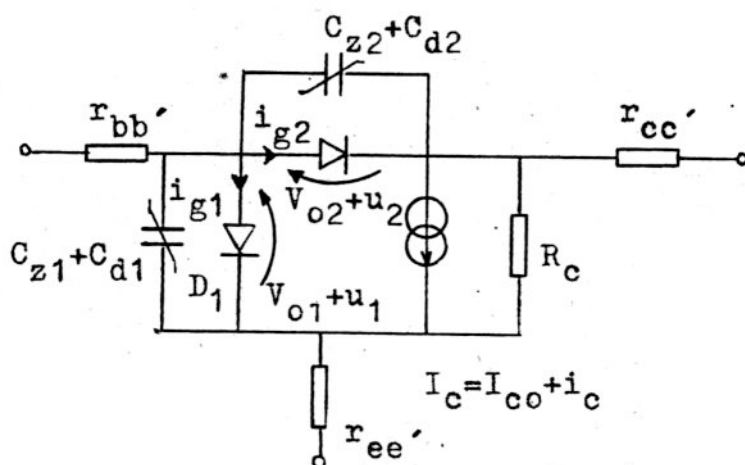
W sumie model złącza półprzewodnikowego będzie wyglądał jak na rys.A.1, gdzie uwzględniono też rezystancję szeregową złącza r_s .

b/ model tranzystora bipolarnego Ebersa-Molla.

W przypadku rozdziału 6 przyjęto model tranzystora bipolarnego w postaci jak na rys.A.2, na którym zaznaczone elementy



Rys.A.1. Model złącza półprzewodnikowego.



Rys.A.2. Model tranzystora bipolarnego.

opisane są zależnościami

$$C_{d1} = \tau_{N0} I_s e^{\mu v_{o1}} e^{\mu u_1}, \quad /A.7/$$

$$C_{d2} = \tau_{I0} I_s e^{\mu v_{o2}} e^{\mu u_2}, \quad /A.8/$$

$$C_{z1} = \frac{C_{o1}}{\left(1 - \frac{v_{o1} + u_1}{U_E}\right)^{\eta_e}}, \quad /A.9/$$

$$C_{z2} = \frac{C_{o2}}{\left(1 - \frac{V_{o2} + u_2}{U_C}\right)} \eta_c, \quad /A.10/$$

gdzie: τ_N, τ_I - czasy przejścia nośników mniejszościowych dla
włączenia tranzystora normalnego i odwrotnego,
 η_e, η_c - współczynniki jak we wzorze /A.5/,
 U_E, U_C - napięcia dyfuzyjne dla złącza emiter-baza i kole-
ktor-baza

oraz

$$I_{g1} = \frac{I_s}{\beta_N} \left(e^{\gamma(V_{o1} + u_1)} - 1 \right), \quad /A.11/$$

$$I_{g2} = \frac{I_s}{\beta_I} \left(e^{\gamma(V_{o2} + u_2)} - 1 \right), \quad /A.12/$$

co daje zależności dynamiczne

$$i_{g1} = \frac{I_s}{\beta_N} e^{\gamma(V_{o1} + u_1)}, \quad /A.13/$$

$$i_{g2} = \frac{I_s}{\beta_I} e^{\gamma(V_{o2} + u_2)}, \quad /A.14/$$

gdzie β_N i β_I są współczynnikami wzmocnienia prądowego dla
włączenia tranzystora normalnego i odwrotnego.

Źródło prądowe opisuje zależność

$$I_c = I_s \left(e^{\gamma(V_{o1} + u_1)} - e^{\gamma(V_{o2} + u_2)} \right), \quad /A.15/$$

co przekształca się do zależności dynamicznej

$$i_c = I_s e^{\gamma V_{o1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\gamma u_1)^n}{n!} - I_s e^{\gamma V_{o2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\gamma u_2)^n}{n!} \approx$$

$$\approx I_s e^{\gamma V_{o1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\gamma u_1)^n}{n!} .$$

/A.16/

Należy tu zaznaczyć, że często pomija się, w normalnych warunkach pracy tranzystora, jako nieznaczące, pojemności C_{z1} i C_{d2} . W przykładach z rozdz.6 pominięto również konduktancję nieliniową związaną ze złączem D_2 /rys.A.2/, co nie wpływa istotnie na uzyskiwane wyniki.

DODATEK B

Współczynnik modulacji skrośnej dla układu opisanego wielomianem Volterry trzeciego stopnia - [25] .

Tablica B.1

sygnał użyteczny	sygnał zakłócający	de- tek- cja	stosunek sygnał użyteczny/zakłócenia po detekcji
$E_1 (1+m_1 \cos \mu_1 t) \times \cos 2\pi f_1 t$	$E_2 (1+m_2 \cos \mu_2 t) \times \cos 2\pi f_2 t$	AM	$\frac{m_2}{m_1} E_2 ^2 \operatorname{Re} \frac{H_3^{(3)}(f_1, f_2, -f_2)}{H_1^{(1)}(f_1)}$
— // —	$E_2 e^{j \frac{\Delta f_2}{\lambda_2} \sin 2\pi \lambda_2 t}$	AM	$\frac{3}{2} \frac{\Delta f_2}{m_1} E_2 ^2 \operatorname{Re} \left\{ \left[\frac{\partial H_3^{(3)}(f_1, f_2, f_3)}{\partial f_2} - \frac{\partial H_3^{(3)}(f_1, f_2, f_3)}{\partial f_3} \right]_{f_3=-f_2} / H_1^{(1)}(f_1) \right\}$
$E_1 e^{j \frac{\Delta f_1}{\lambda_1} \sin 2\pi \lambda_1 t}$	$E_2 (1+m_2 \cos \mu_2 t) \times \cos 2\pi f_2 t$	FM	$\frac{m_2 \mu_2}{1} E_2 ^2 \operatorname{Im} \frac{H_3^{(3)}(f_1, f_2, -f_2)}{H_1^{(1)}(f_1)}$
— / / —	$E_2 e^{j \frac{\Delta f_2}{\lambda_2} \sin 2\pi \lambda_2 t}$	FM	$\frac{3}{2} \Delta f_2 E_2 ^2 \operatorname{Im} \left\{ \left[\frac{\partial H_3^{(3)}(f_1, f_2, f_3)}{\partial f_2} - \frac{\partial H_3^{(3)}(f_1, f_2, f_3)}{\partial f_3} \right]_{f_3=-f_2} / H_1^{(1)}(f_1) \right\}$

DODATEK C.

Porównanie połączenia antyszeregowego i antyrównoległego diod /rozd. 6.4/ ze względu na zniekształcenia drugiego rzędu.

Założmy, że mamy dwie pojemności nieliniowe opisane równaniami

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{d}{dt} \left(K_0 u_1 + K_1 u_1^2 + K_2 u_1^3 \right), & /C.1/ \\ i_2 &= \frac{d}{dt} \left(L_0 u_2 - L_1 u_2^2 + L_2 u_2^3 \right). \end{aligned}$$

Przy połączeniu antyrównoległym tych diod /III w rozdz. 6.4 tzn. dla $u_1 = u_2 = u$ oraz $i = i_1 + i_2$ / otrzymamy wypadkowe równanie

$$i = i_1 + i_2 = \frac{d}{dt} \left((K_0 + L_0) u + (K_1 - L_1) u^2 + (K_2 + L_2) u^3 \right). \quad /C.2/$$

W tym przypadku zniekształcenia drugiego rzędu będą proporcjonalne do różnicy $K_1 - L_1$. W idealnym przypadku może być $K_1 = L_1$ i zniekształcenia te znikną. Zniekształcenia trzeciego rzędu, jak łatwo zauważyć, proporcjonalne będą do sumy $K_2 + L_2$.

W przypadku połączenia antyszeregowego /II w rozdz. 6.4 tzn. $u = u_1 + u_2$ oraz $i_1 = i_2$ / otrzymamy równanie wypadkowe

$$i = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{P_0} u - \frac{P_1}{P_0^3} u^2 + \frac{2P_1^2 - P_0 P_2}{P_0^5} u^3 \right), \quad /C.3/$$

gdzie

$$P_0 = \frac{1}{K_0} + \frac{1}{L_0}, \quad /C.5/$$

$$P_1 = \frac{L_1}{L_0^3} - \frac{K_1}{K_0^3}, \quad /C.6/$$

$$P_2 = \frac{2K_1^2 - K_0K_2}{K_0^5} + \frac{2L_1^2 - L_0L_2}{L_0^5}. \quad /C.7/$$

W tym przypadku zniekształcenia drugiego rzędu proporcjonalne będą do współczynnika

$$\frac{P_1}{P_0^3} = \left(\frac{K_0}{L_0 + K_0} \right)^3 L_1 - \left(\frac{L_0}{L_0 + K_0} \right)^3 K_1 \quad /C.8/$$

zależnego nie tylko od parametrów L_1 i K_1 lecz i od L_0 oraz K_0 /fizycznie można to rozumieć jako nierówny podział napięcia $u=u_1+u_2$ na całym obwodzie na składowe u_1 i u_2 i powstanie w ten sposób zniekształceń drugiego rzędu nawet, gdy $K_1=L_1/$. Podobnie jak poprzednio, gdy obie diody są dobrze dobrane / $K_1=L_1$ oraz $K_0=L_0/$ współczynnik ten zeruje się.

Założmy, że charakterystyki obu diod nie są dobrze dobrane i przyjmijmy

$$\begin{aligned} K_0 &= C_0 + \epsilon, \\ L_0 &= C_0 - \epsilon, \\ K_1 &= C_1 + \xi, \\ L_1 &= C_1 - \xi \end{aligned} \quad /C.9/$$

wtedy, w przypadku połączenia antyrównoległego /III/, otrzymamy

współczynnik drugiego rzędu

$$K_1 - L_1 = 2\xi, \quad /C.10/$$

a w przypadku połączenia antyszeregowego /II/ współczynnik ten wynosi

$$\frac{P_1}{P_0^3} \approx \frac{1}{4} \left(\xi - 3C_1 \frac{\xi}{C_0} \right). \quad /C.11/$$

Jak widać jest on zależny od niezrównoważenia zarówno składowych liniowych jak i nieliniowych obu diod. W układzie II /rozd.6.4/ właśnie ten współczynnik był większy niż w przypadku układu III i dlatego zniekształcenia drugiego rzędu w tym ostatnim były mniejsze.

Przeprowadzając, na podstawie pomiarów zniekształceń drugiego rzędu dla układów II i III, identyfikację obu diod, uzyskano wyniki obliczeń tych zniekształceń jak na rys.C.1. Diody opisane były zależnościami

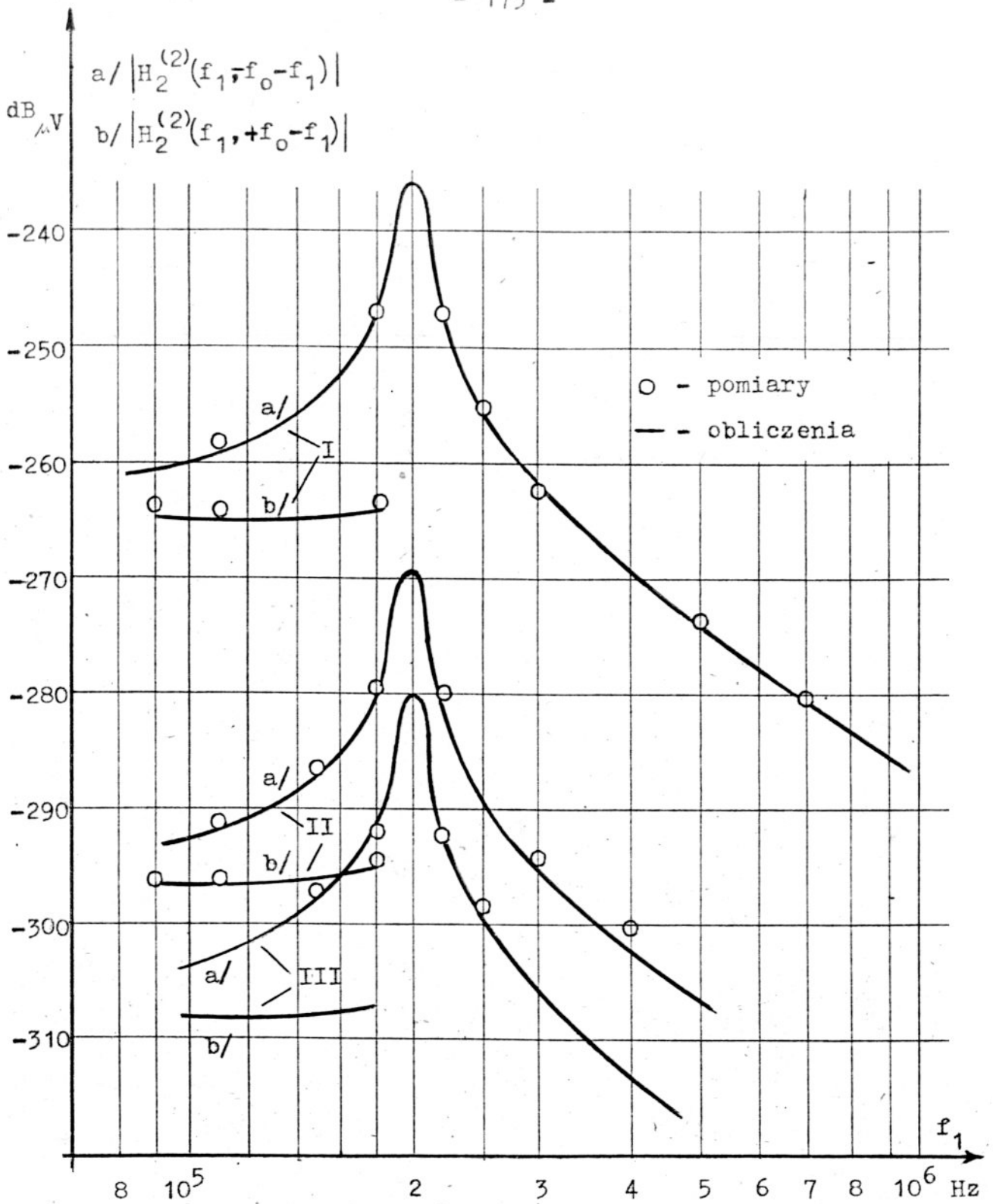
$$i_1 = \frac{d}{dt} \left(101u + 5,62u^2 + 0,283u^3 \right) \cdot 10^{-12}, \quad /C.12/$$

$$i_2 = \frac{d}{dt} \left(103,7u - 5,55u^2 + 0,283u^3 \right) \cdot 10^{-12}, \quad /C.13/$$

Jak widać niezgodność współczynników drugiego rzędu wynosi 1,2%, a współczynników liniowych -2,7% , co za pomocą metody pomiarowej opisanej w rozdziale 6.4.1, nie było możliwe do określenia.

Wnioski:

- jak wykazano połączenie antyrównoległe diod jest mniej wrażliwe



Rys.C.1. Przebieg funkcji intermodulacji drugiego rzędu

$|H_2^{(2)}(f_1, \pm f_0 - f_1)|$ dla obwodów rezonansowych z rozdz.6.4
 przy zmodyfikowanych modelach diod pojemnościowych
 /C.12/ - /C.13/.

na niezgodności ich charakterystyk /w szczególności zniekształcenia drugiego rzędu nie zależą od pojemności liniowych K_0 i L_0 /,

- ze wzoru /C.8/ widać, że współczynnik ten można wyzerować przez zmianę K_0 lub L_0 /tylko dla jednego napięcia polaryzującego diodę/,
- podobne wnioski dotyczyć będą nie tylko diod pojemnościowych, ale i innych elementów nieliniowych włączanych antyszeregowo i antyrównolegle.

LITERATURA:

- 1/Alper B.C, - A Consideration of Discrete Volterra Series, IEEE Trans.Automat.Contr., Jul. 1965.
- 2/Asaubayev K.S, - Analysis of Nonlinear Systems Described by Volterra Series, Avtomatika i Telemekhanika, 11, 1976.
- 3/Asdente M. - Modified Volterra-Wiener Functionals Method for High Nonlinear Systems, Alta Frequenza , 12, 1976.
- 4/Barker H.A., Ambati S. - Nonlinear Sampled-Data Systems Analysis by Multidimensional Z-Transforms, Proc.IEE /London/,9,1972.
- 5/Barker H.A., Davy R.W. - Measurement of Second-Order Volterra Kernels Using Pseudorandom Ternary Signals, Int.J.Contr.,2, 1978.
- 6/Barrett J.F. - The Use of Functionals in the Analysis of Nonlinear Physical Systems, J.Electr.Contr., 15, 1963.
- 7/Barrett J.F. - The Use of Volterra Series to Find Region of Stability of a Non-linear Differential Equations, Int.J. Contr., 3, 1965.
- 8/Barrett J.F. - Formula for Output Autocorrelation and Spectrum of a Volterra Systems with Stationary Gaussian Input, IEE Proc.-D,Control Theory and Application, 6, 1980.
- 9/Bedrosian E., Rice S. - The Output Properties of Volterra Systems /Nonlinear Systems with Memory/ Driven by Harmonic and Gaussian Inputs, Proc. IEEE, Dec., 1971.
- 10/Benedett S, Bilgieri E. - Analysis of Strongly Non-linear Circuit Using Volterra Series, Journal European Space Agency, 4, 1979.

- 11/Berry B. - An Optimal Ordering of Electronic Circuit Equation for Sparse Matrix Solution, IEEE Trans. Circuit Theory, Jan., 1971.
- 12/Bogdanowicz B.M. - Osnovy teorii rascziota małosignalnych elektronnych usilitieliej s kontrolirujemyimi nieliniejnymi iskażeniami, Mińsk, 1974.
- 13/Bogdanowicz B.M.,- Nielinieinyje iskażenia w prijemno-usilitelnych ustrojstwach, Moskwa, Swiaż ,1980.
- 14/Bogdanowicz B.M. - Strukturnyj sintiez cepiej klasa Volterra-Wienera po kritieriam nieliniejnosti, Raditechnika i Elektronika, Minsk, 6, 1976.
- 15/Bogdanowicz B.M. - Ab ispolzowanii riadow Volterra w zadaczach estimacii nieliniejnych elektronnych cepiej, Radiotechnika i Elektronika, Mińsk, 5, 1955.
- 16/Bogdanowicz B.M. - Razszirienije oblasti ispolzowanija riadow Volterra s jadrami nizsich poriadkow dla analiza radiociepiej, Raditechnika i Elektronika, 7, 1977.
- 17/Bogdanowicz B.M., Szarikin A.I. - Maszinnyj analiz traktow pieriedaczi signalow po kritieriam nieliniejnosti, Radiotechnika, 7, 1978.
- 18/Boness R. - Numerische Vefahren zur dynamischen Analyse nicht-linearer Netzwerke, Nachrichtentechnik, Elektronik, 1973.
- 19/Borys A., Roszkiewicz T. - Komputerowa analiza układow scalonych za pomocą macierzy rzadkich, Rozprawy Elektrotechniczne, 2, 1977.
- 20/Borys A., Roszkiewicz T. - Małosygnałowa analiza zniekształceń nieliniowych za pomocą szeregow Volterry, Rozprawy Elektrotechniczne, 1, 1979.

- 21/Borys A. - Model tranzystora bipolarnego dla komputerowych obliczeń zniekształceń intermodulacyjnych , Rozprawy Elektrotechniczne, 1, 1980.
- 22/Bouville C., Dubois J.L. - Analysis of Weakly Non-linear Circuits Using Volterra Series - Application to Bipolar Transistor Circuits, Annales des Telecommunication, 7-8, 1978.
- 23/Budzisz W. - Wielkosygnałowa analiza częstotliwościowa układów elektronicznych, Rozprawy Elektrotechniczne, 1, 1980.
- 24/Brockett R.W. - Volterra Series and Geometric Control Theory, Automatica, 12, 1976.
- 25/Bussgang D.B., Ehrman L., Graham J.W. - Analysis of Nonlinear Systems with Multiple Inputs, Proc. IEEE, Aug., 1974.
- 26/Bychowskij M.A. - Primienienije riadow Volterra dla analiza nieliniwnych iskażeń w sistiemach s czastotnoj modulaciej, Teorieticzeskaja Radiotekhnika, 4, 1974.
- 27/Calahan D.A. - Projektowanie układów elektronicznych za pomocą komputerów, WNT, Warszawa, 1978.
- 28/Crippa G. - Evaluation of Distortion and Intermodulation in Nonlinear Transmission Systems by Means of Volterra Series Expansion, Alta Frequenza, 5, 1969.
- 29/Christensen G.S. - On the Convergence of Volterra Series, IEEE Trans. Automat. Contr., 6, 1968.
- 30/Chua L.O., Pen-Min Lin - Komputerowa analiza układów elektronicznych, WNT, Warszawa, 1981.
- 31/Chua L.O., Yaw-Shing-Tang - Nonlinear Oscillation Via Volterra Series, IEEE Trans. Circuits and Systems, Mar., 1982.
- 32/Flake R.H. - Volterra Series Representation of Nonlinear Systems, AIEE Trans. Appl. Ind., Jan., 1963.

- 33/Frechet M. - Sur Les Functionelles Continues, Annales Scientifiques de L'Ecole Normale Superieure, 3rd Ser., Vol.27, May, 1910.
- 34/Fu F.C., Farison J.B. - Analysis of the Clas of Nonlinear Discrete-Time Systems by the Volterra Series, Int.J.Contr., 3, 1973.
- 35/Fu F.C., Farison J.B. - On the Volterra Series Functinal Evaluation of the Response of Nonlinear Discrete-Time Systems, Int.J.Contr., Mar., 1973.
- 36/Fu F.C., Farison J.B. - On the Volterra Series Functional Identification of Nonlinear Discrete-Time Systems, Int.J.Contr., Jun., 1973.
- 37/Gabor A. - Badanie określonych szeregiem Volterry charakterystyk toru elektroakustycznego, Rozprawa doktorska, PWr, Wrocław, 1975.
- 38/Gilbert E.G., Brocket R.W. - An Addendum to Volterra Series and Geometric Control Theory, Automatica, 12, 1976.
- 39/Gilbert E.G. - Functional Expantins for the Respose of Nonlinear Differential Systems, IEEE Trans.Automat.Contr., 6, 1977.
- 40/Głowacki M. - Analiza skażeń sygnałów fonicznych transmitowanych w obecności szumu przez układy nieliniarne inercyjne, Rozprawa doktorska, PWr, Wrocław, 1978.
- 41/Głowacki M., Sułkońska W. - Aproksymacja wielowymiarowych funkcji przenoszenia torów elektroakustycznych, Komunikat Inst. Telekom. i Akust. PWr, Wrocław 1977.
- 42/Goldman J. - A Volterra Series Description of Crosstalk Interferece in Communicatins Systems, BSTJ, 5, 1973.
- 43/Gopal K., Nakkala M., Singhal K., Vlach J. - Ditortion Analysis of Transistor Networks, IEEE Proc. ISCA, 5, 1076.

- 44/Gościcki B. - Analiza zniekształceń nieliniowych przy użyciu szeregów Volterry, Archiwum Elektrotechniki, 2, 1971.
- 45/Gościcki B. - Analiza pracy mieszacza tranzystorowego z punktu widzenia odbioru sygnałów niepożądanych, Rozprawa doktorska, PGd, Gdańsk, 1975.
- 46/Góral A. - Nowoczesne przyrządy elektronowe, WNT, Warszawa, 1980.
- 47/Grobelny M. - Zarys liniowej teorii układów elektronicznych, WKiŁ, Warszawa, 1976.
- 48/Grobelny M. - Projektowanie układów elektronicznych za pomocą komputerów, WKiŁ, Warszawa, 1976.
- 49/Gummel H.K., Poon H.C. - An Integral Charge Control Model of Bipolar Transistors, BSTJ May/Jun., 1970.
- 50/Harper T.R., Rugh W. - Structural Features of Factorable Volterra Systems, IEEE Trans. Automat. Contr., 6, 1976.
- 51/Hill E., Philips R.S. - Functional Analysis and Semi Groups, Providence RI: Amer. Math. Soc., 1957.
- 52/Javed A., Goud P.A., Syret B.A. - Analysis of a Microwave Feed-forward Amplifier Using Volterra Series Representation, IEEE Trans. Commun. Technol., 3, 1977.
- 53/Javed A., Goud P.A., Syret B.A. - Intrmodulation Distortion Analysis of Reflection-Type IMPAT Amplifier Using Volterra Series, IEEE Trans. Microwave Theory Tech., 9, 1977.
- 54/Kalichman S.G., Lewin J.M. - Osnovy teorii ráschiota radiowieszatielnykh prijomnikow na połuprowodnikowych priborach, Moskwa, 1979,
- 55/Kiełkiewicz M. - Funkcjonały Volterry w kinematyce reaktorów jądrowych, Rozprawa doktorska, PWA, Warszawa, 1965.
- 56/Korzec T. - Przyrządy półprzewodnikowe, WNT, Warszawa, 1979.

- 57/Krakovski M. - Elektrotechnika teoretyczna. Obwody liniowe i nieliniowe, PWN, Warszawa, Poznań, 1979.
- 58/Ku Y.H., Lin T.S. - Analysis of Nonlinear Systems with Stochastic Inputs and Stochastic Parameters, J. Franklin Inst., 5, 1971.
- 59/Ku Y.H., Wolf A.A. - Volterra-Wiener Functionals for the Analysis of Nonlinear Systems, J. Franklin Inst., 1, 1966.
- 60/Ku Y.H., Su C.C. - Volterra Functional Analysis of Nonlinear Time-Varying Systems, J. Franklin Inst., 6, 1967.
- 61/Kudrewicz G. - Częstotliwościowe metody w teorii nieliniowych układów dynamicznych, WKiŁ, Warszawa, 1970.
- 62/Kuo Y.L. - Frequency-Domain Analysis of Weakly Nonlinear Networks, Part 1 and 2, IEEE Circuits and Syst. Soc. Mag., Aug., Oct., 1977.
- 63/Landau M., Leondes C.T. - Volterra Series Synthesis of Nonlinear Stochastic Tracking Systems, IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst., 2, 1975.
- 64/Lawrens P.J. - Volterra Series Approach to Solution of Time-Varying Linear-Differential Equations, Int. J. Contr., 4, 1979.
- 65/Lee W.Y., Schetzen M. - Measurement of Wiener Kernels of a Nonlinear Systems by Cross-Correlation, Int. J. Contr., 3, 1965.
- 66/Leon B.J., Schafer D.J. - Volterra Series and Picard Iteration for Nonlinear Circuits and Systems, IEEE Trans. Circuits and Syst., 9, 1978.
- 67/Lesiak C., Krener A.J. - Existence and Uniqueness of Volterra Series for Nonlinear Systems, IEEE Trans. Automat. Contr., 6, 1978.
- 68/Lotesch H. - Survey of Nonlinear Distortion in Transistor Stages Including Cross-Modulation, Archiv fuer Elektronik, 5, 1960.

- 69/Makarenko B.I., Ivanov A.M. - Funkcionalnyj metod issledowania nieliniennykh radiotekhnicheskikh sistem, Radiotekhnika ,4, 1980.
- 70/Maurin K. - Analiza, Część 1. Elementy, PWN, Warszawa, 1974.
- 71/Meyer N.I. - On the Variation of Transistors Small Signal Parameters with Emitter Current and Collector Voltage, J. Elektr. Contr., 4, 1958.
- 72/Meyer R.G., Stephens M.L. - Distortion in Variable-Capacitance Diodes, IEEE J. Solid-State Circuits, Feb. 1975.
- 73/Mikołajczuk K., Trzaska Z. - Elektrotechnika teoretyczna. Teoria obwodów nieliniowych, PWA, Warszawa, 1980.
- 74/Mircea A., Sinnreich H. - Distortion Noise in Frequency-Dependent Nonlinear Networks, Proc. IEEE, Sep.-Oct., 1969.
- 75/Musiakowski Z. - Komputerowa analiza częstotliwościowa liniowych, parametrycznych i stacjonarnych układów elektronicznych z wykorzystaniem rzadkości macierzy węzłowej, Rozprawa doktorska, PWr, Wrocław, 1978.
- 76/Narayanan S. - Application of Volterra Series to Intermodulation Distortion Analysis of Transistor Feedback Amplifiers, IEEE Trans. Circuit Theory, Nov., 1970.
- 77/Narayanan S. - Intermodulation Distortion of Cascaded Transistors, IEEE J. Solid-State Circuits, 3, 1969.
- 78/Narayanan S., Poon H.C. - An Analysis of Distortion in Bipolar Transistors Using Integral Charged-Control Model and Volterra Series, IEEE Trans. Circuits Theory, Jul., 1973.
- 79/Narayanan S. - Transistor Distortion Analysis Using Volterra Series Representation, BSTJ, May-Jun., 1967.
- 80/Polska Norma PN 73 T04500, Arkusz 00.

- 81/Pupkow A.K.,Kapalin A.C.,Juszczenko A.C. - Funkcjonalnyje riady w teorii nielinielnych sistiem, Moskwa, 1978.
- 82/Reynolds J. - Nonlinear Distortion and Their Cancellation in Transistors, IEEE Electron Devices, Nov., 1965.
- 83/Reiss W. - Nonlinear Distortion in Attenautors with PIN Diodes Describet by Volterra Series, Internatinales Wissenschaftliches Kolloqium TH Ilmenau 1981.
- 84/Ricca A.M. - Free Response of a Nonlinear Systems by Means of the Volterra Functionals Expantions, Alta Frequenza, 4, 1977.
- 85/Rice S.O. - Volterra Systems with More then One Input Port Distortion in Frequency Converter, BSTJ, 8, 1973.
- 86/Riva G.M.,Beneteau P.J.,Dalla Volta E. - Amplitude Distortion in Trnsistor Amplifier, Proc. IEEE, 3, 1964.
- 87/Rotkiewicz W., Rotkiewicz P.,Zaleski B.- Technika odbioru radiowego.Podstawowe układy wielkiej częstotliwości, WNT, Warszawa, 1973.
- 88/Rotkiewicz W., Rotkiwicz P. - Technika odbioru radiowego.Miernictwo, WNT, Warszawa, 1965.
- 89/Rydbeck N. - A Volterra Series Analysis of Intermodulation Distortion in Carrier Frequency Systems. Intemodulation Distortion in 12MHz Carrier Frequency System - Comparison between Theory and Practica, Ericson Technic, 2, 1976.
- 90/Sarkar T.K.,WeinerD.D.,Haming R.F. - Analysis of Nonlineary Loadet Multiport Antenna Structures Over an Imperfect Ground Plane Using the Volterra Series Method, IEEE Trans.EMC,2,1978.
- 91/Schetzen M. - Measurement of the Kernels of a Nonlinear Systems of Finite Order, Int.J.Contr., 3 , 1965.
- 92/Schetzen M. - Synthesis of a Clas of Nonlinear Systems, Int. J.Contr., 5, 1965.

- 93/Schetzen M. - Power-Series Equivalence of Some Functional Series with Applications, IEEE Trans.Circuits Theory, 2, 1970.
- 94/Schetzen M. - A Theory of Nonlinear Systems Identityfication, Int.J.Contr., 4, 1974.
- 95/Schetzen M. - The Volterra and Wiener Theories in Nonlinear systems, J.Wiley and Sons, N.York, 1980.
- 96/Smets H.B. - Analysis and Synthesis of Nonlinear Systems, Trans. IRE, 4, 1960.
- 97/Smyczek J. - Analiza pewnej klasy układów nieliniowych przy zastosowaniu szeregu Volterry, Rozprawa doktorska, PŁ, Łódź, 1970.
- 98/Smyczek J. - Zastosowanie szeregu Volterry do analizy nieliniowych obwodów elektrycznych, Zeszyty Naukowe Politechniki Łódzkiej, 43, 1973.
- 99/Smyczek J. - Wyznaczanie przybliżonej transmitancji pewnych układów nieliniowych, Zeszyty Naukowe Politechnik Łódzkiej, 43, 1973.
- 100/Sowa A. - Odpowiedź wzmacniacza nieliniowego wielkiej częstotliwości na pobudzenie sygnałem impulsowym o kształtowanej charakterystyce częstotliwościowej, Rozprawa doktorska, PWr, Wrocław, 1979.
- 101/Steinheuser L. - Analize fastlinear Netzwerke mit der Volterra Reihe, Nachrichtentechnik Elektronik, 4/6, 1975.
- 102/Swerdlow R.B. - Analysis of Intermodulation Noice in Frequency Converter by Volterra Series, IEEE Trans.Microwave Theory Tech., 4, 1978.
- 103/Ta Fang Fang, Wholen J.J. - Application of the Nonlinear Circuits Analysis Program NCAP to Predict RFT Effects in Linear Bipolar Circuits, 3rd Symposium on EMC Rotterdam, May 1979.

- 104/Taylor J.H. - Volterra Series Synthesis of Non-linear Stochastic Tracking Systems, IEEE Trans.Aerosp.Electron.Syst.,2,1978.
- 105/van Trees H.L. - Synthesis of Optimum Nonlinear Control Systems /wydanie rosyjskie, Moskwa, 1964/.
- 106/van Trees H.L. - Functionals Techniques for the Analysis of the Nonlinear Behavior of Phase-Locked Loops, Proc. IEEE, 8, 1964.
- 107/Weiner D.D.,Naditch G.H. - A Scattering Variable Approach to the Volterra Analysis of Nonlinear Systems, IEEE Trans. Microwave Theory Tech., 7, 1976.
- 108/Weiner D.D.,Spina J.F. - Sinusoidal Analysis and Modeling of Weakly Nonlinear Circuits, VNR, N.York, 1980.
- 109/Wiener N. - Nonlinear Problems in Random Theory, J.Wiley and Sons, N.York, 1958.
- 110/Wiener N. - Response of Nonlinear Device to Noise, Tech.Rep. V-16s,Rad.Lab.,MIT, Apr., 1942.
- 111/Witkowski J.S. - §7 w Układy elektroniczne.Materiały do zajęć z komputerowego projektowania, pod red. M.Grobelnego, Wydawnictwa PWr., /w druku/.
- 112/Witkowski J.S. - Programy komputerowe VOLT i WIVO analizy wielootworowych, nieliniowych układów elektronicznych metodą uogólnionego szeregu Volterry.Algorytmy i użytkowanie, Raport Inst. Telekom. i Akust. PWr, /w przygotowaniu/.
- 113/Witkowski J.S. - Program komputerowy VITO analizy wielootworowych, nieliniowych układów elektronicznych metodą uogólnionego szeregu Volterry.Algorytm i użytkowanie, Raport Inst. Telekom. i Akust. PWr, /w przygotowaniu/.

- 114/Wolski W.J. - Transmittance Methods of Analysis of Nonlinear Networks, Komunikat Inst. Telekom. i Akust. PWr., 1977.
- 115/Wolski W.J. - Analiza sieciowa układów nieliniowych z zastosowaniem szeregów Volterry, Rozprawy Elektrotechniczne, 4, 1979.
- 116/Uruski M., Wolski W.J. - Teoria obwodów, Wydawnictwa PWr, Wrocław, 1976.
- 117/Volterra V. - Theory of Functionals and of Integral and Integro-Differential Equations, N.York Dover, 1959.
- 118/Yasui S. - Stochastic Functionals, Fourier Series and Nonlinear Systems Analysis, IEEE Trans.Automat.Contr., 2, 1979.
- 119/Zarzycki J. - Związek między określonymi szeregiem Volterry charakterystykami toru elektroakustycznego, a powstającymi w nim zniekształceniami sygnału fonicznego, Rozprawa doktorska, PWr, Wrocław, 1975.
- 120/Sandberg I.W. - On Volterra Expansion for Time-Varying Nonlinear Systems, IEEE Trans.Circuits and Systems, 2, 1983.
- 121/Sandberg I.W. - Volterra-Like Expansion for Solutions of Nonlinear Integral Equations and Nonlinear Differential Equations, IEEE Trans.Circuits and Systems, 2, 1983.
- 122/Sandberg I.W. - Expansions for Nonlinear Systems, BSTJ, 2, 1982.
- 123/Sandberg I.W. - Volterra Expansions for Time-Varying Nonlinear Systems, BSTJ, 2, 1982.
- 124/Dalpe C.D, Kent G, Weiner D.D. - Extension of Volterra Analysis to Weakly Nonlinear Electromagnetic Field Problems with Application to Whistler Propagation, IEEE Trans. Microwave Theory, 7, 1982.

Lista odbiorców:

egz.

1. Ośrodek Informacji NT ITA	1
2. Biblioteka Główna Politechniki Wrocławskiej	1
3. Biblioteka Główna Politechniki Łódzkiej ul.F.Żwirki 36, 90-924 Łódź.	1
4. Biblioteka Główna Politechniki Warszawskiej ul.Jedności Robotniczej 1, 00-661 Warszawa	1
5. Promotor	1
6. Recenzenci	2
7. Egzemplarze autorskie	4

Razem 11



