

INSTYTUT CYBERNETYKI TECHNICZNEJ
POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ
Raport serii: PREPRINTY nr 82/2000

Algorytmy identyfikacji systemów nieliniowych za pomocą falek

(Rozprawa doktorska)

Przemysław Śliwiński

PROMOTOR:

dr hab. inż. Zygmunt Hasiewicz, prof. PWr

Słowa kluczowe:

- algorytmy identyfikacji
- systemy nieliniowe
- szeregi ortogonalne
- falek
- szybkie algorytmy obliczeniowe

WROCŁAW
czerwiec 2000

Spis rzeczy

Lista najważniejszych oznaczeń	4
Wprowadzenie	7
Cele pracy	9
1 Falkowa analiza wielorozdzielcza	10
1.1 Rodzina funkcji falkowych Daubechies	11
1.2 Aproksymacja falkowa	13
1.3 Szybka transformata falkowa FWT	15
2 Nieliniowe systemy o strukturze blokowej	17
2.1 Zastosowania praktyczne	17
2.2 System zastępczy. Warunki identyfikacji	18
2.3 Przykłady systemów o strukturze blokowej	19
2.3.1 System statyczny	20
2.3.2 System Hammersteina	20
2.3.3 System równoległy	21
2.3.4 System szeregowo-równoległy	23
2.3.5 System o wielu wejściach (MISO)	24
Podsumowanie	25
3 Falkowe algorytmy identyfikacji	26
A. Znana gęstość prawdopodobieństwa wejścia systemu	27
3.1 Algorytm ilorazowy	27
3.1.1 Analiza własności modeli empirycznych $\hat{G}(x; K, p)$	28
A. Analiza zbieżności punktowej modeli $\hat{G}(x; K, p)$	29
B. Analiza zbieżności całkowej modeli $\hat{G}(x; K, p)$	36
3.1.2 Analiza własności modeli empirycznych $\hat{R}_G(x; K, p)$	41
A. Analiza zbieżności punktowej modeli $\hat{R}_G(x; K, p)$	41
B. Analiza zbieżności całkowej modeli $\hat{R}_G(x; K, p)$	43
C. Dobór falek w empirycznym modelu falkowym $\hat{R}_G(x; K, p)$	45
3.2 Algorytm bezpośredni	46

3.2.1	Analiza własności modeli empirycznych $\hat{R}_R(x; K, p)$	48
A.	Analiza zbieżności punktowej modeli $\hat{R}_R(x; K, p)$	52
B.	Analiza zbieżności całkowej modeli $\hat{R}_R(x; K, p)$	56
C.	Dobór falek w empirycznym modelu falkowym $\hat{R}_R(x; K, p)$	60
B.	Nieznana gęstość prawdopodobieństwa wejścia systemu	61
3.3	Algorytm ilorazowy z estymacją funkcji gęstości wejścia systemu	61
3.3.1	Analiza własności modeli empirycznych $\hat{f}(x; K, p)$	63
3.3.2	Analiza własności modeli empirycznych $\hat{R}_{Gf}(x; K, p)$	64
A.	Dobór falek w empirycznym modelu falkowym $\hat{R}_{Gf}(x; K, p)$	66
	Podsumowanie	66
4	Falkowe algorytmy obliczeniowe identyfikacji	69
4.1	Podstawa teoretyczna	70
4.1.1	Aproksymacja falek	70
4.1.2	Własności aproksymacji funkcji falkowych	70
4.1.3	Falkowe modele obliczeniowe	71
4.2	Empiryczne modele obliczeniowe. Algorytmy obliczeniowe identyfikacji . .	73
4.3	Przykładowa analiza falkowego algorytmu obliczeniowego identyfikacji (algorytm ilorazowy)	75
4.3.1	Analiza własności empirycznych modeli obliczeniowych $\tilde{G}(x; K, H, p)$	75
A.	Analiza zbieżności punktowej modeli obliczeniowych $\tilde{G}(x; K, H, p)$. .	76
B.	Analiza zbieżności całkowej modeli obliczeniowych $\tilde{G}(x; K, H, p)$. . .	79
4.3.2	Analiza własności empirycznych modeli obliczeniowych $\tilde{R}_G(x; K, H, p)$	81
A.	Dobór skali H w aproksymacjach funkcji falkowych $\tilde{\varphi}^p(x; H)$ i $\tilde{\psi}^p(x; H)$	82
4.4	Szybkie algorytmy wyznaczania obliczeniowych modeli empirycznych . . .	83
4.4.1	Szybki obliczeniowy algorytm ilorazowy	84
	Podsumowanie	87
5	Badania numeryczne falkowych algorytmów identyfikacji	88
5.1	Warunki eksperymentów	89
5.2	Wybrane wyniki badań numerycznych	92
5.2.1	Stosowalność reguły doboru skali modeli	93
5.2.2	Wpływ skali aproksymacji falek na zachowanie modeli obliczeniowych	94
5.2.3	Porównanie algorytmu falkowego z algorytmem trygonometrycznym	94
	Podsumowanie	95
	Rezultaty badań numerycznych – wykresy	97
Zakończenie		108
	Wyniki otrzymane w pracy	108

Dlaczego falki?	111
Otwarte problemy badawcze	112
A Uzupełnienia do rozdziału 1	114
A.1 Funkcje $\lfloor x \rfloor$ i $\lceil x \rceil$	114
A.2 Siatka binarna $\mathbf{B}_H$	114
A.3 Algorytm wyznaczania wartości funkcji falkowych	115
B Uzupełnienia do rozdziału 3	116
B.1 Oszacowanie wariancji współczynników empirycznych $\hat{\alpha}_{Mn}^p$ i $\hat{\beta}_{ml}^p$ modeli $\hat{G}(x; K, p)$	116
B.2 Oszacowanie wariancji wyjścia $\text{var } \hat{G}(x; K, p)$	120
B.3 Oszacowanie współczynników falkowych β_{ml}^p	123
B.4 Oszacowanie obciążenia $\text{bias}^2 \hat{G}(x; K, p)$	126
B.5 Oszacowanie wariancji współczynników empirycznych $\hat{\alpha}_{Mn}^{p'}$ i $\hat{\beta}_{ml}^{p'}$ modeli $\hat{R}_R(x; K, p)$	127
B.6 Oszacowanie wariancji wyjścia $\text{var } \hat{R}_R(x; K, p)$	128
B.7 Optymalna szybkość zbieżności modeli falkowych	129
B.8 Szybkość zbieżności według prawdopodobieństwa	129
B.9 Wybrane własności szeregów liczbowych	130
C Uzupełnienia do rozdziału 4	131
C.1 Oszacowanie błędów aproksymacji funkcji falkowych	131
C.2 Oszacowanie wariancji współczynników empirycznych $\tilde{\alpha}_{Mn}^p$ i $\tilde{\beta}_{ml}^p$ modeli $\tilde{G}(x; K, H, p)$	134
C.3 Oszacowanie wariancji wyjścia $\text{var } \tilde{G}(x; K, H, p)$	135
C.4 Oszacowanie obciążenia $\overline{\text{bias}}^2 \tilde{G}(x; K, H, p)$	135
C.5 Tabele współczynników Daubechies	137
C.6 Liczba współczynników w modelach obliczeniowych $\tilde{R}_G(x; K, H, p)$	138
C.7 Szybki obliczeniowy algorytm ilorazowy	139
C.8 Procedury komputerowe	140
Literatura	142

Lista najważniejszych oznaczeń

Rozdział 1

- $\varphi(x)$ — funkcja skalująca (falka-ojciec)
- $\psi(x)$ — falka (falka-matka)
- $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{R}$ — zbiory liczb naturalnych, całkowitych i rzeczywistych
- $L^2(\mathbf{R})$ — przestrzeń funkcji całkowalnych z kwadratem na prostej rzeczywistej
- $\varphi^p(x)$ — funkcja skalująca Daubechies o numerze falkowym p
- $\psi^p(x)$ — falka Daubechies o numerze falkowym p
- $I_S(x)$ — funkcja wskaźnikowa zbioru S

Rozdział 2

Schemat zastępczy systemu:

- x_k — wejście identyfikowanego systemu
- y_k — wyjście identyfikowanego systemu
- $R(\cdot)$ — identyfikowana nieliniowość
- $f(\cdot)$ — funkcja gęstości prawdopodobieństwa wejścia systemu
- $\{\lambda_i\}$ — odpowiedź impulsowa liniowego podsystemu dynamicznego
- ξ_k — sygnał zakłócający pochodzący od systemu
- $\zeta(\cdot)$ — nieliniowość pasożytnicza
- ε_k — zakłócenie zewnętrzne (białe)
- z_k — zakłócenie zewnętrzne (skorelowane)
- $\{\omega_i\}$ — odpowiedź impulsowa układu generującego zakłócenia z_k

Przykłady systemów:

- $\left. \begin{array}{l} \mu(\cdot) \\ \kappa(\cdot) \\ \theta(\cdot) \end{array} \right\}$ — charakterystyki nieliniowe elementów statycznych
- $\left. \begin{array}{l} \{\eta_i\} \\ \{\vartheta_i\} \end{array} \right\}$ — odpowiedzi impulsowe liniowych elementów dynamicznych
- ϵ_k — pobudzenie zewnętrzne (białe)

Rozdział 3

- $R_G(x; K, p)$ — teoretyczny model falkowy nieliniowości $R(x)$,
podstawa algorytmu ilorazowego
- $G(x; K, p)$ — teoretyczny model falkowy funkcji $G(x) = R(x) \cdot f(x)$ (licznik
falkowych modeli teoretycznych $R_G(x; K, p)$ i $R_{Gf}(x; K, p)$)
- $\alpha_{Mn}^p, \beta_{ml}^p$ — współczynniki modelu teoretycznego $G(x; K, p)$
- $\hat{R}_G(x; K, p)$ — empiryczny model falkowy nieliniowości $R(x)$
otrzymywany według algorytmu ilorazowego
- $\hat{G}(x; K, p)$ — empiryczny model falkowy funkcji $G(x)$ (licznik
falkowych modeli empirycznych $\hat{R}_G(x; K, p)$ i $\hat{R}_{Gf}(x; K, p)$)
- $\hat{\alpha}_{Mn}^p, \hat{\beta}_{ml}^p$ — współczynniki modelu empirycznego $\hat{G}(x; K, p)$

$R_R(x; K, p)$	—	teoretyczny model falkowy nieliniowości $R(x)$, podstawa algorytmu bezpośredniego
$\alpha_{Mn}^{p'}, \beta_{ml}^{p'}$	—	współczynniki modelu teoretycznego $R_R(x; K, p)$
$\hat{R}_R(x; K, p)$	—	empiryczny model falkowy nieliniowości $R(x)$, otrzymywany według algorytmu bezpośredniego
$\hat{\alpha}_{Mn}^{p'}, \hat{\beta}_{ml}^{p'}$	—	współczynniki modelu empirycznego $\hat{R}_R(x; K, p)$
$R_{Gf}(x; K, p)$	—	teoretyczny model falkowy nieliniowości $R(x)$, podstawa algorytmu ilorazowego z estymacją funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$
$f(x; K, p)$	—	teoretyczny model falkowy funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$ (mianownik modelu teoretycznego $R_{Gf}(x; K, p)$)
a_{Mn}^p, b_{ml}^p	—	współczynniki modelu teoretycznego $f(x; K, p)$
$\hat{R}_{Gf}(x; K, p)$	—	empiryczny model falkowy nieliniowości $R(x)$, otrzymywany według algorytmu ilorazowego z estymacją funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$
$\hat{f}(x; K, p)$	—	empiryczny model falkowy funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$ (mianownik modelu empirycznego $\hat{R}_{Gf}(x; K, p)$)
$\hat{a}_{Mn}^p, \hat{b}_{ml}^p$	—	współczynniki modelu empirycznego $\hat{f}(x; K, p)$
$C^\lambda[a, b]$	—	klasa funkcji ciągłych w przedziale $[a, b]$
MSE	—	punktowy błąd średniokwadratowy
bias	—	składowa obciążenia błędu MSE
var	—	składowa wariancji błędu MSE
MISE	—	całkowy (globalny) błąd średniokwadratowy
ISB	—	składowa obciążenia (w kwadracie) błędu MISE
IV	—	składowa wariancji błędu MISE

Rozdział 4

H	—	parametr skali aproksymacji funkcji falkowych
$\bar{\varphi}^p(x; H)$	—	aproksymacja funkcji skalującej $\varphi^p(x)$ w skali H
$\bar{\psi}^p(x; H)$	—	aproksymacja falki-matki $\psi^p(x)$ w skali H
$\mathbf{B}_H$	—	siatka binarna
$\bar{R}_G(x; K, H, p)$	—	falkowy model obliczeniowy nieliniowości $R(x)$ (odpowiednik falkowego modelu teoretycznego $R_G(x; K, p)$)
$\bar{G}(x; K, H, p)$	—	falkowy model obliczeniowy funkcji $G(x)$ (odpowiednik falkowego modelu teoretycznego $G(x; K, p)$)
$\bar{\alpha}_{Mn}^p, \bar{\beta}_{ml}^p$	—	współczynniki falkowego modelu obliczeniowego $\bar{G}(x; K, H, p)$
$\tilde{R}_G(x; K, H, p)$	—	empiryczny falkowy model obliczeniowy nieliniowości $R(x)$ otrzymywany według obliczeniowego algorytmu ilorazowego
$\tilde{G}(x; K, H, p)$	—	empiryczny falkowy model obliczeniowy funkcji $G(x)$ (licznik empirycznych modeli obliczeniowych $\tilde{R}_G(x; K, H, p)$ i $\tilde{R}_{Gf}(x; K, H, p)$)
$\tilde{\alpha}_{Mn}^p, \tilde{\beta}_{ml}^p$	—	współczynniki falkowego empirycznego modelu obliczeniowego $\tilde{G}(x; K, H, p)$

- $\bar{R}_R(x; K, H, p)$ — falkowy model obliczeniowy nieliniowości $R(x)$
 (odpowiednik falkowego modelu teoretycznego $R_R(x; K, p)$)
 $\bar{\alpha}_{Mn}^{p'}, \bar{\beta}_{ml}^{p'}$ — współczynniki falkowego modelu obliczeniowego $\bar{R}_R(x; K, H, p)$
 $\tilde{R}_R(x; K, H, p)$ — empiryczny falkowy model obliczeniowy nieliniowości $R(x)$
 otrzymywany według obliczeniowego algorytmu bezpośredniego
 $\tilde{\alpha}_{Mn}^{p'}, \tilde{\beta}_{ml}^{p'}$ — współczynniki empirycznego modelu obliczeniowego $\tilde{R}_R(x; K, H, p)$
- $\bar{R}_{Gf}(x; K, H, p)$ — falkowy model obliczeniowy nieliniowości $R(x)$
 (odpowiednik falkowego modelu teoretycznego $R_{Gf}(x; K, p)$)
 $\bar{f}(x; K, H, p)$ — falkowy model obliczeniowy funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$
 (odpowiednik falkowego modelu teoretycznego $f(x; K, p)$)
 $\bar{a}_{Mn}^p, \bar{b}_{ml}^p$ — współczynniki falkowego modelu obliczeniowego $\bar{f}(x; K, H, p)$
 $\tilde{R}_{Gf}(x; K, H, p)$ — empiryczny falkowy model obliczeniowy nieliniowości $R(x)$
 otrzymywany według obliczeniowego algorytmu ilorazowego
 z estymacją funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$
 $\tilde{f}(x; K, H, p)$ — empiryczny falkowy model obliczeniowy funkcji gęstości
 wejścia systemu $f(x)$ (mianownik empirycznego
 modelu obliczeniowego $\tilde{R}_{Gf}(x; K, H, p)$)
 $\tilde{a}_{Mn}^p, \tilde{b}_{ml}^p$ — współczynniki empirycznego modelu obliczeniowego $\tilde{f}(x; K, H, p)$
- $P_G(M, K)$ — liczba współczynników falkowego modelu
 obliczeniowego $\tilde{R}_G(x; K, H, p)$
 $C_G(N, K, p)$ — złożoność numeryczna falkowego obliczeniowego
 algorytmu ilorazowego
 $C_G^F(N, K, p)$ — złożoność numeryczna szybkiego falkowego algorytmu ilorazowego

Wprowadzenie

Zadanie identyfikacji polega na wyznaczeniu matematycznego opisu zależności pomiędzy wejściem a wyjściem obiektu. Zadanie to jest determinowane przez następujące czynniki (por. [52], [95], [108], [127]):

- obiekt identyfikacji i informację aprioryczną o obiekcie,
- możliwości pomiarowe i dane pomiarowe zebrane w trakcie eksperymentu (informację pomiarową),
- wybraną klasę modeli obiektu, oraz
- zastosowany algorytm identyfikacji.

Obiekt identyfikacji i informacja aprioryczna. W niniejszej pracy, obiektem identyfikacji jest nieliniowa charakterystyka elementu statycznego, będącego częścią składową złożonego systemu dynamicznego o strukturze blokowej (systemu o strukturze zbudowanej z wyodrębnionych elementów (podsystemów) nieliniowych statycznych i liniowych dynamicznych).

Problematyka identyfikacji charakterystyk nieliniowych w tego typu systemach jest tematem szeregu prac (zob. np. [6], [8]-[11], [18], [44]-[57], [61]-[63], [66]-[70], [87]-[90], [103], [107]-[108], [117], [124], [127]). Jej znaczenie wynika z szerokiego zakresu zastosowań systemów o strukturze blokowej, przykładowo: w sterowaniu [155], mechanice [134], biocybernetyce [59], medycynie [75], [96], chemii [36], czy w przetwarzaniu sygnałów [101].

Zakładamy, że dostępna informacja aprioryczna o identyfikowanej nieliniowości jest niewielka. Przyjmujemy jedynie, że nieliniowa charakterystyka jest ograniczona; natomiast od pozostałych elementów dynamicznych systemu wymagamy tylko aby były asymptotycznie stabilne.

Dane pomiarowe. Eksperyment. W pracy przyjmujemy, że identyfikacja przebiega w warunkach losowych, tj., że wejście złożonego systemu jest pobudzone sygnałem losowym, a jego wyjście podlega losowym zakłóceniom. Sytuacja taka odpowiada tzw. *eksperymentowi biernemu* i, z praktycznego punktu widzenia oznacza, że charakterystyka nieliniowa w systemie ma być identyfikowana w trakcie jego normalnej pracy (zob. np. [37, str. 39], [40, str. 306]). Ponadto, zakładamy, że posiadane pomiary pochodzą z wejścia i wyjścia całego systemu. Warunek ten jest istotny w wielu zastosowaniach, w których odłączenie (lub rozdzielenie) systemu w celu identyfikacji jego elementów jest, bądź niemożliwe (np. w badaniach biomedycznych [102], [120], [154], czy analizie jakości wody [29]), bądź kosztowne (np. w identyfikacji charakterystyk nieliniowych kolumn destylacyjnych [19] lub obiektów elektrotermicznych [125]).

Klasa modeli. Przyjęte ogólne postulaty odnośnie nieliniowości będących obiektem identyfikacji wymagają (w celu umożliwienia zbieżności algorytmom identyfikacji) dobrania odpowiednio szerokiej klasy ich modeli (por. [44]-[57], [70], [86], [107]-[108], [112]-[113], [116], [124]). W pracy stosujemy modele falkowe, które opierają się na szeregach ortogonalnych funkcji falkowych Daubechies¹. Funkcje te stanowią nową rodzinę układów ortogonalnych. Ich teorii poświęcone są m. in. prace [16], [26], [92], [130]-[131] i monografie [2], [5], [23], [27], [98], [118] i [152]. Szereg prac traktuje również o ich zastosowaniach: [99]-[100], [148]-[149]. Poza dziedzinami, takimi jak geologia [58], przetwarzanie sygnałów i obrazów [17], [24], [93], [94], [110], [118], [145], medycyna [1], [126], [146], [144], chemia [38]-[39], energetyka [74], czy statystyka matematyczna [3], [65], [104], pewną liczbę zastosowań można odnaleźć również w obszarze modelowania systemów [106]. Przykładami mogą być tu aplikacje odpowiednich modeli falkowych w sterowaniu samolotami wojskowymi [12], monitorowaniu procesów technologicznych i wykrywaniu uszkodzeń [25], [76]-[77], [97], [147] i w medycynie [102], [120], [154]. Natomiast zastosowaniom falek w identyfikacji dynamicznych systemów nieliniowych o strukturze blokowej poświęcone są jedynie prace [70], [82] i [108] i częściowo [124].

Przyjęcie falek Daubechies jako podstawy modeli identyfikowanych nieliniowości wynika z następujących przesłanek:

- Falki te stanowią bazę ortogonalną przestrzeni funkcji całkowalnych z kwadratem. Własność ta pozwala identyfikować z ich pomocą szeroką klasę charakterystyk nieliniowych.
- W odróżnieniu od innych szeregów ortogonalnych, analityczne własności algorytmów identyfikacji opartych o falki Daubechies nie zostały, jak dotąd, zbadane.

Algorytmy identyfikacji. Pojęcie „algorytmy identyfikacji” jest w pracy rozumiane dwojako:

- jako zbiór formuł prowadzących do uzyskania empirycznego modelu falkowego identyfikowanej charakterystyki nieliniowej, oraz
- jako zestaw procedur obliczeniowych, umożliwiających efektywne wyznaczenie empirycznych modeli falkowych na podstawie danych pomiarowych.

Rozróżnienie to wynika ze specyficznych własności funkcji falkowych Daubechies, które nie są dane za pomocą jawnych wzorów, ale przy pomocy formuł rekurencyjnych. Z tej przyczyny, bezpośrednie zastosowanie falkowych algorytmów identyfikacji (tj. prosta implementacja odpowiednich wzorów wykorzystujących falki Daubechies) nie jest możliwe i wymaga opracowania odpowiednich algorytmów obliczeniowych uwzględniających tę cechę funkcji falkowych. Problem staje się istotny zwłaszcza przy losowym pobudzeniu wejścia systemu z powodu braku standardowych procedur obliczeniowych (zob. uwaga 1.2 w rozdziale pierwszym).

¹Ze względu na brak polskojęzycznych publikacji dotyczących funkcji falkowych, w pracy stosujemy dosłowne tłumaczenia terminów angielskich z tej dziedziny.

Cele pracy

W pracy postawiono następujące cele:

- Sformułowanie i zbadanie własności falkowych algorytmów identyfikacji charakterystyk nieliniowych.
- Zaproponowanie komputerowych (obliczeniowych) algorytmów identyfikacji, opartych na prostej aproksymacji funkcji falkowych i zbadanie wpływu zastosowanej aproksymacji falek na rezultat identyfikacji.
- Opracowanie sprawnych obliczeniowo algorytmów wyznaczania modeli falkowych.
- Przeprowadzenie badań empirycznych. Eksperymentalne zbadanie własności algorytmów dla małej i umiarkowanej liczby pomiarów.
- Eksperymentalne porównanie algorytmów falkowych z algorytmami opartymi na szeregach trygonometrycznych.

Zagadnieniom tym poświęcone są kolejne rozdziały pracy:

Rozdział pierwszy zawiera podstawowe wiadomości dotyczące teorii falek. Rozdział drugi poświęcony jest przedstawieniu klasy rozpatrywanych systemów nieliniowych oraz ich schematu zastępczego. Podajemy w nim także przykładowe systemy z tej klasy i definiujemy założenia dotyczące warunków identyfikacji.

W rozdziale trzecim prezentujemy falkowe algorytmy identyfikacji oraz odpowiadające im klasy empirycznych modeli falkowych charakterystyk nieliniowych. W formie twierdzeń i wniosków przedstawiamy warunki zbieżności modeli falkowych do identyfikowanych nieliniowości, zarówno w sensie lokalnym (punktowym) jak i globalnym (całkowym), średniokwadratowo i według prawdopodobieństwa. Pokazujemy wpływ regularności (gładkości) identyfikowanych charakterystyk, funkcji gęstości prawdopodobieństwa wejścia systemu oraz cech zastosowanych w modelach funkcji falkowych na szybkość zbieżności poszczególnych modeli. W szczególności pokazujemy, że w praktycznych sytuacjach, przy braku informacji na temat gładkości identyfikowanej charakterystyki, modele falkowe zbiegają do niej, w sensie całkowego błędu średniokwadratowego, z gwarantowaną szybkością rzędu $O(N^{-1/2})$.

Na treść rozdziału czwartego składają się komputerowe algorytmy identyfikacji falkowej. Proponujemy tam, oparte na prostych aproksymacjach funkcji falkowych, obliczeniowe wersje algorytmów falkowych i pokazujemy, że (przy łatwych do spełnienia wymaganiach) są one asymptotycznie równoważne (pod względem warunków i szybkości zbieżności odpowiednich modeli empirycznych) algorytmom „teoretycznym”, opartym na oryginalnych funkcjach falkowych.

Wyniki teoretyczne ilustrujemy i uzupełniamy w rozdziale piątym rezultatami badań symulacyjnych. Pokazujemy w nim zachowanie modeli falkowych przy małej i umiarkowanej liczbie pomiarów, przy znanej i nieznannej funkcji gęstości wejścia systemu, dla gładkich i niegładkich charakterystyk, przy skorelowanych zakłóceniach oraz różnych typach systemów. Porównujemy także własności falkowych algorytmów z algorytmami wykorzystującymi szereg trygonometryczny.

W ostatnim rozdziale podsumowujemy uzyskane wyniki oraz przedstawiamy, naszym zdaniem ważne, poznawczo i praktycznie, zagadnienia otwarte, wymagające dalszych badań.

Rozdział 1

Falkowa analiza wielorozdzielcza

W rozdziale przedstawiamy elementy teorii falek wybrane pod kątem ich zastosowania w falkowych algorytmach identyfikacji.

W teorii falek podstawową rolę odgrywa para *funkcji falkowych*: $\varphi(x)$, nazywana *falką-ojcem* (ang. *father wavelet*) lub *funkcją skalującą* (ang. *scaling function*) oraz $\psi(x)$, zwana *falką-matką* (ang. *mother wavelet*) ([27], [93], [98], [118] i [152]).

Przesunięcia (translacje) funkcji skalującej $\varphi(x)$, tj. $\varphi_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(x-n)$, $n \in \mathbf{Z}$, generują bazę ortonormalną przestrzeni V_0 będącej podprzestrzenią przestrzeni $L^2(\mathbf{R})$ funkcji całkowalnych z kwadratem

$$V_0 = \text{span} \{ \varphi(x-n), n \in \mathbf{Z} \} \subset L^2(\mathbf{R})$$

Translacje jej skalowanych wersji

$$\varphi_{mn}(x) \stackrel{\text{def}}{=} 2^{\frac{m}{2}} \varphi(2^m x - n) \quad (1.1)$$

stanowią natomiast bazy ortonormalne podprzestrzeni $V_m \subset L^2(\mathbf{R})$

$$V_m = \text{span} \{ \varphi_{mn}(x), n \in \mathbf{Z} \}, m \in \mathbf{Z}$$

formujących *analizę wielorozdzielczą* (ang. *multiresolution analysis*) przestrzeni $L^2(\mathbf{R})$, tj. łańcuch zagnieżdżonych podprzestrzeni

$$\cdots V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_{m-1} \subset V_m \subset V_{m+1} \cdots \subset L^2(\mathbf{R}) \quad (1.2)$$

o następujących własnościach

$$\bigcap_{m \in \mathbf{Z}} V_m = \{0\} \quad \text{oraz} \quad \overline{\bigcup_{m \in \mathbf{Z}} V_m} = L^2(\mathbf{R}) \quad (1.3)$$

Z (1.2) i (1.3) wynika zatem, że dowolna funkcja całkowalna z kwadratem jest, w kolejnych podprzestrzeniach V_m (tj. ze wzrostem skali m), aproksymowana z rosnącą dokładnością (rozdzielczością).

Falkami nazywamy skalowane przesunięcia pojedynczej falki-matki $\psi(x)$

$$\psi_{ml}(x) \stackrel{\text{def}}{=} 2^{\frac{m}{2}} \psi(2^m x - l), \quad l, m \in \mathbf{Z} \quad (1.4)$$

Podstawową cechą falek jest następująca własność

$$\int_{\mathbf{R}} \psi_{ml}(x) dx = 0 \quad (1.5)$$

Falki tworzą bazy ortonormalne wzajemnie ortogonalnych podprzestrzeni $W_m \subset L^2(\mathbf{R})$

$$W_m = \text{span} \{ \psi_{ml}(x), l \in \mathbf{Z} \}, m \in \mathbf{Z}$$

stanowiących podstawę falkowej dekompozycji przestrzeni $L^2(\mathbf{R})$

$$L^2(\mathbf{R}) = \bigoplus_{m=-\infty}^{\infty} W_m \quad (1.6)$$

Podprzestrzenie W_m są ortogonalnymi dopełnieniami podprzestrzeni V_m w łańcuchu (1.2) i zawierają elementy V_{m+1} leżące poza V_m

$$V_m \oplus W_m = V_{m+1} \quad (1.7)$$

Powyższy związek jest podstawą równoważnej z (1.6) dekompozycji $L^2(\mathbf{R})$ złożonej z podprzestrzeni typu V i W

$$L^2(\mathbf{R}) = V_M \bigoplus_{m=M}^{\infty} W_m, \quad M \in \mathbf{Z} \quad (1.8)$$

W oparciu o tę dekompozycję, dowolną podprzestrzeń V_K , $K \in \mathbf{Z}$, można przedstawić za pomocą następującej sumy jej podprzestrzeni

$$V_K = V_M \bigoplus_{m=M}^{K-1} W_m, \quad K \geq M \quad (1.9)$$

1.1 Rodzina funkcji falkowych Daubechies

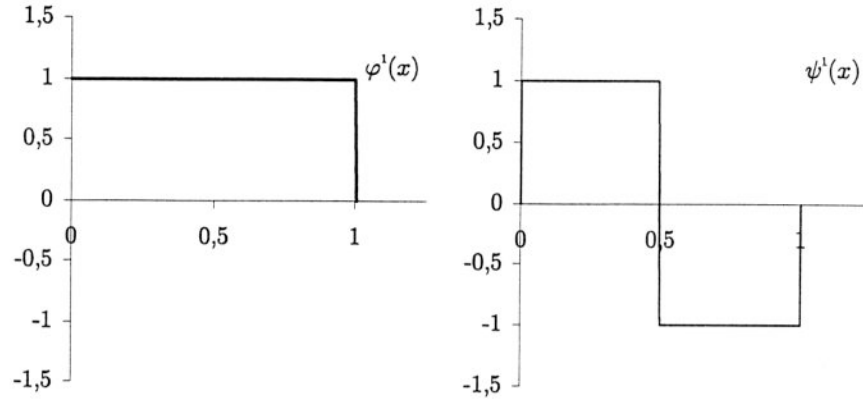
Funkcje falkowe Daubechies $\varphi^p(x)$ i $\psi^p(x)$ stanowią rodzinę funkcji falkowych o zwartym nośniku. Ich własności zależą od liczby naturalnej p zwanej indeksem (numerem) falkowym.

Uwaga 1.1 Najprostszym (i chronologicznie pierwszym, zob. [60]) ich przykładem są funkcje o indeksie $p = 1$, zwane funkcjami Haara. Funkcja skalująca $\varphi^1(x)$ i falka-matka Haara $\psi^1(x)$ dane są (jako jedyne w rodzinie funkcji Daubechies) prostymi wzorami (por. Rys. 1.1)

$$\varphi^1(x) = I_{[0,1)}(x) \quad \text{oraz} \quad \psi^1(x) = I_{[0, \frac{1}{2})}(x) - I_{[\frac{1}{2}, 1)}(x) \quad (1.10)$$

gdzie $I_S(x)$ jest funkcją wskaźnikową zbioru S

$$I_S(x) = \begin{cases} 1 & x \in S \\ 0 & x \notin S \end{cases}$$

Rys. 1.1 Funkcja skalująca $\varphi^1(x)$ i falka Haara $\psi^1(x)$

Własności funkcji falkowych Daubechies. Przedstawimy teraz własności funkcji falkowych wykorzystane w dalszej części pracy podczas konstruowania i analizy proponowanych algorytmów identyfikacji i modeli falkowych:

- *Zwarty nośnik.* Funkcje falkowe Daubechies mają zwarte nośniki o długości $2p - 1$

$$\text{supp } \varphi^p(x) = [0, 2p - 1) \quad \text{oraz} \quad \text{supp } \psi^p(x) = [1 - p, p)$$

a ich skalowane translacje nośniki o długościach $\frac{2p-1}{2^m}$ (por. (1.1) i (1.4))

$$\text{supp } \varphi_{mn}^p(x) = \left[\frac{n}{2^m}, \frac{n + (2p - 1)}{2^m} \right) \quad \text{oraz} \quad \text{supp } \psi_{ml}^p(x) = \left[\frac{l + (1 - p)}{2^m}, \frac{l + p}{2^m} \right) \quad (1.11)$$

- *Znikające momenty.* Falki Daubechies $\psi^p(x)$ posiadają p znikających momentów

$$\int_{\mathbb{R}} x^k \cdot \psi^p(x) dx = \int_{1-p}^p x^k \cdot \psi^p(x) dx = 0, \quad k = 0, \dots, p - 1 \quad (1.12)$$

- *Brak jawnych wzorów.* Oprócz przypadku, gdy $p = 1$, funkcje falkowe Daubechies nie mają jawnej postaci ale stanowią granice procedur rekurencyjnych (zob. np. [26]–[27]). W pracy [130, str. 616] podano przykładowy sposób konstrukcji tych funkcji

$$\varphi_{(r)}^p(x) = \sqrt{2} \sum_{t=0}^{2p-1} c_t \varphi_{(r-1)}^p(2x - t) \quad \text{oraz} \quad \psi_{(r)}^p(x) = \sqrt{2} \sum_{t=-2(p-1)}^1 (-1)^t c_{1-t} \varphi_{(r-1)}^p(2x - t) \quad (1.13)$$

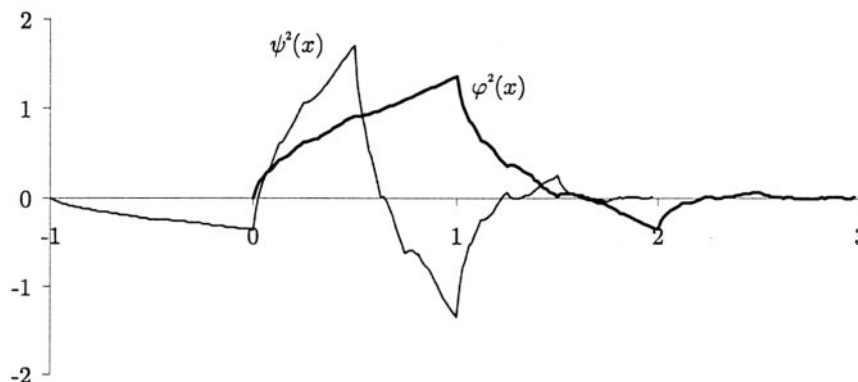
gdzie

$$\varphi_{(0)}^p = I_{[0,1)}(x)$$

We wzorach (1.13), $\{c_t\}_{t=0}^{2p-1}$ jest zbiorem współczynników Daubechies, specyficznym dla każdej rodziny funkcji $\varphi^p(x)$ i $\psi^p(x)$ (zob. np. [27]).

W Dodatku C.5, str. 137, przedstawiliśmy jedną z metod wyznaczania tych współczynników, a w znajdujących się tam tabelach C.1–C.2, zestawiliśmy ich wartości dla numerów falkowych $p = 2, \dots, 6$.

Uwaga 1.2 Przedstawiona w (1.13) metoda konstrukcji funkcji falkowych Daubechies nie pozwala (dla skończonych r) wyznaczyć wartości funkcji falkowych $\varphi^p(x)$ i $\psi^p(x)$. Istniejące (osobne) procedury służące do ich wyznaczania działają poprawnie jedynie w punktach leżących na siatce binarnej (tj. w punktach o postaci $n/2^q$, gdzie $n, q \in \mathbf{Z}, q < \infty$) (przykład takiej procedury, pochodzącej z pracy [131], przedstawiamy w Dodatku A.3, str. 115)



Rys. 1.2 Funkcja skalująca Daubechies $\varphi^2(x)$ oraz odpowiadająca jej falka $\psi^2(x)$

Skalowane i przesuwane funkcje falkowe Daubechies $\varphi^p(x)$ i $\psi^p(x)$ (por. (1.1) i (1.4))

$$\varphi_{mn}^p(x) = 2^{\frac{m}{2}} \varphi^p(2^m x - n) \quad \text{oraz} \quad \psi_{ml}^p(x) = 2^{\frac{m}{2}} \psi^p(2^m x - l) \quad (1.14)$$

generują, dla każdego p , własne przestrzenie V_m^p i W_m^p , a zatem też, odmienne dla każdej z rodzin, analizy wielorozdzielcze (por. (1.2))

$$\dots V_{-1}^p \subset V_0^p \subset V_1^p \subset \dots \subset V_{m-1}^p \subset V_m^p \subset V_{m+1}^p \dots \subset L^2(\mathbf{R}) \quad (1.15)$$

i, odpowiadające im, falkowe dekompozycje przestrzeni $L^2(\mathbf{R})$ (por. (1.8))

$$L^2(\mathbf{R}) = V_M^p \bigoplus_{m=M}^{\infty} W_m^p \quad (1.16)$$

1.2 Aproksymacja falkowa

Niech $F(x)$ będzie dowolną funkcją całkowalną z kwadratem, $F(x) \in L^2(\mathbf{R})$. Jej rozwinięcie w szereg falkowy, odpowiadający dekompozycji (1.16) ma postać

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{Mn}^p \varphi_{Mn}^p(x) + \sum_{m=M}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \beta_{ml}^p \psi_{ml}^p(x) \quad (1.17)$$

gdzie α_{Mn}^p i β_{ml}^p są współczynnikami Fouriera tej funkcji, zwanymi również jej *współczynnikami falkowymi* (ang. *wavelet coefficients*), o postaciach (por. (1.11))

$$\alpha_{Mn}^p = \int_{\frac{n}{2^M}}^{\frac{n+(2^p-1)}{2^M}} F(x) \varphi_{Mn}^p(x) dx \quad \text{oraz} \quad \beta_{ml}^p = \int_{\frac{l+(1-p)}{2^m}}^{\frac{l+p}{2^m}} F(x) \psi_{ml}^p(x) dx \quad (1.18)$$

Rzut ortogonalny (najlepsza aproksymacja) funkcji $F(x)$ w wybranej przestrzeni V_K^p , $K \in \mathbb{Z}$, $K \geq M$, jest dany następująco (por. (1.9))

$$F(x; K, p) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{Mn}^p \varphi_{Mn}^p(x) + \sum_{m=M}^{K-1} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \beta_{ml}^p \psi_{ml}^p(x) \quad (1.19)$$

Pierwszy składnik $F(x; K, p)$ można traktować jako wstępne (zgrubne) przybliżenie funkcji $F(x)$, uzupełnione (w drugim ze składników) o szczegóły funkcji $F(x)$ zawarte w przestrzeniach W_m^p , $m = M, \dots, K-1$. Na mocy twierdzenia Parsewala, błąd tej aproksymacji, w metryce przestrzeni $L^2(\mathbb{R})$ wynosi

$$\begin{aligned} \text{ISE } F(x; K, p) &= \|F(x) - F(x; K, p)\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} [F(x) - F(x; K, p)]^2 dx = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\alpha_{Mn}^p)^2 + \sum_{m=M}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} (\beta_{ml}^p)^2 + \\ &\quad - \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} (\alpha_{Mn}^p)^2 + \sum_{m=M}^{K-1} \sum_{l=-\infty}^{\infty} (\beta_{ml}^p)^2 \right) = \\ &= \sum_{m=K}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} (\beta_{ml}^p)^2 \end{aligned} \quad (1.20)$$

jest więc równy sumie kwadratów współczynników falkowych β_{ml}^p funkcji $F(x)$, niewykorzystanych w aproksymacji $F(x; K, p)$.

Asymptotycznie (dla K dążących do nieskończoności) otrzymujemy, dla dowolnego indeksu falkowego p , dokładną (w sensie błędu (1.20)) reprezentację funkcji $F(x)$, a zatem:

$$\text{ISE } F(x; K, p) \rightarrow 0, \quad \text{gdy } K \rightarrow \infty \quad (1.21)$$

Przestrzenie V_m^p noszą nazwę *przestrzeni aproksymacji* (ang. *approximation spaces* lub *resolution spaces*), natomiast W_m^p często nazywane są *przestrzeniami detali* (szczegółów) (ang. *detail spaces*).

Aproksymacja falkowa w skończonym przedziale. Załóżmy teraz, że funkcja $F(x)$ znika poza pewnym skończonym przedziałem $S = [a, b]$, (zob. przykład na Rys. 1.3).

Zauważmy, że współczynniki falkowe α_{Mn}^p i β_{ml}^p odpowiadające funkcjom falkowym $\varphi_{Mn}^p(x)$ i $\psi_{ml}^p(x)$ których nośniki leżą poza przedziałem S są równe zero, dzięki czemu szereg falkowy funkcji $F(x)$ redukuje się do postaci (por. (1.17))

$$F(x) = \sum_{n=n_{\min}(M,p)}^{n_{\max}(M,p)} \alpha_{Mn}^p \varphi_{Mn}^p(x) + \sum_{m=M}^{\infty} \sum_{l=l_{\min}(m,p)}^{l_{\max}(m,p)} \beta_{ml}^p \psi_{ml}^p(x) \quad (1.22)$$

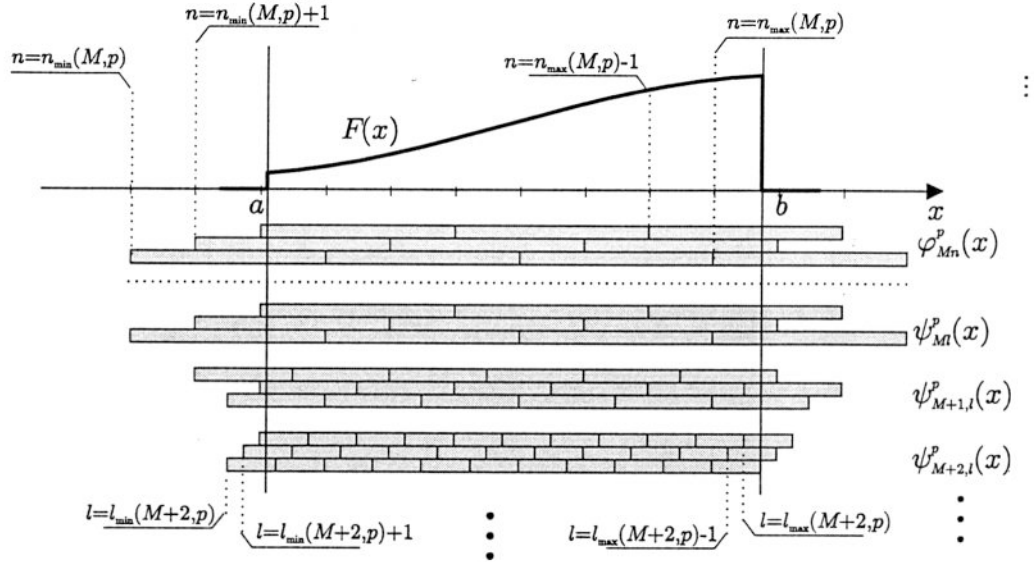
zawierającej w każdej skali m skończoną liczbę wyrazów. Granice sumowań $n_{\min}(M, p)$, $n_{\max}(M, p)$, $l_{\min}(m, p)$, $l_{\max}(m, p)$ wyznaczone są z następujących warunków

$$\begin{aligned} \frac{n + (2p - 1)}{2^M} &> a & \text{oraz} & \quad \frac{l + p}{2^m} > a \\ \frac{n}{2^M} &< b & & \quad \frac{l + (1 - p)}{2^m} < b \end{aligned} \quad (1.23)$$

i wynoszą

$$\begin{aligned} n_{\min}(M, p) &= \lfloor 2^M a \rfloor - 2p + 2 & l_{\min}(m, p) &= \lfloor 2^m a \rfloor - p + 1 \\ n_{\max}(M, p) &= \lceil 2^M b \rceil - 1 & l_{\max}(m, p) &= \lceil 2^m b \rceil + p - 2 \end{aligned} \quad \text{oraz} \quad (1.24)$$

gdzie $\lfloor x \rfloor$ ($\lceil x \rceil$) oznacza największą (najmniejszą) liczbę całkowitą nie większą (nie mniejszą) niż x (zob. [42, str. 87] i Dodatek A.1, str. 114).



Rys. 1.3 W rozwinięciu falkowym funkcji $F(x)$ znikającej poza przedziałem $S = [a, b]$ występują jedynie funkcje falkowe $\varphi_{Mn}^p(x)$ i $\psi_{ml}^p(x)$, $m \geq M$, których nośniki (przedstawione w postaci szarych prostokątów) przecinają się z tym przedziałem. Rysunek odpowiada sytuacji, gdy numer falkowy $p = 2$ (zauważmy, że nośniki poszczególnych funkcji falkowych w tej samej skali nachodzą na siebie)

W konsekwencji, aproksymacje funkcji $F(x)$ w przestrzeniach V_K^p , $K \geq M$, przyjmują postać (por. (1.19))

$$F(x, K, p) = \sum_{n=n_{\min}(M, p)}^{n_{\max}(M, p)} \alpha_{Mn}^p \varphi_{Mn}^p(x) + \sum_{m=M}^{K-1} \sum_{l=l_{\min}(m, p)}^{l_{\max}(m, p)} \beta_{ml}^p \psi_{ml}^p(x) \quad (1.25)$$

i zawierają, dla dowolnych skończonych skal M i K , skończoną liczbę współczynników α_{Mn}^p i β_{ml}^p . Aproksymacje (1.25) stanowią podstawę do skonstruowania *falkowych modeli teoretycznych* w prezentowanych w pracy falkowych algorytmach identyfikacji.

1.3 Szybka transformata falkowa FWT

Pomiędzy funkcjami skalującymi a falkami Daubechies o tym samym numerze falkowym p zachodzą następujące relacje (por. (1.13))

$$\varphi^p(x) = \sqrt{2} \sum_{t=0}^{2p-1} c_t \varphi^p(2x - t) \quad \text{oraz} \quad \psi^p(x) = \sqrt{2} \sum_{t=-2(p-1)}^1 (-1)^t c_{1-t} \varphi^p(2x - t) \quad (1.26)$$

które stanowią podstawę, zaproponowanego w pracy [92], algorytmu tzw. szybkiej transformaty falkowej (ang. *fast wavelet transform (FWT)*) służącego do wyznaczania współczynników falkowych α_{mn}^p i β_{ml}^p . Algorytm ten oblicza współczynniki falkowe w skali m na podstawie współczynników z wyższej skali $m + 1$ za pomocą wzorów

$$\alpha_{mn}^p = \sum_{t=0}^{2p-1} c_t \alpha_{m+1,2n+t}^p \quad \text{oraz} \quad \beta_{ml}^p = \sum_{t=-2(p-1)}^1 (-1)^t c_{1-t} \alpha_{m+1,2l+t}^p \quad (1.27)$$

Zwróćmy uwagę na następujące własności tego algorytmu, w odniesieniu do zadania wyznaczania współczynników falkowych w aproksymacjach (1.25):

- Algorytm nie definiuje sposobu wyznaczania współczynników początkowych α_{Kn}^p (zob. np. dyskusję na ten temat w pracy [28]).
- Jego złożoność obliczeniowa jest funkcją liniową względem liczby współczynników α_{Kn}^p , (por. np. [92], [131]).

Rozdział 2

Nieliniowe systemy o strukturze blokowej

Proponowane i badane w pracy algorytmy służą do identyfikacji nieliniowej charakterystyki elementu statycznego, będącego częścią złożonego systemu o strukturze blokowej. Systemy z rozważanej klasy zawierają zarówno statyczne elementy nieliniowe jak i liniowe elementy dynamiczne.

W literaturze można znaleźć szereg prac poświęconych identyfikacji tego typu systemów. W odniesieniu do zagadnienia identyfikacji charakterystyk nieliniowych, w wielu pracach na ten temat (np. [6], [8]-[11], [18], [62]-[63], [87]-[90], [103], [117], [127]) autorzy rozważają systemy, w których identyfikowana charakterystyka należy do znanej klasy funkcji o skończonej liczbie parametrów. Z tego punktu widzenia, znacznie szerszą klasę systemów, badano w pracach ([44]-[57], [70], [86], [107]-[108], [124]), w których o charakterystyce zakładano jedynie, że jest ograniczona lub całkowalna z kwadratem.

2.1 Zastosowania praktyczne

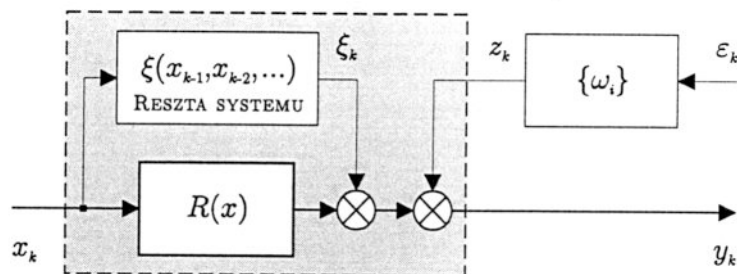
Jak wspomniano we wprowadzeniu, inspirację dla rozwoju badań nad identyfikacją systemów o strukturze blokowej stanowi stale rosnący obszar dziedzin, w jakich pojawiają się ich zastosowania. Oprócz zastosowań w sterowaniu (zob. np. [125] i [155]), szereg aplikacji pojawiło się także w medycynie [96], biocybernetyce [59], [75] i chemii [36]. Kolejnymi przykładami mogą być: praca [143], w której przedstawiono zastosowania systemów o strukturze blokowej do opisu pojedynczych komórek nerwowych (neuronów) oraz ich części (m. in. synaps, zob. Rys. 2.5), jak również komórek receptorowych zmysłu słuchu; czy też prace [78], [83], [105], w których systemy Hammersteina są wykorzystywane w dynamicznych sztucznych sieciach neuronowych. Omawiane systemy stanowią również podstawę modeli urządzeń stosowanych w przemyśle spożywczym (np. kolumn rektyfikacyjnych, zob. np. [19]). Należy także odnotować ich zastosowania w przetwarzaniu sygnałów [54], [55] i [101].

2.2 System zastępczy. Warunki identyfikacji

Klasę rozważanych w pracy nieliniowych systemów dynamicznych o strukturze blokowej (Rys. 2.1) można opisać za pomocą ogólnego równania zastępczego (por. [108])

$$y_k = R(x_k) + \xi(x_{k-1}, x_{k-2}, \dots) + z_k \quad (2.1)$$

W równaniu tym wyodrębniamy identyfikowaną nieliniowość $R(x)$, natomiast pozostałą część systemu traktujemy jako źródło zakłóceń $\{\xi_k = \xi(x_{k-1}, x_{k-2}, \dots)\}$ (por. np. [48]), oddziałujące wraz z zakłóceniami pomiarowymi $\{z_k\}$ na jej wyjście. Szczegółowa postać zakłóceń $\{\xi_k\}$ zależy od struktury identyfikowanego systemu, w ogólności jednakże, przy losowym pobudzeniu, stanowią one ciąg skorelowanych zmiennych losowych.



Rys. 2.1 Schemat zastępczy klasy nieliniowych systemów dynamicznych o strukturze blokowej

Algorytmy proponowane w niniejszej pracy identyfikują nieliniowość $R(x)$ na podstawie dostępnego zbioru pomiarów wejścia-wyjścia systemu $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^N$. Pokażemy, że z tego powodu identyfikowana nieliniowość $R(x)$ z Rys. 2.1 (wzór (2.1)) jest, w ogólności, przesuniętą i przeskalowaną wersją oryginalnych charakterystyk elementów nieliniowych w tych systemach.

O systemie i warunkach identyfikacji przyjmujemy w pracy następujące założenia:

- Z1.** Wejście systemu jest pobudzone ciągiem niezależnych zmiennych losowych $\{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ o jednakowym rozkładzie. Funkcja gęstości prawdopodobieństwa wejścia $f(x)$ istnieje oraz jest dodatnia i ograniczona dla wszystkich x należących do pewnego przedziału $S = [a, b]$ i równa 0 poza nim:

$$0 < \delta \leq f(x) \leq M_f < \infty, \quad x \in S \quad (2.2)$$

dla pewnych, nieznanach $\delta, M_f > 0$.

- Z2.** Nieliniowość $R(x)$ jest ograniczona dla x z przedziału $S = [a, b]$

$$|R(x)| \leq M_R < \infty, \quad x \in S \quad (2.3)$$

- Z3.** Sygnał $\{\xi_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$, pochodzący od systemu, można przedstawić za pomocą ogólnej formuły

$$\xi_k = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \zeta(x_{k-i}) \quad (2.4)$$

gdzie $\zeta(x)$ jest *nieliniowością pasożytniczą*, będącą (nieznaną) funkcją, ograniczoną dla każdego $x \in S = [a, b]$

$$|\zeta(x)| \leq M_\zeta < \infty, \quad x \in S$$

i dla której zachodzi $E\zeta(x_1) = 0$. Ciąg $\{\lambda_i\}$ jest (również nieznaną) odpowiedzią impulsową liniowego układu dynamicznego, o którym zakładamy, że jest asymptotycznie stabilny, $\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i| < \infty$. Odpowiednie przykłady podane są w punkcie 2.3.

- Z4.** Zakłócenie pomiarowe $\{z_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ stanowi wyjście nieznanego elementu (podsystemu) dynamicznego, o odpowiedzi impulsowej $\{\omega_i\}_{i=0}^{\infty}$, asymptotycznie stabilnego, $\sum_{i=0}^{\infty} |\omega_i| < \infty$ i pobudzanego białym szumem $\{\varepsilon_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ o zerowej wartości oczekiwanej, $E\varepsilon_1 = 0$, i skończonej wariancji, $\text{var } \varepsilon_1 < \infty$

$$z_k = \sum_{i=0}^{\infty} \omega_i \varepsilon_{k-i}$$

- Z5.** Procesy $\{x_k\}$ i $\{\varepsilon_k\}$, a zatem też $\{x_k\}$ i $\{z_k\}$, są wzajemnie niezależne.
- Z6.** Sygnały interakcyjne łączące poszczególne elementy systemu, podobnie jak zakłócenia $\{\xi_k\}$ i $\{z_k\}$, są niedostępne dla pomiaru.

Przy tak sformułowanych założeniach ogólne równanie zastępcze (2.1) przyjmuje postać

$$y_k = R(x_k) + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \zeta(x_{k-i}) + \sum_{i=0}^{\infty} \omega_i \varepsilon_{k-i} \quad (2.5)$$

Zwróćmy uwagę, że przedstawione powyżej założenia stawiają niewielkie wymagania co do zakresu wstępnej wiedzy o charakterystykach poszczególnych elementów systemu. Założenie **Z2** obejmuje praktycznie dowolną charakterystykę, jaką można spotkać w zastosowaniach, a wraz z założeniami **Z1** i **Z4**, dotyczy sytuacji, w których identyfikacja ma miejsce:

- podczas normalnej pracy systemu w stanie ustalonym (w trakcie tzw. *eksperymentu biernego*),
- w warunkach losowych, tj. przy losowym pobudzeniu wejść systemu i losowym charakterze (niemierzalnych) zakłóceń pomiarowych działających na jego wyjście,
- przy pomocy urządzeń o ograniczonym zakresie pomiarowym (np. woltomierze, światłomierze, termometry).

Podobnie ogólny charakter ma założenie **Z3**, które dotyczy dynamicznej części identyfikowanego systemu i nakłada tylko wymaganie, aby była ona asymptotycznie stabilna.

Uwaga 2.3 Przy założeniach **Z1-Z5**, x_k , ξ_k , z_k i, w konsekwencji także y_k , są stacjonarnymi (w szerszym sensie) procesami losowymi drugiego rzędu, tj. dla każdego z nich istnieje stała wartość średnia, ograniczona wariancja oraz funkcja autokowariancji zależna tylko od odległości w czasie pomiędzy poszczególnymi realizacjami każdego z procesów (zob. np. [153, str. 64] i por. [108, str. 948]).

2.3 Przykłady systemów o strukturze blokowej

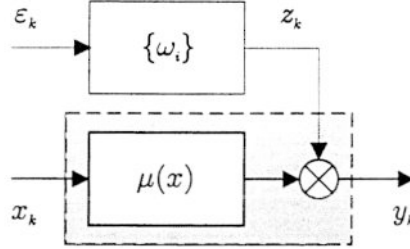
Przedstawimy teraz przykładowe systemy o strukturze blokowej i dla każdego z nich wyznaczmy postać równania zastępczego (2.5) oraz warunki potrzebne do spełnienia założeń **Z2-Z3**. W sposób szczególny zbadamy związki pomiędzy nieliniowością $R(x)$ a charakterystykami nieliniowymi elementów statycznych tych systemów.

2.3.1 System statyczny

Jest to najprostszy z systemów (Rys. 2.2) należących do rozważanej klasy, w którym $\xi_k \equiv 0$. Dla tego systemu równanie zastępcze (2.5) redukuje się do postaci

$$y_k = \mu(x_k) + \sum_{i=0}^{\infty} \omega_i \varepsilon_{k-i} \quad (2.6)$$

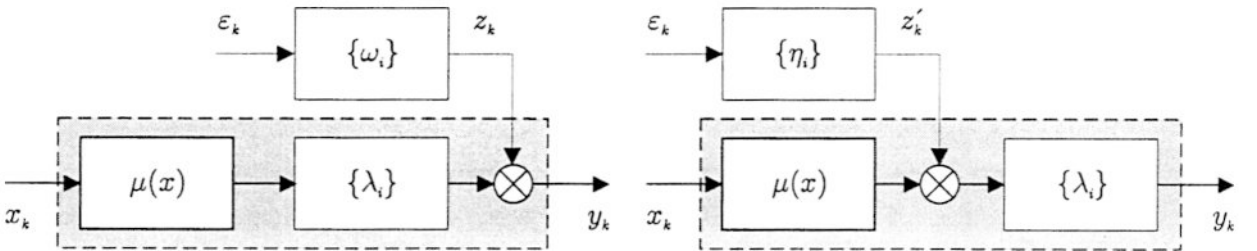
i nieliniowość $R(x)$ w systemie zastępczym jest równa charakterystyce $\mu(x)$.



Rys. 2.2 System statyczny

2.3.2 System Hammersteina

W przedstawionych systemach Hammersteina (Rys. 2.3) nieliniowy element statyczny o charakterystyce $\mu(x)$ łączy się w kaskadę z liniowym elementem dynamicznym o odpowiedzi impulsowej $\{\lambda_i\}_{i=0}^{\infty}$.



Rys. 2.3 System Hammersteina: a) z zakłóceniami na wyjściu systemu, b) z zakłóceniami na wyjściu elementu nieliniowego

System z Rys. 2.3a można opisać za pomocą poniższego równania (por. (2.6))

$$y_k = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i \mu(x_{k-i}) + \sum_{i=0}^{\infty} \omega_i \varepsilon_{k-i}$$

z którego, po przekształceniu do postaci

$$y_k = \lambda_0 \mu(x_k) + E \mu(x_1) \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i [\mu(x_{k-i}) - E \mu(x_1)] + \sum_{i=0}^{\infty} \omega_i \varepsilon_{k-i} \quad (2.7)$$

otrzymujemy w równaniu zastępczym (2.5), że

$$R(x) = \lambda_0 \mu(x) + s \quad \text{oraz} \quad \zeta(x) = \mu(x) - E \mu(x_1), \quad \text{gdzie } s = E \mu(x_1) \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \quad (2.8)$$

Aby system spełniał założenia **Z2-Z3** potrzeba zatem, aby $|\mu(x)| < \infty$, dla $x \in S, |\lambda_0| < \infty$ oraz $\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i| < \infty$.

W wersji systemu z Rys. 2.3b na wyjście elementu nieliniowego $\mu(x)$ działają skorelowane zakłócenia zewnętrzne $z'_k = \sum_{i=0}^{\infty} \eta_i \varepsilon_{k-i}$. Otrzymujemy teraz, że

$$y_k = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i \mu(x_{k-i}) + \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i z'_{k-i}$$

skąd, po przekształceniach, mamy (por. (2.7))

$$y_k = \lambda_0 \mu(x_k) + E \mu(x_1) \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i [\mu(x_{k-i}) - E \mu(x_1)] + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_i \eta_j \varepsilon_{k-(i+j)}$$

a zatem, podobnie jak poprzednio (por. (2.8)), dostajemy, że

$$R(x) = \lambda_0 \mu(x) + s \quad \text{oraz} \quad \zeta(x) = \mu(x) - E \mu(x_1), \quad \text{gdzie } s = E \mu(x_1) \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \quad (2.9)$$

Zakłócenia zewnętrzne z_k przyjmują natomiast postać (por. założenie **Z4**)

$$z_k = \sum_{i=0}^{\infty} \omega_i \varepsilon_{k-i}, \quad \text{gdzie} \quad \omega_i = \sum_{j=0}^i \lambda_j \eta_{i-j}$$

W stosunku do wymagań stawianych systemowi Hammersteina z Rys. 2.3a, zakładamy dodatkowo, że element dynamiczny z odpowiedzią $\{\eta_i\}$ jest asymptotycznie stabilny, tj., że $\sum_{i=0}^{\infty} |\eta_i| < \infty$.

Uwaga 2.4 Ze wzorów (2.8) oraz (2.9) wynika, że dla systemów Hammersteina nieliniowość $R(x)$ w równaniu zastępczym (2.5) nie jest równa charakterystyce elementu statycznego $\mu(x)$, ale stanowi jej skalowaną i przesuniętą wersję

$$R(x) = \lambda_0 \mu(x) + s \quad (2.10)$$

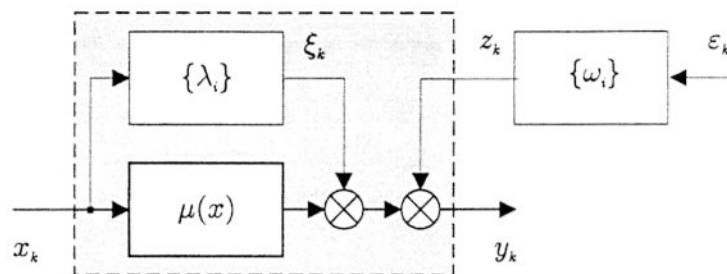
gdzie parametr λ_0 i przesunięcie s są stałymi zależnymi od systemu. Taka relacja pomiędzy prawdziwą charakterystyką $\mu(x)$ a identyfikowaną nieliniowością $R(x)$ jest konsekwencją złożonej struktury systemu i przyjętych w założeniu **Z6** ograniczeń pomiarowych. Tożsamość $R(x) \equiv \mu(x)$ zachodzi tylko w szczególnych wypadkach, gdy $\lambda_0 = 1$ oraz np. gdy charakterystyka $\mu(x)$ i funkcja gęstości wejścia $f(x)$ są, odpowiednio, nieparzyste i symetryczne względem środka przedziału S (wówczas $E \mu(x_1) = 0$, a stąd $s = 0$).

2.3.3 System równoległy

W poniższym przykładzie, system stanowi połączenie równoległe nieliniowego elementu statycznego z dynamicznym podsystemem liniowym (Rys. 2.4)

Jego równanie ma postać (por. (2.6) i (2.7))

$$y_k = \mu(x_k) + \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i x_{k-i} + \sum_{i=0}^{\infty} \omega_i \varepsilon_{k-i} \quad (2.11)$$



Rys. 2.4 Przykład systemu o strukturze równoległej

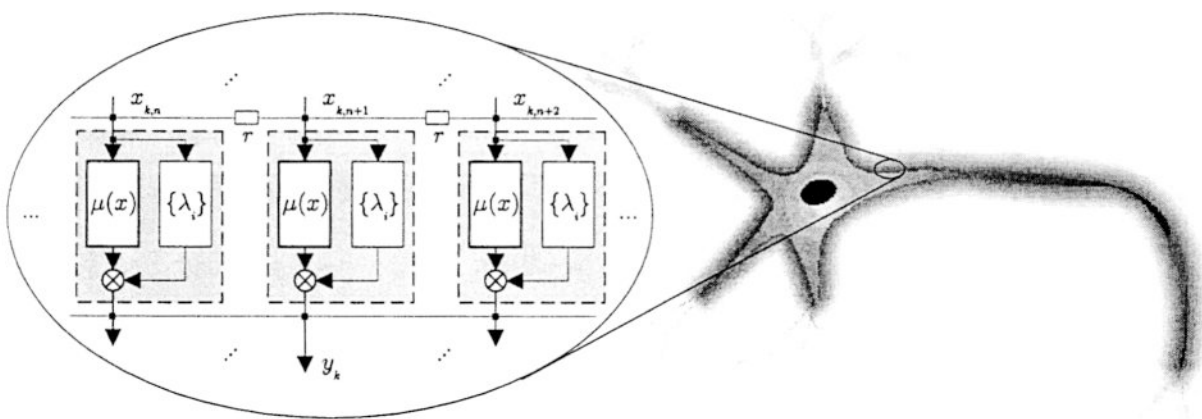
Zakładając teraz, że $\lambda_0 = 0$ (tj. że podsystem dynamiczny wnosi opóźnienie) otrzymujemy, że

$$\begin{aligned} y_k &= \mu(x_k) + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_{k-i} + \sum_{i=0}^{\infty} \omega_i \varepsilon_{k-i} = \\ &= \mu(x_k) + E x_1 \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (x_{k-i} - E x_1) + \sum_{i=0}^{\infty} \omega_i \varepsilon_{k-i} \end{aligned}$$

W rezultacie, w równaniu (2.5) nieliniowości $R(x)$ i $\zeta(x)$ są dane następująco (por. (2.8))

$$R(x) = \mu(x) + s \quad \text{oraz} \quad \zeta(x) = x - E(x_1), \quad \text{gdzie } s = E x_1 \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \quad (2.12)$$

Dla spełnienia założeń **Z2-Z3** należy przyjąć, że $|\mu(x)| < \infty$ dla $x \in S$ oraz $\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i| < \infty$. Natomiast warunek $|\zeta(x)| < \infty$ jest spełniony na mocy założenia **Z1** (tj. zerowania się funkcji gęstości wejścia $f(x)$ poza przedziałem S).



Rys. 2.5 Dynamiczne systemy nieliniowe o strukturze równoległej stosowane są przy modelowaniu powierzchni komórek nerwowych [143, str. 94]

Uwaga 2.5 Nieliniowość $R(x)$ jest równa charakterystyce $\mu(x)$ jedynie w szczególnych przypadkach, gdy $s = 0$ (np. jeśli $E x_1 = 0$ lub $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i = 0$). W przypadku gdy $\lambda_0 \neq 0$ (tj.

gdy w podsystemie dynamicznym nie występuje opóźnienie), zależność (2.11) komplikuje się i przybiera postać

$$y_k = \mu(x_k) + \lambda_0 x_k + E x_1 \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (x_{k-i} - E x_1) + \sum_{i=0}^{\infty} \omega_i \varepsilon_{k-i}$$

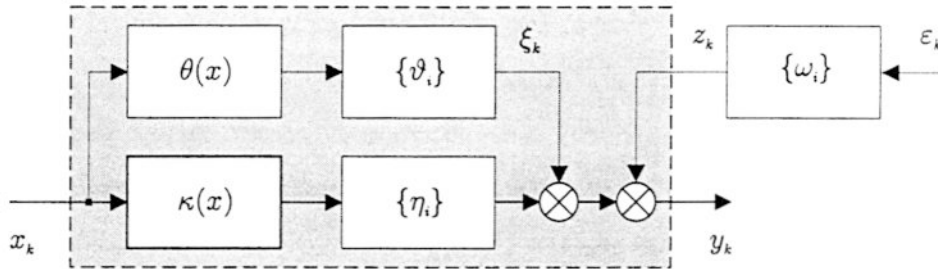
Wtedy, nawet jeśli $s = 0$, to nieliniowość $R(x)$ pozostaje zniekształcona w stosunku do charakterystyki $\mu(x)$ przez liniowy składnik $\lambda_0 x$

$$R(x) = \mu(x) + \lambda_0 x$$

W sytuacji, gdy $\lambda_0 = 1$, można w celu identyfikacji $\mu(x)$ skorzystać z faktu, że $\mu(x) = R(x) - x$.

2.3.4 System szeregowo-równoległy

Jest to system z Rys. 2.6, będący uogólnieniem systemów przedstawionych poprzednio.



Rys. 2.6 Przykład systemu szeregowo-równoległego z dwoma elementami nieliniowymi o charakterystykach $\kappa(x)$ i $\theta(x)$

Liniowe podsystemy dynamiczne w obu gałęziach mają odpowiedzi impulsowe, odpowiednio, $\{\eta_i\}$ i $\{\vartheta_i\}$ i zakładamy, że w gałęzi górnej występuje opóźnienie, tj. $\vartheta_0 = 0$. Wyjście takiego systemu można opisać następującym równaniem (por. (2.6), (2.7) i (2.11))

$$\begin{aligned} y_k = & \eta_0 \kappa(x_k) + E \kappa(x_1) \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i + E \theta(x_1) \sum_{i=1}^{\infty} \vartheta_i \\ & + \sum_{i=1}^{\infty} \{\eta_i [\kappa(x_{k-i}) - E \kappa(x_1)] + \vartheta_i [\theta(x_{k-i}) - E \theta(x_1)]\} + \sum_{i=0}^{\infty} \omega_i \varepsilon_{k-i} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Nieliniowość $R(x)$ w równaniu zastępczym (2.5) ma teraz postać (por. (2.8) i (2.12))

$$R(x) = \eta_0 \kappa(x) + s, \quad s = E \kappa(x_1) \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i + E \theta(x_1) \sum_{i=1}^{\infty} \vartheta_i \quad (2.14)$$

Jeśli zachodzi odwrotna sytuacja (opóźnienie istnieje w gałęzi dolnej, tj. $\eta_0 = 0$ oraz $\vartheta_0 \neq 0$), to wówczas

$$R(x) = \vartheta_0 \theta(x) + s$$

Gdy równocześnie $\eta_0 \neq 0$ oraz $\vartheta_0 \neq 0$, to nieliniowość $R(x)$ jest równa ważonej i przesuniętej sumie obu charakterystyk nieliniowych

$$R(x) = \eta_0 \kappa(x) + \vartheta_0 \theta(x) + s$$

Aby przedstawić zakłócenia $\{\xi_k\}$ w postaci jak w założeniu **Z3**, skorzystamy z następującej notacji wektorowej (zob. [108])

$$\begin{aligned} \lambda_i &= [\eta_i, \vartheta_i] \\ \zeta(x) &= [\kappa(x) - E\kappa(x_1), \theta(x) - E\theta(x_1)] \end{aligned}$$

dzięki której otrzymujemy, że

$$\xi_k = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \zeta^T(x_{k-i}) \quad (2.15)$$

Z (2.14) i (2.15) wynika, że założenia **Z2-Z3** są spełnione, gdy $|\kappa(x)|, |\theta(x)| < \infty$ dla $x \in S$ oraz $|\vartheta_0|, |\eta_0| < \infty$ i $\sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i|, \sum_{i=1}^{\infty} |\vartheta_i| < \infty$.

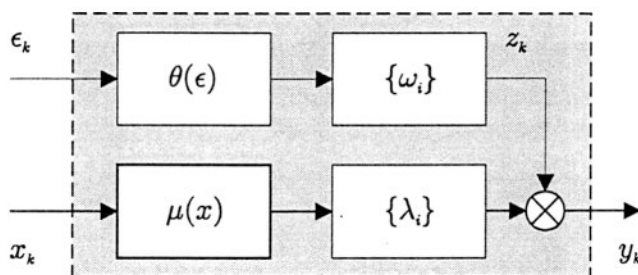
2.3.5 System o wielu wejściach (MISO)

Założenie **Z4** dotyczące zakłóceń zewnętrznych jest natury ogólnej. Nie formułuje się w nim ścisłych wymagań co do struktury korelacyjnej zewnętrznych zakłóceń (która może być dowolna), żądając jedynie aby zewnętrzny sygnał zakłócający z_k był (podobnie jak zakłócenie ξ_k) stacjonarnym procesem o zerowej wartości oczekiwanej i skończonej wariancji, opisanym jak w **Z4**. Warunki te są spełniane przez typowe rodzaje zakłóceń:

- Zakłócenia nieskorelowane (szum biały), dla których $z_k = \varepsilon_k$.
- Zakłócenia skorelowane (szum kolorowy), będące wyjściem asymptotycznie stabilnych elementów dynamicznych, pobudzanych przez stacjonarny biały szum ε_k .

O szumie $\{\varepsilon_k\}$ zakłada się jedynie, że $E\varepsilon_1 = 0$ oraz $\text{var } \varepsilon_1 < \infty$ (por. **Z4**).

Wobec dużej dowolności rozkładu z_k , równanie (2.5) może zatem posłużyć do opisu systemów o wielu stochastycznie niezależnych wejściach (systemów addytywnych względem swoich wejść – zob. np. [114, str. 170])



Rys. 2.7 System równoległy z dwoma niezależnymi wejściami

Przykład takiego systemu przedstawiony jest na Rys. 2.7. Przyjmując w nim, że wejścia ε_k i x_k są stacjonarne i od siebie stochastycznie niezależne, górną gałąź systemu można

uznać za źródło skorelowanego zakłócenia, działającego na wyjście systemu Hammersteina w dolnej gałęzi. Równanie całego systemu jest teraz następujące (por. np. (2.7))

$$y_k = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i \mu(x_{k-i}) + \sum_{i=0}^{\infty} \omega_i \theta(\epsilon_{k-i})$$

Przekształcając je do postaci równania zastępczego (2.5)

$$\begin{aligned} y_k = & \lambda_0 \mu(x_k) + E \mu(x_1) \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i + E \theta(\epsilon_1) \sum_{i=0}^{\infty} \omega_i \\ & + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i [\mu(x_{k-i}) - E \mu(x_1)] + \sum_{i=0}^{\infty} \omega_i [\theta(\epsilon_{k-i}) - E \theta(\epsilon_1)] \end{aligned}$$

otrzymujemy, że

$$\begin{aligned} R(x) &= \lambda_0 \mu(x) + s, \quad s = E \mu(x_1) \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i + E \theta(\epsilon_1) \sum_{i=0}^{\infty} \omega_i \\ \zeta(x) &= \mu(x) - E \mu(x_1), \quad \epsilon_k = \theta(\epsilon_k) - E \theta(\epsilon_1) \end{aligned}$$

Przyjmujemy tu, że $|\mu(x)| < \infty$ dla $x \in S$, $\text{var } \theta(\epsilon_1) < \infty$, oraz że oba elementy dynamiczne są asymptotycznie stabilne, $|\lambda_0| < \infty$, $\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i| < \infty$ i $\sum_{i=0}^{\infty} |\omega_i| < \infty$.

Podsumowanie

Przedstawiona w rozdziale klasa systemów nieliniowych obejmuje systemy o strukturze blokowej, w której można wyodrębnić element statyczny o charakterystyce nieliniowej, i w których nie występuje sprzężenie zwrotne od wyjścia systemu.

Ze względu na złożoną strukturę systemów oraz przyjęte ograniczenia pomiarowe (założenie **Z6**) obiektem identyfikacji nie jest oryginalna charakterystyka elementu statycznego, ale ogólnie nieliniowość $R(x)$ stanowiąca jej przesuniętą i przeskalowaną wersję. Ze względu na szeroki obszar, w jakim rozważana klasa systemów znajduje swoje zastosowania (zob. przykłady w punkcie 2.1), ważna wydaje się być jednakże możliwość identyfikacji nawet przybliżonych w powyższym sensie charakterystyk nieliniowych systemów, za to w warunkach bardzo małej wiedzy wstępnej, zarówno o własnościach samych charakterystyk jak i pozostałych elementów systemu oraz przy ograniczonych możliwościach pomiarów w systemie (por. [45]). Przyjęte przez nas założenia **Z1-Z6** odpowiadają takim wymaganiom.

Rozdział 3

Falkowe algorytmy identyfikacji

W rozdziale prezentujemy i badamy falkowe algorytmy identyfikacji nieliniowości $R(x)$ w systemie zastępczym przedstawionym na Rys. 2.1 w rozdziale drugim. Proponowane algorytmy prowadzą do wyznaczenia empirycznych modeli falkowych, opartych o falkowe aproksymacje identyfikowanych nieliniowości (por. wzór (1.25) w punkcie 1.2). Algorytmy te mogą znaleźć zastosowanie przede wszystkim w sytuacjach, gdy wiedza wstępna na temat identyfikowanej nieliniowości jest niewielka (gdy np. wiadomo jedynie, że nieliniowość jest ograniczona) (por. też np. [43]-[57], [70], [86], [107]-[108], [112]-[113], [116], [124]).

Stosowane często w takich wypadkach tradycyjne algorytmy identyfikacji wykorzystujące modele będące wielomianami o arbitralnie przyjętym stopniu (zob. np. [8]-[9], [87], [103] czy też [127]) w naturalny sposób ograniczają klasę nieliniowości, dla której mogą zbiegać, do zbioru charakterystyk wielomianowych stopnia nie wyższego niż wybrany. Natomiast przedstawiane algorytmy falkowe (podobnie jak i inne algorytmy identyfikacji, wykorzystujące modele oparte na szeregach ortogonalnych) pozwalają (asymptotycznie) odkryć dowolne – w praktyce – nieliniowości, znacząco poszerzając klasę możliwych do identyfikacji charakterystyk, a tym samym, dziedzinę potencjalnych zastosowań.

Własności asymptotyczne (warunki i szybkość zbieżności) algorytmów ortogonalnych badano dotąd m.in. dla szeregów Fouriera [44], [50], [56], [86], Hermite’a [44], [50], [55], Laguerre’a [46], Legendre’a [54] i Czebyszewa [112].

W pracy [44] zauważono, że asymptotyczne własności algorytmów ortogonalnych, używane wcześniej dla systemów statycznych w [50], nie ulegają zmianie, gdy identyfikowana nieliniowość (jej wersja) jest charakterystyką statycznego elementu nieliniowego w systemie Hammersteina, a w pracy [108] uogólniono tę obserwację na szerszą klasę złożonych systemów o strukturze blokowej (obejmującą, oprócz wspomnianego wyżej systemu Hammersteina, również prezentowane w rozdziale drugim systemy równoległe i o strukturze mieszanej).

Algorytmy falkowe z funkcjami falkowymi Haara badano w pracach [70] i [108]. W niniejszej pracy, algorytmy identyfikacji wykorzystują dowolne funkcje falkowe Daubechies, podobnie jak wcześniej w [49], [71]-[72] i [109], jednak w zastosowaniu do innych algorytmów. Rozpatruje się trzy typy algorytmów i wynikające z nich klasy empirycznych modeli falkowych. Dwa z nich (algorytm ilorazowy i algorytm bezpośredni) znajdują zastosowanie w sytuacjach, w których funkcja gęstości wejścia systemu jest znana, trzeci (algorytm

ilorazowy z estymacją funkcji gęstości wejścia) dotyczy przypadku, gdy tej funkcji nie znamy.

A. Znana gęstość prawdopodobieństwa wejścia systemu

3.1 Algorytm ilorazowy

Podstawa teoretyczna. W przypadku znanej funkcji gęstości prawdopodobieństwa wejścia $f(x)$ klasa teoretycznych modeli falkowych nieliniowości $R(x)$, stanowiąca podstawę do skonstruowania algorytmu identyfikacji, składa się z modeli opartych o zaproponowaną w pracy [50] faktoryzację nieliniowości $R(x)$

$$R(x) = \frac{G(x)}{f(x)}, \quad \text{gdzie} \quad G(x) \stackrel{\text{def}}{=} R(x) \cdot f(x) \quad (3.1)$$

Modele z tej klasy (otrzymywane dla różnych p) dane są następującym ilorazem

$$R_G(x; K, p) = \frac{G(x; K, p)}{f(x)} \quad (3.2)$$

w którym $G(x; K, p)$ (dla danego K i p) jest teoretycznym modelem falkowym (aproksymacją) funkcji $G(x)$ (por. wzór (1.25) w punkcie 1.2)

$$G(x; K, p) = \sum_{n=n_{\min}(M,p)}^{n_{\max}(M,p)} \alpha_{Mn}^p \varphi_{Mn}^p(x) + \sum_{m=M}^{K-1} \sum_{l=l_{\min}(m,p)}^{l_{\max}(m,p)} \beta_{ml}^p \psi_{ml}^p(x) \quad (3.3)$$

o współczynnikach α_{Mn}^p i β_{ml}^p równych współczynnikom jej rozwinięcia w szereg falkowy (por. wzór (1.18) w punkcie 1.2)

$$\alpha_{Mn}^p = \int_{\frac{n}{2^M}}^{\frac{n+(2p-1)}{2^M}} G(x) \varphi_{Mn}^p(x) dx \quad \text{oraz} \quad \beta_{ml}^p = \int_{\frac{l+(1-p)}{2^m}}^{\frac{l+p}{2^m}} G(x) \psi_{ml}^p(x) dx \quad (3.4)$$

Granice sumowań w modelu (3.3) wynoszą (por. (1.24))

$$\begin{aligned} n_{\min}(M, p) &= \lfloor 2^M a \rfloor - 2p + 2 & l_{\min}(m, p) &= \lfloor 2^m a \rfloor - p + 1 \\ n_{\max}(M, p) &= \lceil 2^M b \rceil - 1 & l_{\max}(m, p) &= \lceil 2^m b \rceil + p - 2 \end{aligned} \quad \text{oraz} \quad (3.5)$$

gdzie a, b są granicami przedziału S .

Algorytm identyfikacji. Modele empiryczne. Zadaniem algorytmu identyfikacji jest wyznaczenie empirycznego modelu falkowego nieliniowości $R(x)$ na podstawie zbioru pomiarów $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^N$ wejścia i wyjścia systemu (por. punkt 2.2 w rozdz. 2). Wobec znajomości funkcji gęstości $f(x)$ oraz teoretycznej postaci modelu falkowego (wzory (3.2)-(3.3)) zadanie to sprowadza się do oszacowania (estymacji) nieznanymi (przy nieznanomości $R(x)$) współczynników α_{Mn}^p i β_{ml}^p modelu $G(x; K, p)$ (dla dowolnego p) w oparciu o

pomiary $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^N$. Opierając się na znanym spostrzeżeniu, że przy założeniach **Z1-Z5** współczynniki modeli $G(x; K, p)$ są równe przedstawionym poniżej wartościom oczekiwanym (zob. np. [44], [50], [104] lub [108])

$$\alpha_{Mn}^p = E[y_1 \varphi_{Mn}^p(x_1)] \quad \text{oraz} \quad \beta_{ml}^p = E[y_1 \psi_{ml}^p(x_1)] \quad (3.6)$$

możemy je oszacować za pomocą prostych estymatorów

$$\hat{\alpha}_{Mn}^p = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_k \varphi_{Mn}^p(x_k) \quad \text{oraz} \quad \hat{\beta}_{ml}^p = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_k \psi_{ml}^p(x_k) \quad (3.7)$$

otrzymując w ten sposób klasę (dla różnych p) estymatorów falkowych (*empirycznych modeli falkowych*) nieliniowości $R(x)$, odpowiadających klasie modeli teoretycznych (3.2)-(3.3):

$$\hat{R}_G(x; K, p) = \frac{\hat{G}(x; K, p)}{f(x)} \quad (3.8)$$

gdzie

$$\hat{G}(x; K, p) = \sum_{n=n_{\min}(M,p)}^{n_{\max}(M,p)} \hat{\alpha}_{Mn}^p \varphi_{Mn}^p(x) + \sum_{m=M}^{K-1} \sum_{l=l_{\min}(m,p)}^{l_{\max}(m,p)} \hat{\beta}_{ml}^p \psi_{ml}^p(x) \quad (3.9)$$

jest empirycznym modelem falkowym funkcji $G(x)$.

Prowadzi to do sformułowania następującego algorytmu identyfikacji (algorytm tego typu dla innych układów funkcji ortogonalnych badany był w [43], natomiast dla falek w [72]):

Algorytm ilorazowy:

Krok 1. Na podstawie pomiarów $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^N$ oblicz oszacowania $\hat{\alpha}_{Mn}^p$ oraz $\hat{\beta}_{ml}^p$ według wzorów (3.7).

Krok 2. Wyznacz empiryczny model nieliniowości $R(x)$ jako iloraz (3.8), z licznikiem danym przez (3.9).

Analiza własności modeli empirycznych $\hat{R}_G(x; K, p)$, dla różnych p , sprowadza się do zbadania własności modelu $\hat{G}(x; K, p)$ w liczniku zależności (3.8).

3.1.1 Analiza własności modeli empirycznych $\hat{G}(x; K, p)$

Zbieżność oszacowań $\hat{\alpha}_{Mn}^p$ i $\hat{\beta}_{ml}^p$

Łatwo zauważyć, że na mocy założeń **Z3-Z5**, estymatory $\hat{\alpha}_{Mn}^p$ i $\hat{\beta}_{ml}^p$ dane wzorem (3.7) są nieobciążone

$$E \hat{\alpha}_{Mn}^p = \alpha_{Mn}^p \quad \text{oraz} \quad E \hat{\beta}_{ml}^p = \beta_{ml}^p \quad (3.10)$$

Ponadto, dla ich wariancji zachodzą następujące nierówności

$$\text{var } \hat{\alpha}_{Mn}^p \leq \frac{1}{N} (A_{\text{var}} + A_{\text{cov}}) \quad \text{oraz} \quad \text{var } \hat{\beta}_{ml}^p \leq \frac{1}{N} (B_{\text{var}} + B_{\text{cov}}) \quad (3.11)$$

gdzie A_{var} , B_{var} oraz A_{cov} i B_{cov} są dodatnimi stałymi, zależnymi od części dynamicznej systemu i charakteru zewnętrznych zakłóceń (zob. (B.13) i (B.14) w Dodatku B.1, str. 116-120).

Z własności (3.10) i (3.11) wnioskujemy zatem, że:

Lemat 3.1 Współczynniki $\hat{\alpha}_{Mn}^p$ i $\hat{\beta}_{ml}^p$ modeli empirycznych $\hat{G}(x; K, p)$ zbiegają średniokwadratowo do współczynników α_{Mn}^p i β_{ml}^p modeli teoretycznych $G(x; K, p)$ wraz z rosnącą liczbą pomiarów N . Ponadto

$$\text{MSE } \hat{\alpha}_{Mn}^p = E(\alpha_{Mn}^p - \hat{\alpha}_{Mn}^p)^2 = E(E\hat{\alpha}_{Mn}^p - \hat{\alpha}_{Mn}^p)^2 = \text{var } \hat{\alpha}_{Mn}^p \leq \frac{1}{N} (A_{\text{var}} + A_{\text{cov}})$$

oraz

$$\text{MSE } \hat{\beta}_{ml}^p \leq \frac{1}{N} (B_{\text{var}} + B_{\text{cov}})$$

Należy podkreślić, że otrzymane wyżej oszacowania *nie zależą* od (patrz Dodatek B.1):

- V1. Skorelowania zakłóceń zewnętrznych z_k .
- V2. Struktury identyfikowanego systemu (z klasy rozważanych systemów).
- V3. Regularności identyfikowanej nieliniowości $R(x)$ i funkcji gęstości $f(x)$.

A. Analiza zbieżności punktowej modeli $\hat{G}(x; K, p)$

Dekomponując błąd średniokwadratowy modelu $\hat{G}(x; K, p)$ w ustalonym punkcie x

$$\begin{aligned} \text{MSE } \hat{G}(x; K, p) &= E \left\{ \left[G(x) - E\hat{G}(x; K, p) \right] + \left[E\hat{G}(x; K, p) - \hat{G}(x; K, p) \right] \right\}^2 = \\ &= \left[G(x) - E\hat{G}(x; K, p) \right]^2 + E \left[E\hat{G}(x; K, p) - \hat{G}(x; K, p) \right]^2 = \\ &= \text{bias}^2 \hat{G}(x; K, p) + \text{var } \hat{G}(x; K, p) \end{aligned} \quad (3.12)$$

otrzymujemy dwa składniki błędu modelu: kwadrat obciążenia, $\text{bias}^2 \hat{G}(x; K, p)$ (wynikający z niedoskonałości teoretycznego modelu falkowego ($G(x; K, p) = E\hat{G}(x; K, p)$) – jedynie aproksymującego, dla skończonych skal K , funkcję $G(x)$) i wariancję $\text{var } \hat{G}(x; K, p)$, będącą konsekwencją losowej natury współczynników $\hat{\alpha}_{Mn}^p$ i $\hat{\beta}_{ml}^p$ (pomiarów $\{(x_k, y_k)\}$).

Wariancja wyjścia modelu $\text{var } \hat{G}(x; K, p)$. Z (3.10) wynika, że modele empiryczne $\hat{G}(x; K, p)$ – dla poszczególnych K i p – są nieobciążonymi estymatorami modeli teoretycznych $G(x; K, p)$

$$E\hat{G}(x; K, p) = G(x; K, p) \quad (3.13)$$

i w konsekwencji

$$\text{var } \hat{G}(x; K, p) = E \left[G(x; K, p) - \hat{G}(x; K, p) \right]^2$$

Stąd oraz z obliczeń przedstawionych w Dodatku B.2 (str. 120) otrzymujemy, że w każdym punkcie $x \in S$ wariancja wyjścia modelu empirycznego $\hat{G}(x; K, p)$ spełnia nierówność

$$\text{var } \hat{G}(x; K, p) \leq \frac{2^K}{N} \cdot C_{\text{var}} \quad (3.14)$$

gdzie C_{var} jest dodatnią stałą, określoną w Dodatku B.2. Zależy ona od dynamiki systemu i działających zakłóceń. Wnioskujemy zatem, że rząd wariancji $\text{var } \hat{G}(x; K, p)$ zależy jedynie od liczby pomiarów N i przyjętych skal K modeli (por. własności V1-V3, str. 29).

Obciążenie $\text{bias}^2 \hat{G}(x; K, p)$. Ze względu na (3.13) kwadrat obciążenia wyjścia modeli empirycznych $\hat{G}(x; K, p)$ w punkcie x jest równy kwadratowi błędu aproksymacji w tym punkcie funkcji $G(x)$ za pomocą jej falkowych modeli teoretycznych $G(x; K, p)$:

$$\text{bias}^2 \hat{G}(x; K, p) = [G(x) - E \hat{G}(x; K, p)]^2 = [G(x) - G(x; K, p)]^2 \quad (3.15)$$

Ma on zatem, w przeciwieństwie do wariancji, przyczyny natury deterministycznej i nie zależy od liczby pomiarów N . Błąd ten maleje do zera, ze wzrostem skali K , w tych punktach x , w których funkcja $G(x)$ jest ciągła (zob. [80, twierdzenie 2.1]), tj. gdy np. jednocześnie nieliniowość $R(x)$ i funkcja gęstości $f(x)$ są ciągłe,

$$\text{bias}^2 \hat{G}(x; K, p) \rightarrow 0 \quad \text{dla} \quad K \rightarrow \infty \quad (3.16)$$

Zbieżność punktowa modeli $\hat{G}(x; K, p)$

Z (3.14) wynika, że w ustalonej skali K i przy rosnącej liczbie pomiarów N znika składowa losowa, wyrażana przez wariancję i w konsekwencji błąd średniokwadratowy modelu $\hat{G}(x; K, p)$ staje się (asymptotycznie) równy kwadratowi obciążenia

$$\text{MSE} \hat{G}(x; K, p) \rightarrow \text{bias}^2 \hat{G}(x; K, p) \quad \text{dla} \quad N \rightarrow \infty, K = \text{const} \quad (3.17)$$

Dalsza poprawa dokładności modelu wymaga zatem zredukowania obciążenia poprzez zwiększenie skali K we wzorze (3.9) (por. (3.16)). Postępowanie takie, przy ustalonej liczbie pomiarów N , prowadzi jednakże do wzrostu składowej wariancji, a tym samym zwiększenia błędu $\text{MSE} \hat{G}(x; K, p)$ (sądząc po oszacowaniu (3.14))

$$\text{MSE} \hat{G}(x; K, p) \rightarrow \infty \quad \text{dla} \quad K \rightarrow \infty, N = \text{const} \quad (3.18)$$

Takie przeciwstawne (ze względu na parameter K skali modelu) zachowanie się obu składowych błędu średniokwadratowego (3.12) cechuje również algorytmy identyfikacji oparte o inne szeregi ortogonalne (zob. np. [50]). Jego rozwiązaniem jest uzależnienie szybkości wzrostu skali K od liczby pomiarów N , tak aby jednocześnie spełnione były ogólne warunki (por. np. [50], [70], [108])

$$K = K(N) \rightarrow \infty \quad \text{oraz} \quad \frac{2^{K(N)}}{N} \rightarrow 0 \quad \text{dla} \quad N \rightarrow \infty \quad (3.19)$$

Dzięki temu, wraz ze wzrostem liczby pomiarów znikają obie składowe błędu średniokwadratowego modeli empirycznych $\hat{G}(x; K, p)$ i modele te zbiegają do wartości funkcji $G(x)$ w każdym punkcie jej ciągłości, w przedziale $S = [a, b]$. Otrzymaliśmy zatem następujący lemat:

Lemat 3.2 *Jeśli nieliniowość $R(x)$ i funkcja gęstości $f(x)$ są ciągłe w punkcie $x \in S = [a, b]$, a skala K modeli empirycznych $\hat{G}(x; K, p)$ zależy od liczby pomiarów N tak, że spełnione są warunki*

$$K = K(N) \rightarrow \infty \quad \text{oraz} \quad 2^{K(N)}/N \rightarrow 0, \quad \text{gdy} \quad N \rightarrow \infty$$

to dla dowolnego p modele te zbiegają w tym punkcie średniokwadratowo do nieliniowości $G(x)$

$$\text{MSE} \hat{G}(x; K(N), p) = E [G(x) - \hat{G}(x; K(N), p)]^2 \rightarrow 0 \quad \text{gdy} \quad N \rightarrow \infty \quad (3.20)$$

Szybkość zbieżności punktowej modeli $\hat{G}(x; K, p)$

Szybkość punktowej zbieżności średniokwadratowej empirycznych modeli falkowych $\hat{G}(x; K, p)$ (tempo zmniejszania się błędu MSE w (3.20) ze wzrostem skali K) będziemy badać w zależności od regularności (gładkości) identyfikowanej nieliniowości $R(x)$ i funkcji gęstości $f(x)$ oraz zastosowanych w modelach funkcji falkowych. Skupimy się przy tym na jego pierwszej składowej – obciążeniu bias² $\hat{G}(x; K, p)$ ponieważ, jak pokazaliśmy wcześniej, wariancja wyjścia $\text{var } \hat{G}(x; K, p)$ (rząd jej wielkości) od tych własności nie zależy (por. (3.14)).

Badania dotyczyć będą następującej klasy funkcji ciągłych (por. np. [93, str. 166]):

Definicja 3.1 Funkcja $G(x)$ należy do klasy $C^\lambda(a, b)$, $\lambda > 0$ (jest w przedziale (a, b) funkcją ciągłą z wykładnikiem λ), jeżeli istnieje dodatnia stała L_λ , taka, że

$$|\epsilon(x, v)| \stackrel{\text{def}}{=} |G(x) - t(x, v)| \leq L_\lambda |x - v|^\lambda \quad (3.21)$$

dla wszystkich $x, v \in (a, b)$, gdzie $t(x, v)$ jest wielomanem Taylora funkcji $G(x)$ stopnia $q - 1$, $q = \lceil \lambda \rceil$, w punkcie v

$$t(x, v) = \sum_{r=0}^{q-1} T_r \cdot (x - v)^r, \quad T_r = \frac{G^{(r)}(v)}{r!} \quad (3.22)$$

Funkcja $G(x)$ należy do klasy C^λ , $\lambda > 0$, w przedziale domkniętym $[a, b]$, jeśli w punktach brzegowych a i b jest ciągła z wykładnikiem λ , odpowiednio, prawo- i lewostronnie.

Powyższa klasa, w zależności od wartości wykładnika λ , obejmuje różne znane rodzaje funkcji nieliniowych (zob. przykłady na Rys. 3.1 i 3.2). W szczególności:

- Dla $\lambda \in (0, 1)$ mamy $q = \lceil \lambda \rceil = 1$, stąd we wzorze (3.22) $t(x, v) = G(v)$ i warunek (3.21) przyjmuje następującą postać

$$|G(x) - G(v)| \leq L_\lambda |x - v|^\lambda, \quad L_\lambda > 0$$

Do klasy $C^\lambda[a, b]$, $\lambda \in (0, 1)$ należą zatem funkcje, dla których w przedziale $[a, b]$ zachodzi warunek Höldera z wykładnikiem λ .

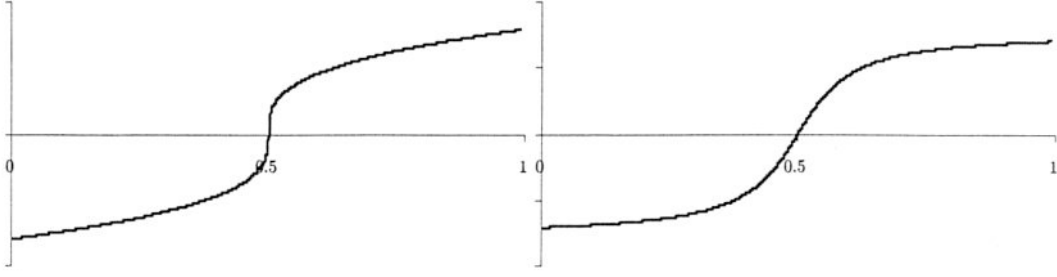
- Dla $\lambda = 1$ do klasy $C^1[a, b]$ należą funkcje spełniające w przedziale $[a, b]$ warunek Lipschitza

$$|G(x) - G(v)| \leq L |x - v|, \quad L > 0$$

- Dla $\lambda = s + \alpha$, gdzie $s = 0, 1, \dots$ oraz $\alpha \in (0, 1]$, klasa $C^\lambda[a, b]$ odpowiada często rozważanej w literaturze statystycznej klasie funkcji o s ciągłych pochodnych w przedziale $[a, b]$, z ostatnią pochodną spełniającą w tym przedziale warunek Höldera z wykładnikiem α (zob. np. [64, str. 93] i [112]).

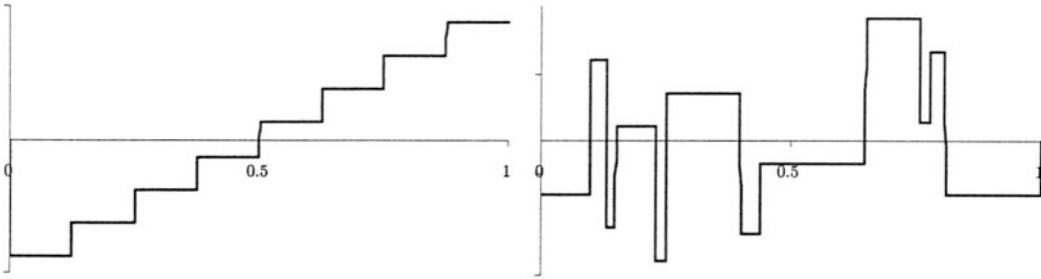
Przykładami funkcji posiadających s ciągłych pochodnych są np. funkcje sklejane stopnia $s + 1$. Zauważmy przy tym, że w przedziałach pomiędzy węzłami interpolacji, funkcje sklejane należą do klasy C^λ , przy dowolnym $\lambda > 0$.

Ponadto zauważmy, że:



Rys. 3.1 Funkcja $\sqrt[3]{(x-0.5)}$ (z lewej) należy do klasy $C^{1/3}$. Funkcja $\arctan(4\pi - 2\pi)$ należy natomiast do klasy C^λ z dowolnym $\lambda > 0$

- Funkcje będące w przedziale $[a, b]$ wielomianami należą do klasy $C^\lambda[a, b]$, przy dowolnym $\lambda > 0$ (ponadto, jeśli wielomiany te są stopnia $s < \lambda$, to wówczas zachodzi $|\epsilon(x, v)| = 0$).
- Funkcje z klasy C^∞ (np. $\sin x$, $\arctan x$) należą w swoich dziedzinach do klasy C^λ , dla dowolnego $\lambda > 0$, w dowolnym przedziale $[a, b]$.



Rys. 3.2 Funkcje odcinkami stałe należą w przedziałach pomiędzy skokami do klasy C^λ , przy dowolnym $\lambda > 0$

W trakcie analizy będziemy też korzystać z następujących własności funkcji należących do tej klasy:

- G1.** Jeśli identyfikowana nieliniowość $R(x)$ i funkcja gęstości $f(x)$ należą, odpowiednio, do klas $C^\beta[a, b]$ i $C^\alpha[a, b]$, to funkcja $G(x) (= R(x) \cdot f(x))$ należy do klasy $C^\lambda[a, b]$, gdzie $\lambda = \min\{\alpha, \beta\}$ (własność ta dla różnych przypadków szczególnych została pokazana w pracach [44], [50], [70], [108]).
- G2.** Jeśli charakterystyka nieliniowa elementu statycznego systemu (z rozważanej klasy systemów) należy do klasy $C^\beta[a, b]$, to również identyfikowana nieliniowość $R(x)$ do niej należy (por. uwagi 2.4 i 2.5 w punkcie 2.3).

Szybkość zbieżności błędu obciążenia $\text{bias}^2 \hat{G}(x; K, p)$. Analizę szybkości zbieżności błędu obciążenia rozpoczniemy od spostrzeżenia, że w każdym punkcie x , w którym funkcja $G(x)$ jest ciągła, dla funkcji falkowych Daubechies zachodzi równość (zob. [80, twierdzenie 2.1])

$$G(x) = \sum_{n=n_{\min}(M,p)}^{n_{\max}(M,p)} \alpha_{Mn}^p \varphi_{Mn}^p(x) + \sum_{m=M}^{\infty} \sum_{l=l_{\min}(m,p)}^{l_{\max}(m,p)} \beta_{ml}^p \psi_{ml}^p(x) \quad (3.23)$$

stąd (patrz wzór (3.3))

$$G(x) = G(x; K, p) + \sum_{m=K}^{\infty} \sum_{l=l_{\min}(m,p)}^{l_{\max}(m,p)} \beta_{ml}^p \psi_{ml}^p(x)$$

a zatem

$$G(x) - G(x; K, p) = \sum_{m=K}^{\infty} \sum_{l=l_{\min}(m,p)}^{l_{\max}(m,p)} \beta_{ml}^p \psi_{ml}^p(x) \quad (3.24)$$

Z kolei, ze względu na zwartość nośnika falek (por. wzór (1.11) w rozdz. 1) w ustalonym punkcie x dla każdej skali m aktywne (różne od zera) są tylko niektóre falki (patrz Rys. 3.3) i w rezultacie suma po prawej stronie wzoru (3.24) redukuje się do postaci (por. [49] i [71])

$$\sum_{m=K}^{\infty} \sum_{l=l_{\min}(x;m,p)}^{l_{\max}(x;m,p)} \beta_{ml}^p \psi_{ml}^p(x)$$

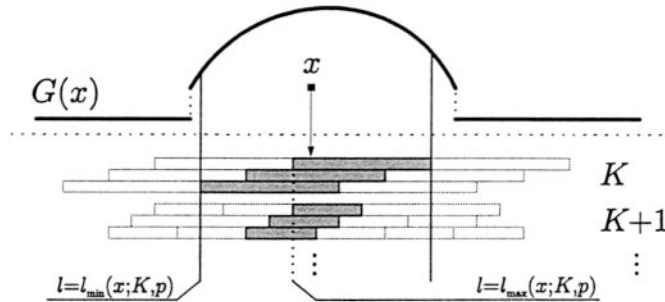
gdzie

$$l_{\min}(x; m, p) = \lfloor 2^m x \rfloor - p + 1 \quad \text{oraz} \quad l_{\max}(x; m, p) = \lfloor 2^m x \rfloor + p - 1 \quad (3.25)$$

W konsekwencji, błąd obciążenia empirycznych modeli falkowych $\hat{G}(x; K, p)$ w punkcie x jest równy

$$\text{bias } \hat{G}(x; K, p) = G(x) - G(x; K, p) = \sum_{m=K}^{\infty} \sum_{l=l_{\min}(x;m,p)}^{l_{\max}(x;m,p)} \beta_{ml}^p \psi_{ml}^p(x) \quad (3.26)$$

A zatem szybkość zmniejszania się błędu obciążenia w ustalonym punkcie x zależy (w szczególności) od szybkości zmniejszania się, ze wzrostem skali K , współczynników falkowych β_{ml}^p odpowiadających falkom $\psi_{ml}^p(x)$ o nośniku zawierającym punkt x (zob. Rys. 3.3)



Rys. 3.3 Błąd obciążenia empirycznych modeli falkowych $\hat{G}(x; K, p)$ w punkcie x zależy tylko od tych współczynników falkowych β_{ml}^p , dla których nośniki odpowiednich falek ψ_{ml}^p zawierają punkt x (rysunek przedstawia sytuację, gdy $p = 2$)

W Dodatku B.3 (str. 123) pokazaliśmy, że jeśli w przedziale zawierającym nośnik falki $\psi_{ml}^p(x)$ funkcja $G(x)$ jest ciągła z wykładnikiem $\lambda > 0$, to wówczas przy dużej skali m dla odpowiadającego tej falce współczynnika β_{ml}^p zachodzi następujące oszacowanie

$$|\beta_{ml}^p| \leq 2^{-\frac{(2\gamma+1)m}{2}} C_\gamma, \quad \gamma = \min\{\lambda, p\} \quad (3.27)$$

gdzie C_γ jest dodatnią stałą, zależną od $R(x)$, $f(x)$ i falek $\psi^p(x)$ (zob. lemat 2.16, str. 126).

Jeśli zatem w sąsiedztwie punktu x , obejmującym nośniki wszystkich falek występujących we wzorze (3.26), funkcja $G(x)$ jest ciągła z wykładnikiem λ , to wówczas, korzystając z powyższego oszacowania oraz wzoru (3.26) można pokazać (zob. Dodatek B.4, str. 126), że kwadrat błędu obciążenia empirycznego modelu falkowego $\hat{G}(x; K, p)$ spełnia asymptotycznie (tj. dla dużych wartości K) w punkcie x następującą nierówność

$$\text{bias}^2 \hat{G}(x; K, p) \leq 2^{-2\gamma K} \cdot C_{\text{bias}}, \quad \gamma = \min\{\lambda, p\} \quad (3.28)$$

gdzie dodatnia stała C_{bias} zależy (podobnie jak stała C_γ) od własności $R(x)$, $f(x)$ i falek $\psi^p(x)$. Punkty brzegowe tego sąsiedztwa można wyznaczyć korzystając z granic indeksów l (przesunięć) falek, danych w (3.25) oraz ze wzorów (1.11) określających nośniki falek $\psi_{ml}^p(x)$:

$$a_x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{l_{\min}(x; K, p) + 1 - p}{2^K} \quad \text{oraz} \quad b_x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{l_{\max}(x; K, p) + p}{2^K}$$

otrzymując, że

$$a_x = \frac{\lfloor 2^K x \rfloor - 2p + 2}{2^K} \quad \text{oraz} \quad b_x = \frac{\lfloor 2^K x \rfloor + 2p - 1}{2^K}$$

W dalszej części pracy będziemy korzystać z poniższego założenia precyzującego własności identyfikowanej nieliniowości $R(x)$ i funkcji gęstości $f(x)$ (a zatem także funkcji $G(x)$, por. (3.1)), dla których otrzymaliśmy oszacowanie (3.28):

Z7. Nieliniowość $R(x)$ i funkcja gęstości $f(x)$ należą do klas

$$R(x) \in C^\beta[a_x, b_x] \quad \text{oraz} \quad f(x) \in C^\alpha[a_x, b_x], \quad [a_x, b_x] \subset S, \quad \alpha, \beta > 0$$

gdzie

$$a_x = \frac{\lfloor 2^K x \rfloor - 2p + 2}{2^K} \quad \text{oraz} \quad b_x = \frac{\lfloor 2^K x \rfloor + 2p - 1}{2^K}$$

Funkcja $G(x)$ należy zatem do klasy $C^\lambda[a_x, b_x]$, gdzie $\lambda = \min\{\alpha, \beta\}$ (por. własność **G1**). Wyznaczony przedział jest prawostronnie otwarty ponieważ przedziały zawierające nośniki falek Daubechies są również prawostronnie otwarte (por. (1.11) w punkcie 1.1).

Uwaga 3.6 Jeśli w przedziale $[a_x, b_x]$ funkcja $G(x)$ jest wielomianem stopnia s , to w modelach teoretycznych $G(x; K, p)$ opartych na funkcjach falkowych Daubechies o numerach $p > s$, ze względu na posiadanie przez falki p znikających momentów (zob. (1.12), punkt 1.1) zachodzi (por. wzór (3.4) i zob. Rys. 3.4)

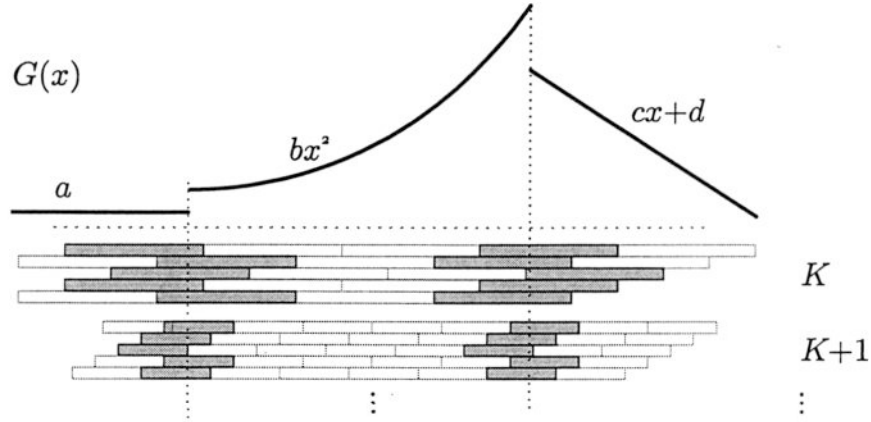
$$\beta_{ml}^p = 0, \quad \text{dla} \quad m \geq K, \quad l = l_{\min}(x; m, p), \dots, l_{\max}(x; m, p)$$

a zatem, w punkcie $x \in [a_x, b_x]$ znika obciążenie modeli (por. (3.26))

$$\text{bias} \hat{G}(x; K, p) = 0 \quad (3.29)$$

i, w konsekwencji, dla każdego $x \in [a_x, b_x]$ błąd średniokwadratowy MSE składa się tylko z wariancji wyjścia modeli:

$$\text{MSE} \hat{G}(x; K, p) = \text{var} \hat{G}(x; K, p)$$



Rys. 3.4 Współczynniki falkowe β_{ml}^p przy falkach ψ_{ml}^p leżących wewnątrz przedziałów ciągłości nieliniowości $G(x)$ znikają jeśli jest ona w tych przedziałach wielomianem stopnia mniejszego niż numer falkowy p . Na rysunku przedstawiono sytuację, gdy $p = 3$. Nośniki falek ψ_{ml}^p odpowiadających zerowym współczynnikom β_{ml}^p zaznaczono kolorem białym (a, b, c, d - dowolne stałe)

Na podstawie nierówności (3.28) wnioskujemy, że przy założeniu **Z7** (wtedy $\lambda = \min\{\alpha, \beta\}$):

- B1. Wraz ze wzrostem skali K , kwadrat błędu obciążenia empirycznych modeli falkowych $\hat{G}(x; K, p)$ maleje wykładniczo do zera w punktach ciągłości $R(x)$ i $f(x)$.
- B2. Szybkość zmniejszania się tego błędu zależy od gładkości nieliniowości $R(x)$ i funkcji gęstości $f(x)$ oraz od zastosowanych w modelach funkcji falkowych (numeru falkowego p).
- B3. Wpływ na błąd obciążenia modeli $\hat{G}(x; K, p)$ w punkcie x ma jedynie gładkość $R(x)$ i $f(x)$ w otoczeniu punktu x (w przedziale $[a_x, b_x]$).
- B4. Oszacowanie (3.28) jest prawdziwe dla wszystkich punktów x należących do przedziału $\left[\frac{\lfloor 2^K x \rfloor}{2^K}, \frac{\lfloor 2^K x \rfloor + 1}{2^K}\right)$ (bowiem w modelach falkowych $p \geq 1$).

Szybkość średniokwadratowej zbieżności punktowej modeli $\hat{R}_G(x; K, p)$. Nierówności (3.14) i (3.28) pozwalają następująco oszacować asymptotyczny błąd średniokwadratowy modeli empirycznych $\hat{G}(x; K, p)$ w ustalonym punkcie x :

$$\text{MSE } \hat{G}(x; K, p) \leq \left(2^{-2\gamma K} + \frac{2^K}{N}\right) \cdot C_{\text{MSE}} \quad (3.30)$$

gdzie $C_{\text{MSE}} = \max\{C_{\text{bias}}, C_{\text{var}}\}$. Minimalizując oszacowanie względem parametru skali K otrzymujemy następującą regułę lokalnego doboru skali K modeli empirycznych (w otoczeniu punktu x) dla dużej liczby obserwacji (por. warunki (3.19))

$$K = K_{\text{opt}}(N) = \left\lfloor \frac{1}{2\gamma + 1} \log_2 2\gamma N \right\rfloor \quad (3.31)$$

Wstawienie tego wzoru do (3.30) daje lemat:

Lemat 3.3 *Jeśli spełnione są warunki założenia **Z7**, to w każdym punkcie x należącym do przedziału $\left[\frac{\lfloor 2^K x \rfloor}{2^K}, \frac{\lfloor 2^K x \rfloor + 1}{2^K}\right)$, asymptotyczny błąd średniokwadratowy modeli empirycznych $\hat{G}(x; K, p)$, przy skali K dobieranej za pomocą reguły (3.31), spełnia nierówność*

$$\text{MSE } \hat{G}(x; K_{\text{opt}}(N), p) \leq N^{-\frac{2\gamma}{2\gamma+1}} \cdot C_{\text{MSE}}^\gamma, \quad \gamma = \min\{\alpha, \beta, p\} \quad (3.32)$$

gdzie $C_{\text{MSE}}^\gamma = 2 \cdot (2\gamma)^{-2\gamma/(2\gamma+1)} C_{\text{MSE}}$.

B. Analiza zbieżności całkowej modeli $\hat{G}(x; K, p)$

W badaniach zbieżności całkowej (globalnej) modeli empirycznych $\hat{G}(x; K, p)$ posłużymy się całkowym (zintegrowanym) błędem średniokwadratowym, na który składają się zintegrowana wariancja $\text{IV } \hat{G}(x; K, p)$ i zintegrowany kwadrat obciążenia $\text{ISB } \hat{G}(x; K, p)$

$$\begin{aligned} \text{MISE } \hat{G}(x; K, p) &= \int_S \left[G(x) - \mathbb{E} \hat{G}(x; K, p) \right]^2 dx + \\ &\quad + \int_S \mathbb{E} \left[\hat{G}(x; K, p) - \mathbb{E} \hat{G}(x; K, p) \right]^2 dx = \\ &= \text{ISB } \hat{G}(x; K, p) + \text{IV } \hat{G}(x; K, p) \end{aligned} \quad (3.33)$$

Zbieżność i szybkość zbieżności modeli empirycznych $\hat{G}(x; K, p)$ w sensie tego błędu wyznaczmy zarówno dla przypadku, gdy identyfikowana funkcja $G(x)$ jest ciągła w przedziale S , jak i w sytuacji, gdy $G(x)$ posiada w nim skończoną liczbę punktów nieciągłości.

Wariancja $\text{IV } \hat{G}(x; K, p)$. Składową $\text{IV } \hat{G}(x; K, p)$ dla $S = [a, b]$ można łatwo oszacować korzystając z oszacowania punktowej wariancji modelu empirycznego we wzorze (3.14)

$$\text{IV } \hat{G}(x; K, p) = \int_S \text{var } \hat{G}(x; K, p) dx \leq \frac{2^K}{N} \cdot C_{\text{IV}} \quad (3.34)$$

gdzie $C_{\text{IV}} = (b - a) C_{\text{var}}$.

Obciążenie $\text{ISB } \hat{G}(x; K, p)$. Na mocy nieobciążoności estymatorów $\hat{\alpha}_{Mn}^p$ oraz $\hat{\beta}_{ml}^p$ (3.10), a zatem i wyjścia modelu empirycznego $\hat{G}(x; K, p)$ w stosunku do modelu teoretycznego $G(x; K, p)$ (wzór (3.13)), całkowite obciążenie $\text{ISB } \hat{G}(x; K, p)$ jest równe całkowitemu błędowi aproksymacji funkcji $G(x)$ przez model teoretyczny $G(x; K, p)$ (tj. odległości pomiędzy modelem teoretycznym $G(x; K, p)$ i funkcją $G(x)$ w metryce przestrzeni $L^2(\mathbf{R})$)

$$\begin{aligned} \text{ISB } \hat{G}(x; K, p) &= \int_S \left[G(x) - \mathbb{E} \hat{G}(x; K, p) \right]^2 dx = \\ &= \int_S [G(x) - G(x; K, p)]^2 dx = \text{ISE } G(x; K, p) \end{aligned} \quad (3.35)$$

a zatem ma charakter deterministyczny i nie zależy od liczby pomiarów N (por. (3.15)). Na podstawie własności (1.21) falkowej analizy wielorozdzielczej, obciążenie $\text{ISB } \hat{G}(x; K, p)$

maleje do 0 wraz ze wzrostem skali K dla *dowolnych* (niekoniecznie ciągłych) funkcji $G(x)$ ograniczonych w przedziale S i znikających poza tym przedziałem (por. założenia **Z1** i **Z2** w rozdz. 2) i dowolnego numeru falkowego p

$$\text{ISB } \hat{G}(x; K, p) \rightarrow 0, \quad \text{gdy } K \rightarrow \infty \quad (3.36)$$

Zbieżność całkową modeli $\hat{G}(x; K, p)$

Podobnie jak to ma miejsce w przypadku błędu MSE (zob. dyskusję na str. 30), wzrost liczby pomiarów N powoduje, że przy ustalonej skali K modelu empirycznego $\hat{G}(x; K, p)$, składowa wariancji błędu MISE maleje do 0 (zob. (3.34)). Zatem (por. wzory (3.33) i (3.35))

$$\text{MISE } \hat{G}(x; K, p) \rightarrow \text{ISB } \hat{G}(x; K, p) \quad \text{dla } N \rightarrow \infty, K = \text{const}$$

Z kolei zwiększanie skali K w modelu (w celu zmniejszenia składowej obciążenia, por. (3.36)) przy stałej liczbie pomiarów N wiąże się ze wzrostem wariancji (sądząc według oszacowania (3.34)) i, w konsekwencji, zwiększeniem błędu MISE

$$\text{MISE } \hat{G}(x; K, p) \rightarrow \infty \quad \text{dla } K \rightarrow \infty, N = \text{const}$$

Uzależniając zatem skalę K modeli empirycznych $\hat{G}(x; K, p)$ we wzorze (3.9) od liczby pomiarów N tak, aby spełnione były warunki (por. (3.19))

$$K = K(N) \rightarrow \infty \quad \text{oraz} \quad 2^{K(N)}/N \rightarrow 0 \quad \text{gdy } N \rightarrow \infty \quad (3.37)$$

otrzymujemy, że:

Lemat 3.4 *Jeśli skala K falkowych modeli empirycznych $\hat{G}(x; K, p)$ zależy od liczby pomiarów tak, że spełnione są warunki (3.37), to modele te zbiegają w przedziale S do nieliniowości $G(x)$, w sensie całkowego błędu średniokwadratowego*

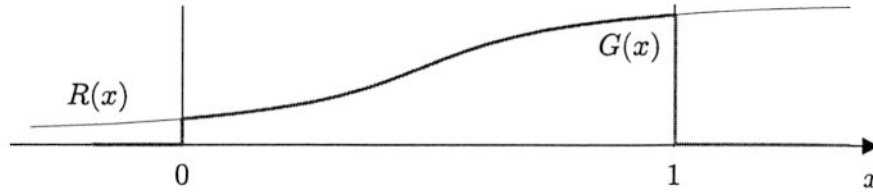
$$\text{MISE } \hat{G}(x; K(N), p) \rightarrow 0 \quad \text{gdy } N \rightarrow \infty \quad (3.38)$$

Zauważmy, że fakt zbieżności całkowej nie zależy od ciągłości $R(x)$ i $f(x)$ (por. lemat 3.2).

Szybkość zbieżności całkowej modeli $\hat{G}(x; K, p)$

Analizując szybkość zbieżności błędu MISE $\hat{G}(x; K, p)$ jako pierwszy rozpatrzmy przypadek, gdy $G(x)$ jest ciągła w przedziale $S = [a, b]$.

Uwaga 3.7 *Przyjęte w założeniu **Z1** wymaganie, aby funkcja gęstości $f(x)$ była dodatnia w przedziale S i równa zero poza nim, powoduje, że nieliniowość $G(x) (= R(x) \cdot f(x))$ jest w punktach brzegowych a i b ogólnie nieciągła. Natomiast może być ona ciągła w przedziale S , jeśli jest w tych punktach, odpowiednio, prawo- (w punkcie a) i lewostronnie (w punkcie b) ciągła (Rys. 3.5).*



Rys. 3.5 Przy założeniu **Z1**, identyfikowana funkcja $G(x) = R(x) \cdot f(x)$ może być w punktach brzegowych a, b ciągła jednostronnie, od strony wnętrza przedziału. Przykład na rysunku odpowiada sytuacji, gdy wejście ma rozkład jednostajny w przedziale $[0, 1]$, tj. $f(x) = I_{[0,1]}(x)$

a) Funkcja $G(x)$ ciągła w przedziale $S = [a, b]$. Biorąc pod uwagę, że dla dowolnego przedziału $S' \subseteq S$ zachodzi

$$\text{MISE}' \hat{G}(x; K, p) = \int_{S'} \text{MSE} \hat{G}(x; K, p) dx$$

błąd całkowity MISE modeli empirycznych $\hat{G}(x; K, p)$ można teraz łatwo oszacować, korzystając z lematu 3.3, dotyczącego błędów punktowych MSE tych modeli. Uwzględniając ten lemat, otrzymujemy jako bezpośredni wniosek następujący:

Lemat 3.5 *Jeśli $R(x) \in C^\beta[a, b]$ oraz $f(x) \in C^\alpha[a, b]$, to w przedziale $S'_G \stackrel{\text{def}}{=} [a'_G, b'_G]$, którego granice wynoszą*

$$a'_G = \frac{\lceil 2^K a \rceil + 2p - 2}{2^K} \quad \text{oraz} \quad b'_G = \frac{\lfloor 2^K b \rfloor - 2p + 2}{2^K} \quad (3.39)$$

asymptotyczny całkowity błąd średniokwadratowy modeli empirycznych $\hat{G}(x; K, p)$ ze skalą K dobieraną w zależności od liczby pomiarów N według reguły (por. (3.31))

$$K = K_{\text{opt}}(N) = \left\lfloor \frac{1}{2\gamma + 1} \log_2 2\gamma N \right\rfloor, \quad \gamma = \min\{\alpha, \beta, p\} \quad (3.40)$$

spełnia następującą nierówność

$$\text{MISE}' \hat{G}(x; K_{\text{opt}}(N), p) = \mathbb{E} \int_{S'_G} \left[G(x) - \hat{G}(x; K_{\text{opt}}(N), p) \right]^2 dx \leq N^{-\frac{2\gamma}{2\gamma+1}} \cdot C_{\text{MISE}}^\gamma \quad (3.41)$$

gdzie $C_{\text{MISE}}^\gamma = (b'_G - a'_G) C_{\text{MSE}}^\gamma$.

Powyższy lemat gwarantuje modelom $\hat{G}(x; K, p)$ zbieżność rzędu $O(N^{-2\gamma/(2\gamma+1)})$, gdzie $\gamma = \min\{\alpha, \beta, p\}$. Gwarantowana szybkość zbieżności zależy zatem od gładkości identyfikowanej nieliniowości $R(x)$, gładkości funkcji gęstości $f(x)$ i numeru falek p zastosowanych w empirycznym modelu falkowym.

Przedział $S'_G = [a'_G, b'_G]$, jest (w ogólności) węższy niż przedział S , $S'_G \subseteq S$. Zauważmy jednak, że ze wzrostem skali K modeli, przedział S'_G rozszerza się (zob. własność (A.1) funkcji $\lceil \cdot \rceil$ i $\lfloor \cdot \rfloor$)

$$a'_G - a < \frac{2^K a + 2p - 1}{2^K} - a = \frac{2p - 1}{2^K} \quad \text{oraz} \quad b - b'_G < b - \frac{2^K b - 2p + 1}{2^K} = \frac{2p - 1}{2^K} \quad (3.42)$$

i asymptotycznie (dla $K \rightarrow \infty$) staje się on równy przedziałowi S , niezależnie od zastosowanych w modelach $\hat{G}(x; K, p)$ funkcji falkowych (numeru p).

Uwaga 3.8 Jeśli granice a i b przedziału S leżą na siatce binarnej $\mathbf{B}_H$, $H \leq K$ (tj. punkty brzegowe a i b można przedstawić w postaci $n/2^H$, $n, H \in \mathbf{Z}$, $H < \infty$ – por. definicję $\mathbf{B}_H$ w Dodatku A.2, str. 114), to wówczas (zob. własności (A.4) funkcji $\lceil \cdot \rceil$ i $\lfloor \cdot \rfloor$) dla modeli $\hat{G}(x; K, p)$ opartych o funkcje falkowe Haara ($p = 1$) zachodzi

$$a'_G = \frac{\lceil 2^K a \rceil}{2^K} = a \quad \text{oraz} \quad b'_G = \frac{\lfloor 2^K b \rfloor}{2^K} = b$$

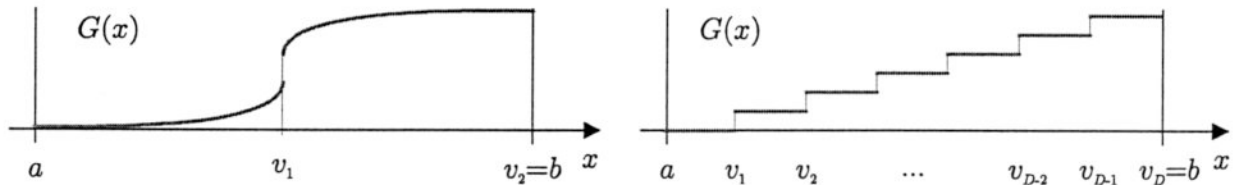
i przedział S'_G jest równy przedziałowi S , a zatem takie modele zbiegają w tym wypadku z gwarantowaną szybkością zbieżności (3.41) i $\gamma = \min \{\alpha, \beta, 1\}$, w całym przedziale S .

b) Funkcja $G(x)$ nieciągła w skończonej liczbie punktów. Analizując błąd MISE falkowych modeli empirycznych $\hat{G}(x; K, p)$ skupimy się teraz na jego składowej obciążenia ISB $\hat{G}(x; K, p)$, ponieważ, jak pokazaliśmy wcześniej, składowa wariancji ma ten sam rząd dla dowolnych funkcji $G(x) = R(x) \cdot f(x)$ spełniających założenia **Z1-Z2** (zob. (3.34)).

Przyjmijmy następujące założenie (por. założenie **Z7**, str. 34)

Z7a. Nieliniowość $R(x)$ i (lub) funkcja gęstości $f(x)$ są w przedziale S odcinkami gładkie, tj. mają w przedziale S skończoną, ale nieznaną liczbę punktów nieciągłości typu skok i poza nimi należą, odpowiednio, do klas C^β i C^α .

Zauważmy, że nieliniowość $G(x)$ ma przy założeniu **Z7a** w przedziale S skończoną liczbę punktów nieciągłości typu skok, a pomiędzy nimi należy do klasy C^λ , $\lambda = \min \{\alpha, \beta\}$ (Rys. 3.6)



Rys. 3.6 Przykłady funkcji odcinkami gładkich w przedziale $S = [a, b]$

Błąd obciążenia ISB $\hat{G}(x; K, p)$ oszacujemy korzystając ze wzoru (3.24), równości (3.35) i tożsamości Parsevala

$$\text{ISB } \hat{G}(x; K, p) = \sum_{m=K}^{\infty} \sum_{l=l_{\min}(m,p)}^{l_{\max}(m,p)} (\beta_{ml}^p)^2 \quad (3.43)$$

Oznaczmy przez $\{v_i\}_{i=1}^D$, $D < \infty$, zbiór punktów nieciągłości funkcji $G(x)$, natomiast przez $\Psi_v(m, p)$ zbiór indeksów l translacji tych funkcji falkowych $\psi_{ml}^p(x)$, których nośniki, w skali m , zawierają co najmniej jeden punkt nieciągłości v_i

$$\Psi_v(m, p) = \{l \in \{l_{\min}(m, p), \dots, l_{\max}(m, p)\} : (\exists i \in \{1, \dots, D\} : v_i \in \text{supp } \psi_{ml}^p(x))\}$$

Możemy teraz dokonać dekompozycji sumy (3.43) na dwa składniki

$$\text{ISB } \hat{G}(x; K, p) = \sum_{m=K}^{\infty} \sum_{l \in \Psi_v(m, p)} (\beta_{ml}^p)^2 + \sum_{m=K}^{\infty} \sum_{\substack{l=l_{\min}(m, p) \\ l \notin \Psi_v(m, p)}}^{l_{\max}(m, p)} (\beta_{ml}^p)^2 \quad (3.44)$$

Zauważmy, że ze względu na to, iż rozmiar (długość) nośnika falek $\psi_{ml}^p(x)$ w skali m wynosi $(2p-1)/2^m$ (por. wzór (1.11) w rozdz. 1), a poszczególne falki wraz ze zmianą l przesuwane są ze skokiem $1/2^m$, dla każdej ze skal m maksymalna liczba elementów zbioru $\Psi_v(m, p)$ wynosi $D(2p-1)$ (liczba elementów wewnętrznej sumy pierwszego składnika), natomiast liczbę elementów sumy wewnętrznej drugiego składnika można wtedy oszacować następująco

$$\begin{aligned} l_{\max}(m, p) - l_{\min}(m, p) + 1 - D(2p-1) &= \lceil 2^m b \rceil + p - 2 - \lfloor 2^m a \rfloor + p - D(2p-1) = \\ &= \lceil 2^m b \rceil - \lfloor 2^m a \rfloor + 2p - 2 - D(2p-1) < \\ &< 2^m(b-a) \end{aligned}$$

Wykorzystując teraz oszacowania współczynników falkowych β_{ml}^p dla funkcji $G(x)$ nieciągłych w przedziale zawierającym nośnik falki $\psi_{ml}^p(x)$ (uzyskane w Dodatku B.3, str. 123)

$$|\beta_{ml}^p| \leq 2^{-\frac{m}{2}} \cdot C_{G\psi}$$

(ze stałą $C_{G\psi} = M_R M_f M_\psi(2p-1)$, zależną od $R(x)$, $f(x)$ i zastosowanych w modelu funkcji falkowych) i stosując je w odniesieniu do współczynników falkowych o indeksach l ze zbioru $\Psi_v(m, p)$ (pierwsza suma), a oszacowanie ze str. 33 (por. (B.24) w Dodatku B.3) w odniesieniu do pozostałych współczynników (druga suma) otrzymujemy następującą nierówność

$$\begin{aligned} \text{ISB } \hat{G}(x; K, p) &\leq \sum_{m=K}^{\infty} 2^{-m} C_{G\psi}^2 D(2p-1) + \sum_{m=K}^{\infty} 2^{-2\gamma m} C_\gamma^2 (b-a) = \\ &= 2^{-K} \cdot 2 C_{G\psi}^2 D(2p-1) + 2^{-2\gamma K} \cdot \frac{C_\gamma^2(b-a)}{1-2^{-2\gamma}} \leq \\ &\leq 2^{-2\varrho K} \cdot C_{\text{ISB}}^\varrho \end{aligned} \quad (3.45)$$

gdzie $C_{\text{ISB}}^\varrho = \max \left\{ 2 C_{G\psi}^2 D(2p-1), \frac{C_\gamma^2(b-a)}{1-2^{-2\gamma}} \right\}$ oraz $\varrho = \min \left\{ \gamma, \frac{1}{2} \right\} = \min \left\{ \alpha, \beta, \frac{1}{2} \right\}$ (uwzględniając wzór (3.40) i biorąc pod uwagę, że $p \geq 1$). Nierówność ta wraz z (3.34) daje następujące oszacowanie asymptotycznego błędu MISE falkowych modeli empirycznych $\hat{G}(x; K, p)$ dla badanego przypadku

$$\text{MISE } \hat{G}(x; K, p) \leq 2^{-2\varrho K} \cdot C_{\text{ISB}}^\varrho + \frac{2^K}{N} \cdot C_{\text{IV}} \leq \left(2^{-2\varrho K} + \frac{2^K}{N} \right) C_{\text{MISE}} \quad (3.46)$$

gdzie teraz $C_{\text{MISE}} = \max \{ C_{\text{ISB}}^\varrho, C_{\text{IV}} \}$. Optymalizując to oszacowanie względem parametru skali K otrzymujemy tym razem (por. (3.40))

$$K = K_{\text{opt}}(N) = \left\lfloor \frac{1}{2\varrho + 1} \log_2 2\varrho N \right\rfloor \quad (3.47)$$

Po podstawieniu wzoru (3.47) do oszacowania (3.46) uzyskujemy lemat:

Lemat 3.6 *Asymptotyczne błędy modeli empirycznych $\hat{G}(x; K, p)$, przy skali K dobieranej za pomocą reguły (3.47), spełniają nierówność*

$$\text{MISE } \hat{G}(x; K_{\text{opt}}(N), p) \leq N^{-\frac{2\rho}{2\rho+1}} \cdot C_{\text{MISE}}^{\rho} \quad (3.48)$$

gdzie $\rho = \min\{\alpha, \beta, 1/2\}$ i $C_{\text{MISE}}^{\rho} = 2 \cdot (2\rho)^{-2\rho/(2\rho+1)} C_{\text{MISE}}$.

Ponieważ $\rho = \min\{\gamma, 1/2\} \leq \gamma$, gwarantowana obecnie szybkość zbieżności całkowej przy wzroście liczby pomiarów N jest dla $\gamma > 1/2$ (por. (3.40)) mniejsza niż we wzorze (3.41). Należy też podkreślić, że ρ w wykładniku we wzorze (3.48) nie zależy od numeru falkowego p , tzn. gwarantowana szybkość zbieżności całkowej jest taka sama niezależnie od rodzaju falek zastosowanych w modelu empirycznym $\hat{G}(x; K, p)$.

3.1.2 Analiza własności modeli empirycznych $\hat{R}_G(x; K, p)$

Ze względu na postać (3.8), własności empirycznych modeli $\hat{R}_G(x; K, p)$ wynikają jako proste wnioski z własności modeli empirycznych $\hat{G}(x; K, p)$, wykazanych w punkcie 3.1.1.

A. Analiza zbieżności punktowej modeli $\hat{R}_G(x; K, p)$

Korzystając z poniższego związku pomiędzy punktowymi błędami średniokwadratowymi modeli empirycznych $\hat{G}(x; K, p)$ i $\hat{R}_G(x; K, p)$ w punkcie x (por. wzory (3.1), (3.8) i (3.12))

$$\text{MSE } \hat{R}_G(x; K, p) = \text{E} \left[\frac{G(x)}{f(x)} - \frac{\hat{G}(x; K, p)}{f(x)} \right]^2 = \frac{1}{f^2(x)} \text{MSE } \hat{G}(x; K, p) \quad (3.49)$$

wnioskujemy, że modele empiryczne $\hat{R}_G(x; K, p)$ zbiegają średniokwadratowo do nielinowości $R(x)$ w tych samych punktach $x \in S$ w których modele empiryczne $\hat{G}(x; K, p)$ zbiegają w takim sensie do funkcji $G(x)$, dowodząc tym samym, w oparciu o lemat 3.2, następującego twierdzenia.

Twierdzenie 3.1 (Zbieżność punktowa średniokwadratowa) *Jeśli identyfikowana nielinowość $R(x)$ i funkcja gęstości $f(x)$ są ciągłe w punkcie $x \in S = [a, b]$, a skala K modeli empirycznych $\hat{R}_G(x; K, p)$ zależy od liczby pomiarów N tak, że spełnione są warunki*

$$K = K(N) \rightarrow \infty \quad \text{oraz} \quad 2^{K(N)}/N \rightarrow 0, \quad \text{gdy} \quad N \rightarrow \infty$$

to dla dowolnego p modele te zbiegają w tym punkcie, średniokwadratowo, do nielinowości $R(x)$

$$\text{MSE } \hat{R}_G(x; K(N), p) = \text{E} \left[R(x) - \hat{R}_G(x; K(N), p) \right]^2 \rightarrow 0 \quad \text{gdy} \quad N \rightarrow \infty \quad (3.50)$$

Z (3.49) wynika również, że szybkości zmniejszania się punktowego błędu średniokwadratowego są – z dokładnością do stałej – dla obu modeli empirycznych $\hat{R}_G(x; K, p)$ i $\hat{G}(x; K, p)$ takie same, co po uwzględnieniu lematu 3.3 prowadzi bezpośrednio do twierdzenia.

Twierdzenie 3.2 (Szybkość średniokwadratowej zbieżności punktowej) *Jeśli nieliniowość $R(x)$ i funkcja gęstości $f(x)$ należą do klas*

$$R(x) \in C^\beta[a_x, b_x] \quad \text{oraz} \quad f(x) \in C^\alpha[a_x, b_x], \quad \alpha, \beta > 0, \quad [a_x, b_x] \subset S$$

gdzie

$$a_x = \frac{\lfloor 2^K x \rfloor - 2p + 2}{2^K} \quad \text{oraz} \quad b_x = \frac{\lfloor 2^K x \rfloor + 2p - 1}{2^K} \quad (3.51)$$

a skale K modeli empirycznych $\hat{R}_G(x; K, p)$ dobierane są według wzoru (por. (3.31))

$$K = K_{\text{opt}}(N) = \left\lfloor \frac{1}{2\gamma + 1} \log_2 2\gamma N \right\rfloor, \quad \gamma = \min\{\alpha, \beta, p\} \quad (3.52)$$

to błędy średniokwadratowe tych modeli w dowolnym punkcie $x \in \left[\frac{\lfloor 2^K x \rfloor}{2^K}, \frac{\lfloor 2^K x \rfloor + 1}{2^K} \right)$ są asymptotycznie nie większe niż

$$\text{MSE } \hat{R}_G(x; K_{\text{opt}}(N), p) \leq N^{-\frac{2\gamma}{2\gamma+1}} \cdot C_{\text{MSE}}^{G\gamma} \quad (3.53)$$

gdzie $C_{\text{MSE}}^{G\gamma} = C_{\text{MSE}}^\gamma / f^2(x)$ jest dodatnią stałą (por. wzór (3.32)).

Z powyższych twierdzeń wynikają następujące własności punktowe falkowych modeli empirycznych $\hat{R}_G(x; K, p)$ w sensie zachowania się błędu średniokwadratowego MSE:

- RG1.** Modele $\hat{R}_G(x; K, p)$ zbiegają do identyfikowanej nieliniowości $R(x)$ w każdym punkcie jej ciągłości, pod warunkiem, że w tym punkcie również funkcja gęstości $f(x)$ jest ciągła.
- RG2.** Tempo zmniejszania się błędu (3.53) modeli $\hat{R}_G(x; K, p)$ ze wzrostem liczby pomiarów N we wzorach (3.7) i (3.52) (szybkość zbiegania modeli do identyfikowanej nieliniowości $R(x)$) zależy od lokalnej (w przedziale $[a_x, b_x]$) gładkości nieliniowości $R(x)$ i funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$ oraz od zastosowanych w modelach funkcji falkowych (numeru falkowego p ; por. wzory (3.52)-(3.53)).
- RG3.** Jeśli w przedziale $[a_x, b_x]$ funkcja gęstości wejścia jest gładzsza od identyfikowanej nieliniowości $R(x)$, tj. $\alpha \geq \beta$, a zastosowane w modelu empirycznym funkcje falkowe mają numer $p \geq \beta$, to wówczas szybkość zbieżności błędu średniokwadratowego modeli $\hat{R}_G(x; K, p)$ z parametrem skali wybieranym według wzoru (3.52) osiąga asymptotycznie optymalną prędkość $O(N^{-2\beta/(2\beta+1)})$ (por. Dodatek B.7, str. 129).
- RG4.** Na zbieżność modeli $\hat{R}_G(x; K, p)$ i rząd szybkości zbieżności nie wpływa struktura ani dynamika systemu (w rozważanej klasie systemów) ani też skorelowanie zakłóceń z_k . W szczególności zatem, szybkość ta jest taka sama co do rzędu dla systemów statycznych, jak i dla systemów zawierających elementy dynamiczne.

Z punktowej zbieżności średniokwadratowej modeli $\hat{R}_G(x; K, p)$ wynika ich punktowa zbieżność według prawdopodobieństwa.

Wniosek 3.1 (Zbieżność punktowa wg prawdopodobieństwa) *Jeśli spełnione są założenia twierdzenia 3.1, to modele empiryczne $\hat{R}_G(x; K(N), p)$ zbiegają do nieliniowości $R(x)$ w punktach ciągłości $R(x)$ i $f(x)$, według prawdopodobieństwa:*

$$\hat{R}_G(x; K(N), p) \xrightarrow{P} R(x) \quad \text{gdy} \quad N \rightarrow \infty$$

Kolejne twierdzenie charakteryzuje szybkość zbiegania empirycznych modeli $\hat{R}_G(x; K, p)$ do nieliniowości $R(x)$ według prawdopodobieństwa.

Twierdzenie 3.3 (Szybkość zbieżności punktowej wg prawdopodobieństwa)

Jeśli spełnione są założenia twierdzenia 3.2, to dla błędu bezwzględnego modeli empirycznych $\hat{R}_G(x; K_{\text{opt}}(N), p)$ zachodzi asymptotycznie, w każdym punkcie $x \in \left[\frac{\lfloor 2^K x \rfloor}{2^K}, \frac{\lfloor 2^K x \rfloor + 1}{2^K} \right)$, następujące oszacowanie:

$$\left| R(x) - \hat{R}_G(x; K_{\text{opt}}(N), p) \right| = O\left(N^{-\frac{\gamma}{2\gamma+1}}\right) \quad (3.54)$$

według prawdopodobieństwa.

Dowód. Dowód wynika z twierdzenia udowodnionego w pracy [50, twierdzenie 3, str. 449], które cytujemy w Dodatku B.8, str. 129. Podstawiając w nim $g(x) = G(x)$, $\hat{g}_N(x) = \hat{G}(x; K_{\text{opt}}(N), p)$ oraz $\hat{f}_N(x) = f(x)$ i przyjmując $s_g = 2\gamma/(2\gamma+1)$ oraz $s_f = \infty$ otrzymujemy (3.54). ■

Z twierdzenia wynika zatem kolejna własność modeli empirycznych $\hat{R}_G(x; K, p)$:

RG3a. Jeśli w przedziale $[a_x, b_x]$ funkcja gęstości wejścia jest gładza od identyfikowanej nieliniowości $R(x)$, tj. $\alpha \geq \beta$, oraz zastosowane w modelach empirycznych $\hat{R}_G(x; K, p)$ funkcje falkowe mają numer $p \geq \beta$, to wówczas modele te zbiegają do nieliniowości $R(x)$ z prędkością $O(N^{-\beta/(2\beta+1)})$, według prawdopodobieństwa (por. własność RG3).

B. Analiza zbieżności całkowej modeli $\hat{R}_G(x; K, p)$

Z poniższej nierówności (por. założenie Z1 w rozdz. 2 i wzory (3.1), (3.8) oraz (3.49))

$$\text{MISE } \hat{R}_G(x; K, p) = E \int_S \left[\frac{G(x)}{f(x)} - \frac{\hat{G}(x; K, p)}{f(x)} \right]^2 dx \leq \frac{1}{\delta^2} \text{MISE } \hat{G}(x; K, p) \quad (3.55)$$

oraz lematu 3.4 wynika całkowa, średniokwadratowa zbieżność falkowych modeli empirycznych $\hat{R}_G(x; K, p)$ w przedziale $S = [a, b]$ do dowolnej, ograniczonej nieliniowości $R(x)$.

Zachodzi następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.4 (Średniokwadratowa zbieżność całkowa) Jeśli skala K modeli empirycznych $\hat{R}_G(x; K, p)$ zależy od liczby pomiarów N tak, że spełnione są warunki (por. (3.37))

$$K = K(N) \rightarrow \infty \quad \text{oraz} \quad 2^{K(N)}/N \rightarrow 0, \quad \text{gdy} \quad N \rightarrow \infty,$$

to modele te zbiegają w przedziale $S = [a, b]$ do nieliniowości $R(x)$, w sensie całkowego błędu średniokwadratowego MISE

$$\text{MISE } \hat{R}_G(x; K(N), p) = E \int_S \left[R(x) - \hat{R}_G(x; K(N), p) \right]^2 dx \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty$$

Z tej samej nierówności dla przedziału $S'_G \subseteq S$ (por. wzory (3.39)) i treści lematu 3.5 wynika z kolei poniższe twierdzenie, dotyczące szybkości średniokwadratowej zbieżności całkowej modeli empirycznych $\hat{R}_G(x; K, p)$ do nieliniowości $R(x)$.

Twierdzenie 3.5 (Szybkość średniokwadratowej zbieżności całkowej)

$(R(x), f(x))$ *ciągłe*) Jeśli nieliniowość $R(x)$ i funkcja gęstości $f(x)$ należą do klas

$$R(x) \in C^\beta[a, b] \quad \text{oraz} \quad f(x) \in C^\alpha[a, b], \quad \alpha, \beta > 0$$

a skale K modeli empirycznych $\hat{R}_G(x; K, p)$ dobierane są według wzoru (por. (3.40))

$$K = K_{\text{opt}}(N) = \left\lfloor \frac{1}{2\gamma + 1} \log_2 2\gamma N \right\rfloor, \quad \gamma = \min\{\alpha, \beta, p\} \quad (3.56)$$

to w przedziale $S'_G \stackrel{\text{def}}{=} [a'_G, b'_G]$, gdzie

$$a'_G = \frac{\lceil 2^K a \rceil + 2p - 2}{2^K} \quad \text{oraz} \quad b'_G = \frac{\lfloor 2^K b \rfloor - 2p + 2}{2^K}$$

ich całkowite błędy średniokwadratowe są asymptotycznie nie większe niż

$$\text{MISE } \hat{R}_G(x; K_{\text{opt}}(N), p) = \mathbb{E} \int_{S'_G} \left[R(x) - \hat{R}_G(x; K_{\text{opt}}(N), p) \right]^2 dx \leq N^{-\frac{2\gamma}{2\gamma+1}} \cdot C_{\text{MISE}}^{G\gamma} \quad (3.57)$$

gdzie $C_{\text{MISE}}^{G\gamma} = \delta^{-2} \cdot C_{\text{MISE}}^\gamma$ jest dodatnią stałą.

Nierówność (3.55) wraz z lematem 3.6 dowodzi również szybkości zbieżności tych modeli gdy $R(x)$ i $f(x)$ są nieciągłe:

Twierdzenie 3.6 (Szybkość średniokwadratowej zbieżności całkowej)

$(R(x), f(x))$ *nieciągłe*) Jeśli nieliniowość $R(x)$ i (lub) funkcja gęstości $f(x)$ mają w przedziale $S = [a, b]$ dowolną, skończoną liczbę punktów nieciągłości (typu skok), a pomiędzy punktami nieciągłości należą, odpowiednio, do klas C^β oraz C^α , $\alpha, \beta > 0$ oraz jeśli skale modeli empirycznych $\hat{R}_G(x; K, p)$ dobierane są według wzoru (por. (3.47))

$$K = K_{\text{opt}}(N) = \left\lfloor \frac{1}{2\varrho + 1} \log_2 2\varrho N \right\rfloor, \quad \varrho = \min\left\{\alpha, \beta, \frac{1}{2}\right\} \quad (3.58)$$

to całkowite błędy średniokwadratowe tych modeli są asymptotycznie nie większe niż

$$\text{MISE } \hat{R}_G(x; K_{\text{opt}}(N), p) \leq N^{-\frac{2\varrho}{2\varrho+1}} \cdot C_{\text{MISE}}^{G\varrho} \quad (3.59)$$

gdzie $C_{\text{MISE}}^{G\varrho} = \delta^{-2} \cdot C_{\text{MISE}}^\varrho$ jest dodatnią stałą.

Z powyższych twierdzeń wnioskujemy następujące własności empirycznych modeli $\hat{R}_G(x; K, p)$ w sensie błędu MISE:

- RG5.** Przy założeniach twierdzenia 3.4, modele empiryczne $\hat{R}_G(x; K, p)$ zbiegają do dowolnych (ograniczonych na przedziale $S = [a, b]$ – por. założenie **Z2**) nieliniowości $R(x)$, przy dowolnych (ograniczonych i dodatnich w tym przedziale – por. założenie **Z1**) funkcjach gęstości wejścia $f(x)$.

- RG6.** Szybkość zbieżności modeli $\hat{R}_G(x; K, p)$ zależy od gładkości nieliniowości $R(x)$ i funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$ w przedziale $S = [a, b]$ oraz od numeru falkowego p funkcji falkowych zastosowanych w modelach $\hat{R}_G(x; K, p)$ (por. wzory (3.56)-(3.57) i (3.58)-(3.59)).
- RG7.** Jeśli w przedziale $S = [a, b]$ funkcja gęstości wejścia $f(x)$ jest gładzsza od identyfikowanej nieliniowości $R(x)$, tj. $\alpha \geq \beta$ oraz zastosowane w modelu empirycznym falki mają numer $p \geq \beta$, to wówczas model $\hat{R}_G(x; K, p)$ zbiega do nieliniowości $R(x)$ z asymptotycznie optymalną szybkością $O(N^{-2\beta/(2\beta+1)})$ (por. Dodatek B.7, str. 129 i własność **RG3**).
- RG8.** Oszacowanie (3.59) gwarantuje w praktycznych zastosowaniach (dla $\alpha, \beta \geq 1/2$) minimalną szybkość zbieżności modeli falkowych $\hat{R}_G(x; K, p)$ rzędu $O(N^{-1/2})$, niezależnie od numeru falki p .
- RG9.** Na zbieżność i szybkość zbieżności nie wpływają, z dokładnością do stałych, ani struktura ani dynamika systemu (z klasy rozważanych systemów) ani też skorelowanie zakłóceń z_k (por. własność **RG4**).

Przykłady. Rozpatrzmy teraz kilka przykładowych przypadków identyfikowanej nieliniowości $R(x)$ i funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$.

Niech nieliniowość $R(x)$ i funkcja gęstości wejścia $f(x)$ będą odcinkami stałe w $S = [a, b]$. Wówczas w przedziałach pomiędzy skokami obie funkcje należą do klasy C^∞ , a zatem (por. (3.58)) $\varrho = 1/2$ i wraz ze wzrostem liczby pomiarów N gwarantowany błąd (3.59) maleje jak $O(N^{-1/2})$.

Jeśli $R(x)$ i $f(x)$ są ciągłe w przedziale S i spełniają, np. warunek Lipschitza ($\alpha = \beta = 1$), wtedy gwarantowany rząd szybkości zbieżności rośnie do poziomu $O(N^{-2/3})$ (por. (3.56)-(3.57) biorąc pod uwagę, że $p \geq 1$ i $\gamma = 1$). W obu przypadkach gwarantowane szybkości nie zależą od zastosowanych w modelach funkcji falkowych.

Jeśli natomiast $R(x)$ i $f(x)$ są dwukrotnie różniczkowalne (np. obie należą do klasy $C^{2.5}[a, b]$), to wówczas modele oparte o falki Haara ($p = 1$) nadal zbiegają z prędkością $O(N^{-2/3})$, natomiast dla modeli z falkami Daubechies o numerze $p \geq 3$ szybkość ta wzrasta do maksymalnego (dla funkcji z klasy $C^{2.5}$) poziomu $O(N^{-5/6})$ (por. (3.57) i Dodatek B.7).

Dla bardzo gładkich funkcji $R(x)$ i $f(x)$ ($\alpha, \beta \gg 1$), szybkość zbieżności modeli falkowych zależy głównie od zastosowanych w nich funkcji falkowych (numeru falkowego p). Zauważmy, że już przy falkach o numerze $p = 5$ otrzymujemy szybkość zbieżności rzędu $O(N^{-10/11})$ (zakładamy tu $\alpha, \beta \geq 5$), a zatem praktycznie równą rzędowi $O(N^{-1})$, charakterystycznemu dla metod z parametryczną znajomością funkcji $R(x)$ i $f(x)$ (por. np. [7]).

C. Dobór falek w empirycznym modelu falkowym $\hat{R}_G(x; K, p)$

Opierając się na przeprowadzonej powyżej analizie teoretycznej (i podanych przykładach), można podać następujące wskazówki dotyczące doboru funkcji falkowych w empirycznym modelu falkowym (3.8)-(3.9), otrzymywanym według algorytmu ilorazowego.

A. Jeśli oprócz informacji pomiarowej (zawartej w obserwacjach $\{(x_k, y_k)\}$) dostępna jest również informacja wstępna na temat gładkości identyfikowanej nieliniowości $R(x)$ i funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$ to, kierując się własnościami **RG3** i **RG7**, należy zastosować w nich funkcje falkowe o numerze $p \geq \min\{\alpha, \beta\}$.

Zastosowanie w modelach empirycznych $\hat{R}_G(x; K, p)$ falek o większych numerach falkowych p , wiąże się jednakże ze wzrostem komplikacji obliczeniowych związanych z otrzymywaniem odpowiednich funkcji falkowych (zagadnienie to analizujemy szczegółowo w rozdziale 4). Ponadto, już przy numerach falkowych $p \geq 2$, różnice pomiędzy gwarantowanymi szybkościami zbieżności stają się nieznaczne i, przy odpowiednio gładkich $R(x)$ i $f(x)$, wynoszą (por. wzór (3.57) dla błędu MISE):

p	MISE $\hat{R}_G(x; K_{\text{opt}}(N), p)$	
2	$O(N^{-4/5})$	$\sim O(N^{-0.8})$
3	$O(N^{-6/7})$	$\sim O(N^{-0.86})$
4	$O(N^{-8/9})$	$\sim O(N^{-0.89})$
5	$O(N^{-10/11})$	$\sim O(N^{-0.91})$

Można się zatem spodziewać, że zastosowanie modeli empirycznych $\hat{R}_G(x; K, p)$ z funkcjami falkowymi o wysokich numerach falkowych p jedynie nieznacznie poprawi (asymptotyczną) szybkość zbieżności do identyfikowanej nieliniowości $R(x)$, w stosunku do ich odpowiedników z funkcjami falkowymi o małych numerach p (por. też wyniki badań symulacyjnych w rozdz. 5).

B. W częstych sytuacjach braku informacji wstępnej o $R(x)$ i $f(x)$ można jednak na ogół przyjąć, że funkcje te posiadają skończoną liczbę punktów nieciągłości i są odcinkami gładkie z $\beta, \alpha \geq 1/2$. Wówczas (por. własność **RG8**) przy regule doboru skali (3.58) modele empiryczne zbiegają globalnie (w sensie błędu MISE) do nieliniowości $R(x)$ z gwarantowaną szybkością $O(N^{-1/2})$ (por. (3.59)), niezależną od liczby punktów nieciągłości w tej nieliniowości i w funkcji gęstości wejścia $f(x)$ (w przedziale $S = [a, b]$).

Ponieważ gwarantowana szybkość zbieżności nie zależy teraz także od zastosowanych w modelach funkcji falkowych (numeru falkowego p), to przyjmując, jako dodatkowe kryterium wyboru, łatwość implementacji modeli, należy stwierdzić, że najkorzystniejszy wybór stanowią w takich sytuacjach (tj. przy braku informacji apriorycznej) modele oparte o falki Haara (por. (1.10) i zob. rozdz. 4; por. także [49], [70]–[71] i [108]).

Zauważmy jednak, że biorąc pod uwagę punktowe (lokalne) własności empirycznych modeli falkowych $\hat{R}_G(x; K, p)$ (por. własność **RG2**) zastosowanie funkcji falkowych o wyższych numerach pozwala tym modelom lepiej „dopasować” się do identyfikowanej nieliniowości w przedziałach jej ciągłości (por. (3.52) i (3.53)). Szczególnie widoczne jest to w przypadku, gdy $R(x)$ i $f(x)$ są pomiędzy punktami skoków wielomianami. Wówczas bowiem (zob. uwaga 3.6), jeśli numer falkowy jest większy od stopnia tych wielomianów, znika obciążenie modeli empirycznych $\hat{R}_G(x; K, p)$ (por. wzory (3.29) i (3.49)).

3.2 Algorytm bezpośredni

Jedną z cech przedstawionego w poprzednim punkcie algorytmu ilorazowego jest zależność zbieżności i szybkości zbieżności wyznaczanych przez niego modeli empirycznych

$\hat{R}_G(x; K, p)$ od własności funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$. Zależność ta wynika z postaci funkcji $G(x)$ identyfikowanej w pierwszym kroku algorytmu ilorazowego, która jest iloczynem nieliniowości $R(x)$ i funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$ (por. wzór (3.1) w punkcie 3.1).

W szczególności, gdy na przykład $f(x)$ jest nieciągła, gwarantowana szybkość średniokwadratowej zbieżności całkowitej tych modeli jest co najwyżej rzędu $O(N^{-1/2})$, nawet jeśli identyfikowana nieliniowość $R(x)$ jest wielokrotnie różniczkowalna ($\beta \gg 1$) a zastosowane w modelach falki mają wysoki numer p (zob. twierdzenie 3.6 na str. 44 oraz własności **RG7-RG8**).

Proponowany poniżej algorytm identyfikacji jest pozbawiony tej wady i wyznaczone przez niego modele empiryczne zbiegają do nieliniowości $R(x)$ niezależnie od własności funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$.

Podstawa teoretyczna. Klasa teoretycznych modeli falkowych (dla różnych p), stanowiąca podstawę algorytmu identyfikacji, składa się obecnie z modeli będących aproksymacjami identyfikowanej nieliniowości $R(x)$ (por. (1.25) w punkcie 1.2 oraz wzory (3.2) i (3.3) definiujące modele teoretyczne $R_G(x; K, p)$)

$$R_R(x; K, p) = \sum_{n=n'_{\min}(M,p)}^{n'_{\max}(M,p)} \alpha_{Mn}^{p'} \varphi_{Mn}^p(x) + \sum_{m=M}^{K-1} \sum_{l=l'_{\min}(m,p)}^{l'_{\max}(m,p)} \beta_{ml}^{p'} \psi_{ml}^p(x) \quad (3.60)$$

w których współczynniki $\alpha_{Mn}^{p'}$ i $\beta_{ml}^{p'}$ są (bezpośrednio) współczynnikami falkowymi identyfikowanej nieliniowości $R(x)$ (por. z postacią współczynników modeli $G(x; K, p)$ daną wzorem (3.4))

$$\alpha_{Mn}^{p'} = \int_{\frac{n}{2^M}}^{\frac{n+(2p-1)}{2^M}} R(x) \varphi_{Mn}^p(x) dx \quad \text{oraz} \quad \beta_{ml}^{p'} = \int_{\frac{l+(1-p)}{2^m}}^{\frac{l+p}{2^m}} R(x) \psi_{ml}^p(x) dx \quad (3.61)$$

Granice sumowań w modelach $R_R(x; K, p)$ wynoszą (por. wzory w (3.5))

$$\begin{aligned} n'_{\min}(M, p) &= \lceil 2^M a \rceil & l'_{\min}(m, p) &= \lceil 2^m a \rceil - 1 + p \\ n'_{\max}(M, p) &= \lfloor 2^M b \rfloor - 2p + 1 & l'_{\max}(m, p) &= \lfloor 2^m b \rfloor - p \end{aligned} \quad \text{oraz} \quad (3.62)$$

gdzie a, b są granicami przedziału S .

Algorytm identyfikacji. Modele empiryczne. Wobec nieznajomości nieliniowości $R(x)$, zadaniem algorytmu jest oszacowanie (estymacja) nieznanych współczynników $\alpha_{Mn}^{p'}$ i $\beta_{ml}^{p'}$ modeli $R_R(x; K, p)$ (dla dowolnego p) na podstawie zbioru pomiarów $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^N$ wejścia-wyjścia systemu (por. punkt 2.2 w rozdz. 2).

Wykorzystując w tym celu spostrzeżenie, że przy założeniach **Z1-Z5**, dla $x \in S = [a, b]$ zachodzą poniższe tożsamości (por. wzory w (3.6))

$$\begin{aligned} \alpha_{Mn}^{p'} &= \int_{\frac{n}{2^M}}^{\frac{n+(2p-1)}{2^M}} R(x) \varphi_{Mn}^p(x) \frac{1}{f(x)} f(x) dx = \mathbb{E} \left[R(x_1) \frac{\varphi_{Mn}^p(x_1)}{f(x_1)} \right] = \\ &= \mathbb{E} \left\{ [R(x_1) + \xi_1 + z_1] \frac{\varphi_{Mn}^p(x_1)}{f(x_1)} \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E} \left[y_1 \frac{\varphi_{Mn}^p(x_1)}{f(x_1)} \right] \\
\beta_{ml}^{p'} &= \int_{\frac{l+(1-p)}{2^m}}^{\frac{l+p}{2^m}} R(x) \psi_{ml}^p(x) \frac{1}{f(x)} f(x) dx = \mathbb{E} \left[R(x_1) \frac{\psi_{ml}^p(x_1)}{f(x_1)} \right] = \\
&= \mathbb{E} \left\{ [R(x_1) + \xi_1 + z_1] \frac{\psi_{ml}^p(x_1)}{f(x_1)} \right\} = \\
&= \mathbb{E} \left[y_1 \frac{\psi_{ml}^p(x_1)}{f(x_1)} \right] \tag{3.63}
\end{aligned}$$

możemy, dzięki znajomości funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$, oszacować te współczynniki za pomocą następujących estymatorów (współczynników empirycznych) (por. estymatory w (3.7))

$$\hat{\alpha}_{Mn}^{p'} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_k \varphi_{Mn}^{p'}(x_k) \quad \text{oraz} \quad \hat{\beta}_{ml}^{p'} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_k \psi_{ml}^{p'}(x_k) \tag{3.64}$$

gdzie

$$\varphi_{Mn}^{p'}(x_k) = \frac{\varphi_{Mn}^p(x_k)}{f(x_k)} \quad \text{oraz} \quad \psi_{ml}^{p'}(x_k) = \frac{\psi_{ml}^p(x_k)}{f(x_k)} \tag{3.65}$$

otrzymując w ten sposób klasę (dla różnych p) empirycznych modeli falkowych nielinowości $R(x)$, odpowiadających klasie modeli teoretycznych (3.60) (por. z postacią modeli empirycznych $\hat{R}_G(x; K, p)$ daną wzorami (3.8) i (3.9))

$$\hat{R}_R(x; K, p) = \sum_{n=n'_{\min}(M,p)}^{n'_{\max}(M,p)} \hat{\alpha}_{Mn}^{p'} \varphi_{Mn}^p(x) + \sum_{m=M}^{K-1} \sum_{l=l'_{\min}(m,p)}^{l'_{\max}(m,p)} \hat{\beta}_{ml}^{p'} \psi_{ml}^p(x) \tag{3.66}$$

Uzyskaliśmy zatem następujący *bezpośredni* algorytm identyfikacji (algorytm tego typu dla klasycznych układów funkcji ortogonalnych badany był w pracy [43]):

Algorytm bezpośredni:

Krok 1. Na podstawie pomiarów $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^N$ oblicz oszacowania $\hat{\alpha}_{Mn}^{p'}$ i $\hat{\beta}_{ml}^{p'}$ według wzorów (3.64) i (3.65).

Krok 2. Wyznacz empiryczny model nielinowości $R(x)$ wstawiając obliczone oszacowania do wzoru (3.66).

3.2.1 Analiza własności modeli empirycznych $\hat{R}_R(x; K, p)$

Analizę własności modeli $\hat{R}_R(x; K, p)$ rozpoczniemy od uwagi, że współczynniki empiryczne $\hat{\alpha}_{Mn}^{p'}$ i $\hat{\beta}_{ml}^{p'}$ w (3.64) są dobrze zdefiniowane, gdy funkcja gęstości wejścia systemu $f(x)$ jest dodatnia (por. wzory (3.63) i (3.65)). A zatem, na mocy założenia **Z1**, gwarantującego tę własność $f(x)$ jedynie w przedziale $S = [a, b]$, nośniki funkcji falkowych $\varphi_{Mn}^p(x)$ i $\psi_{ml}^p(x)$ odpowiadające współczynnikom empirycznym $\hat{\alpha}_{Mn}^{p'}$ i $\hat{\beta}_{ml}^{p'}$ modeli $\hat{R}_R(x; K, p)$, muszą zawierać się w tym przedziale. Nakłada to następujące ograniczenia na indeksy

translacji n i l funkcji falkowych w tych modelach (por. Rys. 3.7)

$$\frac{n}{2^M} \geq a \quad \text{oraz} \quad \frac{l + (1-p)}{2^m} \geq a$$

$$\frac{n + (2p-1)}{2^M} \leq b \quad \text{oraz} \quad \frac{l+p}{2^m} \leq b$$

i prowadzi do podanych we wzorze (3.62) granic sumowań w modelach teoretycznych i empirycznych.

Przed przystąpieniem do dalszej analizy pokażemy, że z powyższego wynikają w ogólności (dla dowolnego numeru falkowego p) następujące konsekwencje:

- zbieżność i gwarantowane szybkości zbieżności modeli empirycznych $\hat{R}_R(x; K, p)$ zachodzą jedynie w podprzedziale przedziału S ,
- nośniki modeli empirycznych $\hat{R}_R(x; K, p)$ są mniejsze niż przedział $S = [a, b]$, stąd niektóre pomiary ze zbioru $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^N$ nie są wykorzystywane przez algorytm bezpośredni przy wyznaczaniu tych modeli.

Przedział użyteczny modeli empirycznych $\hat{R}_R(x; K, p)$. Analiza błędów obciążenia modeli falkowych opiera się na własności falkowej analizy wielorozdzielczej (1.3) w rozdz. 1 mówiącej, że zbiór funkcji falkowych (por. (1.14)-(1.16) w rozdz. 1)

$$\{(\varphi_{Mn}^p(x), \psi_{ml}^p(x), M, m, n, l \in \mathbf{Z}) : m \geq M\} \quad (3.67)$$

jest bazą zupełną przestrzeni $L^2(\mathbf{R})$, a zatem pozwala przedstawić dowolną funkcję całkowalną z kwadratem na całej prostej $\mathbf{R}$ (por. wzory (1.17) i (1.18) w rozdz. 1). Jak jednak stwierdziliśmy powyżej w przypadku modeli $\hat{R}_R(x; K, p)$ do dyspozycji mamy jedynie zbiór funkcji falkowych o postaci

$$\left\{ (\varphi_{Mn}^p(x), \psi_{ml}^p(x), M, m, n, l \in \mathbf{Z}) : \begin{array}{l} n = n'_{\min}(M, p), \dots, n'_{\max}(M, p) \\ l = l'_{\min}(m, p), \dots, l'_{\max}(m, p) \end{array}, m \geq M \right\} \quad (3.68)$$

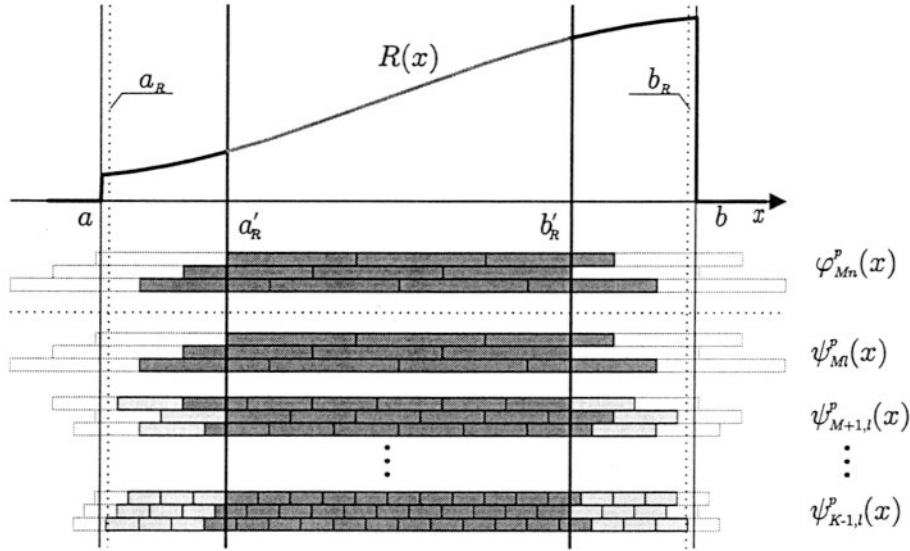
Zbiór ten, ze względu na zwartość nośników funkcji falkowych Daubechies, jest bazą zupełną przestrzeni funkcji całkowalnych z kwadratem jedynie w pewnym przedziale, w którym spośród wszystkich funkcji falkowych ze zbioru (3.67) aktywne są *tylko* te, które należą do zbioru wyznaczonego w (3.68). Granice tego przedziału, oznaczane dalej przez a'_R i b'_R , można zatem wyznaczyć na podstawie poniższych równości (por. wzory w (3.62), postaci nośników funkcji falkowych dane w (1.11), rozdz. 1 oraz Rys. 3.7)

$$a'_R = \frac{n'_{\min}(M, p) - 1 + (2p-1)}{2^M} \quad \text{oraz} \quad b'_R = \frac{n'_{\max}(M, p) + 1}{2^M}$$

z których otrzymujemy, że

$$S'_R \stackrel{\text{def}}{=} [a'_R, b'_R] = \left[\frac{\lceil 2^M a \rceil + 2p - 2}{2^M}, \frac{\lfloor 2^M b \rfloor - 2p + 2}{2^M} \right) \quad (3.69)$$

Przedział $S'_R = [a'_R, b'_R]$ będziemy nazywać *przedziałem użytecznym* modeli empirycznych $\hat{R}_R(x; K, p)$. Zwróćmy uwagę, że jest on w ogólności węższy od przedziału S .

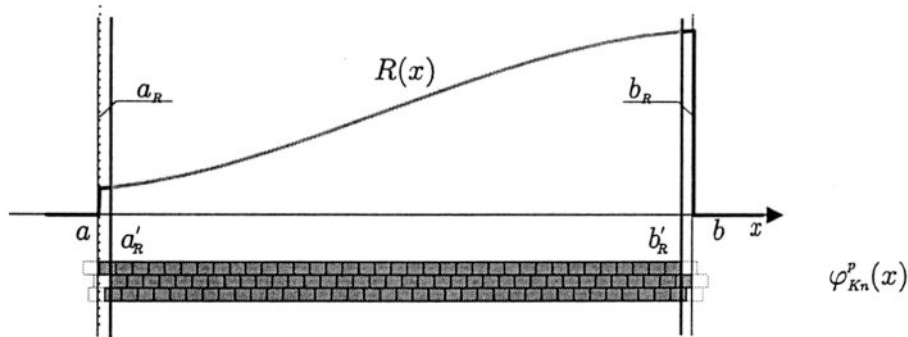


Rys. 3.7 Algorytm bezpośredni (wyznaczający empiryczne modele falkowe $\hat{R}_R(x; K, p)$) pozwala identyfikować nieliniowości $R(x)$ w przedziale $S'_R = [a'_R, b'_R]$, który jest w ogólności węższy niż przedział $S = [a, b]$ (na rysunku przedstawiono przykładowy model $\hat{R}_R(x; K, p)$ z $p = 2$). Szare prostokąty odpowiadają nośnikom funkcji falkowych tego modelu

Zauważmy także, że na mocy własności (A.2) funkcji $[\cdot]$ i $[\cdot]$ (Dodatek A.1, str. 114), długość tego przedziału rośnie ze wzrostem skali M (por. wzory w (3.42)), ponieważ:

$$a'_R - a < \frac{2^M a + 2p - 1}{2^M} - a = \frac{2p - 1}{2^M} \quad \text{oraz} \quad b - b'_R < b - \frac{2^M b - 2p + 1}{2^M} = \frac{2p - 1}{2^M} \quad (3.70)$$

i (asymptotycznie, $M \rightarrow \infty$) osiąga długość przedziału S (dla dowolnych p). Stąd, aby za pomocą algorytmu bezpośredniego móc identyfikować nieliniowość $R(x)$ w jak najszerszym przedziale S'_R , należy w empirycznych modelach falkowych $\hat{R}_R(x; K, p)$ przyjmować skalę $M = K$ (por. Rys. 3.8).



Rys. 3.8 Przedział użyteczny S'_R modeli empirycznych $\hat{R}_R(x; K, p)$ osiąga (w danej skali K) największą długość (nieliniowość $R(x)$ jest identyfikowana przez algorytm bezpośredni w najszerszym podprzedziale $S'_R \subset S$ w przypadku, gdy parametry skali M i K w tych modelach są równe (model wykorzystuje tylko funkcje skalujące $\varphi_{Kn}^p(x)$) (por. z Rys. 3.7)

Nośnik modeli empirycznych $\hat{R}_R(x; K, p)$. Nośnik modeli $\hat{R}_R(x; K, p)$ jest dany następującym wzorem

$$\text{supp } \hat{R}_R(x; K, p) = \bigcup_{n=n'_{\min}(M,p)}^{n'_{\min}(M,p)} \text{supp } \varphi_{Mn}^p(x) \cup \bigcup_{m=M}^{K-1} \bigcup_{l=l'_{\min}(m,p)}^{l'_{\min}(m,p)} \text{supp } \psi_{ml}^p(x)$$

a zatem, przy granicach sumowań podanych we wzorze (3.62) i przy uwzględnieniu postaci nośników odpowiednich funkcji falkowych $\varphi_{Mn}^p(x)$ i $\psi_{ml}^p(x)$, jest równy (por. wzór (1.11) w punkcie 1.1)

$$\begin{aligned} \text{supp } \hat{R}_R(x; K, p) &= \bigcup_{n=\lceil 2^M a \rceil}^{\lfloor 2^M b \rfloor - 2p + 1} \left[\frac{n}{2^M}, \frac{n+2p-1}{2^M} \right) \cup \bigcup_{m=K}^{K-1} \bigcup_{l=\lceil 2^m a \rceil - 1 + p}^{\lfloor 2^m b \rfloor - p} \left[\frac{l+1-p}{2^m}, \frac{l+p}{2^m} \right) = \\ &= \bigcup_{l=\lceil 2^{K-1} a \rceil - 1 + p}^{\lfloor 2^{K-1} b \rfloor - p} \left[\frac{l+1-p}{2^{K-1}}, \frac{l+p}{2^{K-1}} \right) = \left[\frac{\lfloor 2^{K-1} a \rfloor}{2^{K-1}}, \frac{\lfloor 2^{K-1} b \rfloor}{2^{K-1}} \right) = \\ &\stackrel{\text{def}}{=} S_R = [a_R, b_R] \end{aligned} \quad (3.71)$$

a zatem jest ogólnie węższy od przedziału $S = [a, b]$ (zob. Rys. 3.7). W rezultacie pomiary, których składowa wejściowa x_k leży na brzegach $[a, 2^{-(K-1)} \lfloor 2^{K-1} a \rfloor]$ oraz $[2^{-(K-1)} \lfloor 2^{K-1} b \rfloor, b]$ przedziału S , nie są brane pod uwagę przez rozważany algorytm podczas wyznaczania współczynników modeli $\hat{R}_R(x; K, p)$. Dla porównania, w przypadku modelu z Rys. 3.8 (tj. dla $M = K$) nośnik tego modelu wynosi

$$\text{supp } \hat{R}_R(x; K, p) = \bigcup_{n=\lceil 2^K a \rceil}^{\lfloor 2^K b \rfloor - 2p + 1} \left[\frac{n}{2^K}, \frac{n+2p-1}{2^K} \right) = \left[\frac{\lfloor 2^K a \rfloor}{2^K}, \frac{\lfloor 2^K b \rfloor}{2^K} \right)$$

a zatem odpowiednie przedziały brzegowe są mniejsze (i mniejsza może być także liczba pomiarów niewykorzystanych przez algorytm identyfikacji).

Uwaga 3.9 Dla modeli empirycznych $\hat{R}_R(x; K, p)$ opartych o funkcje Haara ($p = 1$), w przypadku, gdy granice a, b przedziału S leżą na siatce binarnej $\mathbf{B}_H, H \leq M$ (por. definicja w Dodatku A.2, str. 114), zachodzi (por. wzory (3.69) i (3.71))

$$a'_R = a_R = a \quad \text{oraz} \quad b'_R = b_R = b$$

i algorytm bezpośredni identyfikuje w takim przypadku nieliniowość $R(x)$ w całym przedziale S , z wykorzystaniem wszystkich pomiarów ze zbioru $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^N$.

Zbieżność oszacowań $\hat{\alpha}_{Mn}^{p'}$ i $\hat{\beta}_{ml}^{p'}$

Na mocy tożsamości (3.63) oraz założeń **Z3-Z5**, estymatory $\hat{\alpha}_{Mn}^{p'}$ i $\hat{\beta}_{ml}^{p'}$ (dane wzorem (3.64)) są nieobciążone

$$E \hat{\alpha}_{Mn}^{p'} = \alpha_{Mn}^{p'} \quad \text{oraz} \quad E \hat{\beta}_{ml}^{p'} = \beta_{ml}^{p'} \quad (3.72)$$

Ponadto, ich wariancje spełniają następujące oszacowania

$$\text{var } \hat{\alpha}_{Mn}^{p'} \leq \frac{1}{N} (A'_{\text{var}} + A'_{\text{cov}}) \quad \text{oraz} \quad \text{var } \hat{\beta}_{mn}^{p'} \leq \frac{1}{N} (B'_{\text{var}} + B'_{\text{cov}}) \quad (3.73)$$

gdzie $A'_{\text{var}}, B'_{\text{var}}$ oraz $A'_{\text{cov}}, B'_{\text{cov}}$ są dodatnimi stałymi zależnymi od części dynamicznej systemu i własności zakłóceń zewnętrznych (zob. (B.31) i (B.32) w Dodatku B.5).

Z własności (3.72) i (3.73) wnioskujemy, że (por. z lematem 3.1):

Lemat 3.7 Współczynniki $\hat{\alpha}_{Mn}^{p'}$ i $\hat{\beta}_{ml}^{p'}$ modeli empirycznych $\hat{R}_R(x; K, p)$ zbiegają średniokwadratowo do współczynników $\alpha_{Mn}^{p'}$ i $\beta_{ml}^{p'}$ modeli teoretycznych $R_R(x; K, p)$ wraz z rosnącą liczbą pomiarów N . Ich błędy średniokwadratowe spełniają nierówności

$$\begin{aligned} \text{MSE } \hat{\alpha}_{Mn}^{p'} &= \text{var } \hat{\alpha}_{Mn}^{p'} \leq \frac{1}{N} (A'_{\text{var}} + A'_{\text{cov}}) \\ \text{MSE } \hat{\beta}_{ml}^{p'} &= \text{var } \hat{\beta}_{ml}^{p'} \leq \frac{1}{N} (B'_{\text{var}} + B'_{\text{cov}}) \end{aligned}$$

A zatem, podobnie jak współczynniki empiryczne $\hat{\alpha}_{Mn}^p$ i $\hat{\beta}_{ml}^p$ modeli $\hat{G}(x; K, p)$, również powyższe charakteryzują się własnościami **V1-V3** (str. 29), zbiegając przy tym bezpośrednio do współczynników rozwinięcia falkowego identyfikowanej nieliniowości $R(x)$.

A. Analiza zbieżności punktowej modeli $\hat{R}_R(x; K, p)$

Analiza zbieżności punktowej modeli empirycznych $\hat{R}_R(x; K, p)$ przebiega podobnie jak przeprowadzona w punkcie 3.1.1 analiza zbieżności punktowej modeli empirycznych $\hat{G}(x; K, p)$ wyznaczanych za pomocą algorytmu ilorazowego.

Rozpocznijmy ją od dekompozycji punktowego błędu średniokwadratowego modeli empirycznych $\hat{R}_R(x; K, p)$ w ustalonym punkcie x

$$\begin{aligned} \text{MSE } \hat{R}_R(x; K, p) &= E \left[R(x) - \hat{R}_R(x; K, p) \right]^2 = \\ &= \left[R(x) - E \hat{R}_R(x; K, p) \right]^2 + E \left[E \hat{R}_R(x; K, p) - \hat{R}_R(x; K, p) \right]^2 = \\ &= \text{bias}^2 \hat{R}_R(x; K, p) + \text{var } \hat{R}_R(x; K, p) \end{aligned} \quad (3.74)$$

na dwa składniki błędu modelu: kwadrat obciążenia $\text{bias}^2 \hat{R}_R(x; K, p)$ oraz wariancję wyjścia modelu $\text{var } \hat{R}_R(x; K, p)$.

Wariancja wyjścia modelu $\text{var } \hat{R}_R(x; K, p)$. Z własności (3.72) wynika, że modele empiryczne $\hat{R}_R(x; K, p)$ są – dla poszczególnych K i p – nieobciążonymi estymatorami modeli teoretycznych $R_R(x; K, p)$ (por. wzór (3.13))

$$E \hat{R}_R(x; K, p) = R_R(x; K, p) \quad (3.75)$$

W konsekwencji zatem

$$\text{var } \hat{R}_R(x; K, p) = E \left[R_R(x; K, p) - \hat{R}_R(x; K, p) \right]^2$$

Na podstawie obliczeń zawartych w Dodatku B.6 (str. 128) otrzymujemy, że w każdym punkcie $x \in S'_R$ wariancja wyjścia modelu empirycznego $\hat{R}_R(x; K, p)$ spełnia nierówność

$$\text{var } \hat{R}_R(x; K, p) \leq \frac{2^K}{N} \cdot C'_{\text{var}} \quad (3.76)$$

gdzie C'_{var} jest dodatnią stałą, zależną od dynamiki systemu i zakłóceń zewnętrznych z_k . Podobnie zatem jak dla modelu $\hat{G}(x; K, p)$, rząd wariancji wyjścia modeli empirycznych $\hat{R}_R(x; K, p)$ zależy tylko od liczby pomiarów N oraz przyjętych skal K modeli (por. (3.14) oraz własności **V1-V3**, str. 29).

Obciążenie $\text{bias}^2 \hat{R}_R(x; K, p)$. Ze względu na (3.75) kwadrat obciążenia modeli empirycznych $\hat{R}_R(x; K, p)$ w punkcie x jest równy kwadratowi błędu aproksymacji w tym punkcie nieliniowości $R(x)$ za pomocą jej falkowych modeli teoretycznych $R_R(x; K, p)$:

$$\text{bias}^2 \hat{R}_R(x; K, p) = [R(x) - E \hat{R}_R(x; K, p)]^2 = [R(x) - R_R(x; K, p)]^2 \quad (3.77)$$

A zatem ma przyczyny jedynie natury deterministycznej i nie zależy od liczby pomiarów N . Błąd ten maleje do zera ze wzrostem skali K w tych punktach x , w których identyfikowana nieliniowość $R(x)$ jest ciągła (zob. [80, twierdzenie 2.1]), bez względu na zachowanie się w tym punkcie funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$ (por. (3.16)),

$$\text{bias}^2 \hat{R}_R(x; K, p) \rightarrow 0 \quad \text{dla} \quad K \rightarrow \infty \quad (3.78)$$

Zbieżność punktowa modeli $\hat{R}_R(x; K, p)$

Dobierając parametr skali K tak, aby wzrost liczby pomiarów N powodował jednocześnie zmniejszanie się obu składowych błędów średniokwadratowego we wzorze (3.74) (por. z dyskusją na str. 30, dotyczącą warunków zbieżności punktowej modeli empirycznych $\hat{G}(x; K, p)$), tj. aby

$$K = K'(N) \rightarrow \infty \quad \text{oraz} \quad \frac{2^{K'(N)}}{N} \rightarrow 0 \quad \text{dla} \quad N \rightarrow \infty \quad (3.79)$$

otrzymujemy następujące twierdzenie charakteryzujące warunki zbieżności modeli empirycznych $\hat{R}_R(x; K, p)$ (por. z twierdzeniem 3.1).

Twierdzenie 3.7 (Średniokwadratowa zbieżność punktowa) *Jeśli identyfikowana nieliniowość $R(x)$ jest ciągła w punkcie $x \in S'_R = [a'_R, b'_R]$, a skala K modeli empirycznych $\hat{R}_R(x; K, p)$ zależy od liczby pomiarów N tak, że spełnione są warunki w (3.79), to dla dowolnego p modele te zbiegają w tym punkcie średniokwadratowo do identyfikowanej nieliniowości $R(x)$*

$$\text{MSE} \hat{R}_R(x; K'(N), p) = E [R(x) - \hat{R}_R(x; K'(N), p)]^2 \rightarrow 0 \quad \text{gdy} \quad N \rightarrow \infty$$

Z powyższego twierdzenia wnioskujemy zatem, że zbieżność punktowa empirycznych modeli falkowych $\hat{R}_R(x; K, p)$ do nieliniowości $R(x)$ nie zależy od ciągłości funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$.

Z punktowej zbieżności średniokwadratowej modeli $\hat{R}_R(x; K, p)$ wynika ich punktowa zbieżność według prawdopodobieństwa (por. wniosek 3.1):

Wniosek 3.2 (Zbieżność punktowa wg prawdopodobieństwa) *Jeśli spełnione są założenia twierdzenia 3.7, modele empiryczne $\hat{R}_R(x; K'(N), p)$ zbiegają do nieliniowości $R(x)$ według prawdopodobieństwa, w każdym punkcie $x \in S'_R = [a'_R, b'_R]$, w którym ta nieliniowość jest ciągła*

$$\hat{R}_R(x; K'(N), p) \xrightarrow{P} R(x) \quad \text{gdy} \quad N \rightarrow \infty$$

Szybkość zbieżności punktowej modeli $\hat{R}_R(x; K, p)$

Aby wyznaczyć szybkość średniokwadratowej zbieżności modeli $\hat{R}_R(x; K, p)$ do identyfikowanej nieliniowości $R(x)$ przyjmujemy teraz następujące założenie o jej gładkości (por. założenie **Z7**, str. 34).

Z7'. Nieliniowość $R(x)$ należy do klasy

$$R(x) \in \mathcal{C}^\beta[a_x, b_x] \quad [a_x, b_x] \subseteq S'_R, \quad \beta > 0$$

gdzie

$$a_x = \frac{\lfloor 2^K x \rfloor - 2p + 2}{2^K} \quad \text{oraz} \quad b_x = \frac{\lfloor 2^K x \rfloor + 2p - 1}{2^K}$$

Zauważmy, że założenie to nie dotyczy funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$, która może być teraz dowolna (w zakresie podanym w założeniu **Z1** w rozdz. 1).

Szybkość zbieżności błędu obciążenia $\text{bias}^2 \hat{R}_R(x; K, p)$. Korzystając teraz z oszacowania błędu obciążenia w ustalonym punkcie x , uzyskanego w Dodatku B.4 (str. 126) dla modeli $\hat{G}(x; K, p)$ otrzymujemy (przy podstawieniu $G(x) = R(x)$ oraz $\lambda = \beta$), że odpowiednie oszacowanie błędu obciążenia dla modeli $\hat{R}_R(x; K, p)$ wynosi

$$\text{bias}^2 \hat{R}_R(x; K, p) \leq 2^{-2\gamma'K} \cdot C'_{\text{bias}} \quad (3.80)$$

gdzie $\gamma' = \min\{\beta, p\}$ i C'_{bias} jest dodatnią stałą (zależną od nieliniowości $R(x)$ i falek $\psi_{ml}^p(x)$).

Na podstawie tej nierówności wnioskujemy, że przy założeniu **Z7'** (por. własności **B1-B4** modeli $\hat{G}(x; K, p)$, str. 35):

B1'. Wraz ze wzrostem skali K empirycznych modeli falkowych $\hat{R}_R(x; K, p)$, kwadrat ich błędu obciążenia maleje wykładniczo do zera w punktach ciągłości nieliniowości $R(x)$, przy dowolnej funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$ (spełniającej założenie **Z1**).

B2'. Szybkość zmniejszania się tego błędu zależy jedynie od gładkości nieliniowości $R(x)$ oraz od zastosowanych w modelach funkcji falkowych (numeru falkowego p), natomiast *nie zależy* od gładkości funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$.

B3'. Wpływ na błąd obciążenia modeli $\hat{R}_R(x; K, p)$ w punkcie x ma gładkość nieliniowości $R(x)$ jedynie w otoczeniu tego punktu (w przedziale $[a_x, b_x]$).

B4'. Oszacowanie (3.80) jest prawdziwe dla wszystkich punktów x należących do przedziału $\left[\frac{\lfloor 2^K x \rfloor}{2^K}, \frac{\lfloor 2^K x \rfloor + 1}{2^K} \right) \subseteq S'_R$.

Szybkość średniokwadratowej zbieżności punktowej modeli $\hat{R}_R(x; K, p)$. Nierówności (3.76) i (3.80) pozwalają w następujący sposób oszacować asymptotyczny błąd średniokwadratowy modeli empirycznych $\hat{R}_R(x; K, p)$ w dowolnym, ustalonym punkcie $x \in S'_R$ (por. wzór (3.30)):

$$\text{MSE } \hat{R}_R(x; K, p) \leq \left(2^{-2\gamma'K} + \frac{2^K}{N} \right) \cdot C'_{\text{MSE}} \quad (3.81)$$

gdzie $C'_{\text{MSE}} = \max\{C'_{\text{bias}}, C'_{\text{var}}\}$. Minimalizacja tego oszacowania względem parametru skali K prowadzi do następującej reguły lokalnego doboru skali K modeli empirycznych $\hat{R}_R(x; K, p)$ (w otoczeniu punktu x) dla dużej liczby obserwacji N (por. warunki (3.79) i regułę doboru skali (3.31) w modelach empirycznych $\hat{G}(x; K, p)$)

$$K = K'_{\text{opt}}(N) = \left\lfloor \frac{1}{2\gamma' + 1} \log_2 2\gamma' N \right\rfloor \quad (3.82)$$

Podstawiając ten wzór do oszacowania (3.81) otrzymujemy następujące twierdzenie (por. twierdzenie 3.2).

Twierdzenie 3.8 (Szybkość średniokwadratowej zbieżności punktowej) *Jeśli spełnione są warunki założenia **Z7**, to w każdym punkcie x należącym do przedziału $\left[\frac{\lfloor 2^K x \rfloor}{2^K}, \frac{\lfloor 2^K x \rfloor + 1}{2^K}\right)$, błąd średniokwadratowy modeli empirycznych $\hat{R}_R(x; K, p)$, przy skali K dobieranej według reguły (3.82), spełnia nierówność*

$$\text{MSE } \hat{R}_R(x; K'_{\text{opt}}(N), p) \leq N^{-\frac{2\gamma'}{2\gamma'+1}} \cdot C'^{R\gamma}_{\text{MSE}}, \quad \gamma' = \min\{\beta, p\} \quad (3.83)$$

gdzie $C'^{R\gamma}_{\text{MSE}} = 2 \cdot (2\gamma')^{-2\gamma'/(2\gamma'+1)} C'_{\text{MSE}}$.

Z twierdzeń 3.7 i 3.8 wynikają następujące własności punktowe (w sensie zachowania się błędu średniokwadratowego MSE) empirycznych modeli falkowych $\hat{R}_R(x; K, p)$ (por. z własnościami **RG1-RG4** modeli $\hat{R}_G(x; K, p)$, str. 42):

- RR1.** Modele $\hat{R}_R(x; K, p)$ zbiegają do identyfikowanej nieliniowości $R(x)$ w każdym punkcie jej ciągłości w przedziale $S'_R = [a'_R, b'_R)$, niezależnie od ciągłości w tych punktach funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$.
- RR2.** Szybkość zbieżności modeli $\hat{R}_R(x; K, p)$ ze wzrostem liczby pomiarów N we wzorach (3.64) i (3.83) zależy od lokalnej (w przedziale $[a_x, b_x]$) gładkości nieliniowości $R(x)$ oraz od zastosowanych w modelach funkcji falkowych (numeru falkowego p), natomiast nie zależy od gładkości funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$ (por. wzory (3.82)-(3.83)).
- RR3.** Jeśli w przedziale $[a_x, b_x]$ nieliniowość $R(x)$ należy do klasy C^β , a zastosowane w modelu empirycznym $\hat{R}_R(x; K, p)$ falki mają numer $p \geq \beta$, to wówczas szybkość zbieżności błędu średniokwadratowego tych modeli osiąga asymptotycznie optymalną prędkość $O(N^{-2\beta/(2\beta+1)})$ (por. Dodatek B.7, str. 129).
- RR4.** Na wyznaczone w twierdzeniach 3.7 i 3.8 warunki i szybkość zbieżności modeli $\hat{R}_R(x; K, p)$ nie wpływają ani struktura ani dynamika systemu (z klasy rozważanych systemów), ani też skorelowanie zakłóceń pomiarowych z_k .
- RR5.** Przedział $S'_R = [a'_R, b'_R)$, w którego punktach może zachodzić zbieżność modeli empirycznych $\hat{R}_R(x; K, p)$ jest, w ogólności, węższy niż przedział S . Różnica pomiędzy tymi przedziałami maleje ze wzrostem skali M (por. wzory (3.69) i (3.70)) (i dla przyjętej skali K modeli jest najmniejsza gdy $M = K$).

Poniższe twierdzenie określa szybkość zbieżności punktowej empirycznych modeli falkowych $\hat{R}_R(x; K, p)$ według prawdopodobieństwa (por. twierdzenie 3.3).

Twierdzenie 3.9 (Szybkość zbieżności punktowej wg prawdopodobieństwa)

Jeżeli spełnione są założenia twierdzenia 3.8, to dla błędu bezwzględnego modeli empirycznych $\hat{R}_R(x; K'_{\text{opt}}(N), p)$ zachodzi asymptotycznie w każdym punkcie $x \in \left[\frac{\lfloor 2^K x \rfloor}{2^K}, \frac{\lfloor 2^K x \rfloor + 1}{2^K} \right)$, następujące oszacowanie:

$$\left| R(x) - \hat{R}_R(x; K'_{\text{opt}}(N), p) \right| = O\left(N^{-\frac{\gamma'}{2\gamma'+1}}\right) \quad (3.84)$$

według prawdopodobieństwa.

Dowód. Dowód twierdzenia otrzymujemy po zastosowaniu twierdzenia 2.19 z pracy [50, twierdzenie 3, str. 449], cytowanego w Dodatku B.8, str. 129. Podstawiając w nim $g(x) = R(x)$, $\hat{g}_N(x) = \hat{R}_R(x; K'_{\text{opt}}(N), p)$ oraz $\hat{f}_N(x) = f(x) = I_S(x)$ i przyjmując $s_g = 2\gamma'/(2\gamma' + 1)$ oraz $s_f = \infty$, otrzymujemy (3.84). ■

Otrzymujemy zatem kolejną własność:

RR3a. Jeśli zastosowane w modelach empirycznych $\hat{R}_R(x; K, p)$ funkcje falkowe mają numer $p \geq \beta$, to wówczas modele te zbiegają punktowo do nieliniowości $R(x)$ z prędkością $O(N^{-\beta/(2\beta+1)})$, według prawdopodobieństwa (por. własność **RR3**).

B. Analiza zbieżności całkowej modeli $\hat{R}_R(x; K, p)$

Badanie zachowania się modeli empirycznych $\hat{R}_R(x; K, p)$ w sensie globalnego (całkowego) błędu średniokwadratowego MISE opiera się na dekompozycji tego błędu na składowe zintegrowanego kwadratu obciążenia ISB $\hat{R}_R(x; K, p)$ oraz zintegrowanej wariancji wyjścia IV $\hat{R}_R(x; K, p)$ (por. z dyskusją dotyczącą modeli $\hat{G}(x; K, p)$, str 3.1.1).

Błąd ten dla modeli empirycznych $\hat{R}_R(x; K, p)$ definiujemy w przedziale $S'_R = [a'_R, b'_R]$:

$$\text{MISE } \hat{R}_R(x; K, p) = E \int_{S'_R} \left[R(x) - \hat{R}_R(x; K, p) \right]^2 dx = \text{ISB } \hat{R}_R(x; K, p) + \text{IV } \hat{R}_R(x; K, p) \quad (3.85)$$

Podobnie jak dla modeli $\hat{G}(x; K, p)$ w algorytmie ilorazowym, warunki i szybkość całkowej zbieżności modeli $\hat{R}_R(x; K, p)$ zbadamy dla ciągłych i nieciągłych (ze skończoną liczbą nieciągłości typu skok) nieliniowości $R(x)$.

Wariancja IV $\hat{R}_R(x; K, p)$. Składową IV $\hat{R}_R(x; K, p)$ dla $S'_R = [a'_R, b'_R]$ można oszacować korzystając z oszacowania punktowej wariancji modelu empirycznego podanego we wzorze (3.76) (por. (3.34))

$$\text{IV } \hat{R}_R(x; K, p) = \int_{S'_R} \text{var } \hat{R}_R(x; K, p) dx \leq \frac{2^K}{N} \cdot C'_{\text{IV}} \quad (3.86)$$

gdzie $C'_{\text{IV}} = (b'_R - a'_R) C'_{\text{var}}$.

Ociążenie ISB $\hat{R}_R(x; K, p)$. Ze względu na nieobciążoność estymatorów $\hat{\alpha}_{Mn}^{p'}$ i $\hat{\beta}_{ml}^p$ (por. wzory w (3.72)), a zatem też wyjścia modelu empirycznego $\hat{R}_R(x; K, p)$ w stosunku do jego teoretycznego odpowiednika $R_R(x; K, p)$ (por. wzór (3.75)) całkowite obciążenie ISB $\hat{R}_R(x; K, p)$ jest równe całkowemu błędowi aproksymacji identyfikowanej nieliniowości $R(x)$ przez model teoretyczny $R_R(x; K, p)$ (por. wzór (3.35))

$$\begin{aligned} \text{ISB } \hat{R}_R(x; K, p) &= \int_{S'_R} \left[R(x) - E \hat{R}_R(x; K, p) \right]^2 dx = \\ &= \int_{S'_R} [R(x) - R_R(x; K, p)]^2 dx = \text{ISE } R_R(x; K, p) \end{aligned} \quad (3.87)$$

a zatem, podobnie jak składowa obciążenia bias² $\hat{R}_R(x; K, p)$ błędu punktowego, ma przyczyny natury deterministycznej. Na mocy własności (1.21) w rozdz. 1 falkowej analizy wielorozdzielczej, obciążenie ISB $\hat{R}_R(x; K, p)$ maleje do zera ze wzrostem skali K modeli, dla dowolnych $R(x)$ spełniających założenie **Z2** z rozdz. 2 i dla dowolnego numeru falkowego p (por. wzór (3.36))

$$\text{ISB } \hat{R}_R(x; K, p) \rightarrow 0, \quad \text{gdy } K \rightarrow \infty \quad (3.88)$$

Zbieżność całkowita modeli $\hat{R}_R(x; K, p)$

Opierając się na rozumowaniu przedstawionym w trakcie analizy warunków zbieżności całkowitej modeli empirycznych $\hat{G}(x; K, p)$ (zob. str. 37) i dotyczących doboru skali K w zależności od liczby pomiarów otrzymujemy, że w przedziale użytecznym S'_R falkowe modele empiryczne $\hat{R}_R(x; K, p)$ zbiegają w sensie błędu MISE (danego wzorem (3.85)) do dowolnej, ograniczonej w przedziale S nieliniowości $R(x)$, jeśli ich skala K zależy od liczby pomiarów N tak, że spełnione są warunki

$$K = K'(N) \rightarrow \infty \quad \text{oraz} \quad 2^{K'(N)}/N \rightarrow 0 \quad \text{gdy } N \rightarrow \infty \quad (3.89)$$

Otrzymaliśmy zatem następujące twierdzenie (por. twierdzenie 3.4).

Twierdzenie 3.10 (Średniokwadratowa zbieżność całkowita) *Jeśli skala K modeli $\hat{R}_R(x; K, p)$ zależy od liczby pomiarów N tak, że spełnione są warunki (3.89), to dla dowolnego p modele te zbiegają w przedziale $S'_R = [a'_R, b'_R]$, gdzie (por. (3.69)):*

$$a'_R = \frac{\lceil 2^M a \rceil + 2p - 2}{2^M} \quad \text{oraz} \quad b'_R = \frac{\lfloor 2^M b \rfloor - 2p + 2}{2^M}$$

do nieliniowości $R(x)$, w sensie całkowego błędu średniokwadratowego (MISE)

$$\text{MISE } \hat{R}_R(x; K'(N), p) = E \int_{S'_R} \left[R(x) - \hat{R}_R(x; K'(N), p) \right]^2 dx \rightarrow 0 \quad N \rightarrow \infty$$

Zauważmy, że zbieżność całkowita modeli empirycznych $\hat{R}_R(x; K'(N), p)$ nie zależy od ciągłości identyfikowanej nieliniowości $R(x)$.

Szybkość zbieżności całkowitej modeli $\hat{R}_R(x; K, p)$

Jako pierwszy rozpatrzmy przypadek, gdy identyfikowana nieliniowość $R(x)$ jest ciągła w przedziale $S = [a, b]$.

a) **Nieliniowość $R(x)$ ciągła w przedziale $S = [a, b]$.** Do oszacowania błędu całkowego modeli falkowych $\hat{R}_R(x; K, p)$ w przypadku ciągłej nieliniowości $R(x)$ możemy wykorzystać wyniki uzyskane w trakcie analizy błędu punktowego tych modeli. Ponieważ dla dowolnego przedziału $S' \subseteq S'_R$ zachodzi

$$\text{MISE } \hat{R}_R(x; K, p) = \int_{S'} \text{MSE } \hat{R}_R(x; K, p) dx$$

to dla błędu całkowego modeli empirycznych $\hat{R}_R(x; K, p)$ otrzymujemy, jako wniosek z twierdzenia 3.8, następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.11 (Szybkość średniokwadratowej zbieżności całkowej) ($R(x)$ ciągła) *Jeśli $R(x) \in C^\beta[a, b]$ oraz skale modeli empirycznych $\hat{R}_R(x; K, p)$ dobierane są według reguły (por. (3.82))*

$$K = K'_{\text{opt}}(N) = \frac{1}{2\gamma' + 1} \log_2 2\gamma' N, \quad \gamma' = \min\{\beta, p\} \quad (3.90)$$

to w przedziale $S'_R = [a'_R, b'_R]$, ich całkowite błędy średniokwadratowe są asymptotycznie nie większe niż

$$\text{MISE } \hat{R}_R(x; K'_{\text{opt}}(N), p) = E \int_{S'_R} [R(x) - \hat{R}_R(x; K'_{\text{opt}}(N), p)]^2 dx \leq N^{-\frac{2\gamma'}{2\gamma'+1}} \cdot C_{\text{MISE}}^{R\gamma} \quad (3.91)$$

gdzie $C_{\text{MISE}}^{R\gamma} = (b'_R - a'_R) C_{\text{MISE}}^{R\gamma}$.

Powyższe twierdzenie gwarantuje modelom empirycznym $\hat{R}_R(x; K, p)$ szybkość zbieżności rzędu $O(N^{-2\gamma'/(2\gamma'+1)})$, gdzie $\gamma' = \min\{\beta, p\}$. Zauważmy, że gwarantowana szybkość zbieżności zachodzi przy dowolnych funkcjach gęstości wejścia $f(x)$ spełniających założenie **Z1** z rozdz. 1.

b) **Nieliniowość $R(x)$ nieciągła w skończonej liczbie punktów.** Na mocy wzoru (3.86) rząd zintegrowanej wariancji wyjścia modelu $\hat{R}_R(x; K, p)$ zależy jedynie od liczby pomiarów N i przyjętej w modelu skali K . A zatem do ustalenia gwarantowanej szybkości całkowej zbieżności średniokwadratowej modeli empirycznych $\hat{R}_R(x; K, p)$ wystarczy zbadać zachowanie się obciążenia ISB $\hat{R}_R(x; K, p)$.

Przyjmujemy teraz następujące założenie dotyczące identyfikowanej nieliniowości $R(x)$ (por. założenie **Z7a** na str. 39):

Z7a' Nieliniowość $R(x)$ jest w przedziale S odcinkami gładka, tj. ma w tym przedziale skończoną, ale nieznaną liczbę punktów nieciągłości typu skok i poza nimi należy do klasy C^β .

Korzystając z oszacowania zintegrowanego obciążenia modeli $\hat{G}(x; K, p)$ (por. wzór (3.45), str. 40) dla przypadku nieciągłej funkcji $G(x)$ otrzymujemy, po podstawieniu $f(x) = I_S(x)$, że zintegrowane obciążenie modeli empirycznych $\hat{R}_R(x; K, p)$ przy założeniu **Z7a'** spełnia następującą nierówność

$$\text{ISB } \hat{R}_R(x; K, p) \leq 2^{-2\varrho'K} \cdot C_{\text{ISB}}^{R\varrho'}, \quad \varrho' = \min\left\{\beta, \frac{1}{2}\right\}$$

gdzie $C_{\text{ISB}}^{R\varrho'}$ jest dodatnią stałą zależną od identyfikowanej nieliniowości $R(x)$ i zastosowanych w modelu funkcji falkowych $\psi_{ml}^p(x)$.

Powyższe, wraz z oszacowaniem całkowitej wariancji w IV $\hat{R}_R(x; K, p)$ we wzorze (3.86), prowadzi do następującej nierówności charakteryzującej średniokwadratowy błąd całkowity empirycznych modeli falkowych $\hat{R}_R(x; K, p)$ w przypadku nieciągłej nieliniowości $R(x)$ (por. (3.46))

$$\text{MISE } \hat{R}_R(x; K, p) \leq 2^{-2\varrho'K} \cdot C_{\text{ISB}}^{R\varrho'} + \frac{2^K}{N} \cdot C'_{\text{IV}} \leq \left(2^{-2\varrho'K} + \frac{2^K}{N}\right) \cdot C_{\text{MISE}}^{\varrho'} \quad (3.92)$$

gdzie $C_{\text{MISE}}^{\varrho'} = \max \{C_{\text{ISB}}^{R\varrho'}, C'_{\text{IV}}\}$. Optymalizując to oszacowanie względem parametru skali K otrzymujemy, że (por. (3.47))

$$K = K'_{\text{opt}}(N) = \left\lfloor \frac{1}{2\varrho' + 1} \log_2 2\varrho' N \right\rfloor \quad (3.93)$$

Po wstawieniu powyższej reguły do wzoru (3.92) otrzymujemy następujące twierdzenie (por. twierdzenie 3.6).

Twierdzenie 3.12 (Szybkość średniokwadratowej zbieżności całkowej) ($R(x)$ nieciągła) *Jeśli nieliniowość $R(x)$ ma w przedziale $S = [a, b]$ dowolną, skończoną liczbę punktów nieciągłości (typu skok), a pomiędzy punktami nieciągłości należy do klasy $C^\beta, \beta > 0$ oraz jeśli skale modeli empirycznych $\hat{R}_R(x; K, p)$ dobierane są według wzoru (3.93), to w przedziale S'_R całkowite błędy średniokwadratowe tych modeli są asymptotycznie nie większe niż*

$$\text{MISE } \hat{R}_R(x; K'_{\text{opt}}(N), p) = \mathbb{E} \int_{S'_R} \left[R(x) - \hat{R}_R(x; K'_{\text{opt}}(N), p) \right]^2 dx \leq N^{-\frac{2\varrho'}{2\varrho'+1}} \cdot C_{\text{MISE}}^{R\varrho'} \quad (3.94)$$

gdzie $\varrho' = \min \{\beta, 1/2\}$ oraz $C_{\text{MISE}}^{R\varrho'} = 2 \cdot (2\varrho')^{-2\varrho'/(2\varrho'+1)} C_{\text{MISE}}^{\varrho'}$.

Z twierdzeń 3.10-3.12 wnioskujemy następujące własności falkowych modeli empirycznych $\hat{R}_R(x; K, p)$ w sensie zachowania się błędu całkowego MISE (por. własności **RR1-RR5** oraz własności **RG4-RG8** modelu $\hat{R}_G(x; K, p)$):

- RR6.** Przy założeniach twierdzenia 3.10, modele empiryczne $\hat{R}_R(x; K, p)$ zbiegają w przedziale $S'_R = [a'_R, b'_R]$ do dowolnych (w tym nieciągłych) nieliniowości $R(x)$.
- RR7.** Szybkość zbieżności modelu $\hat{R}_R(x; K, p)$ zależy od gładkości nieliniowości $R(x)$ w przedziale S i od zastosowanych w nim funkcji falkowych, ale nie zależy od gładkości funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$ (por. wzory (3.90)-(3.91) i (3.93)-(3.94)).
- RR8.** Jeśli zastosowane w modelu empirycznym falki mają numer $p \geq \beta$, to wówczas model $\hat{R}_R(x; K, p)$ zbiega do nieliniowości $R(x)$ z asymptotycznie optymalną prędkością $O(N^{-2\beta/(2\beta+1)})$ przy dowolnych $f(x)$ spełniających założenie **Z1** (por. Dodatek B.7, str. 129 i własności **RR3** oraz **RG3**).
- RR9.** Oszacowanie (3.94) gwarantuje w praktycznych zastosowaniach (dla $\beta \geq 1/2$) minimalną szybkość zbieżności modeli falkowych $\hat{R}_R(x; K, p)$ rzędu $O(N^{-1/2})$, niezależną od numeru falki p (i gładkości funkcji gęstości wejścia $f(x)$).

RR10. Na szybkość zbieżności nie wpływają (z dokładnością do stałych) ani struktura systemu (z klasy rozważanych systemów) ani jego dynamika, ani też skorelowanie zakłóceń z_k (por. własności **RR4** oraz **RG4**).

Przykłady. Dla nieliniowości $R(x)$ odcinkami stałych, błąd (3.94) maleje z gwarantowaną szybkością rzędu $O(N^{-1/2})$ i nie zależy od zastosowanych w modelach $\hat{R}_R(x; K, p)$ funkcji falkowych i gładkości funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$ (por. wzór (3.93)).

Jeśli $R(x)$ jest dwukrotnie różniczkowalna (należy np. do klasy $C^{2.5}[a, b]$), a funkcja gęstości $f(x)$ jest nieciągła, to wówczas modele empiryczne $\hat{R}_R(x; K, p)$ oparte o falki Hara ($p = 1$) zbiegają do nieliniowości $R(x)$ z gwarantowaną prędkością $O(N^{-2/3})$, która przy zastosowaniu falek o numerze $p \geq 3$ wzrasta do asymptotycznie optymalnej (wynoszącej tu $O(N^{-5/6})$ – por. wzory (3.90)-(3.91) i własność **RR8**). Natomiast modele $\hat{R}_G(x; K, p)$ zbiegają w obu przypadkach (zarówno dla $p = 1$ jak i $p = 3$) ze znacznie mniejszą gwarantowaną szybkością $O(N^{-1/2})$ (zob. wzory (3.58)-(3.59)), niezależną od zastosowanych funkcji falkowych (numeru p).

C. Dobór falek w empirycznym modelu falkowym $\hat{R}_R(x; K, p)$

Na podstawie przeprowadzonej analizy i podanych przykładów należy stwierdzić, że wskazówki dotyczące doboru funkcji falkowych w modelach empirycznych $\hat{R}_G(x; K, p)$ otrzymywanych za pomocą algorytmu ilorazowego (por. str. 45) można odnieść również do modeli $\hat{R}_R(x; K, p)$ uzyskiwanych za pomocą algorytmu bezpośredniego. Jednakże, ze względu na niezależność własności (warunków i szybkości zbieżności) modeli empirycznych $\hat{R}_R(x; K, p)$ od gładkości funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$, dobór jest ten podyktowany jedynie własnościami identyfikowanej nieliniowości $R(x)$.

Zwróćmy jednakże uwagę, że zastosowanie w modelach empirycznych $\hat{R}_R(x; K, p)$ funkcji falkowych o wysokim numerze p wiąże się (w praktycznych sytuacjach – tj. przy skończonej skali $M \leq K$) ze zmniejszeniem przedziału użytecznego S'_R , w którym modele te zbiegają do identyfikowanej nieliniowości $R(x)$ (por. wzory (3.69)-(3.70) i twierdzenia 3.7-3.12 oraz własność **RR5**).

Dalsze wskazówki dotyczące doboru funkcji falkowych w modelach empirycznych $\hat{R}_R(x; K, p)$ dla przypadków małej i umiarkowanej liczby pomiarów N , przedstawiamy w rozdz. 5, w oparciu o wyniki eksperymentów numerycznych.

B. Nieznana gęstość prawdopodobieństwa wejścia systemu

3.3 Algorytm ilorazowy z estymacją funkcji gęstości wejścia systemu

W wielu praktycznych sytuacjach funkcja gęstości wejścia systemu $f(x)$ jest nieznana. Zatem, z punktu widzenia zastosowań ważne są algorytmy umożliwiające identyfikację nieliniowości $R(x)$ również przy nieznanej funkcji gęstości wejścia.

Podstawa teoretyczna. Klasa teoretycznych modeli falkowych nieliniowości $R(x)$, która stanowi podstawę obecnego algorytmu identyfikacji, składa się z następujących modeli opartych, podobnie jak modele teoretyczne $R_G(x; K, p)$ w przypadku znanej gęstości wejścia $f(x)$, o faktoryzację nieliniowości $R(x)$ (zob. wzór (3.1) w punkcie 3.1)

$$R_{Gf}(x; K, p) = \frac{G(x; K, p)}{f(x; K, p)} \quad (3.95)$$

w których licznik $G(x; K, p)$ jest teoretycznym modelem falkowym funkcji $G(x)$ ($= R(x) \cdot f(x)$) (jak w modelach teoretycznych $R_G(x; K, p)$ – zob. wzory (3.2) i (3.3)):

$$G(x; K, p) = \sum_{n=n_{\min}(M,p)}^{n_{\max}(M,p)} \alpha_{Mn}^p \varphi_{Mn}^p(x) + \sum_{m=M}^{K-1} \sum_{l=l_{\min}(m,p)}^{l_{\max}(m,p)} \beta_{ml}^p \psi_{ml}^p(x) \quad (3.96)$$

(ze współczynnikami α_{Mn}^p i β_{ml}^p danymi wzorami (3.4)) a mianownik $f(x; K, p)$ stanowi teoretyczny model falkowy nieznanej gęstości wejścia systemu $f(x)$ (jej falkową aproksymację):

$$f(x; K, p) = \sum_{n=n_{\min}(M,p)}^{n_{\max}(M,p)} a_{Mn}^p \varphi_{Mn}^p(x) + \sum_{m=M}^{K-1} \sum_{l=l_{\min}(m,p)}^{l_{\max}(m,p)} b_{ml}^p \psi_{ml}^p(x) \quad (3.97)$$

o współczynnikach a_{Mn}^p i b_{ml}^p równych współczynnikom jej rozwinięcia w szereg falkowy (por. wzory w (3.4))

$$a_{Mn}^p = \int_{\frac{n}{2^M}}^{\frac{n+(2p-1)}{2^M}} f(x) \varphi_{Mn}^p(x) dx \quad \text{oraz} \quad b_{ml}^p = \int_{\frac{l+(1-p)}{2^m}}^{\frac{l+p}{2^m}} f(x) \psi_{ml}^p(x) dx \quad (3.98)$$

Granice sumowań w modelach $f(x; K, p)$ wynoszą (por. wzór (3.5))

$$\begin{aligned} n_{\min}(M, p) &= \lfloor 2^M a \rfloor - 2p + 2 & l_{\min}(m, p) &= \lfloor 2^m a \rfloor - p + 1 \\ n_{\max}(M, p) &= \lceil 2^M b \rceil - 1 & l_{\max}(m, p) &= \lceil 2^m b \rceil + p - 2 \end{aligned} \quad \text{oraz} \quad (3.99)$$

gdzie a, b są granicami przedziału S .

Algorytm identyfikacji. Modele empiryczne. Zadanie algorytmu identyfikacji polega na wyznaczeniu empirycznego modelu falkowego nieliniowości $R(x)$ na podstawie zbioru pomiarów $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^N$. Wobec nieznanowości zarówno identyfikowanej nieliniowości $R(x)$ jak i funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$, polega ono na oszacowaniu (estymacji) współczynników α_{Mn}^p , β_{ml}^p i a_{Mn}^p , b_{ml}^p obu modeli falkowych $G(x; K, p)$ i $f(x; K, p)$ (wzory (3.96) i (3.97)).

Współczynniki pierwszego z nich szacujemy, analogicznie jak w modelach empirycznych $\hat{R}_G(x; K, p)$ w algorytmie ilorazowym przy znanej funkcji gęstości wejścia systemu, za pomocą estymatorów (zob. wzory w (3.7)):

$$\hat{\alpha}_{Mn}^p = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_k \varphi_{Mn}^p(x_k) \quad \text{oraz} \quad \hat{\beta}_{ml}^p = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_k \psi_{ml}^p(x_k) \quad (3.100)$$

otrzymując model empiryczny ze wzoru (3.9):

$$\hat{G}(x; K, p) = \sum_{n=n_{\min}(M,p)}^{n_{\max}(M,p)} \hat{\alpha}_{Mn}^p \varphi_{Mn}^p(x) + \sum_{m=M}^{K-1} \sum_{l=l_{\min}(m,p)}^{l_{\max}(m,p)} \hat{\beta}_{ml}^p \psi_{ml}^p(x) \quad (3.101)$$

Wykorzystując natomiast, w odniesieniu do modelu $f(x; K, p)$, znane tożsamości (zob. np. [104], [122])

$$a_{Mn}^p = E \varphi_{Mn}^p(x_1) \quad \text{oraz} \quad b_{ml}^p = E \psi_{ml}^p(x_1) \quad (3.102)$$

otrzymujemy następujące estymatory jego współczynników

$$\hat{a}_{Mn}^p = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi_{Mn}^p(x_k) \quad \text{oraz} \quad \hat{b}_{ml}^p = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \psi_{ml}^p(x_k) \quad (3.103)$$

oraz poniższy falkowy model empiryczny nieznanej funkcji gęstości wejścia $f(x)$

$$\hat{f}(x; K, p) = \sum_{n=n_{\min}(M,p)}^{n_{\max}(M,p)} \hat{a}_{Mn}^p \varphi_{Mn}^p(x) + \sum_{m=M}^{K-1} \sum_{l=l_{\min}(m,p)}^{l_{\max}(m,p)} \hat{b}_{ml}^p \psi_{ml}^p(x) \quad (3.104)$$

Uzyskaliśmy w ten sposób klasę (dla różnych p) empirycznych modeli falkowych nieliniowości $R(x)$ (por. (3.101) i (3.104))

$$\hat{R}_{Gf}(x; K, p) = \frac{\hat{G}(x; K, p)}{\hat{f}(x; K, p)} \quad (3.105)$$

odpowiadających klasie modeli teoretycznych (3.95). Algorytm identyfikacji przyjmuje obecnie następującą postać:

Algorytm ilorazowy z estymacją funkcji gęstości wejścia systemu:

Krok 1a. Na podstawie pomiarów $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^N$ oblicz oszacowania $\hat{\alpha}_{Mn}^p$ i $\hat{\beta}_{ml}^p$ według wzorów (3.100).

Krok 1b. Na podstawie pomiarów $\{x_k\}_{k=1}^N$ oblicz oszacowania $\hat{a}_{Mn}^p$ i $\hat{b}_{ml}^p$ według wzorów (3.103).

Krok 2a. Wyznacz empiryczny model funkcji $G(x)$ wstawiając obliczone oszacowania $\hat{\alpha}_{Mn}^p$ i $\hat{\beta}_{ml}^p$ do wzoru (3.101).

Krok 2b. Wyznacz empiryczny model funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$ wstawiając obliczone oszacowania $\hat{a}_{Mn}^p$ i $\hat{b}_{ml}^p$ do wzoru (3.104).

Krok 3. Wyznacz empiryczny model nieliniowości $R(x)$ jako iloraz (3.105), z licznikiem (3.101) i mianownikiem (3.104).

Algorytmy ilorazowe z estymacją nieznaną funkcji gęstości wejścia systemu badano m.in. w pracach [43]-[44], [46], [50], [54]-[56], [86] i [107] dla innych układów funkcji ortogonalnych oraz w pracach [49], [70]-[71], [73] i [108]-[109] dla falek.

Analizę własności modeli $\hat{R}_{Gf}(x; K, p)$ rozpoczniemy od wyznaczenia warunków średniokwadratowej zbieżności punktowej modeli empirycznych $\hat{f}(x; K, p)$ do funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$, a następnie wyznaczymy szybkość tej zbieżności. W oparciu o te wyniki oraz odpowiednie wyniki dotyczące modeli empirycznych $\hat{G}(x; K, p)$, przedstawione w punkcie 3.1.1, wyznaczymy warunki punktowej zbieżności i szybkość zbieżności (według prawdopodobieństwa) modeli empirycznych $\hat{R}_{Gf}(x; K, p)$ do nieliniowości $R(x)$.

3.3.1 Analiza własności modeli empirycznych $\hat{f}(x; K, p)$

Zbieżność punktowa modeli $\hat{f}(x; K, p)$

Korzystając z lematu 3.2 (str. 30) dotyczącego średniokwadratowej zbieżności punktowej modeli $\hat{G}(x; K, p)$ i podstawiając za $R(x) = I_S(x)$ oraz $z_k = \xi_k = 0$, otrzymujemy jako wniosek następujący lemat:

Lemat 3.8 *Jeśli funkcja gęstości $f(x)$ jest ciągła w punkcie $x \in S = [a, b]$, a skala K modeli empirycznych $\hat{f}(x; K, p)$ zależy od liczby pomiarów N tak, że spełnione są warunki*

$$K = K(N) \rightarrow \infty \quad \text{oraz} \quad 2^{K(N)}/N \rightarrow 0, \quad \text{gdy} \quad N \rightarrow \infty$$

to dla dowolnego p modele te zbiegają w tym punkcie średniokwadratowo do funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$

$$\text{MSE } \hat{f}(x; K(N), p) = E \left[f(x) - \hat{f}(x; K(N), p) \right]^2 \rightarrow 0 \quad \text{gdy} \quad N \rightarrow \infty \quad (3.106)$$

Szybkość zbieżności punktowej modeli $\hat{f}(x; K, p)$

Wykorzystując teraz lemat 3.3 (str. 36) dotyczący średniokwadratowej szybkości zbieżności modeli empirycznych $\hat{G}(x; K, p)$ i ponownie podstawiając $R(x) = I_S(x)$ (oraz $\beta = \infty$) i $z_k = \xi_k = 0$, otrzymujemy (por. założenie **Z7** na str. 34) jego odpowiednik dla modeli empirycznych $\hat{f}(x; K, p)$:

Lemat 3.9 *Jeśli $f(x)$ należy do klasy $C^\alpha[a_x, b_x] \subset S$, gdzie*

$$a_x = \frac{\lfloor 2^K x \rfloor - 2p + 2}{2^K} \quad \text{oraz} \quad b_x = \frac{\lfloor 2^K x \rfloor + 2p - 1}{2^K}$$

a skala K modeli empirycznych $\hat{f}(x; K, p)$ jest dobierana według wzoru

$$K = K_{\text{opt}}(N) = \frac{1}{2v+1} \log_2 2vN, \quad \text{gdzie } v = \min\{\alpha, p\} \quad (3.107)$$

to w dowolnym punkcie $x \in \left[\frac{\lfloor 2^K x \rfloor}{2^K}, \frac{\lfloor 2^K x \rfloor + 1}{2^K} \right)$ asymptotyczny błąd średniokwadratowy tych modeli spełnia nierówność

$$\text{MSE } \hat{f}(x; K_{\text{opt}}(N), p) \leq N^{-\frac{2v}{2v+1}} \cdot C_{\text{MSE}}^{fv} \quad (3.108)$$

gdzie C_{MSE}^{fv} jest dodatnią stałą (zależną od funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$ i zastosowanych falek).

3.3.2 Analiza własności modeli empirycznych $\hat{R}_{Gf}(x; K, p)$

Zbieżność punktowa modeli $\hat{R}_{Gf}(x; K, p)$

Jeśli identyfikowana nieliniowość $R(x)$ i funkcja gęstości wejścia systemu $f(x)$ są ciągłe w punkcie $x \in S = [a, b]$, to wówczas w tym punkcie, ze wzrostem liczby pomiarów N :

- przy spełnionych założeniach lematu 3.2, model empiryczny $\hat{G}(x; K, p)$ zbiega średniokwadratowo do funkcji $G(x)$,
- przy spełnionych założeniach lematu 3.8, model empiryczny $\hat{f}(x; K, p)$ zbiega średniokwadratowo do funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$.

Z punktowej zbieżności średniokwadratowej modelu $\hat{G}(x; K, p)$ (licznika w modelu $\hat{R}_{Gf}(x; K, p)$) do funkcji $G(x)$ i modelu $\hat{f}(x; K, p)$ (mianownika w modelu $\hat{R}_{Gf}(x; K, p)$) do $f(x)$ w punkcie x , wynika ich punktowa zbieżność według prawdopodobieństwa do tych funkcji (w tym punkcie). Stąd, przy założeniu **Z1** (tj. $f(x) > 0$ dla $x \in S = [a, b]$), model empiryczny $\hat{R}_{Gf}(x; K, p)$ zbiega, na mocy twierdzenia Śluckiego (zob. np. [123, str. 28]) w tym punkcie do nieliniowości $R(x) (= G(x)/f(x))$ według prawdopodobieństwa (por. wzory (3.1) i (3.105)).

Zachodzi zatem następujące twierdzenie (por. wnioski 3.1 i 3.2).

Twierdzenie 3.13 (Zbieżność punktowa wg prawdopodobieństwa) *Jeśli skala K w modelach $\hat{R}_{Gf}(x; K, p)$ zależy od liczby pomiarów N tak, że spełnione są warunki*

$$K = K(N) \rightarrow \infty \quad \text{oraz} \quad 2^{K(N)}/N \rightarrow 0 \quad \text{gdy} \quad N \rightarrow \infty$$

to dla każdego numeru falkowego p (dowolnej falki Daubechies) modele te zbiegają według prawdopodobieństwa do nieliniowości $R(x)$

$$\hat{R}_{Gf}(x; K(N), p) \xrightarrow{P} R(x) \quad \text{gdy} \quad N \rightarrow \infty$$

w każdym punkcie $x \in S = [a, b]$, w którym nieliniowość $R(x)$ oraz funkcja gęstości wejścia systemu $f(x)$ są ciągłe.

Z twierdzenia wnioskujemy, że pomimo nieznanomości funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$ (i wynikającej stąd potrzeby jej estymacji w omawianym algorytmie), modele empiryczne $\hat{R}_{Gf}(x; K, p)$ zbiegają (według prawdopodobieństwa) do nieliniowości $R(x)$ w tych samych punktach, w których przy znanej $f(x)$ zbiegają do niej modele empiryczne $\hat{R}_G(x; K, p)$.

Szybkość zbieżności punktowej modeli $\hat{R}_{Gf}(x; K, p)$

Wykorzystując teraz twierdzenie [50, twierdzenie 3, str. 449] cytowane w Dodatku B.8, str. 129 otrzymujemy, po podstawieniach $\hat{g}_N(x) = \hat{G}(x; K_{\text{opt}}(N), p)$ (z $K_{\text{opt}}(N)$ ze wzoru (3.31) na str. 35), $\hat{f}_N(x) = \hat{f}(x; K_{\text{opt}}(N), p)$ (z $K_{\text{opt}}(N)$ ze wzoru (3.107)) oraz $s_g = 2\gamma/(2\gamma + 1)$ i $s_f = 2\nu/(2\nu + 1)$ (zauważmy przy tym, że $\gamma = \min\{\alpha, \beta, p\} \leq \nu$), następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.14 (Szybkość zbieżności punktowej wg prawdopodobieństwa)

Jeśli nieliniowość $R(x)$ i funkcja gęstości $f(x)$ należą do klas

$$R(x) \in \mathcal{C}^\beta[a_x, b_x] \quad \text{oraz} \quad f(x) \in \mathcal{C}^\alpha[a_x, b_x], \quad \alpha, \beta > 0, \quad [a_x, b_x] \subset S$$

a skala K w modelach empirycznych $\hat{G}(x; K, p)$ i $\hat{f}(x; K, p)$ (wzory (3.101) i (3.104)) dobierana jest według wzoru

$$K = K_{\text{opt}}(N) = \frac{1}{2\gamma + 1} \log_2 2\gamma N, \quad \gamma = \min\{\alpha, \beta, p\} \quad (3.109)$$

to dla błędu bezwzględnego tych modeli zachodzi asymptotycznie, w każdym punkcie $x \in \left[\frac{\lfloor 2^K x \rfloor}{2^K}, \frac{\lfloor 2^K x \rfloor + 1}{2^K} \right)$, następujące oszacowanie:

$$\left| R(x) - \hat{R}_{Gf}(x; K_{\text{opt}}(N), p) \right| = O\left(N^{-\frac{\gamma}{2\gamma+1}}\right) \quad (3.110)$$

według prawdopodobieństwa.

Z twierdzenia tego wynika, że nieznaną funkcję gęstości wejścia systemu $f(x)$ nie zmniejsza (w stosunku do modeli $\hat{R}_G(x; K, p)$ – por. twierdzenie 3.3) asymptotycznej szybkości zbieżności punktowej (według prawdopodobieństwa) modeli empirycznych $\hat{R}_{Gf}(x; K, p)$ do nieliniowości $R(x)$.

A zatem, z twierdzeń 3.13 i 3.14 wnioskujemy następujące własności punktowe falkowych modeli empirycznych $\hat{R}_{Gf}(x; K, p)$ (por. własności **RG1-RG4**, **RG3a** modeli $\hat{R}_G(x; K, p)$ i własności **RR1-RR5**, **RR3a** modeli $\hat{R}_R(x; K, p)$ w punktach 3.1.2 i 3.2.1):

- RGf1.** Modele $\hat{R}_{Gf}(x; K, p)$ zbiegają do identyfikowanej nieliniowości $R(x)$ w każdym punkcie przedziału $S = [a, b]$, w którym ta nieliniowość i funkcja gęstości wejścia systemu $f(x)$ są ciągłe.
- RGf2.** Szybkość zbieżności modeli $\hat{R}_{Gf}(x; K, p)$ ze wzrostem liczby pomiarów N we wzorach (3.100), (3.104) i (3.110) zależy od lokalnej (w przedziale $[a_x, b_x]$) gładkości nieliniowości $R(x)$, funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$ oraz od zastosowanych w modelach funkcji falkowych (numeru falkowego p) (por. wzory (3.109)-(3.110)).
- RGf3.** Jeśli w przedziale $[a_x, b_x]$ funkcja gęstości wejścia $f(x)$ jest gładzsza od identyfikowanej nieliniowości $R(x)$, tj. $\alpha \geq \beta$, a zastosowane w modelach empirycznych $\hat{R}_{Gf}(x; K, p)$ falki mają numer $p \geq \beta$, to wówczas szybkość zbieżności tych modeli osiąga rząd $O(N^{-\beta/(2\beta+1)})$.
- RGf4.** Wyznaczone w twierdzeniach 3.13-3.14, zbieżność i szybkość zbieżności modeli empirycznych $\hat{R}_{Gf}(x; K, p)$ do nieliniowości $R(x)$, nie zależą od struktury i dynamiki systemu (z klasy rozważanych systemów), ani też od skorelowania zakłóceń pomiarowych z_k .

Przykłady. Rozpatrzmy ponownie wybrane przypadki identyfikowanej nieliniowości $R(x)$ i funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$.

Niech nieliniowość $R(x)$ i funkcja gęstości wejścia $f(x)$ będą odcinkami gładkie w $S = [a, b]$ i w przedziałach pomiędzy punktami nieciągłości należą odpowiednio do klas $\mathcal{C}^\beta$

i C^α . Wówczas falkowe modele empiryczne $\hat{R}_{Gf}(x; K, p)$ zbiegają w tych przedziałach punktowo do nieliniowości $R(x)$ (twierdzenie 3.13), z gwarantowaną szybkością rzędu $O(N^{-\gamma/(2\gamma+1)})$, $\gamma = \min\{\alpha, \beta, p\}$ (twierdzenie 3.14).

Jeśli $R(x)$ i $f(x)$ są ciągłe w przedziale S i spełniają np. warunek Lipschitza (tj. $\alpha = \beta = 1$), wtedy dla modeli empirycznych $\hat{R}_{Gf}(x; K, p)$, gwarantowany rząd szybkości zbieżności punktowej według prawdopodobieństwa osiąga poziom $O(N^{-1/3})$ i nie zależy od zastosowanych w modelach funkcji falkowych (ponieważ $p \geq 1$ i $\min\{\alpha, \beta\} = 1$) (por. (3.109)-(3.110)).

Jeśli natomiast $R(x)$ i $f(x)$ są dwukrotnie różniczkowalne (np. obie należą do klasy $C^{2.5}[a, b]$), to wówczas szybkość zbieżności modeli z falkami Haara ($p = 1$) nie ulega zmianie (nadal jest rzędu $O(N^{-1/3})$), natomiast dla modeli z falkami Daubechies o numerze $p \geq 3$ wzrasta do poziomu $O(N^{-5/12})$.

A. Dobór falek w empirycznym modelu falkowym $\hat{R}_{Gf}(x; K, p)$

Ponieważ warunki i szybkości punktowej zbieżności (według prawdopodobieństwa) falkowych modeli empirycznych $\hat{R}_G(x; K, p)$ i $\hat{R}_{Gf}(x; K, p)$ są takie same, to odpowiednie wskazówki dotyczące doboru funkcji falkowych w modelach $\hat{R}_G(x; K, p)$ (przedstawione na str. 66) można bezpośrednio odnieść do modeli $\hat{R}_{Gf}(x; K, p)$.

Podsumowanie

W rozdziale zaproponowaliśmy trzy typy falkowych algorytmów służących do identyfikacji nieliniowości $R(x)$ w systemach złożonych o strukturze blokowej (przedstawionych w rozdz. 2) na podstawie pomiarów wejścia-wyjścia całego systemu i zbadaliśmy warunki i szybkości zbieżności wyznaczanych przez te algorytmy falkowych modeli empirycznych w zależności od następujących czynników:

- gładkości identyfikowanej nieliniowości $R(x)$,
- gładkości funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$, oraz
- zastosowanych w modelach funkcji falkowych (numeru falkowego p).

Znana funkcja gęstości wejścia systemu $f(x)$. W przypadku znanej funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$ przedstawiliśmy i zbadaliśmy dwa typy algorytmów falkowych (ilorazowy – z empirycznym modelem falkowym $\hat{R}_G(x; K, p)$ – zob. punkt 3.1 i bezpośredni – z modelem $\hat{R}_R(x; K, p)$ – zob. punkt 3.2). W odniesieniu do modeli $\hat{R}_G(x; K, p)$ wykazaliśmy, że zbiegają one:

- punktowo (średniokwadratowo i według prawdopodobieństwa) do identyfikowanej nieliniowości $R(x)$ w każdym punkcie przedziału $S = [a, b]$, w którym ciągłe są zarówno nieliniowość $R(x)$ jak i funkcja gęstości wejścia systemu $f(x)$,
- globalnie (średniokwadratowo) do dowolnych nieliniowości $R(x)$ ograniczonych w przedziale $S = [a, b]$ przy dowolnych $f(x)$ ograniczonych i dodatnich w tym przedziale. Pokazaliśmy także, że w przypadku ciągłych $R(x)$ i $f(x)$ modele

$\hat{R}_G(x; K, p)$ mogą zbiegać do nieliniowości $R(x)$ z asymptotycznie optymalną szybkością zbieżności, a ponadto wyznaczyliśmy szybkość zbieżności tych modeli do, często spotykanych w praktyce, nieliniowości nieciągłych, odcinkami gładkich.

W odniesieniu do modeli empirycznych $\hat{R}_R(x; K, p)$ pokazaliśmy natomiast, że poszczególne zbieżności i ich szybkości nie zależą, w porównaniu z modelami $\hat{R}_G(x; K, p)$, od własności funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$. A zatem dla $f(x)$ mniej gładkich niż identyfikowana nieliniowość $R(x)$ modele $\hat{R}_R(x; K, p)$ mogą osiągać (przy odpowiednim doborze funkcji falkowych w modelach) większą gwarantowaną szybkość zbieżności w stosunku do modeli $\hat{R}_G(x; K, p)$ (por. twierdzenia 3.2-3.6 i 3.8-3.12; zob. także wyniki badań numerycznych w rozdziale 5).

Nieznana funkcja gęstości wejścia systemu $f(x)$. Dla tego przypadku przedstawiliśmy wersję algorytmu ilorazowego z estymacją funkcji gęstości wejścia systemu i pokazaliśmy, że wyznaczane przez algorytm modele empiryczne $\hat{R}_{Gf}(x; K, p)$ zbiegają punktowo według prawdopodobieństwa do identyfikowanej nieliniowości $R(x)$ przy takich samych warunkach i z tą samą (asymptotycznie) szybkością, przy których zbiegają (w tym sensie) modele empiryczne $\hat{R}_G(x; K, p)$ wyznaczane przez algorytm ilorazowy w przypadku znanej $f(x)$.

Ponieważ równoważność własności modeli w obu algorytmach zachodzi asymptotycznie (dla dużych liczb pomiarów N) (por. wniosek 3.1 i twierdzenia 3.3 oraz 3.13-3.14), w rozdziale 5 porównujemy ich własności dla małej i umiarkowanej liczby pomiarów na podstawie eksperymentów numerycznych.

Niezależność od struktury systemu i skorelowania zakłóceń. Badane algorytmy posiadają ponadto następujące wspólne cechy:

- Warunki i szybkości zbieżności wyznaczanych przez nie modeli nie zależą od:
 - struktury systemów (z rozważanej klasy systemów nieliniowych),
 - ich dynamiki, oraz
 - skorelowania zakłóceń zewnętrznych.

Dobór falek w modelach. Zwróćmy przede wszystkim uwagę na fakt, że zbieżność poszczególnych modeli empirycznych do identyfikowanej nieliniowości $R(x)$ nie zależy od zastosowanych w nich funkcji falkowych, natomiast dobór funkcji falkowych może wpłynąć na szybkość zbieżności tych modeli. W zależności od zakresu wiedzy wstępnej o nieliniowości $R(x)$ i funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$, dobór ten opiera się na następujących ogólnych wskazówkach:

- gdy wiedza wstępna nie obejmuje znajomości gładkości $R(x)$ i $f(x)$, to należy, kierując się prostotą realizacji modeli, zastosować w nich falki Haara. Podobnie należy postąpić, gdy wiadomo, że $R(x)$ lub $f(x)$ są nieciągłe, gdyż wtedy gwarantowane prędkości zbieżności globalnej modeli nie zależą od zastosowanych w nich falek (por. twierdzenia 3.6 i 3.12).
- gdy wiadomo, że $R(x)$ i $f(x)$ są gładkie, należy zastosować falki o wyższym numerze p , tak aby zagwarantować modelom falkowym większą szybkość zbieżności (zob. np. twierdzenia 3.2, 3.5 oraz 3.8 i 3.11).

Własności praktyczne algorytmów falkowych. Z praktycznego („użytkowego”) punktu widzenia należy także zwrócić uwagę na następujące cechy prezentowanych falkowych algorytmów identyfikacji:

- Algorytmy te wymagają (w celu zapewnienia zbieżności poszczególnym empirycznym modelom falkowym – por. np. warunki zbieżności w twierdzeniach 3.1 i 3.7) jedynie niewielkiej informacji apriorycznej zarówno na temat samej nieliniowości jak i pozostałych elementów identyfikowanego systemu oraz zakłóceń zewnętrznych.
Zauważmy jednakże, że zawarte w twierdzeniach dotyczących szybkości zbieżności modeli empirycznych (zob. np. twierdzenie 3.2), reguły doboru skali K modeli (zapewniające im gwarantowane szybkości zbieżności) wymagają wstępnej znajomości gładkości identyfikowanej nieliniowości $R(x)$ i funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$, a ponadto mają charakter asymptotyczny. Oba te czynniki mogą stanowić istotne ograniczenie dla zastosowań proponowanych algorytmów (zob. wyniki badań numerycznych dla małych i umiarkowanych liczb pomiarów N w rozdziale 5).
- Algorytmy falkowe są proste w implementacji komputerowej. Wykorzystują one jedynie podstawowe operacje arytmetyczne (typu dodawanie i mnożenie – por. wzory (3.7)-(3.9), (3.64)-(3.66) i (3.100)-(3.105)) (dokładniejsze badania dotyczące aspektów obliczeniowych rozważanych falkowych algorytmów identyfikacji przedstawiamy w następnym rozdziale),
- Falkowe algorytmy identyfikacji mają taką samą postać zarówno dla systemów statycznych jak i dynamicznych oraz dla białych i skorelowanych zakłóceń zewnętrznych.

Na zakończenie zauważmy, że przedstawione powyżej wnioski dotyczące praktycznego zastosowania poszczególnych modeli falkowych opierają się na założeniu, że wartości funkcji falkowych Daubechies $\varphi^p(x)$ i $\psi^p(x)$ mogą być obliczane w dowolnym punkcie x , podczas gdy wartości tych funkcji (dla $p \geq 2$) można za pomocą znanych algorytmów obliczać jedynie w punktach siatki binarnej (por. własności funkcji falkowych przedstawione w punkcie 1.1 i zob. przykładowy algorytm w Dodatku A.3, str. 115). Z tego powodu (i ze względu na losowe wejście systemu) falkowe algorytmy identyfikacji nie mogą być *bezpośrednio* zastosowane w praktyce. Propozycję obliczeniowych (praktycznych) odpowiedników przedstawionych tu (teoretycznych) falkowych algorytmów identyfikacji zawiera następny rozdział.

Rozdział 4

Falkowe algorytmy obliczeniowe identyfikacji

W podsumowaniu poprzedniego rozdziału zwróciliśmy uwagę na fakt, że nie jest możliwe bezpośrednie zastosowanie przedstawionych w nim falkowych algorytmów identyfikacji. Składają się na to następujące przyczyny:

1. Dla numerów falkowych $p \geq 2$ (tj. oprócz funkcji Haara), funkcje falkowe Daubechies nie są dane za pomocą jawnych wzorów ale jako procedury rekurencyjne (zob. np. [26]-[27] i [130]-[131]; por. własności funkcji falkowych przedstawione w punkcie 1.1 w rozdz. 1).
2. Typowe algorytmy pozwalają obliczyć wartości funkcji falkowych jedynie w punktach siatki binarnej $\mathbf{B}_H$, $H \geq 0$ (por. uwaga 1.2 w rozdz. 1 i algorytm cytowany w Dodatku A.3).
3. W rozważanym w pracy zadaniu identyfikacji wejście x_k jest losowe (por. założenie **Z1** w rozdz. 2), a zatem ogólnie $x_k \notin \mathbf{B}_H$. Stąd nie jest możliwe obliczenie współczynników empirycznych w poszczególnych modelach falkowych z wykorzystaniem typowych algorytmów obliczania wartości funkcji falkowych (zob. wzory (3.7), (3.64)-(3.65) i (3.103)), a także, obliczenie wartości wyjść modeli falkowych dla wejść x (z przedziału $S = [a, b]$), leżących poza siatką binarną.

W literaturze dotyczącej falek wskazana wyżej specyfika falkowych algorytmów identyfikacji nie była dotąd szczegółowo rozpatrywana. Pewną próbę rozwiązania problemu, wykorzystującą metodę grupowania pomiarów (ang. *binning*), przedstawiono jedynie w monografii [65, str. 222] poświęconej zastosowaniom falek w statystyce (propozycja ta jednakże nie została poparta analizą teoretyczną, a tylko zilustrowana przykładem numerycznym).

W obecnym rozdziale proponujemy proste i ogólne rozwiązanie problemu polegające na zastąpieniu w modelach falkowych oryginalnych funkcji falkowych Daubechies $\varphi^p(x)$ i $\psi^p(x)$ ich schodkowymi (odcinkami stałymi) aproksymacjami $\bar{\varphi}^p(x; H)$ i $\bar{\psi}^p(x; H)$, gdzie $H = 0, 1, \dots$, jest zdefiniowanym dalej parametrem skali aproksymacji odpowiadającym za dokładność aproksymacji funkcji falkowych.

Jak pokażemy, otrzymane w ten sposób *falkowe algorytmy obliczeniowe identyfikacji* (obliczeniowe odpowiedniki algorytmów falkowych z rozdz. 3) są łatwe w realizacji komputerowej. Ponadto, badając własności *obliczeniowych modeli empirycznych* (tj. modeli

otrzymanych według tych algorytmów) wykażemy (na przykładzie algorytmu ilorazowego), że przy zachowaniu prostych reguł dotyczących doboru skali H zachowane zostają asymptotyczne własności (tj. zbieżność i szybkość zbieżności) ich odpowiedników opartych na oryginalnych funkcjach falkowych Daubechies, a więc że modele obliczeniowe i „teoretyczne” modele wykorzystujące oryginalne funkcje falkowe są asymptotycznie równoważne.

W ostatnim punkcie rozdziału badamy złożoność numeryczną obliczeniowych algorytmów identyfikacji (ponownie biorąc jako przykład algorytm ilorazowy). Przedstawimy tam także szybki (o złożoności obliczeniowej rzędu $O(N)$) algorytm wyznaczania obliczeniowych modeli empirycznych, gdzie N jest liczbą wykorzystywanych obserwacji.

4.1 Podstawa teoretyczna

4.1.1 Aproksymacja falek

Proponowane aproksymacje $\bar{\varphi}^p(x; H)$ i $\bar{\psi}^p(x; H)$ funkcji falkowych $\varphi^p(x)$ i $\psi^p(x)$ dla $p \geq 2$ mają postać funkcji odcinkami stałych o skokach w punktach siatki binarnej $\mathbf{B}_H$, $H \geq 0$ (zob. Rys. 4.1) i są zdefiniowane następująco:

$$\bar{\varphi}^p(x; H) = \varphi^p\left(\frac{\lfloor 2^H x \rfloor}{2^H}\right) \quad \text{oraz} \quad \bar{\psi}^p(x; H) = \psi^p\left(\frac{\lfloor 2^H x \rfloor}{2^H}\right) \quad (4.1)$$

Biorąc pod uwagę definicję i własności funkcji $\lfloor \cdot \rfloor$ (zob. Dodatek A.1, str. 114), wartości tych aproksymacji dla dowolnego argumentu x są równe wartościom przyjmowanym przez funkcje falkowe Daubechies w punktach siatki binarnej $\mathbf{B}_H$ znajdujących się najbliżej tego argumentu z jego lewej strony. Do wyznaczania wartości funkcji falkowych w punktach binarnych można wykorzystać algorytm zaczerpnięty z pracy [131, str. 296] i przedstawiony w Dodatku A.3, str. 115.

Aproksymacje skalowanych i przesuniętych funkcji falkowych definiujemy następująco (por. wzory (1.14) w rozdz. 1):

$$\bar{\varphi}_{Mn}^p(x; H) = 2^{\frac{M}{2}} \bar{\varphi}^p(2^M x - n; H) \quad \text{oraz} \quad \bar{\psi}_{ml}^p(x; H) = 2^{\frac{m}{2}} \bar{\psi}^p(2^m x - l; H) \quad (4.2)$$

Parametr H nazywać będziemy dalej parametrem skali (krótko: skalą) aproksymacji funkcji falkowych.

4.1.2 Własności aproksymacji funkcji falkowych

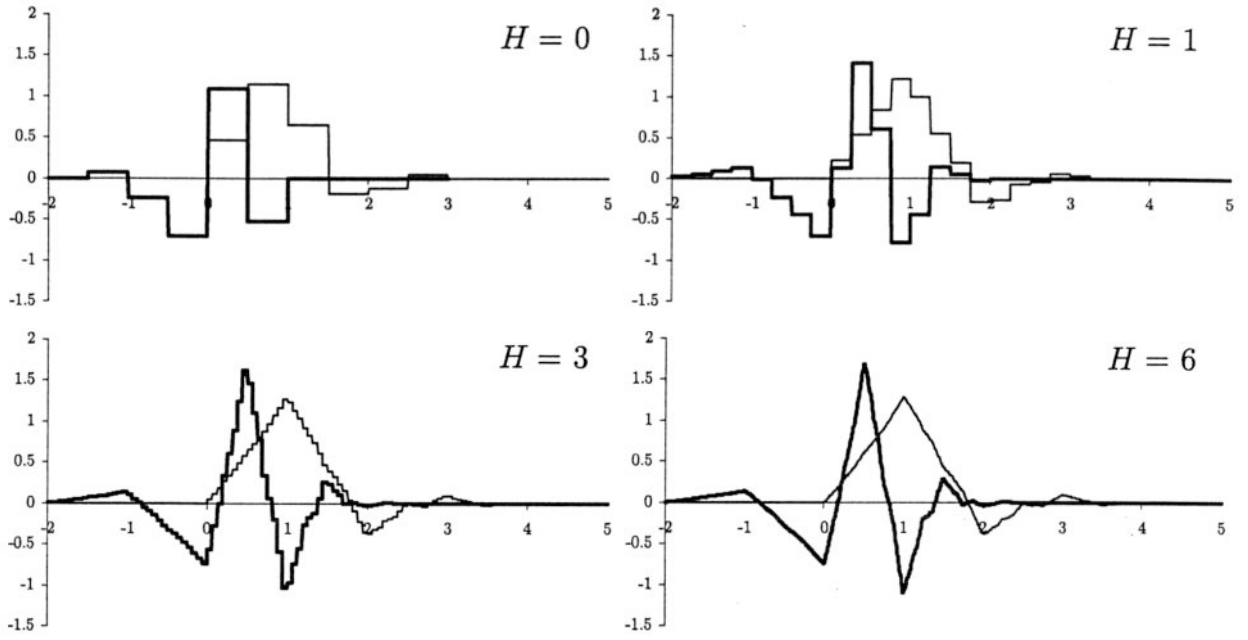
Zaproponowane aproksymacje funkcji falkowych dla $p \geq 2$ charakteryzują się następującymi własnościami (istotnymi z punktu widzenia dalszej analizy własności modeli wyznaczanych przez algorytmy obliczeniowe):

H1. W punktach siatki binarnej $x_{\mathbf{B}} \in \mathbf{B}_q$, $q \leq H$, zachodzą równości

$$\bar{\varphi}^p(x_{\mathbf{B}}; H) = \varphi^p(x_{\mathbf{B}}) \quad \text{oraz} \quad \bar{\psi}^p(x_{\mathbf{B}}; H) = \psi^p(x_{\mathbf{B}}) \quad (4.3)$$

H2a. Błędy bezwzględne aproksymacji funkcji falkowych spełniają (dla dużych wartości H) poniższe nierówności

$$|\varphi^p(x) - \bar{\varphi}^p(x; H)| \leq 2^{-\rho H} \cdot L_{\varphi} \quad \text{oraz} \quad |\psi^p(x) - \bar{\psi}^p(x; H)| \leq 2^{-\rho H} \cdot L_{\psi} \quad (4.4)$$



Rys. 4.1 Aproksymacje funkcji falkowych Daubechies $\varphi^3(x)$ (linia cienka) i $\psi^3(x)$ (linia gruba) dla parametrów skali $H = 0, 1, 3, 6$

gdzie

$$\rho = \begin{cases} \sim 0.55 & \text{dla } p = 2 \\ 1 & \text{dla } p > 2 \end{cases}$$

dla każdego x , gdzie L_φ, L_ψ są dodatnimi stałymi niezależnymi od numeru falkowego p (zob. wzory (C.4)-(C.5) w Dodatku C.1).

H2b. Błędy bezwzględne aproksymacji skalowanych i przesuniętych funkcji falkowych (por. wzór (4.2) i wzór (1.14) w rozdz. 1) spełniają następujące nierówności

$$|\varphi_{Mn}^p(x) - \bar{\varphi}_{Mn}^p(x; H)| \leq 2^{\frac{M}{2}} 2^{-\rho H} \cdot L_\varphi \quad \text{oraz} \quad |\psi_{ml}^p(x) - \bar{\psi}_{ml}^p(x; H)| \leq 2^{\frac{m}{2}} 2^{-\rho H} \cdot L_\psi \quad (4.5)$$

dla każdego x . Zwróćmy uwagę, że oszacowania błędów rosną ze wzrostem wartości skal M i m funkcji falkowych (zob. wzory (C.6)-(C.7) w Dodatku C.1).

H3. W danej skali H aproksymacje $\bar{\varphi}_{Mn}^p(x; H)$ i $\bar{\psi}_{ml}^p(x; H)$ posiadają zwarte nośniki dane następującymi wzorami

$$\begin{aligned} \text{supp } \bar{\varphi}_{Mn}^p(x; H) &= \left[\frac{1}{2^H} + \frac{n}{2^M}, \frac{n + (2p-1)}{2^M} \right) \\ \text{supp } \bar{\psi}_{ml}^p(x; H) &= \left[\frac{1}{2^H} + \frac{l + (1-p)}{2^m}, \frac{l+p}{2^m} \right) \end{aligned} \quad (4.6)$$

A zatem asymptotycznie (tj. przy $H \rightarrow \infty$) osiągają długości nośników odpowiednich funkcji falkowych $\varphi_{Mn}^p(x)$ i $\psi_{ml}^p(x)$ (por. wzór (1.11), w rozdziale 1).

4.1.3 Falkowe modele obliczeniowe

Bezpośrednie zastąpienie funkcji falkowych ich aproksymacjami prowadzi do uzyskania następujących klas (dla różnych p) *falkowych modeli obliczeniowych*, odpowiadających klasom falkowych modeli teoretycznych z rozdz. 3.

Modele $\bar{R}_G(x; K, H, p)$. Klasie modeli teoretycznych $R_G(x; K, p)$ odpowiadają modele obliczeniowe o postaci (por. wzór (3.2))

$$\bar{R}_G(x; K, H, p) = \frac{\bar{G}(x; K, H, p)}{f(x)} \quad (4.7)$$

w których $\bar{G}(x; K, H, p)$ jest obliczeniowym odpowiednikiem modelu teoretycznego $G(x; K, p)$ (por. wzór (3.3))

$$\bar{G}(x; K, H, p) = \sum_{n=n_{\min}(M,p)}^{n_{\max}(M,p)} \bar{\alpha}_{Mn}^p \bar{\varphi}_{Mn}^p(x; H) + \sum_{m=M}^{K-1} \sum_{l=l_{\min}(m,p)}^{l_{\max}(m,p)} \bar{\beta}_{ml}^p \bar{\psi}_{ml}^p(x; H) \quad (4.8)$$

o współczynnikach (por. wzory w (3.4))

$$\bar{\alpha}_{Mn}^p = \int_{\frac{n}{2^M}}^{\frac{n+(2p-1)}{2^M}} G(x) \bar{\varphi}_{Mn}^p(x; H) dx \quad \text{oraz} \quad \bar{\beta}_{ml}^p = \int_{\frac{l+(1-p)}{2^m}}^{\frac{l+p}{2^m}} G(x) \bar{\psi}_{ml}^p(x; H) dx \quad (4.9)$$

Granice sumowań $n_{\min}(M, p)$, $n_{\max}(M, p)$ oraz $l_{\min}(m, p)$ i $l_{\max}(m, p)$ w modelach obliczeniowych (4.8) są równe granicom w modelach teoretycznych (zob. wzory w (3.5)).

Modele $\bar{R}_R(x; K, H, p)$. Klasie falkowych modeli teoretycznych $R_R(x; K, p)$ odpowiada następująca klasa modeli obliczeniowych (por. wzory (3.60) i (3.62))

$$\bar{R}_R(x; K, H, p) = \sum_{n=n'_{\min}(M,p)}^{n'_{\max}(M,p)} \bar{\alpha}_{Mn}^{p'} \bar{\varphi}_{Mn}^p(x; H) + \sum_{m=M}^{K-1} \sum_{l=l'_{\min}(m,p)}^{l'_{\max}(m,p)} \bar{\beta}_{ml}^{p'} \bar{\psi}_{ml}^p(x; H) \quad (4.10)$$

ze współczynnikami (por. wzory w (3.61))

$$\bar{\alpha}_{Mn}^{p'} = \int_{\frac{n}{2^M}}^{\frac{n+(2p-1)}{2^M}} R(x) \bar{\varphi}_{Mn}^p(x; H) dx \quad \text{oraz} \quad \bar{\beta}_{ml}^{p'} = \int_{\frac{l+(1-p)}{2^m}}^{\frac{l+p}{2^m}} R(x) \bar{\psi}_{ml}^p(x; H) dx \quad (4.11)$$

Modele $\bar{R}_{Gf}(x; K, H, p)$. Modele teoretyczne $R_{Gf}(x; K, p)$ mają swoje odpowiedniki obliczeniowe w postaci (por. wzór (3.95))

$$\bar{R}_{Gf}(x; K, H, p) = \frac{\bar{G}(x; K, H, p)}{\bar{f}(x; K, H, p)} \quad (4.12)$$

z licznikiem takim samym jak w modelu $\bar{R}_G(x; K, H, p)$ (wzór (4.8)) i mianownikiem danym wzorem (por. wzory (3.97) i (3.99))

$$\bar{f}(x; K, H, p) = \sum_{n=n_{\min}(M,p)}^{n_{\max}(M,p)} \bar{a}_{Mn}^p \bar{\varphi}_{Mn}^p(x; H) + \sum_{m=M}^{K-1} \sum_{l=l_{\min}(m,p)}^{l_{\max}(m,p)} \bar{b}_{ml}^p \bar{\psi}_{ml}^p(x; H) \quad (4.13)$$

gdzie (por. wzory w (3.98))

$$\bar{a}_{Mn}^p = \int_{\frac{n}{2^M}}^{\frac{n+(2p-1)}{2^M}} f(x) \bar{\varphi}_{Mn}^p(x; H) dx \quad \text{oraz} \quad \bar{b}_{ml}^p = \int_{\frac{l+(1-p)}{2^m}}^{\frac{l+p}{2^m}} f(x) \bar{\psi}_{ml}^p(x; H) dx \quad (4.14)$$

Należy podkreślić, że wzory (4.9), (4.11) i (4.14) na współczynniki falkowych modeli obliczeniowych otrzymano przez mechaniczne zastąpienie funkcji falkowych ich aproksymacjami w odpowiednich wzorach na współczynniki falkowych modeli teoretycznych.

4.2 Empiryczne modele obliczeniowe. Algorytmy obliczeniowe identyfikacji

Poszczególnym klasom (dla różnych p) falkowych modeli empirycznych odpowiadają z kolei klasy *obliczeniowych modeli empirycznych*, opartych na aproksymacjach funkcji falkowych.

Modele $\tilde{R}_G(x; K, H, p)$. Obliczeniowe odpowiedniki falkowych modeli empirycznych $\hat{R}_G(x; K, p)$ wyznaczanych przez algorytm ilorazowy mają postać (por. wzory (3.8) i (4.7))

$$\tilde{R}_G(x; K, H, p) = \frac{\tilde{G}(x; K, H, p)}{f(x)} \quad (4.15)$$

gdzie (por. wzory (3.9) i (4.8))

$$\tilde{G}(x; K, H, p) = \sum_{n=n_{\min}(M,p)}^{n_{\max}(M,p)} \tilde{\alpha}_{Mn}^p \bar{\varphi}_{Mn}^p(x; H) + \sum_{m=M}^{K-1} \sum_{l=l_{\min}(m,p)}^{l_{\max}(m,p)} \tilde{\beta}_{ml}^p \bar{\psi}_{ml}^p(x; H) \quad (4.16)$$

a współczynniki empiryczne $\tilde{\alpha}_{Mn}^p$ i $\tilde{\beta}_{ml}^p$ wynoszą (por. wzory w (3.7) i (4.9))

$$\tilde{\alpha}_{Mn}^p = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_k \bar{\varphi}_{Mn}^p(x_k; H) \quad \text{oraz} \quad \tilde{\beta}_{ml}^p = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_k \bar{\psi}_{ml}^p(x_k; H) \quad (4.17)$$

Modele $\tilde{R}_R(x; K, H, p)$. Falkowym modelom empirycznym $\hat{R}_R(x; K, p)$ wyznaczanym przez algorytm bezpośredni odpowiadają następujące empiryczne modele obliczeniowe (por. wzory (3.60) i (4.10))

$$\tilde{R}_R(x; K, H, p) = \sum_{n=n'_{\min}(M,p)}^{n'_{\max}(M,p)} \tilde{\alpha}_{Mn}^{p'} \bar{\varphi}_{Mn}^p(x; H) + \sum_{m=M}^{K-1} \sum_{l=l'_{\min}(m,p)}^{l'_{\max}(m,p)} \tilde{\beta}_{ml}^{p'} \bar{\psi}_{ml}^p(x; H) \quad (4.18)$$

w których współczynniki $\tilde{\alpha}_{Mn}^{p'}$ i $\tilde{\beta}_{ml}^{p'}$ są wyliczane ze wzorów (por. wzory w (3.64) oraz (4.11))

$$\tilde{\alpha}_{Mn}^{p'} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_k \bar{\varphi}_{Mn}^{p'}(x_k; H) \quad \text{oraz} \quad \tilde{\beta}_{ml}^{p'} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_k \bar{\psi}_{ml}^{p'}(x_k; H) \quad (4.19)$$

gdzie (por. wzory w (3.65))

$$\bar{\varphi}_{Mn}^{p'}(x_k; H) = \frac{\bar{\varphi}_{Mn}^p(x_k; H)}{f(x)} \quad \text{oraz} \quad \bar{\psi}_{ml}^{p'}(x_k; H) = \frac{\bar{\psi}_{ml}^p(x_k; H)}{f(x)} \quad (4.20)$$

Modele $\tilde{R}_{Gf}(x; K, H, p)$. Odpowiednikami falkowych modeli empirycznych $\hat{R}_{Gf}(x; K, p)$ (wyznaczanych przez algorytm ilorazowy z estymacją funkcji gęstości wejścia systemu) są poniższe empiryczne modele obliczeniowe (por. wzory (3.105) i (4.12))

$$\tilde{R}_{Gf}(x; K, H, p) = \frac{\tilde{G}(x; K, H, p)}{\tilde{f}(x; K, H, p)} \quad (4.21)$$

z licznikiem danym wzorem (4.16) i mianownikiem będącym obliczeniowym modelem empirycznym nieznannej gęstości wejścia systemu $f(x)$ (por. wzory (3.104) i (4.13))

$$\tilde{f}(x; K; H, p) = \sum_{n=n_{\min}(M,p)}^{n_{\max}(M,p)} \tilde{a}_{Mn}^p \tilde{\varphi}_{Mn}^p(x; H) + \sum_{m=M}^{K-1} \sum_{l=l_{\min}(m,p)}^{l_{\max}(m,p)} \tilde{b}_{ml}^p \tilde{\psi}_{ml}^p(x; H) \quad (4.22)$$

o współczynnikach $\tilde{a}_{Mn}^p$ i $\tilde{b}_{ml}^p$ postaci (por. wzory w (3.103) i (4.14))

$$\tilde{a}_{Mn}^p = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \tilde{\varphi}_{Mn}^p(x_k; H) \quad \text{oraz} \quad \tilde{b}_{ml}^p = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \tilde{\psi}_{ml}^p(x_k; H) \quad (4.23)$$

Obliczeniowe algorytmy identyfikacji. Obliczeniowe wersje poszczególnych falkowych algorytmów identyfikacji z rozdz. 3 przyjmują zatem następującą postać:

Algorytm ilorazowy (wersja obliczeniowa):

Krok 1. Na podstawie pomiarów $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^N$ oblicz oszacowania $\tilde{\alpha}_{Mn}^p$ oraz $\tilde{\beta}_{ml}^p$ według wzorów (4.17) oraz (4.2).

Krok 2. Wyznacz empiryczny model obliczeniowy nieliniowości $R(x)$ jako iloraz (4.15), z licznikiem danym przez (4.16) i wzór (4.2).

Algorytm bezpośredni (wersja obliczeniowa):

Krok 1. Na podstawie pomiarów $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^N$ oblicz oszacowania $\tilde{\alpha}_{Mn}^{p'}$ oraz $\tilde{\beta}_{ml}^{p'}$ według wzorów (4.19)-(4.20) oraz (4.2).

Krok 2. Wyznacz empiryczny model obliczeniowy nieliniowości $R(x)$ wstawiając obliczone oszacowania do wzoru (4.18).

Algorytm ilorazowy z estymacją funkcji gęstości wejścia systemu (wersja obliczeniowa):

Krok 1a. Na podstawie pomiarów $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^N$ oblicz oszacowania $\tilde{\alpha}_{Mn}^p$ oraz $\tilde{\beta}_{ml}^p$ według wzorów (4.17) oraz (4.2).

Krok 1b. Na podstawie pomiarów $\{x_k\}_{k=1}^N$ oblicz oszacowania $\tilde{a}_{Mn}^p$ oraz $\tilde{b}_{ml}^p$ według wzorów (4.23) oraz (4.2).

Krok 2a. Wyznacz empiryczny model obliczeniowy funkcji $G(x)$ wstawiając obliczone oszacowania $\tilde{\alpha}_{Mn}^p$ oraz $\tilde{\beta}_{ml}^p$ do wzoru (4.16).

Krok 2b. Wyznacz empiryczny model obliczeniowy funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$ wstawiając obliczone oszacowania $\tilde{a}_{Mn}^p$ oraz $\tilde{b}_{ml}^p$ do wzoru (4.22).

Krok 3. Wyznacz empiryczny model nieliniowości $R(x)$ jako iloraz (4.21), z licznikiem (4.16) i mianownikiem (4.22), uwzględniając wzory (4.2).

Zwracamy uwagę na pełną analogię (z dokładnością do zastosowanej aproksymacji falek) algorytmów falkowych w rozdz. 3 oraz ich powyższych wersji obliczeniowych. Zauważmy także, że posługiwanie się w praktyce aproksymacjami $\tilde{\varphi}_{Mn}^p(x; H)$ i $\tilde{\psi}_{ml}^p(x; H)$ (wzory (4.2)) można uprościć poprzez wstępne wyznaczenie wartości tych aproksymacji w wybranej skali H , a następnie ich stabelaryzowanie (i przechowanie w pamięci komputera).

Dzięki temu używanie aproksymacji $\tilde{\varphi}_{Mn}^p(x; H)$ i $\tilde{\psi}_{ml}^p(x; H)$ w powyższych algorytmach identyfikacji nie wymaga każdorazowego obliczania ich wartości.

4.3 Przykładowa analiza falkowego algorytmu obliczeniowego identyfikacji (algorytm ilorazowy)

Dla przykładu zbadamy teraz własności obliczeniowych modeli empirycznych $\tilde{R}_G(x; K, H, p)$ wyznaczanych przez obliczeniową wersję algorytmu ilorazowego. Analiza własności modeli otrzymywanych za pomocą pozostałych algorytmów obliczeniowych (prowadzona według poniższego schematu) będzie przedmiotem osobnych opracowań. Dla modeli obliczeniowych $\tilde{R}_G(x; K, H, p)$ analiza ta sprowadza się do zbadania własności modeli $\tilde{G}(x; K, H, p)$ stanowiących ich licznik (zob. wzór (4.15); por. z analizą własności modeli falkowych $\tilde{G}(x; K, p)$ w punkcie 3.1.1).

4.3.1 Analiza własności empirycznych modeli obliczeniowych $\tilde{G}(x; K, H, p)$

Zbieżność oszacowań $\tilde{\alpha}_{Mn}^p$ i $\tilde{\beta}_{ml}^p$

Zauważmy, że na mocy założeń **Z3-Z5**, współczynniki empiryczne $\tilde{\alpha}_{Mn}^p$ i $\tilde{\beta}_{ml}^p$ dane wzorem (4.17) są nieobciążonymi estymatorami współczynników $\bar{\alpha}_{Mn}^p$ i $\bar{\beta}_{ml}^p$ modeli $\tilde{G}(x; K, H, p)$ (zob. wzory (4.9) i (4.8))

$$E \tilde{\alpha}_{Mn}^p = \bar{\alpha}_{Mn}^p \quad \text{oraz} \quad E \tilde{\beta}_{ml}^p = \bar{\beta}_{ml}^p \quad (4.24)$$

Dodatkowo ich wariancje spełniają nierówności

$$\text{var } \tilde{\alpha}_{Mn}^p \leq \frac{1}{N} (\bar{A}_{\text{var}} + \bar{A}_{\text{cov}}) \quad \text{oraz} \quad \text{var } \tilde{\beta}_{ml}^p \leq \frac{1}{N} (\bar{B}_{\text{var}} + \bar{B}_{\text{cov}}) \quad (4.25)$$

gdzie dodatnie stałe $\bar{A}_{\text{var}}$, $\bar{A}_{\text{cov}}$ oraz $\bar{B}_{\text{var}}$, $\bar{B}_{\text{cov}}$ zależą od części dynamicznej systemu i zewnętrznych zakłóceń z_k oraz parametru skali H (zob. wzory (C.8) i (C.13)-(C.14) w Dodatku C.2, str. 134). Stąd wnioskujemy, że (por. lemat 3.1):

Lemat 4.10 *Współczynniki $\tilde{\alpha}_{Mn}^p$ i $\tilde{\beta}_{ml}^p$ empirycznych modeli obliczeniowych $\tilde{G}(x; K, H, p)$ zbiegają średniokwadratowo do współczynników $\bar{\alpha}_{Mn}^p$ i $\bar{\beta}_{ml}^p$ modeli obliczeniowych $\tilde{G}(x; K, H, p)$ wraz z rosnącą liczbą pomiarów N . Ponadto dla ich błędów średniokwadratowych zachodzą następujące nierówności*

$$\text{MSE } \tilde{\alpha}_{Mn}^p \leq \frac{1}{N} (\bar{A}_{\text{var}} + \bar{A}_{\text{cov}}) \quad \text{oraz} \quad \text{MSE } \tilde{\beta}_{ml}^p \leq \frac{1}{N} (\bar{B}_{\text{var}} + \bar{B}_{\text{cov}})$$

Widzimy zatem, że współczynniki $\tilde{\alpha}_{Mn}^p$ i $\tilde{\beta}_{ml}^p$ obliczeniowych modeli empirycznych posiadają własności **V1-V3** (zob. str. 29), analogiczne do własności współczynników $\hat{\alpha}_{Mn}^p$ i $\hat{\beta}_{ml}^p$ odpowiednich modeli empirycznych z rozdz. 3. Ponadto ich szybkość zbieżności (rzędu $O(N^{-1})$) nie zależy od parametru skali aproksymacji funkcji falkowych H i numeru falkowego p .

A. Analiza zbieżności punktowej modeli obliczeniowych $\tilde{G}(x; K, H, p)$

Średniokwadratowy błąd empirycznych modeli obliczeniowych $\tilde{G}(x; K, H, p)$ w odniesieniu do $G(x)$ w ustalonym punkcie x można zdekomponować na składniki obciążenia i wariancji wyjścia tych modeli

$$\text{MSE } \tilde{G}(x; K, H, p) = \mathbb{E} \left[G(x) - \tilde{G}(x; K, H, p) \right]^2 = \text{bias}^2 \tilde{G}(x; K, H, p) + \text{var } \tilde{G}(x; K, H, p)$$

gdzie

$$\text{bias}^2 \tilde{G}(x; K, H, p) = \left[G(x) - \mathbb{E} \tilde{G}(x; K, H, p) \right]^2 \quad (4.26)$$

$$\text{var } \tilde{G}(x; K, H, p) = \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \tilde{G}(x; K, H, p) - \tilde{G}(x; K, H, p) \right]^2 \quad (4.27)$$

Wariancja wyjścia modelu $\text{var } \tilde{G}(x; K, H, p)$. Z własności (4.24) współczynników $\tilde{\alpha}_{Mn}^p$ i $\tilde{\beta}_{ml}^p$ wynika, że wyjścia obliczeniowych modeli empirycznych $\tilde{G}(x; K, H, p)$ są nieobciążonymi estymatorami wyjść modeli obliczeniowych $\bar{G}(x; K, H, p)$ (por. wzór (3.13))

$$\mathbb{E} \tilde{G}(x; K, H, p) = \bar{G}(x; K, H, p) \quad (4.28)$$

Korzystając z tej własności w obliczeniach przeprowadzonych w Dodatku C.3 (str. 135), otrzymujemy następujące oszacowanie wariancji wyjścia obliczeniowego modelu empirycznego dla każdego $x \in S = [a, b]$ (por. wzór (4.27))

$$\text{var } \tilde{G}(x; K, H, p) = \mathbb{E} \left[\bar{G}(x; K, H, p) - \tilde{G}(x; K, H, p) \right]^2 \leq \frac{2^K}{N} \cdot \bar{C}_{\text{var}} \quad (4.29)$$

gdzie $\bar{C}_{\text{var}}$ jest dodatnią stałą (zależną od dynamiki systemu i zakłóceń zewnętrznych z_k). Zwróćmy uwagę, że uzyskane oszacowanie jest równe co do rzędu oszacowaniu wariancji wyjścia falkowych modeli empirycznych $\hat{G}(x; K, p)$ (wzór (3.14) w rozdz. 3).

Obciążenie $\text{bias}^2 \tilde{G}(x; K, H, p)$. Składową obciążenia empirycznych modeli obliczeniowych można, w oparciu o poniższy wzór (por. własność (4.28) i wzór (4.26))

$$\begin{aligned} \text{bias } \tilde{G}(x; K, H, p) &= G(x) - \bar{G}(x; K, H, p) = \\ &= [G(x) - G(x; K, p)] + [G(x; K, p) - \bar{G}(x; K, H, p)] \end{aligned}$$

oszacować następująco (por. np. [115, str. 284])

$$\begin{aligned} \text{bias}^2 \tilde{G}(x; K, H, p) &\leq 2[G(x) - G(x; K, p)]^2 + 2[G(x; K, p) - \bar{G}(x; K, H, p)]^2 = \\ &\stackrel{\text{def}}{=} 2 \left[\text{bias}^2 \hat{G}(x; K, p) + \overline{\text{bias}^2 \tilde{G}(x; K, H, p)} \right] \end{aligned} \quad (4.30)$$

Pierwszy w nawiasie składnik tego oszacowania stanowi obciążenie falkowych modeli empirycznych $\hat{G}(x; K, p)$ (z oryginalnymi falkami Daubechies), por. wzór (3.28) w rozdz. 3. Drugi człon oszacowania jest błędem wynikającym z zastosowania w modelach obliczeniowych $\bar{G}(x; K, H, p)$ aproksymacji funkcji falkowych. Jak pokazuje się w Dodatku C.4 (str. 135) dla błędu tego, w ustalonym x z przedziału $S = [a, b]$, zachodzi nierówność

$$\overline{\text{bias}^2 \tilde{G}(x; K, H, p)} \leq 2^{-2\rho H} K^2 \cdot \bar{C}_{\text{bias}} \quad (4.31)$$

gdzie $\bar{C}_{\text{bias}}$ jest dodatnią stałą zależną od nieliniowości $R(x)$, funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$ oraz przyjętych funkcji falkowych (numeru p) i gdzie K jest skalą empirycznych modeli obliczeniowych $\tilde{G}(x; K, H, p)$, H jest parametrem skali w zastosowanych w tych modelach aproksymacjach funkcji falkowych (por. wzór (4.16)), natomiast wykładnik ρ jest dodatnią stałą zależną od numeru falkowego p tych funkcji (por. wzór (4.4)).

Zbieżność punktowa modeli $\tilde{G}(x; K, H, p)$. Badając w rozdz. 3 warunki zbieżności falkowych modeli empirycznych $\hat{G}(x; K, p)$ stwierdziliśmy, że składowa obciążenia $\text{bias}^2 \hat{G}(x; K, p)$ tych modeli maleje do zera ze wzrostem skali K w punktach ciągłości identyfikowanej charakterystyki $G(x)$ (por. str. 30). Zauważmy jednak, że (według oszacowania (4.31)) w modelach obliczeniowych wzrost skali K (przy ustalonym H) powoduje zwiększanie składowej błędu $\text{bias}^2 \tilde{G}(x; K, H, p)$, a w konsekwencji też wzrost całego błędu obciążenia (4.30)

$$\text{bias}^2 \tilde{G}(x; K, H, p) \rightarrow \infty \quad \text{dla} \quad K \rightarrow \infty, H = \text{const} \quad (4.32)$$

Z kolei, dla ustalonego K wzrost skali aproksymacji H powoduje wykładnicze zmniejszanie się składowej błędu $\text{bias}^2 \tilde{G}(x; K, H, p)$, a stąd

$$\text{bias}^2 \tilde{G}(x; K, H, p) \rightarrow \text{bias}^2 \hat{G}(x; K, p) \quad \text{dla} \quad H \rightarrow \infty, K = \text{const} \quad (4.33)$$

Uzależniając zatem skalę H aproksymacji funkcji falkowych od skali K modeli obliczeniowych tak, aby przy warunkach zbieżności modeli falkowych $\hat{G}(x; K, p)$ (por. wzory (3.19), str. 30) spełnione były dodatkowo poniższe warunki wynikające ze wzorów (4.32)-(4.33):

$$H = H(K) \rightarrow \infty \quad \text{oraz} \quad 2^{-2\rho H(K)} K^2 \rightarrow 0 \quad \text{dla} \quad K \rightarrow \infty \quad (4.34)$$

otrzymujemy lemat (por. lemat 3.2).

Lemat 4.11 *Jeśli spełnione są założenia lematu 3.2 i skala H użyta w aproksymacjach $\bar{\varphi}^p(x; H)$ i $\bar{\psi}^p(x; H)$ zastosowanych w obliczeniowych modelach empirycznych $\tilde{G}(x; K, H, p)$ zależy od skali K tych modeli tak, że spełnione są warunki we wzorze (4.34), to dla dowolnego numeru falkowego p modele te zbiegają średniokwadratowo do identyfikowanej funkcji $G(x)$ w tych samych punktach, w których zbiegają ich odpowiedniki $\hat{G}(x; K, p)$ oparte o oryginalne funkcje falkowe Daubechies $\varphi^p(x)$ i $\psi^p(x)$.*

Szybkość zbieżności punktowej modeli $\tilde{G}(x; K, H, p)$. W rozdz. 3, w punkcie poświęconym analizie szybkości zbieżności składowej obciążenia falkowych modeli empirycznych $\hat{G}(x; K, p)$, pokazaliśmy, że przy założeniu **Z7** (dotyczącym lokalnej ciągłości nieliniowości $R(x)$ i funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$ – zob. str. 34), zachodzi następujące oszacowanie (por. wzór (3.28)):

$$\text{bias}^2 \hat{G}(x; K, p) \leq 2^{-2\gamma K} \cdot C_{\text{bias}}, \quad \gamma = \min\{\alpha, \beta, p\} \quad (4.35)$$

A zatem, biorąc pod uwagę wzory (4.29), (4.30), (4.31) i (4.35), otrzymujemy (w ustalonym punkcie x) oszacowanie błędu średniokwadratowego MSE empirycznych modeli obliczeniowych o postaci (por. wzór (3.30))

$$\text{MSE } \tilde{G}(x; K, H, p) \leq \left[(2^{-2\gamma K} + 2^{-2\rho H} K^2) + \frac{2^K}{N} \right] \bar{C}_{\text{MSE}} \quad (4.36)$$

gdzie $\bar{C}_{\text{MSE}} = \max \{2C_{\text{bias}}, 2\bar{C}_{\text{bias}}, \bar{C}_{\text{var}}\}$. Jeśli zatem w modelach obliczeniowych $\tilde{G}(x; K, H, p)$ będziemy stosować takie skale aproksymacji H , przy których składowa $2^{-2\rho H} K^2$ jest nie większa od składowej $2^{-2\gamma K}$, tj. spełniona jest nierówność (por. wzory (4.34) i (4.35))

$$2^{-2\gamma K} \geq 2^{-2\rho H} K^2 \quad (4.37)$$

to zagwarantujemy, że oszacowanie błędu średniokwadratowego modeli obliczeniowych $\tilde{G}(x; K, H, p)$ będzie asymptotycznie równe co do rzędu oszacowaniu błędu średniokwadratowego modeli $\hat{G}(x; K, p)$ (por. wzór (3.32) w rozdz. 3).

Rozwiązując nierówność (4.37) otrzymujemy następującą regułę doboru skali aproksymacji H w modelach obliczeniowych $\tilde{G}(x; K, H, p)$, gwarantującą powyższą asymptotyczną równoważność modeli $\tilde{G}(x; K, H, p)$ i $\hat{G}(x; K, p)$:

$$H \geq H_{\min}(K) = \left\lceil \frac{\gamma K + \log_2 K}{\rho} \right\rceil \quad (4.38)$$

gdzie (por. wzór (3.32) w rozdz. 3 i wzór (4.4))

$$\gamma = \min \{\alpha, \beta, p\} \quad \text{oraz} \quad \rho = \begin{cases} \sim 0.55 & \text{dla } p = 2 \\ 1 & \text{dla } p > 2 \end{cases} \quad (4.39)$$

i gdzie K jest skalą modelu falkowego (wzory (3.9) i (4.16)).

Zauważmy, że wymagana skala aproksymacji zależy od przyjętych w modelu funkcji falkowych (ze względu na parametry γ i ρ – zob. wzór (4.39)) oraz skali modelu K , a zatem (biorąc pod uwagę fakt, że skala ta jest dobierana według reguły (3.31)) także od gładkości nieliniowości $R(x)$ i funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$, przy czym:

GH1. Ze wzrostem gładkości $R(x)$ i $f(x)$ oraz przy wzroście numeru falkowego p , rośnie także wymagana skala aproksymacji $H_{\min}(K)$ (por. wzór (4.39)).

GH2. Dla aproksymacji funkcji falkowych o numerze $p = 2$ wymagana skala aproksymacji $H_{\min}(K)$ jest większa niż dla funkcji falkowych z numerem $p > 2$, (por. wzór (4.39)).

Wynika to z faktu, że w przypadku gdy $p = 2$, wartość wykładnika ρ w nierówności (4.37) wynosi ~ 0.55 (por. wzór (4.39)) i ze wzrostem skali aproksymacji H błąd po prawej stronie tej nierówności (proporcjonalny do składowej obciążenia wynikającej z zastosowania aproksymacji funkcji falkowych) maleje z prędkością rzędu $O(2^{-1.1H})$, podczas gdy dla falek o numerach $p > 2$ rząd ten wynosi $O(2^{-2H})$ (ponieważ $\rho = 1$; zob. wzór (4.39)).

GH3. Wzrost skali K w modelach powoduje odpowiedni (według wzoru (4.38)) wzrost wymaganej skali aproksymacji $H_{\min}(K)$.

Powyższe rozważania prowadzą do następującego lematu.

Lemat 4.12 *Jeśli spełnione są założenia lematu 3.3, a skala aproksymacji H w $\bar{\varphi}^p(x; H)$ i $\bar{\psi}^p(x; H)$ zastosowanych w obliczeniowych modelach empirycznych $\tilde{G}(x; K, H, p)$ jest dobierana według reguły (4.38), to asymptotycznie ich szybkość zbieżności punktowej (w sensie błędu MSE) do nieliniowości $G(x)$ jest taka sama jak falkowych modeli empirycznych $\hat{G}(x; K, p)$, dla danej reguły doboru skali K (por. lemat 3.3).*

B. Analiza zbieżności całkowej modeli obliczeniowych $\tilde{G}(x; K, H, p)$

Dekomponując całkowity błąd średniokwadratowy MISE obliczeniowych modeli empirycznych $\tilde{G}(x; K, H, p)$ otrzymujemy, że

$$\text{MISE } \tilde{G}(x; K, H, p) = \mathbb{E} \int_S [G(x) - \tilde{G}(x; K, H, p)]^2 dx = \text{ISB } \tilde{G}(x; K, H, p) + \text{IV} \tilde{G}(x; K, H, p)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \text{ISB } \tilde{G}(x; K, H, p) &= \int_S [G(x) - \mathbb{E} \tilde{G}(x; K, H, p)]^2 dx \\ \text{IV } \tilde{G}(x; K, H, p) &= \int_S \mathbb{E} [\mathbb{E} \tilde{G}(x; K, H, p) - \tilde{G}(x; K, H, p)]^2 dx \end{aligned}$$

Wariancja $\text{IV } \tilde{G}(x; K, H, p)$. Oszacowanie zintegrowanej wariancji modeli obliczeniowych $\tilde{G}(x; K, H, p)$ możemy wyznaczyć korzystając z oszacowania punktowej wariancji wyjścia tych modeli we wzorze (4.29)

$$\text{IV } \tilde{G}(x; K, H, p) = \int_S \text{var } \tilde{G}(x; K, H, p) dx \leq \frac{2^K}{N} \cdot \bar{C}_{\text{IV}} \quad (4.40)$$

gdzie $\bar{C}_{\text{IV}} = (b - a) \bar{C}_{\text{var}}$. Oszacowanie to jest równe (z dokładnością do stałej) oszacowaniu zintegrowanej wariancji falkowych modeli empirycznych $\hat{G}(x; K, p)$ wykorzystujących oryginalne funkcje falkowe (por. wzór (3.34)).

Obciążenie $\text{ISB } \tilde{G}(x; K, H, p)$. W oparciu o poniższy wzór (zob. własność (4.28) i odpowiednie wzory na str. 76)

$$\begin{aligned} \text{ISB } \tilde{G}(x; K, H, p) &= \int_S [G(x) - \tilde{G}(x; K, H, p)]^2 dx = \\ &= \int_S \{[G(x) - G(x; K, p)] + [G(x; K, p) - \tilde{G}(x; K, H, p)]\}^2 dx \end{aligned}$$

błąd całkowitego obciążenia empirycznych modeli obliczeniowych $\tilde{G}(x; K, H, p)$ można oszacować w następujący sposób (por. wzór (4.30))

$$\begin{aligned} \text{ISB } \tilde{G}(x; K, H, p) &\leq 2 \int_S [G(x) - G(x; K, p)]^2 dx + 2 \int_S [G(x; K, p) - \tilde{G}(x; K, H, p)]^2 dx = \\ &\stackrel{\text{def}}{=} 2 [\text{ISB } \hat{G}(x; K, p) + \overline{\text{ISB}} \tilde{G}(x; K, H, p)] \end{aligned}$$

Pierwszy w nawiasie człon oszacowania stanowi zintegrowane obciążenie falkowych modeli empirycznych $\hat{G}(x; K, p)$ (por. wzór (3.33) w rozdz. 3). Natomiast drugi składnik jest błędem wynikającym z zastosowania w modelach obliczeniowych aproksymacji funkcji falkowych. Biorąc pod uwagę, że dla dowolnego przedziału $S' \subseteq S$ zachodzi

$$\overline{\text{ISB}} \tilde{G}(x; K, H, p) = \int_{S'} \overline{\text{bias}}^2 \tilde{G}(x; K, H, p) dx$$

składnik ten możemy oszacować korzystając z oszacowania składowej $\overline{\text{bias}}^2 \tilde{G}(x; K, H, p)$ obciążenia błędu punktowego MSE modeli obliczeniowych, danego we wzorze (4.31):

$$\overline{\text{ISB}} \tilde{G}(x; K, H, p) = \int_S \overline{\text{bias}}^2 \tilde{G}(x; K, H, p) dx \leq 2^{-2\rho H} K^2 \cdot \bar{C}_{\overline{\text{ISB}}} \quad (4.41)$$

gdzie $\bar{C}_{\overline{\text{ISB}}} = (b - a) \bar{C}_{\overline{\text{bias}}}$.

Zbieżność całkowita modeli $\tilde{G}(x; K, H, p)$. Przeprowadzając rozumowanie analogiczne do przedstawionego podczas badania średniokwadratowej zbieżności punktowej modeli $\tilde{G}(x; K, H, p)$ otrzymujemy następujący lemat charakteryzujący warunki całkowitej zbieżności średniokwadratowej modeli obliczeniowych $\tilde{G}(x; K, H, p)$ (por. wzory (4.40)-(4.41) ze wzorami (4.29) i (4.31) i zob. lemat 4.11).

Lemat 4.13 *Jeśli spełnione są założenia lematu 3.4, a skala aproksymacji H w $\tilde{\varphi}^p(x; H)$ i $\tilde{\psi}^p(x; H)$ użytych w obliczeniowych modelach empirycznych $\tilde{G}(x; K, H, p)$ zależy od skali K tych modeli, tak że spełnione są warunki ze wzoru (4.34), to dla każdego p modele te zbiegają do identyfikowanej funkcji $G(x)$ w sensie średniokwadratowego błędu całkowego.*

Szybkość zbieżności całkowitej modeli $\tilde{G}(x; K, H, p)$. Dla całkowitego błędu średniokwadratowego obliczeniowych modeli empirycznych $\tilde{G}(x; K, H, p)$ zachodzi następujące oszacowanie

$$\text{MISE } \tilde{G}(x; K, H, p) \leq \left[(2^{-2\kappa K} + 2^{-2\rho H} K^2) + \frac{2^K}{N} \right] \bar{C}_{\text{MISE}} \quad (4.42)$$

z wykładnikiem κ wynoszącym (por. wzory (3.40) i (3.45) w rozdz. 3)

$$\kappa = \min \{ \alpha, \beta, p \} (= \gamma) \quad \text{oraz} \quad \kappa = \min \left\{ \alpha, \beta, \frac{1}{2} \right\} (= \varrho) \quad (4.43)$$

odpowiednio dla funkcji $G(x)$ ciągłych i nieciągłych w przedziale $S = [a, b]$ i ze stałą $\bar{C}_{\text{MISE}} = \max \{ 2C_{\text{bias}}(b'_G - a'_G), 2C_{\text{ISB}}^{\varrho}, 2\bar{C}_{\text{ISB}}, \bar{C}_{\text{IV}} \}$ (kolejne stałe w definicji $\bar{C}_{\text{MISE}}$ są zdefiniowane we wzorach (3.28) i (3.41), (3.45), (4.40) i (4.41) dotyczących oszacowań odpowiednich składowych błędów we wzorze (4.42)).

Stąd, by zapewnić modelom obliczeniowym $\tilde{G}(x; K, H, p)$ rząd szybkości zbieżności całkowitej równy gwarantowanym rzędom szybkości zbieżności całkowitej modeli falkowych $\hat{G}(x; K, p)$ należy tak dobierać skalę aproksymacji H w $\tilde{\varphi}^p(x; H)$ i $\tilde{\psi}^p(x; H)$, aby spełniona była poniższa nierówność (por. z nierównością (4.37))

$$2^{-2\kappa K} \geq 2^{-2\rho H} K^2$$

Rozwiązanie tej nierówności dla poszczególnych κ ze wzoru (4.43) prowadzi do następującego lematu (por. lemat 4.12).

Lemat 4.14 *Jeśli skala aproksymacji H w $\tilde{\varphi}^p(x; H)$ i $\tilde{\psi}^p(x; H)$ stosowanych w empirycznych modelach obliczeniowych $\tilde{G}(x; K, H, p)$ zależy od skali K modeli falkowych i dobierana jest według reguł*

$$H \geq H_{\min}(K) = \left\lceil \frac{\gamma K + \log_2 K}{\rho} \right\rceil \quad (4.44)$$

dla funkcji $G(x)$ ciągłych w przedziale $S = [a, b]$, oraz

$$H \geq H_{\min}(K) = \left\lceil \frac{\varrho K + \log_2 K}{\rho} \right\rceil \quad (4.45)$$

dla $G(x)$ nieciągłych, to asymptotycznie ich szybkości zbieżności całkowitej (w sensie błędu MISE) do nieliniowości $G(x)$ są takie same jak szybkości falkowych modeli empirycznych $\hat{G}(x; K, p)$, gwarantowe dla danego wyboru skali K (por. lematy 3.5 i 3.6 w rozdz. 3).

4.3.2 Analiza własności empirycznych modeli obliczeniowych $\tilde{R}_G(x; K, H, p)$

Wykorzystując zależności (3.49) i (3.55) (w rozdz. 3) oraz opierając się na lematach 4.11-4.14 i twierdzeniu 2.19 cytowanym w Dodatku B.8 (dotyczącym szybkości zbieżności wg prawdopodobieństwa), otrzymujemy następujące twierdzenia charakteryzujące warunki i szybkości zbieżności obliczeniowych modeli empirycznych $\tilde{R}_G(x; K, H, p)$ (por. twierdzenia 3.1-3.6 z rozdz. 3):

Twierdzenie 4.15 (Zbieżność modeli obliczeniowych) *Jeśli skala H użyta w aproksymacjach $\tilde{\varphi}^p(x; H)$ i $\tilde{\psi}^p(x; H)$ zastosowanych w empirycznych modelach obliczeniowych $\tilde{R}_G(x; K, H, p)$ spełnia warunki ze wzoru (4.34), to wówczas modele te zbiegają do nieliniowości $R(x)$ przy tych samych założeniach (i w tym samym sensie), przy których zbiegają do niej falkowe modele empiryczne $\hat{R}_G(x; K, p)$ (zob. twierdzenia 3.1 i 3.4 oraz wniosek 3.1 w rozdz. 3; por. lematy 4.11 i 4.13).*

Twierdzenie 4.16 (Szybkość średniokwadratowej zbieżności punktowej) *Jeśli spełnione są założenia twierdzenia 3.2, a skala aproksymacji H w $\tilde{\varphi}^p(x; H)$ i $\tilde{\psi}^p(x; H)$ zastosowanych w obliczeniowych modelach empirycznych $\tilde{R}_G(x; K, H, p)$ jest dobierana według reguły (4.38), to asymptotycznie ich szybkość zbieżności punktowej (w sensie błędu MSE) do nieliniowości $R(x)$ jest taka sama jak falkowych modeli empirycznych $\hat{R}_G(x; K, p)$, dla danej reguły doboru skali K (zob. wzór (3.52) i twierdzenie 3.2 w rozdz. 3; por. lemat 4.12).*

Z powyższego twierdzenia oraz twierdzenia 2.19 (Dodatek B.8) wynika, że empiryczne modele obliczeniowe zbiegają punktowo według prawdopodobieństwa z szybkością asymptotycznie równą szybkości zbieżności w tym sensie empirycznych modeli falkowych $\hat{R}_G(x; K, p)$ (zob. twierdzenie 3.3 w rozdz. 3).

Twierdzenie 4.17 (Szybkość średniokwadratowej zbieżności całkowitej) *Jeśli skala aproksymacji H w $\tilde{\varphi}^p(x; H)$ i $\tilde{\psi}^p(x; H)$ stosowanych w empirycznych modelach obliczeniowych $\tilde{R}_G(x; K, H, p)$ zależy od skali K modeli falkowych i dobierana jest według reguły (4.44) dla nieliniowości $R(x)$ i funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$ ciągłych w przedziale $S = [a, b]$, oraz według reguły (4.45) dla $R(x)$ i (lub) $f(x)$ nieciągłych, to asymptotycznie ich szybkości zbieżności całkowitej (w sensie błędu MISE) do nieliniowości $R(x)$ są takie same jak szybkości falkowych modeli empirycznych $\hat{R}_G(x; K, p)$, gwarantowane dla danego wyboru skali K (zob. wzory (3.56) i (3.58) i twierdzenia 3.5 i 3.6 w rozdz. 3; por. lemat 4.14).*

Z powyższych twierdzeń wynikają następujące wnioski dotyczące własności empirycznych modeli obliczeniowych $\tilde{R}_G(x; K, H, p)$:

RGH1. Właściwy (zgodny z regułami (4.44) i (4.45)) dobór skali H w aproksymacjach funkcji falkowych $\tilde{\varphi}^p(x; H)$ i $\tilde{\psi}^p(x; H)$, pozwala obliczeniowym modelom empirycznym $\tilde{R}_G(x; K, H, p)$ zachować (asymptotycznie) własności falkowych modeli empirycznych $\hat{R}_G(x; K, p)$. W szczególności zatem, w odniesieniu do modeli obliczeniowych $\tilde{R}_G(x; K, H, p)$ znajdują zastosowanie reguły doboru skal K opracowane dla empirycznych modeli falkowych $\hat{R}_G(x; K, p)$ (por. wzory (3.56) i (3.58) z rozdz. 3).

RGH2. Dobór właściwej skali aproksymacji H funkcji falkowych zależy od gładkości identyfikowanej nieliniowości $R(x)$, funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$ oraz przyjętych funkcji falkowych (numeru falkowego p) (por. wzory (4.38)-(4.39), (4.44)-(4.45) oraz własności **GH1-GH2**).

RGH3. Wzrost skali K falkowych modeli empirycznych powoduje (zgodnie z regułami (4.44)-(4.45)) odpowiedni wzrost wymaganej skali aproksymacji $H_{\min}(K)$ (zob. własność **GH3**).

Przykłady. Rozpatrzmy teraz przykładowe przypadki identyfikowanej nieliniowości $R(x)$ i funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$.

Niech $R(x)$ i $f(x)$ będą odcinkami stałe w przedziale $S = [a, b]$. Wówczas $\varrho = 1/2$ i modele obliczeniowe $\tilde{R}_G(x; K, H, p)$ osiągają asymptotyczną szybkość zbieżności $O(N^{-1/2})$ modeli falkowych $\hat{R}(x; K, p)$ w sensie całkowego błędu średniokwadratowego, o ile skala aproksymacji H spełnia warunki (por. wzór (4.45) i definicję ρ we wzorze (4.4))

$$H \geq H_{\min}(K) = \begin{cases} K + 2 \log_2 K & \text{dla } p = 2 \\ \frac{K}{2} + \log_2 K & \text{dla } p > 2 \end{cases}$$

a skala K modeli falkowych dobierana jest według reguły (3.58) w rozdz. 3. Jeśli $R(x)$ i $f(x)$ spełniają warunek Lipschitza ($\alpha = \beta = 1$), to wówczas $\gamma = 1$ i modele obliczeniowe osiągają asymptotycznie szybkość zbieżności $O(N^{-2/3})$ w sensie średniokwadratowego błędu całkowego, przy skalach aproksymacji H dobieranych według reguł (por. wzór (4.44))

$$H \geq H_{\min}(K) = \begin{cases} 2(K + \log_2 K) & \text{dla } p = 2 \\ K + \log_2 K & \text{dla } p > 2 \end{cases}$$

i skalach K modeli falkowych wyznaczanych zgodnie ze wzorem (3.56)). Ponieważ dla $p = 2$, minimalna wymagana skala H jest dwukrotnie większa niż dla $p > 2$ (por. własność **GH2**, str. 78), to zastosowanie w modelach funkcji falkowych o tym numerze wymaga uzyskania dwukrotnie dokładniejszych aproksymacji takich funkcji falkowych.

A. Dobór skali H w aproksymacjach funkcji falkowych $\tilde{\varphi}^p(x; H)$ i $\tilde{\psi}^p(x; H)$

Zwróćmy uwagę, że warunek (4.34) oraz reguły (4.44)-(4.45) doboru minimalnej skali aproksymacji $H_{\min}(K)$ funkcji falkowych gwarantują jedynie asymptotyczną równowagę empirycznych modeli obliczeniowych i empirycznych modeli falkowych wykorzystujących oryginalne („dokładne”) falki. Zatem w praktycznych zastosowaniach, aby zminimalizować wpływ dodatkowego błędu wynikającego ze stosowania aproksymacji $\tilde{\varphi}^p(x; H)$ i $\tilde{\psi}^p(x; H)$ w miejsce oryginalnych falek, należy obliczać je z jak największą rozdzielczością (w jak największej skali $H \geq H_{\min}(K)$) (por. wzory (4.36) i (4.42)).

Ze względu na asymptotyczny charakter uzyskanych wyników (prawdziwych dla dużych wartości H – a zatem też dużych skal K i, w konsekwencji, także dla dużych liczb pomiarów N – por. wzory (3.56) i (3.58)), w rozdziale 5 przedstawiamy wyniki badań numerycznych dotyczących wpływu dokładności aproksymacji funkcji falkowych na własności modeli obliczeniowych dla umiarkowanych skal H, K i umiarkowanych liczb pomiarów N .

4.4 Szybkie algorytmy wyznaczania obliczeniowych modeli empirycznych

Z obliczeniowego punktu widzenia, problem identyfikacji nieliniowości $R(x)$ sprowadza się do wyznaczenia współczynników w obliczeniowych modelach empirycznych na podstawie danych ze zbioru pomiarowego $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^N$. Na przykładzie obliczeniowego algorytmu ilorazowego pokażemy, że bezpośrednie wykorzystanie w tym celu wzorów wynikających z rozważań teoretycznych (tj. zastosowanie w obliczeniach wprost wzorów (4.17)) prowadzi do algorytmów o złożoności obliczeniowej rzędu $O(N^\nu)$, gdzie wykładnik ν zawiera się w przedziale $(1, 2)$ i zależy od gładkości identyfikowanej nieliniowości $R(x)$ i funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$ oraz przyjętych w modelach funkcji falkowych (numeru p). Następnie proponujemy „szybki” algorytm wyznaczania obliczeniowych modeli empirycznych i wykazemy, że złożoność tego algorytmu wynosi $O(N)$ i, ponadto, nie zależy od gładkości $R(x)$ oraz $f(x)$.

Złożoność obliczeniowa algorytmu ilorazowego

Analizując złożoność obliczeniową algorytmu będziemy posługiwać się pojęciem *opms* – jednostkowej operacji arytmetycznej polegającej na wymnożeniu (podzieleniu) dwóch liczb i dodaniu (odjęciu) uzyskanego wyniku do innej liczby (zob. np. [81, str. 81]).

Niech $C_G(N, K, p)$ oznacza liczbę operacji *opms* potrzebnych do wyznaczenia modelu $\tilde{R}_G(x; K, H, p)$. Ponieważ do obliczenia każdego współczynnika tego modelu potrzeba N *opms* (por. wzory w (4.17)), stąd

$$C_G(N, K, p) = N \cdot P_G(M, K)$$

gdzie $P_G(M, K)$ oznacza liczbę współczynników w modelu obliczeniowym $\tilde{R}_G(x; K, H, p)$ (równą liczbie współczynników w modelu $\tilde{G}(x; K, H, p)$). Liczbę tę można oszacować następująco (zob. wzór (C.23) w Dodatku C.6)

$$P_G(M, K) < 2^K [(b-a) + 2p] \quad (4.46)$$

Wyznaczając skalę K modeli na podstawie reguł (3.56) i (3.58) z rozdz. 3 (tj. w zależności od gładkości nieliniowości $R(x)$ i funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$ oraz przyjętych w modelach funkcji falkowych) otrzymujemy, że

$$C_G(N, K, p) < N \cdot 2^{\lfloor \frac{1}{2\gamma+1} \log_2 2^\gamma N \rfloor} [(b-a) + 2p] \leq N^{\frac{2\gamma+2}{2\gamma+1}} \cdot C_\gamma$$

gdzie $C_\gamma = (2\gamma)^{1/(2\gamma+1)} [(b-a) + 2p]$ oraz

$$C_G(N, K, p) < N^{\frac{2\varrho+2}{2\varrho+1}} \cdot C_\varrho$$

gdzie $C_\varrho = (2\varrho)^{1/(2\varrho+1)} [(b-a) + 2p]$ dla, odpowiednio, ciągłych i nieciągłych $R(x)$ i $f(x)$. Stąd, ponieważ $\gamma > 0$ oraz $\varrho \in (0, 1/2]$, to z powyższych oszacowań wynika następujący lemat.

Lemat 4.15 *Złożoność obliczeniowa algorytmu ilorazowego opartego na wzorach (4.17) jest rzędu*

$$C_G(N, K, p) = O(N^\nu), \quad \text{gdzie} \quad \nu = \frac{2\gamma+2}{2\gamma+1} \in (1, 2) \quad (4.47)$$

dla ciągłych, oraz

$$C_G(N, K, p) = O(N^\nu), \quad \text{gdzie} \quad \nu = \frac{2\rho + 2}{2\rho + 1} \in \left[\frac{3}{2}, 2\right) \quad (4.48)$$

dla nieciągłych nieliniowości $R(x)$ i (lub) funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$.

Zauważmy, że ze wzrostem gładkości $R(x)$ i $f(x)$ (tj. ze wzrostem α i β) i przy jednoczesnym wzroście numeru falkowego p , rośnie wartość parametru $\gamma (= \min\{\alpha, \beta, p\})$ (por. wzór (3.56) w rozdz. 3), wykładnik ν we wzorze (4.47) dąży do wartości 1 i, w konsekwencji, złożoność obliczeniowa algorytmu zbliża się do poziomu $O(N)$. Jeśli $R(x)$ i $f(x)$ są nieciągłe (i odcinkami gładkie), to minimalna złożoność algorytmu zachodzi dla $\rho = 1/2$ (por. wzór (3.58) w rozdz. 3) i jest rzędu $O(N^{3/2})$ (wzór (4.48)).

Przykłady. Dla $R(x)$ i $f(x)$ nieciągłych, odcinkami stałych mamy $\alpha = \beta = \infty$, a zatem $\rho = 1/2$ (por. wzór (3.58)) oraz $\nu = 3/2$ (zob. wzór (4.48)) i złożoność obliczeniowego algorytmu ilorazowego wynosi $O(N^{3/2})$.

Jeśli $R(x)$ i $f(x)$ spełniają warunek Lipschitza ($\alpha = \beta = 1$), to wówczas (por. (3.56)) $\gamma = 1$ i złożoność algorytmu maleje do poziomu $O(N^{4/3})$ (zob. wzór (4.47)).

Natomiast, dla bardzo gładkich $R(x)$ i $f(x)$ (gdy $\min\{\alpha, \beta\} \gg p$ i $\gamma = p$) złożoność algorytmu zależy jedynie od przyjętych funkcji falkowych: dla $p = 2$ wynosi $O(N^{6/5})$ i ze wzrostem p zbliża się do rzędu $O(N)$ (wzór (4.47)).

4.4.1 Szybki obliczeniowy algorytm ilorazowy

Podstawa teoretyczna. Proponowany algorytm składa się z dwóch kroków. Pierwszy krok polega na wyznaczeniu w skali K współczynników empirycznych $\tilde{\alpha}_{K_n}$, $n = n_{\min}(K, p), \dots, n_{\max}(K, p)$ (współczynników początkowych w algorytmie szybkiej transformaty falkowej FWT – zob. punkt 1.3) na podstawie pomiarów $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^N$ i opiera się na następujących spostrzeżeniach:

- Ze względu na zwartość nośnika aproksymacji $\tilde{\varphi}_{K_n}^p(x; H)$ (wzór (4.6)), każda para pomiarów (x_k, y_k) wpływa na wartości co najwyżej $2p - 1$ współczynników $\tilde{\alpha}_{K_n}^p$ – odpowiadających tym aproksymacjom $\tilde{\varphi}_{K_n}^p(x; H)$ funkcji skalujących $\varphi_{K_n}^p(x)$, których nośniki zawierają pomiar x_k – zob. Rys. 4.2 (por. z dyskusją w punkcie 3.1.1, poświęconą analizie szybkości zbieżności punktowej falkowych modeli empirycznych $\hat{G}(x; K, p)$ i zob. wzór (3.26) oraz Rys. 3.3).
- Dla danej skali aproksymacji H składowa wejściowa x_k pary pomiarów (x_k, y_k) należy do przedziału nośnika aproksymacji $\tilde{\varphi}_{K_n}^p(x; H)$, to wówczas zachodzi następująca nierówność (por. wzór (4.6))

$$\frac{1}{2H} + \frac{n}{2K} \geq x_k > \frac{n + (2p - 1)}{2K}$$

na podstawie której można wyznaczyć indeksy przesunięć n „aktywnych” – dla danej pary pomiarów (x_k, y_k) – aproksymacji $\tilde{\varphi}_{K_n}^p(x; H)$. Z praktycznego punktu

widzenia wygodniej jest jednak wyznaczać te indeksy według poniższej nierówności (wynikającej z postaci nośnika funkcji skalującej $\varphi_{Kn}^p(x)$ – por. wzory (1.11) i (4.6))

$$\frac{n}{2^K} \geq x_k > \frac{n + (2p - 1)}{2^K} \quad (4.49)$$

dzięki czemu szybki algorytm obliczeniowy staje się niezależny od skali aproksymacji H .

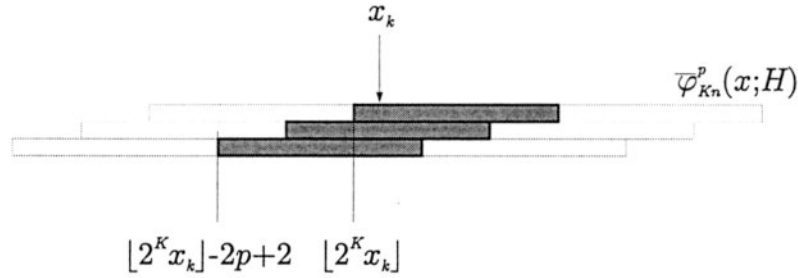
Z powyższych obserwacji wnioskujemy, że indeksy przesunięć n odpowiadające „aktywnym” aproksymacjom $\tilde{\varphi}_{Kn}^p(x; H)$ możemy (z nierówności (4.49)) wyznaczyć za pomocą następującego wzoru

$$n = \lfloor 2^K x_k \rfloor - l, \quad l = 0, \dots, 2p - 2 \quad (4.50)$$

Obliczanie wartości współczynników $\tilde{\alpha}_{Kn}^p$ o tych indeksach można zrealizować przy użyciu prostej reguły

$$\tilde{\alpha}_{Kn, (k)}^p = \tilde{\alpha}_{Kn, (k-1)}^p + \frac{y_k}{N} \cdot 2^{\frac{K}{2}} \tilde{\varphi}^p(2^K x_k - n; H) \quad \text{gdzie} \quad \tilde{\alpha}_{Kn, (0)}^p = 0 \quad (4.51)$$

stanowiącej rekurencyjną wersję odpowiedniego wzoru w (4.17) (dla skali K).



Rys. 4.2 Każda para pomiarów (x_k, y_k) wpływa tylko na wartości współczynników $\tilde{\alpha}_{Kn}^p$ odpowiadających tym aproksymacjom $\tilde{\varphi}_{Kn}^p(x; H)$ funkcji skalujących, których nośniki zawierają pomiar x_k (rysunek ilustruje przypadek, gdy numer falkowy $p = 2$)

Drugi krok algorytmu polega na wyznaczeniu współczynników $\tilde{\alpha}_{Mn}^p$ i $\tilde{\beta}_{ml}^p$ empirycznych modeli obliczeniowych $\tilde{R}_G(x; K, H, p)$ w oparciu o obliczone w pierwszym kroku współczynniki początkowe $\tilde{\alpha}_{Kn}^p$ (w skali K), z użyciem poniższych wzorów (wzorowanych na algorytmie szybkiej transformaty falkowej – zob. np. [92], [130] i [131], por. wzór (1.27) w rozdz. 1; zob. Dodatek C.7, str. 139)

$$\tilde{\alpha}_{mn}^p = \sum_{t=0}^{2p-1} c_t \tilde{\alpha}_{m+1, 2n+t}^p \quad \text{oraz} \quad \tilde{\beta}_{ml}^p = \sum_{t=-2(p-1)}^1 (-1)^t c_{1-t} \tilde{\alpha}_{m+1, 2l+t}^p \quad (4.52)$$

w kolejnych skalach $m = K - 1, \dots, M$.

Szybki obliczeniowy algorytm identyfikacji

Z powyższych rozważań otrzymujemy następujący szybki obliczeniowy algorytm ilorazowy:

Twierdzenie 4.18 *Złożoność szybkiego algorytmu (4.50)-(4.52) wyznaczania empirycznych modeli obliczeniowych $\tilde{R}_G(x; K, H, p)$ jest rzędu*

$$C_G^F(N, K, p) = O(N)$$

dla ciągłych i nieciągłych nieliniowości $R(x)$ i funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$.

Podsumowanie

W rozdziale zaproponowaliśmy obliczeniowe (praktyczne) odpowiedniki falkowych algorytmów identyfikacji przedstawionych i badanych w rozdziale 3. Na przykładzie algorytmu ilorazowego pokazaliśmy, że konieczne, ze względu na specyfikę funkcji falkowych Daubechies i założone warunki identyfikacji, modyfikacje algorytmów polegające na zastąpieniu w nich funkcji falkowych Daubechies $\varphi^p(x)$ i $\psi^p(x)$ przez ich proste obliczeniowo aproksymacje schodkowe $\tilde{\varphi}^p(x; H)$ i $\tilde{\psi}^p(x; H)$, pozwalają (przy łatwych do realizacji warunkach (4.44)-(4.45)) zachować przez odpowiednie modele obliczeniowe asymptotyczne własności odpowiednich modeli falkowych z oryginalnymi funkcjami falkowymi. Wpływ dokładności aproksymacji funkcji falkowych na zachowanie modeli obliczeniowych dla małych skal H i K badamy numerycznie w rozdziale 5.

Zaproponowaliśmy również szybki algorytm wyznaczania obliczeniowych modeli empirycznych i pokazaliśmy, że jego złożoność jest rzędu $O(N)$, tj. że liczba obliczeń potrzebnych do wyznaczenia tych modeli rośnie jedynie liniowo ze wzrostem liczby pomiarów N (w Dodatku C.8, na str. 140 przedstawiamy procedury komputerowe implementujące ten algorytm).

Rozdział 5

Badania numeryczne falkowych algorytmów identyfikacji

Przedstawione w rozdziałach 3 i 4 własności modeli falkowych i ich obliczeniowych wersji wyznaczanych za pomocą odpowiednich algorytmów identyfikacji mają charakter asymptotyczny, tj. zachodzą dla dużych liczb pomiarów N , dużych wartości skal K w modelach falkowych i dużych skal aproksymacji H w modelach obliczeniowych. Z punktu widzenia zastosowań interesujące jest zachowanie się tych modeli w przypadku, gdy do dyspozycji mamy małą lub umiarkowaną liczbę pomiarów, a skale K i H są niewielkie. Aby uzyskać orientację w tym zakresie, przeprowadzono szereg eksperymentów numerycznych, które, podobnie jak przeprowadzone wcześniej badania teoretyczne, miały na celu zbadanie wpływu:

- gładkości identyfikowanej nieliniowości $R(x)$,
- gładkości funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$, oraz
- zastosowanych w modelach funkcji falkowych,

na wielkość i szybkość zmniejszania się błędów modeli obliczeniowych ze wzrostem liczby pomiarów N w przypadkach systemu statycznego i systemu Hammersteina, przy skorelowanych zakłóceniach z_k . Badania obejmowały także:

- Porównanie empirycznych modeli obliczeniowych $\tilde{R}_G(x; K, H, p)$, $\tilde{R}_R(x; K, H, p)$ i $\tilde{R}_{Gf}(x; K, H, p)$, przedstawionych w punkcie 4.2 w rozdz. 4
- Weryfikację przydatności teoretycznych reguł doboru skali modeli K określonych wzorami (3.56) i (3.58), na przykładzie modeli obliczeniowych $\tilde{R}_G(x; K, H, p)$.
- Zbadanie wpływu skali aproksymacji H (tj. dokładności stosowanych aproksymacji funkcji falkowych) na zachowanie się modeli obliczeniowych.

W ramach badań empirycznych porównano także algorytmy falkowe z algorytmami trygonometrycznymi (tj. opartymi na klasycznym trygonometrycznym układzie ortogonalnym).

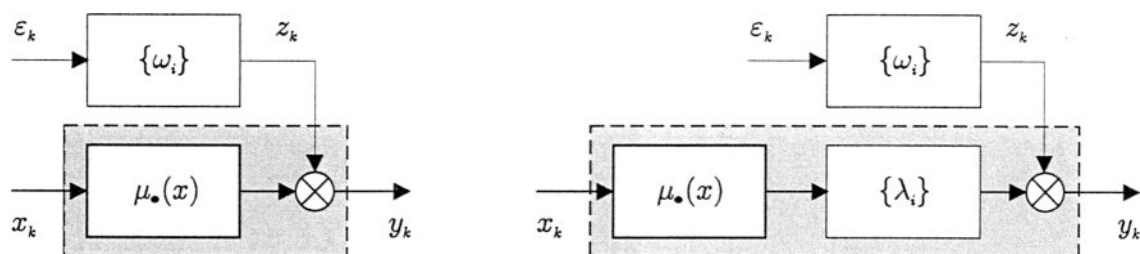
Poniżej przedstawiamy warunki w jakich przeprowadzono eksperymenty, a następnie omówimy wybrane wyniki.

5.1 Warunki eksperymentów

Empiryczne modele obliczeniowe. Algorytmy identyfikacji. W trakcie eksperymentów zbadaliśmy własności rozważanych w pracy trzech empirycznych modeli obliczeniowych:

$$\tilde{R}_\bullet(x; K, H, p) = \begin{cases} \tilde{R}_G(x; K, H, p) & (4.15) - (4.17) \\ \tilde{R}_R(x; K, H, p) & \text{danych wzorami} \quad (4.18) - (4.19) \\ \tilde{R}_{Gf}(x; K, H, p) & (4.21) - (4.23) \end{cases}$$

wyznaczanych odpowiednio według obliczeniowych wersji algorytmu ilorazowego, bezpośredniego oraz algorytmu ilorazowego z estymacją funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$, przedstawionych w rozdz. 4. W dalszej części rozdziału będziemy stosować skróconą notację i poszczególne modele oznaczać symbolami $\tilde{R}_G$, $\tilde{R}_R$ oraz $\tilde{R}_{Gf}$ (a ogólnie, za pomocą symbolu $\tilde{R}_\bullet$).



Identyfikowane systemy. Badania przeprowadziliśmy dla dwóch typów systemów (zob. rysunek powyżej, por. przykłady podane w punkcie 2.3):

- systemu statycznego, oraz
- systemu Hammersteina z liniowym elementem dynamicznym o następującej odpowiedzi impulsowej $\{\lambda_i\}_{i=0}^6$ (por. założenie **Z3** w rozdz. 2):

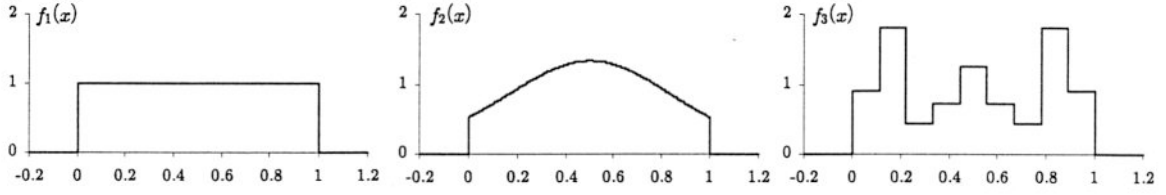
$$\lambda_0 = 1, \quad \lambda_i = 2^{-(i-1)}, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (5.1)$$

Funkcje gęstości wejścia systemu $f(x)$. Wejścia systemów były pobudzane sygnałami pseudolosowymi o następujących funkcjach gęstości (zob. Rys. 5.1, por. założenie **Z1** w rozdz. 2):

$$f_\bullet(x) = \begin{cases} f_1(x) = I_{[0,1]}(x) & \text{– gęstość (gładka) rozkładu równomiernego } U[0, 1] \\ f_2(x) = I_{[0,1]}(x) \cdot \frac{3}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{9}{2}(x-\frac{1}{2})^2} + C_f & \text{– gęstość rozkładu normalnego } N(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}) \text{ ograniczonego do przedziału } [0, 1] \\ f_3(x) = \frac{9}{2} \sum_{i=1}^9 h_i \left[1 + I_{[0, \frac{i}{9}]}(x) \right] & \text{– przykładowa nieciągła funkcja gęstości} \end{cases} \quad (5.2)$$

Stałą C_f w definicji gęstości $f_2(x)$ dobrano tak aby $\int_0^1 f_2(x) dx = 1$. Współczynniki h_i w gęstości $f_3(x)$ wynoszą

$$h_i = \{0.1, 0.1, -0.15, 0.03, 0.06, -0.06, -0.03, 0.15, -0.1\}$$



Rys. 5.1 Funkcje gęstości wejścia systemu stosowane w eksperymentach

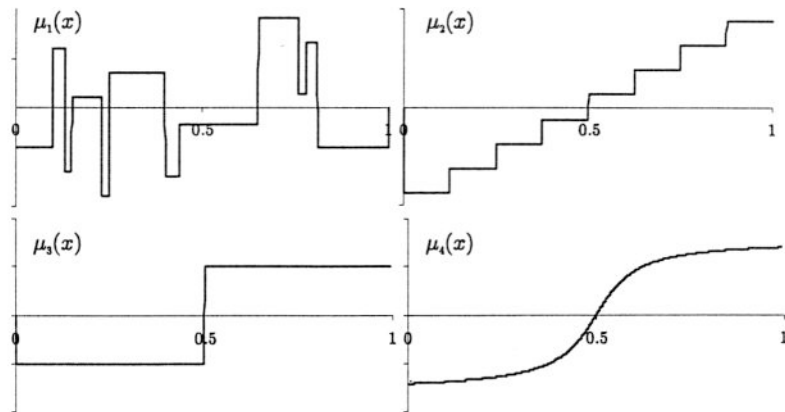
Identyfikowane charakterystyki. W trakcie eksperymentów przyjęto w systemach następujące charakterystyki nieliniowe (zob. Rys. 5.2, zob. założenie **Z2** w rozdz. 2 i założenia **Z7** (**Z7'**), **Z7a** (**Z7a'**) w rozdz. 3):

$$\mu_{\bullet}(x) = \begin{cases} \mu_1(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{11} g_i [1 + I_{[0, t_i)}(x)] + C_{\mu} & \text{– charakterystyka nieciągła} \\ \mu_2(x) = \frac{1}{4} \left[8x - \frac{7}{2} \right] & \text{– przykładowa charakterystyka} \\ & \text{kwantyzatora} \\ \mu_3(x) = I_{[\frac{1}{2}, 1)}(x) - I_{[0, \frac{1}{2})}(x) & \text{– przykładowa charakterystyka} \\ & \text{przełącznika dwupołożeniowego} \\ \mu_4(x) = \arctan(4\pi x - 2\pi) & \text{– gładka charakterystyka sigmoidalna} \end{cases} \quad (5.3)$$

Uwaga 5.10 Charakterystyka $\mu_1(x)$ z poniższymi współczynnikami t_i i g_i :

$$\begin{aligned} t_i &= \{0.1, 0.13, 0.15, 0.23, 0.25, 0.40, 0.44, 0.65, 0.76, 0.78, 0.81\} \\ g_i &= \{4, -5, 3, -4, 5, -4.2, 2.1, 4.3, -3.1, 2.1, -4.2\} \end{aligned}$$

jest stosowana jako funkcja testowa w badaniach własności algorytmów falkowych, por. np. [15], [31]–[32]; pozostałe typy charakterystyk można spotkać w rzeczywistych systemach (zob. np. [41], [143] i [151]).



Rys. 5.2 Identyfikowane charakterystyki

Stała C_{μ} w definicji charakterystyki $\mu_1(x)$ była dobierana w trakcie eksperymentów zależnie od zastosowanej funkcji gęstości wejścia systemu $f_{\bullet}(x)$ tak, aby spełniona była

równość $E \mu_1(x_1) = 0$ dzięki czemu, we wzorze (2.8) definiującym postać faktycznie identyfikowanej nieliniowości $R(x)$ w systemie Hammersteina znika przesunięcie s tej nieliniowości względem charakterystyki $\mu(x)$. Dla pozostałych nieliniowości równość ta zachodzi ze względu na ich nieparzystość względem środka przedziału $[0, 1]$ i symetrię poszczególnych funkcji gęstości wejścia systemu w tym przedziale. Stąd (oraz z faktu, że $\lambda_0 = 1$ – por. wzór (5.1)) dla systemu Hammersteina wynika równość pomiędzy identyfikowanymi nieliniowościami $R_\bullet(x)$ a odpowiednimi charakterystykami nieliniowymi $\mu_\bullet(x)$ danymi wzorami w (5.3) (por. uwaga 2.4 w rozdz. 2):

$$R_\bullet(x) = \mu_\bullet(x)$$

Zauważmy, że przy funkcjach gęstości wejścia systemu zdefiniowanych we wzorze (5.1), nieliniowości $R_\bullet(x)$ są identyfikowane w przedziale $S = [0, 1]$ (por. założenie **Z1** w rozdz. 2).

Zakłócenia zewnętrzne z_k . Wyjście obu systemów było zakłócanie skorelowanym szumem z_k o rozkładzie normalnym z zerową wartością oczekiwaną, w którym (por. założenie **Z4** w rozdz. 2):

- wariancje zakłóceń, $\sigma_z^2 = \text{var } z_k$, dobierane były tak, aby dla każdej z nieliniowości $R_\bullet(x)$, zdefiniowany poniżej stosunek szumu do sygnału

$$\text{NSR} [\%] = \frac{3\sigma_z}{M_R}$$

przyjmował wartości $0, 5, \dots, 30\%$ (M_R jest górnym ograniczeniem modułu identyfikowanej nieliniowości $R(x)$, zob. założenie **Z2** w rozdz. 2).

- współczynniki $\{\omega_i\}_{i=0}^7$ odpowiedzi impulsowej układu dynamicznego, odpowiadającego za skorelowanie zakłóceń z_k , zostały dobrane według poniższego wzoru

$$\omega_i = \frac{8-i}{8}, \quad i = 0, \dots, 7$$

Kryterium oceny jakości modeli. W każdym eksperymencie współczynniki badanego modelu falkowego $\tilde{R}_\bullet$ obliczano w punktach $k = 1/q, 2/q, \dots, q/q$ ($q = 1000$), dla P -krotnie ($P = 50$) generowanych zestawów danych pomiarowych $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^N$. Jako kryterium jakości modeli przyjęliśmy następujący, unormowany średni błąd

$$\text{MISE}_{\text{emp}} \tilde{R}_\bullet(\cdot; K, H, p) = \frac{\frac{1}{P} \sum_{r=1}^P \left\{ \frac{1}{q} \sum_{k=1}^q \left[R_\bullet\left(\frac{k}{q}\right) - \tilde{R}_{\bullet,(r)}\left(\frac{k}{q}; K, H, p\right) \right]^2 \right\}}{\int_0^1 R_\bullet^2(x) dx} \quad (5.4)$$

gdzie $\tilde{R}_{\bullet,(r)}\left(\frac{k}{q}; K, H, p\right)$ oznacza wartość wyjścia badanego modelu w punkcie k/q dla r -tego zestawu danych.

Liczba pomiarów N była dobierana w zależności od przeprowadzanego eksperymentu.

5.2 Wybrane wyniki badań numerycznych

Wpływ dynamiki systemu i poziomu zakłóceń zewnętrznych z_k . Badając teoretyczne własności empirycznych modeli falkowych i obliczeniowych pokazaliśmy, że zarówno istnienie w identyfikowanym systemie dynamiki jak i obecność skorelowanych zakłóceń zewnętrznych wpływa tylko na wielkości stałych w oszacowaniach rzędu wariancji tych modeli (por. np. wzory w (3.11) i własności **V1-V3**, wzory (3.14) i (3.34) w rozdz. 3 oraz wzory (4.25) i (4.29) w rozdz. 4), a zatem nie zmienia ich własności asymptotycznych (tj. dla dużych liczb pomiarów N).

Oddziaływanie tych czynników na zachowanie modeli $\tilde{R}_{Gf}$ dla umiarkowanej liczby pomiarów N przedstawiamy na Rys. 5.5-5.6. Zwróćmy uwagę na niewielki wpływ poziomu zakłóceń zewnętrznych z_k na błędy modeli. Wzrost błędów w przypadku systemu Hammersteina wynika ze znacznie „trudniejszych” warunków identyfikacji (większego poziomu faktycznych zakłóceń na jego wyjściu wywołanego obecnością sygnału ξ_k pochodzącego od dynamiki systemu (por. Rys. 5.3 i 5.4 i wzory (2.5), (2.6) i (2.7) w rozdz. 2).

Wpływ gładkości nieliniowości $R(x)$. Z rozważań teoretycznych wynika, że szybkość zmniejszania się błędów empirycznych modeli obliczeniowych rośnie wraz ze wzrostem gładkości nieliniowości $R(x)$ (przy odpowiednio gładkich $f(x)$ i dużych numerach falkowych p – por. wzory (3.57) i (3.59), (3.91) i (3.94) oraz (3.110) w rozdz. 3).

Porównując pod tym kątem wyniki badań dla modeli obliczeniowych $\tilde{R}_G$ przedstawione na Rys. 5.7 można stwierdzić, że największy wpływ na poziom błędów ma położenie punktów nieciągłości nieliniowości poza siatką binarną. Natomiast sam fakt istnienia nieciągłości nie jest już tak istotny (błędy dla nieciągłych nieliniowości $R_2(x)$ i $R_3(x)$ są znacznie mniejsze niż odpowiadające im błędy dla nieliniowości nieciągłej $R_1(x)$ i porównywalne z błędami otrzymanymi dla gładkiej $R_4(x)$). Modele $\tilde{R}_G$ oparte o funkcje Haara nadają się zatem do identyfikacji nieliniowości nieciągłych, gdy punkty nieciągłości (skoków) leżą na siatce binarnej (por. też dyskusję na ten temat w [108, str. 956]).

Warto też zauważyć, że za wyjątkiem nieliniowości $R_1(x)$ (zob. Rys. 5.5-5.7), już powyżej liczby pomiarów $N \sim 150$, błędy modeli obliczeniowych stają się bardzo małe, niezależnie od typu identyfikowanego systemu.

Wpływ gładkości funkcji gęstości wejścia $f(x)$. Porównując w rozdz. 3 własności asymptotyczne modeli falkowych $\tilde{R}_G(x; K, p)$ oraz $\tilde{R}_R(x; K, p)$ stwierdziliśmy, że szybkość zbieżności tych ostatnich nie zależy od gładkości funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$ (por. wzory (3.57) i (3.91) oraz (3.59) i (3.94) w rozdz. 3). Wykresy na Rys. 5.8 wskazują, że własność ta zachodzi również dla odpowiadających im modeli obliczeniowych $\tilde{R}_G$, przy umiarkowanej liczbie pomiarów N .

Wpływ zastosowanych funkcji falkowych. Z analizy własności asymptotycznych empirycznych modeli obliczeniowych wynika, że przyjęcie w nich funkcji falkowych o wyższych numerach p powoduje (przy odpowiednio gładkich $R(x)$ i $f(x)$) wzrost szybkości zbieżności tych modeli (wzrost szybkości zmniejszania się ich błędów – por. wzory (3.57) i (3.59), (3.91) i (3.94) oraz (3.110) i zob. dyskusję na temat doboru numeru falkowego p przeprowadzoną dla modeli falkowych w rozdz. 3). Zauważmy jednak (zob. Rys. 5.9 i 5.10), że w zakresie $N < 500$ pomiarów (przy gładkiej nieliniowości $R_4(x)$ i funkcji gęstości wejścia $f_1(x)$) szybkości zmniejszania się błędów modeli $\tilde{R}_G$ i $\tilde{R}_R$ nie zależą od przyjętych

funkcji falkowych. Zwróćmy także uwagę, że od zastosowanych funkcji falkowych zależą własności modeli $\tilde{R}_{Gf}$ (zob. Rys. 5.11), jednakże przyjęcie w nich funkcji falkowych o numerze $p > 1$ powoduje *zwiększenie* ich błędu. Aby wskazać możliwą przyczynę takiego zachowania porównajmy postacie modeli $\tilde{R}_G$ i $\tilde{R}_{Gf}$ (zob. wzory (4.15) i (4.21) w rozdz. 4):

$$\tilde{R}_G(x; K, H, p) = \frac{\tilde{G}(x; K, H, p)}{f(x)} \quad \text{oraz} \quad \tilde{R}_{Gf}(x; K, H, p) = \frac{\tilde{G}(x; K, H, p)}{\tilde{f}(x; K, H, p)}$$

i zauważmy, że w modelach $\tilde{R}_{Gf}$ mianownik (empiryczny model obliczeniowy funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$) może (dla $p > 1$) przybierać wartości ujemne (por. np. Rys. 4.1) powodując zmianę znaku na wyjściu całego modelu, a tym samym, znaczne zwiększenie się jego błędu w stosunku do identyfikowanej nieliniowości.

5.2.1 Stosowalność reguły doboru skali modeli

Jak wykazaliśmy w poprzednich rozdziałach, aby zapewnić modelom obliczeniowym zbieżność do identyfikowanych nieliniowości $R(x)$ należy spełnić odpowiednie ogólne warunki podane np. we wzorach (3.37) i (3.89), dotyczące skal modeli K . Jednakże, jak pokazują wykresy na Rys. 5.12-5.14, w przypadku umiarkowanej liczby pomiarów $N < 500$, niedbały dobór skal K w modelach obliczeniowych istotnie zwiększa wartości ich błędów.

Porównanie wyników badań przeprowadzonych dla modeli obliczeniowych $\tilde{R}_G$ (zob. Rys. 5.15 wskazuje na nieznaczne różnice pomiędzy skalami modeli K , wyznaczanymi za pomocą teoretycznych reguł (3.56) i (3.58) a optymalnymi (względem błędu (5.4)) skalami tych modeli wyznaczonymi numerycznie w trakcie eksperymentów i świadczy o przydatności tych reguł również przy umiarkowanej liczbie pomiarów z zakresu $N = 100, \dots, 500$. Zauważmy jednak, że pewnym ograniczeniem możliwości zastosowania ich w praktyce jest wymaganie znajomości gładkości identyfikowanych nieliniowości oraz gładkości funkcji gęstości wejścia systemu – por. Rys. 5.12).

Wskazemy teraz przyczynę różnic pomiędzy tymi skalami, biorąc jako przykład empiryczny model falkowy $\tilde{R}_G(x; K, p)$ (korzystając z jego równoważności z badanym modelem obliczeniowym $\tilde{R}_G$). Podstawą rozważań będzie poniższe oszacowanie błędu MISE modeli $\hat{R}_G(x; K, p)$ (por. wzory (3.30), (3.41) oraz (3.45) w rozdz. 3):

$$\text{MISE } \hat{R}_G(x; K, p) \leq 2^{-2\kappa K} \cdot C_{\text{ISB}}^\kappa + \frac{2^K}{N} \cdot C_{\text{IV}} \quad (5.5)$$

gdzie $\kappa = \gamma$ (zob. np. wzór (3.56)) dla nieliniowości $G(x)$ ciągłych w przedziale $[0, 1]$ oraz $\kappa = \varrho$ (dla $G(x)$ nieciągłych – zob. wzór (3.58)). Stała C_{ISB}^κ zależy od gładkości identyfikowanej nieliniowości $R(x)$ i funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$ oraz przyjętych w modelu funkcji falkowych (por. np. wzór (3.45)), natomiast C_{IV} jest stałą zależną od własności części dynamicznej systemu oraz zakłóceń zewnętrznych (zob. odpowiednie oszacowania w Dodatkach B.1-B.2).

Minimalizując oszacowanie (5.5) względem parametru skali K otrzymujemy teraz, że

$$\tilde{K}_{\text{opt}}(N) = \left\lfloor \frac{1}{2\kappa + 1} \log_2 2\kappa N + \Delta \right\rfloor = \lfloor K_{\text{opt}}(N) + \Delta \rfloor, \quad \text{gdzie} \quad \Delta = \frac{1}{2\kappa + 1} \log_2 \frac{C_{\text{ISB}}^\kappa}{C_{\text{IV}}} \quad (5.6)$$

Zauważmy, że zastosowanie w modelach $\hat{R}_G(x; K, p)$ powyższego wzoru jako reguły doboru skali K w miejsce odpowiedniej reguły (3.56) (gdy $\kappa = \gamma$) lub (3.58) (gdy $\kappa = \varrho$)

nie zmienia asymptotycznych szybkości zbieżności tych modeli (danych, odpowiednio, wzorami (3.57) i (3.59)). Tym niemniej, przy skończonej liczbie pomiarów N postać dodatkowego składnika Δ wskazuje, że:

- W sytuacji, gdy stała C_{ISB}^κ jest większa niż C_{IV} (np. przy niewielkich zakłóceniach i w przypadku nieliniowości nieciągłych typu $R_1(x)$), ze wzoru (5.6) wynika, że optymalna skala modeli K może być większa (ponieważ $\frac{C_{\text{ISB}}^\kappa}{C_{\text{IV}}} > 1$ i $\Delta > 0$) niż wyznaczona przez regułę (3.58) (por. wykres z lewej strony Rys. 5.15).
- Jeśli we wzorze (5.5) dominującą stałą jest C_{IV} (np. podczas identyfikacji nieliniowości w systemie Hammersteina lub w obecności zakłóceń z_k o dużej amplitudzie, czy też w przypadku gładkich nieliniowości $R_4(x)$), to wówczas $\frac{C_{\text{ISB}}^\kappa}{C_{\text{IV}}} < 1$, $\Delta < 0$ i, w konsekwencji, optymalna skala K modeli może być mniejsza od skali dobranej na podstawie reguły (3.56) (por. wykres z prawej strony Rys. 5.15).

5.2.2 Wpływ skali aproksymacji falek na zachowanie modeli obliczeniowych

W rozdziale 4 wykazaliśmy, że warunkiem asymptotycznej równoważności modeli falkowych i ich obliczeniowych odpowiedników jest właściwy dobór skali aproksymacji H (zob. np. wzory (4.44)-(4.45)).

Wykresy przedstawione na Rys. 5.16 potwierdzają wpływ skali aproksymacji H na wielkości błędów modeli obliczeniowych $\tilde{R}_G$ (zauważmy tam, że dla H bliskich zeru, wzrost skali modeli K nie powoduje zmniejszania się błędu tych modeli – por. np. oszacowania (4.36) i (4.42)).

Kolejny wykres (zob. Rys. 5.17) wskazuje ponadto, że w modelach $\tilde{R}_G$, za błąd wynikający z zastosowania w nich aproksymacji funkcji falkowych odpowiada głównie zjawisko akumulacji błędów aproksymacji z poszczególnych skal $m = M, \dots, K - 1$ tych modeli (zob. uwaga 3.12 w Dodatku C.4). Na wykresie tym widzimy bowiem, że dla skal M bliskich K , zastosowanie nawet bardzo „zgrubnych” aproksymacji funkcji falkowych (przyjęcie małej skali $H = 0, 1, 2$) tylko nieznacznie zwiększa błąd modeli obliczeniowych $\tilde{R}_G$. Wynik ten stanowi przesłankę za stosowaniem w praktyce modeli obliczeniowych złożonych tylko z aproksymacji funkcji skalujących (tj. takich w których zachodzi równość $M = K$).

5.2.3 Porównanie algorytmu falkowego z algorytmem trygonometrycznym

Modele oparte na układzie trygonometrycznym. Warunki eksperymentów. W trakcie eksperymentów porównawczych przyjęliśmy, że funkcja gęstości wejścia systemu $f(x)$ jest nieznana. Stąd do porównania własności algorytmów falkowych z algorytmami opartymi na szeregach trygonometrycznych wybraliśmy (wyznaczany według algorytmu ilorazowego z estymacją funkcji gęstości wejścia systemu) empiryczny model obliczeniowy $\tilde{R}_{Gf}$ oraz następujący empiryczny model trygonometryczny otrzymywany według algo-

rytmu podanego m.in. w [44] lub [50])

$$\hat{R}_F(x; L) = \frac{\sum_{|m|=0}^L \hat{\alpha}_m e^{imx}}{\sum_{|m|=0}^L \hat{a}_m e^{imx}} \quad \text{gdzie} \quad \begin{cases} \hat{\alpha}_m = \sum_{k=1}^N y_k e^{-imx_k} \\ \hat{a}_m = \sum_{k=1}^N e^{-imx_k} \end{cases} \quad (5.7)$$

Eksperymenty przeprowadziliśmy dla charakterystyk i funkcji gęstości wejścia systemu podanych we wzorach (5.2) i (5.3). Parametr L modeli trygonometrycznych $\hat{R}_F(x; L)$ (oznaczanych dalej krótko: $\hat{R}_F$), podobnie jak skalę K modeli obliczeniowych $\tilde{R}_{Gf}$, dobieraliśmy numerycznie tak, aby dla danej liczby pomiarów $N = 5, \dots, 500$, wyznaczony model miał najmniejszy błąd (5.4).

Wyniki porównania. Kolejne wykresy na Rys. 5.18-5.21 przedstawiają porównanie wielkości i szybkości zmniejszania się błędów modeli obliczeniowych $\tilde{R}_{Gf}$ (dla numerów falkowych $p = 1, 2$) i modeli trygonometrycznych $\hat{R}_F$ ze wzrostem liczby pomiarów N . Zauważmy, że jakkolwiek różnice pomiędzy błędami porównywanych modeli dla są niewielkie, to jednakże, w sposób naturalny, modele oparte o falki Haara ($p = 1$) znacznie lepiej odtwarzają kształty nieliniowości w przypadkach gdy są one nieciągłe. Zwracamy także uwagę na tendencję do „wygładzania” identyfikowanych nieliniowości przez modele trygonometryczne oraz modele obliczeniowe z falkami numerze $p = 2$ (zob. Rys. 5.19-5.20), a także bardzo niekorzystne (z punktu widzenia zachowania „kształtu” identyfikowanej nieliniowości) zachowanie się tych ostatnich w przypadku nieliniowości nieciągłej $R_1(x)$ (zob. Rys. 5.18).

Wykresy na Rys. 5.22 przedstawiają porównanie wpływu gładkości funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$ na błędy modeli obu typów. Zauważmy, że wspólną cechą modeli obliczeniowych z numerem falkowym $p = 2$ i modeli trygonometrycznych są ich duże błędy dla liczb pomiarów N rzędu 100. Zachowanie to można wytłumaczyć za pomocą argumentacji analogicznej do przedstawionej w dyskusji na temat wpływu numeru falkowego p na modele obliczeniowe $\tilde{R}_{Gf}$, str. 92).

Podsumowanie

Na podstawie przeprowadzonych eksperymentów numerycznych można stwierdzić, że przy umiarkowanej liczbie pomiarów N :

- Wpływ (nawet znacznego – $\text{NSR} \leq 30\%$) poziomu zakłóceń zewnętrznych z_k na błędy modeli jest praktycznie pomijalny.
- Błędy modeli nie ulegają także istotnemu zwiększeniu w przypadku, gdy identyfikowana nieliniowość jest elementem systemu Hammersteina.
- Modele falkowe są „wrażliwe” na położenie punktów nieciągłości w identyfikowanych nieliniowościach, natomiast mniejszy wpływ na ich zachowanie ma sam fakt obecności nieciągłości w tych nieliniowościach.

- Dobór funkcji falkowych w modelach $\tilde{R}_G$ i $\tilde{R}_R$ (tj. w przypadku znanej funkcji gęstości wejścia systemu) ma także niewielki wpływ na szybkość zmniejszania się błędów tych modeli wraz ze wzrostem liczby pomiarów.

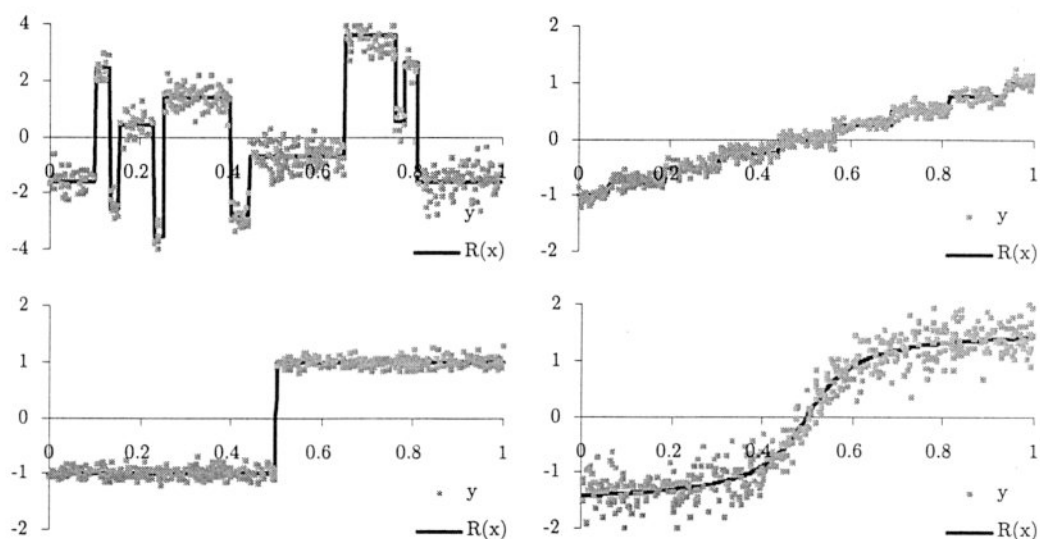
Zaobserwowaliśmy także, że:

- Znaczny wpływ na zachowanie modeli ma prawidłowy dobór skali K i stwierdziliśmy pewną przydatność „teoretycznych” reguł doboru tej skali. Analiza wyników eksperymentów wskazuje także na potrzebę znalezienia precyzyjniejszych reguł, przydatnych zwłaszcza przy braku informacji wstępnej na temat gładkości nieliniowości $R(x)$ i funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$.
- Zachowanie empirycznych modeli obliczeniowych $\tilde{R}_G(x; K, H, p)$, $\tilde{R}_R(x; K, H, p)$ oraz $\tilde{R}_{Gf}(x; K, H, p)$ dla liczb pomiarów N rzędu kilkuset jest podobne. Natomiast przy małych liczbach pomiarów ($N < 100$) modele $\tilde{R}_{Gf}(x; K, H, p)$, poza przypadkiem gdy $p = 1$, stają się nieprzydatne.
- Wpływ skali H w aproksymacjach $\tilde{\varphi}^p(x; H)$ i $\tilde{\psi}^p(x; H)$ zastosowanych w modelach obliczeniowych na jakość tych modeli zależy głównie od różnicy pomiędzy ich skalami M i K , i jest najmniejszy gdy skale te są równe (tj. gdy empiryczne modele obliczeniowe składają się tylko z aproksymacji funkcji skalujących).

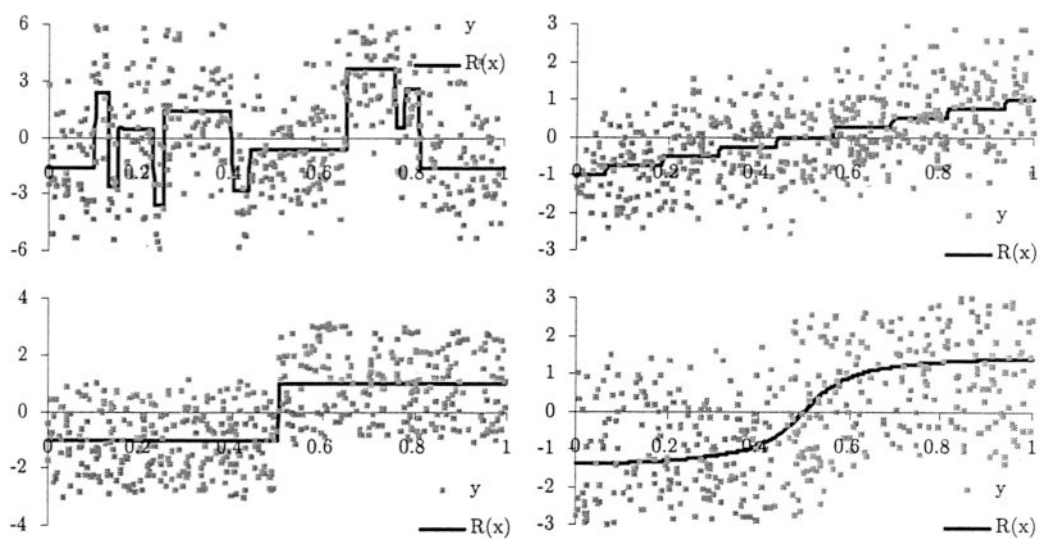
Po porównaniu własności modeli otrzymywanych według algorytmu falkowego i algorytmu trygonometrycznego należy stwierdzić, że w zakresie liczb pomiarów $N < 500$:

- Oba typy modeli są porównywalne z punktu widzenia wielkości i szybkości zmniejszania się ich błędów ze wzrostem liczby pomiarów N , tak dla ciągłych jak i nieciągłych nieliniowości $R(x)$.
- Przewaga modeli falkowych ma miejsce jedynie w przypadku modeli z funkcjami Haara, które pozwalają (ze swej natury), wierniej niż modele trygonometryczne, odtwarzać nieliniowości nieciągłe.

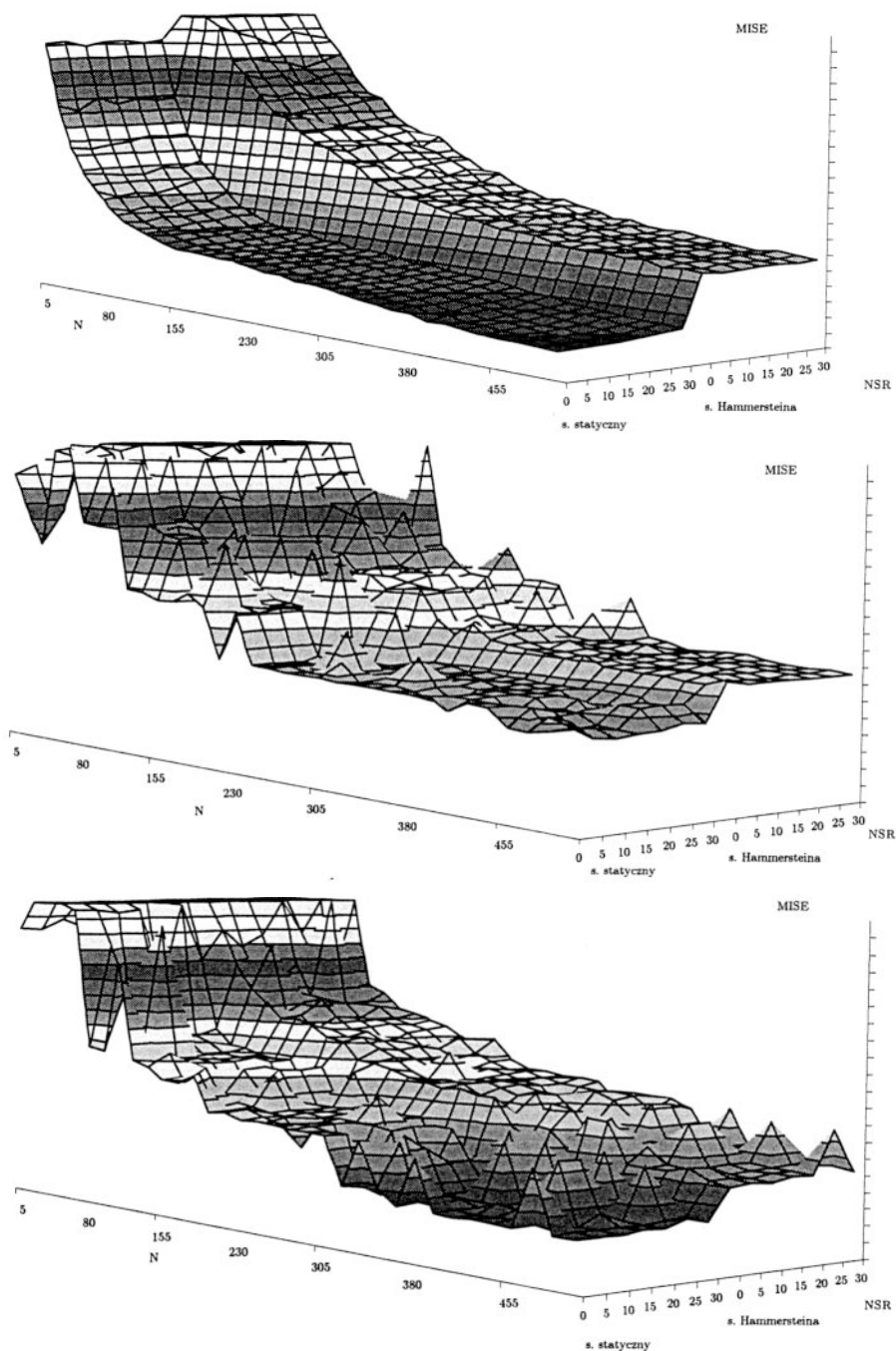
Rezultaty badań numerycznych – wykresy



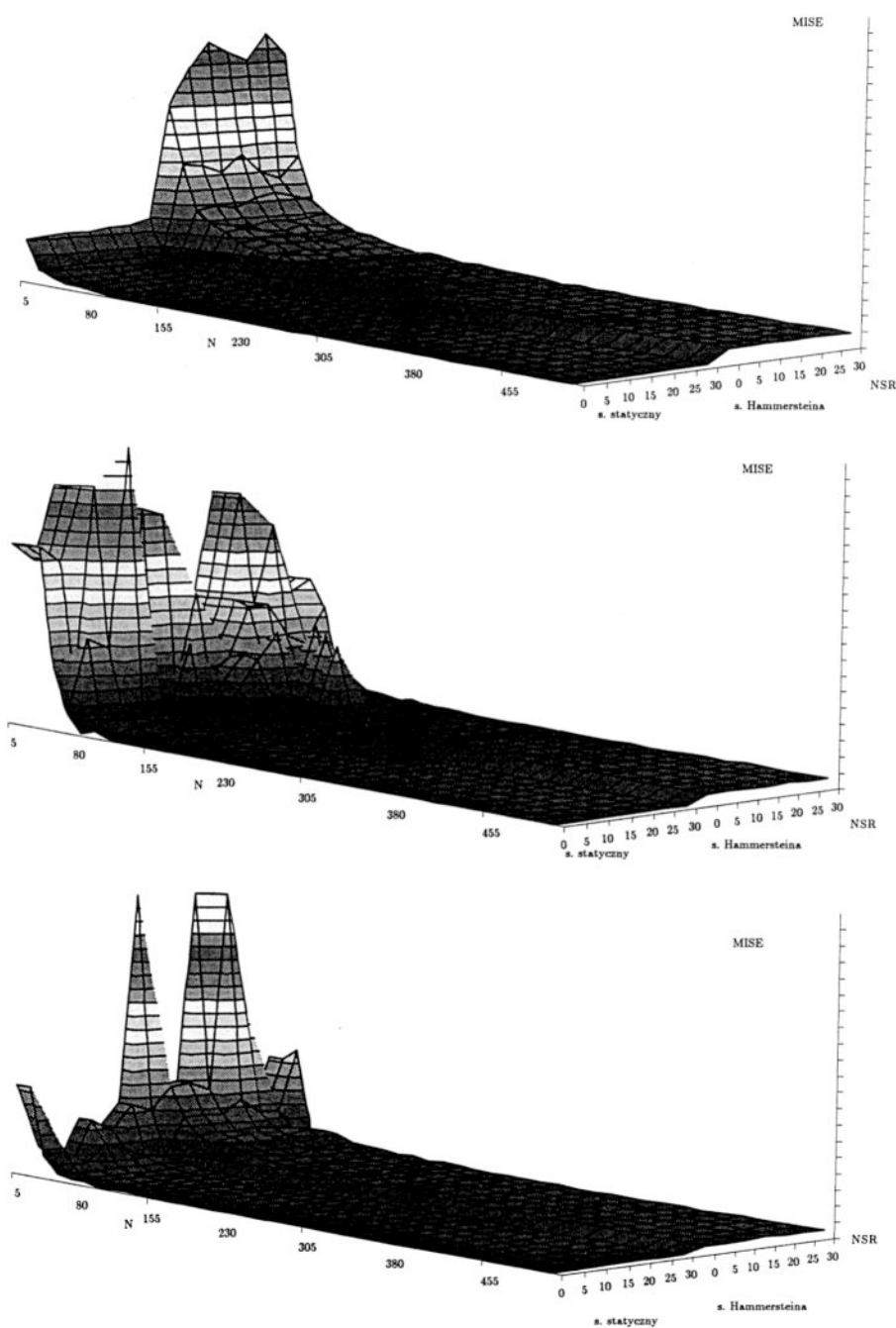
Rys. 5.3 W systemach statycznych wyjście zakłócone jest skorelowanym szumem z_k (na rysunku $\text{NSR} = 10\%$)



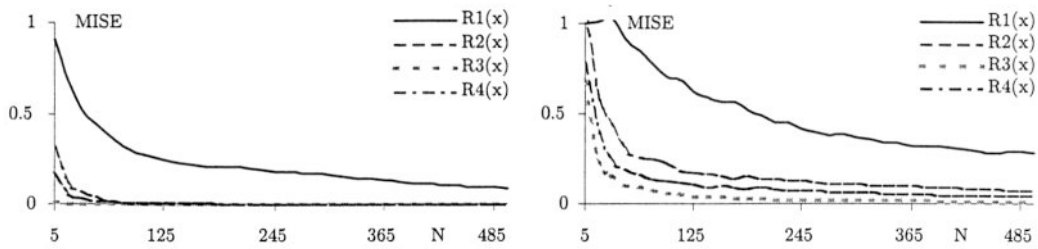
Rys. 5.4 Obecność w systemach Hammersteina dodatkowych zakłóceń ξ_k pochodzących od systemu znacznie pogarsza warunki identyfikacji ($\text{NSR} = 10\%$)



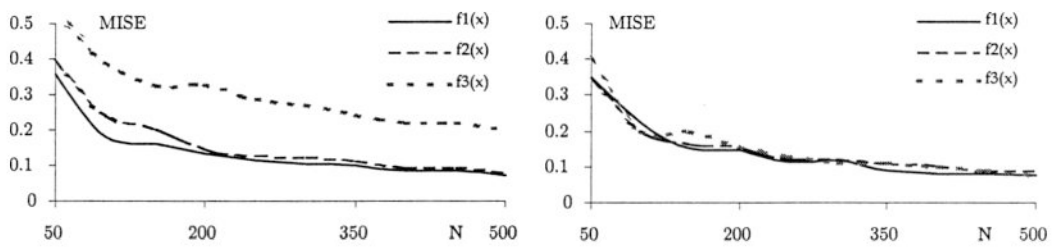
Rys. 5.5 Wpływ poziomu zakłóceń pomiarowych z_k i typu systemu na błędy empirycznych modeli obliczeniowych $\tilde{R}_{Gf}$ ($p = 1, 3, 6$) (nieliniowość nieciągła $R_1(x)$, gładka funkcja gęstości wejścia systemu $f_1(x)$)



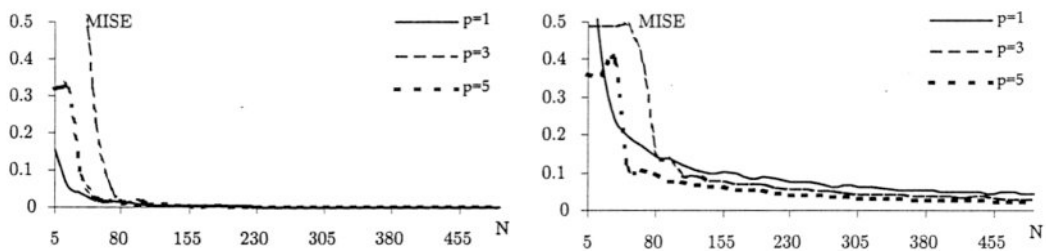
Rys. 5.6 Wpływ poziomego zakłóceń pomiarowych z_k i typu systemu na błędy empirycznych modeli obliczeniowych $\hat{R}_{Gf}$ ($p = 1, 3, 6$) (nieliniowość gładka $R_4(x)$, gładka funkcja gęstości wejścia systemu $f_1(x)$)



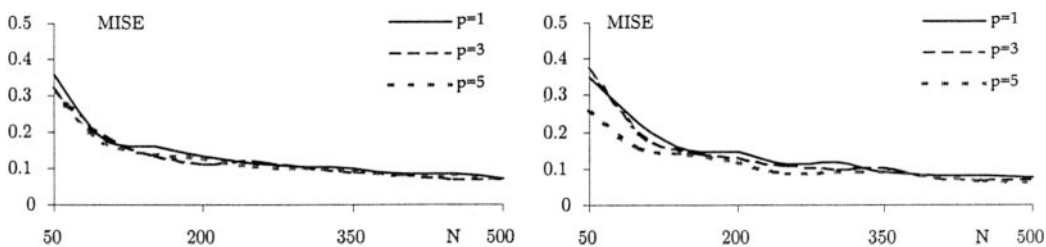
Rys. 5.7 Porównanie błędów modeli obliczeniowych $\tilde{R}_G$ dla systemu statycznego (z lewej) i systemu Hammersteina (gładka funkcja gęstości wejścia systemu $f_1(x)$, NSR = 25%)



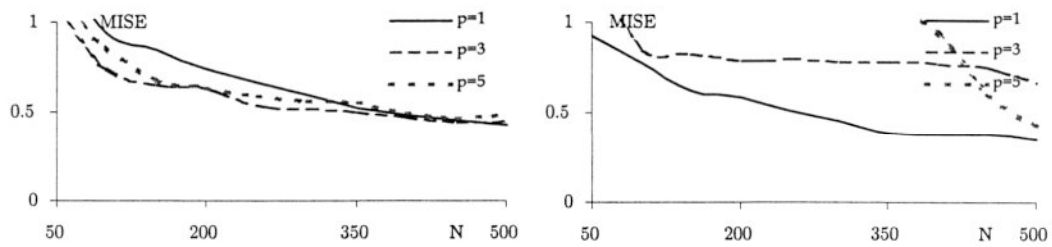
Rys. 5.8 Wpływ gładkości funkcji gęstości wejścia systemu $f(x)$ na błędy modeli obliczeniowych $\tilde{R}_G$ i $\tilde{R}_R$ (nieliniowość gładka $R_4(x)$, system Hammersteina, NSR = 25%)



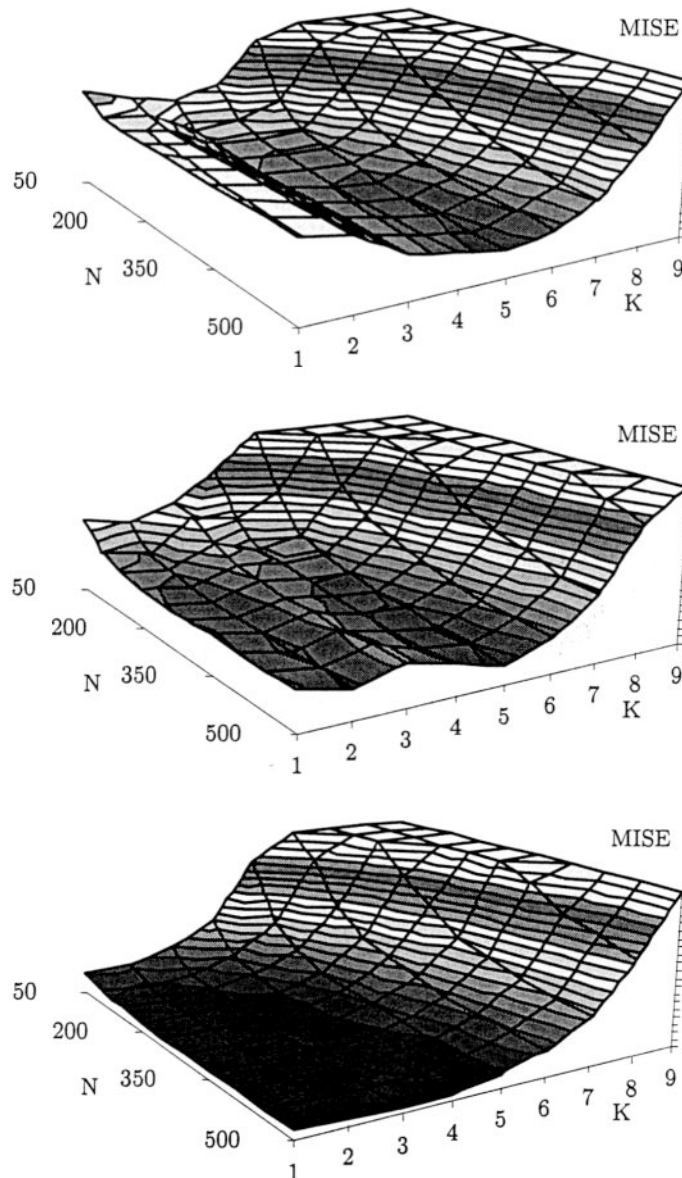
Rys. 5.9 Wpływ przyjętych funkcji falkowych na błędy modelu obliczeniowego $\tilde{R}_G$ dla systemu statycznego (z lewej) i systemu Hammersteina (nieliniowość gładka $R_4(x)$, gładka funkcja gęstości wejścia systemu $f_1(x)$, NSR = 25%)



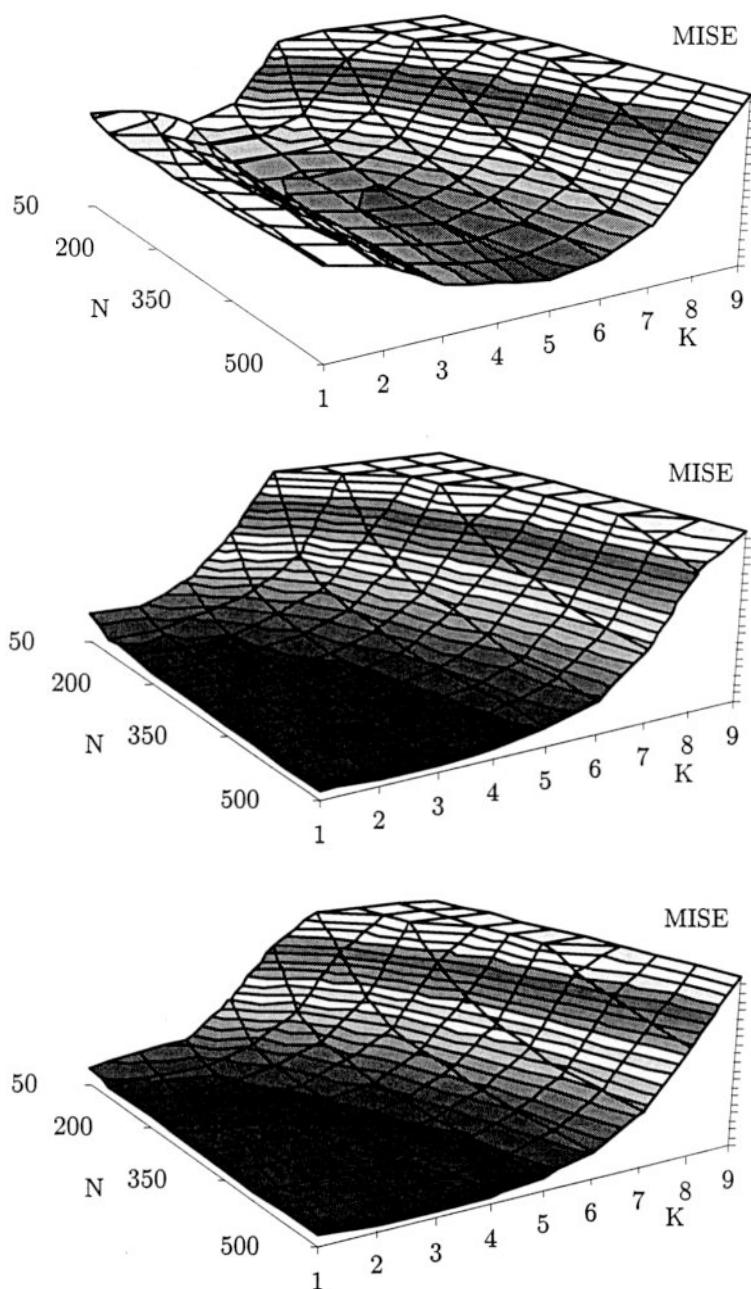
Rys. 5.10 Zależność błędów modeli $\tilde{R}_G$ i $\tilde{R}_R$ od przyjętych w nich funkcji falkowych (nieliniowość gładka $R_4(x)$, gładka funkcja gęstości wejścia systemu $f(x)$, system Hammersteina, NSR = 25%)



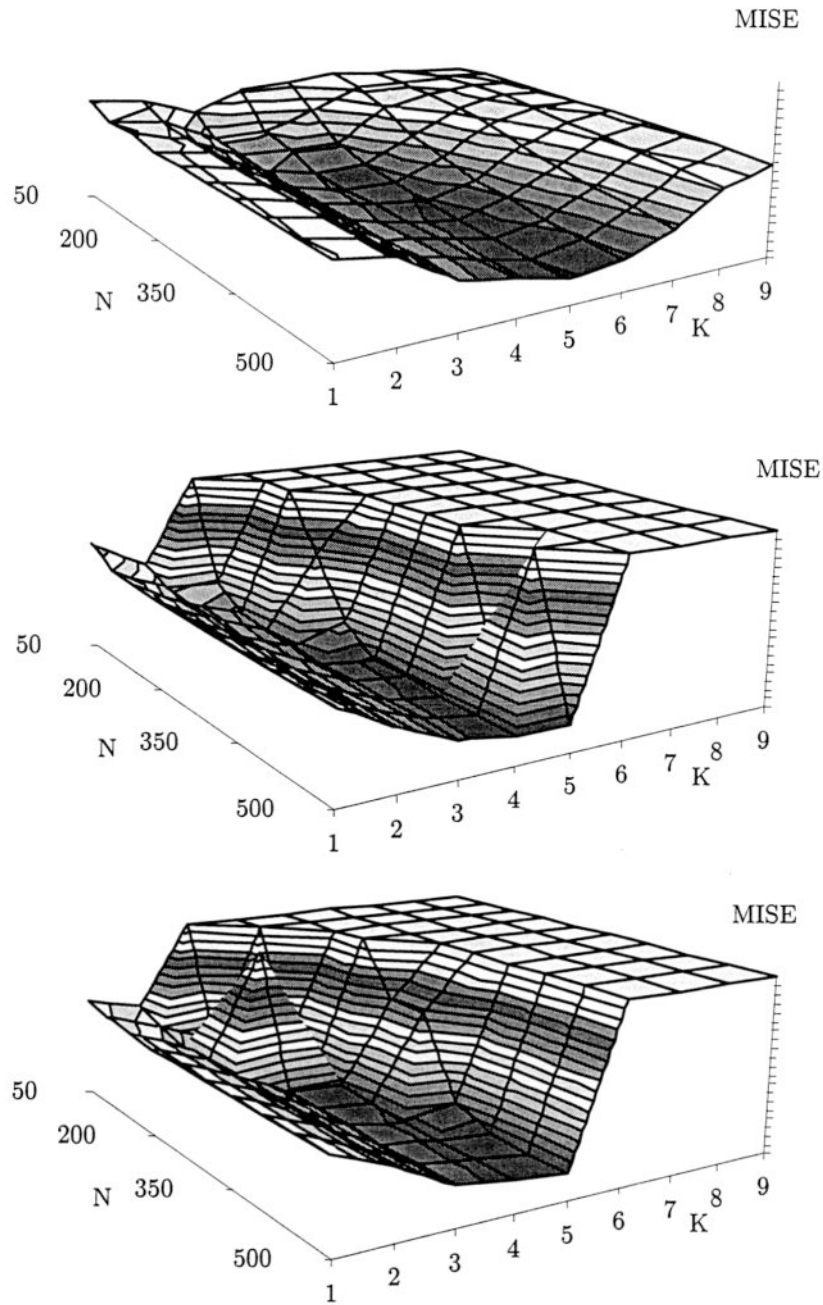
Rys. 5.11 Zależność błędów modeli $\tilde{R}_G$ i $\tilde{R}_{Gf}$ od przyjętych w nich funkcji falkowych (nieliniowość nieciągła $R_1(x)$, gładka funkcja gęstości wejścia systemu $f_1(x)$, system Hammersteina, NSR = 25%)



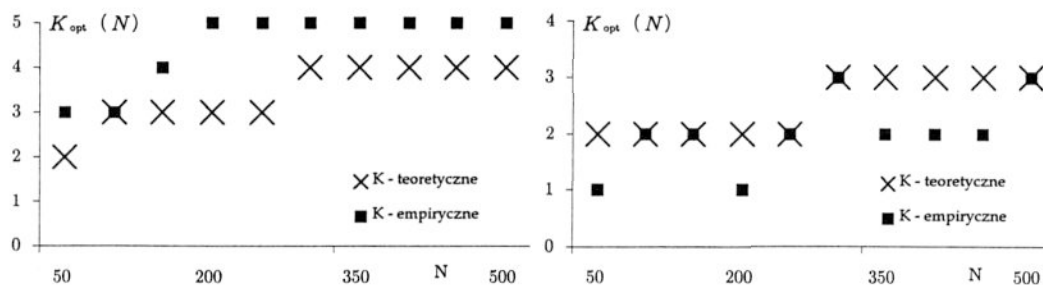
Rys. 5.12 Zależność błędów modeli obliczeniowych $\tilde{R}_G$ od ich skali K i liczby pomiarów N (od góry: nieliniowość nieciągła $R_1(x)$ i nieciągła funkcja gęstości systemu $f_3(x)$, następnie $R_4(x)$ i $f_3(x)$ oraz $R_4(x)$ i $f_1(x)$; system Hammersteina, NSR = 25%). Porównanie potwierdza, że własności modeli $\tilde{R}_G$ zależą od gładkości $R(x)$ oraz $f(x)$



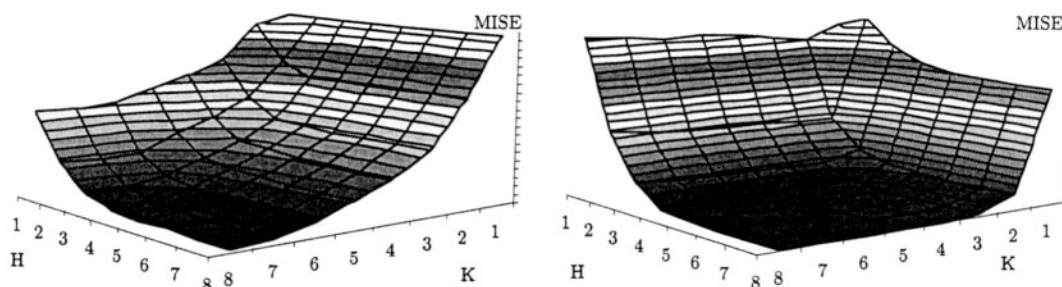
Rys. 5.13 Zależność błędów modeli obliczeniowych $\tilde{R}_R$ od ich skali K i liczby pomiarów N (od góry: nieliniowość nieciągła $R_1(x)$ i gładka funkcja gęstości systemu $f_1(x)$, następnie gładka $R_4(x)$ i nieciągła $f_3(x)$, na dole $R_4(x)$ i $f_1(x)$; system Hammersteina, NSR = 25%). Porównanie potwierdza, że własności modeli $\tilde{R}_R$ zależą jedynie od gładkości nieliniowości $R(x)$ (por. rysunek 5.12 na poprzedniej stronie)



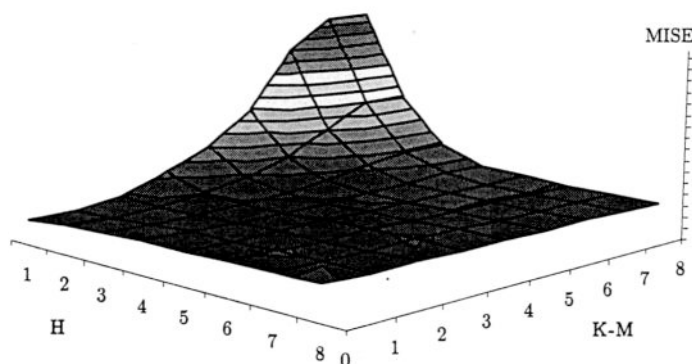
Rys. 5.14 Zależność błędu modeli obliczeniowych $\tilde{R}_{Gf}$ od ich skali K i liczby pomiarów N dla $p = 1, 2, 6$, (nieliniowość nieciągła $R_1(x)$, gładka funkcja gęstości wejścia systemu $f_1(x)$, system Hammersteina, NSR = 25%). Zauważmy, że poza przypadkiem gdy $p = 1$ (wykres górny) zwiększenie skali K modelu nawet o 1 może spowodować „lawinowy” wzrost błędu modelu (por. dyskusja w tekście)



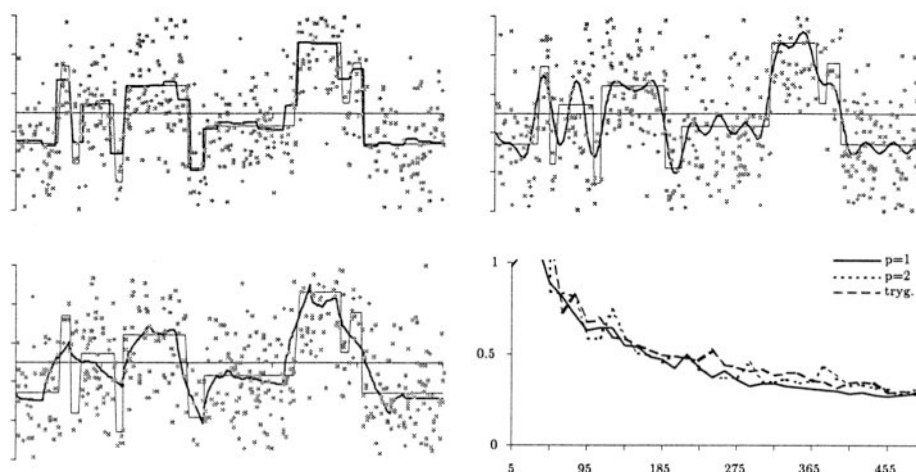
Rys. 5.15 Różnice pomiędzy skalami K modeli wyznaczanymi za pomocą reguł doboru skali (3.56) i (3.58) a optymalnymi skalami obliczonymi numerycznie. Lewy wykres odnosi się do nieliniowości nieciągłej $R_1(x)$, prawy do gładkiej $R_4(x)$ (model $\tilde{R}_G$ z funkcjami falkowymi o numerze $p = 1$, gładka funkcja gęstości wejścia systemu $f_1(x)$, system Hammersteina, NSR = 25%)



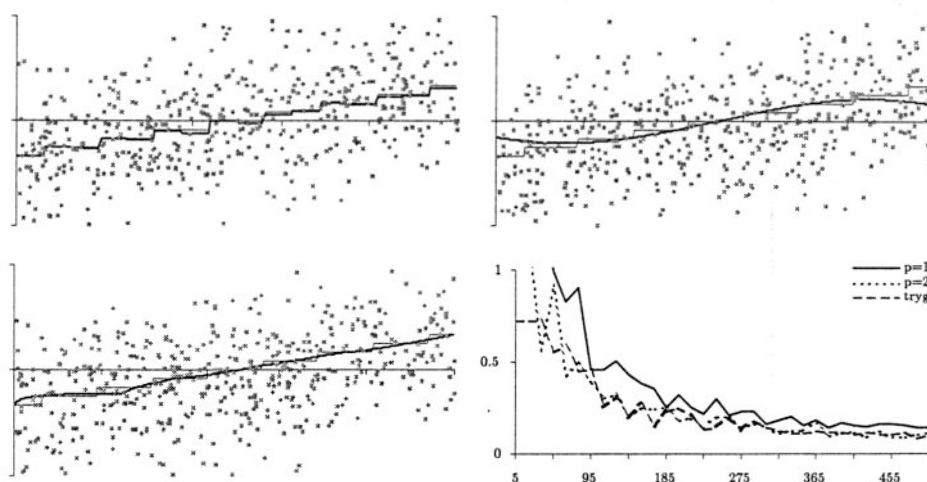
Rys. 5.16 Zależność błędów modeli obliczeniowych $\tilde{R}_G$ od skali aproksymacji H (z lewej nieliniowość nieciągła $R_1(x)$, z prawej gładka $R_4(x)$, gładka funkcja gęstości wejścia systemu $f_1(x)$, system statyczny, $N = 5000$, NSR = 0%, $p = 2$)



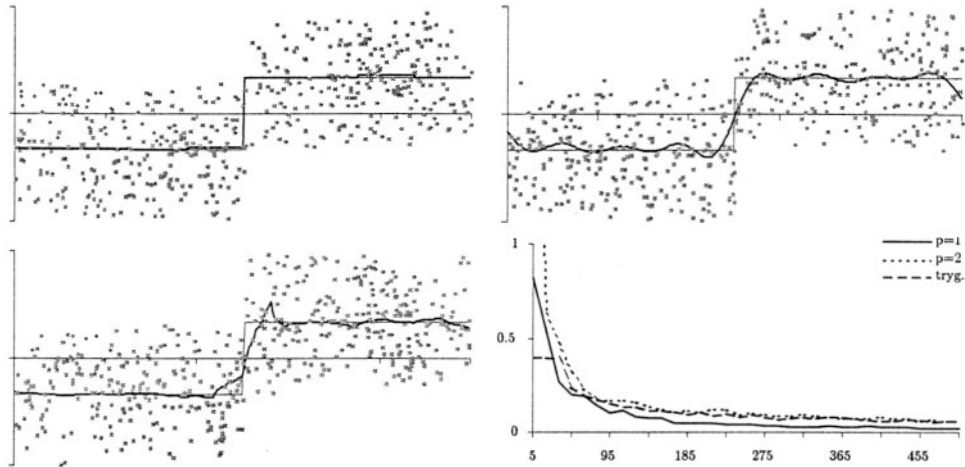
Rys. 5.17 Zależność błędów modeli obliczeniowych $\tilde{R}_G$ od skali aproksymacji H oraz różnicy pomiędzy skalami M i K w modelu (nieliniowość gładka $R_4(x)$, gładka funkcja gęstości wejścia systemu $f_1(x)$, system statyczny, $N = 5000$, NSR = 0%, $p = 2$)



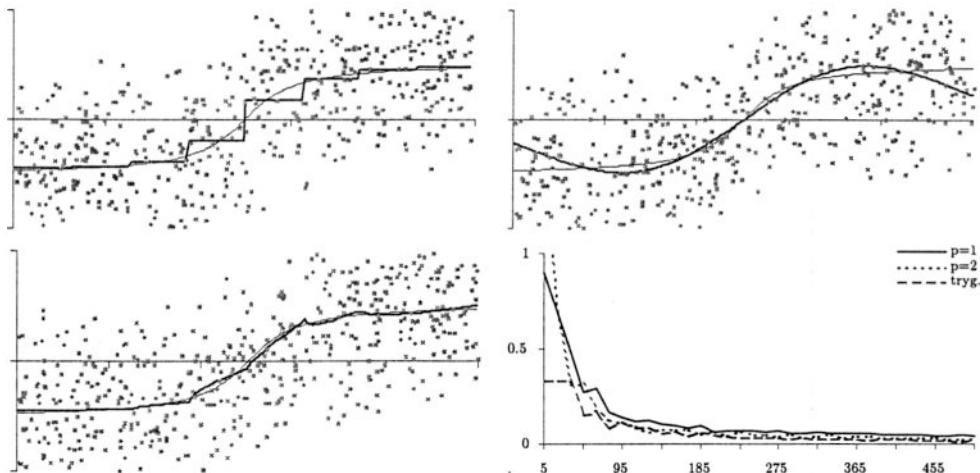
Rys. 5.18 Porównanie modeli falkowych $\tilde{R}_{Gf}$ z modelami $\hat{R}_F$ opartymi o szeregi trygonometryczne. Z lewej od góry modele $\tilde{R}_{Gf}$ z $p = 1$ i $p = 2$ (nieliniowość nieciągła $R_1(x)$), gładka funkcja gęstości wejścia systemu $f_1(x)$, system Hammersteina, NSR = 25%)



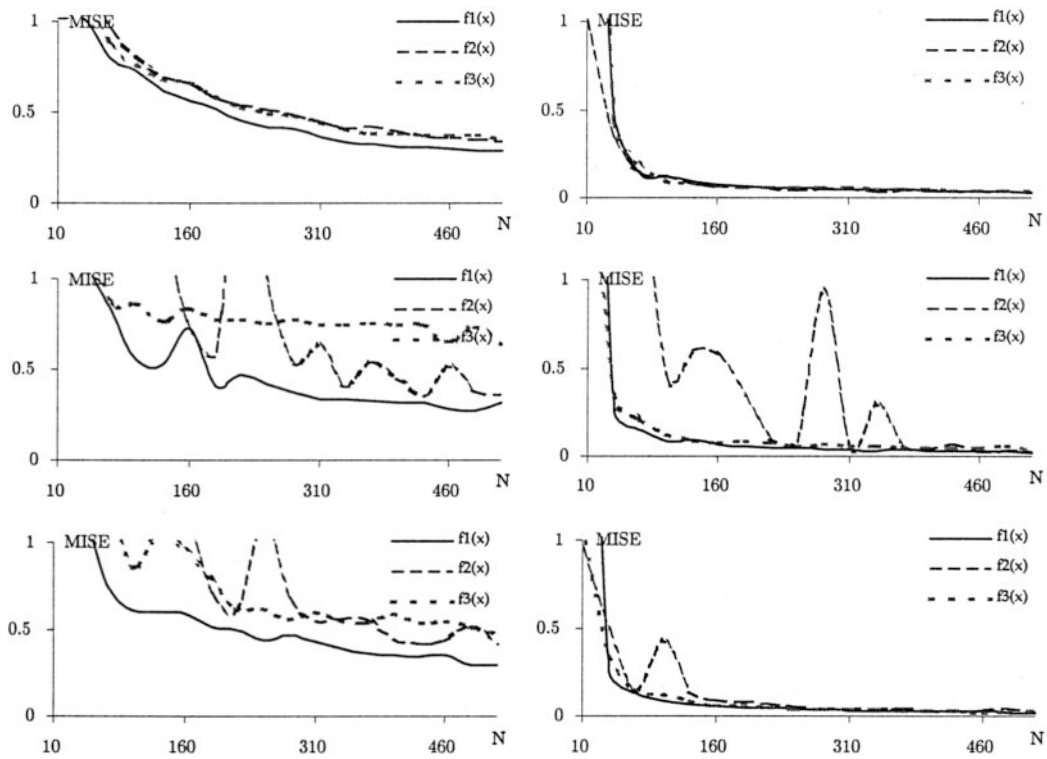
Rys. 5.19 Porównanie modeli falkowych $\tilde{R}_{Gf}$ z modelami $\hat{R}_F$ opartymi o szeregi trygonometryczne. Z lewej od góry modele $\tilde{R}_{Gf}$ z $p = 1$ i $p = 2$ (nieliniowość nieciągła $R_2(x)$ typu kwantyzator, gładka funkcja gęstości wejścia systemu $f_1(x)$, system Hammersteina, NSR = 25%)



Rys. 5.20 Porównanie modeli falkowych $\tilde{R}_{Gf}$ z modelami $\hat{R}_F$ opartymi o szeregi trygonometryczne. Z lewej od góry modele $\tilde{R}_{Gf}$ z $p = 1$ i $p = 2$ (nieliniowość nieciągła $R_3(x)$ typu przekąźnikowego, gładka funkcja gęstości wejścia systemu $f_1(x)$, system Hammersteina, NSR = 25%)



Rys. 5.21 Porównanie modeli falkowych $\tilde{R}_{Gf}$ z modelami $\hat{R}_F$ opartymi o szeregi trygonometryczne. Z lewej od góry modele $\tilde{R}_{Gf}$ z $p = 1$ i $p = 2$ (nieliniowość gładka $R_4(x)$, gładka funkcja gęstości wejścia systemu $f_1(x)$, system Hammersteina, NSR = 25%)



Rys. 5.22 Wpływ gładkości gęstości wejścia systemu $f_{\bullet}(x)$ na błędy modeli falkowych $\tilde{R}_{Gf}$ i modelu trygonometrycznego $\hat{R}_F$. Od góry modele $\tilde{R}_{Gf}$ dla $p=1$ i $p=2$ oraz model $\hat{R}_F$. Wykresy z lewej strony dotyczą nieliniowości nieciągłej $R_1(x)$, z prawej – gładkiej $R_4(x)$ (gładka funkcja gęstości wejścia systemu $f(x)$, system Hammersteina, NSR = 25%)

Dlaczego falki?

Uwzględniając wymienione wyżej rezultaty można stwierdzić, że za zastosowaniem do identyfikacji charakterystyk nieliniowych systemów algorytmów opartych o funkcje falkowe Daubechies przemawiają w szczególności ich następujące cechy:

1. **Korzystne własności teoretyczne.** Modele falkowe mogą osiągać asymptotycznie optymalne szybkości zbieżności średniokwadratowej dla ciągłych nieliniowości $R(x)$, a więc są nie gorsze od klasycznych modeli „ortogonalnych” (por. wzory (3.53), (3.57), (3.83), (3.91) w rozdz. 3 i zob. np. [43]-[44], [46], [50], [54]-[56], [86] i [107]), a ponadto charakteryzują się „dobrą” gwarantowaną szybkością całkową zbieżności średniokwadratowej do nieliniowości nieciągłych, odcinkami gładkich (por. wzory (3.59) i (3.94)).
2. **Możliwość „dopasowania” funkcji falkowych do identyfikowanej nieliniowości.** Zależność własności modeli falkowych od numeru falkowego p pozwala dobrać odpowiedni model do gładkości identyfikowanej charakterystyki, a tym samym efektywnie wykorzystać ewentualną informację aprioryczną na jej temat (por. np. wzory (3.57) i (3.59), (3.91) i (3.94) oraz (3.110) oraz dyskusję na temat doboru numeru falkowego w rozdz. 3 na str. 45).
3. **Prostota algorytmów.** Zaproponowane falkowe algorytmy obliczeniowe identyfikacji umożliwiają ominięcie w praktyce trudności związanych z brakiem jawnych postaci funkcji falkowych Daubechies dla $p \geq 2$ i dają możliwość łatwego wykorzystania standardowych algorytmów obliczania wartości falek opracowanych w literaturze (por. rozdz. 4). Prostota algorytmów falkowych wynika także z wykorzystania w nich tylko podstawowych operacji arytmetycznych (typu $+$, $-$, $\cdot$, $/$), podobnie jak w przypadku innych algorytmów „ortogonalnych” (zob. np. [44]-[45]).
4. **Asymptotyczna równoważność algorytmów obliczeniowych i „teoretycznych”.** Dzięki tej równoważności „praktyczne” falkowe algorytmy obliczeniowe charakteryzują się korzystnymi własnościami ich teoretycznych odpowiedników (pod warunkiem odpowiedniego doboru skali aproksymacji H – por. wzory (4.44)-(4.45) w rozdz. 4).
5. **Szybkie algorytmy obliczeniowe.** Algorytmy te pozwalają wyznaczać empiryczne modele obliczeniowe ze złożonością numeryczną rzędu $O(N)$, a więc są obliczeniowo oszczędniejsze od innych algorytmów „ortogonalnych”, które charakteryzują się złożonością obliczeniową rzędu co najmniej $O(N \log_2 N)$ (zob. np. [57]).

Należy również wspomnieć o własnościach algorytmów falkowych identyfikacji wspólnych z innymi algorytmami „ortogonalnymi” (por. np. [56]):

1. **Zbieżność otrzymywanych modeli falkowych do szerokiej klasy charakterystyk.** Daje to możliwość efektywnego wykorzystania falkowych algorytmów identyfikacji przy niewielkiej informacji apriorycznej o identyfikowanych charakterystykach, a zatem gwarantuje szeroki zakres możliwych zastosowań tych algorytmów.
2. **Jednolita postać ogólna algorytmów falkowych.** Algorytmy falkowe identyfikacji zachowują tę samą postać ogólną zarówno dla systemów statycznych jak i

dynamicznych (z omawianej klasy systemów), a także dla białych i skorelowanych zakłóceń zewnętrznych z_k .

3. „Kompresja” danych pomiarowych. Korzystanie z gotowych modeli falkowych wymaga pamiętania tylko wartości ich współczynników, a więc uwalnia od potrzeby przechowywania, zwykle o wiele większego (por. np. wzory (4.46) i (3.56), (3.58)), zbioru pomiarów $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^N$.

Uzyskane wyniki stanowią zatem podstawę do sformułowania następującej tezy:

Falkowe algorytmy identyfikacji są narzędziem umożliwiającym efektywną, zarówno w sensie szybkości zbieżności jak i pod względem prostoty algorytmów obliczeniowych, identyfikację charakterystyk nieliniowych systemów w warunkach probabilistycznych, przy niewielkiej informacji wstępnej na temat własności tych charakterystyk.

Otwarte problemy badawcze

Przeprowadzone badania wskazują na następujące otwarte zagadnienia, dotyczące falkowych algorytmów identyfikacji:

- Falkowa identyfikacja systemów o wielu wejściach i wyjściach.
- Analiza i opracowanie szybkich algorytmów obliczeniowych do falkowej identyfikacji systemów metodą najmniejszych kwadratów. Dotychczasowe badania pokazały, że w przypadku zastosowania w algorytmach falek o numerach $p > 1$ metoda ta prowadzi do skomplikowanych problemów analitycznych i obliczeniowych, których przyczyną jest losowość wejścia systemu (dla deterministycznego wejścia, metodę najmniejszych kwadratów zastosowano w pracy [113] dla dowolnych szeregów ortogonalnych). Proste i efektywne algorytmy identyfikacji oparte o metodę najmniejszych kwadratów uzyskano dotychczas jedynie dla falek Haara ($p = 1$), zob. [137]).
- Detekcja punktów nieciągłości w charakterystykach nieliniowych systemów dynamicznych.
- Utworzenie pakietów oprogramowania do falkowej identyfikacji systemów nieliniowych oraz do badań numerycznych falkowych algorytmów identyfikacji; udostępnienie ich w sieci *Internet* w celu umożliwienia prowadzenia badań porównawczych (ang. *reproducible research*; zob. [21]).

Progowanie. Jak zauważono w pracy [109], dalszym istotnym zagadnieniem jest także opracowanie falkowych algorytmów identyfikacji systemów opartych na (zaproponowanej w pracy [31]) idei odrzucania z empirycznych modeli falkowych „nieistotnych”, tj. mniejszych od zadanej wartości progu, współczynników $\hat{\beta}_{ml}^p$. Jak pokazano m.in. w pracach [14]-[15] i [30]-[35], algorytmy takie prowadzą do mniejszych (oszczędniejszych) modeli falkowych dla szerokiej klasy charakterystyk nieliniowych (zarówno ciągłych jak i nieciągłych – odcinkami gładkich). Odpowiednia klasa empirycznych modeli falkowych otrzymywanych według opartych na takiej idei algorytmów identyfikacji przyjmuje następującą

ogólną postać (por. np. wzór (3.105) na str. 62 i zob. [109])

$$\hat{R}_T(x; K, p) = \frac{\sum_{n=n_{\min}(M,p)}^{n_{\max}(M,p)} \hat{\alpha}_{Mn}^p \varphi_{Mn}^p(x) + \sum_{m=M}^{K-1} \sum_{l=l_{\min}(m,p)}^{l_{\max}(m,p)} \Theta_{\bullet}(\hat{\beta}_{ml}^p, \tau) \cdot \psi_{ml}^p(x)}{\sum_{n=n_{\min}(M,p)}^{n_{\max}(M,p)} \hat{a}_{Mn}^p \varphi_{Mn}^p(x) + \sum_{m=M}^{K-1} \sum_{l=l_{\min}(m,p)}^{l_{\max}(m,p)} \Theta_{\bullet}(\hat{b}_{ml}^p, \tau) \cdot \psi_{ml}^p(x)}$$

gdzie $\Theta_{\bullet}(\cdot, \tau)$ jest wybraną funkcją progującą (ang. *threshold function*). Najczęściej stosowanymi są funkcje postaci (por. np. [13])

$$\begin{aligned} \Theta_H(\hat{\beta}_{ml}^p, \tau) &= \begin{cases} 0 & \text{gdy } \left| \hat{\beta}_{ml}^p \right| < \tau \\ \hat{\beta}_{ml}^p & \text{gdy } \left| \hat{\beta}_{ml}^p \right| \geq \tau \end{cases} \\ \Theta_S(\hat{\beta}_{ml}^p, \tau) &= \begin{cases} 0 & \text{gdy } \left| \hat{\beta}_{ml}^p \right| - \tau < 0 \\ \hat{\beta}_{ml}^p - \text{sgn}\{\hat{\beta}_{ml}^p\} \cdot \tau & \text{gdy } \left| \hat{\beta}_{ml}^p \right| - \tau \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

(gdzie $\tau > 0$ jest odpowiednio wyznaczoną wartością progową) stanowiące podstawę tzw. algorytmów *twardego* i *miękkiego progowania* (ang. *hard* i *soft thresholding*). Proponowane w cytowanych pracach algorytmy dotyczą jednakże, z punktu widzenia zadania identyfikacji, wyłącznie systemów statycznych z deterministycznym wejściem, zakłócanych dodatkowo białym szumem o rozkładzie normalnym. Analizę własności takich algorytmów dla zakłóceń innych niż normalne i białe, zawiera praca [79] opublikowana dopiero w minionym roku, a ich zastosowanie dla systemów dynamicznych znaleziono jedynie w pracy [150] (przykłady zastosowania algorytmów z progowaniem do detekcji krawędzi i eliminacji zakłóceń w sygnałach znajdują się m.in. w pracach [17], [85] i [121]).

Alternatywną propozycję eliminacji współczynników empirycznych $\hat{\beta}_{ml}^p$ w oparciu o testy istotności statystycznej (por. np. [35]) dla losowych wejść i białych zakłóceń o dowolnym rozkładzie w odniesieniu do systemów statycznych przedstawił autor w pracach [136] i [138].

Na zakończenie zwracamy uwagę na następujące istotne zagadnienia związane z algorytmami identyfikacji systemów za pomocą falek, których nie poruszono w niniejszej pracy:

- Zbadanie własności algorytmów identyfikacji systemów opartych o rodzinę ortogonalnych falek wielokrotnych (ang. *multiwavelets*) [22], [34], [132]–[133].
- Rekurencyjne falkowe algorytmy identyfikacji systemów (identyfikujące nieliniowość $R(x)$ na podstawie napływających nowych pomiarów (por. np. [53] i [141])).
- Falkowa identyfikacja elementów nieliniowych w systemach Wienera (w których, odwrotnie niż w systemach Hammersteina, nieliniowy element statyczny znajduje się za liniowym systemem dynamicznym) – zob. np. [47], gdzie zaproponowano i zbadano algorytmy identyfikacji oparte o szeregi Fouriera, Hermite’a i Legendre’a oraz [71], gdzie zaprezentowano odpowiedni algorytm falkowy.

Są to także zagadnienia wymagające dalszych badań.

Dodatek A

Uzupełnienia do rozdziału 1

A.1 Funkcje $\lfloor x \rfloor$ i $\lceil x \rceil$

Definicja 1.2 Funkcje $\lfloor x \rfloor$ i $\lceil x \rceil$, nazywane podłoga i sufit (lub też, odpowiednio, dolna i górna całość z x) zdefiniowane są następująco (zob. [42, str. 87]):

$$\begin{aligned} \text{podłoga} &: \lfloor x \rfloor = \text{największa liczba całkowita mniejsza lub równa } x \\ \text{sufit} &: \lceil x \rceil = \text{najmniejsza liczba całkowita większa lub równa } x \end{aligned}$$

Własności funkcji $\lfloor x \rfloor$ i $\lceil x \rceil$. Dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzą następujące związki

$$x + 1 > \lceil x \rceil \geq x \geq \lfloor x \rfloor > x - 1 \quad (\text{A.1})$$

a zatem

$$1 > \lceil x \rceil - x \geq 0 \quad \text{oraz} \quad 1 > x - \lfloor x \rfloor \geq 0 \quad (\text{A.2})$$

Dla x niecałkowitych prawdziwe są ponadto równości

$$\lceil x \rceil - 1 = \lfloor x \rfloor \quad (\text{czyli równoważnie } \lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor + 1) \quad (\text{A.3})$$

Natomiast dla każdej całkowitej liczby n mamy

$$\lceil n \rceil = n = \lfloor n \rfloor \quad (\text{A.4})$$

i dla dowolnego x

$$\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n \quad \text{oraz} \quad \lceil x + n \rceil = \lceil x \rceil + n \quad (\text{A.5})$$

Uwaga 1.11 Funkcja podłoga jest równa funkcji entier (oznaczanej zwykle symbolem $\lfloor x \rfloor$).

A.2 Siatka binarna B_H

Definicja 1.3 Zbiór B_H (siatka binarna) jest zbiorem punktów, których część ułamkowa może być przedstawiona w postaci skończonego rozwinięcia binarnego (dwójkowego) o $h \leq H$ wyrazach, $h = 0, 1, \dots, H < \infty$; np. punkty $\{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{2n-1}{2}, n, \dots\}$, $n > 2$, należą do zbioru B_1 . Ogólnie, punkty o postaci $\frac{n}{2^H}$, $n \in \mathbb{Z}$, należą do zbioru B_H .

A.3 Algorytm wyznaczania wartości funkcji falkowych

Przedstawiony opis opiera się na artykule [131].

Algorytm wykorzystuje znajomość wartości funkcji falkowych dla argumentów całkowitych ($x = 0, 1, \dots, 2p - 2$), która pozwala, w oparciu o wzór (1.14) w rozdz. 1 (w odniesieniu do funkcji skalującej $\varphi^p(x)$) wyznaczyć jej wartości w punktach $x = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots, \frac{4p-1}{2}$. Sukcesywne stosowanie wzoru w (1.14) pozwala zatem obliczyć wartości funkcji φ^p dla dowolnych argumentów $b, b+1, \dots, b+2p-2$, $b \in (0, 1)$, leżących na siatce binarnej $\mathbf{B}_H$, $H \geq 1$.

Oznaczmy przez $\varphi^p(b)$ wektor o rozmiarze $(2p-1)$ złożony z wartości funkcji skalującej $\varphi^p(b)$ w punktach $b, b+1, \dots, b+(2p-2)$

$$\varphi^p(b) = [\varphi^p(b) \quad \varphi^p(b+1) \quad \dots \quad \varphi^p(b+2p-2)]^T$$

W pracy [131, str. 296] zaproponowano następujący algorytm jednoczesnego wyznaczania wartości elementów wektora $\varphi^p(b)$ (wartości funkcji skalującej φ^p w punktach $b, b+1, \dots, b+(2p-2)$):

$$\varphi^p(b) = \prod_{h=1}^H [(1-b_h)\mathbf{A} + b_h\mathbf{B}] \varphi^p(0) \quad (\text{A.6})$$

gdzie $b_h \in \{0, 1\}$ są kolejnymi wyrazami rozwinięcia binarnego argumentu b , a $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ są macierzami kwadratowymi o rozmiarze $(2p-1) \times (2p-1)$, zdefiniowanymi za pomocą współczynników Daubechies $\{c_t\}$ (zob. Tabele C.1-C.2 w Dodatku C.5, str. 137):

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= [a_{ij}] = c_{2i-j} \\ \mathbf{B} &= [b_{ij}] = c_{2i-j+1} \end{aligned}, \quad i, j = 0, 1, \dots, 2p-2$$

Przykład 1.1 Dla falek Daubechies o numerze $p = 2$ macierze $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ mają postacie

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} c_0 & 0 & 0 \\ c_2 & c_1 & c_0 \\ 0 & c_3 & c_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} c_1 & c_0 & 0 \\ c_3 & c_2 & c_1 \\ 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix}, \quad \varphi^2(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 + \sqrt{3} \\ 1 - \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Niech $b = 0.3125_{10}$ ($= \frac{5}{2^4} \in \mathbf{B}_4$), wówczas $b = 0.0101_2$, a stąd

$$\varphi^2(0.3125) = \begin{bmatrix} \varphi(0.3125) \\ \varphi(1.3125) \\ \varphi(2.3125) \end{bmatrix} = \varphi^2(0.0101) = \mathbf{ABAB} \varphi^2(0) = \begin{bmatrix} \frac{43+25\sqrt{3}}{256} \\ \frac{9+7\sqrt{3}}{128} \\ \frac{67-39\sqrt{3}}{256} \end{bmatrix}$$

Dodatek B

Uzupełnienia do rozdziału 3

B.1 Oszacowanie wariancji współczynników empirycznych $\hat{\alpha}_{Mn}^p$ i $\hat{\beta}_{ml}^p$ modeli $\hat{G}(x; K, p)$

Współczynniki empiryczne $\hat{\alpha}_{Mn}^p$ i $\hat{\beta}_{ml}^p$ w algorytmie ilorazowym w rozdz. 3 na str. 28 (zob. wzór (3.7)), można, po uwzględnieniu równania wyjścia identyfikowanego systemu (por. wzory (2.1) i (2.5) w rozdz. 2):

$$y_k = R(x_k) + \xi_k + z_k \quad \text{gdzie} \quad \xi_k = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \zeta(x_{k-i}) \quad \text{i} \quad z_k = \sum_{i=0}^{\infty} \omega_i \varepsilon_{k-i}$$

zapisać w następującej formie

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_{Mn}^p &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi_{Mn}^p(x_k) [R(x_k) + \xi_k + z_k] \\ \hat{\beta}_{ml}^p &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \psi_{ml}^p(x_k) [R(x_k) + \xi_k + z_k] \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

W celu skrócenia zapisu będziemy dalej stosować uproszczone oznaczenia φ_k , ψ_k , R_k i ζ_k w miejsce $\varphi_{Mn}^p(x_k)$, $\psi_{ml}^p(x_k)$, $R(x_k)$ i $\zeta(x_k)$.

Z definicji wariancji sumy skorelowanych zmiennych losowych otrzymujemy następujące wyrażenie na wariancje współczynników $\hat{\alpha}_{Mn}^p$:

$$\begin{aligned} \text{var } \hat{\alpha}_{Mn}^p &= \frac{1}{N^2} \sum_{k=1}^N \text{var} [\varphi_k (R_k + \xi_k + z_k)] + \\ &+ \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \text{cov} [\varphi_i (R_i + \xi_i + z_i), \varphi_j (R_j + \xi_j + z_j)] \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Wykorzystując teraz fakt, że

$$\text{var} [\varphi_k (R_k + \xi_k + z_k)] \leq \text{E} [\varphi_k (R_k + \xi_k + z_k)]^2$$

oraz stosując nierówność (B.40) otrzymujemy, na mocy stacjonarności procesów x_k, z_k i ξ_k (zachodzącej przy założeniach **Z1-Z5** z rozdz. 2, por. uwaga 2.3 w punkcie 2.2), że

$$\begin{aligned}
 \text{var } \hat{\alpha}_{Mn}^p &\leq \frac{1}{N} \mathbb{E} [\varphi_1^2 (R_1 + \xi_1 + z_1)^2] + \\
 &+ \frac{1}{N} \sum_{j=2}^{N-1} \left(1 - \frac{j-1}{N}\right) \text{cov} [\varphi_1 (R_1 + \xi_1 + z_1), \varphi_j (R_j + \xi_j + z_j)] \leq \\
 &\leq \frac{1}{N} \mathbb{E} [\varphi_1^2 (R_1 + \xi_1 + z_1)^2] + \\
 &+ \frac{1}{N} \sum_{j=2}^{\infty} |\mathbb{E} [\varphi_1 \varphi_j (R_1 + \xi_1 + z_1) (R_j + \xi_j + z_j)] - \mathbb{E}^2 [\varphi_1 (R_1 + \xi_1 + z_1)]| = \\
 &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N} (A_V + A_C)
 \end{aligned} \tag{B.3}$$

W dalszych przekształceniach korzystamy z poniższych nierówności obowiązujących na mocy założeń **Z1-Z3**

$$f(x) \leq M_f, \quad |R(x)| \leq M_R \quad \text{oraz} \quad |\zeta(x)| \leq M_\zeta \quad \text{dla} \quad x \in S = [a, b], \tag{B.4}$$

z unormowania (ortonormalności) funkcji falkowych

$$\int_{\frac{n}{2^M}}^{\frac{n+(2p-1)}{2^M}} [\varphi_{Mn}^p(x)]^2 dx = 1 \quad \text{oraz} \quad \int_{\frac{l+(1-p)}{2^m}}^{\frac{l+p}{2^m}} [\psi_{ml}^p(x)]^2 dx = 1 \tag{B.5}$$

oraz z ich ograniczoności, która dla funkcji falkowych Haara wynika z ich definicji (por. (1.10), str. 11), natomiast dla pozostałych funkcji falkowych Daubechies ($p \geq 2$) z ich ciągłości i zwartości ich nośników:

$$|\varphi^p(x)| \leq M_\varphi \quad \text{oraz} \quad |\psi^p(x)| \leq M_\psi, \quad x \in \mathbf{R} \tag{B.6}$$

gdzie M_φ i M_ψ są dodatnimi stałymi, niezależnymi od numeru falkowego p . Na podstawie własności (B.4)-(B.6) oraz definicji (1.14) w rozdz. 1 prawdziwe są następujące nierówności:

$$\mathbb{E} \varphi_1^2 = \int_{\frac{n}{2^M}}^{\frac{n+(2p-1)}{2^M}} [\varphi_{Mn}^p(x)]^2 f(x) dx \leq M_f \tag{B.7}$$

$$\mathbb{E} (\varphi_1^2 R_1^2) = \int_{\frac{n}{2^M}}^{\frac{n+(2p-1)}{2^M}} [\varphi_{Mn}^p(x) R(x)]^2 f(x) dx \leq M_R^2 M_f \tag{B.8}$$

$$|\mathbb{E} \varphi_1| = \left| \int_{\frac{n}{2^M}}^{\frac{n+(2p-1)}{2^M}} \varphi_{Mn}^p(x) f(x) dx \right| \leq 2^{-\frac{M}{2}} (2p-1) M_\varphi M_f \tag{B.9}$$

$$\begin{aligned}
 |\mathbb{E} (\varphi_1 R_1 \zeta_1)| &= \left| \int_{\frac{n}{2^M}}^{\frac{n+(2p-1)}{2^M}} R(x) \zeta(x) \varphi_{Mn}^p(x) f(x) dx \right| \leq \\
 &\leq 2^{-\frac{M}{2}} (2p-1) M_R M_\zeta M_\varphi M_f
 \end{aligned} \tag{B.10}$$

Oszacowanie składnika A_V . Rozważmy pierwszy składnik wariancji w (B.3):

$$\begin{aligned} A_V &= E(\varphi_1^2 R_1^2 + \varphi_1^2 \xi_1^2 + \varphi_1^2 z_1^2 + 2\varphi_1^2 R_1 \xi_1 + 2\varphi_1^2 R_1 z_1 + 2\varphi_1^2 \xi_1 z_1) = \\ &= E(\varphi_1^2 R_1^2) + E\varphi_1^2 E\xi_1^2 + E\varphi_1^2 E z_1^2 + \\ &\quad + 2[E(\varphi_1^2 R_1) E\xi_1 + E(\varphi_1^2 R_1) E z_1 + E\varphi_1^2 E z_1 E\xi_1] \end{aligned}$$

W powyższym wykorzystano, że na mocy założeń **Z3-Z4-Z5** zmienne losowe φ_1, ξ_1 i z_1 są wzajemnie niezależne. Ponieważ ξ_1 i z_1 mają także zerowe wartości oczekiwane, wyrażenie w nawiasie kwadratowym jest równe 0. Podstawiając w pozostałych wyrażeniach oszacowania (B.7) i (B.8) otrzymujemy (na mocy założeń **Z2-Z4**), że

$$A_V \leq M_f (M_R^2 + \text{var } \xi_1 + \text{var } z_1) < \infty \quad (\text{B.11})$$

Oszacowanie składnika A_C . Oszacujmy teraz składnik kowariancyjny w (B.3):

$$\begin{aligned} A_C &= \sum_{j=2}^{\infty} |E[\varphi_1 \varphi_j (R_1 + \xi_1 + z_1) (R_j + \xi_j + z_j)] - E^2[\varphi_1 (R_1 + \xi_1 + z_1)]| = \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=2}^{\infty} |A_1(j) - A_2| \end{aligned}$$

Wymnażając elementy w $A_1(j)$ i wykorzystując wspomnianą wyżej niezależność zmiennych losowych, otrzymujemy

$$\begin{aligned} A_1(j) &= E\{\varphi_1 \varphi_j [R_1 R_j + R_1 (\xi_j + z_j) + (\xi_1 + z_1) R_j + (\xi_1 + z_1) (\xi_j + z_j)]\} = \\ &= E(\varphi_1 \varphi_j R_1 R_j) + E[\varphi_1 \varphi_j R_1 (\xi_j + z_j)] + E(\varphi_1 \varphi_j R_j) E(\xi_1 + z_1) + \\ &\quad + E[\varphi_1 \varphi_j (\xi_1 \xi_j + \xi_1 z_j + z_1 \xi_j + z_1 z_j)] \end{aligned}$$

a po przekształceniach i uporządkowaniu wyrazów

$$\begin{aligned} A_1(j) &= E(\varphi_1 R_1) E(\varphi_j R_j) + \\ &\quad + E\varphi_j E(\varphi_1 \xi_1 \xi_j) + E\varphi_j E(\varphi_1 R_1 \xi_j) + E\varphi_j E\varphi_1 E(z_1 z_j) + \\ &\quad + E\varphi_1 E\varphi_j E\xi_1 E z_j + E\varphi_j E(\varphi_1 \xi_j) E z_1 + \\ &\quad + E\varphi_1 E(\varphi_j R_j) E\xi_1 + E\varphi_j E(\varphi_1 R_1) E z_j + E\varphi_1 E(\varphi_j R_j) E z_1 = \\ &= A_{11} + \\ &\quad + A_{12}(j) + A_{13}(j) + A_{14}(j) + \\ &\quad + A_{15} + A_{16} + \\ &\quad + A_{17} + A_{18} + A_{19} \end{aligned}$$

Na mocy założeń **Z3-Z4** mamy $A_{15} = A_{16} = A_{17} = A_{18} = A_{19} = 0$. Ponadto (por. wzory (3.1) i (3.4) na str. 27)

$$A_{11} = E^2(\varphi_1 R_1) = \left[\int_{\frac{n}{2^M}}^{\frac{n+(2p-1)}{2^M}} \varphi_{Mn}^p(x) R(x) f(x) dx \right]^2 = (\alpha_{Mn}^p)^2$$

Analizując kolejne składniki, $A_{12}(j)$ i $A_{14}(j)$, wykorzystujemy stacjonarność procesów $\{\zeta_k\}$ i $\{\varepsilon_k\}$ oraz fakt, że $E\zeta_1 = Ez_1 = 0$ (por. założenia **Z3-Z4**). Mamy

$$\begin{aligned} A_{12}(j) &= E\varphi_j E(\varphi_1 \xi_1 \xi_j) = E\varphi_j E\left[\varphi_1 \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \zeta_{1-i} \sum_{l=1}^{\infty} \lambda_l \zeta_{j-l}\right] = \\ &= E\varphi_j E\left[\varphi_1 \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \lambda_{i+j-1} \zeta_{1-i}^2\right] + E\varphi_j E\left[\varphi_1 \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \zeta_{1-i} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i+j-1}}^{\infty} \lambda_l \zeta_{j-l}\right] = \\ &= A'_{12}(j) + A''_{12}(j) \end{aligned}$$

i otrzymujemy, że (por. założenie **Z3**)

$$A'_{12}(j) = E^2 \varphi_1 \operatorname{var} \zeta_1 \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \lambda_{i+j-1}$$

Analizując składnik $A''_{12}(j)$ otrzymujemy natomiast, że

$$A''_{12}(j) = E\varphi_j E\left[\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i+j-1}}^{\infty} \lambda_i \lambda_l \zeta_{1-i} \cdot \varphi_1 \zeta_{j-l}\right] = E\varphi_j \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i+j-1}}^{\infty} \lambda_i \lambda_l E[\zeta_{1-i} \cdot \varphi_1 \zeta_{j-l}]$$

Ponieważ, na mocy założeń **Z1-Z3** w rozdz. 2, dla $l \neq i+j-1$, zmienne losowe ζ_{1-i} i ζ_{j-l} są niezależne, a dla dowolnego $i = 1, 2, \dots$, niezależne są także zmienne losowe ζ_{1-i} i φ_1 , zatem, wobec założenia **Z3**, że $E\zeta_{1-i} = E\zeta_1 = 0$ dostajemy

$$A''_{12}(j) = E\varphi_j E\zeta_1 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i+j-1}}^{\infty} \lambda_i \lambda_l E[\varphi_1 \zeta_{j-l}] = 0$$

Stąd

$$A_{12}(j) = A'_{12}(j) = E^2 \varphi_1 \operatorname{var} \zeta_1 \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \lambda_{i+j-1}$$

W podobny sposób można pokazać, że (por. założenie **Z4**)

$$A_{14}(j) = E^2 \varphi_1 \operatorname{var} \varepsilon_1 \sum_{i=0}^{\infty} \omega_i \omega_{i+j-1}$$

Ponadto

$$A_{13}(j) = E\varphi_1 E(\varphi_1 R_1 \xi_j) = E\varphi_1 E\left[\varphi_1 R_1 \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \zeta_{j-i}\right] = \lambda_{j-1} E\varphi_1 E(\varphi_1 R_1 \zeta_1)$$

Zauważając jeszcze, że

$$A_2 = E^2[\varphi_1(R_1 + \xi_1 + z_1)] = E^2(\varphi_1 R_1) = A_{11} = (\alpha_{Mn}^p)^2$$

dla składnika kowariancyjnego w (B.3) otrzymujemy oszacowanie

$$A_C \leq \sum_{j=2}^{\infty} |A_{12}(j)| + \sum_{j=2}^{\infty} |A_{13}(j)| + \sum_{j=2}^{\infty} |A_{14}(j)|$$

Zachodzą następujące nierówności (por. (B.9) i (B.10))

$$\begin{aligned} \sum_{j=2}^{\infty} |A_{12}(j)| &\leq 2^{-M} (2p-1)^2 M_{\varphi}^2 M_f^2 \cdot \text{var } \zeta_1 \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i| |\lambda_{i+j}| < \infty \\ \sum_{j=2}^{\infty} |A_{13}(j)| &\leq 2^{-M} (2p-1)^2 M_{\varphi}^2 M_f^2 M_R M_{\zeta} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j| < \infty \\ \sum_{j=2}^{\infty} |A_{14}(j)| &\leq 2^{-M} (2p-1)^2 M_{\varphi}^2 M_f^2 \cdot \text{var } \varepsilon_1 \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} |\omega_i| |\omega_{i+j}| < \infty \end{aligned}$$

w których poszczególne szeregi są bezwzględnie zbieżne na mocy założeń **Z3-Z4** o asymptotycznej stabilności elementów dynamicznych identyfikowanego systemu (por. (B.39), str. 130). W rezultacie

$$A_C \leq 2^{-M} \cdot M_{\varphi}^2 (2p-1)^2 C_C < \infty \quad (\text{B.12})$$

gdzie

$$C_C = M_f^2 \left[\text{var } \zeta_1 \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i| |\lambda_{i+j}| + M_R M_{\zeta} \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j| + \text{var } \varepsilon_1 \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} |\omega_i| |\omega_{i+j}| \right]$$

jest stałą zależną od gęstości wejścia systemu $f(x)$, nieliniowości $R(x)$ oraz jego elementów dynamicznych (por. (B.4) i założenia **Z3-Z4**).

Oszacowanie wariancji współczynników $\hat{\alpha}_{Mn}^p$ i $\hat{\beta}_{ml}^p$. Ze wzorów (B.3), (B.11) oraz (B.12) wynika, że

$$\text{var } \hat{\alpha}_{Mn}^p \leq \frac{1}{N} (A_{\text{var}} + A_{\text{cov}}) \quad (\text{B.13})$$

gdzie stałe (por. (B.11) i (B.12))

$$A_{\text{var}} = M_f (M_R^2 + \text{var } \xi_1 + \text{var } z_1) \quad \text{oraz} \quad A_{\text{cov}} = 2^{-M} \cdot M_{\varphi}^2 (2p-1)^2 C_C$$

nie zależą od parametru przesunięcia funkcji skalującej n . Przeprowadzając podobne oszacowania dla współczynników empirycznych $\hat{\beta}_{ml}^p$ otrzymujemy, że

$$\text{var } \hat{\beta}_{ml}^p \leq \frac{1}{N} (B_{\text{var}} + B_{\text{cov}}) \quad (\text{B.14})$$

gdzie stałe

$$B_{\text{var}} = M_f (M_R^2 + \text{var } \xi_1 + \text{var } z_1) \quad \text{oraz} \quad B_{\text{cov}} = 2^{-m} \cdot M_{\psi}^2 (2p-1)^2 C_C$$

nie zależą od parametru przesunięcia l falki. Pokazaliśmy w ten sposób, że wariancje współczynników empirycznych $\hat{\alpha}_{Mn}^p$ i $\hat{\beta}_{ml}^p$ modelu $\hat{G}(x; K, p)$ spełniają nierówności ze wzoru (3.11) w rozdz. 3.

B.2 Oszacowanie wariancji wyjścia $\text{var } \hat{G}(x; K, p)$

Zauważmy, że (por. wzory (3.3), (3.9) i (3.13) w rozdz. 3)

$$\begin{aligned} \text{var } \hat{G}(x; K, p) &= \text{E} \left[G(x; K, p) - \hat{G}(x; K, p) \right]^2 = \\ &= \text{E} \left\{ \sum_{n=n_{\min}(M,p)}^{n_{\max}(M,p)} \varphi_{Mn}^p(x) (\alpha_{Mn}^p - \hat{\alpha}_{Mn}^p) + \sum_{m=M}^{K-1} \sum_{l=l_{\min}(m,p)}^{l_{\max}(m,p)} \psi_{ml}^p(x) (\beta_{ml}^p - \hat{\beta}_{ml}^p) \right\}^2 \end{aligned}$$

Korzystając teraz z faktu, że w dowolnym, ustalonym punkcie x wpływ na wyjście modelu (teoretycznego i empirycznego) mają tylko te funkcje falkowe $\varphi_{Mn}^p(x)$ i $\psi_{ml}^p(x)$, których nośniki zawierają punkt x (pozostałe funkcje falkowe są bowiem w punkcie x równe 0 – por. z dyskusją w rozdziale 3 na str. 32), możemy podany wyżej wzór zredukować do równoważnej postaci:

$$\begin{aligned} \text{var } \hat{G}(x; K, p) &= \\ &= E \left\{ \sum_{n=n_{\min}(x; M, p)}^{n_{\max}(x; M, p)} \varphi_{Mn}^p(x) (\alpha_{Mn}^p - \hat{\alpha}_{Mn}^p) + \sum_{m=M}^{K-1} \sum_{l=l_{\min}(x; m, p)}^{l_{\max}(x; m, p)} \psi_{ml}^p(x) (\beta_{ml}^p - \hat{\beta}_{ml}^p) \right\}^2 = \\ &\stackrel{\text{def}}{=} A + B + 2C \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

gdzie granice sumowań są równe podanym we wzorze (3.25) na str. 33 oraz dodatkowo

$$n_{\min}(x; M, p) = \lfloor 2^M x \rfloor - 2p - 2 \quad \text{oraz} \quad n_{\max}(x; M, p) = \lfloor 2^M x \rfloor \quad (\text{B.16})$$

Zauważmy, że liczba składników w pierwszej sumie wynosi $n_{\max}(x; M, p) - n_{\min}(x; M, p) + 1$ i, podobnie jak liczba składników w sumie wewnętrznej drugiego składnika (równa $l_{\max}(x; m, p) - l_{\min}(x; m, p) + 1$ dla poszczególnych skal $m = M, \dots, K - 1$), jest nie większa niż $2p - 1$.

Poszczególne składniki wariancji w (B.15) wynoszą

$$\begin{aligned} A &= \sum_{n=n_{\min}(x; M, p)}^{n_{\max}(x; M, p)} \sum_{l=n_{\min}(x; M, p)}^{n_{\max}(x; M, p)} \varphi_{Mn}^p(x) \varphi_{Ml}^p(x) E[(\alpha_{Mn}^p - \hat{\alpha}_{Mn}^p)(\alpha_{Ml}^p - \hat{\alpha}_{Ml}^p)] \\ B &= \sum_{m=M}^{K-1} \sum_{n=l_{\min}(x; m, p)}^{l_{\max}(x; m, p)} \sum_{q=M}^{K-1} \sum_{l=l_{\min}(x; q, p)}^{l_{\max}(x; q, p)} \psi_{mn}^p(x) \psi_{ql}^p(x) E[(\beta_{mn}^p - \hat{\beta}_{mn}^p)(\beta_{ql}^p - \hat{\beta}_{ql}^p)] \\ C &= \sum_{n=n_{\min}(x; M, p)}^{n_{\max}(x; M, p)} \sum_{m=M}^{K-1} \sum_{l=l_{\min}(x; m, p)}^{l_{\max}(x; m, p)} \varphi_{Mn}^p(x) \psi_{ml}^p(x) E[(\alpha_{Mn}^p - \hat{\alpha}_{Mn}^p)(\beta_{ml}^p - \hat{\beta}_{ml}^p)] \end{aligned}$$

Oszacowanie tych składników rozpoczniemy od oszacowania modułów występujących w nich wartości oczekiwanych.

Korzystając z nierówności Schwarz'a (zob. np. [20, str. 105])

$$|E XY| \leq (E X^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (E Y^2)^{\frac{1}{2}}$$

i podstawiając w niej przykładowo

$$X = \alpha_{Mn}^p - \hat{\alpha}_{Mn}^p \quad \text{oraz} \quad Y = \alpha_{Ml}^p - \hat{\alpha}_{Ml}^p$$

otrzymujemy, na mocy własności (3.10) w rozdz. 3, że

$$\begin{aligned} |E(\alpha_{Mn}^p - \hat{\alpha}_{Mn}^p)(\alpha_{Ml}^p - \hat{\alpha}_{Ml}^p)| &\leq \left[E(\alpha_{Mn}^p - \hat{\alpha}_{Mn}^p)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[E(\alpha_{Ml}^p - \hat{\alpha}_{Ml}^p)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \\ &= (\text{var } \hat{\alpha}_{Mn}^p)^{\frac{1}{2}} (\text{var } \hat{\alpha}_{Ml}^p)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \max \{ \text{var } \hat{\alpha}_{Mn}^p, \text{var } \hat{\alpha}_{Ml}^p \} \end{aligned}$$

Stąd, wykorzystując oszacowanie wariancji współczynników empirycznych podane we wzorze (B.13), otrzymujemy

$$|E(\alpha_{Mn}^p - \hat{\alpha}_{Mn}^p)(\alpha_{Ml}^p - \hat{\alpha}_{Ml}^p)| \leq \frac{1}{N}(A_{\text{var}} + A_{\text{cov}})$$

W podobny sposób, korzystając z oszacowania (B.14), uzyskujemy

$$\begin{aligned} |E(\beta_{mn}^p - \hat{\beta}_{mn}^p)(\beta_{ql}^p - \hat{\beta}_{ql}^p)| &\leq \frac{1}{N}(B_{\text{var}} + B_{\text{cov}}) \\ |E(\alpha_{Mn}^p - \hat{\alpha}_{Mn}^p)(\beta_{ml}^p - \hat{\beta}_{ml}^p)| &\leq \frac{1}{N}(D_{\text{var}} + D_{\text{cov}}) \end{aligned}$$

gdzie $D_{\text{var}} = \max\{A_{\text{var}}, B_{\text{var}}\}$ oraz $D_{\text{cov}} = \max\{A_{\text{cov}}, B_{\text{cov}}\}$.

Stosując teraz definicje funkcji falkowych podane we wzorze (1.14) w rozdz. 1, oszacowania podane w (B.6) oraz wzór (B.35) (str. 130) obliczamy, że:

$$\begin{aligned} |A| &\leq \frac{1}{N} \sum_{n=n_{\min}(x;M,p)}^{n_{\max}(x;M,p)} \sum_{l=n_{\min}(x;M,p)}^{n_{\max}(x;M,p)} |\varphi_{Mn}^p(x)| |\varphi_{Ml}^p(x)| (A_{\text{var}} + A_{\text{cov}}) \leq \\ &\leq \frac{1}{N} (2p-1)^2 \cdot 2^M M_\varphi^2 (A_{\text{var}} + A_{\text{cov}}) = \frac{2^M}{N} A_x \\ |B| &\leq \frac{1}{N} \sum_{m=M}^{K-1} \sum_{q=M}^{K-1} \sum_{n=l_{\min}(x;m,p)}^{l_{\max}(x;m,p)} \sum_{l=l_{\min}(x;q,p)}^{l_{\max}(x;q,p)} |\psi_{mn}^p(x)| |\psi_{ql}^p(x)| (B_{\text{var}} + B_{\text{cov}}) \leq \\ &\leq \frac{1}{N} \sum_{m=M}^{K-1} \sum_{q=M}^{K-1} (2p-1)^2 \cdot 2^{\frac{m+q}{2}} M_\psi^2 (B_{\text{var}} + B_{\text{cov}}) = \frac{2^K - 2 \cdot 2^{\frac{K+M}{2}} + 2^M}{N} B_x \\ |C| &\leq \frac{1}{N} \sum_{m=M}^{K-1} \sum_{n=n_{\min}(x;M,p)}^{n_{\max}(x;M,p)} \sum_{l=l_{\min}(x;m,p)}^{l_{\max}(x;m,p)} |\varphi_{Mn}^p(x)| |\psi_{ml}^p(x)| (D_{\text{var}} + D_{\text{cov}}) \leq \\ &\leq \frac{1}{N} \sum_{m=M}^{K-1} (2p-1)^2 \cdot 2^{\frac{M+m}{2}} M_\varphi M_\psi (D_{\text{var}} + D_{\text{cov}}) = \frac{2^{\frac{K+M}{2}} - 2^M}{N} D_x \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} A_x &= M_\varphi^2 (2p-1)^2 (A_{\text{var}} + A_{\text{cov}}) \\ B_x &= M_\psi^2 \left(\frac{2p-1}{\sqrt{2}-1} \right)^2 (B_{\text{var}} + B_{\text{cov}}) \\ C_x &= M_\varphi M_\psi \frac{(2p-1)^2}{\sqrt{2}-1} (D_{\text{var}} + D_{\text{cov}}) \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

Stąd i z (B.15), uwzględniając, że w modelach empirycznych $\hat{G}(x; K, p)$ zachodzi $M \leq K$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \text{var } \hat{G}(x; K, p) &\leq \frac{2^M}{N} A_x + \frac{2^K - 2 \cdot 2^{\frac{K+M}{2}} + 2^M}{N} B_x + 2 \frac{2^{\frac{K+M}{2}} - 2^M}{N} D_x = \\ &= \frac{2^K}{N} \left[2^{M-K} A_x + \left(1 - 2 \cdot 2^{\frac{M-K}{2}} + 2^{M-K} \right) B_x + \left(2^{\frac{M-K}{2}} - 2^{M-K} \right) 2 D_x \right] \leq \\ &\leq \frac{2^K}{N} \cdot C_{\text{var}} \end{aligned}$$

gdzie $C_{\text{var}} = A_x + B_x + 2D_x$. Uzyskaliliśmy zatem oszacowanie (3.14) z rozdz. 3, wariancji wyjścia modelu empirycznego $\hat{G}(x; K, p)$ dla dowolnego, ustalonego punktu x .

B.3 Oszacowanie współczynników falkowych β_{ml}^p

Poniżej przedstawiamy wykorzystywane w literaturze fakty, dotyczące oszacowań współczynników falkowych β_{ml}^p (dla dużych skal m) (np. [15]-[16], [93]). Ich wyprowadzenie zamieszczamy dla kompletności prezentacji.

Znikające momenty falek $\psi_{ml}^p(x)$. Posiadanie przez falkę-matkę $\psi^p(x)$ p znikających momentów (por. wzór (1.12) z rozdz. 1):

$$\int_{1-p}^p x^k \cdot \psi^p(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \cdot \psi^p(x) dx = 0, \quad k = 0, 1, \dots, p-1 \quad (\text{B.18})$$

przenosi się również na falki $\psi_{ml}^p(x) (= 2^{\frac{m}{2}} \psi^p(2^m x - l))$ (tj. skalowane i przesunięte wersje falki-matki (por. wzór (1.14) z rozdz. 1):

$$\int_{\frac{l+(1-p)}{2^m}}^{\frac{l+p}{2^m}} x^k \cdot \psi_{ml}^p(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \cdot \psi_{ml}^p(x) dx = 0, \quad k = 0, 1, \dots, p-1 \quad (\text{B.16a})$$

Podstawiając bowiem w całce w powyższym wzorze $x = 2^{-m}(u + l)$ ($dx = 2^{-m}du$) otrzymujemy, że

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x^k \cdot 2^{\frac{m}{2}} \psi^p(2^m x - l) dx &= 2^{\frac{m}{2}} 2^{-m} \int_{-\infty}^{\infty} (2^{-m}(u + l))^k \cdot \psi^p(u) du = \\ &= 2^{-\frac{2k+1}{2}m} \int_{-\infty}^{\infty} (u + l)^k \cdot \psi^p(u) du \end{aligned}$$

a na mocy wzoru dwumianowego Newtona (zob. np. [88, str. 69]):

$$(u + l)^k = \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} u^{k-r} l^r$$

mamy (por. wzór (B.18))

$$\begin{aligned} 2^{-\frac{2k+1}{2}m} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} u^{k-r} l^r \cdot \psi^p(u) du &= 2^{-\frac{2k+1}{2}m} \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} l^r \int_{-\infty}^{\infty} u^{k-r} \cdot \psi^p(u) du = \\ &= 0 \end{aligned}$$

dla $k = 0, 1, \dots, p-1$, co dowodzi prawdziwości wzoru (B.16a).

W podobny sposób (również w oparciu o wzór dwumianowy Newtona) można pokazać, że dla falek $\psi_{ml}^p(x)$ (o numerze p) zachodzi własność

$$\int_{\frac{l+(1-p)}{2^m}}^{\frac{l+p}{2^m}} (x - v)^k \cdot \psi_{ml}^p(x) dx = 0, \quad k = 0, \dots, p-1 \quad (\text{B.19})$$

wykorzystywana dalej przy oszacowaniach współczynników falkowych β_{ml}^p .

Oszacowanie współczynników β_{ml}^p dla ciągłych funkcji $G(x)$. Załóżmy, że w przedziale $\left[\frac{l+(1-p)}{2^m}, \frac{l+p}{2^m}\right)$ (nośnik falki ψ_{ml}^p) funkcja $G(x)$ należy klasy $C^\lambda, \lambda > 0$. Korzystając z definicji tej klasy (zob. str. 31 w rozdz. 3) funkcję $G(x)$ można przedstawić w postaci sumy jej wielomianu Taylora $t(x, v)$ stopnia $q - 1$, $q = \lceil \lambda \rceil$, w punkcie $v \in \left[\frac{l+(1-p)}{2^m}, \frac{l+p}{2^m}\right)$ i reszty $\epsilon(x, v)$ (zob. wzory (3.21) i (3.22))

$$G(x) = \sum_{r=0}^{q-1} T_r \cdot (x-v)^r + \epsilon(x, v) = T_0 + T_1 \cdot (x-v) + \cdots + T_{q-1} \cdot (x-v)^{q-1} + \epsilon(x, v)$$

gdzie $T_r = G^{(r)}(v) / r!$.

Podstawiając tę postać funkcji $G(x)$ do wzoru na współczynniki falkowe β_{ml}^p otrzymujemy, że (por. (3.4), str. 27)

$$\beta_{ml}^p = \int_{\frac{l+(1-p)}{2^m}}^{\frac{l+p}{2^m}} [T_0 + T_1 \cdot (x-v) + \cdots + T_{q-1} \cdot (x-v)^{q-1} + \epsilon(x, v)] \cdot \psi_{ml}^p(x) dx \quad (\text{B.20})$$

Oszacujemy teraz szybkość zmniejszania się współczynników β_{ml}^p ze wzrostem skali m dla dwóch przypadków: gdy numer falkowy p jest nie mniejszy niż wykładnik λ , tj. $p > q - 1$ i gdy jest od niego mniejszy ($p \leq q - 1$).

Przypadek $p \geq \lambda$. Ze względu na własność (B.19) i fakt, że $p > q - 1$ wzór (B.20) redukuje się do następującej postaci (zerują się wszystkie wyrazy wielomianu Taylora)

$$\beta_{ml}^p = \int_{\frac{l+(1-p)}{2^m}}^{\frac{l+p}{2^m}} \epsilon(x, v) \cdot \psi_{ml}^p(x) dx \quad (\text{B.21})$$

Na mocy nierówności $|\epsilon(x, v)| \leq L_\lambda |x - v|^\lambda$ (zob. (3.21)) otrzymujemy, że

$$|\beta_{ml}^p| = \left| \int_{\frac{l+(1-p)}{2^m}}^{\frac{l+p}{2^m}} \epsilon(x, v) \cdot \psi_{ml}^p(x) dx \right| \leq L_\lambda \int_{\frac{l+(1-p)}{2^m}}^{\frac{l+p}{2^m}} |x - v|^\lambda \cdot |\psi_{ml}^p(x)| dx$$

Korzystając teraz z nierówności Schwarza dla całek (zob. np. [119, str. 38])

$$\int_a^b |f(x)| |g(x)| dx \leq \left\{ \int_a^b f^2(x) dx \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{ \int_a^b g^2(x) dx \right\}^{\frac{1}{2}}$$

oraz z ortonormalności falek $\psi_{ml}^p(x)$, po podstawieniach

$$a = \frac{l + (1 - p)}{2^m}, \quad b = \frac{l + p}{2^m} \quad \text{oraz} \quad f(x) = |x - v|^\lambda \quad \text{i} \quad g(x) = \psi_{ml}^p(x)$$

dostajemy, że

$$|\beta_{ml}^p| \leq L_\lambda \left\{ \int_{\frac{l+(1-p)}{2^m}}^{\frac{l+p}{2^m}} |x - v|^{2\lambda} dx \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{ \int_{\frac{l+(1-p)}{2^m}}^{\frac{l+p}{2^m}} [\psi_{ml}^p(x)]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} = L_\lambda \left\{ \int_{\frac{l+(1-p)}{2^m}}^{\frac{l+p}{2^m}} |x - v|^{2\lambda} dx \right\}^{\frac{1}{2}}$$

a stąd (ponieważ $|x - v| \leq (2p - 1)/2^m$)

$$\begin{aligned}
 |\beta_{ml}^p| &\leq L_\lambda \left\{ \int_{\frac{l+(1-p)}{2^m}}^{\frac{l+p}{2^m}} [2^{-m}(2p-1)]^{2\lambda} dx \right\}^{\frac{1}{2}} = \\
 &= L_\lambda \left\{ [2^{-m}(2p-1)] [2^{-m}(2p-1)]^{2\lambda} \right\}^{\frac{1}{2}} = \\
 &= L_\lambda \left\{ [2^{-m}(2p-1)]^{2\lambda+1} \right\}^{\frac{1}{2}} = \\
 &= 2^{-\frac{(2\lambda+1)m}{2}} \cdot C_\lambda
 \end{aligned} \tag{B.22}$$

gdzie $C_\lambda = L_\lambda (2p-1)^{\frac{2\lambda+1}{2}}$.

Przypadek $p < \lambda$. Posiadanie przez falki $\psi_{ml}^p(x)$ p znikających momentów (por. wzór (B.16a) i (B.19)) powoduje, że w tym przypadku (obecnie $p \leq q-1$), we wzorze (B.20) zerują się jedynie wyrazy wielomianu Taylora do stopnia $p-1$ ($\leq q-2$), a zatem (por. (B.21))

$$\begin{aligned}
 \beta_{ml}^p &= \int_{\frac{l+(1-p)}{2^m}}^{\frac{l+p}{2^m}} [T_p \cdot (x-v)^p + \dots + T_{q-1} \cdot (x-v)^{q-1} + \epsilon(x, v)] \cdot \psi_{ml}^p(x) dx = \\
 &= \int_{\frac{l+(1-p)}{2^m}}^{\frac{l+p}{2^m}} T_p \cdot (x-v)^p \psi_{ml}^p(x) dx + \dots + \\
 &\quad + \int_{\frac{l+(1-p)}{2^m}}^{\frac{l+p}{2^m}} T_{q-1} \cdot (x-v)^{q-1} \psi_{ml}^p(x) dx + \int_{\frac{l+(1-p)}{2^m}}^{\frac{l+p}{2^m}} \epsilon(x, v) \psi_{ml}^p(x) dx
 \end{aligned}$$

Skorzystanie przy oszacowaniu modułu $|\beta_{ml}^p|$ z nierówności Schwarza dla każdej z otrzymanych całek i z ortonormalności falek $\psi_{ml}^p(x)$, prowadzi teraz do następującej nierówności

$$\begin{aligned}
 |\beta_{ml}^p| &\leq |T_p| \left\{ \int_{\frac{l+(1-p)}{2^m}}^{\frac{l+p}{2^m}} |x-v|^{2p} dx \right\}^{\frac{1}{2}} + \dots + \\
 &\quad + |T_{q-1}| \left\{ \int_{\frac{l+(1-p)}{2^m}}^{\frac{l+p}{2^m}} |x-v|^{2(q-1)} dx \right\}^{\frac{1}{2}} + L_\lambda \left\{ \int_{\frac{l+(1-p)}{2^m}}^{\frac{l+p}{2^m}} |x-v|^{2\lambda} dx \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \\
 &\leq |T_p| \left\{ [2^{-m}(2p-1)]^{2p+1} \right\}^{\frac{1}{2}} + \dots + \\
 &\quad + |T_{q-1}| \left\{ [2^{-m}(2p-1)]^{2q-1} \right\}^{\frac{1}{2}} + L_\lambda \left\{ [2^{-m}(2p-1)]^{2\lambda+1} \right\}^{\frac{1}{2}} \\
 &= 2^{-\frac{(2p+1)m}{2}} \cdot |T_p| (2p-1)^{\frac{2p+1}{2}} + \dots + \\
 &\quad + 2^{-\frac{(2q-1)m}{2}} \cdot |T_{q-1}| (2p-1)^{\frac{2q-1}{2}} + 2^{-\frac{(2\lambda+1)m}{2}} \cdot L_\lambda (2p-1)^{\frac{2\lambda+1}{2}}
 \end{aligned}$$

w której, dla dużych wartości skal m , istotny pozostaje tylko pierwszy wyraz. Stąd otrzymujemy, że przy dużych skalach m zachodzi oszacowanie

$$|\beta_{ml}^p| \leq 2^{-\frac{(2p+1)m}{2}} \cdot C_p \tag{B.23}$$

gdzie C_p jest dodatnią stałą.

Zbadane dwa przypadki oraz oszacowania (B.22) i (B.23) stanowią podstawę poniższego lematu charakteryzującego szybkość zmniejszania się współczynników falkowych funkcji $G(x)$ w zależności od jej gładkości (wartości wykładnika λ) i od zastosowanych falek (numeru falkowego p) ze wzrostem skali m (por. też np. [98, twierdzenie 7, str. 185]):

Lemat 2.16 *Jeśli funkcja $G(x)$ jest ciągła w przedziale $\left[\frac{l+(1-p)}{2^m}, \frac{l+p}{2^m}\right)$ z wykładnikiem λ , to dla współczynników β_{ml}^p jej rozwinięcia falkowego (przy użyciu funkcji falkowych Daubechies o numerze p) i dużych wartości m zachodzi następujące oszacowanie*

$$|\beta_{ml}^p| \leq 2^{-\frac{(2\gamma+1)m}{2}} \cdot C_\gamma, \quad \gamma = \min\{\lambda, p\} \quad (\text{B.24})$$

gdzie $C_\gamma = \max\{C_\lambda, C_p\}$.

Oszacowanie współczynników β_{ml}^p dla nieciągłych funkcji $G(x)$. Powyższy wynik dotyczy funkcji $G(x)$ przy założeniu ich ciągłości w przedziale $\left[\frac{l+(1-p)}{2^m}, \frac{l+p}{2^m}\right)$. Dla dowolnych funkcji nieciągłych $G(x)$, ograniczonych w tym przedziale, tj. spełniających warunek $|G(x)| \leq M_G < \infty$, dla $x \in \left[\frac{l+(1-p)}{2^m}, \frac{l+p}{2^m}\right)$, współczynniki falkowe β_{ml}^p można oszacować następująco

$$\begin{aligned} |\beta_{ml}^p| &= \left| \int_{\frac{l+(1-p)}{2^m}}^{\frac{l+p}{2^m}} G(x) \psi_{ml}^p(x) dx \right| \leq \int_{\frac{l+(1-p)}{2^m}}^{\frac{l+p}{2^m}} |G(x)| |\psi_{ml}^p(x)| dx \leq \\ &\leq 2^{\frac{m}{2}} M_G M_\psi \int_{\frac{l+(1-p)}{2^m}}^{\frac{l+p}{2^m}} dx = 2^{\frac{m}{2}} M_G M_\psi \cdot 2^{-m} (2p-1) = \\ &= 2^{-\frac{m}{2}} \cdot M_G M_\psi (2p-1) \end{aligned}$$

Zatem:

Lemat 2.17 *Jeśli funkcja $G(x)$ jest nieciągła i ograniczona w przedziale $\left[\frac{l+(1-p)}{2^m}, \frac{l+p}{2^m}\right)$, to dla jej współczynników falkowych β_{ml}^p zachodzi następujące oszacowanie*

$$|\beta_{ml}^p| \leq 2^{-\frac{m}{2}} \cdot C_{G\psi} \quad (\text{B.25})$$

dla dowolnego numeru falkowego p , gdzie $C_{G\psi} = M_G M_\psi (2p-1)$.

B.4 Oszacowanie obciążenia $\text{bias}^2 \hat{G}(x; K, p)$

Przy założeniu **Z7**, korzystając z postaci błędu obciążenia modelu empirycznego $\hat{G}(x; K, p)$ w punkcie x (por. wzór (3.26) w rozdz. 3, str. 33):

$$\text{bias } \hat{G}(x; K, p) = \sum_{m=K}^{\infty} \sum_{l=l_{\min}(x; m, p)}^{l_{\max}(x; m, p)} \beta_{ml}^p \psi_{ml}^p(x)$$

oraz z oszacowania (B.24) i z faktu, że dla każdego x , liczba składników w wewnętrznej sumie w tym wzorze dla każdej skali m wynosi $l_{\max}(x; m, p) - l_{\min}(x; m, p) + 1 \leq 2p-1$

(zob. (3.25), str. 33) otrzymujemy (z pomocą wzoru (B.6) i (B.35), str. 130), że:

$$\begin{aligned}
 \left| \text{bias } \hat{G}(x; K, p) \right| &\leq \sum_{m=K}^{\infty} \sum_{l=l_{\min}(x; m, p)}^{l_{\max}(x; m, p)} |\beta_{ml}^p| \cdot 2^{\frac{m}{2}} M_{\psi} \leq \\
 &\leq (2p-1) M_{\psi} C_{\gamma} \sum_{m=K}^{\infty} 2^{\frac{m}{2}} \cdot 2^{-\frac{(2\gamma+1)m}{2}} = \\
 &= (2p-1) M_{\psi} C_{\gamma} \sum_{m=K}^{\infty} 2^{-\gamma m} = \\
 &= 2^{-\gamma K} \cdot \frac{(2p-1) M_{\psi} C_{\gamma}}{1 - 2^{-\gamma}}
 \end{aligned}$$

gdzie $\gamma = \min \{\lambda, p\}$, jak we wzorze (B.24). Przy założeniu **Z7** zachodzi zatem nierówność (3.28) z rozdziału 3:

$$\text{bias}^2 \hat{G}(x; K, p) \leq 2^{-2\gamma K} \cdot C_{\text{bias}} \quad (\text{B.26})$$

ze stałą $C_{\text{bias}} = \left[\frac{(2p-1)M_{\psi}C_{\gamma}}{1-2^{-\gamma}} \right]^2$.

B.5 Oszacowanie wariancji współczynników empirycznych $\hat{\alpha}_{Mn}^{p'}$ i $\hat{\beta}_{ml}^{p'}$ modeli $\hat{R}_R(x; K, p)$

Współczynniki empiryczne $\hat{\alpha}_{Mn}^{p'}$ i $\hat{\beta}_{ml}^{p'}$ w algorytmie bezpośrednim z rozdz. 3 na str. 46 (zob. wzory (3.64) i (3.65)) przyjmują, po uwzględnieniu równania wyjścia identyfikowanego systemu (por. wzory (2.1) i (2.5) w rozdz. 2):

$$y_k = R(x_k) + \xi_k + z_k \quad \text{gdzie} \quad \xi_k = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \zeta(x_{k-i}) \quad \text{i} \quad z_k = \sum_{i=0}^{\infty} \omega_i \varepsilon_{k-i}$$

następujące postacie (por. wzory w (B.1))

$$\begin{aligned}
 \hat{\alpha}_{Mn}^{p'} &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi_{Mn}^{p'}(x_k) [R(x_k) + \xi_k + z_k] \\
 \hat{\beta}_{ml}^{p'} &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \psi_{ml}^{p'}(x_k) [R(x_k) + \xi_k + z_k]
 \end{aligned}$$

Do oszacowania wariancji tych współczynników wykorzystamy następujące nierówności (por. definicje w (1.14) w rozdz. 1, założenia **Z1-Z3** w rozdz. 2 oraz wzory w (B.4)-(B.6)):

$$E [\varphi_{Mn}^{p'}(x_1)]^2 = \int_{\frac{n}{2^M}}^{\frac{n+(2p-1)}{2^M}} \frac{[\varphi_{Mn}^p(x)]^2}{f(x)} dx \leq \frac{1}{\delta} \quad (\text{B.27})$$

$$E [\varphi_{Mn}^{p'}(x_1) R(x_1)]^2 = \int_{\frac{n}{2^M}}^{\frac{n+(2p-1)}{2^M}} \frac{[\varphi_{Mn}^p(x) R(x)]^2}{f(x)} dx \leq \frac{M_R^2}{\delta} \quad (\text{B.28})$$

$$|E \varphi_{Mn}^{p'}(x_1)| = \left| \int_{\frac{n}{2^M}}^{\frac{n+(2p-1)}{2^M}} \varphi_{Mn}^p(x) dx \right| = 2^{-\frac{M}{2}} (2p-1) M_{\varphi} \quad (\text{B.29})$$

$$\begin{aligned}
|E(\varphi_{Mn}^{p'}(x_1) R(x_1) \zeta(x_1))| &= \left| \int_{\frac{n}{2^M}}^{\frac{n+(2p-1)}{2^M}} R(x) \zeta(x) \varphi_{Mn}^p(x) dx \right| \leq \\
&\leq 2^{-\frac{M}{2}} (2p-1) M_\varphi M_R M_\zeta
\end{aligned} \tag{B.30}$$

Na podstawie tych nierówności oraz oszacowań wariancji współczynników empirycznych $\hat{\alpha}_{Mn}^p$ i $\hat{\beta}_{ml}^p$ modeli $\hat{G}(x; K, p)$ (wykorzystujących nierówności (B.7)-(B.10)) otrzymujemy, że wariancja współczynników empirycznych $\hat{\alpha}_{Mn}^{p'}$ modeli $\hat{R}_R(x; K, p)$ spełnia następującą nierówność (por. wzór (B.13))

$$\text{var } \hat{\alpha}_{Mn}^{p'} \leq \frac{1}{N} (A'_{\text{var}} + A'_{\text{cov}}) \tag{B.31}$$

gdzie stałe (por. wzory w (B.11) i (B.12))

$$A'_{\text{var}} = \frac{1}{\delta} (M_R^2 + \text{var } \xi_1 + \text{var } z_1) \quad \text{oraz} \quad A_{\text{cov}} = 2^{-M} \cdot M_\varphi^2 (2p-1)^2 \frac{C_C}{M_f^2}$$

nie zależą od parametru przesunięcia funkcji skalującej n . Podobnie, dla współczynników empirycznych $\hat{\beta}_{ml}^{p'}$ otrzymujemy, że (por. oszacowanie (B.14))

$$\text{var } \hat{\beta}_{ml}^{p'} \leq \frac{1}{N} (B'_{\text{var}} + B'_{\text{cov}}) \tag{B.32}$$

gdzie, z kolei, stałe

$$B'_{\text{var}} = \frac{1}{\delta} (M_R^2 + \text{var } \xi_1 + \text{var } z_1) \quad \text{oraz} \quad B'_{\text{cov}} = 2^{-m} \cdot M_\psi^2 (2p-1)^2 \frac{C_C}{M_f^2}$$

nie zależą od parametru przesunięcia l falki. Pokazaliśmy w ten sposób, że wariancje współczynników empirycznych $\hat{\alpha}_{Mn}^{p'}$ i $\hat{\beta}_{ml}^{p'}$ modelu $\hat{R}_R(x; K, p)$ spełniają nierówności ze wzoru (3.73) w rozdz. 3.

B.6 Oszacowanie wariancji wyjścia $\text{var } \hat{R}_R(x; K, p)$

Korzystając z obliczeń dla modelu $\hat{G}(x; K, p)$ w punkcie B.2 (str. 120) otrzymujemy, że w dowolnym, ustalonym punkcie $x \in S$, dla wariancji wyjścia modelu empirycznego $\hat{R}_R(x; K, p)$ zachodzi następująca nierówność:

$$\text{var } \hat{R}_R(x; K, p) \leq \frac{2^K}{N} \left[2^{M-K} A'_x + \left(1 - 2 \cdot 2^{\frac{M-K}{2}} + 2^{M-K} \right) B'_x + \left(2^{\frac{M-K}{2}} - 2^{M-K} \right) 2D'_x \right]$$

gdzie, odpowiednio (por. (B.17))

$$\begin{aligned}
A'_x &= M_\varphi^2 (2p-1)^2 (A'_{\text{var}} + A'_{\text{cov}}) \\
B'_x &= M_\psi^2 \left(\frac{2p-1}{\sqrt{2}-1} \right)^2 (B'_{\text{var}} + B'_{\text{cov}}) \\
D'_x &= M_\varphi M_\psi \frac{(2p-1)^2}{\sqrt{2}-1} (D'_{\text{var}} + D'_{\text{cov}})
\end{aligned}$$

i gdzie $D'_{\text{var}} = \max \{A'_{\text{var}}, B'_{\text{var}}\}$ oraz $D'_{\text{cov}} = \max \{A'_{\text{cov}}, B'_{\text{cov}}\}$. Po uwzględnieniu, że w modelach empirycznych $\hat{R}_R(x; K, p)$ zachodzi $M \leq K$, otrzymujemy oszacowanie wariancji wyjścia modeli empirycznych w ustalonym punkcie x dane we wzorze (3.76) w rozdz. 3:

$$\text{var } \hat{R}_R(x; K, p) \leq \frac{2^K}{N} \cdot C'_{\text{var}}$$

ze stałą $C'_{\text{var}} = A'_x + B'_x + 2D'_x$.

B.7 Optymalna szybkość zbieżności modeli falkowych

Na mocy twierdzeń udowodnionych w pracach [128] i [129] dla nieparametrycznych metod estymacji funkcji regresji, prawdziwy jest następujący wniosek:

Wniosek 2.3 *Największa możliwa szybkość średniokwadratowej zbieżności modeli falkowych do nieliniowości $R(x)$ z klasy $C^\beta[a, b]$ jest rzędu*

$$O(N^{-2\beta/(2\beta+1)}) \quad (\text{B.33})$$

zarówno dla błędu punktowego (MSE) jak i całkowego (MISE).

Szybkość zbieżności równa co do rzędu podanej we wzorze (B.33) nazywana jest *asymptotycznie optymalną szybkością zbieżności* (zob. np. [64, twierdzenie 4.1.2, str. 93]).

B.8 Szybkość zbieżności według prawdopodobieństwa

W pracy [50, twierdzenie 3, str. 449] udowodniono następujące twierdzenie (zob. też ([108, lemat 4, str. 954]))

Twierdzenie 2.19 *Jeśli w punkcie x ciągi zmiennych losowych $\{\hat{g}_N(x)\}$ i $\{\hat{f}_N(x)\}$ zbiegają średniokwadratowo do funkcji $g(x)$ i $f(x)$ ($f(x) > 0$) z prędkościami*

$$\text{MSE } \hat{g}_N(x) = O(N^{-s_g}) \quad \text{oraz} \quad \text{MSE } \hat{f}_N(x) = O(N^{-s_f}), \quad s_g, s_f > 0$$

to prawdziwe jest następujące oszacowanie

$$\left| \frac{g(x)}{f(x)} - \frac{\hat{g}_N(x)}{\hat{f}_N(x)} \right| = O\left(\sqrt{N^{-\min\{s_g, s_f\}}}\right) \quad (\text{B.34})$$

według prawdopodobieństwa.

Oszacowanie (B.34) oznacza, że dla dowolnego ciągu liczbowego $\{a_N\}$ zbieżnego do 0 wraz z $N \rightarrow \infty$, zachodzi

$$a_N \cdot \frac{\left| \frac{g(x)}{f(x)} - \frac{\hat{g}_N(x)}{\hat{f}_N(x)} \right|}{\sqrt{N^{-\min\{s_g, s_f\}}}} \rightarrow 0 \quad \text{gdy} \quad N \rightarrow \infty$$

według prawdopodobieństwa.

B.9 Wybrane własności szeregów liczbowych

Szereg geometryczny. Szacując błędy obciążenia i wariancji modeli falkowych korzystamy z następujących znanych wzorów (zob. np. [88, str. 204]):

$$\sum_{m=K}^{\infty} 2^{m\rho} = \frac{1}{1-2^{\rho}} 2^{K\rho}, \quad \rho < 0 \quad (\text{B.35})$$

$$\sum_{m=M}^{K-1} 2^{m\rho} = \frac{1}{2^{\rho}-1} (2^{K\rho} - 2^{M\rho}), \quad \rho \neq 0 \quad (\text{B.36})$$

$$\sum_{q=M}^{K-1} \sum_{m=M}^{K-1} 2^{(m+q)\rho} = \frac{1}{(2^{\rho}-1)^2} (2^{2K\rho} - 2 \cdot 2^{(K+M)\rho} + 2^{2M\rho}), \quad \rho \neq 0 \quad (\text{B.37})$$

Szeregi bezwzględnie zbieżne. W obliczeniach wariancji współczynników modeli empirycznych posługujemy się następującymi podstawowymi własnościami szeregów bezwzględnie zbieżnych $\{a_i\}$, $i = 0, 1, \dots$:

$$(i) : \sum_{i=0}^{\infty} a_i^2 < \infty \quad (\text{B.38})$$

$$(ii) : \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} |a_i| |a_{i+j}| < \infty \quad (\text{B.39})$$

$$(iii) : \sum_{j=1}^{N-1} \frac{N-j}{N} |a_j| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |a_j| < \infty, \quad \text{dla } N, j \in \mathbb{N} \text{ oraz } j < N \quad (\text{B.40})$$

wynikającymi z poniższych nierówności

$$(i) : \infty > \max_i \{|a_i|\} \sum_{i=0}^{\infty} |a_i| \geq \sum_{i=0}^{\infty} a_i^2$$

$$(ii) : \infty > \sum_{i=0}^{\infty} |a_i| \sum_{j=0}^{\infty} |a_{i+j}| = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} |a_i| |a_{i+j}|$$

Ponadto, ponieważ $0 < (\frac{N-j}{N} = 1 - \frac{j}{N}) < 1$ dla $N > 1$ i $j < N$ to

$$(iii) : \infty > \sum_{j=1}^{\infty} |a_j| \geq \sum_{j=1}^{N-1} |a_j| \geq \sum_{j=1}^{N-1} \frac{N-j}{N} |a_j|$$

Dodatek C

Uzupełnienia do rozdziału 4

C.1 Oszacowanie błędów aproksymacji funkcji falkowych

Do wykazania prawdziwości własności **H2a-H2b** (zob. str. 70) aproksymacji $\bar{\varphi}^p(x; H)$ i $\bar{\psi}^p(x; H)$ funkcji falkowych $\varphi^p(x)$ i $\psi^p(x)$ dla $p \geq 2$ wykorzystamy poniższą tożsamość (por. wzór (4.1) w rozdz. 4)

$$\varphi^p(x) - \bar{\varphi}^p(x; H) = \varphi^p(x) - \varphi^p\left(\frac{\lfloor 2^H x \rfloor}{2^H}\right) \quad (\text{C.1})$$

oraz następujące własności funkcji falkowych Daubechies (por. [130, str. 620] i [131, str. 297]):

- C1.** funkcje falkowe $\varphi^p(x)$ i $\psi^p(x)$ z numerem $p = 2$ należą do klasy C^τ , z wykładnikiem $\tau \sim 0.55$,
- C2.** funkcje falkowe $\varphi^p(x)$ i $\psi^p(x)$ o numerach $p > 2$ należą do klas C^τ z wykładnikami $\tau > 1$.

w sensie definicji 3.1 klasy gładkości C (rozdz. 3).

Przypadek $p = 2$. Ze wzoru (C.1) i własności **C1** wynika następująca nierówność charakteryzująca błąd aproksymacji funkcji skalujących $\varphi^p(x)$ przez funkcje $\bar{\varphi}^p(x; H)$ (por. wzory (3.21)-(3.22) w rozdz. 3):

$$|\varphi^p(x) - \bar{\varphi}^p(x; H)| = \left| \varphi^p(x) - \varphi^p\left(\frac{\lfloor 2^H x \rfloor}{2^H}\right) \right| \leq L_\tau \left| x - \frac{\lfloor 2^H x \rfloor}{2^H} \right|^\tau = L_\tau \left| \frac{2^H x - \lfloor 2^H x \rfloor}{2^H} \right|^\tau$$

Stąd (ponieważ $2^H x - \lfloor 2^H x \rfloor \leq 1$; por. wzór (A.2) w Dodatku A.1, str. 114) otrzymujemy, że

$$|\varphi^p(x) - \bar{\varphi}^p(x; H)| \leq 2^{-\tau H} \cdot L_\tau \quad (\text{C.2})$$

Przypadek $p > 2$. Aby oszacować błąd aproksymacji funkcji skalujących $\varphi^p(x)$ o numerach $p > 2$ posłużymy się reprezentacją tych funkcji za pomocą wielomianu Taylora

stopnia $\lceil \tau \rceil - 1$ i odpowiedniej reszty $\epsilon(x, x_B)$ w punkcie $\lfloor 2^H x \rfloor / 2^H \stackrel{\text{def}}{=} x_B$ (por. wzór (3.22) w rozdz. 3)

$$\varphi^p(x) = \sum_{r=0}^{\lceil \tau \rceil - 1} \frac{(\varphi^p)^{(r)}(x_B)}{r!} \cdot (x - x_B)^r + \epsilon(x, x_B)$$

gdzie $|\epsilon(x, x_B)| \leq L_\tau |x - x_B|^\tau$, $L_\tau > 0$ (por. wzór (3.21)). Po podstawieniu powyższego do wzoru (C.1) otrzymujemy

$$\varphi^p(x) - \bar{\varphi}^p(x; H) = \varphi^p(x) - \varphi^p(x_B) = \sum_{r=1}^{\lceil \tau \rceil - 1} \frac{(\varphi^p)^{(r)}(x_B)}{r!} \cdot (x - x_B)^r + \epsilon(x, x_B)$$

a stąd (ponieważ $x - x_B = x - \lfloor 2^H x \rfloor / 2^H \leq 2^{-H}$)

$$\begin{aligned} |\varphi^p(x) - \bar{\varphi}^p(x; H)| &\leq T_1 \cdot |x - x_B| + \dots + T_{\lceil \tau \rceil - 1} \cdot |x - x_B|^{\lceil \tau \rceil - 1} + L_\tau \cdot |x - x_B|^\tau \leq \\ &\leq 2^{-H} \cdot T_1 + \dots + 2^{-(\lceil \tau \rceil - 1)H} \cdot T_{\lceil \tau \rceil - 1} + 2^{-\tau H} \cdot L_\tau \end{aligned}$$

gdzie $T_1, \dots, T_{\lceil \tau \rceil - 1}$ są dodatnimi stałymi. W powyższej nierówności, dla dużych wartości skal aproksymacji H istotny pozostaje tylko pierwszy wyraz. A zatem, przy dużych skalach H zachodzi oszacowanie

$$|\varphi^p(x) - \bar{\varphi}^p(x; H)| \leq 2^{-H} \cdot C_1 \quad (\text{C.3})$$

gdzie C_1 jest dodatnią stałą.

Z nierówności (C.2) i (C.3) wynika zatem, że dla dowolnego numeru falkowego $p \geq 2$ i dla każdego x , bezwzględny błąd aproksymacji funkcji skalujących $\varphi^p(x)$ przez funkcje $\bar{\varphi}^p(x; H)$ spełnia (przy dużych wartościach H) nierówność

$$|\varphi^p(x) - \bar{\varphi}^p(x; H)| \leq 2^{-\rho H} \cdot L_\varphi \quad \text{gdzie} \quad \rho = \begin{cases} \sim 0.55 & \text{dla } p = 2 \\ 1 & \text{dla } p > 2 \end{cases} \quad (\text{C.4})$$

ze stałą $L_\varphi = \max\{L_\rho, C_1\}$. W podobny sposób można pokazać, że dla każdego x i $p \geq 2$ dla błędu aproksymacji falek $\psi^p(x)$ zachodzi

$$|\psi^p(x) - \bar{\psi}^p(x; H)| \leq 2^{-\rho H} \cdot L_\psi \quad (\text{C.5})$$

gdzie L_ψ jest dodatnią stałą (zob. wzory w (4.4) w rozdz. 4).

Oszacowania błędu aproksymacji funkcji falkowych $\varphi_{Mn}^p(x)$ i $\psi_{ml}^p(x)$. Obliczymy teraz oszacowania błędów aproksymacji $\bar{\varphi}_{Mn}^p(x; H)$ i $\bar{\psi}_{ml}^p(x; H)$ skalowanych i przesuniętych funkcji falkowych $\varphi_{Mn}^p(x)$ i $\psi_{ml}^p(x)$.

Dla $\varphi_{Mn}^p(x)$, po podstawieniu $u = 2^M x - n$ otrzymujemy (por. definicje $\varphi_{Mn}^p(x)$ i $\bar{\varphi}_{Mn}^p(x; H)$ w (1.14) i (4.2))

$$\varphi_{Mn}^p(x) - \bar{\varphi}_{Mn}^p(x; H) = 2^{\frac{M}{2}} [\varphi^p(u) - \bar{\varphi}^p(u; H)]$$

Ze wzoru (C.1) i oszacowania (C.4) wynika zatem, że

$$|\varphi_{Mn}^p(x) - \bar{\varphi}_{Mn}^p(x; H)| \leq 2^{\frac{M}{2}} L_\varphi \left| u - \frac{\lfloor 2^H u \rfloor}{2^H} \right|^\rho \leq 2^{\frac{M}{2}} 2^{-\rho H} \cdot L_\varphi \quad (\text{C.6})$$

Analogiczna nierówność zachodzi dla błędów aproksymacji falek $\psi_{ml}^p(x)$

$$|\psi_{ml}^p(x) - \bar{\psi}_{ml}^p(x; H)| \leq 2^{\frac{m}{2}} 2^{-\rho H} \cdot L_\psi \quad (\text{C.7})$$

Oszacowanie całki z aproksymacji $\bar{\varphi}_{Mn}^p(x; H)$. Dla aproksymacji $\bar{\varphi}^p(x; H)$ i $\bar{\psi}^p(x; H)$ (przy dowolnej skali aproksymacji H i dowolnego p) zachodzą następujące oszacowania (por. definicje w (4.1) oraz nierówności w (B.6) w Dodatku B.1)

$$|\bar{\varphi}^p(x; H)| = \left| \varphi^p \left(\frac{\lfloor 2^H x \rfloor}{x} \right) \right| \leq M_\varphi \quad \text{oraz} \quad |\bar{\psi}^p(x; H)| = \left| \psi^p \left(\frac{\lfloor 2^H x \rfloor}{x} \right) \right| \leq M_\psi \quad (\text{C.8})$$

stąd, w szczególności, dla całki z aproksymacji $\bar{\varphi}_{Mn}^p(x; H)$ zachodzi nierówność (por. wzór (4.2))

$$\left| \int_{\frac{n}{2^M}}^{\frac{n+(2p-1)}{2^M}} \bar{\varphi}_{Mn}^p(x; H) dx \right| = 2^{\frac{M}{2}} \left| \int_{\frac{n}{2^M}}^{\frac{n+(2p-1)}{2^M}} \varphi^p \left(\frac{\lfloor 2^H (2^M x - n) \rfloor}{2^H} \right) dx \right| \leq 2^{-\frac{M}{2}} (2p-1) M_\varphi \quad (\text{C.9})$$

Oszacowanie całek z kwadratów aproksymacji $\bar{\varphi}_{Mn}^p(x; H)$ i $\bar{\psi}_{ml}^p(x; H)$. Wykorzystując ortonormalność funkcji skalujących $\varphi_{Mn}^p(x)$ (zob. wzór w (B.5)), otrzymujemy następującą równość

$$\int_{\frac{n}{2^M}}^{\frac{n+(2p-1)}{2^M}} [\bar{\varphi}_{Mn}^p(x; H)]^2 dx = \int_{\frac{n}{2^M}}^{\frac{n+(2p-1)}{2^M}} [\varphi_{Mn}^p(x; H)]^2 dx - \left[\int_{\frac{n}{2^M}}^{\frac{n+(2p-1)}{2^M}} [\varphi_{Mn}^p(x)]^2 dx + 1 \right]$$

z której, po poniższych przekształceniach

$$\begin{aligned} \int_{\frac{n}{2^M}}^{\frac{n+(2p-1)}{2^M}} [\bar{\varphi}_{Mn}^p(x; H)]^2 dx &= 1 + \int_{\frac{n}{2^M}}^{\frac{n+(2p-1)}{2^M}} [\varphi_{Mn}^p(x; H)]^2 - [\varphi_{Mn}^p(x)]^2 dx = \\ &= 1 + \int_{\frac{n}{2^M}}^{\frac{n+(2p-1)}{2^M}} [\varphi_{Mn}^p(x; H) - \varphi_{Mn}^p(x)] [\varphi_{Mn}^p(x; H) + \varphi_{Mn}^p(x)] dx \end{aligned}$$

otrzymujemy, korzystając z oszacowania (C.6) i nierówności we wzorach (B.6) i (C.8), następującą nierówność

$$\begin{aligned} \int_{\frac{n}{2^M}}^{\frac{n+(2p-1)}{2^M}} [\bar{\varphi}_{Mn}^p(x; H)]^2 dx &\leq 1 + 2^{-M} (2p-1) \cdot 2^{\frac{M}{2}} 2^{-\rho H} L_\varphi \cdot 2^{\frac{M}{2}} \cdot 2M_\varphi = \\ &= 1 + 2^{-\rho H} (2p-1) \cdot 2L_\varphi M_\varphi \end{aligned}$$

a z niej (ponieważ skala aproksymacji $H \geq 0$; oraz $\rho > 0$ – por. wzór (C.4)) poniższe oszacowanie całki z kwadratu aproksymacji funkcji skalującej

$$\int_{\frac{n}{2^M}}^{\frac{n+(2p-1)}{2^M}} [\bar{\varphi}_{Mn}^p(x; H)]^2 dx \leq \bar{M}_{\bar{\varphi}} \quad (\text{C.10})$$

ze stałą $\bar{M}_{\bar{\varphi}} = 1 + 2(2p-1) L_\varphi M_\varphi$. W analogiczny sposób można pokazać, że całka z kwadratu aproksymacji falek spełnia nierówność

$$\int_{\frac{l+(1-p)}{2^m}}^{\frac{l+p}{2^m}} [\bar{\psi}_{ml}^p(x; H)]^2 dx \leq \bar{M}_{\bar{\psi}}$$

gdzie $\bar{M}_{\bar{\psi}} = 1 + 2(2p-1) L_\psi M_\psi$.

C.2 Oszacowanie wariancji współczynników empirycznych $\tilde{\alpha}_{Mn}^p$ i $\tilde{\beta}_{ml}^p$ modeli $\tilde{G}(x; K, H, p)$

Uwzględniając we wzorach na współczynniki empiryczne $\tilde{\alpha}_{Mn}^p$ i $\tilde{\beta}_{ml}^p$ modeli obliczeniowych $\tilde{G}(x; K, H, p)$ (zob. wzory w (4.17) w rozdz. 4) równanie wyjścia identyfikowanego systemu (wzory (2.1) i (2.5) w rozdz. 2) otrzymujemy, że:

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_{Mn}^p &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \bar{\varphi}_{Mn}^p(x_k; H) \cdot [R(x_k) + \xi_k + z_k] \\ \tilde{\beta}_{ml}^p &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \bar{\psi}_{ml}^p(x_k; H) \cdot [R(x_k) + \xi_k + z_k]\end{aligned}$$

A zatem (por. wzory w (B.1) w Dodatku B.1, str. 116) przy szacowaniu wariancji tych współczynników można skorzystać z obliczeń przeprowadzonych dla współczynników empirycznych $\hat{\alpha}_{Mn}^p$ i $\hat{\beta}_{ml}^p$ modeli falkowych $\hat{G}(x; K, p)$ (zob. Dodatek B.1).

Podstawiając w tych obliczeniach, w miejsce nierówności (B.7)-(B.10), ich poniższe odpowiedniki uzyskane na podstawie definicji we wzorze (1.14) w rozdz. 1, założeń **Z1-Z3** w rozdz. 2 oraz oszacowań (B.4), (C.6) i (C.8)-(C.10):

$$E[\bar{\varphi}_{Mn}^p(x_1; H)]^2 = \int_{\frac{n}{2^M}}^{\frac{n+(2p-1)}{2^M}} [\bar{\varphi}_{Mn}^p(x; H)]^2 f(x) dx \leq \bar{M}_{\bar{\varphi}} M_f \quad (C.11)$$

$$E[\bar{\varphi}_{Mn}^p(x_1; H) R(x_1)]^2 = \int_{\frac{n}{2^M}}^{\frac{n+(2p-1)}{2^M}} [\bar{\varphi}_{Mn}^p(x; H) R(x)]^2 f(x) dx \leq \bar{M}_{\bar{\varphi}} M_R^2 M_f$$

$$|E[\bar{\varphi}_{Mn}^p(x_1; H)]| = \left| \int_{\frac{n}{2^M}}^{\frac{n+(2p-1)}{2^M}} \bar{\varphi}_{Mn}^p(x; H) f(x) dx \right| \leq 2^{-\frac{M}{2}} (2p-1) M_{\varphi} M_f$$

$$\begin{aligned}|E(\bar{\varphi}_{Mn}^p(x_1; H) R(x_1) \zeta(x_1))| &= \left| \int_{\frac{n}{2^M}}^{\frac{n+(2p-1)}{2^M}} R(x) \zeta(x) \bar{\varphi}_{Mn}^p(x; H) f(x) dx \right| \leq \\ &\leq 2^{-\frac{M}{2}} (2p-1) M_R M_{\zeta} M_{\varphi} M_f\end{aligned} \quad (C.12)$$

otrzymujemy, że wariancja współczynników empirycznych $\tilde{\alpha}_{Mn}^p$ modeli obliczeniowych $\tilde{G}(x; K, H, p)$ spełnia następującą nierówność (por. wzór (B.13))

$$\text{var } \tilde{\alpha}_{Mn}^p \leq \frac{1}{N} (\bar{A}_{\text{var}} + \bar{A}_{\text{cov}}) \quad (C.13)$$

ze stałymi (por. wzory w (B.11) i (B.12))

$$\bar{A}_{\text{var}} = \bar{M}_{\bar{\varphi}} M_f (M_R^2 + \text{var } \xi_1 + \text{var } z_1) \quad \text{oraz} \quad \bar{A}_{\text{cov}} = 2^{-M} \cdot M_{\varphi}^2 (2p-1)^2 C_C$$

niezależnymi od parametru przesunięcia n aproksymacji $\bar{\varphi}_{Mn}^p(x; H)$. Podobnie, dla współczynników empirycznych $\tilde{\beta}_{ml}^p$ otrzymujemy, że (por. oszacowanie (B.14))

$$\text{var } \tilde{\beta}_{Mn}^p \leq \frac{1}{N} (\bar{B}_{\text{var}} + \bar{B}_{\text{cov}}) \quad (C.14)$$

gdzie stałe

$$\bar{B}_{\text{var}} = \bar{M}_{\bar{\psi}} M_f (M_R^2 + \text{var } \xi_1 + \text{var } z_1) \quad \text{oraz} \quad \bar{B}_{\text{cov}} = 2^{-m} \cdot M_{\psi}^2 (2p-1)^2 C_C$$

są niezależne od parametru przesunięcia l aproksymacji $\bar{\psi}_{ml}^p(x; H)$. Pokazaliśmy w ten sposób, że wariancje współczynników empirycznych $\bar{\alpha}_{Mn}^p$ i $\bar{\beta}_{ml}^p$ modelu obliczeniowego $\tilde{G}(x; K, H, p)$ spełniają nierówności ze wzoru (4.25) w rozdz. 4.

C.3 Oszacowanie wariancji wyjścia $\text{var } \tilde{G}(x; K, H, p)$

Korzystając z odpowiednich obliczeń dla empirycznych modeli falkowych $\hat{G}(x; K, p)$ przeprowadzonych w Dodatku B.2 (str. 120), oszacowań wariancji współczynników $\bar{\alpha}_{Mn}^p$ i $\bar{\beta}_{ml}^p$ empirycznych modeli obliczeniowych $\tilde{G}(x; K, H, p)$ (wzory (C.13) i (C.14)) oraz własności (4.28) tych modeli otrzymujemy, że w dowolnym, ustalonym punkcie $x \in S$, dla wariancji ich wyjścia zachodzi nierówność:

$$\text{var } \tilde{G}(x; K, H, p) \leq \frac{2^K}{N} \left[2^{M-K} \bar{A}_x + \left(1 - 2 \cdot 2^{\frac{M-K}{2}} + 2^{M-K} \right) \bar{B}_x + \left(2^{\frac{M-K}{2}} - 2^{M-K} \right) 2\bar{D}_x \right]$$

gdzie, odpowiednio (por. wzór (B.17))

$$\bar{A}_x = M_\varphi^2 (2p-1)^2 (\bar{A}_{\text{var}} + \bar{A}_{\text{cov}})$$

$$\bar{B}_x = M_\psi^2 \left(\frac{2p-1}{\sqrt{2}-1} \right)^2 (\bar{B}_{\text{var}} + \bar{B}_{\text{cov}})$$

$$\bar{D}_x = M_\varphi M_\psi \frac{(2p-1)^2}{\sqrt{2}-1} (\bar{D}_{\text{var}} + \bar{D}_{\text{cov}})$$

i gdzie $\bar{D}_{\text{var}} = \max \{ \bar{A}_{\text{var}}, \bar{B}_{\text{var}} \}$ oraz $\bar{D}_{\text{cov}} = \max \{ \bar{A}_{\text{cov}}, \bar{B}_{\text{cov}} \}$. Po uwzględnieniu, że w empirycznych modelach obliczeniowych $\tilde{G}(x; K, H, p)$, pomiędzy skalami M i K zachodzi nierówność $M \leq K$, otrzymujemy oszacowanie wariancji wyjścia tych modeli w ustalonym punkcie x , dane we wzorze (4.29) w rozdz. 4:

$$\text{var } \tilde{G}(x; K, H, p) \leq \frac{2^K}{N} \cdot \bar{C}_{\text{var}}$$

ze stałą $\bar{C}_{\text{var}} = \bar{A}_x + \bar{B}_x + 2\bar{D}_x$.

C.4 Oszacowanie obciążenia $\overline{\text{bias}}^2 \tilde{G}(x; K, H, p)$

W ustalonym punkcie x , składową obciążenia $\overline{\text{bias}} \tilde{G}(x; K, H, p)$ empirycznych modeli obliczeniowych $\tilde{G}(x; K, H, p)$ szacujemy wykorzystując fakt, że zarówno oryginalne funkcje falkowe, jak i ich aproksymacje mają zwarte nośniki i znikają poza przedziałami zawierającymi nośniki funkcji falkowych (zob. własność **H3**). A zatem wpływ na błąd pomiędzy wyjściem modeli $G(x; K, p)$ i $\tilde{G}(x; K, H, p)$ w punkcie x mają tylko te aproksymacje $\bar{\varphi}_{Mn}^p(x; H)$ i $\bar{\psi}_{ml}^p(x; H)$, których nośniki odpowiadających im funkcji falkowych $\varphi_{Mn}^p(x)$ i $\psi_{ml}^p(x)$ zawierają punkt x (por. z argumentacją podaną przy szacowaniu błędów obciążenia i wariancji wyjścia falkowych modeli empirycznych $\hat{G}(x; K, p)$ w Dodatkach B.2 i B.4), stąd

$$\begin{aligned} \overline{\text{bias}} \tilde{G}(x; K, H, p) &= G(x; K, p) - \tilde{G}(x; K, H, p) = \\ &= \sum_{n=n_{\min}(x; M, p)}^{n_{\max}(x; M, p)} [\alpha_{Mn}^p \varphi_{Mn}^p(x) - \bar{\alpha}_{Mn}^p \bar{\varphi}_{Mn}^p(x; H)] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{m=M}^{K-1} \sum_{l=l_{\min}(x;m,p)}^{l_{\max}(x;m,p)} [\beta_{ml}^p \psi_{ml}^p(x) - \bar{\beta}_{ml}^p \bar{\psi}_{ml}^p(x; H)] = \\
& \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=n_{\min}(x;M,p)}^{n_{\max}(x;M,p)} \bar{A} + \sum_{m=M}^{K-1} \sum_{l=l_{\min}(x;m,p)}^{l_{\max}(x;m,p)} \bar{B}
\end{aligned} \tag{C.15}$$

gdzie odpowiednie granice sumowań są dane wzorami (B.16) i (3.25), str. 121 i 33).

Oszacowanie składników $\bar{A}$ i $\bar{B}$. W oszacowaniu składników pierwszej sumy we wzorze (C.15) korzystamy z poniższego wzoru

$$\begin{aligned}
\bar{A} &= \alpha_{Mn}^p \varphi_{Mn}^p(x) - [\alpha_{Mn}^p \bar{\varphi}_{Mn}^p(x; H) - \alpha_{Mn}^p \bar{\varphi}_{Mn}^p(x; H)] - \bar{\alpha}_{Mn}^p \bar{\varphi}_{Mn}^p(x; H) = \\
&= \alpha_{Mn}^p [\varphi_{Mn}^p(x) - \bar{\varphi}_{Mn}^p(x; H)] + \bar{\varphi}_{Mn}^p(x; H) [\alpha_{Mn}^p - \bar{\alpha}_{Mn}^p]
\end{aligned} \tag{C.16}$$

Zauważając teraz, że

$$\alpha_{Mn}^p - \bar{\alpha}_{Mn}^p = \int_{\frac{n}{2^M}}^{\frac{n+(2p-1)}{2^M}} G(x) [\varphi_{Mn}^p(x) - \bar{\varphi}_{Mn}^p(x; H)] dx$$

na podstawie oszacowania (C.6) dostajemy, dla dowolnych funkcji $G(x)$ ograniczonych w przedziale $S = [a, b]$ (tj. spełniających w nim warunek $|G(x)| \leq M_G < \infty$), następującą nierówność

$$|\alpha_{Mn}^p - \bar{\alpha}_{Mn}^p| \leq 2^{-M} (2p-1) \cdot M_G \cdot 2^{\frac{M}{2}} 2^{-\rho H} L_\varphi = 2^{-\frac{M}{2}} 2^{-\rho H} (2p-1) M_G L_\varphi$$

która wraz z poniższą (wynikającą z definicji w (1.14) w rozdz. 1 oraz oszacowań podanych we wzorze (B.6))

$$|\alpha_{Mn}^p| = \left| \int_{\frac{n}{2^M}}^{\frac{n+(2p-1)}{2^M}} G(x) \varphi_{Mn}^p(x) dx \right| \leq 2^{-M} (2p-1) \cdot M_G 2^{\frac{M}{2}} M_\varphi \leq 2^{-\frac{M}{2}} (2p-1) M_G M_\varphi$$

proceedzi do oszacowania składnika $\bar{A}$ we wzorze (C.16) (por. wzory (B.6) i (C.6))

$$\begin{aligned}
|\bar{A}| &\leq 2^{-\frac{M}{2}} (2p-1) M_G M_\varphi \cdot 2^{\frac{M}{2}} 2^{-\rho H} L_\varphi + 2^{\frac{M}{2}} M_\varphi \cdot 2^{-\frac{M}{2}} 2^{-\rho H} (2p-1) M_G L_\varphi = \\
&= 2^{-\rho H} \cdot \bar{C}_A
\end{aligned} \tag{C.17}$$

gdzie stała $\bar{C}_A = 2(2p-1) M_G M_\varphi L_\varphi$ nie zależy zarówno od parametru przesunięcia n jak i skali M .

Podobnie, dla składnika $\bar{B}$ otrzymujemy, że

$$|\bar{B}| \leq 2^{-\rho H} \cdot \bar{C}_B \tag{C.18}$$

ze stałą $\bar{C}_B = 2(2p-1) M_G M_\psi L_\psi$ niezależną od parametru l oraz skali m .

Oszacowanie obciążenia $\overline{\text{biaś}} \tilde{G}(x; K, H, p)$. Liczba składników $\bar{A}$ w pierwszej sumie wzoru (C.15) wynosi $n_{\max}(x; M, p) - n_{\min}(x; M, p) + 1$ (por. wzór (B.16)) i, podobnie jak liczba składników $\bar{B}$ w sumie wewnętrznej (wynosząca $l_{\max}(x; m, p) - l_{\min}(x; m, p) + 1$

dla każdej ze skal $m = M, \dots, K-1$; por. wzór (3.25)), jest nie większa niż $2p-1$. Stąd, ponieważ $M \leq K$, to zachodzi następujące oszacowanie błędu obciążenia $\overline{\text{bias}}\tilde{G}(x; K, H, p)$ w dowolnym, ustalonym punkcie $x \in S$, przy założeniu, że $K > 0$ (por. wzory (C.17) i (C.18)):

$$\begin{aligned} \left| \overline{\text{bias}}\tilde{G}(x; K, H, p) \right| &\leq (2p-1) 2^{-\rho H} \cdot \bar{C}_A + (K-M)(2p-1) 2^{-\rho H} \cdot \bar{C}_B = \\ &= 2^{-\rho H} K \cdot \left\{ (2p-1) \left[\frac{1}{K} \bar{C}_A + \left(1 - \frac{M}{K} \right) \bar{C}_B \right] \right\} \leq \\ &\leq 2^{-\rho H} K \cdot (2p-1) (\bar{C}_A + \bar{C}_B) \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

z którego otrzymujemy nierówność (4.31) z rozdziału 4:

$$\overline{\text{bias}}^2 \tilde{G}(x; K, H, p) \leq 2^{-2\rho H} K^2 \cdot \bar{C}_{\text{bias}} \quad (\text{C.20})$$

ze stałą $\bar{C}_{\text{bias}} = [(2p-1)(\bar{C}_A + \bar{C}_B)]^2$. Z oszacowania (C.19) wnioskujemy zatem, że błędy wynikające z zastosowania aproksymacji funkcji falkowych (szacowane przez składniki we wzorach (C.17) i (C.18)) akumulują się i rosną (przy ustalonej skali M modeli obliczeniowych) ze wzrostem skali K tych modeli.

Uwaga 3.12 Dla modeli obliczeniowych opartych jedynie o aproksymacje funkcji skalujących (tj. w przypadku gdy $M = K$), oszacowanie (C.19) redukuje się do postaci

$$\left| \overline{\text{bias}}\tilde{G}(x; K, H, p) \right| \leq 2^{-\rho H} \cdot (2p-1) \bar{C}_A$$

Zatem w modelach tych nie występuje kumulacja błędów aproksymacji (por. wyniki badań numerycznych w rozdz. 5).

C.5 Tabele współczynników Daubechies

Współczynniki $\{c_t\}_{t=0}^{2p-1}$ można wyznaczyć z następujących warunków (zob. np. [111, str. 592] i [131, str. 298])

$$\begin{aligned} \text{Ortonormalność :} & \begin{cases} \sum_{t=0}^{2p-1} c_t c_{t+2n} = \delta_{0,n}, & n = 0, \dots, p-1 \end{cases} \\ \text{Znikające momenty :} & \begin{cases} \sum_{t=0}^{2p-1} (-1)^t c_{(2p-1)-t} \cdot t^r = 0, & r = 0, \dots, p-1 \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

które tworzą, dla każdego p , układ $2p$ równań o $2p$ niewiadomych c_t .

Przykład 3.2 Dla $p = 3$ układ równań w (C.21) przyjmuje następującą postać

$$\left\{ \begin{array}{ll} c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2 + c_5^2 = 1 & : (n=0) \\ c_0 c_2 + c_1 c_3 + c_2 c_4 + c_3 c_5 = 0 & : (n=1) \\ c_0 c_4 + c_1 c_5 = 0 & : (n=2) \\ \\ c_5 - c_4 + c_3 - c_2 + c_1 - c_0 = 0 & : (r=0) \\ 0c_5 - 1c_4 + 2c_3 - 3c_2 + 4c_1 - 5c_0 = 0 & : (r=1) \\ 0c_5 - 1c_4 + 4c_3 - 9c_2 + 16c_1 - 25c_0 = 0 & : (r=2) \end{array} \right.$$

Rozwiązanie układu znajduje się w tabeli C.1 (str. 138). ■

Współczynniki Daubechies dla numerów falkowych $p = 2, \dots, 6$. Dla $p = 2, 3$ znane są dokładne wartości współczynników c_t (zob. np. [111, str. 593] i [118, str. 236]):

Tabela C.1 Współczynniki Daubechies dla $p = 2, 3$

t	p	
	2	3
0	$\frac{1 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$	$\frac{1 + \sqrt{10} + \sqrt{5 + 2\sqrt{10}}}{16\sqrt{2}}$
1	$\frac{3 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$	$\frac{5 + \sqrt{10} + 3\sqrt{5 + 2\sqrt{10}}}{16\sqrt{2}}$
2	$\frac{3 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$	$\frac{10 - 2\sqrt{10} + 2\sqrt{5 + 2\sqrt{10}}}{16\sqrt{2}}$
3	$\frac{1 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$	$\frac{10 - 2\sqrt{10} - 2\sqrt{5 + 2\sqrt{10}}}{16\sqrt{2}}$
4		$\frac{5 + \sqrt{10} - 3\sqrt{5 + 2\sqrt{10}}}{16\sqrt{2}}$
5		$\frac{1 + \sqrt{10} - \sqrt{5 + 2\sqrt{10}}}{16\sqrt{2}}$

Natomiast dla $p \geq 4$ wyznaczono je jedynie numerycznie:

Tabela C.2 Współczynniki Daubechies dla $p = 4, 5, 6$

t	p		
	4	5	6
0	0.230377813309	0.160102397974	0.111540743350
1	0.714846570553	0.603829269797	0.494623890398
2	0.630880767930	0.724308528438	0.751133908021
3	-0.027983769417	0.138428145901	0.315250351709
4	-0.187034811719	-0.242294887066	-0.226264693965
5	0.030841381836	-0.032244869585	-0.129766867567
6	0.032883011667	0.077571493840	0.097501605587
7	-0.010597401785	-0.006241490213	0.027522865530
8		-0.012580751999	-0.031582039318
9		0.003335725285	0.000553842201
10			0.004777257511
11			-0.001077301085

C.6 Liczba współczynników w modelach obliczeniowych $\tilde{R}_G(x; K, H, p)$

Liczba współczynników w obliczeniowych modelach empirycznych $\tilde{R}_G(x; K, H, p)$ jest równa liczbie współczynników w ich falkowych odpowiednikach $\hat{R}_G(x; K, p)$ (por. wzór

(3.5) z rozdz. 3 oraz wzory (3.8)-(3.9) i (4.15)-(4.16)) i wynosi (zob. też [72])

$$\begin{aligned}
 P_G(M, K) &= n_{\max}(M, p) - n_{\min}(M, p) + 1 + \sum_{m=M}^{K-1} [l_{\max}(m, p) - l_{\min}(m, p) + 1] = \\
 &= \lceil 2^M b \rceil - 1 - (\lfloor 2^M a \rfloor - 2p + 2) + 1 + \\
 &\quad + \sum_{m=M}^{K-1} [\lceil 2^m b \rceil + p - 2 - (\lfloor 2^m a \rfloor - p + 1) + 1]
 \end{aligned} \tag{C.22}$$

i dla dowolnego $M \leq K$ może być oszacowana następująco (por. własności (A.1) funkcji $\lceil \cdot \rceil$ i $\lfloor \cdot \rfloor$, Dodatek A.1)

$$P_G(M, K) \leq 2^M (b - a) + 2p + \sum_{m=M}^{K-1} [2^m (b - a) + 2p] = 2^K (b - a) + 2p (K - M + 1)$$

A stąd (ponieważ $2^{-K} (K - 1) < 1$) otrzymujemy, że

$$P_G(M, K) < 2^K [(b - a) + 2p] \tag{C.23}$$

C.7 Szybki obliczeniowy algorytm ilorazowy

W niniejszym dodatku wykażemy poprawność wzorów (4.52) stosowanych w szybkim algorytmie wyznaczania empirycznych modeli obliczeniowych $\hat{R}_G(x; K, H, p)$. Ponadto, pokażemy że współczynniki wyznaczone za pomocą tego algorytmu są równoważne współczynnikom wyznaczanym według algorytmu (4.17) przy użyciu dokładniejszych (z większym parametrem skali H) aproksymacji $\bar{\varphi}^p(x; H)$ i $\bar{\psi}^p(x; H)$ funkcji falkowych.

Zachodzą bowiem następujące równości (por. wzór (4.17) oraz definicję w (4.2) w rozdz. 4):

$$\begin{aligned}
 \tilde{\alpha}_{mn}^p &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_k \bar{\varphi}_{mn}^p(x_k; H+1) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_k \cdot 2^{\frac{m}{2}} \bar{\varphi}^p(2^m x_k - n; H+1) = \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_k \cdot 2^{\frac{m}{2}} \varphi^p \left(\frac{\lfloor 2^{H+1} (2^m x_k - n) \rfloor}{2^{H+1}} \right)
 \end{aligned}$$

stąd (zob. wzory (1.26)-(1.27) w rozdz. 1 oraz własność (A.4) funkcji $\lfloor \cdot \rfloor$ w Dodatku A.1)

$$\begin{aligned}
 \tilde{\alpha}_{mn}^p &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_k \sqrt{2} \sum_{t=0}^{2p-1} c_t 2^{\frac{m}{2}} \varphi^p \left(2 \cdot \frac{\lfloor 2^{H+1} 2^m x_k - 2^{H+1} n \rfloor}{2^{H+1}} - t \right) = \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_k \sum_{t=0}^{2p-1} c_t 2^{\frac{m+1}{2}} \varphi^p \left(\frac{\lfloor 2^{H+1} 2^m x_k - 2^{H+1} n \rfloor - 2^H t}{2^H} \right) = \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_k \sum_{t=0}^{2p-1} c_t 2^{\frac{m+1}{2}} \varphi^p \left(\frac{\lfloor 2^H (2^{m+1} x_k - 2n - t) \rfloor}{2^H} \right) = \\
 &= \sum_{t=0}^{2p-1} c_t \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_k \bar{\varphi}_{m+1, 2n+t}^p(x_k; H) = \sum_{t=0}^{2p-1} c_t \tilde{\alpha}_{m+1, 2n+t}^p
 \end{aligned} \tag{C.24}$$

i podobnie

$$\begin{aligned}\tilde{\beta}_{ml}^p &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_k \bar{\psi}_{ml}^p(x_k; H+1) = \sum_{t=-2(p-1)}^1 (-1)^t c_{1-t} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_k \bar{\varphi}_{m+1, 2l+t}^p(x_k; H) = \\ &= \sum_{t=-2(p-1)}^1 (-1)^t c_{1-t} \tilde{\alpha}_{m+1, 2l+t}^p\end{aligned}\quad (\text{C.25})$$

Ze wzorów (C.24) i (C.25) wynika zatem, że współczynniki $\tilde{\alpha}_{mn}^p$ i $\tilde{\beta}_{ml}^p$ wyznaczone dla kolejnych skal $m = K-1, \dots, M$ za pomocą wzorów w (4.52) (tj. według szybkiego algorytmu ilorazowego) odpowiadają współczynnikom $\tilde{\alpha}_{mn}^p$ i $\tilde{\beta}_{ml}^p$ otrzymywanym za pomocą wzorów w (4.17) w rozdz. 4 (tj. według „zwykłego” algorytmu ilorazowego) przy użyciu dokładniejszych aproksymacji funkcji falkowych (z parametrami skali aproksymacji równymi $H+q$, gdzie $q = 1, \dots, K-M$ w kolejnych skalach $m = K-1, \dots, M$).

Stąd (por. obliczenia w Dodatku C.4) rząd błędu $\overline{\text{bias}}^2 \tilde{G}(x; K, H, p)$ w empirycznych modelach obliczeniowych wyznaczanych według szybkiego algorytmu jest *co najwyżej* równy rzędowi tego błędu dla modeli wyznaczanych według algorytmu ilorazowego (wzór (C.20)).

C.8 Procedury komputerowe

Poniżej zamieszczamy fragmenty programu wykorzystywanego w badaniach numerycznych falkowych algorytmów identyfikacji. Zaprezentowane funkcje stanowią implementacje dwóch kroków szybkiego algorytmu ilorazowego przedstawionego w rozdziale 4.

```
void ObliczAlfaKn(const int N, const Pomiary *zbior)
{
    double xk, yk, vk;
    double arg, sqrt2K_N;
    int i, nMin, indeks;
    sqrt2K_N = sqrt(1 << K)/N;
    for(int k = 0; k < N; k++)
    {
        xk = zbior[k].wejście();
        yk = zbior[k].wyjście();
        vk = xk*(1 << K);
        i = floor(vk);
        nMin = MAX(i-(2*p-2), nmin(K,p));
        for(int l = nMin; l <= i; l++)
        {
            arg = fi(vk-l)*yk*sqrt2K_N;
            alpha[K-M][l-nmin(K,p)] += arg;
        }
    }
}
```

Funkcja `ObliczAlfaKn()` (pierwszy krok algorytmu – wzory (4.50)-(4.51)) wyznacza współczynniki $\tilde{\alpha}_{Kn}^p$, $n = n_{\min}(K, p), \dots, n_{\max}(K, p)$ z pomiarów $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^N$.

```

void FWT()
{
    double arg;
    int i,nMin,indeks,znak;
    for(int m = K-1; m ≥ M; m--)
    {
        for(int n = nmin(m,p); n < nmax(m,p); n++)
        {
            for(int t = 0; t ≤ 2*p-1; t++)
            {
                indeks = 2*n+t;
                if(indeks ≥ nmin(m+1,p) && indeks < nmax(m+1,p))
                {
                    arg = alfa[m+1-M][indeks-nmin(m+1,p)]*c[p][t];
                    alfa[m-M][n-nmin(m,p)] += arg;
                }
            }
        }

        for(int l = lmin(m,p); l < lmax(m,p); l++)
        {
            for(int t = -(2*p-2); t ≤ 1; t++)
            {
                indeks = 2*l+t;
                if(indeks ≥ nmin(m+1,p) && indeks < nmax(m+1,p))
                {
                    znak = t&0x01 ? -1 : 1;
                    arg = alfa[m+1-M][indeks-nmin(m+1,p)]*c[p][1-t]*znak;
                    beta[m-M][l-lmin(m,p)] += arg;
                }
            }
        }
    }
}

```

Funkcja FWT() (drugi krok algorytmu – wzory (4.52) – opierający się na szybkiej transformacie falkowej (1.27)) wyznacza współczynniki $\tilde{\alpha}_{Mn}^p$ i $\tilde{\beta}_{ml}^p$ obliczeniowych modeli empirycznych $\tilde{R}_G(x; K, H, p)$ dla dowolnego numeru falkowego p (por. np. [111, str. 595]).

Literatura

- [1] M. AKAY, Wavelets in biomedical engineering, *Annals of Biomedical Engineering*, **23**, 531-542, 1995.
- [2] S. T. ALI, J. P. ANTOINE, J. P. GAZEAU, *Coherent States and Their Generalization: A Mathematical Overview*, Springer-Verlag, 1999.
- [3] A. ANTONIADIS, G. OPPENHEIM, *Wavelets and Statistics*, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [4] M. ANTONOPOULOS-DOMIS, T. TAMBOURATZIS, System identification during transient via wavelets multiresolution analysis followed by spectral techniques, *Annals of Nuclear Energy*, **25**, 465-480, 1998.
- [5] G. BACHMAN, E. BECKENSTEIN, L. NARICI, *Fourier and Wavelet Analysis*, Springer Verlag, 1999.
- [6] J. S. BENDAT, *Non-linear System Analysis and Identification from Random Data*, Wiley, New York, 1990.
- [7] P. J. BICKEL, K. A. DOKSUM, *Mathematical Statistic: Basic Ideas and Selected Topics*, Holden-Day, San Francisco, 1977.
- [8] S. A. BILLINGS, Identification of non-linear systems—a survey, *Proceedings IEE*, **127**, 272-285, 1980.
- [9] —, S. Y. FAKHOURI, Theory of separable processes with application to the identification of non-linear systems, *Proceedings of Inst. Elect. Electron.*, **125**, 1051-1058, 1978.
- [10] —, —, Non-linear system identification using the Hammerstein model, *International Journal of System Science*, **10**, 567-578, 1979.
- [11] —, —, Identification of systems containing linear dynamic and static non-linear elements, *Automatica*, **18**, 15-26, 1982.
- [12] M. BRENNER, R. LIND, Wavelet-processed flight data for robust aeroservoelastic stability margins, *Journal of Guidance and Dynamics*, **21**, 823-829, 1998.
- [13] A. G. BRUCE, H. Y. GAO, Understanding waveshrink - variance and bias estimation, *Biometrika*, **83**, 727-745, 1996.
- [14] T. T. CAI, L. D. BROWN, Wavelet shrinkage for nonequispaced samples, *Annals of Statistics*, **26**, 1783-1799, 1998.

- [15] —, Adaptive wavelet estimation: A block thresholding and oracle inequality approach, *Annals of Statistics*, **27**, 898-924, 1999.
- [16] S. CAMBANIS, E. MASRY, Wavelet approximation of deterministic and random signals: Convergence properties and rates, *IEEE Transactions on Information Theory*, **40**, 1013-1029, 1994.
- [17] A. CHAMBOLLE, R. A. DEVORE, N. Y. LEE, B. J. LUCIER, Nonlinear wavelet image-processing - variational-problems, compression, and noise removal through wavelet shrinkage, *IEEE Transactions on Image Processing*, **7**, 319-335, 1998.
- [18] H. W. CHEN, Modeling and identification of parallel non-linear systems: structural classification and parameter estimation methods, *Proceedings IEEE*, **83**, 39-66, 1995.
- [19] I. L. CHIEN, B. A. OGUNNAIKE, Modeling and control of high purity distillation columns, *AIChE National Meeting*, 1-32, Miami Beach, Florida, 1999.
- [20] Y. S. CHOW, H. TEICHER, *Probability Theory Independence, Interchangeability, Martingales*, Springer, New York, 1997.
- [21] J. CLAERBOUT, Hypertext documents about reproducible research, <http://sepwww.stanford.edu>, 1994.
- [22] M. COTRONEI, L. B. MONTEFUSCO, L. PUCCIO, Multiwavelet analysis and signal-processing, *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing*, **45**, 970-987, 1998.
- [23] C. K. CHUI, *An Introduction to Wavelets*, Academic Press, San Diego, 1992.
- [24] —, *Wavelets: A Mathematical Tool for Signal Processing*, SIAM, Philadelphia, 1997.
- [25] M. DAIGUJI, O. KUDO, T. WADA, Application of wavelet analysis to fault-detection in oil refinery, *Computers & Chemical Engineering*, **21**, 1117-1122, 1997.
- [26] I. DAUBECHIES, Orthonormal bases of compactly supported wavelets, *Communication on Pure and Applied Mathematics*, **42**, 909-996, 1988.
- [27] —, *Ten Lectures on Wavelets*, SIAM Edition, Philadelphia, 1992.
- [28] B. DELYON, A. JUDITSKY, Estimating wavelet coefficients, (w:) [3], 151-167, 1995.
- [29] K. DOHAN, P. H. WHITFIELD, Identification and characterization of water quality transient using wavelet analysis methodology, *Water Science and Technology*, **36**, 325-335, 1997.
- [30] D. L. DONOHO, Wedgelets - nearly minimax estimation of edges, *Annals of Statistics*, **27**, 859-897, 1999.
- [31] —, I. M. JOHNSTONE, Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage, *Biometrika*, **81**, 425-455, 1991.
- [32] —, —, Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage, *Journal of the American Statistical Association*, **90**, 1200-1224, 1995.

- [33] —, —, G. KERKYACHARIAN, D. PICARD, Wavelet Shrinkage: Asymptopia ?, *Journal of the Royal Statistical Society (B)*, **57**, 301-369, 1995.
- [34] T. R. DOWNIE, B. W. SILVERMAN, The discrete multiple wavelet transform and thresholding methods, *IEEE Transactions on Signal Processing*, **46**, 2558-2561, 1998.
- [35] B. DROGE, T. GEORG, On selecting the smoothing parameter of least squares regression estimates using the minimax regret approach. *Statistics & Decisions*, **13**, 1-20, 1995.
- [36] E. ESKINAT, S. H. JOHNSON, W. L. LUYBEN, Use of Hammerstein models in identification of non-linear systems, *American Institute of Chemical Engineers Journal*, **37**, 255-268, 1991.
- [37] P. EYKHOFF, *Identyfikacja w układach dynamicznych*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1980.
- [38] H. FANG, H. Y. CHEN, Wavelet analyses of electroanalytical chemistry responses and an adaptive filter, *Analytica Chimica Acta*, **346**, 319-325, 1997.
- [39] W. Y. FENG, H. GENÇELI, M. NIKOLAOU, Constrained model predictive control with simultaneous identification using wavelets, *Computers & Chemical Engineering*, **20**, 1011-1016, 1996.
- [40] W. FINDEISEN (red.), *Analiza systemowa – podstawy i metodologia*, Państwowe Wydawnictwa Naukowe, Warszawa, 1985.
- [41] P. P. GANDHI, Optimum quantization of order statistics, *IEEE Transactions on Signal Processing*, **45**, 2153-2159, 1997.
- [42] R. L. GRAHAM, D. E. KNUTH, O. PATASHNIK, *Matematyka konkretna*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 1996.
- [43] W. GREBLICKI, Nonparametric system identification by orthogonal series, *Problems of Control and Information Theory*, **8**, 67-73, 1979.
- [44] —, Nonparametric orthogonal series identification of Hammerstein systems, *International Journal of System Science*, **20**, 2355-2367, 1989.
- [45] —, Nieparametryczna identyfikacja systemów, *Archiwum Automatyki i Robotyki*, **XXXVI**, 277-290, 1991.
- [46] —, Nonparametric recovering nonlinearities in block oriented systems with the help of Laguerre polynomials, *Control – Theory and Advanced Technology*, **10**, 771-791, 1994.
- [47] —, Nonparametric identification of Wiener systems by orthogonal series, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **39**, 2077-2086, 1994.
- [48] —, Nonlinearity estimation in Hammerstein systems based on ordered statistics, *IEEE Transactions on Signal Processing*, **44**, 1224-1233, 1996.

- [49] —, Z. HASIEWICZ, Wavelet approach to non-linear system identification, *XXI Krajowa Konferencja Teoria Obwodów i Układy Elektroniczne*, **1**, 87-92, Kiekrz, 1998.
- [50] —, M. PAWLAK, Fourier and Hermite series estimates of regression function, *Annals of The Institute of Statistical Mathematics*, **37**, 443-455, 1985.
- [51] —, —, Identification of discrete Hammerstein system using kernel regression estimates, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **31**, 74-77, 1986.
- [52] —, —, Nonlinear identification of Hammerstein systems, *IEEE Transactions on Information Theory*, **35**, 409-418, 1989.
- [53] —, —, Recursive nonparametric identification of Hammerstein systems, *Journal of the Franklin Institute*, **326**, 461-481, 1989.
- [54] —, —, Nonparametric identification of a cascade nonlinear time series system, *Signal Processing*, **22**, 61-75, 1991.
- [55] —, —, Nonparametric identification of a particular nonlinear time series system, *IEEE Transactions on Signal Processing*, **40**, 985-989, 1992.
- [56] —, —, Cascade non-linear identification by a nonparametric method, *International Journal of System Science*, **25**, 129-153, 1994.
- [57] —, —, Dynamic system identification with order statistics, *IEEE Transactions on Information Theory*, **40**, 1474-1489, 1994.
- [58] A. GROSSMAN, J. MORLET, Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape, *SIAM Journal of Mathematical Analysis*, **15**, 723-736, 1984.
- [59] C. F. HAAL, E. L. HALL, A non-linear model for the spatial characteristics of the human vision system, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, **7**, 161-170, 1977.
- [60] A. HAAR, Zur Theorie der Orthogonalen Funktionen-Systeme, *Annals of Mathematics*, **69**, 331-371, 1910.
- [61] R. HABER, L. KEVICZKY, *Nonlinear System Identification – Input-Output Modeling Approach (Vol. 1 & 2)*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1999.
- [62] —, H. UNBENHAUEN, Structure identification of non-linear dynamic systems—A survey on input/output approaches, *Automatica*, **26**, 771-791, 1994.
- [63] N. D. HAIST, F. H. L. CHANG, R. LUUS, Non-linear identification in the presence of the correlated noise using Hammerstein model, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **18**, 552-555, 1973.
- [64] W. HÄRDLE, *Applied Nonparametric Regression*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [65] —, G. KERKYACHARIAN, D. PICARD, A. TSYBAKOV, *Wavelets, Approximation, and Statistical Applications*, Springer, 1998.

- [66] Z. HASIEWICZ, Identifiability of large-scale interconnected linear zero-memory systems, *International Journal of System Science*, **18**, 649-664, 1987.
- [67] —, Identifiability analysis of interconnected zero-memory composite systems, *International Journal of System Science*, **19**, 1731-1749, 1988.
- [68] —, Applicability of least-squares to the parameter estimation of large-scale no-memory linear composite systems, *International Journal of System Science*, **20**, 2427-2449, 1989.
- [69] —, Identyfikacja sterowanych systemów o złożonej strukturze (in Polish), *Prace Naukowe Instytutu Cybernetyki Technicznej P.Wr. (Seria: Monografie)*, **22**, Wrocław, 1993.
- [70] —, Hammerstein system identification by the Haar multiresolution approximation, *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, **13**, 691-717, 1999.
- [71] —, W. GREBLICKI, Non-linearity recovering with the help of wavelets, *Proceedings of European Control Conference 1999*, [materiały wydane w postaci płyty CD], Karlsruhe, 1999.
- [72] —, P. ŚLIWIŃSKI, Non-linear system identification by wavelets, (referat przyjęty na:) *6th International Conference Methods and Models in Automation and Robotics, MMAR-2000*, 2000.
- [73] —, —, Non-linearity recovering by wavelets of compact support, (referat przyjęty na:) *International Conference on Signals and Electronic Systems, ICSES-2000*, 2000.
- [74] G. T. HEIDT, A. W. GALLI, Transient power quality problems analyzed using wavelets, *IEEE Transactions on Power Delivery*, **12**, 908-915, 1997.
- [75] I. W. HUNTER, M. J. KORENBERG, The identification of non-linear biological systems: Wiener and Hammerstein cascade models, *Biological Cybernetics*, **55**, 135-144, 1986.
- [76] A. IKONOMOPOULOS A. ENDOU, Wavelet application in-process monitoring, *Nuclear Technology*, **125**, 225-234, 1999.
- [77] —, —, Wavelet decomposition and radial basis function networks for system monitoring, *IEEE Transactions on Nuclear Science*, **45**, 2293-2301, 1998.
- [78] A. JANCZAK, J. KORBICZ, Neural networks models of Hammerstein systems and their application to fault detection and isolation, *Proceeding of IFAC World Congress*, **7e-013**, Beijing, Chiny, 1999.
- [79] I. M. JOHNSTONE Wavelet shrinkage for correlated data and inverse problems - Adaptivity results, *Statistica Sinica*, **9**, 51-83, 1999.
- [80] S. KELLY, M. KON, M. RAPHAEL, Pointwise convergence of wavelet expansions, *Bulletin of The American Mathematical Society*, **30**, 87-94, 1994.

- [81] A. KIELBASIŃSKI, H. SCHWETLICK, *Numeryczna algebra liniowa. Wprowadzenie do obliczeń zautomatyzowanych*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1994.
- [82] Y. KITADA, Identification of nonlinear structural dynamic systems using wavelets, *Journal of Engineering Mechanics-ASCE*, **124**, 1059-1066, 1998.
- [83] J. KORBICZ, A. OBUCHOWICZ, K. PATAN, Network of dynamic neurons in fault detection systems, *IEEE International Conference on System, Man and Cybernetics SMC'98*, 1862-1867, Hyatt La Jolla, San Diego, 1998.
- [84] K. A. KOSANOVICH, A. R. MOSER, M. J. PIOVOSO, Poisson wavelets applied to model identification, *Journal of Process Control*, **5**, 225-234, 1995.
- [85] H. KRIM, D. TUCKER, S. MALLAT, D. DONOHO, On denoising and best signal representation, *IEEE Transactions on Information Theory*, **45**, 2225-2238, 1999.
- [86] A. KRZYŻAK, Identification of discrete Hammerstein systems by the Fourier series regression estimate, *International Journal of System Science*, **20**, 1729-1744, 1989.
- [87] Z. Q. LANG, A nonparametric polynomial identification algorithm for the Hammerstein system, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **42**, 1435-1441, 1997.
- [88] R. LEITNER, *Zarys matematyki wyższej dla inżynierów*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1977.
- [89] I. J. LEONTARITIS, S. A. BILLINGS, Input-output parametric models for non-linear systems, *International Journal of Control*, **41**, 303-344, 1985.
- [90] —, Model selection and validation methods for non-linear systems. Input/output parametric models for non-linear systems, *International Journal of Control*, **45**, 311-341, 1987.
- [91] H. E. LIAO, W. S. SETHARES, Suboptimal identification of non-linear ARMA models using an orthogonality approach, *IEEE Transactions on Circuits and Systems I*, **42**, 14-22, 1995.
- [92] S. G. MALLAT, A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **11**, 674-693, 1989.
- [93] —, *A Wavelet Tour of Signal Processing*, Academic Press, San Diego, 1998.
- [94] —, S. ZHOUNG, Characterization of signals from multiscale edges, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **14**, 710-732, 1992.
- [95] K. MAŃCZAK, Z. NAHORSKI, *Komputerowa identyfikacja obiektów dynamicznych*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1983.
- [96] P. Z. MARMELIS, V. Z. MARMELIS, *Analysis of Physiological Systems. The White Noise Approach*, Plenum, New York, 1978.
- [97] T. MARWALA, Damage identification using committee of neural networks, *Journal of Engineering Mechanics-ASCE*, **126**, 43-50, 2000.

- [98] Y. MEYER, *Wavelets and Operators*, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- [99] —, *Wavelets: Algorithms and Applications*, SIAM, Philadelphia, 1993.
- [100] —, S. JAFFARD, R. D. RYAN, *Wavelets & Applications*, SIAM, Philadelphia, 2000.
- [101] J. H. MILLER, J. B. THOMAS, Detectors for discrete-time signals in non-gaussian noise, *IEEE Transactions on Information Theory*, **18**, 241-250, 1972.
- [102] D. MORLET, J. P. COUDER, P. TOUBOUL P. RUBEL, Wavelet analysis of high resolution ECGs in postinfarction patients – role of basic wavelet and of the analyzed lead, *International Journal of Biomedical Computing*, **39**, 311-325, 1995.
- [103] K. S. NARENDRA, P. G. GALLMAN, An iterative method for the identification of nonlinear systems using the Hammerstein model, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **11**, 546-550, 1966.
- [104] R. T. OGDEN, *Essential Wavelets For Statistical Applications and Data Analysis*, Birkhäuser, Boston, 1997.
- [105] K. PATAN, A. OBUCHOWICZ, A stochastic approach to training networks of dynamic neurons, *IV Konferencja Sieci Neuronowe i Ich Zastosowania*, 443-448, Zakopane, 1999.
- [106] Y. PATI, P. KRISHNAPRASAD, Rational wavelets in model reduction and system identification, *Proceedings of IEEE Conference on Decision and Control*, Lake Buena Vista, 3394-3399, 1994.
- [107] M. PAWLAK, On the series expansion approach to the identification of Hammerstein systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **36**, 763-767, 1991.
- [108] —, Z. HASIEWICZ, Nonlinear system identification by the Haar multiresolution analysis, *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, **45**, 945-961, 1998.
- [109] —, —, Non-parametric system identification of non-linear block-oriented systems by multi-scale expansions, *Proceedings of European Control Conference 1999*, [materiały wydane w postaci płyty CD], Karlsruhe, 1999.
- [110] L. PRASAD, S. S. IYENGAR, S. S. AYENGAR, *Wavelet Analysis with Application to Image Processing*, CRC Press, 2000.
- [111] W. H. PRESS, S. A. TEUKOLSKY, W. T. VETTERLING, B. P. FLANNERY, *Numerical Recipes in C. The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
- [112] E. RAFAJLOWICZ, Nonparametric orthogonal series estimators of regression: A class attaining the optimal convergence rate in L_2 , *Statistic & Probability Letters*, **5**, 219-224, 1987.
- [113] —, Nonparametric least squares estimation of a regression function, *Statistics*, **19**, 349-358, 1988.

- [114] —, *Algorytmy planowania eksperymentu z implementacjami w środowisku Mathematica*, Wydawnictwo PLJ, Warszawa, 1996.
- [115] —, Consistency of orthogonal series density estimators based on grouped observation. *IEEE Transactions on Information Theory*, **43**, 283-285, 1997.
- [116] —, M. PAWLAK, On function recovery by neural networks based on orthogonal expansions, *Nonlinear Analysis - Theory Methods & Applications*, **30**, 1343-1354, 1997.
- [117] J. C. RALSTON, A. M. ZOUBIR, B. BOASHASH, Identification of a class of nonlinear systems under stationary non-gaussian excitation, *IEEE Transactions on Signal Processing*, **45**, 719-735, 1997.
- [118] R. M. RAO, A. S. BOPARDIKAR, *Wavelet Transform. Introduction to Theory and Applications*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1998.
- [119] S. ROLEWICZ, *Analiza funkcjonalna i teoria sterowania*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1974.
- [120] W. SANDHAM, D. HAMILTON, A. FISHER, W. XU, M. CONWAY, Multiresolution wavelet decomposition of the seismocardiogram, *IEEE Transactions on Signal Processing*, **46**, 2541-2543, 1998.
- [121] S. SARDY, Minimax threshold for denoising complex signals with waveshrink, *IEEE Transactions on Signal Processing*, **48**, 1023-1028, 2000.
- [122] D. W. SCOTT, *Multivariate Density Estimation. Theory, Practice, and Visualization*, J. Willey & Sons, New York, 1992.
- [123] R. J. SERFLING, *Twierdzenia graniczne statystyki matematycznej*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1991.
- [124] J. SJOBERG, Q. H. ZHANG, L. LJUNG, A. BENVENISTE, B. DELYON, P. Y. GLORENEC, H. HJALMARSSON, A. JUDITSKY, Nonlinear black-box modeling in system identification - A unified review, Nonlinear black-box modeling in system identification - Mathematical Foundations, *Automatica*, **31**, 1691-1750, 1995.
- [125] S. SKOCZOWSKI, Identyfikacja i sterowanie przemysłowymi obiektami elektrotermicznymi, *XIII Krajowa Konferencja Automatyki*, **2**, 323-331, Opole, 1999.
- [126] Special Issue on Time-Frequency and Wavelet Analysis, *IEEE Engineering in Medicine & Biology Magazine*, **14**, 1995.
- [127] P. STOICA, T. SÖDERSTRÖM, *Identyfikacja systemów*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 1997.
- [128] C. J. STONE, Optimal rates of convergence for nonparametric regression, *Annals of Statistics*, **8**, 1348-1360, 1980.
- [129] —, Optimal global rates of convergence for nonparametric regression, *Annals of Statistics*, **10**, 1040-1053, 1982.

- [130] G. STRANG, Wavelets and dilation equations: A brief introduction, *SIAM Review*, **31**, 614-627, 1989.
- [131] —, Wavelet transforms vs Fourier transforms, *Bulletin of American Mathematical Society*, **28**, 288-305, 1993.
- [132] —, V. STRELA, Orthogonal multiwavelets with vanishing moments, *Optical Engineering*, **33**, 2104-2107, 1994.
- [133] V. STRELA, P. N. HELLER, G. STRANG, P. TOPIWALA, C. HEIL, The application of multiwavelet filterbanks to image-processing, *IEEE Transactions on Image Processing*, **8**, 548-563, 1999.
- [134] N. SURESHBABU, J. A. FARRELL, Wavelet based system identification for non-linear control, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **44**, 412-417, 1999.
- [135] P. ŚLIWIŃSKI, Experimental investigation of wavelet neural network, *III Konferencja Sieci Neuronowe i Ich Zastosowania*, 167-172, Kule, 1997.
- [136] —, Parametric identification of non-linear blocky function by using wavelets, *XXI Krajowa Konferencja Teoria Obwodów i Układy Elektroniczne*, **1**, 93-98, Kiekrz, 1998.
- [137] —, Parametric identification of non-linear systems using Haar multiresolution analysis, *Raport Instytutu Cybernetyki Technicznej Politechniki Wrocławskiej, PRE-86/98*, Wrocław, 1998.
- [138] —, Self-organizing wavelet neural network - the data driven approach, *IV Konferencja Sieci Neuronowe i Ich Zastosowania*, 153-158, Zakopane, 1999.
- [139] —, Fast discrete wavelet transform with random x -variables, *XXII Krajowa Konferencja Teoria Obwodów i Układy Elektroniczne*, 467-472, **2**, Stare Jabłonki, 1999.
- [140] —, Round-off error in wavelet computing – Haar approximation model, *Warsztaty naukowe „Przetwarzanie sygnałów 99”*, 31-36, Poznań, 1999.
- [141] —, Z. HASIEWICZ, Parametryczna identyfikacja złożonych systemów nieliniowych przy zastosowaniu falek, *XIII Krajowa Konferencja Automatyki*, **1**, 241-246, Opole, 1999.
- [142] —, Fast wavelet algorithm for non-linear system identification, (referat przyjęty na:) *6th International Conference Methods and Models in Automation and Robotics, MMAR-2000*, 2000.
- [143] R. TADEUSIEWICZ, *Problemy biocybernetyki*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 1994.
- [144] P. E. TIKKANEN, Nonlinear wavelet and wavelet packet denoising of electrocardiogram signal, *Biological Cybernetics*, **80**, 259-267, 1999.
- [145] P. N. TOPIWALA, *Wavelet Image and Video Compression*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 2000.

- [146] M. UNSER, A. ALDROUBI, A review of wavelets in biomedical applications, *Proceedings of the IEEE*, **84**, 626-638, 1996.
- [147] D. C. T. WAI, Y. B. XIA, A novel technique for high impedance fault identification, *IEEE Transactions on Power Delivery*, **13**, 738-744, 1998.
- [148] J. S. WALKER, *A Primer on Wavelets and their Scientific Applications*, CRC Press, 1999.
- [149] G. G. WALTER, *Wavelets and Other Orthogonal Systems with Applications*, CRC Press, 1994.
- [150] Y. Z. WANG, Function estimation via wavelet shrinkage for long-memory data, *Annals of Statistics*, **24**, 466-484, 1996.
- [151] S. WĘGRZYN, *Podstawy automatyki*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1974.
- [152] P. WOJTASZCZYK, *A Mathematical Introduction to Wavelets*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [153] E. WONG, *Procesy stochastyczne w teorii informacji i układach dynamicznych*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1976.
- [154] X. S. ZHANG, Y. S. ZHU, N. V. THAKOR, Z. M. WANG, Z. Z. WANG, Modeling the relationship between concurrent epicardial action-potentials and bipolar electrograms, *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, **46**, 365-376, 1999.
- [155] L. ZI-QIANG, Controller design oriented model identification method for Hammerstein system, *Automatica*, **29**, 767-771, 1993.



Podziękowania

Pragnę serdecznie podziękować Panu Profesorowi Zygmuntowi Hasiewiczowi za opiekę naukową i wsparcie w trakcie studiów doktoranckich i podczas pisanie tej pracy. Dziękuję również Pracownikom Zakładu Sterowania i Optymalizacji w Instytucie Cybernetyki Technicznej za cenne dyskusje i uwagi.

mgr inż. Przemysław Śliwiński

Instytut Cybernetyki Technicznej
Politechniki Wrocławskiej
ul. Janiszewskiego 11/17
50-372 Wrocław

Niniejszy raport otrzymują:

1.	OINT	1 egz.
2.	Biblioteka Główna PWr.	1 egz.
3.	Z-ca Dyrektora Instytutu	1 egz.
4.	Promotor	1 egz.
5.	Recenzenci	2 egz.
6.	Autor	9 egz.
Razem:		15 egz.

Raport wpłynął do Redakcji ICT
w czerwcu 2000 r.