

ROZPRAWA DOKTORSKA

Odwrócone sprężyste wahadło jako
matematyczny model biegu

autor

MGR INŻ. ZOFIA WRÓBLEWSKA

Promotor:

dr hab. inż. Łukasz Płociniczak, prof. PWr

Promotor pomocniczy:

dr hab. inż. Piotr Kowalczyk, prof. PWr

POLITECHNIKA WROCŁAWSKA

Wrocław, Kwiecień 2024

PODZIĘKOWANIA

*Moje zainteresowanie modelem ruchu sięga czasów gimnazjalnych, kiedy to przeczytałam w raporcie Jacka Hugo - Badera „Dzienniki kołymskie” o jakuckim odkrywcy Niurgunie, który opracował nowy sposób chodzenia, oszczędny energetycznie i bez „kolebania się”. Mając nadzieję, że przedstawione w niniejszej rozprawie badania, w znaczący sposób poszerzą obserwacje Niurguna i pozwolą w satysfakcjonujący sposób wyjaśnić ten złożony mechanizm jakim jest jedna z najważniejszych umiejętności motorycznych człowieka, czyli bieganie, chciałabym podziękować Promotorom za to, że pilnowali, abym zawsze poruszała się w dobrym kierunku.
Zatem biegnij Zosia biegnij!*

SPIS TREŚCI

SUMMARY (STRESZCZENIE PO ANGIELSKU)	ix
1 WSTĘP	1
Oznaczenia	4
2 ODWRÓCONE SPRĘŻYSTE WAHADŁO	6
2.1 Fizyczny opis modelu	7
2.1.1 Faza podporu i faza lotu dla ruchu w jednym wymiarze	7
2.1.2 Faza podporu i faza lotu dla ruchu w dwóch wymiarach	9
2.2 Matematyczny opis modelu dla zmiennych bezwymiarowych	12
3 ROZWIĄZANIA PRZYBLIŻONE	15
3.1 Teoria zaburzeń	15
3.1.1 Rozwinięcia formalne	15
3.1.2 Błędy przybliżeń	20
3.2 Przybliżenia maksymalnego ugięcia nogi i przyrostu kąta	27
3.3 Przybliżenie sztywności sprężyny	31
4 ISTNIENIE I STABILNOŚĆ PUNKTU STAŁEGO	39
4.1 Analityczne odwzorowanie powrotu od wierzchołka do wierzchołka	40
4.1.1 Zasada zachowania energii i momentu pędu	40
4.1.2 Analityczne odwzorowanie wierzchołków	42
4.2 Wyrównywanie energii	43
4.3 Istnienie punktu stałego	50
4.3.1 Rozwiązania symetryczne	50
4.3.2 Rozwiązania asymetryczne	53
4.4 Stabilność punktu stałego dla rozwiązań symetrycznych	57
4.4.1 Obszary stabilności punktu stałego dla szczególnego przypadku	60
4.4.2 Obszary stabilności punktu stałego dla ogólnego przypadku	63
4.5 Transkrytyczna bifurkacja w odwzorowaniu wierzchołków	64
5 SZTYWNOŚĆ I MINIMALIZACJA ENERGII NA BAZIE EKSPERYMENTU	69
5.1 Przebieg badania	69
5.2 Zbieranie danych	70
5.3 Wyznaczanie parametrów	71
5.4 Prezentacja wyników	73
5.5 Wnioski	75
6 PODSUMOWANIE	77
BIBLIOGRAFIA	79

SPIS TABEL

1.1	Oznaczenia zmiennych wymiarowych.	4
1.2	Oznaczenia zmiennych bezwymiarowych.	5
2.1	Typowe wartości bezwymiarowych fizycznych parametrów modelu <i>SLIP</i> pochodzące z eksperymentu opisanego w Rozdziale 5.	14
3.1	Typowe wartości bezwymiarowych i wymiarowych parametrów fizycznych dla biegu. Przedstawione dane pochodzą z eksperymentu opisanego w Rozdziale 5. Dodatkowe parametry obejmują: długość nogi $l_0 = 1,03$ m, masa ciała $m = 69$ kg i przyspieszenie grawitacyjne $g = 9,81$ m/s ²	38
4.1	Wartości parametrów biegu i wyznaczone dla nich punkty stałe z Przykładu 1, które ilustruje Rysunek 4.5.	57
5.1	Wartości średnie dla zmierzonych parametrów: α , β , u_{TD} , v_{TD} , Δl_{max} , f_{max} , t_c , t_a , oraz częstotliwości kroków, w zależności od prędkości bieżni. Prędkość pozioma u_{TD} to suma wektorów prędkości bieżni i prędkości środka masy <i>CoM</i> w momencie lądowania. Wszystkie wartości parametrów są wymiarowe.	72
5.2	Średnia wartość energii układu E_s (patrz równanie (4.2)) oraz minimalna energia wymagana do stabilnego biegu E_{min} (patrz równanie (5.2)), w zależności od prędkości bieżni. Dodatkowo, dla każdej kolumny zostało wyznaczone $\pm SD$, czyli plus lub minus odchylenie standardowe dla próby 105 badanych.	75

SPIS RYSUNKÓW

2.1	Ogólny schemat modelu biegania z podziałem na fazę podporu i fazę lotu.	6
2.2	Schemat jednowymiarowego modelu, który jest punktową masą przyłączoną do nieważkiej sprężyny. Okres skoku jest podzielony na dwie fazy: fazę kontaktu z podłożem czyli podporu (z czasem t_c) oraz fazę powietrzną inaczej lotu (z czasem t_a). W czasie podporu występuje ruch sinusoidalny, po którym następuje faza lotu parabolicznego. Z powodu liniowej sztywności sprężyny krzywa siły również jest sinusoidalna, z ciężarem układu jako wartością równowagi. Długość fazy lotu określa pionowa prędkość lądowania lub odbicia oznaczana przez v_{TD} oraz v_{TO} , odpowiednio. Maksymalna prędkość jest osiągnięta po lądowaniu, gdy siła jest równa ciężarowi ciała.	8
2.3	Schemat modelu <i>SLIP</i> . (x, y) - współrzędne kartezjańskie punktu masy, (l, θ) - współrzędne biegunowe punktu masy, gdzie $l = \sqrt{x^2 + y^2}$ jest promieniem, podczas gdy θ jest kątem pozycji punktu masy. Ponadto zakładamy, że podczas momentu lądowania (TD) oraz odbicia (TO), wartość kąta θ wynosi odpowiednio: $\theta_{TD} = -\alpha$ oraz $\theta_{TO} = \beta$, gdzie $\alpha, \beta \in (0, \pi/2)$	9
3.1	Błąd bezwzględny przybliżeń (3.14) i (3.16) dla odpowiadających im rozwiązań układu (3.3) przedstawiony na skali log-log. Linia $y = K^{-3/2}$ (po zlogarytmowaniu linia prosta) jest nałożona dla porównania z rzędem zbieżności. Przyjęte parametry biegu: $\alpha = 0,4$, $U_{TD} = 1$, $V_{TD} = 0,1$ oraz $\tau^+ \in [0, \pi]$	27
3.2	Schemat modelu <i>SLIP</i> . (X, Y) - bezwymiarowe współrzędne kartezjańskie oraz (L, θ) - bezwymiarowe współrzędne biegunowe, gdzie $L = \sqrt{X^2 + Y^2}$ jest promieniem podczas gdy θ jest kątem pozycji punktu masy. W obu momentach lądowania i odbicia, $L = 1$. Ponadto, na schemacie, zaznaczyliśmy maksymalne ugięcie sprężyny ΔL_{max} oraz przyrost kąta $\Delta\theta$	28
3.3	Aproksymacje promienia L i kąta θ dane wzorami (3.78) oraz (3.79) podczas fazy kontaktu. Przyjęte parametry biegu: kąt ataku $\alpha = 0,1$, prędkości pozioma i pionowa podczas lądowania $U_{TD} = 1$, $V_{TD} = 0,1$ oraz sztywność sprężyny $K = 15$	29
3.4	Ogólne rozwiązanie dla ruchu promienia $L(T)$ podczas podporu opisujące oscylację sinusoidalną wokół $1 + A(\epsilon)$ z amplitudą $B(\epsilon)$ i częstotliwością $\epsilon^{-1}\tilde{\omega}(\epsilon)$. Przyjęte parametry biegu: kąt ataku, prędkość pionowa podczas lądowania oraz sztywność sprężyny takie same jak na Rysunku 3.3, natomiast prędkość pozioma $U_{TD} = 1,2$, co daje dodatkowe przesunięcie względem kontaktu z podłożem, gdzie $L(T) = 1$. Rozwiązanie zachodzi tylko dla $L(T) \leq 1$	30

- 3.5 Przypadek symetryczny $\alpha = \beta$. Po lewej: porównanie numerycznie wyznaczonej wartości K^* z przybliżeniami sztywności: $\tilde{K}_1$ dane wzorem (3.107) i $\tilde{K}_2$ dane wzorem (3.92) dla zmieniającego się γ od 12° do 30° . Po prawej: stosunek K^* do $\tilde{K}_1$ i $\tilde{K}_2$ dla zmieniającego się γ od 1° do 20° . Przyjęte parametry: $\gamma = \alpha + \beta = 2\alpha$ oraz $U_{TD} = 1$, $V_{TD} = 0,1$ 36
- 3.6 Przypadek asymetryczny $\alpha = 3\beta$. Po lewej: porównanie numerycznie wyznaczonej wartości K^* z przybliżeniami sztywności: $\tilde{K}_1$ dane wzorem (3.107) i $\tilde{K}_2$ dane wzorem (3.92) dla zmieniającego się γ od 12° do 30° . Po prawej: stosunek K^* do $\tilde{K}_1$ i $\tilde{K}_2$ dla zmieniającego się γ od 1° do 20° . Dodatkowo linia ciągła $y = 1$ jest nałożona dla porównania dokładności przybliżeń. Przyjęte parametry: $\gamma = \alpha + \beta = 4\alpha$ oraz $U_{TD} = 1$, $V_{TD} = 0,1$ 37
- 4.1 Schemat modelu sprężynowego dla biegania. Między dwiema kolejnymi fazami lotu w i -tej iteracji, $\Delta\theta_i$ jest kątem przesunięcia podczas fazy kontaktu z podłożem dla którego wysokość wierzchołka Y_i przekształca się w Y_{i+1} 39
- 4.2 Trajektoria składowej Y przełączanego modelu (4.33) – (4.43). Asymptotyczne rozwiązanie dla parametrów: $K = 34,77$, $E_s = 1,55$, $\xi = 0,5$ oraz $\alpha = \pi/12$ 48
- 4.3 Funkcja odwzorowania wierzchołków $Y_{i+1}(Y_i)$ dana wzorem (4.14) dla zestawu parametrów: $\alpha = \pi/9$, $E_s = 1,48$ oraz $K = K_2(\alpha, E_s, \sqrt{\cos \alpha}) = 18,3575$. Dwa miejsca przecięcia z osią $Y_{i+1} = Y_i$ to punkty stałe dla prędkości kątowych $\theta_{d(1)}^* = \sqrt{\cos \alpha} = 0,9694$ ($Y^* = 0,9399$) oraz $\theta_{d(2)}^* = 0,9155$ ($Y^* = 0,9509$), odpowiednio. 52
- 4.4 Względny błąd aproksymacji kąta β dany wzorem (4.67) dla zmieniającego się kąta α podczas lądowania od 3° do 18° . Przyjęto $U_{TD} = 1$ oraz $V_{TD} = 0,2$ i trzy różne wartości sztywności K . Poziome linie oznaczają pięcioprocentowy oraz dziesięcioprocentowy względny błąd. 55
- 4.5 Po lewej stronie pięć odwzorowań wierzchołków $Y_{i+1}(Y_i)$ danych wzorem (4.68) dla różnych energii E_s i zestawu parametrów z Przykładu 1: $\alpha = 2\pi/45$ (8°) i $K = 70$. Punkty stałe znajdują się na przecięciu prostej $Y_{i+1} = Y_i$ (kolor czarny). Po prawej funkcja (4.68) zaznaczona kolorem niebieskim z dwoma widocznymi rozwiązaniami: pierwszym asymetrycznym ($\beta_1^* = 24,99^\circ$) i drugim symetrycznym ($\beta_2^* = 8^\circ$) dla energii układu $E_s = 2,2$ i sztywności $K = 70$ 55
- 4.6 Na drugim planie funkcja odwzorowania wierzchołków $f(Y_i) = Y_{i+1}(Y_i)$ dana wzorem (4.14) dla zbioru parametrów jak na Rysunku 4.3: $\alpha = \pi/9$, $E_s = 1,48$ oraz $K = K_2(\alpha, E_s, \sqrt{\cos \alpha}) = 18,3575$. Miejsce przecięcia z osią $Y_{i+1} = Y_i$ to stabilny punkt stały (czarne kółko) oraz niestabilny punkt stały (puste kółko). Na pierwszym planie widać dokładniej stabilny punkt stały $Y^* = 0,9399$, dla którego wartość własna wynosi $f'(Y^*) = -0,9951$ 61
- 4.7 Zależności parametrów dla rozwiązań punktu stałego z $\theta_d^* = \sqrt{\cos \alpha}$. Obszary stabilności: $E_s(\alpha)$ (po lewej) i $K(\alpha)$ (po prawej) przewidywane poprzez przybliżenia analityczne (4.89) i (4.90) dla różnych kątów ataku α od $5^\circ (= \pi/36)$ do $30^\circ (= \pi/6)$. Obszar stabilnych punktów stałych, o wartościach własnych $-1 < f'(Y^*) < 1$, jest oznaczony na szaro. Obszar niestabilnych punktów stałych, o wartościach własnych $f'(Y^*) > 1$, jest oznaczony na niebiesko. f' to oznaczenie wartości własnej używane w legendzie. 62

4.8	Po lewej obszar stabilności prędkości kątowej $\theta_d^*(E_s)$ z $\alpha = \pi/9$ dla zmieniającej się energii E_s od 1,45 do 3. Linia pozioma pokazuje przypadek $\theta_d^* = \sqrt{\cos \alpha} = 0,9694$. Po prawej obszar stabilności prędkości kątowej $\theta_d^*(\alpha)$ przy $E_s = 1,8$ dla różnych kątów natarcia α od $10^\circ (= \pi/18)$ do $30^\circ (= \pi/6)$. Górna i dolna granica to odpowiednio $(\theta_d^*)^+$ i $(\theta_d^*)^-$. Obszar stabilnych punktów stałych o wartościach własnych $-1 < f'(Y^*) < 1$ zaznaczony jest kolorem szarym. Na niebiesko zaznaczono obszar niestabilnych punktów stałych o wartościach własnych $f'(Y^*) > 1$. f' to oznaczenie wartości własnej używane w legendzie.	62
4.9	Po lewej obszar stabilności energii $E_s(\alpha)$, natomiast po prawej obszar stabilności bezwymiarowej sztywności $K(\alpha, E_s)$, określonej przez (3.92) i (3.93), gdzie $\theta_d^* = 1,5$ dla różnych kątów natarcia α od $10^\circ (= \pi/18)$ do $30^\circ (= \pi/6)$. Górna i dolna granica po lewej stronie to odpowiednio E_s^+ i E_s^- oraz $K^+ = K(\alpha, E_s^+)$ i $K^- = K(\alpha, E_s^-)$ po prawej stronie. Obszar stabilnych punktów stałych o wartościach własnych $-1 < f'(Y^*) < 1$ zaznaczony jest kolorem szarym. Na niebiesko zaznaczono obszar niestabilnych punktów stałych o wartościach własnych $f'(Y^*) > 1$. f' to oznaczenie wartości własnej używane w legendzie.	64
4.10	Jedno-parametryczny diagram bifurkacji dla funkcji (4.14). Punktem bifurkacji transkrytycznej jest punkt stały $Y^* = 0,9754$, gdy energia $E_s = E_s^+ = 1,550$. Ustalono kąt ataku α na $\alpha = \pi/12$, podczas gdy sztywność $K = K_2$ jest wyznaczona z (3.92), dla $\beta = \alpha$, i rośnie od 34,77 dla $E_s = 1,51$ do 38,73 dla $E_s = 1,58$	65
4.11	Numeryczna ilustracja transkrytycznej bifurkacji występującej pod wpływem zmiany parametru bifurkacji E_s w odwzorowaniu (4.14). Parametry jak na Rysunku 4.10. Kąt natarcia α jest ustawiony na $\alpha = \pi/12$, podczas gdy sztywność $K = K_2$ uzyskana z (3.92), dla $\beta = \alpha$, wynosi 35,07 dla $E_s = 1,515$, 36,75 dla $E_s = E_s^+ = 1,550$ oraz 37,94 dla $E_s = 1,575$	66
5.1	(a) Siła reakcji podłoża z zaznaczonymi pikami oznaczonymi kolorem czerwonym. (b) Przefiltrowane dane akcelerometrów w osi pionowej i poziomej w odniesieniu do lokalnego układu współrzędnych urządzenia z zaznaczonymi, czerwonym kolorem, momentami lądowania.	71
5.2	Kąty lądowania α i odbicia β oraz minimalna odległość środka masy CoM od podłoża.	71
5.3	Porównanie średnich wartości aproksymacji $\widetilde{\Delta L}_{max}$, $\widetilde{T}_c$ i $\widetilde{\Delta \theta}$, wyznaczonych wzorami (3.83), (3.80) i (3.86), odpowiednio, ze średnimi wartościami danych eksperymentalnych dla tych parametrów biegu (po normalizacji). Średnie zostały obliczone dla próby $n = 105$ biorących udział w badaniu biegaczy.	73
5.4	Porównanie rzeczywistej sztywności nogi, oznaczonej jako K_{real} , oraz obu przybliżeń $\widetilde{K}_1$ i $\widetilde{K}_2$, obliczonych z zastosowaniem wzorów (3.92) i (3.107) odpowiednio, dla czterech prędkości biegu (plus i minus odchylenia standardowego SD próby 105 badanych).	74

STRESZCZENIE

Obiektem badań niniejszego doktoratu jest model masy sprężynowej dla biegania. Można go uznać za koncepcyjny gdyż, stanowi uproszczenie samego ruchu nogi podporowej. Składa się, w fazie kontaktu z ziemią (inaczej faza podparcia), ze sprężystego odwróconego wahadła (*ang. spring-loaded inverted pendulum - SLIP*), a następnie przechodzi do fazy lotu, która jest znacznie mniej skomplikowana. Fizyczny opis ruchu podczas fazy podparcia pokrywa się z matematycznym, który można wyrazić za pomocą zmiennych bezwymiarowych w następującej postaci:

$$\begin{cases} L'' = L(\theta')^2 + K(1 - L) - \cos \theta, \\ (L^2\theta')' = L \sin \theta. \end{cases}$$

W kontekście omawianego modelu, L i θ reprezentują, odpowiednio, długość nogi oraz kąt między nogą a osią pionową. Natomiast apostrof oznacza tu pochodną $L(T)$ oraz $\theta(T)$ po bezwymiarowym czasie T .

Ponieważ, nie można rozwiązać powyższego układu analitycznie, wyprowadzamy rozwiązania przybliżone. W pierwszej kolejności ustalamy warunki początkowe, czyli lądowanie z kątem ataku wynoszącym $-\alpha$ oraz długością nogi równą 1. Ponadto, w momencie lądowania zakładamy również wartości prędkości kątowej θ_d i radialnej $-L_d$. W celu wykorzystania teorii zaburzeń, przechodzimy na szybką skalę czasową. Przyjmujemy $\tau^+(T) = \epsilon^{-1}\tilde{\omega}(\epsilon)T$, gdzie $\tilde{\omega}(\epsilon) = 1 - \theta_d^2/2\epsilon^2$ jest częstotliwością masy na sprężynie, a w rezultacie z rozwinięć w szereg Poincarégo-Lindstedta uzyskujemy przybliżenia dla L oraz θ w momencie lądowania. Błędy tych przybliżeń, w szybkiej skali czasowej, są rzędu $O(\epsilon^3)$ i maleją dla dużych wartości sztywności nogi K , gdzie $\epsilon = 1/\sqrt{K}$.

Następnie, korzystając z informacji, że noga, podczas fazy podporu musi wrócić do długości 1 uzyskujemy przybliżenia czasu kontaktu stopy z podłożem, maksymalnego ugięcia nogi oraz przyrostu kąta w trakcie podparcia. W końcu, rozwiązując zagadnienie brzegowe, w którym ustalamy dodatkowe ograniczenia holonomiczne dotyczące kąta odbicia, otrzymujemy analityczne przybliżenia sztywności nogi pierwszego rzędu (oznaczone przez $\tilde{K}_1$) i drugiego rzędu (oznaczane przez $\tilde{K}_2$) względem ϵ . Przybliżenie $\tilde{K}_2$ funkcjonuje dla pojedynczej fazy podporu, podczas gdy $\tilde{K}_1$ jest aproksymacją o tym samym rzędzie błędów co asymptotyczne rozwiązanie zagadnienia brzegowego. Błąd obu aproksymacji jest porównywany z numerycznie określoną za pomocą metody strzelania, dokładną wartością sztywności nogi. Przybliżenie $\tilde{K}_2$ jest dokładniejsze, z błędem dwukrotnie mniejszym, niż $\tilde{K}_1$, dla wartości kątów ataku występujących w rzeczywistym biegu. Obie aproksymacje sprawdzają się dobrze dla małych wartości kąta ataku α .

Wykorzystując założenia, takie jak zachowanie energii i pędu, oraz odpowiednio łącząc asymptotyczne rozwiązania dla obu faz, można zredukować dynamikę do jednowymiarowego odwzorowania powrotu kolejnych wysokości wierzchołków faz lotu Y_i :

$$f(Y_i) = \cos(\alpha - \Delta\theta_i) + [\sin(2\alpha - \Delta\theta_i)\sqrt{E_s - Y_i} + \cos(2\alpha - \Delta\theta_i)\sqrt{Y_i - \cos\alpha}]^2,$$

gdzie $\Delta\theta_i$ jest przybliżeniem przyrostu kąta podczas fazy podporu w i -tej iteracji, kiedy to wysokość wierzchołka Y_i przekształca się w Y_{i+1} . Aby jednowymiarowe odwzorowanie powrotu $f(Y_i) = Y_{i+1}(Y_i)$ miało punkt stały Y^* , parametry modelu muszą spełniać warunek na minimalną energię modelu. Ponadto okazuje się, że punkty stałe istnieją tylko dla symetrycznych rozwiązań. Jednakże, w przypadku asymetrii, punkty te występują tylko wtedy, gdy kąty odbicia są duże i przekraczają zakres stosowalności modelu.

Naturalnym kierunkiem dalszych badań jest analiza stabilności punktów stałych dla symetrycznych faz podporu. Zbiory parametrów, dla których spełnione są warunki stabilności, pochodzą z rozwiązania nierówności

$$|f'(Y_i)|_{Y_i=Y^*} < 1,$$

co jest wyrażone jako ograniczenia na pochodną przyrostu kąta $\Delta\theta_i$ w punkcie stałym Y^* . Zilustrujemy graficznie zbiory parametrów, które spełniają warunki stabilności, co będzie ważnym dopełnieniem badania modelu biegania.

Ponieważ tak skonstruowany model wykazuje zarówno stabilne, jak i niestabilne stany, możliwe jest przeprowadzenie analizy bifurkacji. W pracy prezentujemy numeryczny i analityczny dowód występowania bifurkacji transkrytycznej we wcześniej utworzonym odwzorowaniu. Oznacza to, że badamy warunki na pierwszą i drugą pochodną w hiperbolicznym punkcie stałym, które gwarantują, że przy przejściu przez ten punkt powstają dwie gałęzie stabilnych i niestabilnych punktów stałych.

Modelowanie matematyczne jest ważnym aspektem biomechaniki. Dlatego na koniec pracy stosujemy również podejście eksperymentalne. Na podstawie zebranych danych obliczamy oba przybliżenia sztywności nogi $\widetilde{K}_1$ oraz $\widetilde{K}_2$ i porównujemy je ze sztywnością obliczoną bezpośrednio jako stosunek odkształcenia sprężyny do siły reakcji podłoża. Po zweryfikowaniu zdolności modelu do szacowania rzeczywistych wartości, przechodzimy do badania energetyki biegu. Porównujemy energię generowaną przez badanego z minimalną energią wymaganą do stabilnego biegu, wyznaczoną z modelu. Pozwala to na interesujący wniosek, że człowiek dąży do osiągnięcia stabilnego biegu przy minimalnym wydatku energii.

1 WSTĘP

Gdybyśmy nagle, z jakiejś przyczyny, musieli „uciekać”, najprawdopodobniej zaczęlibyśmy biec. Choć w dzisiejszych czasach coraz rzadziej korzystamy z tej umiejętności, przyzwyczajając nasze ciała raczej do pozycji siedzącej, bieganie nadal pozostaje najbardziej intuicyjnym sposobem szybkiego przemieszczania się. Jest to pierwotna forma ruchu, towarzysząca człowiekowi od zawsze. Wydaje się, że nic w tym niezwykłego. Jednak ten sposób poruszania się wymaga skomplikowanej i precyzyjnej współpracy układów nerwowego, motorycznego i mięśniowego (por. [20]). Z drugiej strony, trudno nie zgodzić się z faktem, że bieganie jest prawdopodobnie najprostszym i najbardziej naturalnym sportem z grona dyscyplin wytrzymałościowych (por. [1]) i dlatego stanowi też podstawę wielu innych dyscyplin sportowych.

Obserwując jak wszystkie układy naszego ciała muszą współpracować, abyśmy mogli szybciej i dłużej biec, można odnieść wrażenie, że jesteśmy do tego stworzeni. Przewyższamy tym samym wszystkie maszyny - roboty, które do tej pory stworzył człowiek. Oprócz samej fascynacji, swista technologiczna przewaga przyrody przyciąga zainteresowanie wielu naukowców, którzy na początku intensywnie badali jak różne zwierzęta lądowe poruszają się na nogach. Tym tematem od strony biologicznej zajął się już Arystoteles pisząc jeden ze swoich najważniejszych tekstów: „De Motu Animalium”, czyli „Ruch zwierząt” (patrz [51]). Natomiast pierwsze analizy biomechaniczne przeprowadził włoski fizjolog i matematyk Giovanni Borelli już w XVII wieku (patrz [40]). Współcześni naukowcy wciąż zajmują się ruchem. Wato zauważyć, że aktualny stan wiedzy został zebrany przez Holmesa, Fulla, Koditscheka i Guckenheimera w obszernym i przeglądowym artykule [36].

Okazuje się, że pomimo intensywnych badań, złożoność układów biologicznych uniemożliwia pełne zrozumienie mechaniki poruszania się. Korzystając z pewnych uproszczeń i wprowadzając odpowiednie założenia, można jednak podejmować próby modelowania ruchu. W konsekwencji opracowane modele mogą dalej służyć jako narzędzie do badań oraz opisu ruchu, ale wymaga to świadomości ich ograniczeń.

W tej rozprawie zajmiemy się jednym z modeli wykorzystywanym do opisu biegu człowieka. Skupia się on głównie na fazie podporowej (*ang. stance phase*), w trakcie której stopa ma kontakt z podłożem. Jest ona w pewnym sensie ważniejsza, gdyż to co dzieje się z ciałem podczas lotu jest skutkiem tego z jaką siłą zadziałyśmy na ziemię podczas odbicia. Warto zwrócić uwagę, że występowanie fazy lotu (*ang. flight phase*) jest elementem odróżniającym bieg od chodu. Maszerując, cały czas, jedna ze stóp dotyka podłoża, a chcąc przyspieszać musimy w pewnym momencie zmienić mechanikę poruszania zaczynając się odbijać.

Cykliczne lądowania i odbicia pozwalają biegnącemu człowiekowi wykorzystać elastyczność swoich tkanek, co upodabnia ich działanie do sprężyny. Chcąc uprościć proces biegu można rozważać układ szkieletowy mechanicznie, zakładając, że zachowuje się on jak punkt masy odbijający się na nieważkiej sprężynie. Podczas fazy podporu będzie on stanowił odwrócone sprężyste

wahadło. Taki model biegu znany jest w literaturze jako *SLIP* (*ang. spring-loaded inverted pendulum*). Został on wprowadzony już w roku 1989 przez Blickhana [7], a rok później dokładniej zbadany przez McMahon i Chenga [41]. Stworzenie modelu *SLIP* motywowane było obserwacją, że energia kinetyczna i potencjalna odebrana z ciała podczas pierwszej połowy fazy kontaktu z podłożem, jest chwilowo magazynowana jako energia odkształcenia elastycznego, a następnie uwolniona podczas odbicia (patrz [12]). Mechanizm przechowywania energii sprężystej w tkankach, głównie w powięziach i ścięgnach, kończyn dolnych (*ang. stretch-shortening cycle*) został szeroko zbadany i później zidentyfikowany jako jeden z głównych czynników wpływających na koszt energetyczny biegu (por. [17, 34]).

Model *SLIP* znalazł zastosowanie nie tylko w analizie energetycznej, ale także w opisie i badaniu mechaniki biegu. Wielu badaczy skupiło się na różnych aspektach tego tematu, takich jak: dostosowanie do zmian prędkości (por. [8, 22, 33]), częstotliwości kroku (por. [23]) oraz adaptacji do zróżnicowanej nawierzchni (patrz na przykład [26]). Natomiast w kontekście sportu, przeprowadzono analizę wpływu zmęczenia (patrz [21]), zarówno podczas sprintów (por. [29]) jak i ultramaratonów (por. [49]). Następnie porównano i prognozowano parametry modelu (patrz [2, 10]), analizowano ekonomię biegu (por. [39, 43]) oraz szukano zastosowań treningowych (np. [46]) i oceny osiągnięć sportowych (np. [47]). Warto również podkreślić, że innym ważnym zastosowaniem modelu *SLIP* dla poruszania się człowieka jest ortopedia. Taki model znajduje zastosowanie na przykład w konstrukcji protez czy elastycznych egzoskieletów (por. [25, 37]).

Jednym z głównych parametrów mechanicznych tego modelu jest sztywność sprężyny. Charakteryzuje ona elastyczne zachowanie, nie tyle samej nogi, co całego ciała człowieka zredukowanego do masy punktowej. Dokładniej, sztywność jest określana przez zależność między odkształceniem sprężyny a działającą na nią siłą. Praktyczne zastosowanie sztywności nogi pojawia się w wielu publikacjach, takich jak [2, 9, 21, 23, 41, 46], ale jest ona badana również pod kątem teoretycznym (por. [38, 54, 58, 60]).

Chociaż model *SLIP* jest stosunkowo prosty, to nie posiada rozwiązania analitycznego. Dlatego też, w celu badania jego właściwości, zazwyczaj używa się ilościowej analizy układów dynamicznych lub metod numerycznych. Zatem aby uzyskać większe zrozumienie modelu, można wyznaczyć przybliżone rozwiązania analityczne, które następnie pozwolą na przykład na badanie stabilności trajektorii. Zostało to przedstawione w pracy Geyera, Seifarth i Blickhana [28] oraz kontynuowane przez Wróblewską, Kowalczyka i Płociniczaka [60]. Co więcej, jawna zależność parametrów od stabilnych rozwiązań modelu ukazuje interesującą strukturę bifurkacyjną (por. [42, 60, 62]).

W niniejszej rozprawie doktorskiej koncepcyjnie przeanalizujemy model sprężysto-masowy biegania. Praca zorganizowana jest w następujący sposób. W rozdziale drugim, sformułujemy model, rozpoczynając od prostszego przypadku czyli skoku w płaszczyźnie pionowej. Przedstawimy zarówno fizyczny jak i matematyczny opis modelu. Ponadto zapiszemy równania ruchu także dla zmiennych bezwymiarowych, co pozwoli ustalić względne rozmiary parametrów biegu i pomoże w dalszej analizie.

W kolejnym rozdziale (trzecim) wyprowadzimy przybliżone rozwiązania układu równań ruchu dla fazy podporu przy założeniu warunków początkowych zależnych od ustalonych parametrów biegu, takich jak kąta natarcia inaczej nazywanym też kątem ataku, oraz poziomej i pionowej prędkości lądowania. Przeprowadzimy analizę asymptotyczną z wykorzystaniem metody Poincarégo - Lindstedta dla dużych wartości sztywności sprężyny. Następnie pokażemy dowody dotyczące

rzędu przybliżeń, które umożliwią oszacowanie błędów. Ponadto korzystając z tego systematycznego podejścia wyprowadzimy aproksymacje ważnych parametrów fazy podporu takich jak maksymalne ugięcie nogi, przyrostu kąta i sztywności sprężyny. W końcu opiszemy w tym rozdziale szczególny przypadek biegu, w którym podczas trwania fazy kontaktu z podłożem noga w specjalny sposób spręża się i rozpręża do stanu początkowego. Okazuje się, że jest on związany z ekonomizacją biegu.

Następnie, w rozdziale czwartym, korzystając z pewnych założeń, takich jak zasada zachowania energii i pędu, zredukujemy dynamikę do jednowymiarowego odwzorowania między kolejnymi wysokościami wierzchołków paraboli lotu środka masy. Ponadto pokażemy, jakie są wystarczające warunki, aby to jednowymiarowe odwzorowanie powrotu miało punkt stały. Okaże się, że istnieją punkty stałe tylko dla rozwiązań symetrycznych, czyli takich, że kąty natarcia i odbicia fazy podporu są równe. Natomiast w przypadku asymetrii punkty te występują jedynie, gdy kąty odbicia, w przeciwieństwie do kątów ataku, są duże i przekraczają zakres stosowalności modelu. Kolejnym krokiem będzie zbadanie stabilności punktów stałych dla symetrycznych faz podporu. Zilustrujemy zbiory parametrów, dla których warunki stabilności są spełnione. W końcu przedstawimy numeryczny i analityczny dowód na występowanie bifurkacji transkrytycznej w skonstruowanym wcześniej odwzorowaniu.

Modelowanie matematyczne stanowi ważną część biomechaniki, dlatego zastosujemy również podejście eksperymentalne. W tym miejscu warto zaznaczyć, że wykorzystywany model, poprzez swoją konstrukcję i przyjęte założenia opisuje biegi średniodystansowe. Nie jest dostosowany do sprintów, cechujących się odmienną mechaniką. Dlatego w rozdziale piątym wykorzystamy uzyskane wyniki do przetwarzania i interpretacji danych pochodzących z rzeczywistych biegów ze średnimi prędkościami. Porównamy energię generowaną przez biegacza z minimalną energią wymaganą do stabilnego biegu, przewidywaną przez model. Zestawimy również aproksymacje określone przy pomocy prędkości środka masy oraz kątów ataku i odbicia z ich wartościami rzeczywistymi odczytanymi z urządzeń pomiarowych.

Ostatnią część pracy stanowi rozdział szósty zawierający podsumowanie uzyskanych wyników oraz wnioski z nich płynące. Pomimo, że model jest konstruowany dla przypadku, gdy przesunięcie kąta w fazie podporu przyjmuje małe wartości, to z powodzeniem możemy go stosować do badania rzeczywistych biegów, w których kąt odbicia jest wyraźnie większy od kąta natarcia.

Prezentowane w rozprawie wyniki pochodzą z pięciu opublikowanych prac [38, 54, 58, 59, 60] i jednej w trakcie procesu recenzji [61]. W kolejności chronologicznej prace opublikowane: [58] w *Mathematica Applicanda*, [54] w *Nonlinear Dynamics*, [38] w *Physica D*, [60] w *IMA Journal of Applied Mathematics* i [59] w *Mathematica Applicanda*, oraz pozostała [61] przesłana do *Sports Engineering*. Współautorami wszystkich prac, poza [58], są Promotorzy: Łukasz Płociniczak oraz Piotr Kowalczyk.

Na koniec wstępu w dwóch tabelach poniżej zaprezentujemy oznaczenia wymiarowych i bezwymiarowych parametrów fizycznych biegu. Ostatnia kolumna Tabeli 1.1 oraz Tabeli 1.2 pokazuje numer strony, na której symbol pojawia się w pracy po raz pierwszy. W większości przypadków zmienne wymiarowe oznaczamy małą literą (patrz Tab. 1.1), a odpowiadające im zmienne bezwymiarowe wielką literą (patrz Tab. 1.2). Natomiast kąty, zarówno w stopniach jak i w radianach, określamy małą literą alfabetu greckiego.

OZNACZENIA

Symbol	Opis	Numer strony
m	masa ciała	7
g	przyspieszenie ziemskie	7
k	sztywność nogi	7
ω	naturalna częstotliwość masy na sprężynie	7
x, y	poziome i pionowe przemieszczenie	7
t	czas przemieszczenia	7
t_c	czas fazy kontaktu	7
t_a	czas fazy powietrznej	8
l	długość nogi	10
l_0	początkowa długość nogi	7
Δl	zmiana długości l	7
Δl_{max}	maksymalne ugięcie nogi	71
F	siła	7
F_g	siła grawitacji	7
F_s	siła sprężystości	7
f_{max}	maksymalna wartość pionowej siły reakcji podłoża	71
k_{real}	sztywność nogi z eksperymentu	72
u_{TD}, u_{TO}	pozioma prędkość lądowania i odbicia	8
v_{TD}, v_{TO}	pionowa prędkość lądowania i odbicia	10
$\mathcal{L}$	funkcja Lagrange'a	11
p	moment pędu wahadła	11

Tabela 1.1: Oznaczenia zmiennych wymiarowych.

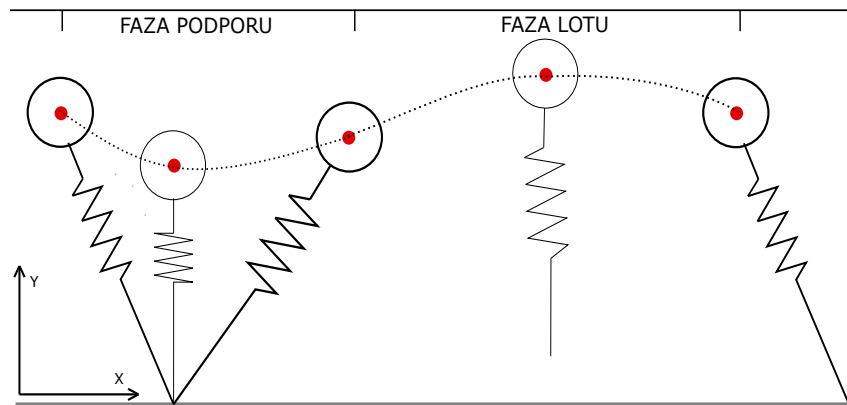
Symbol	Opis	Numer strony
$L = \sqrt{x^2 + y^2}/l_0$	bezwymiarowa długość nogi	12
$X = x/l_0, Y = y/l_0$	poziome i pionowe przemieszczenie	12
$T = t\sqrt{g/l_0}$	bezwymiarowy czas	12
$K = kl_0/mg$	bezwymiarowa sztywność nogi	13
ϵ	parametr szeregu Poincarégo-Lindstedta	15
τ, τ^+	szybkie skale czasowe	15
θ	kąt między sprężyną a osią Y	10
$\alpha = -\theta_{TD}$	kąt ataku	9
$\beta = \theta_{TO}$	kąt odbicia	9
γ	suma kątów ataku i odbicia	32
$U_{TD} = u_{TD}/\sqrt{gl_0}$	pozioma prędkość lądowania	13
$V_{TD} = v_{TD}/\sqrt{gl_0}$	pionowa prędkość lądowania	13
θ_d	prędkość kątowa	13
L_d	prędkość radialna	13
$\tilde{\omega}$	przybliżenie częstotliwości ω	17
$\tilde{\theta}$	przybliżenie kąta θ	17
$\tilde{L}$	przybliżenie promienia L	17
T_c	czas fazy kontaktu	28
ΔL_{max}	maksymalne ugięcie sprężyny	29
$\Delta\theta = \theta_{TO} - \theta_{TD}$	przyrost kąta w fazie podporu (γ)	30
$\mathcal{L}$	funkcja Lagrange'a	40
$P = p/\sqrt{m^2 gl_0^3}$	moment pędu wahadła	41
E_s	energia mechaniczna w fazie podporu	40
ξ	wagowy współczynnik	47
Y'_{PR}	„predyktor” do aktualizacji składowych prędkości	47
Y^*	wysokość wierzchołka punktu stałego	50
E_s^{min}	energia minimalna wymagana do istnienia Y^* ...	50
$K_{real} = k_{real}l_0/mg$	sztywność nogi z eksperymentu	72
E_{min}	energia minimalna wymagana do stabilności	73

Tabela 1.2: Oznaczenia zmiennych bezwymiarowych.

2 ODWRÓCONE SPRĘŻYSTE WAHADŁO

W tym rozdziale przedstawimy matematyczny model ruchu składający się z punktu masy przyłączonej do nieważkiej sprężyny, która odbijając się od ziemi znajduje się na przemian w fazie lotu i fazie podporu. Podczas fazy podporu sprężyna ma kontakt z podłożem, stając się punktem zaczepienia dla odwróconego sprężystego wahadła (*SLIP*). Dodatkowo warto zauważyć, że faza podporu jest kluczowa z punktu widzenia biomechaniki ruchu, ponieważ to w niej dochodzi do generowania siły, która pozwala na przyspieszenie i przemieszczenie ciała biegacza. Jednocześnie, faza podporu stanowi ciekawe matematycznie zagadnienie, ponieważ pozwala na analizę złożonych interakcji pomiędzy ciałem biegacza, sprężyną a siłą reakcji podłoża. Opis takiego sprężysto-masowego układu, dla skakania do góry oraz do przodu, został wprowadzony przez Blickhana [7] i dokładniej zbadany przez McMahon'a i Chenga [41]. Model *SLIP*, który opisuje współzależność parametrów mechanicznych, zostanie w tej pracy doktorskiej wykorzystywany do modelowania biegu człowieka.

Schemat modelu biegania opartego w fazie podporu na odwróconym sprężystym wahadle znajduje się na Rysunku 2.1. Jeśli pominiemy pracę nogi wymachowej bieg jest swoistym skokiem na jednej, zmieniającej się naprzemiennie, nodze podporowej, która jest elastyczną sprężyną, podtrzymującą i przenoszącą środek masy (*ang. center of mass - CoM*) pomiędzy kolejnymi fazami lotu.



Rysunek 2.1: Ogólny schemat modelu biegania z podziałem na fazę podporu i fazę lotu.

2.1 FIZYCZNY OPIS MODELU

Model biegu jest planarny (odbywa się w płaszczyźnie), czyli zawiera podwojone zmienne kinematyczne. Wielkości takie jak położenie środka masy (CoM), jego prędkość i przyspieszenie oraz siła rozkładają się w kierunku x - i y -, stąd oznaczmy je

$$(x, \dot{x}, \ddot{x}, F_x), \quad (y, \dot{y}, \ddot{y}, F_y), \quad (2.1)$$

gdzie kropka symbolizuje pochodną po czasie t . W przyjętej konwencji oś y jest skierowana do góry, a oś x w prawą stronę (patrz Rys. 2.1). Zakładamy, że tylko siła grawitacji oznaczana przez F_g oraz siła sprężystości oznaczana przez F_s odgrywają rolę podczas kontaktu z podłożem. Zatem druga zasada dynamiki Newtona oraz prawo sprężystości Hooke'a prowadzą do następujących równań

$$F_x = F_s, \quad F_y = F_s + F_g, \quad (2.2)$$

gdzie $F_x = m\ddot{x}$, $F_y = m\ddot{y}$, $F_g = -mg$ oraz $F_s = k\Delta l$, natomiast k to sztywność nogi, a Δl jej ugięcie.

Zanim przejdziemy do właściwego modelu krótko omówimy prostszy przypadek jakim jest skok do góry, kiedy poziome składowe wektora (2.1) są zerowe.

2.1.1 FAZA PODPORU I FAZA LOTU DLA RUCHU W JEDNYM WYMIARZE

Schemat jednowymiarowego modelu, skoku do góry, przedstawiony jest na Rysunku 2.2. Założenie, że biegacz porusza się jedynie w kierunku pionowym, upraszcza siłę sprężystości $F_s = k(l_0 - y)$, gdzie l_0 to odległość środka masy człowieka (CoM) od podłoża, w pozycji stojącej, nazywana też początkową długością nogi.

Podczas fazy podporu równanie ruchu jest określone przez następujące równanie różniczkowe drugiego rzędu z warunkami początkowymi:

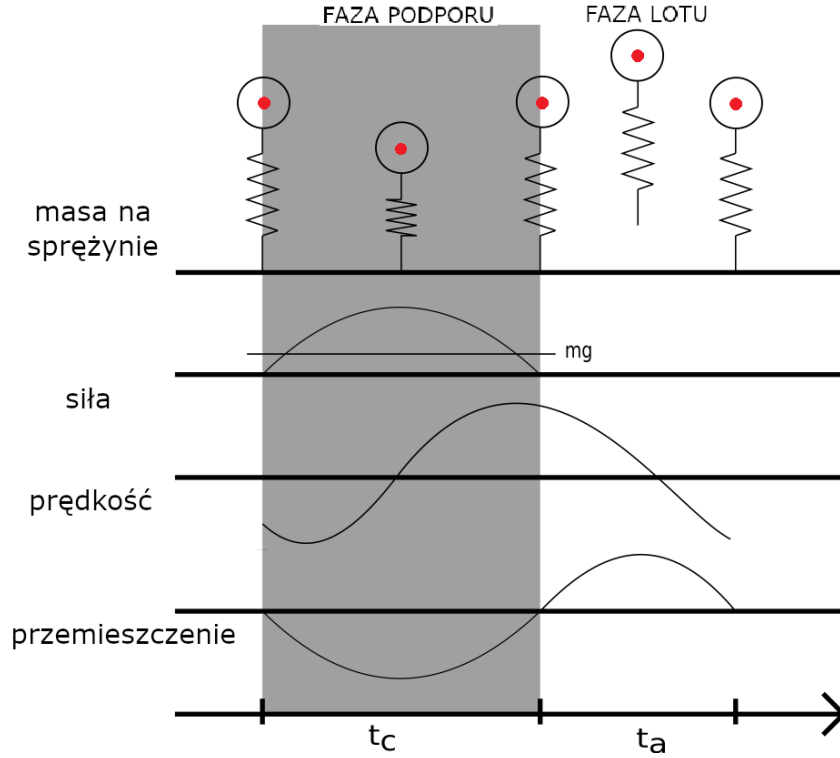
$$\ddot{y} + \frac{k}{m}(y - l_0) = -g \quad \text{z} \quad y(t=0) = l_0, \quad \dot{y}(t=0) = -v_{TD}. \quad (2.3)$$

Rozwiązanie szczególne (2.3) jest postaci

$$y = l_0 - \frac{v_{TD}}{\omega} \sin \omega t + \frac{g}{\omega^2} \cos \omega t - \frac{g}{\omega^2}, \quad (2.4)$$

gdzie $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ to naturalna częstotliwość oscylatora, a v_{TD} to pionowa prędkość lądowania. Następnie, wykorzystując (2.4), siła sprężystości F_s podczas fazy podporu może być wyrażona przez

$$F_s = k(l_0 - y) = k \left[\frac{v_{TD}}{\omega} \sin \omega t - \frac{g}{\omega^2} \cos \omega t + \frac{g}{\omega^2} \right]. \quad (2.5)$$



Rysunek 2.2: Schemat jednowymiarowego modelu, który jest punktową masą przyłączoną do nieważkiej sprężyny. Okres skoku jest podzielony na dwie fazy: fazę kontaktu z podłożem czyli podporu (z czasem t_c) oraz fazę powietrzną inaczej lotu (z czasem t_a). W czasie podporu występuje ruch sinusoidalny, po którym następuje faza lotu parabolicznego. Z powodu liniowej sztywności sprężyny krzywa siły również jest sinusoidalna, z ciężarem układu jako wartością równowagi. Długość fazy lotu określa pionowa prędkość lądowania lub odbicia oznaczana przez v_{TD} oraz v_{TO} , odpowiednio. Maksymalna prędkość jest osiągnięta po lądowaniu, gdy siła jest równa ciężarowi ciała.

Jak widać na Rysunku 2.2 w połowie fazy podporu, dla $t = \frac{t_c}{2}$, sprężyna odkształca się maksymalnie, gdy prędkość środka masy jest równa zero ($\dot{y}(t = t_c/2) = 0$), czyli gdy $\dot{F}_s(t = t_c/2) = 0$. Stąd, na podstawie (2.4), otrzymujemy

$$-v_{TD} \cos(\omega t_c/2) - \frac{g}{\omega} \sin(\omega t_c/2) = 0,$$

a po przekształceniu

$$\operatorname{tg}(\omega t_c/2) = -\frac{v_{TD}\omega}{g}.$$

Zatem czas kontaktu t_c jest związany z prędkością v_{TD} i z naturalną częstotliwością ω w następujący sposób

$$t_c = \frac{2}{\omega} \left[\pi - \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{v_{TD}\omega}{g} \right) \right]. \quad (2.6)$$

Podczas fazy lotu siła sprężystości równa się zero ($F_s = 0$) i równanie ruchu ma postać

$$\ddot{y} = -g \quad \text{z} \quad y(t=0) = l_0, \quad \dot{y}(t=0) = v_{TO}, \quad (2.7)$$

a stąd

$$y = l_0 + v_{TO}t - \frac{gt^2}{2}. \quad (2.8)$$

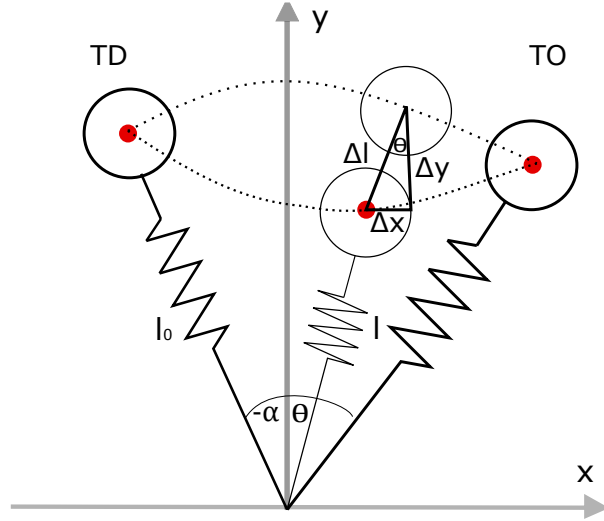
W takim razie z (2.8), ponieważ $y(t = t_a) = l_0$, dostajemy czas fazy powietrznej t_a :

$$t_a = \frac{2v_{TO}}{g}. \quad (2.9)$$

Podsumowując, faza kontaktu z podłożem może być charakteryzowana przez prędkość lądowania (v_{TD}) oraz naturalną częstotliwość oscylatora (ω), podczas gdy faza powietrzna tylko przez prędkość w momencie odbicia (v_{TO}). Momenty lądowania (*ang. touch-down*) oraz odbicia (*ang. take-off*), oznaczamy w pracy odpowiednio przez TD i TO .

Przejdźmy do opisu ruchu w dwóch wymiarach, jakim jest model biegu, czyli model skakania do przodu.

2.1.2 FAZA PODPORU I FAZA LOTU DLA RUCHU W DWÓCH WYMIARACH



Rysunek 2.3: Schemat modelu *SLIP*. (x, y) - współrzędne kartezjańskie punktu masy, (l, θ) - współrzędne biegunowe punktu masy, gdzie $l = \sqrt{x^2 + y^2}$ jest promieniem, podczas gdy θ jest kątem pozycji punktu masy. Ponadto zakładamy, że podczas momentu lądowania (TD) oraz odbicia (TO), wartość kąta θ wynosi odpowiednio: $\theta_{TD} = -\alpha$ oraz $\theta_{TO} = \beta$, gdzie $\alpha, \beta \in (0, \pi/2)$.

Model skakania do przodu zawiera oprócz zmiennych kinematycznych w osi pionowej te same zmienne w osi poziomej (patrz (2.1)). Schemat dwuwymiarowego modelu *SLIP* opartego na odwróconym sprężystym wahadle dla biegu podczas fazy podporu jest przedstawiony na Rysunku 2.3.

Ruch do przodu wprowadza dodatkowe parametry do modelu sprężyna-masa, to znaczy współrzędne biegunowe, czyli długość nogi $l = \sqrt{x^2 + y^2}$ oraz kąt θ jaki tworzy sprężyna z dodatnią częścią osi y .

Zaprezentujemy teraz dwa podejścia prowadzące do wyznaczenia równań ruchu w fazie kontaktu z podłożem.

- **Mechanika klasyczna.** Podczas fazy podporu ruch dwuwymiarowy może być opisany przez równania różniczkowe nieliniowe zgodnie z drugą zasadą dynamiki Newtona, czyli

$$\begin{cases} m\ddot{x} = k\Delta x, \\ m\ddot{y} = k\Delta y - mg, \end{cases} \quad (2.10)$$

gdzie

$$\Delta x = \Delta l \sin \theta, \quad \Delta y = \Delta l \cos \theta, \quad \Delta l = l_0 - l = l_0 - \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (2.11)$$

Wstawiając (2.11) do (2.10) i dzieląc równania (2.10) przez m uzyskujemy

$$\begin{cases} \ddot{x} = \omega^2 \left(l_0 - \sqrt{x^2 + y^2} \right) \sin \theta, \\ \ddot{y} = \omega^2 \left(l_0 - \sqrt{x^2 + y^2} \right) \cos \theta - g, \end{cases} \quad (2.12)$$

gdzie $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ to naturalna częstotliwość układu sprężyna-masa oraz $l_0 = \sqrt{x^2(0) + y^2(0)}$ to początkowa długość sprężyny. Warunki początkowe, w tym przypadku, to

$$\begin{aligned} x(t=0) &= -l_0 \sin \alpha, & y(t=0) &= l_0 \cos \alpha, \\ \dot{x}(t=0) &= u_{TD}, & \dot{y}(t=0) &= -v_{TD}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

gdzie u_{TD} i v_{TD} są odpowiednio poziomą i pionową prędkością lądowania.

W sposób naturalny wprowadzamy współrzędne biegunowe, gdzie

$$\sin \theta = \frac{x}{l}, \quad \cos \theta = \frac{y}{l}. \quad (2.14)$$

W związku z tym, pierwsze oraz drugie pochodne x i y dane są następującymi wzorami

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{l} \sin \theta + l \dot{\theta} \cos \theta, \\ \dot{y} = \dot{l} \cos \theta - l \dot{\theta} \sin \theta, \end{cases} \quad (2.15)$$

oraz

$$\begin{cases} \ddot{x} = \ddot{l} \sin \theta + 2\dot{l}\dot{\theta} \cos \theta - l\dot{\theta}^2 \sin \theta + l\ddot{\theta} \cos \theta, \\ \ddot{y} = \ddot{l} \cos \theta - 2\dot{l}\dot{\theta} \sin \theta - l\dot{\theta}^2 \cos \theta - l\ddot{\theta} \sin \theta. \end{cases} \quad (2.16)$$

Wstawiając równania (2.16) do (2.12) otrzymujemy następujący układ równań

$$\begin{cases} l\ddot{\theta} + 2\dot{l}\dot{\theta} = g \sin \theta, \\ \ddot{l} - l\dot{\theta}^2 = kl_0/m \times (1 - l/l_0) - g \cos \theta, \end{cases} \quad (2.17)$$

który będziemy nazywać głównym układem nieliniowych równań różniczkowych drugiego rzędu.

Aby uzyskać warunki początkowe we współrzędnych biegunowych wykorzystujemy (2.13), (2.15) oraz

$$\theta(t=0) = -\alpha, \quad l(t=0) = l_0, \quad (2.18)$$

i rozwiązujemy następujący układ równań

$$\begin{cases} l_0 \dot{\theta}(t=0) \cos \alpha - \dot{l}(t=0) \sin \alpha = u_{TD}, \\ l_0 \dot{\theta}(t=0) \sin \alpha + \dot{l}(t=0) \cos \alpha = -v_{TD}. \end{cases} \quad (2.19)$$

Korzystając ze wzorów Cramera, możemy wyrazić prędkość zmiany kąta oraz długości promienia sprzężyny, w momencie lądowania, w następujący sposób

$$\begin{aligned} \dot{\theta}(t=0) &= \frac{1}{l_0} \begin{vmatrix} u_{TD} & -\sin \alpha \\ -v_{TD} & \cos \alpha \end{vmatrix} = \frac{1}{l_0} (u_{TD} \cos \alpha - v_{TD} \sin \alpha), \\ \dot{l}(t=0) &= \frac{1}{l_0} \begin{vmatrix} l_0 \cos \alpha & u_{TD} \\ l_0 \sin \alpha & -v_{TD} \end{vmatrix} = -(u_{TD} \sin \alpha + v_{TD} \cos \alpha). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Zatem warunki początkowe mają postać

$$\begin{aligned} \theta(t=0) &= -\alpha, & l(t=0) &= l_0, \\ \dot{\theta}(t=0) &= \frac{1}{l_0} (u_{TD} \cos \alpha - v_{TD} \sin \alpha), & \dot{l}(t=0) &= -(u_{TD} \sin \alpha + v_{TD} \cos \alpha). \end{aligned} \quad (2.21)$$

- **Mechanika Lagrange’a.** Mechanika Lagrange’a jest przeformułowaniem mechaniki klasycznej przy użyciu zasady najmniejszego działania Hamiltona. Podstawowym pojęciem mechaniki Lagrange’a jest funkcja Lagrange’a zwana też lagrangianem. Funkcja ta w fizyce nierelatywistycznej jest równa różnicy między energią kinetyczną a potencjalną układu. Używając współrzędnych biegunowych (l, θ) ma ona następującą postać

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} (\dot{l}^2 + l^2 \dot{\theta}^2) - \frac{k}{2} (l_0 - l)^2 - mgl \cos \theta. \quad (2.22)$$

Rozwiązaniem równań Eulera-Lagrange’a są funkcje $\theta(t)$ oraz $l(t)$, dla których poniższy funkcjonał, zadany całką oznaczoną

$$\int_0^{t_c} \mathcal{L}(\theta(t), \dot{\theta}(t), l(t), \dot{l}(t), t) dt, \quad (2.23)$$

zależny od obu zmiennych i ich pierwszych pochodnych, jest stacjonarny. Zatem nieliniowe równania różniczkowe cząstkowe Eulera-Lagrange’a są postaci

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} \implies \frac{d}{dt} (ml^2 \dot{\theta}) = \dot{p} = mgl \sin \theta, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{l}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial l} \implies m\ddot{l} = ml(\dot{\theta})^2 + k(l_0 - l) - mg \cos \theta, \end{cases} \quad (2.24)$$

gdzie $p = ml^2\dot{\theta}$ to moment pędu w ruchu obrotowym. Równania Eulera-Lagrange'a dane wzorem (2.24) są identyczne z układem równań uzyskanym z mechaniki klasycznej Newtona (patrz (2.17)). Zatem rozwiązujemy je jak powyżej z warunkami początkowymi (2.21).

Na koniec tej części przedstawimy równania ruchu w fazie lotu. Podczas fazy lotu siła sprężystości wynosi zero ($F_s = 0$), a równania ruchu są następujące

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 0, & x(t=0) &= l_0 \sin \beta, & \dot{x}(t=0) &= u_{TO}, \\ \ddot{y} &= -g, & y(t=0) &= l_0 \cos \beta, & \dot{y}(t=0) &= v_{TO}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

gdzie u_{TO} i v_{TO} to odpowiednio pozioma i pionowa prędkość odbicia oraz β to kąt odbicia θ_{TO} . Rozwiązaniem równań (2.25) jest

$$x = l_0 \sin \beta + u_{TO}t \quad \text{ i } \quad y = l_0 \cos \beta + v_{TO}t - \frac{gt^2}{2}. \quad (2.26)$$

Stąd z (2.26), ponieważ $x(t = t_a) = l_0 \sin \alpha$ oraz $y(t = t_a) = l_0 \cos \alpha$, gdzie t_a jest czasem lotu, otrzymujemy

$$\begin{aligned} u_{TO} &= \frac{l_0(\sin \alpha - \sin \beta)}{t_a}, & v_{TO} &= \frac{gt_a}{2} + \frac{l_0(\cos \alpha - \cos \beta)}{t_a}, \\ t_a &= \frac{v_{TO} + \sqrt{v_{TO}^2 - 2l_0(\cos \alpha - \cos \beta)}}{g}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Aby wyznaczyć t_a potrzebujemy założenia $v_{TO} \geq \sqrt{2l_0(\cos \alpha - \cos \beta)}$. Zatem dla $\alpha = \beta$ wzory (2.27) redukują się do postaci

$$u_{TO} = 0, \quad v_{TO} = \frac{gt_a}{2} \quad \text{ i } \quad t_a = \frac{2v_{TO}}{g}. \quad (2.28)$$

2.2 MATEMATYCZNY OPIS MODELU DLA ZMIENNYCH BEZWYMIAROWYCH

W tym podrozdziale układ równań (2.17) opisujący bieg w fazie podporu z podłożem wraz warunkami początkowymi (2.21) zapiszemy w zmiennych bezwymiarowych. Odpowiednie skalowanie parametrów modelu pomaga ustalić względne rozmiary różnych terminów i sprawia, że późniejsza analiza jest o wiele bardziej przejrzysta, a nawet w pewnych przypadkach możliwa. Bezwymiarowe zmienne mają następującą postać

$$X = \frac{x}{l_0}, \quad Y = \frac{y}{l_0}, \quad L = \frac{l}{l_0} = \sqrt{X^2 + Y^2} \quad \text{ i } \quad T = t\sqrt{\frac{g}{l_0}}.$$

Długości zostały znormalizowane w odniesieniu do l_0 , a czas pomnożony przez $(g/l_0)^{1/2}$, który to czynnik bezpośrednio związany jest z odwrotnością czasu w jednostajnym ruchu. Łatwo można zauważyć, że

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dT} &= \frac{\dot{x}/l_0}{(g/l_0)^{1/2}} = \frac{\dot{x}}{(gl_0)^{1/2}}, & \frac{d^2X}{dT^2} &= \frac{\ddot{x}/l_0}{g/l_0} = \frac{\ddot{x}}{g}, \\ \frac{dY}{dT} &= \frac{\dot{y}/l_0}{(g/l_0)^{1/2}} = \frac{\dot{y}}{(gl_0)^{1/2}}, & \frac{d^2Y}{dT^2} &= \frac{\ddot{y}/l_0}{g/l_0} = \frac{\ddot{y}}{g}, \\ \frac{d\theta}{dT} &= \frac{\dot{\theta}}{(g/l_0)^{1/2}} = \frac{l_0\dot{\theta}}{(gl_0)^{1/2}}, & \frac{d^2\theta}{dT^2} &= \frac{\ddot{\theta}}{g/l_0} = \frac{l_0\ddot{\theta}}{g}, \\ \frac{dL}{dT} &= \frac{\dot{l}/l_0}{(g/l_0)^{1/2}} = \frac{\dot{l}}{(gl_0)^{1/2}}, & \frac{d^2L}{dT^2} &= \frac{\ddot{l}/l_0}{g/l_0} = \frac{\ddot{l}}{g}.\end{aligned}$$

Stąd równania różniczkowe (2.17) zostaną przedstawione w następującej formie bezwymiarowej (patrz [41, 54, 58])

$$\begin{cases} L \frac{d^2\theta}{dT^2} + 2 \frac{dL}{dT} \frac{d\theta}{dT} = \sin \theta, \\ \frac{d^2L}{dT^2} - L \left(\frac{d\theta}{dT} \right)^2 = K(1 - L) - \cos \theta, \end{cases} \quad (2.29)$$

gdzie $K = l_0\omega^2/g = kl_0/(mg)$ to bezwymiarowa sztywność nogi. Można zauważyć, że iloczyn kl_0 jest największą siłą, jaka może działać na sprężynę, aby została ona maksymalnie, do granic możliwości, ściśnięta. Jeśli parametr $kl_0/(mg) < 1$ to noga nie może wygenerować siły równej ciężarowi masy na sprężynie. Z drugiej strony sztywność $K = l_0\omega^2/g$, to kwadrat stosunku naturalnej częstotliwości masy na sprężynie do naturalnej częstotliwości nogi jako wahadła.

Warunki początkowe, dane wzorem (2.21), zostają zredukowane do postaci

$$\begin{aligned}\theta(T=0) &= -\alpha, & L(T=0) &= 1, \\ \frac{d\theta}{dT}(T=0) &= \theta_d, & \frac{dL}{dT}(T=0) &= -L_d,\end{aligned} \quad (2.30)$$

gdzie

$$\theta_d = U_{TD} \cos \alpha - V_{TD} \sin \alpha, \quad L_d = U_{TD} \sin \alpha + V_{TD} \cos \alpha. \quad (2.31)$$

We wzorach (2.31), $U_{TD} = u_{TD}/(gl_0)^{1/2}$ oraz $V_{TD} = v_{TD}/(gl_0)^{1/2}$ to odpowiednio pozioma i pionowa prędkość na początku fazy podparcia. W wyniku normalizacji długości nogi oraz czasu, prędkości te są dzielone przez czynnik odniesienia $(gl_0)^{1/2}$, który ma swoją następującą interpretację. Odwrócone wahadło o długości l_0 przechodzące przez szczyt łuku oderwałoby się od ziemi, gdyby prędkość jego masy była większa niż $(gl_0)^{1/2}$. W mechanice płynów prędkość znormalizowana przez czynnik (przyspieszenie ziemskie $\times$ długość) $^{1/2}$ nazywana jest liczbą Froude'a. Zauważmy, że przy założeniu małych kątów ataku otrzymujemy $U_{TD} \approx \theta_d$ oraz $V_{TD} \approx L_d$.

W Tabeli 2.1 zgromadziliśmy najważniejsze bezwymiarowe parametry pojawiające się w modelu *SLIP* w momencie lądowania. Dane opierają się na przeprowadzonym eksperymencie (patrz Rozdział 5 oraz praca [61]) i dotyczą biegów z umiarkowaną prędkością, gdyż jak pokażemy w dalszej części rozprawy, model znacznie dokładniej opisuje biegi długodystansowe. Zauważmy, że zwykle

Symbol	Opis	Typowe wartości
α	kąt ataku	0,05 – 0,31
U_{TD}	pozioma liczba Froude’a	0,63 – 1,73
V_{TD}	pionowa liczba Froude’a	0,03 – 0,22
θ_d	prędkość kątowna	0,69 – 1,77
L_d	prędkość radialna	0,15 – 0,61
K	szttywność nogi	12 – 50

Tabela 2.1: Typowe wartości bezwymiarowych fizycznych parametrów modelu *SLIP* pochodzące z eksperymentu opisanego w Rozdziale 5.

U_{TD} jest rzędu jedności, podczas gdy V_{TD} i α są małe. Dodatkowo, typowe wartości bezwymiarowej sztywności nogi K wahają się od około 12 do około 50, co w pewnych sytuacjach, nawet dla biegów z umiarkowaną prędkością, można uznać za dużą wartość.

3 ROZWIĄZANIA PRZYBLIŻONE

3.1 TEORIA ZABURZEŃ

W tym rozdziale przedstawimy analizę asymptotyczną rozwiązań nieliniowego układu równań (2.29) z warunkami początkowymi (2.30), dla dużych wartości bezwymiarowej sztywności K , z wykorzystaniem szeregu Poincarégo - Lindstedta. Następnie udowodnimy, że formalne rozwinięcia pochodzące z szeregu zaburzeń jednostajnie przybliżają rozwiązania badanych równań różniczkowych. Ponadto uzyskane rzędy przybliżeń umożliwią oszacowanie ich błędów z konkretną dokładnością. Przedstawione tu wyniki pochodzą z pracy Płociniczaka i Wróblewskiej [54], a stosowane metody zaburzeń można znaleźć w ogólnym źródle [50].

Metoda Poincarégo - Lindstedta, przedstawiona na przykład w pozycji [35] bibliografii, polega na wyznaczaniu asymptotycznych rozwinięć dla rozwiązań równań różniczkowych w różnych skalach czasowych. W celu wyeliminowania z rozwinięć wyrazów słabo tłumionych, zmienną czasu należy przeskalować o okres układu nietłumionego. Ponieważ sztywność K jest czynnikiem stojącym przy L w drugim równaniu (2.29), możemy oczekiwać, że dynamika zachodzi w szybkiej skali czasowej i okres drgań jest modulowany przez $\sqrt{K}T$. Jak pamiętamy sztywność K (patrz Tab. 2.1) możemy uznać za dużą wartość. Z drugiej strony, równanie dla kąta układu (2.29) wskazuje, że główną skalą czasową dla θ jest wolna skala, czyli T . Przejdźmy do sprawdzenia jak funkcjonują rozwiązania dla L i θ w obu skalach czasowych.

3.1.1 ROZWINIĘCIA FORMALNE

Pierwszym krokiem będzie zastosowanie szeregu Poincarégo-Lindstedta, żeby znaleźć zachowanie asymptotyczne L i θ w szybkiej skali czasowej, gdy $K \rightarrow \infty$. Aby uprościć zagadnienie, przyjmujemy

$$\epsilon = \frac{1}{\sqrt{K}} \quad (3.1)$$

i szukamy rozwinięć przy $\epsilon \rightarrow 0^+$. Kierując się powyższą dyskusją, wprowadzamy następujące szybkie skale czasowe

$$\tau = \frac{T}{\epsilon}, \quad \tau^+ = \omega(\epsilon)\tau = \left(1 + \epsilon\omega_1 + \epsilon^2\omega_2 + \dots\right) \frac{T}{\epsilon}. \quad (3.2)$$

Dalej, wstawiając τ^+ dane wzorem (3.2) do układu (2.29) i zamieniając kolejność, otrzymujemy

$$\omega^2(\epsilon)L'' + \left(1 - \omega^2(\epsilon)(\theta')^2\right)L = 1 - \epsilon^2 \cos \theta, \quad L\theta'' + 2L'\theta' = \omega^{-2}(\epsilon)\epsilon^2 \sin \theta, \quad (3.3)$$

gdzie apostrof oznacza pochodną $L = L(\tau^+)$ oraz $\theta = \theta(\tau^+)$ względem τ^+ . Jeśli teraz użyjemy formalnych rozwinięć dla L oraz θ :

$$L = L_0 + \epsilon L_1 + \epsilon^2 L_2 + \dots, \quad \theta = \theta_0 + \epsilon \theta_1 + \epsilon^2 \theta_2 + \dots, \quad (3.4)$$

to równania (3.3) przekształcają się do postaci

$$\begin{aligned} \omega^2(\epsilon)(L_0'' + \epsilon L_1'' + \epsilon^2 L_2'' + \dots) + \left(1 - \omega^2(\epsilon)(\theta_0' + \epsilon \theta_1' + \epsilon^2 \theta_2' + \dots)^2\right) \times \\ \times (L_0 + \epsilon L_1 + \epsilon^2 L_2 + \dots) = 1 - \epsilon^2 \cos(\theta_0 + \epsilon \theta_1 + \epsilon^2 \theta_2 + \dots), \end{aligned} \quad (3.5)$$

oraz

$$\begin{aligned} (L_0 + \epsilon L_1 + \epsilon^2 L_2 + \dots)(\theta_0'' + \epsilon \theta_1'' + \epsilon^2 \theta_2'' + \dots) + 2(L_0' + \epsilon L_1' + \epsilon^2 L_2' + \dots) \times \\ \times (\theta_0' + \epsilon \theta_1' + \epsilon^2 \theta_2' + \dots) = \omega^{-2}(\epsilon) \epsilon^2 \sin(\theta_0 + \epsilon \theta_1 + \epsilon^2 \theta_2 + \dots). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Z kolei, porównując współczynniki przy odpowiednich potęgach ϵ w (3.5) i (3.6), otrzymujemy następujący układ równań różniczkowych dla dwóch pierwszych rzędów:

$$\begin{aligned} \epsilon^0 : \quad L_0'' + (1 - (\theta_0')^2)L_0 &= 1, & L_0(0) &= 1, & L_0'(0) &= 0, \\ \epsilon^1 : \quad L_1'' + (1 - (\theta_0')^2)L_1 &= -2\omega_1 L_0'' \\ &+ 2(\theta_0' \theta_1' + \omega_1 (\theta_0')^2)L_0, & L_1(0) &= 0, & L_1'(0) &= -L_d, \end{aligned} \quad (3.7)$$

...,

oraz

$$\begin{aligned} \epsilon^0 : \quad L_0 \theta_0'' + 2L_0' \theta_0' &= 0, & \theta_0(0) &= -\alpha, & \theta_0'(0) &= 0, \\ \epsilon^1 : \quad L_0 \theta_1'' + 2L_0' \theta_1' &= -L_1 \theta_0'' - 2L_1' \theta_0', & \theta_1(0) &= 0, & \theta_1'(0) &= \theta_d, \end{aligned} \quad (3.8)$$

...

Z jednej strony postać równań dla wyższych rzędów ϵ szybko się komplikuje. Z drugiej jednak strony, wykorzystując początkowe przybliżenia rzędu wiodącego oraz pierwszego rozwinięć L oraz θ , zaobserwujemy, że kolejne asymptotyczne równania ulegają znacznemu uproszczeniu. Zatem napiszemy je w dalszej części podrozdziału już tylko w postaci uproszczonej.

Wychodząc od równań przy ϵ^0 , mnożymy równanie dla θ_0 (patrz (3.8)) przez L_0 , następnie po scałkowaniu i wykorzystaniu faktu, że $\theta_0'(0) = 0$, otrzymujemy zasadę zachowania momentu pędu, czyli

$$L_0^2 \theta_0' = 0. \quad (3.9)$$

Zauważmy, że (3.9) może być spełnione tylko wtedy, gdy $\theta_0(\tau^+) = -\alpha$. Stąd równanie dla L_0 (patrz (3.7)) daje rozwiązanie $L_0(\tau^+) = 1$. Zatem rozwiązania pierwszego rzędu są stałe i w konsekwencji równania przy ϵ^1 uproszczają się do postaci

$$L_1'' + L_1 = 0, \quad \theta_1'' = 0. \quad (3.10)$$

Z (3.10) można szybko otrzymać $L_1(\tau^+) = -L_d \sin \tau^+$ i $\theta_1(\tau^+) = \theta_d \tau^+$.

Uzyskane przybliżenia początkowe dalej upraszczają równania asymptotyczne

$$\begin{aligned} \epsilon^2 : \quad & L_2'' + L_2 = -2\omega_1 L_1'' + \theta_d^2 - \cos \alpha, \quad L_2(0) = 0, \quad L_2'(0) = L_d \omega_1, \\ \epsilon^3 : \quad & L_3'' + L_3 = -(2\omega_2 + \omega_1^2) L_1'' - 2\omega_1 L_2'' \\ & + \theta_d^2 L_1 + 2\theta_d(\theta_2' + 2\omega_1 \theta_d) - (\sin \alpha) \theta_1, \quad L_3(0) = 0, \quad L_3'(0) = L_d(\omega_2 - \omega_1^2), \\ & \dots, \end{aligned} \quad (3.11)$$

oraz

$$\begin{aligned} \epsilon^2 : \quad & \theta_2'' + 2\theta_d L_1' = -\sin \alpha, \quad \theta_2(0) = 0, \quad \theta_2'(0) = -\theta_d \omega_1, \\ \epsilon^3 : \quad & \theta_3'' + L_1 \theta_2'' = -2(L_1' \theta_2' + \theta_d L_2') \\ & + (\cos \alpha) \theta_1 + \omega_1 \sin \alpha, \quad \theta_3(0) = 0, \quad \theta_3'(0) = -\theta_d(\omega_2 - \omega_1^2), \\ & \dots \end{aligned} \quad (3.12)$$

Zauważmy, że równanie dla L (patrz (3.11)) rzędu ϵ^2 nie będzie zależne od składnika rezonansowego tylko wtedy, gdy przyjmimy $\omega_1 = 0$. Podobnie, pamiętając, że $L_1'' = -L_1$, w równaniu kolejnego rzędu możemy wyeliminować składniki rezonansowe, gdy weźmiemy

$$\omega_2 = -\frac{1}{2}\theta_d^2. \quad (3.13)$$

Następnie, wyznaczając $L_2(\tau^+) = (\cos \alpha - \theta_d^2)(\cos \tau^+ - 1)$ z równania (3.11), otrzymujemy formalne wyrażenia dla przybliżenia L aż do drugiego rzędu

$$\begin{aligned} L(T) \approx \tilde{L}(T) &:= 1 - \epsilon L_d \sin \tau^+(T) - \epsilon^2 (\cos \alpha - \theta_d^2) (1 - \cos \tau^+(T)), \\ \text{gdzie} \quad \tau^+(T) &= \tilde{\omega}(\epsilon) \frac{T}{\epsilon}, \quad \tilde{\omega}(\epsilon) = 1 - \frac{\theta_d^2}{2} \epsilon^2, \quad \epsilon \ll 1. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Z drugiej strony, teraz możemy wrócić do równania rzędu ϵ^2 dla θ (patrz (3.12)), z których łatwo wyznaczymy θ_2 :

$$\theta_2(\tau^+) = 2L_d \theta_d (1 - \cos \tau^+) - \frac{1}{2}(\sin \alpha)(\tau^+)^2, \quad (3.15)$$

i w konsekwencji otrzymamy następujące przybliżenie dla kąta θ :

$$\theta(T) \approx \tilde{\theta}(T) := -\alpha + \epsilon \theta_d \tau^+(T) - \frac{1}{2} \epsilon^2 (\sin \alpha) (\tau^+(T))^2 + 2\epsilon^2 L_d \theta_d (1 - \cos \tau^+(T)), \quad (3.16)$$

gdzie $\tau^+(T)$ jest zdefiniowane w równaniu (3.14). Dość podobne przybliżone rozwiązania dla L oraz θ zostały heurystycznie uzyskane przez Geyera, Seyfartha i Blickhana w pracy [28].

Mając powyższe przybliżenia w szybkiej skali czasowej τ^+ interesujące jest przeanalizowanie równania kąta układu (2.29) w wolnej skali czasowej T . Zauważmy, że ponieważ $L(T) \approx 1$ dla $\epsilon \ll 1$ w pierwszym przybliżeniu, to szybka skala czasowa τ^+ pojawia się w równaniu tylko poprzez składnik tłumienia. W takim przypadku otrzymujemy równanie drugiego rzędu z szybko zmiennym współczynnikiem, które można przeanalizować przy użyciu teorii homogenizacji (patrz

np. [53]). Jednak w naszym przypadku, aby znaleźć wiodący rząd θ , wygodniej jest użyć metody wielu skal (patrz np. [35]).

Zaczynamy od założenia, że $\theta = \theta(T, \tau)$, gdzie $\tau = \epsilon^{-1}T$. Ponieważ interesuje nas tylko postać rzędu wiodącego rozwinięcia asymptotycznego, nie musimy używać skali czasowej τ^+ , która wprowadzałaby wyższe rzędy przybliżenia. Jako rozwinięcie dla L używamy

$$L(\tau) = 1 - \epsilon\lambda_1(\tau) - \epsilon^2\lambda_2(\tau) - \dots, \quad (3.17)$$

natomiast kąt rozwija się następująco

$$\theta(T, \tau) = \theta_0(T, \tau) + \epsilon\theta_1(T, \tau) + \epsilon^2\theta_2(T, \tau) + \dots \quad (3.18)$$

Dokładna postać λ_1 oraz λ_2 może zostać wywnioskowana z (3.14). Te dwie skale czasowe T oraz τ będą traktowane niezależnie. Jedną z konsekwencji tego jest, że pierwsza pochodna po czasie T przekształca się w następujący sposób

$$\frac{d}{dT} = \frac{\partial}{\partial T} + \epsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial \tau}. \quad (3.19)$$

Jeżeli kropka oznacza pochodną względem T , a apostrof pochodną względem τ , to korzystając z (3.19) równanie kąta, czyli pierwsze równanie układu (2.29) w tych oznaczeniach, ma postać

$$L(\ddot{\theta} + 2\epsilon^{-1}\dot{\theta}' + \epsilon^{-2}\theta'') + 2\epsilon^{-1}L'(\dot{\theta} + \epsilon^{-1}\theta') = \sin \theta. \quad (3.20)$$

Wstawiając rozwinięcia (3.17) i (3.18) do (3.20) uzyskujemy

$$\begin{aligned} (1 - \epsilon\lambda_1 - \dots) \left[\ddot{\theta}_0 + \epsilon^{-2}\theta_0'' + 2\epsilon^{-1}\dot{\theta}_0' + \epsilon(\ddot{\theta}_1 + \epsilon^{-2}\theta_1'' + 2\epsilon^{-1}\dot{\theta}_1') + \right. \\ \left. + \epsilon^2(\ddot{\theta}_2 + \epsilon^{-2}\theta_2'' + 2\epsilon^{-1}\dot{\theta}_2') \right] - 2(\lambda_1' + \epsilon\lambda_2' + \dots)(\dot{\theta}_0 + \epsilon^{-1}\theta_0' + \epsilon\dot{\theta}_1 + \theta_1' + \dots) = \\ = \sin(\theta_0 + \epsilon\theta_1 + \epsilon^2\theta_2 + \dots). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Natomiast warunki początkowe:

$$\theta(0, 0) = -\alpha, \quad \frac{d\theta}{dT}(0, 0) = \dot{\theta}(0, 0) + \epsilon^{-1}\theta'(0, 0) = \theta_d \quad (3.22)$$

można teraz przetłumaczyć jako

$$\begin{aligned} \theta_0(0, 0) = -\alpha, \quad \dot{\theta}_0(0, 0) = \theta_d, \quad \theta_0'(0, 0) = 0, \\ \theta_i(0, 0) = 0, \quad \dot{\theta}_i(0, 0) = 0, \quad \theta_i'(0, 0) = 0, \quad i > 0. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Z kolei, porównanie różnych potęg ϵ prowadzi do następujących równań

$$\begin{aligned}\epsilon^{-2} : \quad & \theta_0'' = 0, \\ \epsilon^{-1} : \quad & 2\dot{\theta}_0' - \lambda_1\theta_0'' + \theta_1'' - 2\lambda_1'\theta_0' = 0, \\ \epsilon^0 : \quad & \ddot{\theta}_0 + 2\dot{\theta}_1' - \lambda_1(2\dot{\theta}_0' + \theta_1'') - \lambda_2\theta_0'' - 2\lambda_1'(\dot{\theta}_0 + \theta_1') - 2\lambda_2'\theta_0' + \theta_2'' = \sin \theta_0, \\ & \dots\end{aligned}\tag{3.24}$$

Pierwsze równanie (3.24) od razu daje nam rozwiązanie $\theta_0(T, \tau) = C_0(T) + D_0(T)\tau$. Jednak z warunków początkowych (3.23) mamy $D_0(T) = 0$, a zatem $\theta_0' = 0$. Jak oczekiwano, wiodąca składowa nie zależy od szybkiej skali czasowej τ . Podobnie dla równania ϵ^{-1} warunki początkowe prowadzą do $\theta_1'' = 0$ i stąd $\theta_1(T, \tau) = C_1(T)$, czyli $\theta_1' = 0$. Nieliniowe zachowanie wynika z równania ϵ^0 , które redukuje się do postaci

$$\ddot{\theta}_0 + \theta_2'' - 2\lambda_1'\dot{\theta}_0 = \sin \theta_0.\tag{3.25}$$

Teraz, ponieważ z założenia T i τ są niezależnymi zmiennymi, możemy wykonać uśrednienie po szybkiej skali czasowej, aby wyodrębnić informacje tylko o wolnej ewolucji. Całkowanie powyższego równania względem τ daje

$$\ddot{\theta}_0 + \overline{\theta_2''} - 2\dot{\theta}_0\overline{\lambda_1'} = \sin \theta_0,\tag{3.26}$$

gdzie kreska oznacza średnią wartość dla τ zmieniającego się od 0 do 2π . Ponieważ λ_1 jest 2π -okresową funkcją z dokładnością do $O(\epsilon)$, zatem zgodnie z aproksymacją (3.14) mamy $\overline{\lambda_1'} = 0$. Ponadto, ponieważ τ pojawia się w równaniu tylko poprzez okresowe składniki, przewidujemy, że θ_2 będzie okresowe względem τ , a zatem średnia z jego pochodnych wynosi również 0. Pozostaje nam jedynie rozwiązać równanie wiodącego rzędu dla θ_0 :

$$\ddot{\theta}_0 = \sin \theta_0.\tag{3.27}$$

To przybliżenie wystarcza dla naszych potrzeb i nie będziemy kontynuować dalszej analizy wielu skal. Z tego wynika, że

$$\theta(T) \approx \tilde{\theta}_0(T), \quad \epsilon \ll 1,\tag{3.28}$$

gdzie $\tilde{\theta}_0$ jest dane przez rozwiązanie (3.27). Równanie (3.27) może być rozwiązane analitycznie za pomocą funkcji eliptycznej Jacobiego. Zauważmy również, że jeśli ustalimy $T = \epsilon\tau$ i rozwiniemy rozwiązanie (3.27) ze względu na $\epsilon \rightarrow 0$, dla ustalonego τ , to pierwsze dwa wyrazy odpowiadają nieperiodycznej części (3.16) z τ^+ zastąpionym przez τ . Ponadto, jeśli dokonamy rozsądnego założenia małego kąta $\sin \theta = \theta + O(\theta^3)$, to otrzymamy dla $\epsilon \ll 1, \alpha \ll 1$

$$\theta(T) \approx -\alpha \cosh T + \theta_d \sinh T.\tag{3.29}$$

W tym miejscu należy dodać, że przybliżenia

$$\begin{aligned}\tilde{L}(T) &= 1 - \epsilon L_d \sin(\epsilon^{-1}T) - \epsilon^2(1 - \cos(\epsilon^{-1}T)), \\ \tilde{\theta}(T) &= \theta_d \sinh T - \alpha \cosh T,\end{aligned}\tag{3.30}$$

zostały heurystycznie uzyskane przez Wróblewską [58] korzystając z założenia małego kąta θ , czyli w konsekwencji stosując przybliżenia $\sin \theta \approx \theta$, oraz $L \approx 1$.

Oczywiście możemy kontynuować podejście wielu skal i uzyskać wyższe rzędy przybliżeń. Ponadto, aby ta analiza była bardziej skuteczna, powinniśmy również uwzględnić rozwinięcie długości wahadła L w skali T . Nie będziemy jednak kontynuować tego tematu, ponieważ przybliżenia stają się szybko bardzo skomplikowane i nie są potrzebne w dalszej części pracy.

Powyższa analiza miała za zadanie nie tylko jasno przedstawić możliwą formę rozwinięcia asymptotycznego zmiennych biegunowych, ale też zilustrować wzajemne oddziaływanie wielu skal czasowych. Warto podkreślić, że prezentowane tu podejście jest systematyczne. Równania są rozwijane względem ϵ , gdzie sztywność nogi K w rzeczywistym biegu długodystansowym wynosi od 12 do 50 (patrz Tab. 2.1), czyli ϵ nawet dla wolnych biegów jest mały. Systematyczność polega na tym, że zaniedbuje się wyrazy odpowiedniego rzędu i w konsekwencji można udowodnić, że błędy przybliżeń są $O(\epsilon^3)$ dla szybkiej skali czasowej oraz $O(\epsilon^2)$ dla wolnej skali czasowej. W kolejnym rozdziale przejdziemy do dowodu tego wyniku.

3.1.2 BŁĘDY PRZYBLIŻEŃ

Na początku przedstawimy następujący rezultat, który jest uogólnieniem lematu Grönwalla - Belmana. Jego uogólniona wersja została udowodniona w pracy [31], a uproszczony dowód potrzebnego nam przypadku, który zamieścimy poniżej, został przedstawiony w pracy [54].

Lemat 1. *Niech $\psi = \psi(t)$ oraz $f = f(t)$ będą funkcjami ciągłymi i dodatnimi. Załóżmy, że zachodzi następująca nierówność*

$$\psi(t) \leq f(t) + C \int_0^t (t-s)\psi(s)ds, \quad (3.31)$$

dla $C > 0$. Wtedy

$$\psi(t) \leq f(t) + \sqrt{C} \int_0^t \sinh(\sqrt{C}(t-s))f(s)ds. \quad (3.32)$$

W szczególności, gdy $f \equiv D = \text{const.}$ mamy

$$\psi(t) \leq D \cosh(\sqrt{C}t). \quad (3.33)$$

Teraz możemy przejść do głównego twierdzenia w tym rozdziale dotyczącego błędów przybliżeń w szybkiej skali czasowej.

Twierdzenie 1 (Asymptotyka w szybkiej skali czasowej). *Niech $(L(\tau^+), \theta(\tau^+))$ będzie rozwiązaniem (3.3). Wtedy zachodzi następujące zachowanie asymptotyczne*

$$|L(\tau^+) - \tilde{L}(\tau^+)| = O(\epsilon^3), \quad |\theta(\tau^+) - \tilde{\theta}(\tau^+)| = O(\epsilon^3), \quad \text{gdy } \epsilon \rightarrow 0^+, \quad (3.34)$$

jednostajnie dla $\tau^+ \leq T < \infty$, gdzie $\tilde{L}$ i $\tilde{\theta}$ są zdefiniowane odpowiednio przez (3.14) oraz (3.16).

Dowód. Zaczynamy od znalezienia asymptotycznego zachowania L , gdzie

$$L(T) = \tilde{L}(T) + \varrho(T), \quad (3.35)$$

oraz $\tilde{L}$ dane jest wzorem (3.14). Zbadamy oszacowanie występującej powyżej reszty ϱ w szybkiej skali czasowej $\tau^+ = \tilde{\omega}(\epsilon)\epsilon^{-1}T$. Ponieważ

$$\frac{d}{d\tau^+} = \epsilon\tilde{\omega}(\epsilon)^{-1} \frac{d}{dT}, \quad (3.36)$$

to zgodnie z (3.14), po podstawieniu (3.35) do pierwszego równania (3.3), równanie dla reszty ϱ ma postać

$$\tilde{\omega}^2 \varrho'' + \varrho = f(\tau^+, \epsilon) + (\epsilon\dot{\theta}(\epsilon\tilde{\omega}^{-1}\tau^+))^2 \varrho, \quad (3.37)$$

gdzie

$$\begin{aligned} f(\tau^+, \epsilon) := & \epsilon \left(1 - \tilde{\omega}^2 - \epsilon^2 \dot{\theta}^2(\epsilon\tilde{\omega}^{-1}\tau^+) \right) L_d \sin \tau^+ + \\ & + \epsilon^2 \left[\dot{\theta}^2(\epsilon\tilde{\omega}^{-1}\tau^+) - \cos \theta(\epsilon\tilde{\omega}^{-1}\tau^+) + \tilde{\omega}^2 (\cos \alpha - \theta_d^2) \cos \tau^+ + \right. \\ & \left. + (\cos \alpha - \theta_d^2) (1 - \cos \tau^+) - \epsilon^2 (\cos \alpha - \theta_d^2) (1 - \cos \tau^+) \dot{\theta}^2(\epsilon\tilde{\omega}^{-1}\tau^+) \right]. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Przypominamy, że tak jak poprzednio pochodną względem τ^+ oznaczamy apostrofem, a pochodną względem T kropką. Poza tym warunki początkowe dla reszty ϱ wynoszą: $\varrho(0) = \varrho'(0) = 0$. Równanie (3.37) można łatwo przekształcić w równanie całkowe za pomocą funkcji Greena $G(\tau^+, s, \epsilon)$ i otrzymać

$$\varrho(\tau^+) = \int_0^{\tau^+} G(\tau^+, s, \epsilon) \left[f(s, \epsilon) + \left(\epsilon\dot{\theta}(\epsilon\tilde{\omega}(\epsilon)^{-1}s) \right)^2 \varrho(s) \right] ds. \quad (3.39)$$

Ponieważ jądrem operatora całkowego (3.39) jest

$$G(\tau^+, s, \epsilon) = \sin \left(\tilde{\omega}(\epsilon)^{-1} (\tau^+ - s) \right), \quad (3.40)$$

to równanie (3.39) wyraża się wzorem

$$\begin{aligned} \varrho(\tau^+) &= \int_0^{\tau^+} \sin(\tilde{\omega}(\epsilon)^{-1}(\tau^+ - s)) f(s, \epsilon) ds + \\ &+ \epsilon^2 \int_0^{\tau^+} \sin(\tilde{\omega}(\epsilon)^{-1}(\tau^+ - s)) \dot{\theta}^2(\epsilon \tilde{\omega}(\epsilon)^{-1} s) \varrho(s) ds. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Następnie pokażemy, że $f(\tau^+, \epsilon) = O(\epsilon^3)$ jednostajnie względem $\tau^+ \leq T$ dla $\epsilon \rightarrow 0$. Po pierwsze z (3.14) dostajemy

$$1 - \tilde{\omega}^2 - \epsilon^2 \dot{\theta}^2(\epsilon \tilde{\omega}^{-1} \tau^+) = \epsilon^2 \left(\theta_d^2 - \dot{\theta}^2(\epsilon \tilde{\omega}^{-1} \tau^+) - \frac{1}{4} \epsilon^2 \theta_d^4 \right). \quad (3.42)$$

Przez ciągłość jednostajną na przedziałach zwartych mamy

$$\dot{\theta}^2(\epsilon \tilde{\omega}^{-1} \tau^+) = \theta_d^2 + O(\epsilon), \quad (3.43)$$

a zatem z (3.42) oraz (3.43) pierwszy składnik definicji f (patrz (3.38)) jest $O(\epsilon^4)$, gdy $\epsilon \rightarrow 0$. Po drugie wyrażenie w nawiasach kwadratowych drugiego składnika definicji (3.38) można zapisać jako

$$\begin{aligned} &\dot{\theta}^2(\epsilon \tilde{\omega}^{-1} \tau^+) - \theta_d^2 + \cos \alpha - \cos \theta(\epsilon \tilde{\omega}^{-1} \tau^+) + \epsilon^2 (\cos \alpha - \theta_d^2) (\dot{\theta}^2(\epsilon \tilde{\omega}^{-1} \tau^+) - \theta_d^2) \cos \tau^+ - \\ &- \epsilon^2 (\cos \alpha - \theta_d^2) \dot{\theta}^2(\epsilon \tilde{\omega}^{-1} \tau^+) + \frac{1}{4} \epsilon^4 \theta_d^4 (\cos \alpha - \theta_d^2) \cos \tau^+. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Wykorzystując (3.43) oraz obserwując, że $\cos \alpha - \cos \theta(\epsilon \tilde{\omega}^{-1} \tau^+) = O(\epsilon)$ wyrażenie (3.44) jest $O(\epsilon)$. W końcu, łącząc oszacowania rzędów obu składników możemy wywnioskować, że

$$|f(\tau^+, \epsilon)| \leq D\epsilon^3 \text{ jednostajnie dla } \tau^+ \leq T, \text{ gdy } \epsilon \rightarrow 0, \quad (3.45)$$

dla pewnej stałej $D > 0$. Ponieważ $|\sin(u - v)| \leq |u - v|$ i $\dot{\theta}$ jest ograniczone (patrz (3.43)), z równania całkowego (3.41) otrzymujemy

$$|\varrho(\tau^+)| \leq D\epsilon^3 + C\epsilon^2 \int_0^{\tau^+} (\tau^+ - s) |\varrho(s)| ds, \quad (3.46)$$

gdzie $C > 0$. Dalej z **Lematu 1** wynika, że

$$|\varrho(\tau^+)| \leq D\epsilon^3 \cosh(\sqrt{C}\epsilon\tau^+) \leq D\epsilon^3 \cosh(\sqrt{C}T\epsilon) = O(\epsilon^3), \text{ gdy } \epsilon \rightarrow 0, \quad (3.47)$$

co kończy pierwszą część dowodu.

Drugą część dowodu zaczniemy od zapisania

$$\theta(T) = \tilde{\theta}(T) + \psi(T), \quad (3.48)$$

dla $\tilde{\theta}$ zdefiniowanego wzorem (3.16). W skali czasowej τ^+ , z drugiego równania (3.3), dostajemy następujące równanie dla reszty ψ

$$L\psi'' + 2L'\psi' = g(\tau^+, \epsilon) + \tilde{\omega}^{-2}\epsilon^2 \sin(\tilde{\theta} + \psi), \quad (3.49)$$

gdzie

$$g(\tau^+, \epsilon) := 2\epsilon L'(-\theta_d + \epsilon(\sin \alpha)\tau^+ - 2\epsilon L_d \theta_d \sin \tau^+) + \epsilon^2 L(\sin \alpha - 2L_d \theta_d \cos \tau^+). \quad (3.50)$$

Możemy przekształcić równanie (3.49) w jego równoważną postać całkową, mnożąc (3.49) przez L i całkując dwukrotnie, pamiętając o znikających warunkach początkowych dla reszty ψ : $\psi(0) = \psi'(0) = 0$. Stąd,

$$\psi(\tau^+) = \int_0^{\tau^+} G(\tau^+, s, \epsilon) \left[g(s, \epsilon) + \tilde{\omega}^{-2}\epsilon^2 \sin(\tilde{\theta}(s) + \psi(s)) \right] ds, \quad (3.51)$$

gdzie jądro operatora całkowego (3.51) jest zdefiniowane następująco

$$G(\tau^+, s, \epsilon) = L^{-2}(s) \int_s^{\tau^+} L(u) du. \quad (3.52)$$

Najpierw zbadamy zachowanie funkcji g . Z pierwszej części twierdzenia wiadomo, że

$$L = 1 - \epsilon L_d \sin \tau^+ + O(\epsilon^2) \text{ jednostajnie dla } \tau^+ \leq T, \text{ gdy } \epsilon \rightarrow 0. \quad (3.53)$$

Zatem wstawiając (3.53) do (3.50) otrzymujemy

$$\begin{aligned} g(\tau^+, \epsilon) &= \epsilon^2 \left[2L_d \cos \tau^+ \left(\theta_d - \epsilon(\sin \alpha)\tau^+ + 2\epsilon L_d \theta_d \sin \tau^+ \right) + \right. \\ &\quad \left. + (1 - \epsilon L_d \sin \tau^+) (\sin \alpha - 2L_d \theta_d \cos \tau^+) \right] + O(\epsilon^3). \end{aligned} \quad (3.54)$$

Teraz pomijając wyrażenie z $\cos \tau^+$ dostajemy

$$g(\tau^+, \epsilon) = \epsilon^2 \sin \alpha + O(\epsilon^3) \quad (3.55)$$

i równanie całkowe (3.51) ma postać

$$\psi(\tau^+) = \epsilon^2 \int_0^{\tau^+} G(\tau^+, s, \epsilon) \left[\tilde{\omega}^{-2} \sin(\tilde{\theta}(s) + \psi(s)) + \sin \alpha + O(\epsilon) \right] ds. \quad (3.56)$$

Następnie fakt, że $\tilde{\theta} + \alpha = O(\epsilon)$ implikuje proste oszacowanie

$$\begin{aligned} \left| \tilde{\omega}^{-2} \sin(\tilde{\theta}(s) + \psi(s)) + \sin \alpha \right| &\leq \tilde{\omega}^{-2} \left| \sin(\tilde{\theta}(s) + \psi(s)) + \sin \alpha \right| + \left| \sin \alpha \right| |\tilde{\omega}^{-2} - 1| \\ &\leq \tilde{\omega}^{-2} |\psi(s)| + O(\epsilon). \end{aligned} \quad (3.57)$$

Ponadto ze względu na asymptotyczne rozwinięcie L (patrz (3.53)), jądro (3.52) można zapisać jako

$$G(\tau^+, s, \epsilon) = \tau^+ - s + O(\epsilon), \quad (3.58)$$

jednostajnie dla $\tau^+ \leq T$, gdy $\epsilon \rightarrow 0$. Zatem łącząc (3.57) i (3.58) z (3.56) dochodzimy do oszacowania

$$|\psi(\tau^+)| \leq E\epsilon^3 + F\epsilon^2 \int_0^{\tau^+} (\tau^+ - s)|\psi(s)|ds, \quad (3.59)$$

dla pewnych stałych $E, F > 0$, względem $\tau^+ \leq T$. W końcu ponowne wykorzystanie **Lematu 1** daje wynik

$$|\psi(\tau^+)| \leq E\epsilon^3 \cosh(\sqrt{F}\epsilon\tau^+) \leq E\epsilon^3 \cosh(\sqrt{F}\epsilon T) = O(\epsilon^3), \quad \text{gdy } \epsilon \rightarrow 0, \quad (3.60)$$

co kończy dowód. $\square$

W powyższym dowodzie możemy zauważyć, że dla obu końcowych oszacowań reszt ϱ i ψ , danych wzorami (3.47) i (3.60), moglibyśmy uwzględnić skalę czasową jednostajnie dla $\tau^+ \leq \epsilon^{-1}T$. Wówczas w wolnej skali czasowej tracimy jeden rząd zbieżności i otrzymujemy wniosek.

Wniosek 1. *Niech $(L(\tau^+), \theta(\tau^+))$ będzie rozwiązaniem (3.3). Wtedy zachodzi następujące zachowanie asymptotyczne*

$$|L(\tau^+) - \tilde{L}(\tau^+)| = O(\epsilon^2), \quad |\theta(\tau^+) - \tilde{\theta}(\tau^+)| = O(\epsilon^2), \quad \text{gdy } \epsilon \rightarrow 0^+, \quad (3.61)$$

jednostajnie na rozszerzonym przedziale $\tau^+ \leq \epsilon^{-1}T < \infty$, gdzie $\tilde{L}$ i $\tilde{\theta}$ są zdefiniowane odpowiednio przez (3.14) i (3.16).

Dowód. Wystarczy ponownie przeanalizować dowód **Twierdzenia 1**. Ponieważ wyrażenie $\epsilon\tau^+$ pozostaje teraz ograniczone, możemy stwierdzić, że $|f(\tau^+, \epsilon)| \leq D\epsilon^2$. Końcowe oszacowanie (3.47) jest w tym przypadku następujące

$$|\varrho(\tau^+)| \leq D\epsilon^2 \cosh(\sqrt{C}\epsilon\tau^+) \leq D\epsilon^2 \cosh(\sqrt{C}T) = O(\epsilon^2), \quad \text{gdy } \epsilon \rightarrow 0. \quad (3.62)$$

Dowód dla ψ należy zmienić dokładnie w ten sam sposób wykorzystując fakt, że $g(\tau^+, \epsilon) = \epsilon^2 \sin \alpha + O(\epsilon^2)$. Zatem (3.61) zachodzi jednostajnie, gdy $\tau^+ \leq \epsilon^{-1}T < \infty$. $\square$

Twierdzenie 1 oraz **Wniosek 1** odzwierciedlają wzajemne oddziaływanie skal czasowych. Długość wahadła L oscyluje na skali τ^+ z okresem zależnym od zachowania θ na wolnej skali czasowej. Ponieważ $\theta(\tilde{\omega}^{-1}\epsilon\tau^+)$ jest funkcją jednostajnie ciągłą tylko na zwartych podzbiorach τ^+ , asymptotyczne rozwinięcia tracą jeden rząd. Gdyby nie było sprzężenia między L i θ szereg Poincarégo - Lindstedta przybliżałby rozwiązania układu (2.29) bez straty rzędu na rozszerzonych względem ϵ przedziałach, to znaczy, gdy $\tau^+ \leq \epsilon^{-1}T$. Mając na uwadze powyższą dyskusję, możemy udowodnić asymptotyczne rozwinięcie θ pierwszego rzędu na wolnej skali T .

Twierdzenie 2 (Asymptotyka w wolnej skali czasowej). Niech $\theta = \theta(T)$ będzie rozwiązaniem układu (2.29). Wówczas,

$$|\theta(T) - \tilde{\theta}_0(T)| = O(\epsilon), \quad \text{gdy } \epsilon \rightarrow 0, \quad (3.63)$$

jednostajnie dla $T \leq T$, gdzie $\tilde{\theta}_0$ jest zdefiniowane poprzez (3.28).

Dowód. Równanie całkowe dla θ , które można otrzymać z pierwszego równania układu (2.29):

$$\frac{d}{dT}(L^2\dot{\theta}) = L \sin \theta, \quad (3.64)$$

ma następującą postać

$$\theta(T) = -\alpha + \theta_d \int_0^T L^{-2}(s)ds + \int_0^T G(T, s, \epsilon) \sin \theta(s)ds, \quad (3.65)$$

gdzie jądro dane jest wzorem (3.52). Teraz przyjmując

$$\theta(T) = \tilde{\theta}_0(T) + \psi(T), \quad (3.66)$$

dla $\tilde{\theta}_0(T)$, które jest rozwiązaniem (3.27) z pierwotnymi warunkami początkowymi (2.30), dostajemy $\psi(0) = \dot{\psi}(0) = 0$. Zgodnie z powyższym argumentem, mamy

$$\psi(T) = \int_0^T G(T, s, \epsilon) [\sin(\theta_0(s) + \psi(s)) - L(s)\ddot{\theta}_0(s) - 2\dot{L}(s)\dot{\theta}_0(s)] ds. \quad (3.67)$$

Następnie, wykorzystując **Wniosek 1** otrzymujemy

$$L(T) = 1 - \epsilon L_d \sin(\tilde{\omega}\epsilon^{-1}T) + \varrho(T), \quad (3.68)$$

gdzie $\varrho(T) = O(\epsilon^2)$ jednostajnie dla $T \leq T$, gdy $\epsilon \rightarrow 0$. Z kolei stosując (3.68) oraz fakt, że $\theta_0 = \sin \theta_0$, z równania (3.67) dostajemy

$$\begin{aligned} \psi(T) = & \int_0^T G(T, s, \epsilon) [\sin(\theta_0(s) + \psi(s)) - \sin \theta_0(s)] ds + \\ & + \int_0^T G(T, s, \epsilon) \left[\epsilon L_d \sin\left(\tilde{\omega}(\epsilon) \frac{s}{\epsilon}\right) - \varrho(s) \right] \sin \theta_0(s) ds + \\ & + 2 \int_0^T G(T, s, \epsilon) \dot{\theta}_0(s) \left[L_d \tilde{\omega}(\epsilon) \cos\left(\tilde{\omega}(\epsilon) \frac{s}{\epsilon}\right) - \dot{\varrho}(s) \right] ds =: g_1(T) + g_2(T) + g_3(T). \end{aligned} \quad (3.69)$$

Przejdźmy do oszacowania poszczególnych składników g_i , $i = 1, 2, 3$. Pierwszy składnik g_1 możemy oszacować w następujący sposób

$$|g_1(T)| \leq E_1 \int_0^T (T-s)|\psi(s)|ds, \quad (3.70)$$

gdzie $E_1 > 0$. Z kolei dla drugiego składnika mamy po prostu

$$|g_2(T)| \leq F_2 \int_0^T (T-s)(\epsilon + \epsilon^2)ds \leq E_2\epsilon, \quad (3.71)$$

gdzie stałe E_2, F_2 są dodatnie oraz wykorzystujemy fakt, że $T \leq \mathcal{T}$. Ponieważ kropką oznaczamy pochodną względem T , to w ostatnim składniku mamy $\dot{\varrho} = O(\epsilon)$ i dalej poprzez całkowanie przez części dostajemy

$$\begin{aligned} \int_0^T G(T, s, \epsilon) \dot{\theta}_0(s) \tilde{\omega}(\epsilon) \cos\left(\tilde{\omega}(\epsilon) \frac{s}{\epsilon}\right) ds &= \left[\epsilon G(T, s, \epsilon) \dot{\theta}_0(s) \sin\left(\tilde{\omega}(\epsilon) \frac{s}{\epsilon}\right) \right]_{s=0}^T - \\ &- \epsilon \int_0^T \frac{d}{ds} \left(G(T, s, \epsilon) \dot{\theta}_0(s) \right) \sin\left(\tilde{\omega}(\epsilon) \frac{s}{\epsilon}\right) ds = -\epsilon \int_0^T \frac{d}{ds} \left(G(T, s, \epsilon) \dot{\theta}_0(s) \right) \sin\left(\tilde{\omega}(\epsilon) \frac{s}{\epsilon}\right) ds, \end{aligned} \quad (3.72)$$

co prowadzi nas do następującego oszacowania g_3 :

$$|g_3(T)| \leq E_3\epsilon, \quad (3.73)$$

gdzie $E_3 > 0$. W końcu łącząc (3.70), (3.71) i (3.73) możemy oszacować ψ

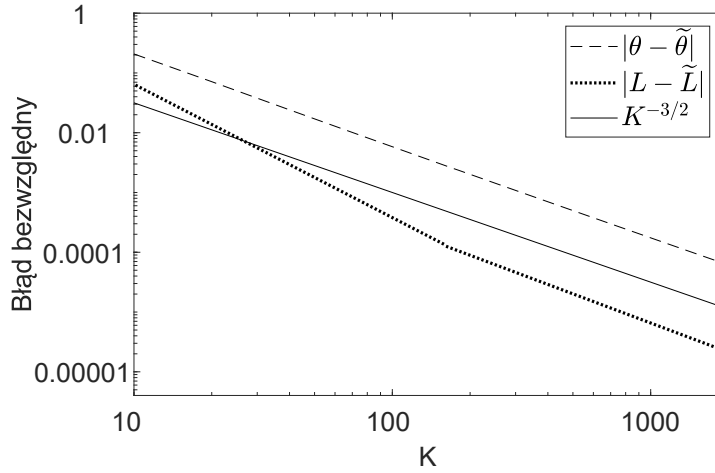
$$|\psi(t)| \leq E\epsilon + F \int_0^t (t-s)|\psi(s)|ds, \quad (3.74)$$

dla pewnych stałych $E, F > 0$ i z **Lematu 1** otrzymujemy

$$|\psi(T)| \leq E\epsilon \cosh(\sqrt{F}T) \leq E\epsilon \cosh(\sqrt{F}T) = O(\epsilon), \quad \text{gdy } \epsilon \rightarrow 0, \quad (3.75)$$

co kończy dowód. $\square$

W ten sposób znaleźliśmy dokładne asymptotyczne rozwinięcie L i θ w dwóch skalach czasowych. Teraz przystąpimy do prezentacji symulacji numerycznych w celu ilustracji powyższych wyników. Na Rysunku 3.1 widzimy przykładową ilustrację **Twierdzenia 1**. Błąd jest obliczany na szybkiej skali τ^+ poprzez wybór przedziału zwanego $[0, \pi]$ i porównanie rozwiązań (3.3) z ich przybliżeniami (3.14) i (3.16) w najgorszym przypadku. To znaczy wyznaczamy maksymalne różnice $|L(\tau^+) - \tilde{L}(\tau^+)|$ oraz $|\theta(\tau^+) - \tilde{\theta}(\tau^+)|$ dla $\tau^+ \in [0, \pi]$. Zauważmy, że na skali log-log wykresy stają się równoległe do zaznaczonej na Rysunku 3.1 linii $K^{-3/2}$ wskazującej właściwy rząd zbieżności. Użyliśmy typowych parametrów biegu α, U_{TD} i V_{TD} z Tabeli 2.1.



Rysunek 3.1: Błąd bezwzględny przybliżeń (3.14) i (3.16) dla odpowiadających im rozwiązań układu (3.3) przedstawiony na skali log-log. Linia $y = K^{-3/2}$ (po zlogarytmowaniu linia prosta) jest nałożona dla porównania z rzędem zbieżności. Przyjęte parametry biegu: $\alpha = 0,4$, $U_{TD} = 1$, $V_{TD} = 0,1$ oraz $\tau^+ \in [0, \pi]$.

3.2 PRZYBLIŻENIA MAKSYMALNEGO UGIĘCIA NOGI I PRZYROSTU KĄTA

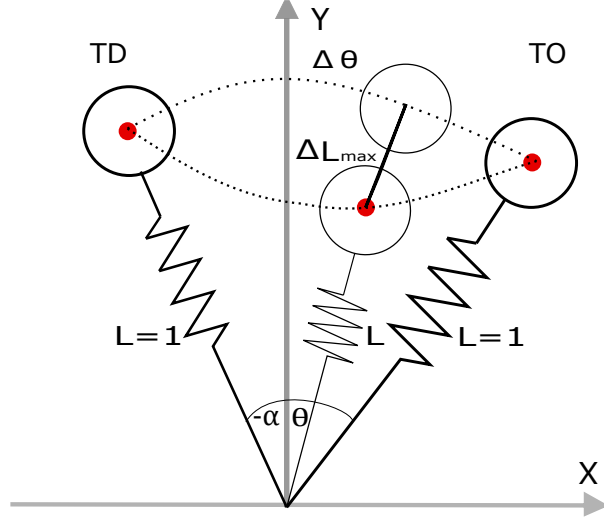
W tym rozdziale przedstawimy kolejne przybliżenia ważnych parametrów fazy podporu, które są wyprowadzone z asymptotycznych rozwiązań nieliniowego układu równań (2.29) z warunkami początkowymi (2.30) (patrz Rozdz. 2.2). Dla przypomnienia przedstawimy jeszcze raz schemat modelu *SLIP* zilustrowany już wcześniej na Rysunku 2.3, ale tym razem w bezwymiarowych współrzędnych biegunowych (L, θ) i z zaznaczonym maksymalnym ugięciem nogi ΔL_{max} oraz przyrostem kąta $\Delta\theta$ (patrz Rys. 3.2).

Ponadto, dla porządku, raz jeszcze zapiszemy asymptotyczne rozwiązania (3.14) oraz (3.16) wyprowadzone z wykorzystaniem szeregu Poincarégo - Lindstedta w Rozdziale 3.1. Stąd, przybliżone rozwiązanie (3.14) dla promienia $L(T)$ podczas fazy podporu opisuje równanie

$$L(T) \approx \tilde{L}(T) := 1 + \epsilon^2(\theta_d^2 - \cos \alpha) - \epsilon L_d \sin(\epsilon^{-1} \tilde{\omega}(\epsilon) T) - \epsilon^2(\theta_d^2 - \cos \alpha) \cos(\epsilon^{-1} \tilde{\omega}(\epsilon) T), \quad (3.76)$$

które sinusoidalnie oscyluje wokół $\tilde{L} = 1 + A(\epsilon)$ z amplitudą $B(\epsilon)$ i częstotliwością $\epsilon^{-1} \tilde{\omega}(\epsilon)$, gdzie

$$A(\epsilon) = \epsilon^2(\theta_d^2 - \cos \alpha), \quad B(\epsilon) = \epsilon \sqrt{\epsilon^2(\theta_d^2 - \cos \alpha)^2 + L_d^2}, \quad (3.77)$$



Rysunek 3.2: Schemat modelu *SLIP*. (X, Y) - bezwymiarowe współrzędne kartezjańskie oraz (L, θ) - bezwymiarowe współrzędne biegunowe, gdzie $L = \sqrt{X^2 + Y^2}$ jest promieniem podczas gdy θ jest kątem pozycji punktu masy. W obu momentach lądowania i odbicia, $L = 1$. Ponadto, na schemacie, zaznaczyliśmy maksymalne ugięcie sprężyny ΔL_{max} oraz przyrost kąta $\Delta \theta$.

oraz $\tilde{\omega}(\epsilon) = 1 - \frac{\theta_d^2}{2}\epsilon^2$. Zatem, używając notacji (3.77), przybliżenie (3.14) zapisane w postaci (3.76) można przedstawić w następujący sposób

$$L(T) = 1 + A(\epsilon) - \epsilon L_d \sin(\epsilon^{-1} \tilde{\omega}(\epsilon) T) - A(\epsilon) \cos(\epsilon^{-1} \tilde{\omega}(\epsilon) T). \quad (3.78)$$

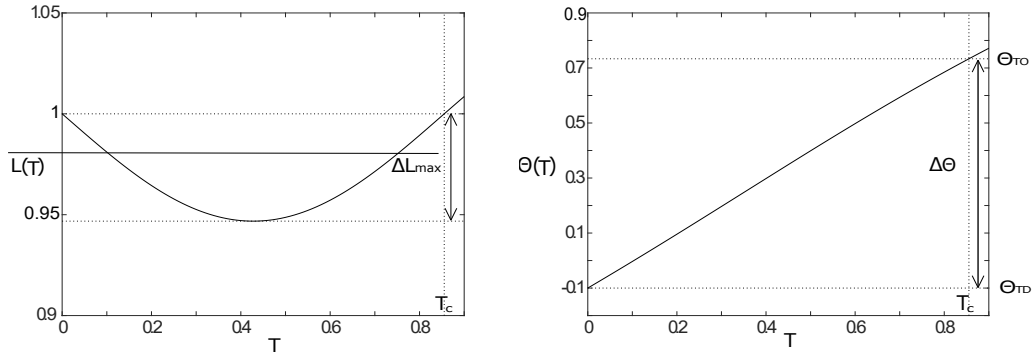
Natomiast przybliżenie dla kąta $\theta(T)$ (patrz (3.16)) podczas fazy podparcia ma następującą postać

$$\theta(T) = -\alpha + \epsilon \theta_d \tilde{\omega}(\epsilon) T - \frac{1}{2} (\tilde{\omega}(\epsilon) T)^2 \sin \alpha + 2\epsilon^2 L_d \theta_d (1 - \cos(\epsilon^{-1} \tilde{\omega}(\epsilon) T)). \quad (3.79)$$

We wzorach (3.78) oraz (3.79), jak i we wszystkich przybliżeniach w tym rozdziale, dla uproszczenia oznaczeń pomijamy znak tyldy.

Aby zilustrować obie powyższe aproksymacje dla L i θ , na Rysunku 3.3, zastosowaliśmy numeryczny algorytm oparty na metodzie Rungego-Kutty czwartego rzędu do rozwiązania układu (2.29) z warunkami początkowymi (2.30). Jak pokazano na Rysunku 3.3 po lewej, powyższe rozwiązanie dotyczy tylko wartości $L(T) \leq 1$ i aby wyznaczyć czas trwania fazy podparcia należy sprawdzić w jakim momencie długość sprężyny powróci do wartości 1. Zatem, w wyrażeniu (3.78) parametr T przyjmuje wartości od 0 do czasu kontaktu z podłożem T_c , który dany jest wzorem

$$T_c = \frac{2\epsilon}{\tilde{\omega}(\epsilon)} \arccos \frac{A(\epsilon)}{B(\epsilon)} = \frac{4\epsilon}{2 - \epsilon^2 \theta_d^2} \arccos C(\epsilon), \quad (3.80)$$



Rysunek 3.3: Aproksymacje promienia L i kąta θ dane wzorami (3.78) oraz (3.79) podczas fazy kontaktu. Przyjęte parametry biegu: kąt ataku $\alpha = 0,1$, prędkości pozioma i pionowa podczas lądowania $U_{TD} = 1$, $V_{TD} = 0,1$ oraz sztywność sprężyny $K = 15$.

gdzie

$$C(\epsilon) = \frac{A(\epsilon)}{B(\epsilon)} = \frac{\epsilon(\theta_d^2 - \cos \alpha)}{\sqrt{\epsilon^2(\theta_d^2 - \cos \alpha)^2 + L_d^2}}, \quad (3.81)$$

i $\epsilon \rightarrow 0^+$. Na Rysunku 3.3 po lewej widzimy, że rzeczywiście $L(0) = L(T_c) = 1$ i ponadto $L(T_c/2) = 1 - \Delta L_{max}$, gdzie ΔL_{max} oznacza maksymalne odkształcenie nogi w trakcie fazy podparcia. Ponieważ łatwo można sprawdzić, że

$$L(T_c/2) = 1 + A(\epsilon) - B(\epsilon), \quad (3.82)$$

to maksymalne ugięcie sprężyny ΔL_{max} dane jest różnicą amplitudy $B(\epsilon)$ ruchu promieniowego $L(T)$ i przesunięcia amplitudy do pozycji kontaktu z podłożem oznaczonego przez $A(\epsilon)$, czyli

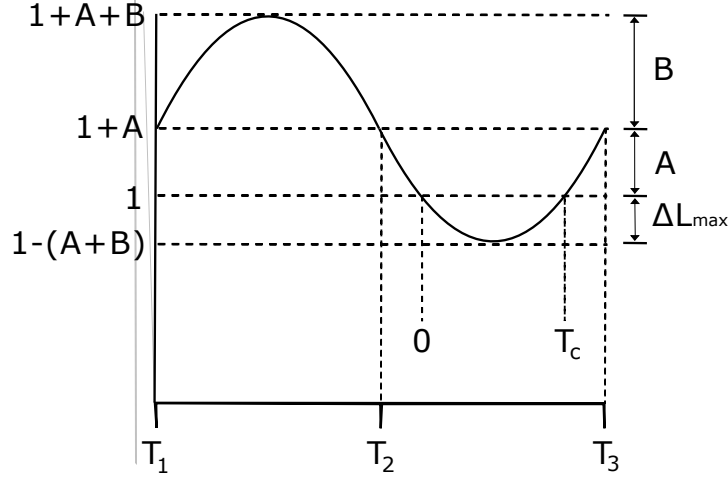
$$\Delta L_{max} = B(\epsilon) - A(\epsilon). \quad (3.83)$$

Ograniczenie do małych wartości $L - 1$ wykorzystywane w pracach [28, 58] jest więc adekwatnie sformułowane jako, że ze wzoru (3.77) mamy $B(\epsilon) - A(\epsilon) = O(\epsilon) \ll 1$ gdy $\epsilon \rightarrow 0^+$.

Dodatkowo zauważmy, że przesunięcie $A(\epsilon)$ może przyjąć zarówno wartość ujemną dla wolnych biegów, gdy $\theta_d < \sqrt{\cos \alpha}$, co spowoduje przesunięcie wartości 1 powyżej $1 + A(\epsilon)$ i zwiększy maksymalne sprężenie nogi ΔL_{max} , jak i dodatnią dla szybszych biegów, gdy $\theta_d > \sqrt{\cos \alpha}$, co spowoduje przesunięcie wartości 1 poniżej $1 + A(\epsilon)$ i zmniejszy ΔL_{max} . Dla ilustracji wzoru (3.83) odwołujemy się do Rysunku 3.4, na którym narysowano wykres funkcji promienia $L(T)$ danego wzorem (3.78) i zaznaczono przesunięcie $A(\epsilon)$ oraz amplitudę $B(\epsilon)$. Aby wyznaczyć przedział (T_1, T_3) długości $2\pi\epsilon/\tilde{\omega}(\epsilon)$, na którym rysujemy funkcję $L(T)$, rozwiązujemy równanie $L(T) = 1 + A(\epsilon)$ i dostajemy środek zakresu (T_1, T_3) , oznaczony przez T_2 , dany wzorem

$$T_2 = -\frac{\epsilon}{\tilde{\omega}(\epsilon)} \arctg \frac{A(\epsilon)}{\epsilon L_d}. \quad (3.84)$$

Zatem $T_1 = T_2 - \pi\epsilon/\tilde{\omega}(\epsilon)$ oraz $T_3 = T_2 + \pi\epsilon/\tilde{\omega}(\epsilon)$.



Rysunek 3.4: Ogólne rozwiązanie dla ruchu promienia $L(T)$ podczas podporu opisujące oscylację sinusoidalną wokół $1 + A(\epsilon)$ z amplitudą $B(\epsilon)$ i częstotliwością $\epsilon^{-1}\tilde{\omega}(\epsilon)$. Przyjęte parametry biegu: kąt ataku, prędkość pionowa podczas lądowania oraz sztywność sprężyny takie same jak na Rysunku 3.3, natomiast prędkość pozioma $U_{TD} = 1,2$, co daje dodatnie przesunięcie względem kontaktu z podłożem, gdzie $L(T) = 1$. Rozwiązanie zachodzi tylko dla $L(T) \leq 1$.

W przypadku danych z Rysunku 3.3, otrzymujemy $A(\epsilon) = -0,0016$ oraz $B(\epsilon) = 0,0515$, gdzie $\epsilon = 1/\sqrt{15}$. Stąd $\Delta L_{max} = 0,0531$, i możemy sprawdzić, że $\Delta L_{max} = 1 - L(T_c/2)$, gdzie $T_c = 0,8558$. Natomiast dla danych z Rysunku 3.4, dostajemy $A(\epsilon) = 0,02713$ oraz $B(\epsilon) = 0,06279$, gdzie jak w pierwszym przypadku $\epsilon = 1/\sqrt{15}$. Stąd $\Delta L_{max} = 0,03566$, i możemy sprawdzić, że $\Delta L_{max} = 1 - L(T_c/2)$, gdzie $T_c = 0,6089$.

Przybliżone rozwiązanie dla ruchu kąta podczas fazy kontaktu dane jest wzorem (3.79). Zauważmy, że $\theta(0) = \theta_{TD} = -\alpha$ i $\theta(T_c) = \theta_{TO} = \Delta\theta + \theta_{TD} = \Delta\theta - \alpha$ (patrz Rys. 3.3 po prawej stronie). Ze wzorów (3.79) oraz (3.80) otrzymujemy przyrost kąta podczas fazy podparcia $\Delta\theta$:

$$\Delta\theta = \theta(T_c) + \alpha = 2\epsilon\theta_d \times \left[\arccos C(\epsilon) + 2\epsilon L_d (1 - C^2(\epsilon)) \right] - 2\epsilon^2 \sin \alpha (\arccos C(\epsilon))^2, \quad (3.85)$$

gdzie $C(\epsilon)$ zostało już zdefiniowane w (3.81). Widać, że kąt przesunięcia $\Delta\theta$ jest jednoznacznie określony przez stan systemu w chwili lądowania $(\dot{L}_{TD}, \theta_{TD}, \theta_{TD})$ oraz parametr sztywności sprężyny K . Przypominamy, że kropka w tym rozdziale oznacza pochodną po T . Ponadto, kąt lądowania $\theta_{TD} = -\alpha$ wpływa na $\Delta\theta$ również poprzez określenie prędkości radialnej $\dot{L}_{TD} = -L_d$ oraz kątowej $\dot{\theta}_{TD} = \theta_d$. Dla danych przedstawionych na Rysunku 3.3 po prawej mamy $\theta(T_c) = \theta_{TO} = 0,7334$. Stąd $\Delta\theta = \theta_{TO} - \theta_{TD} = 0,8334$. Co zgadza się z wartością obliczoną z formuły (3.85).

Wreszcie, zauważmy, że rozwinięcie w szereg Taylora funkcji (3.85) do drugiego rzędu wokół $\epsilon = 0$ daje jest znacznie prostszym wzorem

$$\Delta\theta = \pi\theta_d\epsilon + \left[4\theta_d L_d - 2\frac{\theta_d}{L_d}(\theta_d^2 - \cos\alpha) - \frac{1}{2}\pi^2 \sin\alpha \right] \epsilon^2, \quad (3.86)$$

gdzie $\epsilon \rightarrow 0$. Ponieważ przybliżenie $\Delta\theta$ podane wzorem (3.85) jest rzędu ϵ^2 , wszystkie wyrażenia rzędu $O(\epsilon^3)$ we wzorze (3.86) są pomijane, a systematyczne podejście pozwala na kontrolę błędów przybliżeń.

Na koniec sprawdzimy jak upraszcza się przybliżenie (3.86), gdy

$$C(\epsilon) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \theta_d = \sqrt{\cos\alpha}. \quad (3.87)$$

Wówczas kąt przesunięcia $\Delta\theta$ dany jest wzorem

$$\Delta\theta = \pi\theta_d\epsilon + \left[4\theta_d L_d - \frac{1}{2}\pi^2 \sin\alpha \right] \epsilon^2. \quad (3.88)$$

Okazuje się, że przypadek (3.87) szeroko omawiany w pracach [28, 60] jest ważny zarówno pod kątem matematycznym jak i biomechanicznym. Naturalna częstotliwość nogi jako sprężyny, zgrzywa się wtedy z częstotliwością nogi jako wahadła (patrz Rys. 3.4). Dzięki temu biegacz może wykorzystać sprężysty charakter tkanek, czyli odciążyć mięśnie szkieletowe, których praca wymaga dostępności substratów energetycznych. Taka zależność, przy założeniu małych kątów, występuje, kiedy $U_{TD} \approx \theta_d = \sqrt{\cos\alpha} \approx 1$, czyli przy biegu z tempem około 5,5 min/km. Ciekawe jest, że biegnący z taką prędkością człowiek jest najbardziej wydajny. Koszt energetyczny takiego biegu jest porównywalny z energią wydatkowaną podczas biegu wolniejszego, a w przypadku szybszego biegu jest on już znacząco wyższy.

3.3 PRZYBLIŻENIE SZTYWNOŚCI SPRĘŻYNY

Na początku tego rozdziału przedstawimy dowód istnienia jednoznacznego rozwiązania ogólnego zagadnienia brzegowego, co jest istotne z punktu widzenia zastosowań w mechanice *SLIP*. Jak widzimy w Tabeli 3.1 typowy bieg jest asymetryczny, gdzie kąt odbicia β jest znacznie większy od kąta lądowania α . Symetryczne zagadnienia brzegowe, gdy $\alpha = \beta$, były już rozważane na przykład w pracach [41, 54]. Poniżej przedstawimy zagadnienie brzegowe w przypadku ogólnym, to znaczy, gdy dopuszczamy asymetrię $\alpha \neq \beta$.

Zagadnienie 1. Niech $(\theta(T, K), L(T, K))$ będzie rozwiązaniem układu równań (2.29) z warunkami początkowymi

$$\theta(0) = \theta_{TD} = -\alpha, \quad L(0) = L_{TD} = 1, \quad \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_{TD} = \theta_d, \quad \dot{L}(0) = \dot{L}_{TD} = -L_d.$$

Znajdźmy sztywność K^* i najmniejszy czas $T^* > 0$, które spełniają warunki

$$\theta(T^*, K^*) = \theta_{TO} = \beta, \quad L(T^*, K^*) = 1, \quad (3.89)$$

gdzie α i β przyjmują wartości dodatnie.

Warunek (3.89) oznacza, że sztywność sprężyny K musi zostać określona w taki sposób, aby podczas jednego cyklu sprężyna wróciła do stanu równowagi, czyli bezwymiarowej długości 1 dokładnie wtedy, gdy wahadło osiągnie kąt $\theta_{TO} = \beta$. Następujące twierdzenie pokazuje, że dla dostatecznie małych kątów brzegowych α i β , zawsze możemy znaleźć jednoznaczne rozwiązanie **Zagadnienia 1**. Przedstawiony poniżej dowód, zamieszczony także w pracy Kowalczyka, Płociniczaka i Wróblewskiej [38] jest analogiczny do wersji symetrycznej (patrz [54]).

Twierdzenie 3 (O istnieniu i jednoznaczności rozwiązania zagadnienia brzegowego). *Istnieje $\gamma_0 > 0$ takie, że **Zagadnienie 1** ma jednoznaczne rozwiązanie dla*

$$\gamma = \alpha + \beta < \gamma_0. \quad (3.90)$$

Ponadto, zachodzi

$$T^* = \pi\epsilon - \frac{2(\theta_d^2 - \cos \alpha)}{L_d} \epsilon^2 + O(\epsilon^3) \quad \text{dla} \quad \epsilon \rightarrow 0^+, \quad (3.91)$$

oraz

$$K^* \approx \widetilde{K}_2 := \left[\frac{\pi\theta_d + \sqrt{\Delta}}{2\gamma} \right]^2, \quad (3.92)$$

gdzie

$$\Delta = \pi^2 \theta_d^2 + 4\gamma \left[4\theta_d L_d - 2 \frac{\theta_d}{L_d} (\theta_d^2 - \cos \alpha) - \frac{1}{2} \pi^2 \sin \alpha \right]. \quad (3.93)$$

Dowód. Korzystając z równania (3.14), czas τ^* pierwszego powrotu $L = \widetilde{L} + O(\epsilon^3)$ do swojego warunku początkowego $L = 1$ spełnia następujące równanie

$$L_d \sin \tau^* - \epsilon (\theta_d^2 - \cos \alpha) (1 - \cos \tau^*) + O(\epsilon^2) = 0, \quad (3.94)$$

dla $\epsilon \rightarrow 0^+$. Ponadto, łatwo sprawdzić, że rozwiązanie równania

$$L_d \sin \mu - \epsilon (\theta_d^2 - \cos \alpha) (1 - \cos \mu) = 0 \quad (3.95)$$

ma postać

$$\mu = 2 \arccos C(\epsilon) = 2 \arccos \left(\frac{\epsilon(\theta_d^2 - \cos \alpha)}{\sqrt{\epsilon^2(\theta_d^2 - \cos \alpha)^2 + L_d^2}} \right), \quad (3.96)$$

gdzie $C(\epsilon)$ dane jest wzorem (3.81). Zastosowanie rozwinięcia Taylora równania (3.96) drugiego rzędu wokół $\epsilon = 0$ prowadzi do przybliżenia szybkiej skali czasu

$$\tau^* = \pi - \frac{2(\theta_d^2 - \cos \alpha)}{L_d} \epsilon + O(\epsilon^2), \quad \text{dla } \epsilon \rightarrow 0^+, \quad (3.97)$$

a ponieważ

$$\tau^* = \epsilon^{-1} \tilde{\omega}(\epsilon) T^*, \quad (3.98)$$

gdzie $\tilde{\omega}(\epsilon) = 1 - \frac{\theta_d^2}{2} \epsilon^2$, to dowodzi (3.91).

Przejdźmy do pokazania istnienia i jednoznaczności. Przyjmijmy, że $\theta(\tau^*) = \beta$. Mnożąc przez L , a następnie całkując dwukrotnie równanie dla θ (patrz drugie równanie (3.3)) i używając jądra (3.52) dla przybliżenia τ^* , to znaczy

$$G(\tau^*(\epsilon), s, \epsilon) = L^{-2}(s) \int_s^{\tau^*(\epsilon)} L(u) du,$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} \beta = \theta(\tau^*(\epsilon)) &= -\alpha + \epsilon \tilde{\omega}(\epsilon)^{-1} \theta_d \int_0^{\tau^*(\epsilon)} L^{-2}(s, \epsilon) ds + \\ &+ \epsilon^2 \tilde{\omega}(\epsilon)^{-2} \int_0^{\tau^*(\epsilon)} G(\tau^*(\epsilon), s, \epsilon) \sin \theta(s, \epsilon) ds. \end{aligned} \quad (3.99)$$

W analogiczny sposób uzyskaliśmy $\theta(T)$ w dowodzie **Twierdzenia 2** (patrz (3.65)). Aby zastosować twierdzenie o funkcji uwikłanej, wprowadzamy

$$F(\gamma, \epsilon) = -\gamma + \epsilon \tilde{\omega}(\epsilon)^{-1} \theta_d \int_0^{\tau^*(\epsilon)} L^{-2}(s, \epsilon) ds + \epsilon^2 \tilde{\omega}(\epsilon)^{-2} \int_0^{\tau^*(\epsilon)} G(\tau^*(\epsilon), s, \epsilon) \sin \theta(s, \epsilon) ds. \quad (3.100)$$

Zauważmy, że $F(0, 0) = 0$ oraz

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \epsilon}(\gamma, \epsilon) &= \tilde{\omega}^{-1} \theta_d \int_0^{\tau^*(\epsilon)} L^{-2}(s, \epsilon) ds + \\ &+ \epsilon \left[\frac{\partial}{\partial \epsilon} \left(\tilde{\omega}^{-1} \theta_d \int_0^{\tau^*(\epsilon)} L^{-2}(s, \epsilon) ds \right) + 2 \tilde{\omega}^{-2} \int_0^{\tau^*(\epsilon)} G(\tau^*(\epsilon), s, \epsilon) \sin \theta(s, \epsilon) ds \right] + \\ &+ \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left(\tilde{\omega}^{-2} \int_0^{\tau^*(\epsilon)} G(\tau^*(\epsilon), s, \epsilon) \sin \theta(s, \epsilon) ds \right). \end{aligned} \quad (3.101)$$

Jeżeli do wzoru (3.101) wstawimy $\epsilon = 0$, pierwsze wyrażenie nie znika i dlatego mamy

$$\frac{\partial F}{\partial \epsilon}(\gamma, 0) = \theta_d \pi \neq 0. \quad (3.102)$$

Zatem, z twierdzenia o funkcji uwikłanej, istnieje liczba dodatnia γ_0 taka, że dla każdego $\gamma \in (-\gamma_0, \gamma_0)$ istnieje dokładnie jedno rozwiązanie $\epsilon(\gamma)$ równania $F(\gamma, \epsilon) = 0$. Stąd wynika, że zagadnienie brzegowe ma jednoznaczne rozwiązanie, bo $K^* = \epsilon^{-2}$.

Ostatnią częścią dowodu jest znalezienie przybliżenia dla sztywności K^* . Ponieważ $\tau^* = \pi - 2\epsilon(\theta_d^2 - \cos \alpha)/L_d + O(\epsilon^2)$, gdy $\epsilon \rightarrow 0$, to wykorzystując przybliżenie $\tilde{\theta}(\tau^*)$ (patrz (3.16)) do wyznaczenia $K^* = \epsilon^{-2}$, otrzymujemy po obcięciu wyrazów $O(\epsilon^3)$ następujące równanie

$$\beta = -\alpha + \epsilon \theta_d \pi + \epsilon^2 \left[4\theta_d L_d - 2\frac{\theta_d}{L_d}(\theta_d^2 - \cos \alpha) - \frac{1}{2}\pi^2 \sin \alpha \right]. \quad (3.103)$$

Powyższe równanie kwadratowe dla $\sqrt{K^*}$ ma tylko jedno rozwiązanie fizycznie sensowne, które wyraża się wzorem (3.92) wraz z (3.93). $\square$

Aby Δ dana przez (3.93) była nieujemna, co w konsekwencji pozwoli na wyznaczenie przybliżenia $\tilde{K}_2$, musi być spełniony następujący warunek

$$\pi^2 L_d (\theta_d^2 - 2\gamma \sin \alpha) \geq 8\gamma \theta_d (\theta_d^2 - \cos \alpha - 2L_d^2), \quad (3.104)$$

gdzie γ określona jest w (3.90). Nierówność (3.104) zachodzi na przykład, gdy

$$\theta_d^2 - 2\gamma \sin \alpha \geq 0 \quad \text{oraz} \quad \theta_d^2 - \cos \alpha - 2L_d^2 \leq 0,$$

to znaczy, jeżeli

$$2\gamma \sin \alpha \leq \theta_d^2 \leq \cos \alpha + 2L_d^2. \quad (3.105)$$

Zatem specjalny przypadek $\theta_d^2 = \cos \alpha$ (patrz (3.87)), omawiany szczegółowo zarówno w Rozdziale 3.2 jak i w pracach [28, 60], spełnia warunek (3.105). Dla małych kątów ataku α , prędkość kątowna w momencie lądowania odnosi się do poziomej liczby Froude'a U_{TD} , gdyż $U_{TD} \approx \theta_d \approx 1$, a ten przypadek opisuje bieg człowieka z prędkością około 11,27 km/h. Można zauważyć, że typowy zakres parametrów θ_d , który został uzyskany w pracy eksperymentalnej [61] i przedstawiony w Tabelach 2.1 oraz 3.1 zawiera się w otoczeniu wartości 1. Tak więc dla parametrów z pracy eksperymentalnej [61] nie ma większego problemu z wyznaczeniem przybliżenia $\tilde{K}_2$.

Oprócz istnienia i jednoznaczności, w **Twierdzeniu 3** uzyskaliśmy przybliżone rozwiązania drugiego rzędu **Zagadnienia 1**. Natomiast we **Wniosku 2**, analogicznie wyprowadzimy rozwiązania pierwszego rzędu tego zagadnienia brzegowego.

Wniosek 2. Rozwiązaniem **Zagadnienia 1** jest

$$T^* = \pi\epsilon + O(\epsilon^2) \quad \text{dla} \quad \epsilon \rightarrow 0^+, \quad (3.106)$$

oraz

$$K^* \approx \widetilde{K}_1 := \left(\frac{\pi \theta_d}{\gamma} \right)^2 = \left[\frac{\pi}{\alpha + \beta} (U_{TD} \cos \alpha - V_{TD} \sin \alpha) \right]^2, \quad (3.107)$$

gdzie γ oraz θ_d dane są wzorami (3.90) i (2.31), odpowiednio.

Dowód. Rozwinięcie w szereg Taylora równania (3.96) (patrz **Twierdzenie 3**), tym razem pierwszego rzędu, wokół $\epsilon = 0$ prowadzi do następującego przybliżenia szybkiej skali czasu

$$\tau^* = \pi + O(\epsilon) \quad \text{dla} \quad \epsilon \rightarrow 0^+, \quad (3.108)$$

a stąd w oczywisty sposób zachodzi (3.106). Ponieważ $\tau^* = \pi + O(\epsilon)$, to do wyznaczenia $\epsilon(\gamma)$ użyjemy $\widetilde{\theta}(\tau^*)$ dane wzorem (3.16) po obcięciu wyrazów $O(\epsilon^2)$. Zatem

$$\beta = -\alpha + \epsilon \theta_d \pi \quad (3.109)$$

i pamiętając, że $\epsilon = 1/\sqrt{K^*}$ rozwiązanie powyższego równania daje (3.107), co kończy dowód. $\square$

Zatem przybliżenie sztywności $\widetilde{K}_2$ dla zagadnienia brzegowego otrzymujemy z rozwinięcia drugiego rzędu, a $\widetilde{K}_1$ z pierwszego rzędu, względem ϵ .

W pracy [52] pokazano wiodące rzędy powyższych przybliżeń (3.106) oraz (3.107), gdy $\gamma \rightarrow 0^+$. Dokładniej wyznaczono następujące rozwinięcia

$$\begin{aligned} K^* &= \left(\frac{\pi U_{TD}}{\gamma} \right)^2 + \left(\pi^2 V_{TD} + \frac{4}{V_{TD}} (1 - U_{TD}^2 + 2V_{TD}^2) \right) \frac{U_{TD}}{\gamma} + O(\gamma^0), \\ T^* &= \frac{\gamma}{U_{TD}} - \frac{\pi^2 + 8}{2\pi^2 U_{TD}^2} \gamma^2 + O(\gamma^3), \end{aligned} \quad \text{gdy } \gamma \rightarrow 0^+, \quad (3.110)$$

w przypadku symetrycznym, to znaczy dla $\gamma = 2\alpha$ (patrz Tw. 1 z pracy [52]). Korzystając ze wzoru (3.110) można pokazać następujące granice

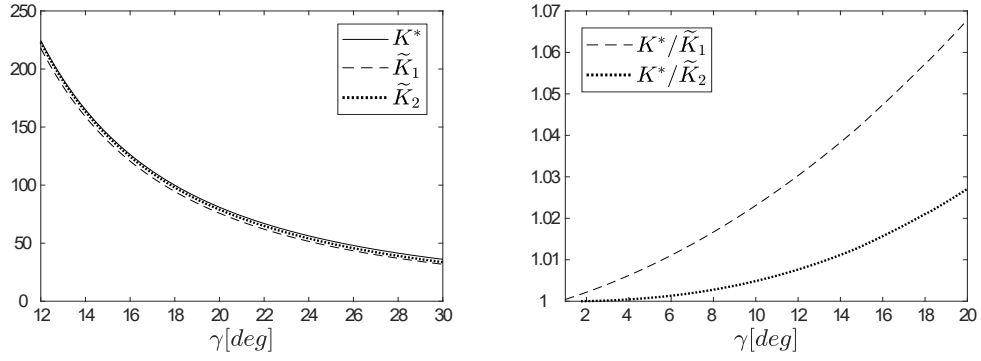
$$\lim_{\gamma \rightarrow 0^+} \gamma^2 K^*(\gamma) = \pi^2 U_{TD}^2, \quad (3.111)$$

oraz

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0^+} \frac{T^*(\gamma)}{\gamma} = \frac{1}{U_{TD}}. \quad (3.112)$$

Ponadto wiodące rzędy K^* oraz T^* wynikają także z lematu, który dla $\gamma = 2\alpha$ znajduje się również w [52] (patrz Lemat 1 z pracy [52]), a w przypadku asymetrycznym, w granicach małych kątów, poniżej.

Lemat 2. Niech $(K^*(\gamma), T^*(\gamma))$ będzie rozwiązaniem **Zagadnienia 1**, gdzie $\gamma = \alpha + \beta$. Wówczas zachodzi (3.111) oraz (3.112).



Rysunek 3.5: Przypadek symetryczny $\alpha = \beta$. Po lewej: porównanie numerycznie wyznaczonej wartości K^* z przybliżeniami sztywności: $\tilde{K}_1$ dane wzorem (3.107) i $\tilde{K}_2$ dane wzorem (3.92) dla zmieniającego się γ od 12° do 30° . Po prawej: stosunek K^* do $\tilde{K}_1$ i $\tilde{K}_2$ dla zmieniającego się γ od 1° do 20° . Przyjęte parametry: $\gamma = \alpha + \beta = 2\alpha$ oraz $U_{TD} = 1, V_{TD} = 0,1$.

Dowód. Idea polega na uzyskaniu z (3.99) niejawnego równania dla K^* :

$$\gamma = \frac{U_{TD} \cos \alpha - V_{TD} \sin \alpha}{\sqrt{K^*}} \int_0^{\tau^*} L^{-2}(s) ds + \frac{1}{K^*} \int_0^{\tau^*} G(\tau^*, s, \epsilon) \sin \theta(s) ds, \quad (3.113)$$

gdzie jądro $G(\tau, s, \epsilon)$ dane jest wzorem (3.52), a przybliżenie szybkiej skali czasu $\tau^* = \sqrt{K}T^*$ przyjmuje postać (3.108). Wiadomo, że istnieje monotoniczna relacja $K^* = K^*(\gamma)$ dla dostatecznie małych γ . Co więcej, $K^* \rightarrow \infty, \tau^* \rightarrow \pi$ oraz $L \rightarrow 1$, jeśli $\gamma \rightarrow 0^+$. Nakładając tę granicę ($\gamma \rightarrow 0^+$) na obie strony równania (3.113), drugi wyraz po prawej stronie znika, ponieważ jądro G jest jednostajnie ograniczone dla każdego γ . Zatem dostajemy

$$K^*(\gamma) \approx \left(\frac{\pi U_{TD}}{\gamma} \right)^2, \quad (3.114)$$

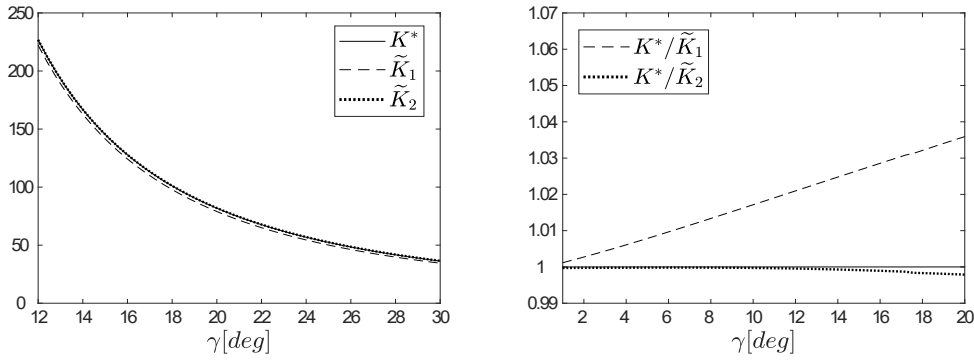
co kończy dowód pierwszej części. Natomiast druga część dowodu, to znaczy (3.112), natychmiastowo wynika z (3.108) i (3.114), bo

$$\tau^* = \gamma^{-1} \sqrt{\gamma^2 K^*(\gamma) T^*(\gamma)} \longrightarrow \pi, \quad \text{jeśli } \gamma \longrightarrow 0^+. \quad (3.115)$$

□

Zatem przybliżenie $\tilde{K}_1$ jest asymptotycznym rozwiązaniem zagadnienia brzegowego, przy $\gamma \rightarrow 0^+$.

Rysunki 3.5 oraz 3.6 ilustrują działanie obu przybliżeń sztywności nogi dla symetrycznej i asymetrycznej fazy kontaktu z podłożem. Lewa strona Rysunków 3.5 i 3.6 pokazuje, że przybliżenia $\tilde{K}_1$ i $\tilde{K}_2$ zachowują się bardzo dobrze dla γ od 12° do 30° . Podczas, gdy po prawej stronie obu rysunków widzimy stosunek numerycznie wyznaczonego parametru K^* do jego przybliżeń $\tilde{K}_1$ i $\tilde{K}_2$ dla zmieniającego się kąta przesunięcia środka masy podczas trwania fazy podporu, czyli γ .



Rysunek 3.6: Przypadek asymetryczny $\alpha = 3\beta$. Po lewej: porównanie numerycznie wyznaczonej wartości K^* z przybliżeniami sztywności: $\tilde{K}_1$ dane wzorem (3.107) i $\tilde{K}_2$ dane wzorem (3.92) dla zmieniającego się γ od 12° do 30° . Po prawej: stosunek K^* do $\tilde{K}_1$ i $\tilde{K}_2$ dla zmieniającego się γ od 1° do 20° . Dodatkowo linia ciągła $y = 1$ jest nałożona dla porównania dokładności przybliżeń. Przyjęte parametry: $\gamma = \alpha + \beta = 4\alpha$ oraz $U_{TD} = 1$, $V_{TD} = 0,1$.

Zarówno dla przypadku symetrycznego (patrz Rys. 3.5, $\gamma = 2\alpha$) jak i asymetrycznego (patrz Rys. 3.6, $\gamma = 4\alpha$) przybliżenie $\tilde{K}_2$ jest dokładniejsze niż $\tilde{K}_1$ w przedstawionym zakresie parametru γ , to znaczy $1^\circ \leq \gamma \leq 20^\circ$. Przybliżenie $\tilde{K}_2$ działa bardzo dobrze dla $\gamma < 8^\circ$, podczas gdy $\tilde{K}_1$ jest dokładne dopiero, gdy $\gamma < 1^\circ$. Rysunki 3.5 oraz 3.6 pokazują również, że błąd względny szybko maleje, gdy γ zbliża się do 0^+ . Z przeprowadzonego przez nas eksperymentu opisanego w Rozdziale 5 wynika, że γ rośnie wraz ze wzrostem prędkości biegu, zatem przybliżenia będą działać lepiej dla wolniejszych biegów.

W rzeczywistym biegu, typowy kąt ataku α wynosi około 8° , a kąt odbicia $\beta = 25^\circ$ (patrz Tab. 3.1, gdzie $\beta = \Delta\theta - \alpha$). Wówczas wartość błędu względnego w procentach dla przybliżenia $\tilde{K}_2$, wyznaczonego ze wzoru $(K^* - \tilde{K}_2)/\tilde{K}_2 \cdot 100\%$, wynosi około 5%, podczas gdy dla $\tilde{K}_1$ (analogiczny wzór to $(K^* - \tilde{K}_1)/\tilde{K}_1 \cdot 100\%$) wynosi około 10%. Prawa strona Rysunku 3.6 pokazuje jak szybko, (widać, że dla $\tilde{K}_2$ dużo szybciej niż dla $\tilde{K}_1$), ten błąd maleje. Aproksymacje mogą być stosowane do interpretacji danych eksperymentalnych (patrz Rozdz. 5), ale musimy być świadomi ich niedokładności. W ostatnim Rozdziale 5 znajduje się również, porównanie przybliżeń $\tilde{K}_1$ oraz $\tilde{K}_2$, wyliczonych z danych eksperymentalnych, z rzeczywistą mechaniczną wartością sztywności. Również w tym przypadku aproksymacja $\tilde{K}_2$ okazuje się być dokładniejsza.

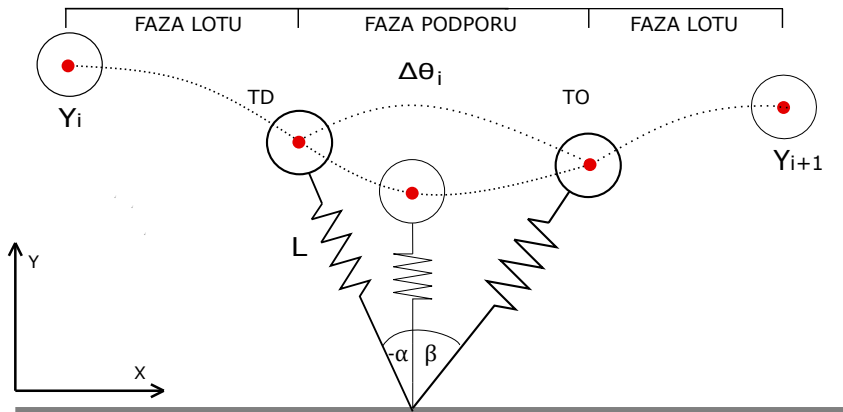
Na koniec wróćmy jeszcze raz do typowych wartości parametrów modelu występujących w rzeczywistym biegu. Tabela 2.1 została poszerzona, o parametry, których przybliżenia wyprowadziliśmy w tym rozdziale to znaczy przyrost kąta ($\Delta\theta$), sztywność nogi (K), maksymalne ugięcie nogi (ΔL_{max}) oraz czas kontaktu stopy z podłożem (T_c). W rezultacie dostaliśmy Tabele 3.1, w której umieściliśmy ponadto wartości wymiarowe zebrane podczas eksperymentu (patrz Rozdz. 5). W Rozdziale 5 znajduje się również dyskusja dotycząca porównania rzeczywistych wartości z Tabeli 3.1 i tych z przybliżeń.

Symbol	Opis	Wartość bezwymiarowa	Wartość wymiarowa
α	kąt ataku ($\alpha \times \frac{180^\circ}{\pi}$)	0,05 – 0,31	(3° – 18°) –
β	kąt odbicia ($\beta \times \frac{180^\circ}{\pi}$)	0,31 – 0,61	(18° – 35°) –
$\Delta\theta$	przyrost kąta ($\Delta\theta \times \frac{180^\circ}{\pi}$)	0,44 – 0,87	(25° – 50°) –
U_{TD}	pozioma liczba Frouda ($U \times \sqrt{gl_0}$)	0,63 – 1,73	2 – 5,5 m/s
V_{TD}	pionowa liczba Frouda ($V \times \sqrt{gl_0}$)	0,03 – 0,22	0,1 – 0,7 m/s
θ_d	prędkość kątowna ($\theta_d \times \sqrt{gl_0}$)	0,69 – 1,77	2,19 – 5,64 m/s
L_d	prędkość radialna ($L_d \times \sqrt{gl_0}$)	0,15 – 0,61	0,47 – 1,94 m/s
K	szttywność nogi ($K \times \frac{mg}{l_0}$)	12 – 50	8 – 33 kN/m
ΔL_{max}	maksymalne ugięcie nogi ($\Delta L_{max} \times l_0$)	0,04 – 0,2	0,041 – 0,204 m
T_c	czas kontaktu ($T_c \times \sqrt{l_0/g}$)	0,43 – 1,23	0,15 – 0,35 s

Tabela 3.1: Typowe wartości bezwymiarowych i wymiarowych parametrów fizycznych dla biegu. Przedstawione dane pochodzą z eksperymentu opisanego w Rozdziale 5. Dodatkowe parametry obejmują: długość nogi $l_0 = 1,03$ m, masa ciała $m = 69$ kg i przyspieszenie grawitacyjne $g = 9,81$ m/s².

4 ISTNIENIE I STABILNOŚĆ PUNKTU STAŁEGO

W tym rozdziale pokażemy, jak odpowiednio łącząc rozwiązania asymptotyczne dla dwóch faz: podporu i lotu, zredukujemy dynamikę do jednego wymiaru i utworzymy odwzorowanie powrotu od wierzchołka do kolejnego wierzchołka. Jak widać na Rysunku 4.1, dzielimy bieg na następujące po sobie iteracje, oznaczane indeksem i , co wyraża powtarzalny charakter faz biegu. Każda iteracja rozpoczyna się i kończy w momencie, w którym środek masy biegacza osiągnie najwyższy punkt fazy lotu, czyli wierzchołek. Zatem pomiędzy kolejnymi wierzchołkami, występuje jedna faza podporu, ze zmiennym w każdym cyklu przyrostem kąta $\Delta\theta_i$ (patrz Rys. 4.1), gdzie indeks i oznacza też iterację utworzonego odwzorowania.



Rysunek 4.1: Schemat modelu sprężynowego dla biegania. Między dwiema kolejnymi fazami lotu w i -tej iteracji, $\Delta\theta_i$ jest kątem przesunięcia podczas fazy kontaktu z podłożem dla którego wysokość wierzchołka Y_i przekształca się w Y_{i+1} .

W dalszej części rozdziału pokażemy, jakie są wystarczające warunki, aby jednowymiarowe odwzorowanie powrotu miało punkt stały. W przypadku symetrycznym, gdy kąt odbicia jest równy kątowi lądowania, zostaną wyznaczone obszary przedstawiające zakresy parametrów biegu dla których punkty stałe są stabilne. Na koniec przedstawimy numeryczny i analityczny dowód na występowanie bifurkacji transkrytycznej w uzyskanym odwzorowaniu. Prezentowane wyniki pochodzą głównie z pracy Wróblewskiej, Kowalczyka i Płociniczaka [60] (patrz również [38, 59]).

4.1 ANALITYCZNA ODWZOROWANIE POWROTU OD WIERZCHOŁKA DO WIERZCHOŁKA

4.1.1 ZASADA ZACHOWANIA ENERGII I MOMENTU PĘDU

Zakładając, że zachodzi zasada zachowania energii i momentu pędu wyprowadzimy założenia potrzebne do konstrukcji odwzorowania powrotu. Zauważmy, że bezwymiarowa postać funkcji Lagrange'a jest różnicą energii kinetycznej oraz potencjalnej i dana jest wzorem (patrz również na wymiarową funkcję Lagrange'a, daną wzorem (2.22), która ma takie samo oznaczenie)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[(L')^2 + L^2(\theta')^2 - K(1 - L)^2 \right] - L \cos \theta. \quad (4.1)$$

Zauważmy, że apostrofem oznaczamy teraz pochodną $L = L(T)$ oraz $\theta = \theta(T)$ względem bezwymiarowego czasu T . Zatem bezwymiarowa energia mechaniczna w fazie kontaktu z podłożem, oznaczona przez E_s , jako suma energii kinetycznej oraz potencjalnej ma postać

$$E_s = \frac{1}{2} \left[(L')^2 + L^2(\theta')^2 + K(1 - L)^2 \right] + L \cos \theta. \quad (4.2)$$

Rozważanie przybliżenia małych kątów w równaniach ruchu (2.29) przenosi się na całkowitą energię (4.2), która dla małych kątów θ , przyjmuje alternatywną postać

$$\tilde{E}_s = \frac{1}{2} \left[(L')^2 + L^2(\theta')^2 + K(1 - L)^2 \right] + L. \quad (4.3)$$

Dodajmy tutaj, że przybliżenie małego kąta odpowiada polu wektorowemu, w którym małe człony są pomijane. Należy rozumieć znaczenie słowa „mały” jak to jest używane w analizie asymptotycznej. Na przykład wiodący wyraz $\sin \theta$ dla małych θ wynosi 0, ale pierwszy niezerowy wyraz to θ , który jest mały, i dlatego w równaniach pola wektorowego jest zanedbywany. Ściśle mówiąc przybliżenie małego kąta w równaniach ruchu (2.29) nie jest linearyzacją. Jak to pokazano w Rozdziale 3.1.1, stosowane tutaj rozwiązania (2.29) to rozwinięcia $L(T)$ i $\theta(T)$ w szereg Taylora w odniesieniu do odwrotności pierwiastka kwadratowego z K , który został zdefiniowany jako mały parametr ϵ . Dla pewnego ustalonego α , w równaniach pola wektorowego, zastępujemy $\cos \theta$ przez $\cos \alpha$ i $\sin \theta$ przez $\sin \alpha$, aby w naszych rozwiązaniach uzyskać dokładność do $O(\epsilon^2)$, gdzie $\epsilon = 1/\sqrt{K}$. Ponieważ interesują nas małe wartości α , te dwa przybliżenia można rozumieć jako rozważanie pola wektorowego układu, w którym $\cos \theta = 1$ i $\sin \theta = 0$. Jednakże, jeśli α jest rozważane jako nie-małe, ale takie, że K pozostaje jednocześnie dużym parametrem, to asymptotyczne rozwinięcia wciąż są prawdziwe z dokładnością do $O(\epsilon^2)$. W tym ostatnim przypadku moment pędu kątowego jest stały.

Poza tym przy wyprowadzaniu założeń, musimy również wziąć pod uwagę ograniczenia, inaczej więzy, wpływające na ruch środka masy biegnącego człowieka, a występujące w trakcie przełączania. W naszym przypadku mamy do czynienia z ograniczeniami holonomicznymi, gdy równania więzów nie zależą ani od prędkości, ani od pochodnych wyższego rzędu, a jedynie dają informacje o zmianie położenia układu w czasie. Warunek przełączania dotyczący obu przejść między fazami

zdeteminowany jest długością L (patrz (4.6)). Natomiast przy przejściu z fazy lotu do fazy podparcia mamy dodatkowe ograniczenie holonomiczne dotyczące kąta $\theta_{TD} = -\alpha$, gdzie $\alpha > 0$.

Z (4.1) mamy pierwsze równanie układu (2.29) Eulera-Lagrange'a (patrz również na wymiarowe równania (2.24))

$$\frac{d}{dT} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta'} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} \implies (L^2 \theta')' = P' = L \sin \theta, \quad (4.4)$$

gdzie $P = L^2 \theta'$ jest bezwymiarowym momentem pędu kąтового. Zatem jeśli Lagranżjan (4.1) jest również zmodyfikowany dla małych kątów, zmiana momentu pędu wynosi zero, czyli

$$P' = (L^2 \theta')' = 0. \quad (4.5)$$

Z równań (4.3) i (4.5) otrzymujemy zbiór warunków, które wiążą teraz stan układu w momencie startu ze stanem w momencie lądowania. Wiadomo, że podczas startu i lądowania (patrz również Rys. 4.1) zachowujemy ograniczenie holonomiczne z długością spoczynkową $L = 1$ w każdej fazie przejścia, to znaczy

$$L_{TO} = L_{TD} = 1. \quad (4.6)$$

Wówczas z równania (4.3) wynika, że

$$2(\tilde{E}_s - 1) = (L')_{TO/TD}^2 + (\theta')_{TO/TD}^2. \quad (4.7)$$

Poprzez indeks TO/TD oznaczamy, że równania powyższe są prawdziwe zarówno dla pozycji TD , jak i TO , w fazie podparcia. Ponadto, po scałkowaniu równania (4.5), otrzymujemy $\theta'_{TO/TD} = c L_{TO/TD}^{-2} = c$, gdzie c jest pewną rzeczywistą stałą. W naszym przypadku ruchu do przodu, stała c jest dodatnia. Zatem

$$\theta'_{TO} = \theta'_{TD} > 0, \quad (4.8)$$

oraz $2(\tilde{E}_s - 1) - c^2 = (L')_{TO/TD}^2$, i stąd $|L'_{TO}| = |L'_{TD}|$. Teraz możemy zapisać warunek

$$L'_{TO} = -L'_{TD} > 0. \quad (4.9)$$

Oprócz powyższych ograniczeń na wartości brzegowe dla rozwiązań (4.6), (4.8) i (4.9) wymagamy również (patrz Rys. 4.1)

$$\theta_{TO} = \Delta\theta + \theta_{TD}, \quad \text{gdzie} \quad \theta_{TD} < 0, \quad \theta_{TO} > 0. \quad (4.10)$$

Zatem kąt $\Delta\theta$ pokonany w fazie podparcia nie może być jedynie wyrażeniem stanu w momencie lądowania. Należy zauważyć, że dla małych kątów θ , zachowanie energii i momentu pędu nie wymaga symetrii w fazie podparcia. Dla dowolnej wartości kąta θ w momencie odbicia, asymetryczne rozwiązania są również dozwolone, to znaczy takie rozwiązania dla których $|\theta_{TD}| \neq |\theta_{TO}|$.

4.1.2 ANALITYCZNE ODWZOROWANIE WIERZCHOŁKÓW

Identyfikacja modelu biegu w trakcie przejść fazowych: z lotu do podparcia oraz z podparcia do lotu, umożliwi wyznaczenie odwzorowania wierzchołka $Y_{i+1}(Y_i)$. W Rozdziale 4.1.1 pokazaliśmy, że przy założeniu małych kątów, stan systemu w momencie startu TO jest związany ze stanem w momencie lądowania TD za pomocą zestawu następujących warunków (patrz (4.6), (4.8), (4.9) i (4.10))

$$\begin{aligned} L_{TO} &= L_{TD} = 1, \\ L'_{TO} &= -L'_{TD} = L_d, \\ \theta_{TO} &= \Delta\theta + \theta_{TD} = \Delta\theta - \alpha, \\ \theta'_{TO} &= \theta'_{TD} = \theta_d. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Zaczynając od właściwych wartości początkowych, odwzorowanie między wysokością wierzchołka Y_i w i -tej iteracji, a stanem lądowania w bezwymiarowych współrzędnych biegunowych, jest wyrażone jako:

$$Y_i \longrightarrow \begin{bmatrix} X' = \sqrt{2(E_s - Y_i)} \\ Y = \cos \alpha \\ Y' = -\sqrt{2(Y_i - Y)} \end{bmatrix}_{TD} \longrightarrow \begin{bmatrix} L = 1 \\ L' = X' \sin \theta + Y' \cos \theta \\ \theta = -\alpha \\ \theta' = X' \cos \theta - Y' \sin \theta \end{bmatrix}_{TD} \quad (4.12)$$

gdzie E_s jest bezwymiarową energią systemu, która w momencie lądowania wyraża się wzorem $E_s = (\theta_d^2 + L_d^2)/2 + \cos \alpha$ (patrz (4.2)). Ponieważ prędkości X' i Y' zależą od Y_i , to prędkość radialna L_d i prędkość kątowa θ_d także zależą od Y_i (patrz (2.31) lub (4.12)). Następnie wymagane jest dodatkowe odwzorowanie między stanem odbicia a wysokością Y_{i+1} wierzchołka $i + 1$, które dane jest poprzez:

$$\begin{bmatrix} X' = L' \sin \theta + \theta' \cos \theta \\ Y = \cos \theta \\ Y' = L' \cos \theta - \theta' \sin \theta \end{bmatrix}_{TO} \longrightarrow \begin{bmatrix} X'_{i+1} = X'_{TO} \\ Y_{i+1} = Y_{TO} + \frac{1}{2}(Y'_{TO})^2 \end{bmatrix}. \quad (4.13)$$

Korzystając z obu odwzorowań (4.12) i (4.13), można skonstruować funkcję powrotu wierzchołka $Y_{i+1}(Y_i)$, która przyjmuje następującą postać po uproszczeniach:

$$Y_{i+1}(Y_i) = \cos(\alpha - \Delta\theta_i) + [\sin(2\alpha - \Delta\theta_i)\sqrt{E_s - Y_i} + \cos(2\alpha - \Delta\theta_i)\sqrt{Y_i - \cos \alpha}]^2, \quad (4.14)$$

gdzie kąt $\Delta\theta_i = \Delta\theta(\theta_d, L_d)$ dany jest wzorem (3.86). Aby zaznaczyć okresowość modelu biegu, wprowadziliśmy indeks i do oznaczenia $\Delta\theta_i$. Zatem $\Delta\theta_i$ jest kątem o jaki zostaje przesunięty kąt lądowania w trakcie fazy podparcia między dwoma kolejnymi fazami lotu, kiedy to wysokość wierzchołka Y_i przekształca się w Y_{i+1} . Teraz można zobaczyć, jak $\Delta\theta_i = \Delta\theta(\theta_d, L_d)$ zależy od Y_i . Ze wzorów (2.31) i (4.12) mamy:

$$\begin{aligned} \theta_d &= \sqrt{2}[\cos \alpha \sqrt{E_s - Y_i} - \sin \alpha \sqrt{Y_i - \cos \alpha}], \\ L_d &= \sqrt{2}[\sin \alpha \sqrt{E_s - Y_i} + \cos \alpha \sqrt{Y_i - \cos \alpha}]. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Ponadto z (4.15), łatwo można zauważyć związek θ_d i L_d (patrz również (4.2)):

$$\theta_d^2 + L_d^2 = 2(E_s - \cos \alpha). \quad (4.16)$$

Jeśli wysokość wierzchołka Y_{i+1} jest mniejsza niż wysokość lądowania, która wynosi $\cos \alpha$ (tzn. $Y_{i+1} < \cos \alpha$), to noga zahacza o ziemię i nastąpi potknięcie. Dlatego odwzorowanie powrotu wierzchołka istnieje tylko, gdy $Y_{i+1} \geq \cos \alpha$. Powyższa redukcja dynamiki modelu została zastosowana przez Geyera, Seyfartha i Blickhana w pracy [28] oraz później w pracach [59, 60].

Bez względu na kąt przesunięcia podczas fazy podparcia, z równań (4.11) wynika, że energia kinetyczna $\frac{1}{2}((L')^2 + L^2(\theta')^2)$ jest równa przy lądowaniu i odbiciu. Dla asymetrycznych faz kontaktu, ponieważ $Y_{TD} \neq Y_{TO}$, występuje zmiana energii układu $\Delta E_s = Y_{TO} - Y_{TD}$. Z drugiej strony, podczas symetrycznych faz podparcia ($Y_{TD} = Y_{TO}$) odpowiadające zmiany energii przy lądowaniu i odbiciu wzajemnie się kompensują, więc energia układu E_s jest stała. Aby przywrócić charakter konserwatywny modelu i uzyskać stałą energię układu w momentach przełączania, konieczna jest poprawka energii wynikająca z asymetrii. Podczas odbicia należy nadać taką prędkość, aby energia kinetyczna ($E_s - Y_{i+1}$) zmniejszała niedobór energii potencjalnej na końcu fazy podparcia. Dla nowej wysokości wierzchołka Y_{i+1} z równania (4.14) używana jest skorygowana wartość E_s . Dlatego właściwa prędkość pozioma we wzorach (4.13) to

$$X'_{i+1} = \sqrt{2(E_s - Y_{i+1})}. \quad (4.17)$$

Powyższa poprawka energii była wykorzystywana także w pracach [28, 59, 60]. W tym momencie warto zauważyć, że dopasowanie jedynie prędkości poziomej wyrażone równaniem (4.17) wynika z założenia przybliżenia małych kątów. Pozwala to na redukcję modelu do jednowymiarowego, co umożliwia przeprowadzenie dalszych analiz. Jeżeli dopuścilibyśmy tylko ograniczenia holonomiczne w fazach przejścia, to takie dostosowanie prędkości (4.17) nie jest jednoznaczne. Wówczas, można użyć także innych sposobów wyrównywania energii, o których napiszemy w kolejnym podrozdziale, gdzie również dokładniej wyjaśnimy mechanizm powstawania konieczności jej korygowania.

4.2 WYRÓWNYWANIE ENERGII

Zacniemy od pokazania, w jaki sposób przełączanie między dwoma fazami podporu i lotu, odpowiadające dwóm zestawom równań różniczkowych, prowadzi do nieciągłości w polu wektorowym układu. Ta nieciągłość odgrywa ważną rolę w modelu redukującym badanie dynamiki za pomocą jednowymiarowego odwzorowania (4.14). Aby model zredukowany spełniał zasadę zachowania energii wymaga to odpowiedniego jej wyrównywania. Jak pisaliśmy w Rozdziale 4.1.2, z powodu przybliżenia małych kątów, poprawka energii jest osiągana przez odpowiednie dostosowanie prędkości poziomej w momencie przełączania (patrz (4.17)). Oczywiście można skorygować energię dostosowując obie składowe prędkości. Takie wyrównywanie energii, przedstawione w pracy [38], zawiera dodatkowy parametr, który określa jej podział między poziomą i pionową składową prędkości, pozwalający na zachowanie energii podczas przełączania.

Przypomnijmy, że zależności między stanami układu we współrzędnych kartezjańskich (X, Y) i biegunowych (L, θ) spełniają następujące warunki

$$X = L \sin \theta, \quad Y = L \cos \theta, \quad X' = L' \sin \theta + L\theta' \cos \theta, \quad Y' = L' \cos \theta - L\theta' \sin \theta, \quad (4.18)$$

oraz

$$\theta' = \frac{1}{L}(X' \cos \theta - Y' \sin \theta), \quad L' = X' \sin \theta + Y' \cos \theta. \quad (4.19)$$

Niech $X' = Z$ oraz $Y' = W$. Obliczając drugie pochodne X' oraz Y' z (4.18), dostajemy (X', X'', Y', Y'') jako pole wektorowe. W fazie podparcia oznaczamy je przez $F_{support}$ i wyrażamy wzorem

$$F_{support} = \begin{cases} X' = L' \sin \theta + L\theta' \cos \theta = Z, \\ X'' = L'' \sin \theta + 2L'\theta' \cos \theta + L\theta'' \cos \theta - L(\theta')^2 \sin \theta = Z', \\ Y' = L' \cos \theta - L\theta' \sin \theta = W, \\ Y'' = L'' \cos \theta - 2L'\theta' \sin \theta - L\theta'' \sin \theta - L(\theta')^2 \cos \theta = W', \end{cases} \quad (4.20)$$

gdzie stosując równania Eulera-Lagrange'a (2.29) dla funkcji Lagrange'a (4.1), mamy

$$L'' = L(\theta')^2 + K(1 - L) - \cos \theta, \quad (4.21)$$

oraz (patrz również (4.4))

$$\theta'' = \frac{1}{L} \sin \theta - 2 \frac{L'\theta'}{L}. \quad (4.22)$$

W przypadku przejścia z fazy lotu do fazy podporu lub odwrotnie, $L = 1$, a więc po podstawieniu równań (4.21) i (4.22) do (4.20), pole wektorowe (4.20), oznaczone w tych momentach przez $f_{support}$, przyjmuje postać

$$f_{support} = \begin{cases} X' = L' \sin \theta + \theta' \cos \theta = Z, \\ X'' = ((\theta')^2 - \cos \theta) \sin \theta + 2L'\theta' \cos \theta + (\sin \theta - 2L'\theta') \cos \theta - (\theta')^2 \sin \theta \\ \quad \quad \quad = 0 = Z', \\ Y' = L' \cos \theta - \theta' \sin \theta = W, \\ Y'' = ((\theta')^2 - \cos \theta) \cos \theta - 2L'\theta' \sin \theta - (\sin \theta - 2L'\theta') \sin \theta - (\theta')^2 \cos \theta \\ \quad \quad \quad = -1 = W'. \end{cases} \quad (4.23)$$

Natomiast, pole wektorowe dla fazy lotu, powiedzmy F_{flight} , otrzymujemy z równań $X'' = 0$ i $Y'' = -1$, czyli

$$F_{flight} = \begin{cases} X' = Z, \\ X'' = 0 = Z', \\ Y' = W, \\ Y'' = -1 = W', \end{cases} = f_{flight}. \quad (4.24)$$

Zauważmy, że postać funkcyjna nie jest upraszczana w momencie osiągnięcia wartości progowej co zapisujemy w (4.24) jako $F_{flight} = f_{flight}$. Otrzymaliśmy złożone pole wektorowe dla całego układu przełączanego, które jest ciągle dla wszystkich punktów w 4-wymiarowej przestrzeni fazowej (X, Z, Y, W) . Zatem poziom energii w momencie przełączenia pozostaje niezmienny, jeśli energia jest obliczana za pomocą jednego z dwóch pól wektorowych - dla fazy podporu (4.23) lub dla fazy lotu (4.24). Sytuacja się zmienia w momencie korzystania, jak w Rozdziale 4.1, z przybliżenia dla małych kątów θ .

Dla przybliżenia małego kąta zastępujemy w funkcji Lagrange'a (4.1) część $L \cos \theta$ energii potencjalnej przez L , otrzymując

$$\mathcal{L}^{sa} := \frac{1}{2} \left[(L')^2 + L^2(\theta')^2 - K(1 - L)^2 \right] - L. \quad (4.25)$$

Dalej implikuje to zapisanie wzorów (4.21) oraz (4.22) w następujący sposób

$$L'' = L(\theta')^2 + K(1 - L) - 1, \quad (4.26)$$

oraz

$$\theta'' = -2 \frac{L'\theta'}{L}. \quad (4.27)$$

Można łatwo sprawdzić, że w momencie przełączenia pole wektorowe przyjmuje postać

$$f_{support}^{sa} = \begin{cases} X' = Z, \\ X'' = -\sin \theta = Z', \\ Y' = W, \\ Y'' = -\cos \theta = W', \end{cases} \quad (4.28)$$

więc jest nieciągłe w składowej przyspieszenia. Ponieważ na energię potencjalną wpływa przybliżenie małego kąta, mogliśmy się spodziewać nieciągłości. Jednakże, jak to zostanie pokazane w dalszej części, istnieje dodatkowa nieciągłość w układzie, w momencie przełączania. Zauważmy teraz, że energia układu w fazie podparcia dla modelu pełnego i małego kąta przyjmuje odpowiednio dwie postaci dane wzorami (4.2) i (4.3). Po podstawieniu (4.18) i (4.19) do funkcji energii (4.2) i (4.3) w momencie przejścia do fazy lotu, mamy energię układu we współrzędnych kartezjańskich w momencie startu to . Mianowicie, z (4.2) otrzymujemy:

$$E_s = \frac{1}{2} \left[(X')^2 \sin^2 \theta + (Y')^2 \cos^2 \theta + 2X'Y' \sin \theta \cos \theta + (X')^2 \cos^2 \theta + (Y')^2 \sin^2 \theta - 2X'Y' \sin \theta \cos \theta \right] + Y = \frac{1}{2} \left[(X')^2 + (Y')^2 \right] + Y, \quad (4.29)$$

a z (4.3) dostajemy:

$$\tilde{E}_s = \frac{1}{2} \left((X')^2 + (Y')^2 \right) + \frac{Y}{\cos \beta}, \quad (4.30)$$

gdzie β oznacza kąt odbicia. Zatem widać (patrz (4.29) i (4.30)), że energia układu dla modelu z małym kątem zmniejsza się w jej części potencjalnej, w momencie przejścia z fazy podparcia do fazy lotu, o wartość równą $1 - \cos \beta$, gdyż $Y = \cos \beta$ oraz

$$\tilde{E}_s - E_s = \frac{\cos \beta}{\cos \beta} - \cos \beta.$$

Aby przywrócić zachowawcze zachowanie modelu, należy zaktualizować wysokość w momencie przejścia lub odpowiednio zwiększyć prędkości X' lub Y' . Ten wzrost energii musi być później zrekompensowany, gdy następuje przejście z fazy lotu do fazy podparcia. W tym przypadku przechodzimy z wyższego poziomu energii na niższy, a nadmiarowa energia w momencie przejścia wynosi $1 - \cos \alpha$, gdzie α oznacza kąt lądowania. Wówczas $Y = \cos \alpha$ i w konsekwencji

$$\tilde{E}_s - E_s = \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha} - \cos \alpha.$$

Co więcej wyrównanie energii poprzez dopasowanie wysokości Y odpowiadałoby zmianie długości nogi. Nie będziemy tutaj rozważać tego przypadku, ponieważ jest on niefizyczny.

Warto zauważyć, że podczas lądowania biegacza następuje przeciwdziałanie sile grawitacji. Energia potencjalna częściowo jest wytracana, a częściowo magazynowana w sprężystych tkankach, takich jak ścięgna czy powięzi. Dlatego w naszym modelu uwzględniamy redukcję energii podczas przejścia między fazą lotu a podparcia, co ma naturalne uzasadnienie. Podobnie, podczas odbicia, biegacz wykorzystuje uwalnianą energię sprężystą z tkanek, ale także generuje dodatkową energię, angażując mięśnie szkieletowe. Aby przywrócić zachowawczość energii w naszym modelu, podczas tego przejścia, dokonujemy odpowiedniego dostosowania wektora prędkości.

Warunki brzegowe dla układu fazy podporowej we współrzędnych biegunowych mają postać (warunki początkowe (2.30) pojawiły się już w Rozdz. 2.2)

$$\begin{aligned} \theta_{TD} &= -\alpha, & L_{TD} &= 1, & \theta_{TO} &= \beta, & L_{TO} &= 1, \\ \theta'_{TD} &= \theta_d, & L'_{TD} &= -L_d, & \theta'_{TO} &= \theta_o, & L'_{TO} &= L_o, \end{aligned} \quad (4.31)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \theta_d &= X'_{TD} \cos \theta_{TD} - Y'_{TD} \sin \theta_{TD} = U_{TD} \cos \alpha - V_{TD} \sin \alpha, \\ L_d &= -X'_{TD} \sin \theta_{TD} - Y'_{TD} \cos \theta_{TD} = U_{TD} \sin \alpha + V_{TD} \cos \alpha, \\ \theta_o &= X'_{TO} \cos \theta_{TO} - Y'_{TO} \sin \theta_{TO} = U_{TO} \cos \beta - V_{TO} \sin \beta, \\ L_o &= X'_{TO} \sin \theta_{TO} + Y'_{TO} \cos \theta_{TO} = U_{TO} \sin \beta + V_{TO} \cos \beta. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Jesteśmy gotowi do zdefiniowania reguły przełączania, która obejmuje zarówno aktualizację energii, jak i holonomiczne ograniczenie kąta podparcia, kiedy powracamy z fazy lotu do fazy kon-

taktu z podłożem. Za pomocą równań (4.26) i (4.27) wyrażamy pole wektorowe układu w fazie podparcia jako

$$F_{support}^{sa} = \begin{cases} L' = \lambda, \\ L'' = L(\theta')^2 + K(1 - L) - 1 = \lambda', \\ \theta' = \Theta, \\ \theta'' = -2\frac{L'\theta'}{L} = \Theta', \end{cases} \quad (4.33)$$

przyjmując $\lambda = L'$ oraz $\Theta = \theta'$. Ponadto, pole wektorowe w fazie lotu pozostaje niezmiennione (patrz (4.24)). Mamy jedno ograniczenie holonomiczne zdeterminowane długością nogi L , które jest stosowane przy przejściu z fazy lotu do fazy podparcia oraz regułę przełączania opartą na ograniczeniu kąta podparcia. Oznacza to, że przejście z fazy kontaktu do fazy lotu następuje, gdy $L(T) = 1$. W tym przypadku ustalamy kąt lądowania na pewną wartość oznaczaną przez β , a przełączenie ma miejsce, gdy $Y(T) = \cos \beta$. Rozważymy teraz, co dzieje się z polem wektorowym w każdym z tych dwóch przypadków przełączania. Energię na początku fazy lotu we współrzędnych kartezjańskich określa równanie (4.29). Zatem składowe prędkości w momencie startu muszą spełniać

$$(X')^2 + (Y')^2 = 2(E_s - Y_{TO}). \quad (4.34)$$

Naturalne jest założenie, że energia powinna być korygowana w taki sposób, w jaki zmieniają się obie składowe prędkości. Zaktualizujemy wektor prędkości w dwóch krokach definiując „predyktor” i „korektor”. Po pierwsze w momencie odbicia przewidujemy Y' z (4.34) jako

$$Y'_{PR} = \sqrt{2(E_s - Y_{TO}) - (X'_{TO})^2}. \quad (4.35)$$

Teraz korygujemy obie składowe prędkości, aby bilans energetyczny był prawidłowy. W ten sposób określamy poziomą i pionową składową w momencie odbicia

$$X' = \sqrt{2(E_s - Y_{TO}) - (Y'_{PR})^2} \xi = \sqrt{2(E_s - Y_{TO})(1 - \xi) + (X'_{TO})^2} \xi, \quad (4.36)$$

$$Y' = \sqrt{(2(E_s - Y_{TO}) - (X'_{TO})^2) \xi}, \quad (4.37)$$

gdzie $\xi \in [0, 1]$ jest pewnym wagowym współczynnikiem. Podstawiając równanie (4.37) z powrotem do (4.34) otrzymujemy

$$2(E_s - Y_{TO})(1 - \xi) = (X')^2 - (X'_{TO})^2 \xi. \quad (4.38)$$

Gdy ξ w równaniu (4.38) jest równe 0, to $X' = \sqrt{2(E_s - Y_{TO})}$ oraz $Y' = 0$, co oznacza, że cała energia kinetyczna pochodzi z ruchu poziomego. W Rozdziale 4.1.2, podobnie jak w pracach [28, 60], właśnie taka korekta energii dla $\xi = 0$ jest stosowana (patrz (4.17)). Gdy ξ w równaniu (4.38) jest równe 1, to $X' = X'_{TO}$ oraz $Y' = Y'_{PR}$, co oznacza, że poprawka energii jest stosowana tylko do składnika Y' . W symulacjach numerycznych użyliśmy $\xi = 0,5$ (patrz Rys. 4.2). Wprowadzony w ten sposób parametr ξ może okazać się ważnym czynnikiem determinującym

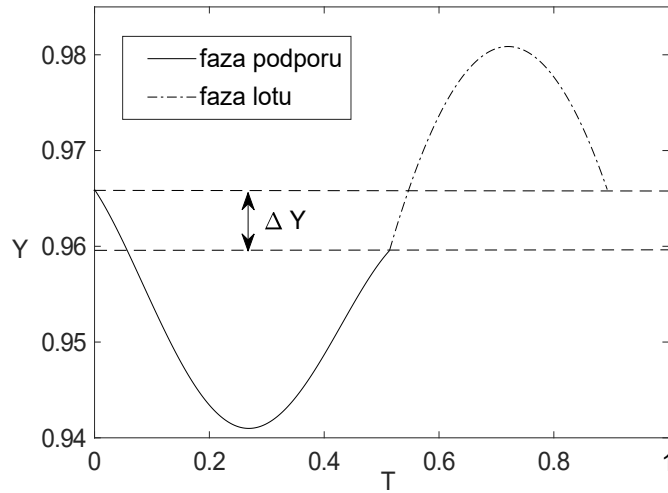
efektywność biegu, gdyż odpowiada za ilości energii rozdzielanej między poziomą i pionową składową prędkości w momencie przejścia między fazą podparcia i lotu.

Oczywiście pole wektorowe w momencie przełączania jest nieciągłe, a jego wartości graniczne w fazie podporu i swobodnego lotu mają dwie postaci:

$$f_{support}^{sa,TO} = \begin{cases} X' = Z, \\ X'' = -\sin \beta = Z', \\ Y' = W, \\ Y'' = -\cos \beta = W', \end{cases} \quad (4.39)$$

$$f_{flight}^{TO} = \begin{cases} X' = Z, \\ X'' = 0 = Z', \\ Y' = W, \\ Y'' = -1 = W', \end{cases} \quad (4.40)$$

gdzie X' oraz Y' są dane odpowiednio wzorami (4.36) and (4.37). Zatem $f_{support}^{sa,TO} \neq f_{flight}^{TO}$. Musimy teraz rozważyć kolejne przejście z fazy lotu do fazy wsparcia. W tym przypadku naturalne



Rysunek 4.2: Trajektoria składowej Y przełączanego modelu (4.33) – (4.43). Asymptotyczne rozwiązanie dla parametrów: $K = 34,77$, $E_s = 1,55$, $\xi = 0,5$ oraz $\alpha = \pi/12$.

jest założenie, że odpowiednią regulację energetyczną robimy dla stanu L' , pracując ze współrzędnymi biegunowymi. Zmieniając tylko L' dostosowujemy warunki początkowe dla fazy podporu. Oczywiście kąt wsparcia jest określony przez ograniczenie $\theta_{TD} = -\alpha$. Ostatecznie długość L jest określona przez warunek przełączania $L = 1$. Korzystając ze wzoru na energię (4.3), mamy zatem następującą zależność między L_d a θ_d

$$L_d = |L'_{TD}| = \sqrt{2(E_s - 1) - \theta_d^2}, \quad (4.41)$$

gdzie L_d oraz θ_d są dane wzorami (4.32). Możemy ponownie ustalić rodzaj nieciągłości w polu wektorowym przy przełączaniu, ale tym razem użyjemy do tego celu współrzędnych biegunowych. Oznacza to, że musimy wyrazić pole wektorowe f_{flight} we współrzędnych biegunowych w chwili przełączenia. Po pierwsze wyrażamy zaktualizowane pole wektorowe w fazie podporu w momencie przejścia do niego z fazy lotu. Wtedy równanie (4.33) przybiera postać

$$f_{support}^{sa,TD} = \begin{cases} L' = \lambda, \\ L'' = \theta_d^2 - 1 = \lambda', \\ \theta' = \Theta, \\ \theta'' = 2L_d\theta_d = \Theta', \end{cases} \quad (4.42)$$

gdzie $\lambda = -L_d$ oraz $\Theta = \theta_d$ w momencie lądowania z odpowiednią poprawką na energię (patrz (4.41)). Natomiast pole wektorowe dla fazy lotu w momencie kontaktu z podłożem ma postać

$$f_{flight}^{TD} = \begin{cases} L' = \lambda, \\ L'' = \theta_d^2 - \cos \alpha = \lambda', \\ \theta' = \Theta, \\ \theta'' = 2L_d\theta_d - \sin \alpha = \Theta'. \end{cases} \quad (4.43)$$

Ponownie uzyskujemy nieciągłość, bo $f_{support}^{sa,TD} \neq f_{flight}^{TD}$.

Na Rysunku 4.2, zaczynając od stanu początkowego

$$\left(L = 1, L' = -\sqrt{2(E_s - 1) - \cos \alpha}, \theta = -\alpha, \theta' = \cos \alpha \right),$$

wyznaczamy trajektorię składowej Y przełączanego modelu (4.33) – (4.43) ze współczynnikiem wagowym $\xi = 0,5$. Jak widać trajektoria wysokości Y , w wyniku wyrównywania energii, jest ciągła w momentach przełączania.

Dodatkowy parametr ξ zwiększa przestrzeń parametryczną modelu. W modelu o zmodyfikowanym rodzaju wyrównywania energii możemy zaobserwować dodatkowe bifurkacje, które nie mogą wystąpić w naszym oryginalnym modelu. W szczególności, eksploracja numeryczna pokazała wystąpienie bifurkacji typu fold. Analiza numeryczna i rozwijanie analityczne bifurkacji względem parametru ξ , oraz zbadanie jak te bifurkacje łączą się z modelem standardowym stanowią możliwą ścieżkę dalszych badań. Pozwoliłoby to zrozumieć jak założenie o wyrównywaniu energii związane z prędkością poziomą wpływa na zmianę zachowań asymptotycznych względem ustalonego parametru. W dalszej części pracy dokładniej przebadamy standardowy model, z parametrem $\xi = 0$, w którym występuje bifurkacja transkrytyczna. Można zatem powiązać rodzaj bifurkacji z metodą kompensacji energii.

4.3 ISTNIENIE PUNKTU STAŁEGO

W tym podrozdziale sprawdzimy, przy jakich warunkach jednowymiarowe odwzorowanie powrotu (4.14) ma punkt stały o wysokości $Y_i = Y_{i+1} = Y^*$. Przypadek symetryczny badany jest w pracy [60], podczas gdy przypadek asymetryczny w pracy [59].

4.3.1 ROZWIĄZANIA SYMETRYCZNE

Po pierwsze pokażemy, że rozwiązanie (4.14) przy użyciu (4.11), ograniczone założeniem symetrii, czyli dla $\theta_{TO} = \alpha$, prowadzi do odpowiedniej wysokości wierzchołka punktu stałego

$$Y^* = \cos \alpha + \frac{1}{2}(L_d^* \cos \alpha - \theta_d^* \sin \alpha)^2, \quad (4.44)$$

gdzie θ_d^* i L_d^* reprezentują wartości θ_d i L_d określone przez (4.15) w punkcie stałym Y^* . Ponieważ θ_d^* i L_d^* są połączone relacją (4.16), wysokość wierzchołków punktów stałych można wyrazić w następującej równoważnej postaci

$$Y^* = E_s - \frac{1}{2}(L_d^* \sin \alpha + \theta_d^* \cos \alpha)^2. \quad (4.45)$$

Twierdzenie 4 (O istnieniu symetrycznych rozwiązań). *Niech parametry α , E_s oraz θ_d^* spełniają następującą nierówność*

$$E_s \geq \frac{(\theta_d^*)^2}{2 \cos^2 \alpha} + \cos \alpha = E_s^{\min}, \quad (4.46)$$

gdzie $\alpha \in (0, \pi/2)$. Wówczas istnieją warunki początkowe fazy podporu:

$$(\theta, \theta', L, L') = \left(-\alpha, \theta_d^*, 1, -\sqrt{2(E_s - \cos \alpha) - (\theta_d^*)^2} \right)$$

takie, że Y^* dany wzorem (4.44) lub (4.45) jest wysokością punktu stałego.

Dowód. Ponieważ w momencie odbicia TO (patrz (4.11) i (4.13)), dla którego $\theta_{TO} = \alpha$, $Y_{TO} = \cos \alpha$ oraz

$$Y'_{TO} = L'_{TO} \cos \alpha - \theta'_{TO} \sin \alpha = L_d^* \cos \alpha - \theta_d^* \sin \alpha, \quad (4.47)$$

stąd mamy wzór (4.44) i w konsekwencji również (4.45). Podstawiając (4.44) i (4.45) do równań (4.15) otrzymujemy

$$\theta_d^* = \cos \alpha |L_d^* \sin \alpha + \theta_d^* \cos \alpha| - \sin \alpha |L_d^* \cos \alpha - \theta_d^* \sin \alpha|, \quad (4.48)$$

i także

$$L_d^* = \sin \alpha |L_d^* \sin \alpha + \theta_d^* \cos \alpha| + \cos \alpha |L_d^* \cos \alpha - \theta_d^* \sin \alpha|. \quad (4.49)$$

Dalej z (4.48) i (4.49) widać, kiedy prędkości kątowa i radialna są stałe w każdej kolejnej iteracji. Po pierwsze łatwo można sprawdzić, że dla $\alpha \in (0, \pi/2)$:

$$L_d^* \sin \alpha + \theta_d^* \cos \alpha > 0.$$

Stąd równania (4.48) i (4.49) są tożsamościowe, to znaczy wierzchołek Y^* dany wzorem (4.44) lub (4.45) jest punktem stałym, jeśli

$$L_d^* \cos \alpha - \theta_d^* \sin \alpha \geq 0. \quad (4.50)$$

Z warunków (4.16) oraz (4.50) mamy

$$\theta_d^* \tan \alpha \leq \sqrt{2E_s - (\theta_d^*)^2 - 2 \cos \alpha}. \quad (4.51)$$

Zatem energia układu E_s musi spełniać nierówność $E_s \geq E_s^{min}$, wraz z

$$E_s^{min} = \frac{(\theta_d^*)^2}{2 \cos^2 \alpha} + \cos \alpha. \quad (4.52)$$

Co dowodzi, że przy powyższym założeniu na warunki początkowe fazy podporu, istnieje punkt stały dany wzorem (4.44) lub (4.45). $\square$

Dla energii układu $E_s = E_s^{min}$, wysokość wierzchołka punktu stałego Y^* , dana wzorem (4.44) lub (4.45), wynosi $\cos \alpha$, co jest równe wysokości lądowania. Wraz ze wzrostem energii ($E_s > E_s^{min}$) wysokość wierzchołka rośnie, ale nigdy nie przekracza górnej granicy, czyli E_s . Zatem **Twierdzenie 4** jest prawdziwe, gdy przyjmujemy słaby wariant nierówności (4.46). Natomiast ostra nierówność (4.46) gwarantuje, że $Y^* > \cos \alpha$. Wzór (4.52) na E_s^{min} wykorzystamy w Rozdziale 5. Będziemy porównywać energię generowaną przez biegacza, wyliczoną ze wzoru (4.2), z minimalną energią E_s^{min} wymaganą do istnienia punktu stałego, dla danych eksperymentalnych.

Dla ustalonego kąta natarcia α oraz prędkości kątowej θ_d^* w punkcie stałym Y^* , przybliżenie sztywności $K_2 = K_2(\alpha, E_s, \theta_d^*) = \tilde{K}_2$, dane wzorami (3.92) i (3.93) przy założeniu, że $\beta = \alpha$, jest najniższe dla układu o minimalnej energii (4.52) i określone przez

$$K_2^{min} = K_2(\alpha, E_s^{min}, \theta_d^*) = \frac{[\pi \theta_d^* + \sqrt{\Delta_{min}}]^2}{16\alpha^2}, \quad (4.53)$$

gdzie

$$\Delta_{min} = \pi^2 \left((\theta_d^*)^2 - 4\alpha \sin \alpha \right) + 32\alpha (\theta_d^*)^2 \tan \alpha - 16\alpha \cot \alpha \left((\theta_d^*)^2 - \cos \alpha \right). \quad (4.54)$$

Zauważmy, że w celu uproszczenia zapisu, dalej w oznaczeniach sztywności nogi K_1 i K_2 pomijamy znak tyldy.

Dla szczególnego przypadku (3.87), omawianego już w Rozdziale 3.2, z **Twierdzenia 4** wynika następujący wniosek.

Wniosek 3. Kiedy prędkość kątowna w momencie odbicia dla punktu stałego Y^* jest równa $\theta_d^* = \sqrt{\cos \alpha}$, wówczas warunek (4.46) z **Twierdzenia 4** przyjmuje postać

$$E_s > E_s^{min} = \frac{1}{2 \cos \alpha} + \cos \alpha. \quad (4.55)$$

Dodatkowo otrzymujemy

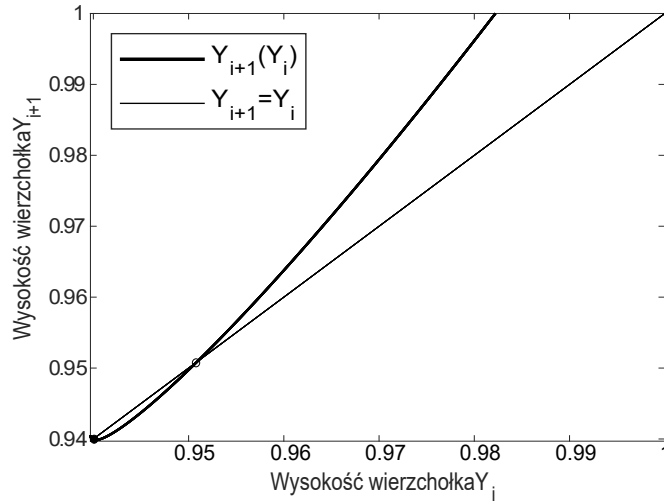
$$K = K_2 > K_2^{min} = \frac{[\pi \sqrt{\cos \alpha} + \sqrt{\Delta_{min}}]^2}{16\alpha^2}, \quad (4.56)$$

gdzie

$$\Delta_{min} = \pi^2(\cos \alpha - 4\alpha \sin \alpha) + 32\alpha \sin \alpha. \quad (4.57)$$

Punkty stałe mogą istnieć tylko wtedy, gdy minimalna energia E_s^{min} oraz minimalna sztywność K_2^{min} są przekroczone.

Biorąc pod uwagę przypadek $\theta_d^* = \sqrt{\cos \alpha}$, jeśli $\alpha \rightarrow 0$, minimalna energia układu E_s^{min} zbliża się do wartości $E_s = 1,5$. Aby uzyskać pogląd wymiarowy, energia układu ma wtedy wartość: $mgl_0 E_s \approx 1125$ J, gdy przyjmiemy masę ciała $m = 75$ kg, przyspieszenie grawitacji $g = 9,81$ m/s², a długość nogi $l_0 = 1$ m. Jeśli dodatkowo początkowa wysokość wierzchołka zostanie ustalona na $Y_0 = 1$, to w tym przypadku odpowiada ona poziomej prędkości $x' = X' \sqrt{gl_0} = \sqrt{2(E_s - Y_0)gl_0} = \sqrt{9,81}$, czyli 3,13 m/s.



Rysunek 4.3: Funkcja odwzorowania wierzchołków $Y_{i+1}(Y_i)$ dana wzorem (4.14) dla zestawu parametrów: $\alpha = \pi/9$, $E_s = 1,48$ oraz $K = K_2(\alpha, E_s, \sqrt{\cos \alpha}) = 18,3575$. Dwa miejsca przecięcia z osią $Y_{i+1} = Y_i$ to punkty stałe dla prędkości kątowych $\theta_{d(1)}^* = \sqrt{\cos \alpha} = 0,9694$ ($Y^* = 0,9399$) oraz $\theta_{d(2)}^* = 0,9155$ ($Y^* = 0,9509$), odpowiednio.

Rysunek 4.3 przedstawia funkcję odwzorowania wierzchołków $Y_{i+1}(Y_i)$ daną wzorem (4.14) dla zestawu parametrów: $\alpha = \pi/9$, $E_s = 1,48$ oraz $K = K_2(\alpha, E_s, \sqrt{\cos \alpha}) = 18,3575$. Energia układu E_s oraz sztywność nogi K jest tu ustalona dla rozwiązań symetrycznych $\alpha = \beta$ i przypadku $\theta_d^* = \sqrt{\cos \alpha}$. Ze wzoru (4.55) wyliczamy $E_s^{min} = 1,4718$, a z kolei ze wzorów (4.56) i (4.57) wyznaczamy $K_2^{min} = 18,1013$. Zatem przyjęte parametry gwarantują istnienie punktów stałych co ilustruje Rysunek 4.3 (patrz przecięcia odwzorowania wierzchołków z prostą $Y_{i+1} = Y_i$). Pierwszy punkt stały Y^* , który w dalszej części pracy okaże się stabilny, dostajemy ze wzorów (4.44) albo (4.45) dla $\theta_{d(1)}^* = \sqrt{\cos(\pi/9)} = 0,9694$ i $L_{d(1)}^* = \sqrt{2 \times 1,48 - 3 \times \cos(\pi/9)}$. Gdy $Y_i = Y^* = 0,9399$ otrzymujemy $\Delta\theta_i = 2\alpha$, czyli z (4.14) rzeczywiście $Y_i = Y_{i+1}$. Drugi punkt stały Y^* , który okaże się niestabilny, dostajemy także ze wzorów (4.44) albo (4.45), ale tym razem dla mniejszej prędkości kątowej $\theta_{d(2)}^* = 0,9155$ i większej prędkości promieniowej $L_{d(2)}^* = \sqrt{2 \times 1,48 - (\theta_d^*)^2 - 2 \times \cos(\pi/9)}$. Gdy $Y_i = Y^* = 0,9509$ znowu otrzymujemy $\Delta\theta_i = 2\alpha$, czyli $Y_i = Y_{i+1}$.

4.3.2 ROZWIĄZANIA ASYMETRYCZNE

Przejdźmy teraz do przypadków asymetrycznych, gdyż w rzeczywistych biegach kąt odbicia jest wyraźnie większy od kąta natarcia. Dla rozwiązań asymetrycznych $\alpha < \beta$, gdy kąt odbicia β jest nieznan, nie możemy rozpatrywać zagadnienia brzegowego jak w przypadku symetrycznym $\alpha = \beta$, a jedynie problem wartości początkowej. Dlatego podejście w tym przypadku nie jest asymptotyczne, a rozwiązania mogą być jedynie określone dla ustalonej fazy podparcia (α, β) .

Twierdzenie 5 (O asymetrycznych rozwiązaniach). *Załóżmy, że istnieje takie rozwiązanie asymetryczne dla ustalonych kątów ataku i odbicia (α, β^*) , że wysokość wierzchołka punktu stałego jest dana wzorem*

$$Y^* = \cos \beta^* + \frac{1}{2} \left(\theta_d^* \cdot \sin \beta^* - \sqrt{2(E_s - \cos \alpha) - (\theta_d^*)^2} \cdot \cos \beta^* \right)^2, \quad (4.58)$$

gdzie $\alpha < \beta^*$ oraz

$$\theta_d^* = \sqrt{2} \left[\cos \alpha \sqrt{E_s - Y^*} - \sin \alpha \sqrt{Y^* - \cos \alpha} \right]. \quad (4.59)$$

Wówczas Y^* jest rozwiązaniem równania

$$Y = \cos \beta^* + \left[\sin(\alpha - \beta^*) \sqrt{E_s - Y} + \cos(\alpha - \beta^*) \sqrt{Y - \cos \alpha} \right]^2, \quad (4.60)$$

gdzie energia układu E_s i asymetryczne rozwiązanie $\alpha < \beta^*$ spełniają następujący warunek

$$E_s \geq \frac{\cos \alpha - \cos \beta^*}{\sin^2(\alpha - \beta^*)} + \cos \alpha. \quad (4.61)$$

Dowód. Wysokość wierzchołka dla odwzorowania (4.14) (patrz również (4.13)) dana jest wzorem

$$Y_{i+1} = Y_{TO} + \frac{1}{2}(Y'_{TO})^2 = \cos \theta_{TO} + \frac{1}{2}(\theta'_{TO} \sin \theta_{TO} - L'_{TO} \cos \theta_{TO})^2. \quad (4.62)$$

Zatem jeżeli istnieje asymetryczne rozwiązanie (α, β^*) , gdzie $\alpha < \beta^*$, to wykorzystując (4.11) i (4.62) wysokość wierzchołka punktu stałego Y^* sprowadza się do postaci (4.58), gdzie

$$\sqrt{2(E_s - \cos \alpha) - (\theta_d^*)^2} = \sqrt{2} \left[\sin \alpha \sqrt{E_s - Y^*} + \cos \alpha \sqrt{Y^* - \cos \alpha} \right] = L_d^*. \quad (4.63)$$

Z drugiej strony Y^* jest rozwiązaniem równania (4.60). Ponadto można sprawdzić, że jeżeli (4.60) ma rozwiązanie, to punkt stały Y^* dany jest wzorem

$$Y^* = \frac{1}{2}(E_s + \cos \beta^*) - \frac{1}{2} \operatorname{ctg}(\beta^* - \alpha) \sqrt{\sin^2(\beta^* - \alpha)(E_s - \cos \alpha)^2 - (\cos \alpha - \cos \beta^*)^2}, \quad (4.64)$$

a parametry E_s oraz $\alpha < \beta^*$ muszą spełniać warunek (4.61). $\square$

Z warunku (4.61) wynika, że gdy $\alpha \rightarrow \beta^*$, to $E_s \rightarrow \infty$. Brak ciągłego przejścia pomiędzy przypadkiem asymetrycznym (4.61), a symetrycznym (4.52), jest związany z różnicą energii potencjalnej przy zmianach fazowych, która dla rozwiązań asymetrycznych jest różna od zera.

Zarówno **Twierdzenie 5** powyżej, jak i **Przykład 1** poniżej, pokazują, że nie można znaleźć punktu stałego Y^* ograniczonego warunkiem małej asymetrii. Założenie (4.61) w **Twierdzeniu 5** oznacza, że energia musiałaby osiągać duże, niefizjologiczne wartości dla małych asymetrii. W konsekwencji uzyskana prędkość kątowa θ_d^* jest zbyt duża i dla wymaganej energii nie spełnia warunku (3.105), który gwarantuje, że $\Delta \geq 0$. Dla $\Delta < 0$ nie można stosować aproksymacji K_2 (patrz (3.92) i (3.93)), więc korzystając z następującego rozwinięcia Taylora pierwszego rzędu dla przyrostu kąta (patrz 3.86)

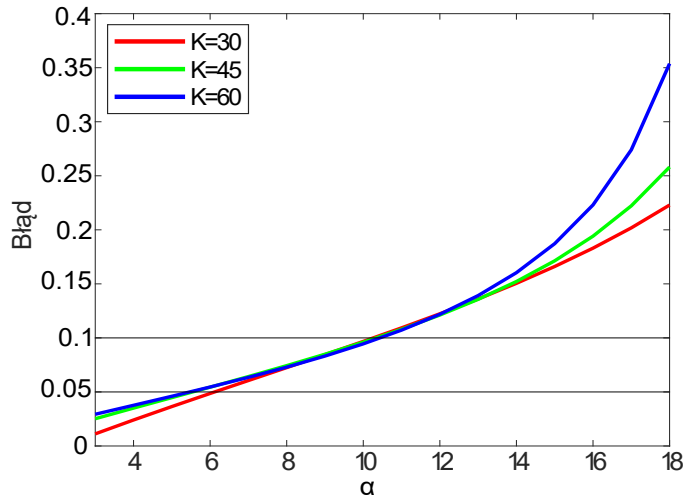
$$\Delta\theta = \pi\theta_d\epsilon = \frac{\pi\theta_d}{\sqrt{K}}, \quad (4.65)$$

otrzymujemy przybliżenie sztywności K_1 wyprowadzone we **Wniosku 2**, w Rozdziale 3.3, i dane wzorem (3.107). Przybliżenie K_1 nie wymaga takich ograniczeń stosowności, jak w przypadku K_2 . *Po raz kolejny przekonujemy się, że osiągnięcie K_2 jest trudne.*

Rysunek 4.4 ilustruje zachowanie aproksymacji pierwszego rzędu dla β (patrz (4.65)), czyli

$$\beta_a = \frac{\pi\theta_d}{\sqrt{K}} - \alpha, \quad (4.66)$$

w przypadku trzech różnych wartości sztywności nogi K , gdy na osi poziomej kąt α zmienia się od 3° do 18° . Numeryczne rozwiązanie kąta β wyznaczone jest na podstawie metody Rungego-Kutty czwartego rzędu dla układu (2.29) z wartościami początkowymi (2.30). W momencie, gdy

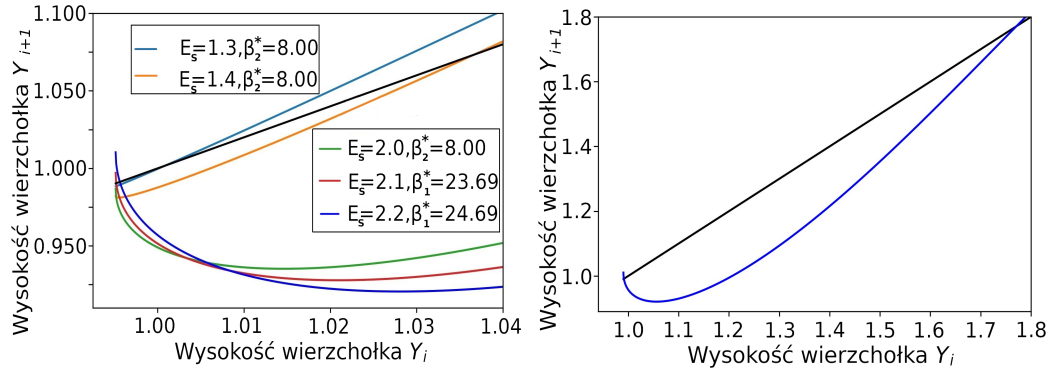


Rysunek 4.4: Względny błąd aproksymacji kąta β dany wzorem (4.67) dla zmieniającego się kąta α podczas ładowania od 3° do 18° . Przyjęto $U_{TD} = 1$ oraz $V_{TD} = 0,2$ i trzy różne wartości sztywności K . Poziome linie oznaczają pięcioprocentowy oraz dziesięcioprocentowy względny błąd.

długość nogi L powraca do 1, odczytana jest wartość kąta odbicia. Oznaczmy ją przez β_n . Względny błąd aproksymacji kąta β polega na porównaniu β_a i β_n w następujący sposób

$$Error = \frac{|\beta_n - \beta_a|}{\beta_n}. \quad (4.67)$$

Przy konstruowaniu przybliżeń w Rozdziale 3 przyjęliśmy mały kąt odchylenia w fazie podporu.



Rysunek 4.5: Po lewej stronie pięć odwzorowań wierzchołków $Y_{i+1}(Y_i)$ danych wzorem (4.68) dla różnych energii E_s i zestawu parametrów z Przykładu 1: $\alpha = 2\pi/45$ (8°) i $K = 70$. Punkty stałe znajdują się na przecięciu prostej $Y_{i+1} = Y_i$ (kolor czarny). Po prawej funkcja (4.68) zaznaczona kolorem niebieskim z dwoma widocznymi rozwiązaniami: pierwszym asymetrycznym ($\beta_1^* = 24,99^\circ$) i drugim symetrycznym ($\beta_2^* = 8^\circ$) dla energii układu $E_s = 2,2$ i sztywności $K = 70$.

Jak pokazano na Rysunku 4.4, wraz ze wzrostem α , błąd (4.67) rośnie. Dla przykładu, dopuszczając pod uwagę wartości błędu względnego (4.67) do 10%, można przyjąć, że dopiero dla kątów mniejszych niż 10° model jest wystarczająco dokładny by być stosowany. Natomiast dla błędu (4.67) do 5%, aby model miał zadowalającą dokładność, kąty odchylenia w fazie podporu nie mogą przekroczyć już 6° .

Zatem, żeby sprawdzić istnienie rozwiązań asymetrycznych podstawiamy $\Delta\theta_i = \pi\theta_d\epsilon$ do wzoru (4.14) i otrzymujemy następujące odwzorowanie wierzchołków w tym przypadku

$$Y_{i+1}(Y_i) = \cos(\alpha - \pi\theta_d\epsilon) - \cos\alpha + Y_i \cos(4\alpha - 2\pi\theta_d\epsilon) + \\ + (E_s + \cos\alpha) \sin^2(2\alpha - \pi\theta_d\epsilon) + \sqrt{(E_s - Y_i)(Y_i - \cos\alpha)} \sin(4\alpha - 2\pi\theta_d\epsilon), \quad (4.68)$$

gdzie $\epsilon = 1/\sqrt{K}$. Chociaż **Przykład 1** potwierdza, że występują znaczne asymetrie, to uzyskane kąty odbicia są duże i przekraczają zakres stosowności modelu (patrz Rys. 4.4).

Przykład 1 (Od symetrycznych do asymetrycznych rozwiązań). Załóżmy, że kąt natarcia α wynosi $2\pi/45$ ($= 8^\circ$), a przybliżona sztywność nogi K jest równa 70. Ponieważ chcielibyśmy znaleźć małą asymetrię, a rzeczywisty kąt ataku, jak widać w Tabeli 2.1 lub Tabeli 3.1, powinien być mały, wybraliśmy sztywność z górnego zakresu. Wówczas prędkość kątowa θ_d^* dla symetrycznego rozwiązania Y^* wyznaczana ze wzoru (patrz 3.107)

$$\theta_d = \frac{2\alpha\sqrt{K}}{\pi} \quad (4.69)$$

jest równa 0,74. Parametry aproksymacji α i K w tym przykładzie są stałe, a zatem stała jest również prędkość kątowa θ_d^* . Punkty stałe dla rozwiązań symetrycznych mogą istnieć tylko wtedy, gdy energia minimalna (patrz (4.52)), która w tym przykładzie jest równa $E_s^{\min} = 1,2723$, zostanie przekroczona. Zatem Rysunek 4.5 ilustruje numeryczne punkty stałe jako przecięcia funkcji odwzorowania $Y_{i+1}(Y_i)$ danej przez (4.68) z linią $Y_{i+1} = Y_i$ dla pięciu przykładowych energii E_s przekraczających 1,2723. Natomiast Tabela 4.1 pokazuje wartości punktów stałych Y_1^* i Y_2^* wyznaczone kolejno ze wzorów (4.64) i (4.44), oraz odpowiadające im kąty odbicia, które oznaczone zostały przez β_1^* i β_2^* . Drugie rozwiązanie Y_2^* jest wysokością wierzchołka punktu stałego, dla przypadku symetrycznego, czyli dla $\theta_d^* = 0,74$. Ponadto zarówno Tabela 4.1, jak i Rysunek 4.5 (patrz po prawej) pokazują, że wraz ze wzrostem energii (w tym przypadku powyżej 2) pojawia się również pierwsze rozwiązanie, które jest asymetryczne, tj. Y_1^* dla β_1^* . Należy jednak zauważyć, że kąty β_1^* znacznie przekraczają α , przyjmując wartości powyżej 23° , co jest o wiele za duże, aby mieścić się w założonym błędzie na przykład 10% (patrz Rys. 4.4). Okazuje się, że znalezione punkty stałe dla odwzorowania (4.68), w oparciu o przydatność modelu, są albo niestabilne i symetryczne, albo poza stosownością modelu.

E_s	θ_d^*	$\theta_{d(a)}^*$	Y_1^*	Y_2^*	$\beta_1^* \times \frac{180^\circ}{\pi}$	$\beta_2^* \times \frac{180^\circ}{\pi}$
1,30	0,74	-	-	1,0018	-	8,00°
1,40	0,74	-	-	1,0733	-	8,00°
2,00	0,74	-	-	1,5904	-	8,00°
2,10	0,74	1,47	0,9904	1,6803	23,69°	8,00°
2,20	0,74	1,53	0,9912	1,7706	24,99°	8,00°

Tabela 4.1: Wartości parametrów biegu i wyznaczone dla nich punkty stałe z Przykładu 1, które ilustruje Rysunek 4.5.

4.4 STABILNOŚĆ PUNKTU STAŁEGO DLA ROZWIĄZAŃ SYMETRYCZNYCH

W tym podrozdziale przejdziemy do sprawdzenia stabilności punktów stałych w przypadku symetrycznych faz podporu. Oznaczmy odwzorowanie (4.14) jako $Y_{i+1} = f(Y_i)$. Stabilne rozwiązania punktu stałego Y^* spełniają następujący warunek

$$|f'(Y^*)| < 1. \quad (4.70)$$

W tym przypadku apostrof oznacza pochodną funkcji f po Y_i . Zatem, aby udowodnić stabilność, należy znaleźć przynajmniej jeden zestaw parametrów $\{\alpha, E_s, \theta_d^*\}$, prowadzący do rozwiązań Y^* spełniających warunek (4.70). Do wyznaczenia $f'(Y^*)$ potrzebujemy pochodnej przyrostu kąta i -tej iteracji $\Delta\theta_i$ w punkcie stałym Y^* , gdy $\Delta\theta_i$ wyraża się wzorem (3.86). W dalszej części pracy przyjmujemy oznaczenie $\left. \frac{d}{dY_i} \Delta\theta_i \right|_{Y^*} = d_i \Delta\theta^*$. Przy założeniu symetrycznej fazy podporu, z (3.86) wynika, że

$$\begin{aligned} d_i \Delta\theta^* = & \frac{d_i \theta_d^*}{\theta_d^*} \left(2\alpha + \frac{\pi^2 \sin \alpha}{2K} \right) + \frac{2\theta_d^*}{K} \left[2d_i L_d^* - 2 \frac{\theta_d^*}{L_d^*} d_i \theta_d^* + \frac{(\theta_d^*)^2 - \cos \alpha}{(L_d^*)^2} d_i L_d^* \right] - \\ & - \frac{d_i K^*}{K} \left(2\alpha - \frac{\pi \theta_d^*}{2\sqrt{K}} \right), \end{aligned} \quad (4.71)$$

gdzie (patrz (4.16))

$$L_d^* = \sqrt{2(E_s - \cos \alpha) - (\theta_d^*)^2}, \quad (4.72)$$

oraz

$$d_i K^* = \left. \frac{d}{dY_i} K \right|_{Y^*}.$$

Jeśli $K = K_2(\alpha, E_s, \theta_d)$, gdzie K_2 dane jest poprzez (3.92), to gdy $\alpha = \beta$ łatwo można sprawdzić, że

$$2\alpha - \frac{\pi \theta_d}{2\sqrt{K}} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{K}}, \quad (4.73)$$

a także

$$d_i K^* = d_i \theta_d^* \frac{2\sqrt{K}}{\sqrt{\Delta}} \left[\pi\sqrt{K} + 4L_d^* \left(1 - 2 \left(\frac{\theta_d^*}{L_d^*} \right)^2 \right) - 2 \frac{(\theta_d^*)^2 - \cos \alpha}{L_d^*} \left(1 + \left(\frac{\theta_d^*}{L_d^*} \right)^2 \right) \right]. \quad (4.74)$$

Ze wzoru (4.15) dostajemy pochodną prędkości kątowej $d_i \theta_d^*$, do której następnie wstawiamy równania wysokości punktu stałego Y^* , to znaczy (4.44) i (4.45):

$$d_i \theta_d^* = \frac{d}{d Y_i} \theta_d \Big|_{Y^*} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\cos \alpha}{\sqrt{E_s - Y^*}} + \frac{\sin \alpha}{\sqrt{Y^* - \cos \alpha}} \right) = -\frac{L_d^*}{D(\alpha, E_s, \theta_d^*)}, \quad (4.75)$$

gdzie

$$D(\alpha, E_s, \theta_d^*) = 2\sqrt{(Y^* - \cos \alpha)(E_s - Y^*)} = \theta_d^* L_d^* \cos 2\alpha + \frac{1}{2} [(L_d^*)^2 - (\theta_d^*)^2] \sin 2\alpha. \quad (4.76)$$

Z kolei zastosowanie wzoru (4.16) lub (4.72) daje zależność

$$d_i L_d^* = \frac{d}{d Y_i} L_d^* \Big|_{Y^*} = -\frac{\theta_d^*}{L_d^*} d_i \theta_d^*. \quad (4.77)$$

Wykorzystując (4.73) oraz (4.77) można uprościć pochodną przyrostu kąta (4.71) dla symetrycznej fazy podporu do następującej postaci

$$d_i \Delta \theta^* = -\frac{2d_i \theta_d^*}{K} \times \left[\frac{(\theta_d^*)^2}{L_d^*} \left(4 + \frac{(\theta_d^*)^2 - \cos \alpha}{(L_d^*)^2} \right) - \frac{1}{\theta_d^*} \left(\alpha K + \frac{\pi^2 \sin \alpha}{4} \right) \right] - \frac{\sqrt{\Delta} d_i K^*}{2K^{3/2}}, \quad (4.78)$$

i dalej ze wzoru (4.75) do postaci

$$d_i \Delta \theta^* = \frac{2L_d^*}{K D(\alpha, E_s, \theta_d^*)} \times \left[\frac{(\theta_d^*)^2}{L_d^*} \left(4 + \frac{(\theta_d^*)^2 - \cos \alpha}{(L_d^*)^2} \right) - \frac{1}{\theta_d^*} \left(\alpha K + \frac{\pi^2 \sin \alpha}{4} \right) \right] - \frac{\sqrt{\Delta} d_i K^*}{2K^{3/2}}, \quad (4.79)$$

z $D(\alpha, E_s, \theta_d^*)$ danym przez (4.76) oraz L_d^* danym przez (4.72). Jeśli pozwolimy zmieniać się sztywności nogi K , to używając teraz (4.74) w powyższym wzorze (4.79) można pokazać, że

$$d_i \Delta \theta^* = \frac{L_d^*}{\theta_d^* D(\alpha, E_s, \theta_d^*)} \times [\Delta \theta^* - 2\alpha] = 0. \quad (4.80)$$

Jest to oczywiste, bo $\Delta \theta_i(K_2(\alpha, E_s, \theta_d^*)) = \Delta \theta^* = 2\alpha$, gdzie $\Delta \theta_i$ jest rozwinięciem przyrostu kąta do drugiego rzędu włącznie (patrz (3.86)). Zauważmy, że sztywność K w badaniu stabilności musimy traktować jako wartość stałą względem Y_i (patrz na przykład Rys. 4.3) i dlatego drugi składnik pochodnej (4.79) znika, bo $d_i K^* = 0$.

Twierdzenie 6 (O stabilności rozwiązań symetrycznych). *Załóżmy, że spełnione są założenia Twierdzenia 4. Jeżeli dodatkowo zbiór parametrów $\{\alpha, E_s, \theta_d^*\}$ spełnia warunek*

$$d_i \Delta \theta^* \in \left(0, \frac{2}{\sin \alpha + D(\alpha, E_s, \theta_d^*)}\right), \quad (4.81)$$

gdzie

$$d_i \Delta \theta^* = \frac{2(\theta_d^*)^2}{KD(\alpha, E_s, \theta_d^*)} \times \left[\frac{8E_s - 9 \cos \alpha - 3(\theta_d^*)^2}{2(E_s - \cos \alpha) - (\theta_d^*)^2} - \frac{\sqrt{2(E_s - \cos \alpha) - (\theta_d^*)^2}}{(\theta_d^*)^3} \times \right. \\ \left. \times \left(\alpha K + \frac{\pi^2 \sin \alpha}{4} \right) \right], \quad (4.82)$$

oraz $D(\alpha, E_s, \theta_d^*)$ dane jest wzorem (4.76). Wówczas Y^* zdefiniowane przez (4.44) lub (4.45) jest wysokością wierzchołka stabilnego punktu stałego.

Dowód. Startując z (4.14), otrzymujemy

$$f'(Y^*) = 1 - \left[\sin \alpha + 2\sqrt{(Y^* - \cos \alpha)(E_s - Y^*)} \right] \frac{d}{dY_i} \Delta \theta_i \Big|_{Y^*} \quad (4.83)$$

dla wysokości wierzchołka punktu stałego Y^* . Ponieważ wyrażenie w nawiasach kwadratowych w (4.83) zawsze pozostaje dodatnie, to (4.70) przekształca się w następujący warunek

$$d_i \Delta \theta^* \in \left(0, \frac{2}{\sin \alpha + 2\sqrt{(Y^* - \cos \alpha)(E_s - Y^*)}}\right), \quad (4.84)$$

co wskazuje na to, że wyższe lub niższe wysokości wierzchołków muszą być odpowiednio skompensowane większą lub mniejszą wartością przyrostu kąta $\Delta \theta_i$. Jednakże ze względów na stabilność dodatnia pochodna $d_i \Delta \theta^*$ nie może być większa niż

$$2 \left[\sin \alpha + 2\sqrt{(Y^* - \cos \alpha)(E_s - Y^*)} \right]^{-1} = 2[\sin \alpha + D(\alpha, E_s, \theta_d^*)]^{-1}, \quad (4.85)$$

gdzie $D(\alpha, E_s, \theta_d^*)$ dane jest wzorem (4.76). Następnie przyjmując, że K jest stałe, wstawiamy $d_i K^* = 0$ do (4.79) i otrzymujemy pochodną przyrostu kąta dla symetrycznej fazy podporu zależną od zestawu parametrów $\{\alpha, E_s, \theta_d^*\}$ oraz daną wzorem (4.82). $\square$

Twierdzenie 6 posłuży nam do wyznaczenia zestawu parametrów $\{\alpha, E_s, \theta_d^*\}$ oraz sztywności K , dla których punkt stały Y^* jest stabilny. Zaczniemy od szczególnego przypadku (3.87).

4.4.1 OBSZARY STABILNOŚCI PUNKTU STAŁEGO DLA SZCZEGÓLNEGO PRZYPADKU

Na początku przydatne będzie napisanie **Twierdzenie 6** w szczególnym przypadku (3.87). **Twierdzenie 6** dla $\theta_d^* = \sqrt{\cos \alpha}$ ma następującą postać:

Wniosek 4. *Gdy prędkość kątowa w momencie lądowania dla punktu stałego Y^* jest równa $\theta_d^* = \sqrt{\cos \alpha}$, to warunek (4.81) z **Twierdzenia 6** przyjmuje postać*

$$d_i \Delta \theta^* \in \left(0, \frac{2}{\sin \alpha + D(\alpha, E_s)}\right), \quad (4.86)$$

gdzie z (4.76) mamy

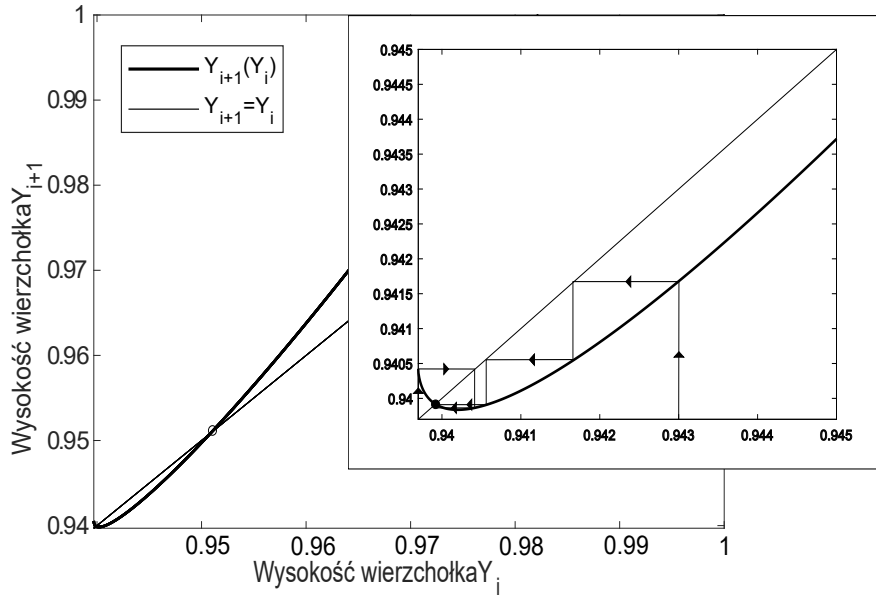
$$D(\alpha, E_s) = \cos 2\alpha \sqrt{\cos \alpha (2E_s - 3 \cos \alpha)} + \sin 2\alpha (E_s - 2 \cos \alpha). \quad (4.87)$$

Jeśli dodatkowo założymy, że K jest wystarczająco duże, aby można je było zastąpić przez $K_1 = \frac{\pi^2 \cos \alpha}{4\alpha^2}$, dane wzorem (3.107) z $\gamma = 2\alpha$, to pochodna (4.82) redukuje się do postaci

$$\begin{aligned} d_i \Delta \theta^* &= \frac{2 \cos \alpha}{K D(\alpha, E_s)} \times \left[4 - \sqrt{\frac{2E_s - 3 \cos \alpha}{(\cos \alpha)^3}} \left(\alpha K + \frac{\pi^2 \sin \alpha}{4} \right) \right] = \\ &= \frac{2\alpha}{D(\alpha, E_s)} \times \left[\frac{16\alpha}{\pi^2} - \sqrt{\frac{2E_s - 3 \cos \alpha}{\cos \alpha}} (1 + \alpha \operatorname{tg} \alpha) \right]. \end{aligned} \quad (4.88)$$

Rysunek 4.6 przedstawia funkcję odwzorowania wierzchołków $f(Y_i) = Y_{i+1}(Y_i)$ daną wzorem (4.14) dla zbioru parametrów jak na wcześniejszym Rysunku 4.3. Zgodnie z przewidywaniami, pierwsze przecięcie z prostą $Y_{i+1} = Y_i$, które wynosi $Y^* = 0,9399$ (patrz (4.44) lub (4.45)) jest stabilnym punktem stałym i przyciąga sąsiednie wierzchołki Y_i w kilku krokach (patrz na ślady strzałek w powiększonym obszarze na Rys. 4.6). Poza tym, jak widać na obu Rysunkach 4.3 i 4.6, pochodna funkcji w miejscu drugiego przecięcia z prostą $Y_{i+1} = Y_i$, które wynosi $Y^* = 0,9509$ przekracza 1, czyli jest to niestabilny punkt stały. Z drugiej strony, jeśli obliczymy wartości własne $f'(Y^*)$ ze wzoru (4.83), podczas gdy $d_i \Delta \theta^*$ wyznaczymy ze wzoru (4.88), gdzie w miejsce K wstawimy $K_2(\pi/9, 1,48, \sqrt{\cos \pi/9}) = 18,3575$, to $f'(0,9399) = -0,706$ dla stabilnego punktu, natomiast $f'(0,9509) = 1,330$ dla niestabilnego punktu.

Przejdźmy do wyznaczania obszarów stabilności, czyli zbiorów parametrów biegu, dla których $|f'(Y^*)| < 1$. Dwie krzywe: dolna, gdy $f'(Y^*) = -1$, tzn. $d_i \Delta \theta^* = 2[\sin \alpha + D(\alpha, E_s)]^{-1}$ i górna, gdy $f'(Y^*) = 1$, tzn. $d_i \Delta \theta^* = 0$ (patrz (4.88)), to ograniczenia obszarów dla $E_s(\alpha)$ i $K(\alpha, E_s)$, składające się z kombinacji parametrów prowadzących do stabilnego punktu stałego. Kiedy zakładamy, że sztywność K jest dostatecznie duża, aby skorzystać z przybliżenia K_1 możliwe



Rysunek 4.6: Na drugim planie funkcja odwzorowania wierzchołków $f(Y_i) = Y_{i+1}(Y_i)$ dana wzorem (4.14) dla zbioru parametrów jak na Rysunku 4.3: $\alpha = \pi/9$, $E_s = 1,48$ oraz $K = K_2(\alpha, E_s, \sqrt{\cos \alpha}) = 18,3575$. Miejsce przecięcia z osią $Y_{i+1} = Y_i$ to stabilny punkt stały (czarne kółko) oraz niestabilny punkt stały (puste kółko). Na pierwszym planie widać dokładniej stabilny punkt stały $Y^* = 0,9399$, dla którego wartość własna wynosi $f'(Y^*) = -0,9951$.

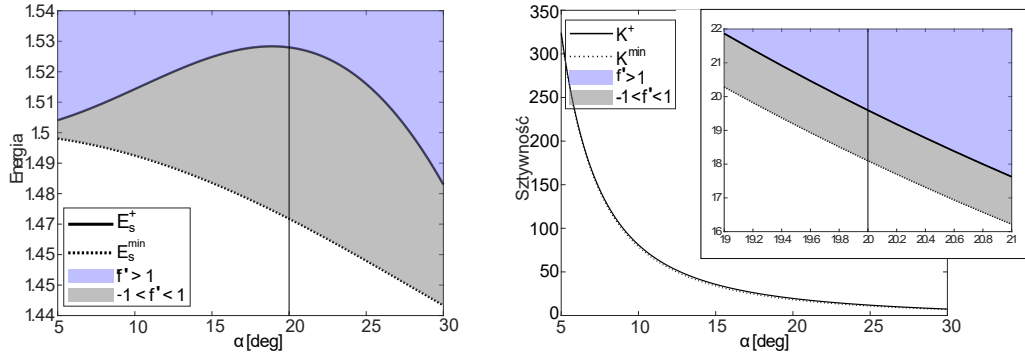
jest analityczne, za pomocą jawnych wzorów, znalezienie ograniczeń tych obszarów. Oznacza to, że dzięki (4.88) z **Wniosku 4** mamy

$$E_s^- < E_s^{min} < E_s < E_s^+ = \frac{3}{2} \cos \alpha + \frac{128\alpha^2 \cos \alpha}{\pi^4(1 + \alpha \tan \alpha)^2}, \quad (4.89)$$

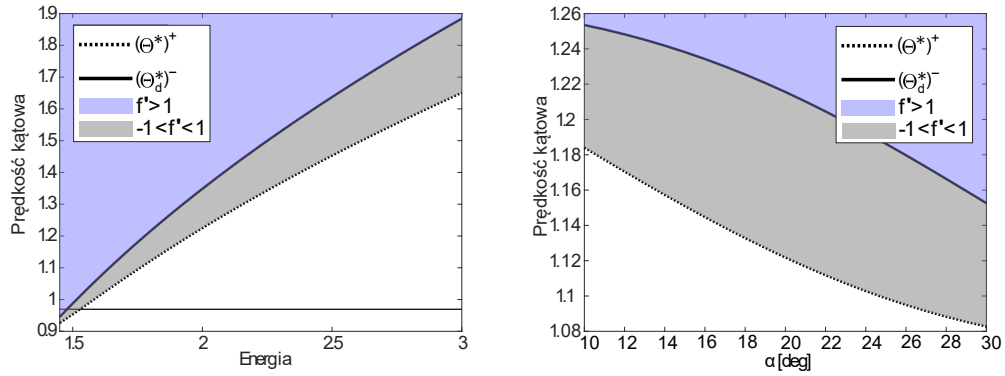
gdzie E_s^- i E_s^+ są wyznaczone z (4.86) oraz (4.88), natomiast z warunku na istnienie punktu stałego, minimalna energia wynosi (4.55), czyli $E_s^{min} = \frac{1}{2 \cos \alpha} + \cos \alpha$. Łatwo można sprawdzić, że $E_s^- < E_s^{min}$ dla każdego parametru α z rozważanego zakresu. Zatem dolna granica energii układu wynosi E_s^{min} . Ponadto używając (3.92) i (3.93) możemy znaleźć następujący obszar dla rozwiązań stabilnych w przypadku $K(\alpha, E_s)$

$$K^{min} < K < K^+, \quad (4.90)$$

gdzie K^{min} jest dane wzorami (4.56) oraz (4.57), natomiast $K^+ = K(\alpha, E_s^+)$, gdy kąt $\alpha \in (\pi/36, \pi/6)$. Warto również wspomnieć, że ograniczenia (4.90) dla sztywności są bezpośrednią konsekwencją monotonicznego zachowania się $K(\alpha, E_s)$ w zależności od parametrów. W szczególności dla ustalonego kąta α , sztywność K wzrasta, wraz ze wzrostem energii układu E_s .



Rysunek 4.7: Zależności parametrów dla rozwiązań punktu stałego z $\theta_d^* = \sqrt{\cos \alpha}$. Obszary stabilności: $E_s(\alpha)$ (po lewej) i $K(\alpha)$ (po prawej) przewidywane poprzez przybliżenia analityczne (4.89) i (4.90) dla różnych kątów ataku α od $5^\circ (= \pi/36)$ do $30^\circ (= \pi/6)$. Obszar stabilnych punktów stałych, o wartościach własnych $-1 < f'(Y^*) < 1$, jest oznaczony na szaro. Obszar niestabilnych punktów stałych, o wartościach własnych $f'(Y^*) > 1$, jest oznaczony na niebiesko. f' to oznaczenie wartości własnej używane w legendzie.



Rysunek 4.8: Po lewej obszar stabilności prędkości kątowej $\theta_d^*(E_s)$ z $\alpha = \pi/9$ dla zmieniającej się energii E_s od 1,45 do 3. Linia pozioma pokazuje przypadek $\theta_d^* = \sqrt{\cos \alpha} = 0,9694$. Po prawej obszar stabilności prędkości kątowej $\theta_d^*(\alpha)$ przy $E_s = 1,8$ dla różnych kątów natarcia α od $10^\circ (= \pi/18)$ do $30^\circ (= \pi/6)$. Górna i dolna granica to odpowiednio $(\theta_d^*)^+$ i $(\theta_d^*)^-$. Obszar stabilnych punktów stałych o wartościach własnych $-1 < f'(Y^*) < 1$ zaznaczony jest kolorem szarym. Na niebiesko zaznaczono obszar niestabilnych punktów stałych o wartościach własnych $f'(Y^*) > 1$. f' to oznaczenie wartości własnej używane w legendzie.

Założenie małych wartości kąta α , wymaganych dla rozwiązań przybliżonych, jest zawsze związane ze sztywnością sprężyny przekraczającą fizjologicznie uzasadnione wartości w przypadku symetrycznych faz kontaktu. Na Rysunku 4.7, po prawej widać, że gdy kąt α maleje, to parametr K rośnie. Ponieważ kąty natarcia mniejsze niż $\pi/18$ są mało prawdopodobne podczas rzeczywistego biegu człowieka z prędkością joggingu, to sztywność nogi K wyznaczona wówczas z modelu symetrycznego (patrz (3.92) i (3.93)) nie może być wiarygodną wartością fizjologiczną. Na przykład, biorąc $\alpha = \pi/36$ i $E_s = 1,5$, bezwymiarowa sztywność nogi $K(\pi/36, 1,5)$ wynosi 322 (patrz Rys. 4.7). W porównaniu do eksperymentów, gdzie typowe wartości sztywności mieszczą się w przedziale 20 - 50 (patrz Tab. 2.1 lub Tab. 3.1), otrzymana wartość $K = 322$ jest od 6,5 do 15,5 razy większa. Nawet dla biegów sprinterskich, gdy wartość sztywności znacznie wykracza poza 50, uzyskana w rozważanym przypadku sztywność jest 3-krotnie większa od rzeczywistych parametrów K .

Przypomnijmy, że funkcja odwzorowania wierzchołków $f(Y_i)$ (patrz (4.14)) przedstawiona na Rysunku 4.6 jest wyznaczona dla zbioru parametrów: $\alpha = \pi/9$, $E_s = 1,48$ oraz $K = K_2(\pi/9, 1,48, \sqrt{\cos \pi/9}) = 18,3575$. Zauważmy, że zestaw tych parametrów należy do pokazanych na Rysunku 4.7 obszarów kombinacji parametrów dających stabilne rozwiązania, które z kolei wyznaczaliśmy z oszacowań (4.89) oraz (4.90). Pionowe linie na Rysunku 4.7, oznaczone dla kąta ataku $\alpha = \pi/9$, ilustrują, że zarówno energia $E_s = 1,48$ (po lewej), jak i sztywność $K = 18,3575$ (po prawej) należą do szarych obszarów stabilności dla tych parametrów biegu.

4.4.2 OBSZARY STABILNOŚCI PUNKTU STAŁEGO DLA OGÓLNEGO PRZYPADKU

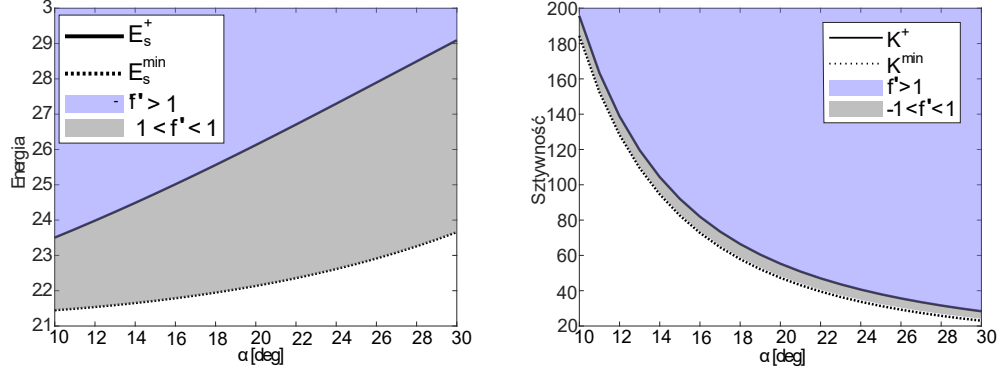
W tym rozdziale odejdziemy od przypadku $\theta_d^* = \sqrt{\cos \alpha}$ i przedstawimy obszary stabilności w ujęciu ogólnym. Górne i dolne granice obszarów stabilności, oznaczone na Rysunkach 4.8 oraz 4.9 odpowiednio linią ciągłą i przerywaną, wyznaczono z **Twierdzenia 6**.

Na Rysunku 4.8 pokazano obszary stabilności prędkości kątowej θ_d^* w zależności od zmieniającej się energii (przy zadanym parametrze α) i zmieniającego się kąta ataku (przy zadanym parametrze E_s). Dla ustalonego kąta natarcia prędkość kątowa θ_d^* rośnie wraz ze wzrostem energii, podczas gdy dla ustalonej energii prędkość kątowa θ_d^* maleje wraz ze wzrostem kąta natarcia. Pozioma linia ciągła na Rysunku 4.8 (po lewej) ilustruje przypadek, gdy $\theta_d^* = \sqrt{\cos \alpha}$, dla którego z warunku (4.55) energia musi być bliska 1,5.

W przypadku sprintów technika biegu znacznie się zmienia (patrz [11, 16]). Z punktu widzenia parametrów naszego modelu, skutkuje to zwiększeniem θ_d^* i zmniejszeniem α . Podczas gdy kąty natarcia są mniejsze niż podczas zwykłego joggingu, kąty odbicia są znacznie większe (patrz [4, 14]). Wprowadza to zbyt dużą asymetrię w kontekście symetrycznego modelu. Nie ma, więc sensu analizować stabilności dla tej techniki biegu. Ponadto w tej części rozważane są fizjologicznie uzasadnione wartości sztywności nogi, które występują gdy kąt α jest większy niż $\pi/18$, co również eliminuje biegi sprinterskie.

Rysunek 4.9 prezentuje obszary stabilności energii $E_s(\alpha)$ i sztywności $K(\alpha, E_s)$ dla zmieniającego się kąta ataku w przypadku stałej prędkości kątowej. Jak widać na Rysunku 4.9, energia E_s rośnie wraz ze wzrostem kąta natarcia, podczas gdy sztywność K oczywiście maleje. Przy stałej prędkości kątowej θ_d^* i większym kącie ataku α potrzeba więcej energii, aby punkt masy ustabilizował się na tym samym poziomie. Z drugiej strony, dla ustalonej wartości α potrzeba więcej energii, aby zwiększyć prędkość kątową θ_d^* . Sztywność sprężyny zależy zarówno od kąta α , jak i

od energii E_s . Im większa energia, tym większa sztywność, przy czym sztywność maleje wraz ze wzrostem kąta natarcia. Zauważmy, że wpływ α na sztywność nóg jest znacznie silniejszy i typową sytuacją jest spadek sztywności wraz ze wzrostem zarówno kąta natarcia, jak i energii.

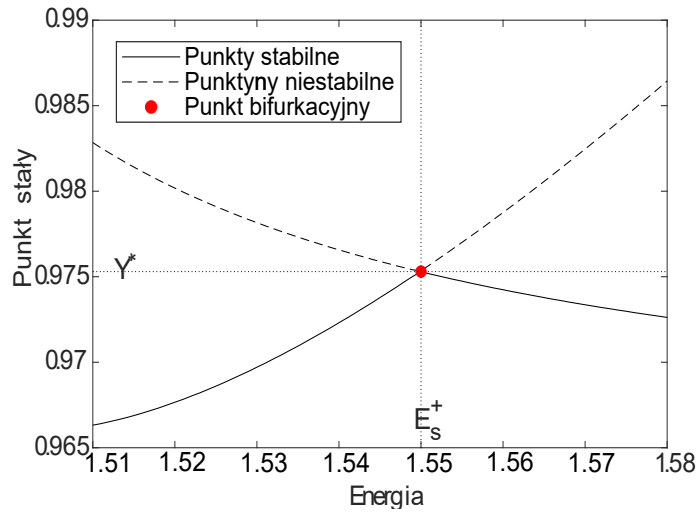


Rysunek 4.9: Po lewej obszar stabilności energii $E_s(\alpha)$, natomiast po prawej obszar stabilności bezwymiarowej sztywności $K(\alpha, E_s)$, określonej przez (3.92) i (3.93), gdzie $\theta_d^* = 1,5$ dla różnych kątów natarcia α od $10^\circ (= \pi/18)$ do $30^\circ (= \pi/6)$. Górna i dolna granica po lewej stronie to odpowiednio E_s^+ i E_s^- oraz $K^+ = K(\alpha, E_s^+)$ i $K^- = K(\alpha, E_s^-)$ po prawej stronie. Obszar stabilnych punktów stałych o wartościach własnych $-1 < f'(Y^*) < 1$ zaznaczony jest kolorem szarym. Na niebiesko zaznaczono obszar niestabilnych punktów stałych o wartościach własnych $f'(Y^*) > 1$. f' to oznaczenie wartości własnej używane w legendzie.

4.5 TRANSKRYTYCZNA BIFURKACJA W ODWZOROWANIU WIERZCHOŁKÓW

W tej części rozprawy przedstawimy numeryczny i analityczny dowód na występowanie bifurkacji transkrytycznej w naszym odwzorowaniu określonym równaniem (4.14). Sprawdziliśmy, że bifurkacje występują także w innych przybliżonych rozwiązaniach (patrz na przykład [28]), ale ich występowanie w pełnym modelu nie zostało jeszcze zweryfikowane w literaturze. W szczególności, biorąc pod uwagę energię układu E_s jako parametr bifurkacji, pokażemy, że rozwiązania punktu stałego zderzają się w bifurkacji transkrytycznej i występuje wymiana stabilności.

Zatrzymajmy się na Rysunku 4.10, który jest jedno parametrycznym diagramem bifurkacyjnym, na którym przedstawiamy istnienie i stabilność rozwiązań punktu stałego w zależności od energii. Linia ciągła na Rysunku 4.10 wskazuje rozwiązania stabilne, a linia przerywana niestabilne. Zaczniemy od lewej strony Rysunku 4.10, czyli od najniższego poziomu energii $E_s = 1,51$. Przy tej wartości parametru bifurkacji istnieje para rozwiązań punktu stałego, jedno na dolnej gałęzi jest stabilne, podczas gdy to na górnej gałęzi jest niestabilne. Zwiększając wartość parametru energii E_s , te dwa rozwiązania zbliżają się do siebie, aż zderzą się dla $E_s^+ = 1,550$, gdy $Y^* = 0,9754$. Zwiększając dalej E_s , powyżej wartości $E_s = E_s^+$, widzimy, że gałąź stabilna przechodzi dalej poza punkt bifurkacji jako gałąź niestabilna, a gałąź niestabilna jako gałąź stabilna. Mamy zatem typowy scenariusz bifurkacji transkrytycznej.

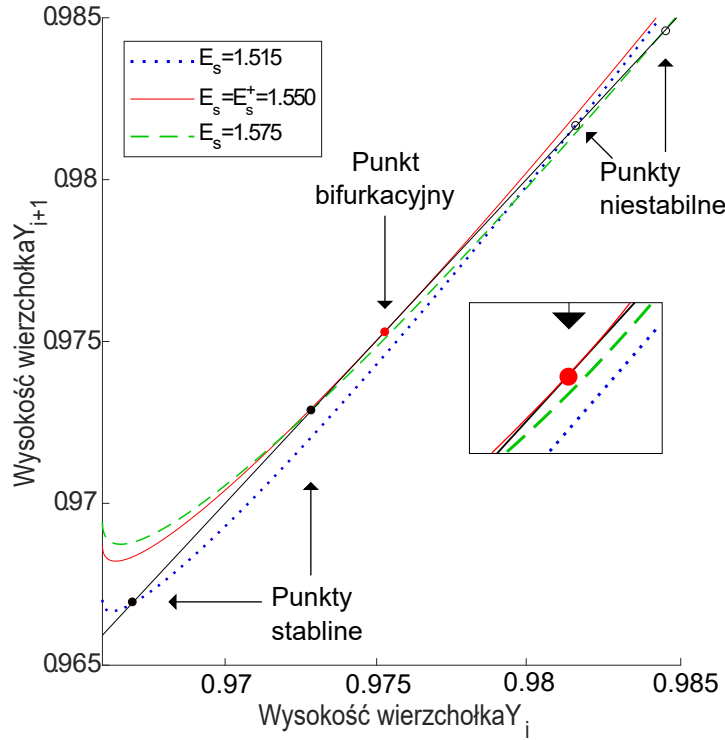


Rysunek 4.10: Jedno-parametryczny diagram bifurkacji dla funkcji (4.14). Punktem bifurkacji transkrytycznej jest punkt stały $Y^* = 0,9754$, gdy energia $E_s = E_s^+ = 1,550$. Ustalono kąt ataku α na $\alpha = \pi/12$, podczas gdy sztywność $K = K_2$ jest wyznaczona z (3.92), dla $\beta = \alpha$, i rośnie od 34,77 dla $E_s = 1,51$ do 38,73 dla $E_s = 1,58$.

Aby zaobserwować to dalej, na Rysunku 4.11 przedstawiamy numerycznie odwzorowanie (4.14) dla trzech różnych wartości parametru bifurkacji. Mianowicie dla $E_s < E_s^+$, następnie dla $E_s = E_s^+$ i wreszcie dla $E_s > E_s^+$. Rozważmy najpierw wykres pokazany przez niebieską kropkowaną krzywą dla $E_s = 1,515 < E_s^+$. Na wykresie widzimy dwa stałe punkty: stabilny (czarna kropka) znajduje się pod niestabilnym (puste kółko), co zgadza się z diagramem bifurkacji przedstawionym wcześniej na Rysunku 4.10. Zwiększając E_s do $E_s = E_s^+ = 1,550$, zderzają się dwa stałe punkty - patrz czerwona ciągła krzywa na Rysunku 4.11. Zauważ, że wykres jest styczny do prostej $Y_{i+1} = Y_i$ w punkcie bifurkacji Y^* (czerwona kropka). Wreszcie, zwiększenie E_s do $E_s = 1,575 > E_s^+$ pozwala nam zobaczyć wymianę stabilności punktów stałych - patrz zielona przerywana krzywa na Rysunku 4.11, gdzie niestabilny punkt stały (puste kółko), powiedzmy Y_u nadal leży powyżej stałego punktu Y^* , czyli $Y_u > Y^*$, a stabilny (czarna kropka), powiedzmy Y_s , leży poniżej Y^* , czyli $Y_s < Y^*$. Z tych trzech wykresów widać, że warunki dla bifurkacji transkrytycznej są spełnione.

Fizyczną konsekwencją bifurkacji transkrytycznej podczas biegu jest obniżenie wysokości punktu stabilnego po przekroczeniu energii krytycznej E_s^+ . Energia w układzie staje się wtedy wyższa niż potrzebna do stabilnego biegu z daną prędkością i musi zostać wytracona. Parabola lotu, czyli wektory prędkości, zmieniają się tak żeby część energii została oddana poprzez uderzenie w ziemię. Taki bieg staje się mniej ekonomiczny pod względem energetycznym i wiąże się z nieoptymalną techniką biegu.

W rozważanym przykładzie bifurkacja transkrytyczna występuje dla następującego zestawu parametrów: $\alpha = \pi/12$, $E_s = 1,550$, $K = K_2 = 36,75$, gdzie $\theta_d^* = 1$ oraz $L_d^* = 0,410$, czyli pozioma i pionowa prędkość w chwili lądowania wynosi odpowiednio $U_{TD} = 1,072$ i



Rysunek 4.11: Numeryczna ilustracja transkrytycznej bifurkacji występującej pod wpływem zmiany parametru bifurkacji E_s w odwzorowaniu (4.14). Parametry jak na Rysunku 4.10. Kąt natarcia α jest ustawiony na $\alpha = \pi/12$, podczas gdy sztywność $K = K_2$ uzyskana z (3.92), dla $\beta = \alpha$, wynosi 35,07 dla $E_s = 1,515$, 36,75 dla $E_s = E_s^+ = 1,550$ oraz 37,94 dla $E_s = 1,575$.

$V_{TD} = 0,137$. Są to typowe wartości dla biegu (patrz Tab. 2.1), który jest tylko nieznacznie szybszy niż w przypadku $\theta_d^* = \sqrt{\cos \alpha}$.

Zanim sprawdzimy, czy warunki analityczne dla bifurkacji transkrytycznej są spełnione, zaznaczmy tutaj, że parametr K należy teraz uznać za zależny zarówno od stanu modelu w momencie lądowania, jak i od zmiennych parametrów, a mianowicie od wysokości wierzchołka Y i układu energetycznego E . Indeks dolny dla uproszczenia oznaczeń został w tym podrozdziale celowo pominięty. Wiemy, że ogólnie $K = K(\alpha, \theta_d, L_d)$. Teraz, z równań punktu stałego (4.44) i (4.45), możemy zidentyfikować związek między (α, θ_d, L_d) i (Y, E) . Dlatego dla rozwiązań punktu stałego możemy równoważnie wyrazić $K(\alpha, \theta_d, L_d)$ jako $K(Y, E)$. Jesteśmy gotowi do sprawdzenia warunków dla bifurkacji transkrytycznej w punkcie (Y^*, E_s^+) w czynnikach pochodnych funkcji Poincarégo $f(Y, E)$ (patrz (4.14)), gdzie odwzorowanie bez indeksów dolnych dane jest równaniem

$$f(Y, E) = \cos(\alpha - \Delta\theta) + \left[\sin(2\alpha - \Delta\theta)\sqrt{E - Y} + \cos(2\alpha - \Delta\theta)\sqrt{Y - \cos\alpha} \right]^2. \quad (4.91)$$

Warunki te są następujące:

$$f(Y^*, E_s^+) = Y^*, \quad (4.92)$$

oraz

$$\frac{\partial f}{\partial Y}(Y^*, E_s^+) = 1, \quad (4.93)$$

i ponadto

$$\frac{\partial f}{\partial E}(Y^*, E_s^+) = 0, \quad (4.94)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial Y \partial E}(Y^*, E_s^+) \neq 0, \quad (4.95)$$

a także

$$\frac{\partial^2 f}{\partial Y^2}(Y^*, E_s^+) \neq 0. \quad (4.96)$$

Twierdzenie 7 (O transkrytycznej bifurkacji). *Niech zbiór parametrów $\{\alpha, E, \theta_d^*\}$ spełnia (4.46) oraz (4.81). Wówczas Y^* , zdefiniowane przez (4.44) lub (4.45), jest wysokością wierzchołka punktu stałego dla takiej energii $E = E_s^+$, że odwzorowanie $f(Y, E)$, dane wzorem (4.91), spełnia warunki (4.92), (4.93), (4.94), (4.95) i (4.96) dla $(Y, E) = (Y^*, E_s^+)$, zatem (Y^*, E_s^+) jest punktem bifurkacji transkrytycznej.*

Dowód. Na początku sprawdzimy, że w $(Y, E) = (Y^*, E_s^+)$, funkcja (4.91) ma niehiperboliczny punkt stały, to znaczy spełnia warunki (4.92) oraz (4.93). Istnienie punktu (Y^*, E_s^+) gwarantują założenia (4.46) oraz (4.81) z **Twierdzenia 4** oraz **Twierdzenia 6**, odpowiednio. Ponieważ przechodząc przez (Y^*, E_s^+) musimy mieć dwie krzywe punktów stałych (patrz na Rys. 4.10), zatem zgodnie z twierdzeniem o funkcji uwikłanej, konieczne jest, żeby sprawdzić (4.94). Co więcej, dla pochodnych drugiego rzędu, musimy dostać (4.95) oraz (4.96). Pochodne użyte w warunkach na bifurkacje transkrytyczne (4.93), (4.94), (4.95) i (4.96) są pokazane poniżej w ich jawnej postaci (dla porównania pierwszej pochodnej patrz (4.83)):

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial Y}(Y^*, E_s^+) &= 1 - \left[\sin \alpha + 2\sqrt{(Y^* - \cos \alpha)(E_s^+ - Y^*)} \right] \times \frac{\partial \Delta \theta}{\partial Y}(Y^*, E_s^+) = 1, \\ \frac{\partial f}{\partial E}(Y^*, E_s^+) &= - \left[\sin \alpha + 2\sqrt{(Y^* - \cos \alpha)(E_s^+ - Y^*)} \right] \times \frac{\partial \Delta \theta}{\partial E}(Y^*, E_s^+) = 0, \\ &\Downarrow \\ \frac{\partial^2 f}{\partial Y \partial E}(Y^*, E_s^+) &= - \left[\sin \alpha + 2\sqrt{(Y^* - \cos \alpha)(E_s^+ - Y^*)} \right] \times \frac{\partial^2 \Delta \theta}{\partial Y \partial E}(Y^*, E_s^+) \neq 0, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial Y^2}(Y^*, E_s^+) &= - \left[\sin \alpha + 2\sqrt{(Y^* - \cos \alpha)(E_s^+ - Y^*)} \right] \times \frac{\partial^2 \Delta \theta}{\partial Y^2}(Y^*, E_s^+) \neq 0. \end{aligned} \quad (4.97)$$

Zatem warunki (4.93), (4.94), (4.95) oraz (4.96), to znaczy (4.97), można wyrazić jako pochodne przyrostu kąta $\Delta\theta$ w następującej postaci:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Delta\theta}{\partial Y}(Y^*, E_s^+) &= 0, & \frac{\partial\Delta\theta}{\partial E}(Y^*, E_s^+) &= 0, \\ \frac{\partial^2\Delta\theta}{\partial Y\partial E}(Y^*, E_s^+) &\neq 0, & \frac{\partial^2\Delta\theta}{\partial Y^2}(Y^*, E_s^+) &\neq 0.\end{aligned}\tag{4.98}$$

W takim razie, z pierwszego wiersza wyrażeń (4.98) wynika, że w rozwidleniu (Y^*, E_s^+) przyrost kąta $\Delta\theta$ podczas podporu, jest stacjonarny. Aby sprawdzić, czy rzeczywiście tak jest, zauważmy, że (patrz (4.80))

$$\frac{\partial\Delta\theta}{\partial Y}(Y^*, E_s^+) = d_i\Delta\theta^* = 0.\tag{4.99}$$

Ponieważ

$$\eta^* = \frac{\pi\sqrt{K}}{2} + 2L_d^* - \frac{(\theta_d^*)^2 - \cos\alpha}{L_d^*} - \frac{1}{\theta_d^*} \cdot \left(\alpha K + \frac{\pi^2 \sin\alpha}{4} \right) = 0,\tag{4.100}$$

dla $K = K_2$, to dalej można pokazać, że

$$\frac{\partial\Delta\theta}{\partial E}(Y^*, E_s^+) = -\frac{2\partial_E\theta_d^*}{K}\eta^* = 0,\tag{4.101}$$

gdzie (patrz (4.15) i (4.16)) trzeba wykorzystać

$$\partial_E\theta_d^* = \frac{\partial\theta_d}{\partial E}(Y^*, E_s^+) = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{2(E_s^+ - Y^*)}}\tag{4.102}$$

oraz

$$\partial_EL_d^* = \frac{\partial L_d}{\partial E}(Y^*, E_s^+) = \frac{1}{L_d^*} - \frac{\theta_d^*}{L_d^*}\partial_E\theta_d^*.\tag{4.103}$$

Co więcej, drugie pochodne cząstkowe dla przyrostu kąta $\Delta\theta$ w punkcie (Y^*, E_s^+) (patrz drugi wiersz (4.98)) są różne od zera. Wynika to z postaci funkcji odwzorowania wierzchołków (4.91) i można sprawdzić numerycznie za pomocą różnic skończonych. $\square$

Punkt bifurkacji $(Y^*, E_s^+) = (0,9754, 1,550)$, czyli dla przykładu ilustrowanego na Rysunkach 4.10 oraz 4.11, spełnia warunki (4.98). Można zauważyć, że funkcja (4.91) jest wypukła i w konsekwencji druga pochodna przyrostu kąta ujemna (patrz ostatecznie równanie (4.97)). Zatem w tym punkcie bifurkacji przyrost kąta $\Delta\theta$ osiąga wartość maksymalną.

5

SZTYWNOŚĆ I MINIMALIZACJA ENERGII NA BAZIE EKSPERYMENTU

W tym rozdziale przedstawimy praktyczne zastosowanie modelu *SLIP* w analizie danych pochodzących z przeprowadzonego przez nas eksperymentu. Naszym głównym celem jest wykorzystanie modelu jako punktu odniesienia do właściwości mechanicznych i energetycznych biegu człowieka, ze średnimi prędkościami. Porównamy energię generowaną przez biegacza z minimalną energią wymaganą do stabilnego biegu, przewidywaną przez model. Przed przeprowadzeniem tej analizy dokonamy porównania dwóch aproksymacji sztywności nogi określonych przy pomocy prędkości środka masy *CoM* oraz kątów ataku i odbicia ze sztywnością wyliczoną bezpośrednio z definicji, jako iloraz ugięcia nogi i siły reakcji podłoża. Ponadto, ocenimy przybliżenie czasu kontaktu stopy z podłożem, maksymalne ugięcia nogi oraz różnicę między kątami ataku oraz odbicia w fazie podparcia. Dzięki temu będziemy mogli zweryfikować zgodność naszego modelu z rzeczywistymi danymi.

5.1 PRZEBIEG BADANIA

W badaniu wzięło udział stu pięciu zdrowych studentów wychowania fizycznego, w tym 71 mężczyzn i 34 kobiety. Grupa obejmuje zawodowych biegaczy, przedstawicieli innych dyscyplin oraz sportowców rekreacyjnych. Wszyscy oni zostali poinformowani o przebiegu badania i wyrazili zgodę na uczestnictwo. Eksperyment został przeprowadzony zgodnie z Deklaracją Helsińską. W celu zilustrowania danych wyznaczono średnią $\pm$ standardowe odchylenie ($mean \pm SD$) dla podstawowych zmiennych: wiek 20 ± 3 lat, wysokość ciała 175 ± 9 cm, oraz masę 69 ± 11 kg.

Badanie zostało przeprowadzone w Laboratorium Biomechaniki Ruchu Sportowców Uniwersytetu Rzeszowskiego. Po standardowej rozgrzewce, składającej się między innymi z 15 - minutowego truchtu oraz rozciągania całego ciała, wolontariusze odpoczywali, do osiągnięcia pełnej subiektywnej gotowości do wykonania testu. W głównym eksperymencie wykonywali cztery 15 - sekundowe próby na bieżni (*b/p/cosmos sports & medical GmbH*, Nussdorf-Traunstein, Niemcy). Każda z nich rozpoczynała się od wolniejszego biegu, aby stopniowo osiągnąć docelową prędkość biegni: 9, 12,5, 16, 19,5 km/h, odpowiednio. Próby rozdzielała bierna przerwa trwająca 2 minuty, lub do momentu, aż tętno, wróci do wartości sprzed wysiłku. Okres oczekiwania został wprowadzony w celu uniknięcia efektów zmęczenia i zapewnienia, że każda próba została wykonana przy maksymalnej gotowości fizycznej. Zasadniczą przyczyną zmęczenia mięśniowego jest kwas mlekowy, który bezpośrednio wpływa na kinematykę ruchu (patrz [5, 6]). Podczas 15 - sekundowego wysiłku o submaksymalnej intensywności, szlak glikolityczny nie staje się jeszcze głównym dostawcą adenozynotrifosforanu (*ATP*), dlatego mechanika biegu nie powinna zostać zaburzona. Adenozynotrifosforan (*ATP*) jest podstawową jednostką energetyczną w komórkach, umożliwia-

jącą przekazywanie energii potrzebnej do procesów biologicznych, w tym ruchu mięśniowego, podczas wysiłku fizycznego (por. [3]).

Przed pierwszą próbą na bocznej powierzchni ciała badanego umieściliśmy znaczniki. Marker środka masy (CoM) znajdował się na wysokości kości krzyżowej, za kręgiem $S2$. Jest to punkt projekcji środka masy na powierzchnię boczną (patrz [24]), który według pozycji [18] znajduje się na około 56% wysokości biegacza. Drugi znacznik został umieszczony na kostce bocznej (por. [30]). Zmierzono również odległość środka masy (CoM) od ziemi w pozycji stojącej, oznaczane wcześniej w pracy przez l_0 , czyli długość odcinka przechodzącego przez oba markery i rozpoczynającego się w CoM , a kończącego się w punkcie kontaktu stopy z podłożem (okolicie śródstopia).

5.2 ZBIERANIE DANYCH

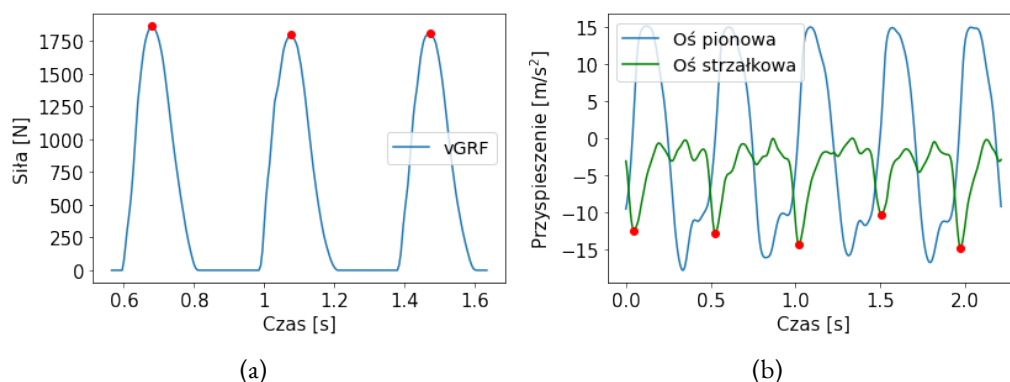
Podstawowym narzędziem pomiarowym była bieżnia *Gaitway 3D Pressure/Force Treadmill* wyposażona w platformę naciskową *Zebris*, reprezentującą *Złoty Standard* pomiarowy. Siłę mierzone z częstotliwością 1000 Hz. Dzięki czemu wiadomo dokładnie, kiedy stopa była w kontakcie z bieżnią oraz jaka była wartość siły reakcji podłoża (*ang. ground reaction force - GRF*).

Sportowcy byli również filmowani za pomocą dwóch zsynchronizowanych, szybkich kamer wideo (*Ninox 300c*, *Noraxon*, Scottsdale, USA) o prędkości 100 klatek na sekundę. Środek masy (CoM) oraz markery kostki zostały zdigitalizowane dla każdej klatki, tworząc prosty jedno segmentowy model zawodnika. Momenty lądowania i odbicia, wyznaczone za pomocą siły reakcji podłoża (GRF), pokrywały się z klatkami, w których stopa wyraźnie dotykała bieżni oraz, w których stopa wyraźnie odrywała się od niej (por. [30]). Natomiast moment, w którym punkt CoM był najbliższy ziemi, przypadał na działanie największej siły reakcji podłoża (patrz [47]). Następnie kąty ataku i odbicia oraz minimalna odległość środka masy od bieżni zostały zebrane przy użyciu systemu *SIMI Motion System* (*SIMI Reality Motion Systems GmbH*, Unterschleissheim, Niemcy). Rzeczywiste wymiary zarejestrowanego obrazu zostały określone za pomocą ramki kalibracyjnej ($1\text{ m} \times 1\text{ m}$) umieszczonej w płaszczyźnie ruchu uczestnika. Po skalibrowaniu współrzędnych, minimalna odległość od środka masy do bieżni została zmierzona jako odległość znacznika punktu CoM od punktu kontaktu stopy z podłożem.

Dodatkowo, trójosiowy akcelerometr (*Shimmer 9DOF*, *Shimmer Research Ltd*, Dublin, Irlandia) został umieszczony w okolicach kości krzyżowej, czyli na wysokości środka ciężkości człowieka w pozycji stojącej, (zgodnie z pozycją [18]). Dane dotyczące przyspieszenia były mierzone z częstotliwością 300 Hz, przefiltrowane przez czwartorzędowy filtr *Butterworth* z częstotliwością odcięcia 10 Hz (dobraną na podstawie [15, 19]). Odwołując się do modelu *SLIP*, kontakt z ziemią rozpoczyna się, gdy pionowa składowa przyspieszenia przekracza zero. Ponadto zakładamy, że w momencie działania największej siły reakcji podłoża (GRF), prędkość pionowa wynosi zero, a prędkość pozioma jest równa prędkości bieżni. Przyjmując takie wartości początkowe, dla każdego kolejnego kroku, obie składowe prędkości w momencie lądowania, zostały obliczone przy pomocy odwrotnego całkowania.

5.3 WYZNACZANIE PARAMETRÓW

Badania obejmowały od 20 do 30 kontaktów stóp z podłożem. Dla każdego kontaktu maksymalna wartość pionowej siły reakcji podłoża została określona, a średnia tych wartości szczytowych, oznaczona przez f_{max} , była wykorzystana do dalszej analizy (patrz Rys. 5.1a). Prędkości poziome stanowiły wypadkową prędkości bieżni i chwilowych poziomych prędkości miednicy. Zarówno prędkości pionowe jak i poziome były wyznaczone w momentach lądowania z danych z akcelerometrów (patrz Rys. 5.1b). Obie prędkości zostały uśrednione, dla wszystkich kroków, i oznaczone jako u_{TD} i v_{TD} . Minimalna odległość środka masy od podłoża, kąty ataku oraz odbicia (tj. α i β) były odczytywane w kolejnych fazach kontaktu, a średnią tych parametrów wykorzystano do dalszej analizy.



Rysunek 5.1: (a) Siła reakcji podłoża z zaznaczonymi pikami oznaczonymi kolorem czerwonym. (b) Przetworzone dane akcelerometrów w osi pionowej i poziomej w odniesieniu do lokalnego układu współrzędnych urządzenia z zaznaczonymi, czerwonym kolorem, momentami lądowania.

Kąty zawierają się między odcinkiem przechodzący przez oba markery (środku masy oraz kostki) w stosunku do osi pionowej (patrz Rys. 5.2). Minimalna odległość punktu CoM od podłoża to odległość tego markera w momencie działania f_{max} (por. [47]). Natomiast maksymalne ugięcie nogi Δl_{max} , to różnica między początkową, a minimalną odległością środka masy od ziemi. Ten parametr charakteryzuje się największym błędem pomiaru, ponieważ nawet niewielkie różnice w kalibracji mogą istotnie wpłynąć na wynik.



Rysunek 5.2: Kąty lądowania α i odbicia β oraz minimalna odległość środka masy CoM od podłoża.

Prędkość	α [°]	β [°]	u_{TD} [m/s]	v_{TD} [m/s]	Δl_{max} [m]	f_{max} [kN]	t_c [s]	t_a [s]	[step/s]
9 km/h	5,59	24,27	2,5-0,074	-0,476	0,017	1,435	0,30	0,08	2,69
12,5 km/h	8,05	25,47	3,5-0,074	-0,457	0,017	1,512	0,24	0,10	2,96
16 km/h	9,67	27,73	4,4-0,119	-0,419	0,021	1,517	0,20	0,11	3,20
19,5 km/h	10,40	28,95	5,4-0,126	-0,378	0,019	1,528	0,18	0,15	3,03

Tabela 5.1: Wartości średnie dla zmierzonych parametrów: α , β , u_{TD} , v_{TD} , Δl_{max} , f_{max} , t_c , t_a , oraz częstotliwości kroków, w zależności od prędkości bieżni. Prędkość pozioma u_{TD} to suma wektorów prędkości bieżni i prędkości środka masy CoM w momencie lądowania. Wszystkie wartości parametrów są wymiarowe.

Zebrane dane przedstawiono w Tabeli 5.1, uzupełniając je o wyniki z platformy naciskowej, czyli średni czas kontaktu stopy z podłożem (t_c), średni czas fazy lotu (t_a) oraz częstotliwość kroków. Następnie wszystkie wartości zostały przeliczone na wielkości bezwymiarowe, aby umożliwić porównanie z aproksymowanymi wartościami.

Przejdźmy do wyznaczenia kolejnych ważnych parametrów modelu.

SZTYWNOŚĆ NOGI

Rzeczywista i wymiarowa wartość sztywności sprężyny (nogi), oznaczona jako k_{real} , została obliczona zgodnie z poniższym wzorem:

$$k_{real} = \frac{f_{max}}{\Delta l_{max}}, \quad (5.1)$$

a następnie przeliczona na wartość bezwymiarową: $K_{real} = k_{real} \cdot \frac{l_0}{mg}$. Obserwowane biegi były stabilne, to znaczy parametry biegu były w każdym kroku podobne, a zmęczenie nie powodowało zmian w mechanice ruchu (patrz [27]). Zatem mogliśmy użyć zarówno asymptotycznego wzoru na $\tilde{K}_1$ jak i $\tilde{K}_2$, dla problemu brzegowego obliczonego z równań (3.92) i (3.107), odpowiednio. Testem t dla prób zależnych porównano wartości sztywności nogi wyznaczonej przy użyciu obu metod z wartościami rzeczywistymi. Zmienność parametrów $\tilde{K}_1$, $\tilde{K}_2$ i K_{real} w czterech prędkościach została określona za pomocą jednoczynnikowej analizy wariancji (ANOVA) z testem post-hoc Tukeya. Przyjęliśmy poziom istotności 0,05.

ENERGIA

Energia mechaniczna E_s została obliczona ze wzoru (4.2). Jeśli energia układu jest nieznacznie większa od minimalnej energii potrzebnej do istnienia rozwiązań symetrycznych E_s^{min} , czyli $E_s > E_s^{min}$ (patrz **Twierdzenie 4**), to uzyskane punkty stałe Y^* są praktycznie stabilne. W przypadku umiarkowanych prędkości dolne ograniczenie energii dla obszarów stabilnych wynosi E_s^{min} (patrz (4.89)). Aby użyć wzoru (4.52) na E_s^{min} również dla rozwiązań asymetrycznych,

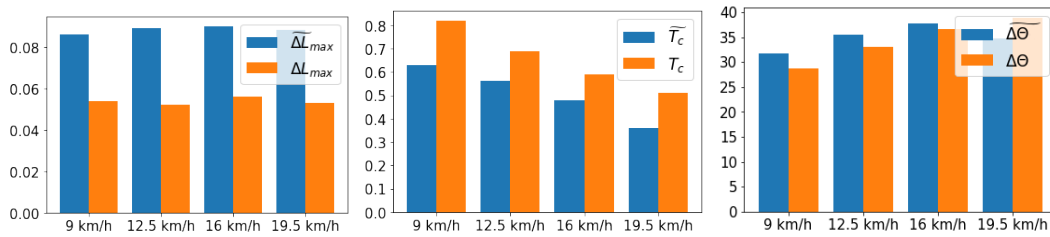
do równania (4.52) za parametr α , podstawimy średnią wartość kątów lądowania i odbicia, co prowadzi do uzyskania

$$E_{min} = \frac{\theta_d^2}{2 \cos^2 \left(\frac{\gamma}{2} \right)} + \cos \left(\frac{\gamma}{2} \right), \quad (5.2)$$

gdzie $\gamma = \alpha + \beta$, a prędkość zmiany kąta θ_d wyznaczymy z (2.31). Powyższe postępowanie możemy uzasadnić faktem niewielkiej asymetrii wysokości środka masy CoM między momentami lądowania i odbicia, mimo wyraźnej asymetrii kątowej (kąt odbicia β większy niż lądowania α). Biegacze lądują na zgiętym kolanie, czyli odległość środka masy do punktu kontaktu z podłożem jest mniejsza niż l_0 , natomiast odbijając się wykorzystują stopę, co oddala punkt CoM od ziemi. Dlatego możliwe jest, że środek masy znajduje się podczas lądowania i odbicia na tym samym poziomie (por. [39]). W związku z tym, założenie o symetrii w modelu jest zasadne.

5.4 PREZENTACJA WYNIKÓW

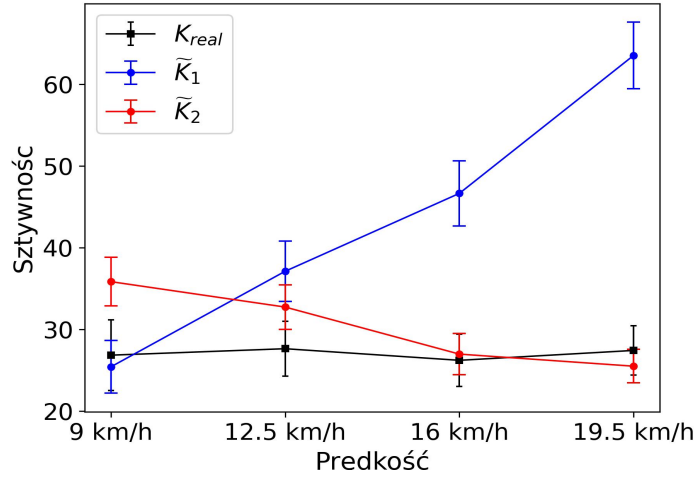
Przybliżenia parametrów biegu fazy podporu takich jak: maksymalne ugięcie nogi (ΔL_{max}), czas kontaktu (T_c) oraz przyrost kąta ($\Delta\theta$) z ich odpowiednikami pochodzącymi bezpośrednio z danych eksperymentalnych, są przedstawione na Rysunku 5.3 poniżej.



Rysunek 5.3: Porównanie średnich wartości aproksymacji $\widetilde{\Delta L_{max}}$, $\widetilde{T_c}$ i $\widetilde{\Delta\theta}$, wyznaczonych wzorami (3.83), (3.80) i (3.86), odpowiednio, ze średnimi wartościami danych eksperymentalnych dla tych parametrów biegu (po normalizacji). Średnie zostały obliczone dla próby $n = 105$ biorących udział w badaniu biegaczy.

Bezwymiarowe maksymalne ugięcie nogi, czyli $\Delta L_{max} = \Delta l_{max}/l_0$, jest około 0,04 mniejsze niż przybliżenie $\widetilde{\Delta L_{max}}$ (patrz Rys. 5.3 po lewej stronie). Z kolei rzeczywisty czas kontaktu stopy z podłożem po normalizacji jest większy o około 0,02 w porównaniu z wartością $\widetilde{T_c}$ (patrz Rys. 5.3, środek). Różnica między przybliżeniem $\widetilde{\Delta\theta}$ a rzeczywistą wartością $\Delta\theta = \alpha + \beta$ nie przekracza 4° (patrz Rys. 5.3 po prawej).

Okazuje się, że dla najszybszych biegów, czyli z prędkością 19,5 km/h, tylko w 6 spośród 105 przypadków nie udało się obliczyć przybliżenia $\widetilde{K_2}$ (patrz (3.92)), ponieważ wyrażenie (3.93) było ujemne. Przy wolniejszych biegach nie było już żadnego problemu z określeniem $\widetilde{K_2}$. Jak widać na Rysunku 5.4, rzeczywista sztywność nogi pozostała praktycznie niezmienną, podczas gdy przybliżenie $\widetilde{K_1}$ znacząco wzrosło, a $\widetilde{K_2}$ zmalało. Statystycznie istotna różnica ($p\text{-value} < 0,05$) między rzeczywistymi wartościami sztywności nogi a przybliżeniem pierwszego rzędu ($\widetilde{K_1}$) nie została zaobserwowana tylko dla najniższej prędkości. Tymczasem wartości $\widetilde{K_1}$ i K_{real} różniły się dla wszystkich pozostałych prędkości.



Rysunek 5.4: Porównanie rzeczywistej sztywności nogi, oznaczonej jako K_{real} , oraz obu przybliżeń $\tilde{K}_1$ i $\tilde{K}_2$, obliczonych z zastosowaniem wzorów (3.92) i (3.107) odpowiednio, dla czterech prędkości biegu (plus i minus odchylenia standardowego SD próby 105 badanych).

Choć podobne przybliżenia sztywności nogi zostały opracowane w literaturze, na przykład [28, 57], to ich wartości nie są obliczane na podstawie danych eksperymentalnych. Dlatego, w tej rozprawie, porównujemy tylko parametr K_{real} , ze sztywnością wyznaczoną w podobny sposób w artykułach takich jak [2, 8, 10, 22, 46]). Badania przeprowadzone w pracy [22] przedstawiają dyskusję związku między częstotliwością kroków, a sztywnością nogi. Inne eksperymenty wykazały natomiast, że sztywność nogi nie zmienia się istotnie wraz z prędkością biegu, ale wzrasta, gdy częstotliwość kroków jest większa przy stałej prędkości (por. [23, 33, 41, 46, 47]). Częstotliwość kroków wpływa zatem na sztywność nogi. Według [48] jest to wpływ pośredni, poprzez związaną ze zmianą częstotliwości zmianą czasu kontaktu stopy z podłożem. W naszym eksperymencie zwiększenie prędkości biegu prowadzi do większej częstotliwości kroków, ale też do zwiększenia przyrostu kąta podczas fazy podparcia, co skutkuje większym odkształceniem sprężyny ΔL_{max} i jest typowe dla biegów o małych i średnich prędkościach ([32, 57]). Łącząc wszystkie zależności, sztywność nogi pozostaje stała w zakresie od $26,22 \pm 3,19$ do $27,64 \pm 3,34$ przy prędkościach od 9 do 19,5 km/h (podobnie jak w [41, 46, 47]). Większość tych wartości jest niższa niż te uzyskane z przybliżeń. Różnica ta może z jednej strony wynikać z błędów pomiarowych podczas kalibracji, ale też z konstrukcji przybliżeń sztywności, które nie zależą bezpośrednio od maksymalnego odkształcenia nogi. Przybliżenie drugiego rzędu jest bliższe rzeczywistej sztywności i maleje wraz z prędkością, podczas gdy przybliżenie $\tilde{K}_1$ wzrasta wraz z prędkością. Różnica między tymi dwoma przybliżeniami wynika z dużych wartości kąta $\Delta\theta$, który jest nieco większy niż założony w symulacjach [60].

Energia E_s (patrz (4.2)) oraz minimalna energia potrzebna do utrzymania stabilnego biegu E_{min} (patrz (5.2)) wzrastają wraz ze zwiększającą się prędkością biegu (patrz Tab. 5.2). Ponadto obie energie mają podobne wartości, a E_{min} jest tylko nieznacznie mniejsza niż E_s . Przedstawione wyniki, oparte na czysto mechanicznych właściwościach naszego uproszczonego układu,

Prędkość		$E_s \pm SD$	$E_{min} \pm SD$
9	km/h	$1,14 \pm 0,037$	$1,11 \pm 0,033$
12,5	km/h	$1,37 \pm 0,075$	$1,33 \pm 0,081$
16	km/h	$1,66 \pm 0,106$	$1,62 \pm 0,110$
19,5	km/h	$2,13 \pm 0,143$	$2,12 \pm 0,158$

Tabela 5.2: Średnia wartość energii układu E_s (patrz równanie (4.2)) oraz minimalna energia wymagana do stabilnego biegu E_{min} (patrz równanie (5.2)), w zależności od prędkości biegni. Dodatkowo, dla każdej kolumny zostało wyznaczone $\pm SD$, czyli plus lub minus odchylenie standardowe dla próby 105 badanych.

potwierdzają inne badania [44] sugerujące istnienie mechanizmu optymalizacji biegu. Taką hipotezę postawiono również odnosząc się do fizjologicznego kosztu energetycznego biegu mierzonego badaniem spirometrycznym (patrz [13, 44, 45, 55]). W tym miejscu warto zauważyć, że prędkość liniowa odpowiadająca specjalnemu przypadkowi $\theta_d = \sqrt{\cos \alpha}$, czyli około 12,5 km/h, została wykorzystana w naszym eksperymencie. Nie możemy tu jednak obserwować oszczędności związanej ze sprężystym charakterem tkanek, gdyż badana energia obrazuje jedynie końcowy efekt procesów zachodzących w ciele biegnącego człowieka. Abyśmy mogli eksperymentalnie zająć się tym przypadkiem konieczne byłoby zmierzenie również kosztu fizjologicznego biegu, czyli poszerzenie pomiarów o badanie spirometrem.

5.5 WNIOSKI

Główne wnioski z przeprowadzonego eksperymentu są następujące. Energia mechaniczna badanych osób była wystarczająca do stabilnego biegu i tylko nieznacznie wyższa od wartości E_{min} . Zatem, można wnioskować, że biegacz dąży do osiągnięcia stabilności przy minimalnym wydatku energetycznym. Jest to bardzo ważna obserwacja potwierdzająca dążenie układu nerwowego do wykonywania ruchów w możliwie najoszczędniejszy sposób. Stosowany model stanowi punkt odniesienia dla zmierzonych parametrów poprzez porównanie generowanej energii z energią minimalną. Pokazuje to zasadność jego wykorzystania do opisu i analizy ruchu. Należy pamiętać, że symetria środka masy (CoM) różni się od symetrii kątowej, która nie występuje w biegach rzeczywistych. W naszej pracy rozwiązujemy ten problem, uśredniając kąty lądowania i odbicia. Sposób w jaki asymetria kątowa powiązana jest z warunkiem minimalnej energii wymaga dalszych badań analitycznych.

Oczywistą przyczyną niedokładności zaproponowanych metod są założenia przyjęte podczas wyprowadzania rozwiązań, na przykład takie jak wymaganie małych kątów. Jest to ograniczenie, które z praktycznego punktu widzenia łatwo uzasadnić dla niskich prędkości, kiedy wartości przyrostu kąta w fazie podporu są stosunkowo małe. Jak widać na Rysunku 5.4, dla małych prędkości oba przybliżenia sztywności, pierwszego i drugiego rzędu, są bliskie rzeczywistym. Mając do dyspozycji jedynie dane kinetyczne (prędkości środka masy) oraz informacje na temat kątów lądowania i odbicia, sugerujemy użycie, dokładniejszego przybliżenia drugiego rzędu w celu oszacowania sztywności nogi biegacza.

Przedstawione metody są pomysłami, które mogą sprawdzić się w praktyce, ale wymagają dalszego dopracowania. Konieczne są dalsze badania, aby dostosować model do rzeczywistego biegu na przykład poprzez dopuszczenie większej asymetrii czy wprowadzenie parametru K zmiennego podczas fazy podporu. Dzięki temu interpretacja danych eksperymentalnych będzie dokładniejsza względem rzeczywistych wartości. Ważnym krokiem może być skorelowanie energetyki biegu z wartością kąta natarcia α (bez uwzględniania sztywności K), co ułatwi użycie modelu w warunkach treningowych, eliminując konieczności wykorzystania platformy naciskowej. Umożliwi to badania nad optymalizacją biegu pod kątem poprawy wyników sportowych lub sprawdzenie jak zmęczenie wpływa na zdolność biegacza do zaobserwowanej minimalizacji energii. Mamy nadzieję, że wdrożenie proponowanej metodyki ma potencjał, do ilościowej analizy mechaniki biegu, zwłaszcza jeśli chodzi o parametry takie jak sztywność i energia mechaniczna.

6 PODSUMOWANIE

Klasyczny model *SLIP* skutecznie opisuje mechanikę biegu wynikającą z dynamicznej interakcji między środkiem masy (*CoM*), a elastycznym zachowaniem tkanek naszego ciała (por. [56]). Warto zaznaczyć, że w tym przypadku nie uwzględniamy fizjologicznego kosztu biegu, ani nie traktujemy pracy sprężyny jako siły napędowej biegacza. Model obrazuje raczej charakterystykę fazy podporu, w szczególności zmiany kąta pomiędzy nogą, a osią pionową oraz ugięcie nogi, przy biegu z określoną prędkością. Ważne jest, że w rzeczywistym biegu istnieje znaczna asymetria pomiędzy kątami lądowania a odbicia, która pogłębia się wraz ze wzrostem prędkości biegu. W wyniku ograniczeń modelu w tym przypadku, możemy zaobserwować, że jest on skonstruowany do biegów z umiarkowanymi prędkościami, dla których asymetria jest mniejsza. Warto również zwrócić uwagę, że wszystkie własności modelu wyprowadzane są dla prędkości oscylujących wokół $\theta_d = \sqrt{\cos \alpha}$, czyli w zakresie rozważanego eksperymentu.

Bieg w fazie podporu opisany jest przez nieliniowy układ równań różniczkowych, który nie ma analitycznego rozwiązania. Stosując metody teorii zaburzeń udało nam się znaleźć przybliżone rozwiązania długości sprężyny L oraz kąta θ , kontrolując wielkość popełnianych błędów. Jest to przewaga podejścia systematycznego nad heurystycznym stosowanym na przykład w pracach [28, 58]. Dodatkowo wyznaczyliśmy przybliżenia ważnych parametrów fazy podporu, takich jak: czas kontaktu z podłożem, maksymalne ugięcie sprężyny i przyrost kąta. Zostały one wykorzystane do walidacji działania modelu w warunkach rzeczywistych.

Żeby model mógł lepiej oddawać zachowanie odpowiadające zmianom kąta ataku i odbicia, które występuje podczas biegu wprowadziliśmy jego asymetryczną wersję. Zakładając, że przesunięcie kąta w fazie podporu przyjmuje małe wartości dopuszczamy niewielkie różnice między kątem ataku a odbicia, przy czym kąt odbicia nie może być mniejszy niż kąt ataku. Przyjmujemy również, że wartość sztywności nogi jest ustaloną stałą podczas trwania całej fazy podporu oraz, że zachodzi zasada zachowania energii i zachowany jest również moment obrotowy. Przeprowadzona analiza istnienia punktów stałych takiego zmodyfikowanego modelu doprowadziła do znalezienia rozwiązań asymetrycznych tylko dla dużych kątów odbicia, odpowiadających trzykrotności rzędu kąta ataku ($\beta \sim 3\alpha$). Znalezione punkty stałe nie spełniają więc podstawowego założenia dotyczącego wielkości kąta odbicia, czyli nie przyjmują małych wartości i nie są tego samego rzędu co kąt natarcia. Powyższy wynik w kontekście stosowalności modelu, prowadzi do konkluzji, że punkty stałe istnieją tylko dla biegów symetrycznych. Przyjmując założenia holonomiczne oraz wyrównując energię poprzez korektę jedynie prędkości poziomej zamykamy się niejako na rozwiązania asymetryczne. Podsumowując, dopuszczamy różnice w kątach ataku oraz odbicia, ale poprzez przyjęte założenia, konstrukcja odwzorowania nie pozwala na istnienie rozwiązań asymetrycznych, które odpowiadałyby kątom natarcia oraz odbicia dla biegów rzeczywistych.

W takim razie, tylko w przypadku symetrycznym, mamy do czynienia ze zjawiskiem bifurkacji transkrytycznej. Przy przejściu przez punkt bifurkacyjny gałąź stabilnych punktów stałych zmie-

nia się w gałąź niestabilną, a gałąź punktów niestabilnych w punkty stabilne. Przyglądając się diagramowi na Rysunku 4.10, gdzie parametrem bifurkacyjnym jest energia widać, że punkty stabilne odpowiadają niższym wysokościom wierzchołków fazy lotu. Okazuje się zatem, że kiedy człowiek biegnący z ustaloną prędkością zaczyna generować zbyt dużo energii, albo będzie musiał obniżyć wysokość wierzchołka fazy lotu, albo jego bieg stanie się niestabilny.

W biegu rzeczywistym mimo wspomnianego już braku symetrii kątowej obserwujemy symetrię wysokości środka masy (CoM). Wiąże się to z założeniem lądowania i odbicia na nodze o bezwymiarowej długości 1, co niekoniecznie odzwierciedla rzeczywistość. Jednak ta cecha umożliwia zastosowanie modelu do interpretacji danych eksperymentalnych, konkretnie aby wyznaczyć energię potrzebną do osiągnięcia stabilnego biegu. W szczególnym przypadku, kiedy prędkość kątowa przyjmuje wartość $\sqrt{\cos \alpha}$, energia minimalna gwarantująca istnienie punktów stałych jest równocześnie energią dającą stabilność. Dla badanych przez nas prędkości, warunki te są również bardzo zbliżone. Dlatego wykorzystaliśmy wzór na energię minimalną E_s^{min} (4.52) do badania stabilności biegu.

Wyprowadzając przybliżone rozwiązania, dla sztywności nogi, posłużyliśmy się sumą kątów ataku i odbicia, oznaczanym jako γ . W biegu symetrycznym małe α gwarantuje niską wartość γ przyjmowaną podczas wyprowadzania aproksymacji. W rzeczywistym biegu, mimo spełnionego założenia małych α , kąt β przyjmuje duże wartości i γ będzie już wtedy wykraczało poza zakres działania naszego modelu, co skutkuje niedokładnością niektórych aproksymacji. Zwłaszcza asymptotyczna aproksymacja $\widetilde{K}_1$, która jest wiodącym rzędem dokładnego rozwiązania zagadnienia brzegowego K^* , jest wrażliwa na tą nieścisłość. Małe wartości kątowe wiążą się z dużym K , czyli małym ϵ , dzięki któremu możemy określić rzędy błędów naszych przybliżeń.

Na skutek wyprowadzonym przybliżeniom można szacować parametry mechaniczne biegu, tak jak zrobiliśmy to w rozdziale poświęconym badaniu eksperymentalnemu. Korzystając jednak z przybliżeń na sztywność nogi trzeba mieć na uwadze, że obrazuje ona sztywność ciała biegacza, ponieważ cała masa, skupiona jest w jednym punkcie, a sama sprężyna jest nieważka. Energia jest wyliczana jedynie w ujęciu mechanicznym i nie powinna być utożsamiana z fizjologicznym kosztem biegu. Można ją natomiast porównać z energią minimalną wymaganą do stabilnego biegu. Prowadzi to do ciekawych wniosków potwierdzających optymalizacyjną funkcję układu nerwowego, czyli dążenie do wykonywania ruchu w najbardziej oszczędny sposób. Pokazuje również niewątpliwą zaletę zastosowania modelu, nie tylko jako narzędzia pomiarowego, ale również punktu odniesienia dla zmierzonych parametrów.

BIBLIOGRAFIA

1. R. M. Alexander. „Energy-saving mechanisms in walking and running”. *Journal of Experimental Biology* 160:1, 1991, s. 55–69.
2. A. Arampatzis, G.-P. Brüggemann, i V. Metzler. „The effect of speed on leg stiffness and joint kinetics in human running”. *Journal of Biomechanics* 32, 1999, s. 1349–1353.
3. J. S. Baker, M. C. McCormick, i R. A. Robergs. „Interaction among Skeletal Muscle Metabolic Energy Systems during Intense Exercise”. *Journal of Nutrition and Metabolism* 2010, 2010, s. 905612.
4. S. I. Balandin, I. Y. Balandina, D. S. Zayko, i I. V. Dmitriev. „Biomechanical parameters of running technique in the distance of sprinter finalists of the world championship”. *Theory and Methods of Sports* ISSN: 2409–4234:8, 2022. ISSN: 2409–4234.
5. I. Belcic, S. Rodic, V. Dukaric, T. Rupcic, i D. Knjaz. „Do Blood Lactate Levels Affect the Kinematic Patterns of Jump Shots in Handball?”. *International Journal of Environmental Research and Public Health* 18:20, 2021, s. 10809.
6. E. Bernans. „Assessing changes in running kinematics at different intensities: a case study”. *Journal of Physical Education and Sport* 23:5, 2023, s. 157, 1279–1286.
7. R. Blickhan. „The spring-mass model for running and hopping”. *Journal of Biomechanics* 22:11/12, 1989. PMC2625422, s. 1217–1227.
8. M. Brughelli i J. Cronin. „Influence of running velocity on vertical, leg and joint stiffness”. *Sports Medicine* 8:38, 2008, s. 647–657.
9. M. Brughelli, J. Cronin, i A. Chaouachi. „Effects of running velocity on running kinetics and kinematics”. *Journal of Strength and Conditioning Research* 25:4, 2011, s. 933–939.
10. S. R. Bullimore i J. F. Burn. „Ability of the planar spring-mass model to predict mechanical parameters in running humans”. *Journal of Theoretical Biology* 248, 2007, s. 686–695.
11. T. D. Bushnell. „A biomechanical analysis of sprinters vs. distance runners at equal and maximal speeds”. Master’s Thesis. Brigham Young University - Provo, 2004.
12. G. A. Cavagna, F. P. Saibene, i R. Margaria. „Mechanical work in running”. *Journal of Applied Physiology* 19:2, 1964, s. 249–256.
13. P. R. Cavanagh i K. R. Williams. „The effect of stride length variation on oxygen uptake during distance running”. *Medicine and Science in Sports and Exercise* 14:1, 1982, s. 30–35.
14. M. Chan-Roper, I. Hunter, J. W. Myrer, D. L. Eggett, i M. K. Seeley. „Kinematic changes during a marathon for fast and slow runners”. *Journal of Sports Science and Medicine* 11:1, 2012, s. 77–82.

15. F. Crenna, G. Battista Rossi, i M. Berardengo. „Filtering biomechanical signals in movement analysis”. *Sensors* 21, 2021, s. 4858.
16. R. Cunningham, I. Hunter, M. Seeley, i B. Feland. „Variations in running technique between female sprinters, middle, and long-distance runners”. *International Journal of Exercise Science* 6:1, 2013, s. 43–51.
17. G. Dalleau, A. Belli, M. Bourdin, i L. Jean-René. „The spring-mass model and the energy cost of treadmill running”. *European Journal of Applied Physiology* 77, 1998, s. 257–263.
18. P. Davidovits. *Physics in Biology and Medicine*. Elsevier Science Publishing Co Inc, 2018.
19. E. M. Day, R. S. Alcantara, M. A. McGeehan, A. M. Grabowski, i M. E. Hahn. „Low-pass filter cutoff frequency affects sacral-mounted inertial measurement unit estimations of peak vertical ground reaction force and contact time during treadmill running”. *Journal of Biomechanics* 119, 2021, s. 110323.
20. M. H. Dickinson, C. T. Farley, R. J. Full, M. A. R. Koehl, R. Kram, i S. Lehman. „How animals move: an integrative view”. *Science* 288:5463, 2000, s. 100–106.
21. D. J. Dutto i G. A. Smith. „Changes in spring-mass characteristics during treadmill running to exhaustion”. *Medicine and Science in Sports and Exercise* 34:8, 2002, s. 1324–1331.
22. C. T. Farley, J. Glasheen, i T. A. McMahon. „Running springs: speed and animal size”. *Journal of Experimental Biology* 185:1, 1993, s. 71–86.
23. C. T. Farley i O. González. „Leg stiffness and stride frequency in human running”. *Journal of Biomechanics* 29:2, 1996, s. 181–186.
24. P. Fazio, G. Granieri, I. Casetta, E. Cesnik, S. Mazzacane, P. Caliendo, F. Pedrielli, i E. Granieri. „Gait measures with a triaxial accelerometer among patients with neurological impairment”. *Neurological Sciences* 34:4, 2012, s. 435–440.
25. D. P. Ferris, Z. A. Bohra, J. R. Lukos, i C. R. Kinnaird. „Neuromechanical adaptation to hopping with an elastic ankle-foot orthosis”. *Journal of Applied Physiology* 100, 2006, s. 163–170.
26. D. P. Ferris, M. Louie, i C. T. Farley. „Running in the real world: adjusting leg stiffness for different surfaces”. *The Royal Society* 265, 1998, s. 989–993.
27. F. García-Pinillos, A. Cartón-Llorente, D. Jaén-Carrillo, P. Delgado-Floody, V. Carrasco-Alarcón, C. Martínez, i L. E. Roche-Seruendo. „Does fatigue alter step characteristics and stiffness during running?” *Gait & Posture* 76, 2020, s. 259–263.
28. H. Geyer, A. Seyfarth, i R. Blickhan. „Spring-mass running: simple approximate solution and application to gait stability”. *Journal of Theoretical Biology* 232:3, 2005, s. 315–328.
29. O. Girard, J.-P. Micallef, i G. P. Millet. „Changes in spring-mass model characteristics during repeated running sprints”. *European Journal of Applied Physiology* 111:1, 2011, s. 125–134.
30. M. Gustafsson i D. Zarnblom. *Determination of biomechanical key parameters in women’s long jump*. 2015.

31. S. P. Hastings. „On the asymptotic growth of solutions to a nonlinear equation”. *Proceedings of the American Mathematical Society* 17:1, 1966, s. 40–47.
32. J. G. Hay. *The Biomechanics of Sports Techniques*. Prentice-Hall, 1973.
33. J. He, R. Kram, i T. A. McMahon. „Mechanics of running under simulated gravity”. *Journal of Applied Physiology* 71:3, 1991, s. 863–870.
34. G. D. Heise i P. E. Martin. „’Leg spring’ characteristics and the aerobic demand of running”. *Medicine and Science in Sports and Exercise* 30:5, 1998, s. 750–754.
35. M. H. Holmes. *Introduction to perturbation methods*. T. 20. Springer Science & Business Media, 2012.
36. P. Holmes, R. J. Full, D. Koditschek, i J. Guckenheimer. „The dynamics of legged locomotion: Models, analyses, and challenges”. *SIAM Review* 48:2, 2006, s. 207–304.
37. O. Jarzyna, D. Grzelczyk, B. Stańczyk, i J. Awrejcewicz. „Generation of a gait pattern for a lower limb rehabilitation exoskeleton”. *Mechanics Based Design of Structures and Machines* 49:8, 2021, s. 1188–1208.
38. P. Kowalczyk, Ł. Płociniczak, i Z. Wróblewska. „Energy variations and periodic solutions in a switched inverted pendulum model of human running gaits”. *Physica D, Nonlinear Phenomena* 443:133554, 2023, s. 1–12.
39. T. Lussiana, A. Patoz, C. Gindre, L. Mourot, i K. Hébert-Losier. „The implications of time on the ground on running economy: less is not always better”. *Journal of Experimental Biology* 222:6, 2019, s. 192047.
40. P. Maquet. „Borelli: De Motu Animalium. A first treatise on biomechanics”. *Acta Orthopaedica Belgica* 55:4, 1989, s. 541–546.
41. T. A. McMahon i G. C. Cheng. „The mechanics of running: How does stiffness couple with speed?”. *Journal of Biomechanics* 23:1, 1990, s. 65–78.
42. A. Merker, D. Kaiser, i M. Hermann. „Numerical bifurcation analysis of the bipedal spring-mass model”. *Physica D: Nonlinear Phenomena* 291, 2015, s. 21–30.
43. I. S. Moore. „Is there an economical running technique? A review of modifiable biomechanical factors affecting running economy”. *Sports Medicine* 46, 2016, s. 793–807.
44. I. S. Moore, K. J. Ashford, C. Cross, J. Hope, H. S. Jones, i M. McCarthy-Ryan. „Humans optimize ground contact time and leg stiffness to minimize the metabolic cost of running”. *Front Sports Act Living*, 2019.
45. I. S. Moore, A. M. Jones, i S. J. Dixon. „Mechanisms for improved running economy in beginner runners”. *Medicine and Science in Sports and Exercise* 44:9, 2012, s. 1756–1763.
46. J.-B. Morin, G. Dalleau, H. Kyröläinen, T. Jeannin, i A. Belli. „A Simple method for measuring stiffness during running”. *Journal of Applied Biomechanics* 21, 2005, s. 167–180.
47. J.-B. Morin, T. Jeannin, B. Chevallier, i A. Belli. „Spring-mass model characteristics during sprint running: correlation with performance and fatigue-induced changes”. *Orthopedics & Biomechanics* 27:2, 2006, s. 158–165.

48. J.-B. Morin, P. Samozino, K. Zameziati, i A. Belli. „Effects of altered stride frequency and contact time on leg-spring behavior in human running”. *Journal of Biomechanics* 40, 2007, s. 3341–3348.
49. J.-B. Morin, K. Tomazin, P. Edouard, i G. Y. Millet. „Changes in running mechanics and spring-mass behavior induced by a mountain ultra-marathon race”. *Journal of Biomechanics* 44:6, 2011, s. 1104–1107.
50. A. H. Nayfeh. *Perturbation methods*. Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 2004.
51. M. C. Nussbaum. *Aristotle's De Motu Animalium: Text with translation, commentary, and interpretive essays*. Princeton University Press, 1985.
52. H. Okrańska-Płociniczak i Ł. Płociniczak. „Asymptotic solution of a boundary value problem for a spring-mass model of legged locomotion”. *Journal of Nonlinear Science* 30, 2020, s. 2971–2988.
53. G. Pavliotis i A. Stuart. *Multiscale methods: averaging and homogenization*. Springer Science & Business Media, 2008.
54. Ł. Płociniczak i Z. Wróblewska. „Solution and asymptotic analysis of a boundary value problem in the spring-mass model of running”. *Nonlinear Dynamics* 99, 2020, s. 2693–2705.
55. C. J. de Ruiter, P. W. Verdijk, W. Werker, M. J. Zuidema, i A. de Haan. „Stride frequency in relation to oxygen consumption in experienced and novice runners”. *European Journal of Sport Science* 14:3, 2014, s. 251–258.
56. R. T. Schroeder i A. D. Kuo. „Elastic energy savings and active energy cost in a simple model of running”. *PLOS Computational Biology* 17:11, 2021, s. 1–22.
57. A. Seyfarth, H. Geyer, M. Günther, i R. Blickhan. „A movement criterion for running”. *Journal of Biomechanics* 35, 2002, s. 649–655.
58. Z. Wróblewska. „Approximate solutions and numerical analysis of a spring-mass running model”. *Mathematica Applicanda* 48:1, 2020, s. 25–48.
59. Z. Wróblewska, P. Kowalczyk, i Ł. Płociniczak. „Discussion on angular asymmetry in the solutions of SLIP model”. *Mathematica Applicanda* 51:2, 2023, s. 223–237.
60. Z. Wróblewska, P. Kowalczyk, i Ł. Płociniczak. „Stability of fixed points in an approximate solution of the spring-mass running model”. *IMA Journal of Applied Mathematics* 88:3, 2023, s. 429–454.
61. Z. Wróblewska, P. Kowalczyk, i K. Przednowek. „Leg stiffness and energy in stable human running gaits”. Przesłana do Sports Engineering. 2023.
62. P. Zaytsev, T. Cnops, i C. D. Remy. „A detailed look at the SLIP model dynamics: bifurcations, chaotic behavior, and fractal basins of attraction”. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics* 14:8, 2019, s. 081002.