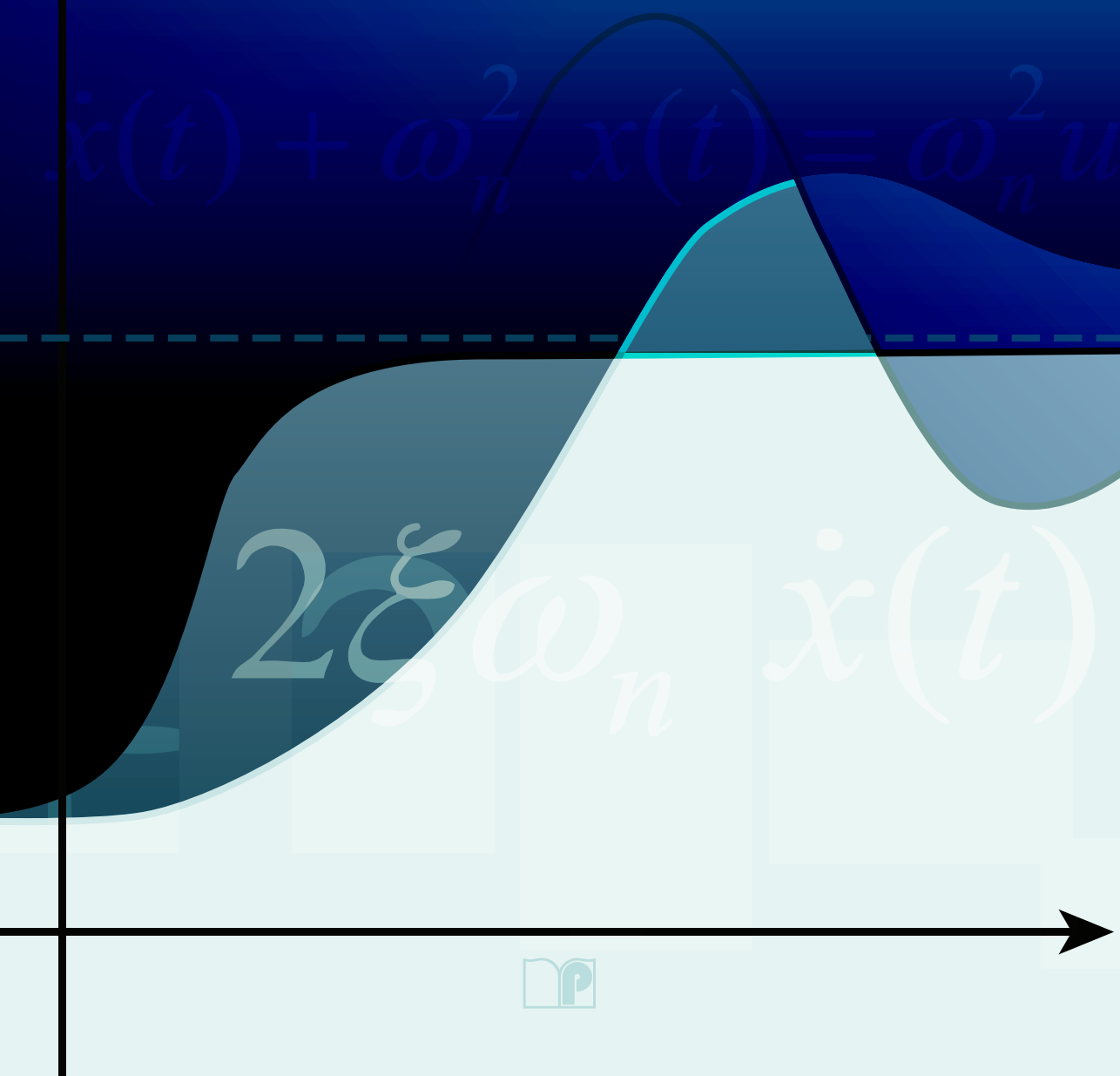


ANNA CZEMPLIK

# DYNAMIKA UKŁADÓW

wprowadzenie do modelowania, analizy i symulacji





Anna Czemplik

# **Dynamika układów**

## **Wprowadzenie do modelowania, analizy i symulacji**



Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej  
Wrocław 2021

## Recenzent

Zbigniew BANASZAK

## Korekta

Stanisław GANCARZ

## Projekt okładki

Dominika OSADCÓW-BĘDKOWSKA

Wydrukowano na podstawie dostarczonych materiałów

Wszelkie prawa zastrzeżone. Niniejsza książka, zarówno w całości, jak i we fragmentach, nie może być reprodukowana w sposób elektroniczny, fotograficzny i inny bez zgody wydawcy i właściciela praw autorskich.

© Copyright by Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2021

OFICyna WYDAWNICZA POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ

Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław

<http://www.oficyna.pwr.edu.pl>;

e-mail: [oficwyd@pwr.edu.pl](mailto:oficwyd@pwr.edu.pl)

[zamawianie.ksiazek@pwr.edu.pl](mailto:zamawianie.ksiazek@pwr.edu.pl)

ISBN 978-83-7493-171-7

Druk i oprawa: beta-druk, [www.betadruk.pl](http://www.betadruk.pl)

## *Spis treści*

|                                                                          |            |
|--------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>I. WPROWADZENIE .....</b>                                             | <b>9</b>   |
| 1. PRZEDMIOT BADAŃ .....                                                 | 11         |
| 1.1. Model układu .....                                                  | 11         |
| 1.2. Własności statyczne i dynamiczne układu .....                       | 13         |
| 1.3. Wielomiany i układy równań algebraicznych .....                     | 14         |
| 1.4. Liniowe równania różniczkowe zwyczajne .....                        | 18         |
| 1.5. Komputerowe wspomaganie obliczeń .....                              | 22         |
| 2. PODSTAWY KONSTRUKCJI MODELI DYNAMIKI UKŁADÓW .....                    | 26         |
| 2.1. Ogólne zasady konstrukcji modeli dynamiki .....                     | 26         |
| 2.2. Zbiorniki – otwarte układy hydrauliczne .....                       | 27         |
| 2.3. Obiekty cieplne – układy termokinetyczne .....                      | 30         |
| 2.4. Obiekty mechaniczne .....                                           | 35         |
| 2.5. Obwody elektryczne .....                                            | 42         |
| 2.6. Inne obszary modelowania .....                                      | 49         |
| <b>II. STATYCZNY OPIS UKŁADÓW .....</b>                                  | <b>55</b>  |
| 3. MODELE I CHARAKTERYSTYKI STATYCZNE .....                              | 57         |
| 3.1. Statyczne własności układu .....                                    | 57         |
| 3.2. Zastosowanie charakterystyk do linearyzacji .....                   | 60         |
| 3.3. Zastosowanie charakterystyk do identyfikacji .....                  | 63         |
| 3.4. Zastosowanie charakterystyk do analizowania pracy układu .....      | 66         |
| <b>III. BADANIA DYNAMIKI W PRAKTYCE INŻYNIERSKIEJ .....</b>              | <b>69</b>  |
| 4. ZASADY BADANIA LINIOWYCH RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH .....                   | 71         |
| 4.1. Wprowadzenie .....                                                  | 71         |
| 4.2. Analityczne rozwiązywanie liniowego równania różniczkowego .....    | 71         |
| 4.3. Wykresy podstawowych składników rozwiązania .....                   | 76         |
| 4.4. Konwersja modelu do równania $n$ -tego rzędu .....                  | 83         |
| 4.5. Przykłady zastosowania rozwiązań analitycznych .....                | 84         |
| 5. SYMULACYJNE ROZWIĄZYWANIE RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH .....                  | 88         |
| 5.1. Wprowadzenie – rozwiązania analityczne i symulacyjne .....          | 88         |
| 5.2. Konstrukcja schematu symulacyjnego .....                            | 88         |
| 5.3. Przykłady zastosowania badań symulacyjnych .....                    | 95         |
| <b>IV. ANALIZA I PROJEKTOWANIE UKŁADÓW LINIOWYCH .....</b>               | <b>99</b>  |
| 6. WŁASNOŚCI OBIEKTÓW LINIOWYCH (RÓWNAŃ $n$ -TEGO RZĘDU) .....           | 101        |
| 6.1. Charakterystyka statyczna i odpowiedzi czasowe .....                | 101        |
| 6.2. Parametry statyczne i dynamiczne .....                              | 101        |
| 7. MODELE PIERWSZEGO I DRUGIEGO RZĘDU – ANALIZA I PROJEKT .....          | 108        |
| 7.1. Znaczenie i zastosowanie modeli pierwszego i drugiego rzędu .....   | 108        |
| 7.2. Analiza i projektowanie układu pierwszego rzędu .....               | 108        |
| 7.3. Analiza i projektowanie układu drugiego rzędu metodą biegunów ..... | 111        |
| 7.4. Równania oscylacyjne i komplementarne .....                         | 115        |
| 7.5. Przykłady zastosowania .....                                        | 123        |
| <b>V. BADANIA DYNAMIKI UKŁADÓW WIELOWYMIAROWYCH .....</b>                | <b>127</b> |
| 8. ZASADY BADANIA UKŁADÓW RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH .....                     | 129        |
| 8.1. Wprowadzenie – równania stanu .....                                 | 129        |
| 8.2. Analityczne rozwiązania równań stanu .....                          | 130        |
| 8.3. Konwersja modelu do równań stanu .....                              | 135        |

|                                                                        |            |
|------------------------------------------------------------------------|------------|
| 9. BADANIA SYMULACYJNE NA PODSTAWIE RÓWNAŃ STANU .....                 | 139        |
| 9.1. Wprowadzenie .....                                                | 139        |
| 9.2. Definicja modeli w blokach, funkcjach i plikach .....             | 139        |
| 9.3. Przykłady realizacji badań symulacyjnych – zasady symulacji ..... | 142        |
| 10. ANALIZA I PROJEKTOWANIE LINIOWYCH RÓWNAŃ STANU .....               | 146        |
| 10.1. Metody analizy i projektowania .....                             | 146        |
| 10.2. Przykłady analizy układów hydraulicznych i cieplnych .....       | 147        |
| 10.3. Przykłady analizy układów mechanicznych i elektrycznych .....    | 150        |
| <b>VI. MODELE OPERATOROWE .....</b>                                    | <b>155</b> |
| 11. PODSTAWY I ZASADY BADANIA TRANSMITANCJI .....                      | 157        |
| 11.1. Wprowadzenie – transmitancja i jej podstawowe własności .....    | 157        |
| 11.2. Transmitancje układów wielowymiarowych .....                     | 160        |
| 12. BADANIA SYMULACYJNE NA PODSTAWIE TRANSMITANCJI .....               | 166        |
| 12.1. Wprowadzenie .....                                               | 166        |
| 12.2. Definicja transmitancji w blokach i funkcjach .....              | 166        |
| 13. ANALIZA I PROJEKTOWANIE NA PODSTAWIE TRANSMITANCJI .....           | 170        |
| 13.1. Przykłady układów .....                                          | 170        |
| 13.2. Transmitancje złożonych układów .....                            | 175        |
| 13.3. Operatorowa metoda rozwiązywania równań różniczkowych .....      | 179        |
| 14. CHARAKTERYSTYKI I ANALIZA CZĘSTOTLIWOŚCIOWA .....                  | 182        |
| 14.1. Wprowadzenie – odpowiedź częstotliwościowa .....                 | 182        |
| 14.2. Metoda symboliczna .....                                         | 184        |
| 14.3. Transmitancja widmowa (Fourier’a) .....                          | 186        |
| 14.4. Charakterystyki częstotliwościowe .....                          | 188        |
| 15. CZĘSTOTLIWOŚCIOWE BADANIA SYMULACYJNE .....                        | 193        |
| 15.1. Wprowadzenie .....                                               | 193        |
| 15.2. Generowanie charakterystyk częstotliwościowych .....             | 193        |
| <b>VII. PODSTAWOWE OBIEKTY DYNAMIKI .....</b>                          | <b>197</b> |
| 16. PODSTAWOWE OBIEKTY DYNAMIKI .....                                  | 199        |
| 16.1. Wprowadzenie .....                                               | 199        |
| 16.2. Człon proporcjonalny .....                                       | 199        |
| 16.3. Człon całkujący .....                                            | 200        |
| 16.4. Człon inercyjny .....                                            | 203        |
| 16.5. Człon różniczkujący .....                                        | 207        |
| 16.6. Człon forsujący .....                                            | 210        |
| 16.7. Człon oscylacyjny .....                                          | 211        |
| 16.8. Opóźnienie .....                                                 | 217        |
| 16.9. Przypadki szczególne .....                                       | 218        |
| 17. ZASTOSOWANIE PODSTAWOWYCH CZŁONÓW .....                            | 225        |
| 17.1. Układy minimalnofazowe i niemimalnofazowe .....                  | 225        |
| 17.2. Rozkład i synteza transmitancji .....                            | 227        |
| 17.3. Asymptotyczne charakterystyki Bodego .....                       | 230        |
| 17.4. Identyfikacja modeli układów .....                               | 234        |
| <b>VIII. OPTIMALIZACJA MODELU I BADAŃ .....</b>                        | <b>239</b> |
| 18. MODEL OPTIMALNY .....                                              | 241        |
| 18.1. Wprowadzenie .....                                               | 241        |
| 18.2. Układy liniowe i nieliniowe .....                                | 241        |
| 18.3. Przekształcanie i upraszczanie formy modelu .....                | 244        |
| 18.4. Skalowanie modelu i zmiennych .....                              | 248        |
| 18.5. Przybliżanie i upraszczanie modelu .....                         | 251        |

|                                                               |     |
|---------------------------------------------------------------|-----|
| 19. LINEARYZACJA MODELU .....                                 | 253 |
| 19.1. Linearyzacja statyczna .....                            | 253 |
| 19.2. Linearyzacja dynamiczna .....                           | 260 |
| 19.3. Inne metody linearyzacji .....                          | 265 |
| 20. UPRASZCZANIE MODELU .....                                 | 266 |
| 20.1. Założenia obniżające rząd modelu .....                  | 266 |
| 20.2. Obniżanie rzędu modelu .....                            | 267 |
| 21. PODSTAWOWE BADANIA UKŁADÓW NIELINIOWYCH .....             | 272 |
| 21.1. Badanie stabilności lokalnej .....                      | 272 |
| 21.2. Portrety fazowe .....                                   | 275 |
| 22. PODSUMOWANIE I ZASTOSOWANIE .....                         | 288 |
| 22.1. Podsumowanie metod badania .....                        | 288 |
| 22.2. Inżynierski aspekt badań, czyli zasady realizacji ..... | 290 |
| 22.3. Stabilność .....                                        | 293 |
| 22.4. Ciąg dalszy nastąpi? .....                              | 301 |
| Literatura .....                                              | 303 |
| Skorowidz .....                                               | 304 |



## Wstęp

Zamiarem autora było, aby niniejszy podręcznik prezentował swoisty fundament metodologii badań analitycznych i symulacyjnych, dotyczący własności układów dynamicznych a przeznaczony szczególnie dla studentów kierunków inżynierskich. Opisane metody są stosowane przede wszystkim w obszarze automatyki, gdzie konieczne jest badanie reakcji obiektów na zachodzące zmiany w celu przygotowania do projektowania odpowiednich układów sterowania. Główny nacisk położono na fizyczną interpretację i praktyczne zastosowanie opisywanych metod w odniesieniu do zjawisk, które zachodzą w typowych procesach technologicznych. Stopniowo poprzez studium prostych przypadków Czytelnik ma szansę nabyć pewnego doświadczenia, które pomoże zdefiniować napotykanne problemy i wybrać najbardziej skuteczną metodę prowadzenia badań. Analityczny opis zagadnień jest zilustrowany modelami dynamiki najprostszych obiektów z różnych dziedzin. Uzupełnieniem jest opis badań symulacyjnych w środowisku Matlab, Scilab i Octave. Na bazie takiej wiedzy można przejść do rozwiązywania złożonych zadań, do pogłębionych rozważań teoretycznych i zastosowań interdyscyplinarnych, na przykład w obszarze fizyki, chemii, biologii.

Zakłada się, że Czytelnik posiada elementarną wiedzę na temat równań algebraicznych i różniczkowych, przekształcenia Laplace'a, zjawisk z fizyki klasycznej oraz pisania prostych programów. Tym niemniej opis poszczególnych metod rozpoczyna się zawsze od uporządkowania podstawowych pojęć i metod. We wprowadzeniu (cz. I) zawarto najistotniejsze informacje z zakresu matematyki oraz przykłady modeli obiektów, które posłużą do opisu i ilustracji metod badawczych. Prezentację metod badawczych rozpoczyna analiza oparta na modelach statycznych, które wynikają z uproszczenia modelu dynamiki (cz. II). Kolejne części podręcznika opisują różne formy modeli i sposoby badania dynamiki: równanie różniczkowe (cz. III i IV), układ równań różniczkowych (cz. V) i transmitancja (cz. VI). Najpierw opisywane są fundamentalne zasady metod badawczych, m.in. definicje pojęć i parametrów oraz rozwiązania analityczne. Następnie prezentowane są sposoby wykonywania i interpretacji badań symulacyjnych, które to mogą zastąpić lub uzupełnić badania analityczne. Bazując na tych podstawach, prezentowane są uniwersalne modele dynamiki (cz. VII) oraz metody badania układów bardziej złożonych (cz. VIII). Szczególną uwagę podczas prezentacji poszczególnych tematów zwraca się na praktyczne aspekty opisywanych metod oraz możliwości weryfikacji wyników, oparte na zastosowaniu różnych metod, charakterystyk czy parametrów.

Po co jeszcze podręcznik o klasycznych modelach dynamiki i metodach badań, gdy dostępne jest oprogramowanie oferujące gotowe modele i zaawansowane narzędzia badawcze? Dlatego, że: 1) na prostych modelach można nauczyć się zasad prowadzenia badań i interpretacji wyników; 2) klasyczne modele są ciągle użyteczne, gdyż opisują typowe obiekty (procesy) z dokładnością wystarczającą w praktyce inżynierskiej; 3) pozwalają wejść w zagadnienia dynamiki nawet osobom które dysponują tylko dość podstawową wiedzą matematyczną.

### Oznaczenia stosowane w ogólnych wzorach

|                                                                                                                       |                                                                                                             |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $t$ – czas, s                                                                                                         | $j$ – jednostka urojona                                                                                     |
| $u, u(t)$ – wejście układu, zmienna (sygnał) wejściowy, pobudzenie, wymuszenie                                        | $s$ – zmienna zespolona                                                                                     |
| $x, x(t)$ – zmienna stanu (często też wyjście) układu, rozwiązanie równania różniczkowego, odpowiedź (reakcja) układu | $K$ – wzmocnienie członu                                                                                    |
| $y, y(t)$ – wyjście układu (często $y = x$ )                                                                          | $k_{ukl}$ – wzmocnienie układu                                                                              |
| $\mathbf{u}, \mathbf{u}(t), \mathbf{x}, \mathbf{x}(t)$ – wektory zmiennych                                            | $T, T_1$ – stała czasowa, s                                                                                 |
| $a, a_i, b, b_i$ – parametry                                                                                          | $T_d$ – czas różniczkowania, s                                                                              |
| $u_0, u_k$ – wartość początkowa i końcowa $u(t)$                                                                      | $T_i$ – czas całkowania, s                                                                                  |
| $x_0, x_k$ – wartość początkowa i końcowa $x(t)$                                                                      | $\lambda_i, p_i$ – biegun układu                                                                            |
| $x(u)$ – charakterystyka statyczna, $x_0 = x(u_0)$                                                                    | $z_i$ – zero układu                                                                                         |
| $x(0)$ – zależnie od kontekstu $x(t=0)$ lub $x(u=0)$                                                                  | $\alpha$ – część rzeczywista bieguna, $\alpha = \text{Re}(\lambda)$                                         |
| $(x_0, u_0)$ – punkt równowagi,                                                                                       | $\sigma$ – odległość od osi Im, $\sigma =  \alpha $                                                         |
| $x_e$ – ogólnie stan równowagi układu                                                                                 | $\omega_r$ – część urojona bieguna, $\omega_r = \text{Im}(\lambda)$<br>(pulsacja drgań własnych tłumionych) |
| $1(t)$ – skok jednostkowy                                                                                             | $\omega_n$ – pulsacja drgań własnych nietłumionych (pulsacja układu)                                        |
| $\delta(t)$ – impuls Diraca                                                                                           | $\omega$ – pulsacja ( $2\pi f$ ), rad lub $^\circ$                                                          |
| $h(t)$ – odpowiedź skokowa (reakcja na $1(t)$ )                                                                       | $\zeta$ – tłumienie, współczynnik tłumienia                                                                 |
| $g(t)$ – odpowiedź impulsowa (reakcja na $\delta(t)$ )                                                                | $\varphi$ – przesunięcie fazowe, rad lub $^\circ$                                                           |
| $G(s)$ – transmitancja                                                                                                |                                                                                                             |

### Oznaczenia parametrów fizycznych i jednostek

|                                                                          |                                                        |
|--------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|
| $A$ – powierzchnia, $\text{m}^2$                                         | $P$ – moc, strumień ciepła, W                          |
| $b$ – współczynnik tłumienia (tarcia), $\text{Ns/m}$                     | $Q$ – ciepło, J = Ws                                   |
| $C$ – pojemność elektryczna, $F = C/V$                                   | $q$ – ładunek elektryczny, C                           |
| $C_v$ – pojemność cieplna, J/K                                           | $R$ – rezystancja, $\Omega = V/A$                      |
| $c$ – współczynnik sztywności, N/m                                       | $T$ – temperatura, $^\circ\text{K}$ , $^\circ\text{C}$ |
| $c_p$ – ciepło właściwe materiału, $\text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ | $u$ – napięcie, V                                      |
| $F$ – siła, N                                                            | $V$ – objętość, $\text{m}^3$                           |
| $f$ – przepływ objętościowy, $\text{m}^3/\text{s}$                       | $v$ – prędkość, $\text{m/s}$                           |
| $g$ – przyspieszenie ziemskie, $9.81 \text{ m/s}^2$                      | $x$ – przesunięcie, m                                  |
| $h$ – wysokość, m                                                        | $Z$ – impedancja, $\Omega = V/A$                       |
| $i$ – natężenie prądu, A                                                 | $\rho$ – gęstość materiału, $\text{kg/m}^3$            |
| $K_c$ – współczynnik przenikania ciepła, $\text{W/K}$                    |                                                        |
| $L$ – indukcyjność, $H = \text{Vs/A}$                                    |                                                        |
| $m$ – masa, kg                                                           |                                                        |
| $p$ – ciśnienie, Pa                                                      |                                                        |

#### Uwagi do oznaczeń:

1. W programach symulacyjnych nie ma możliwości stosowania nazw z indeksami, więc stosowana jest zasada, że symbol główny jest pisany dużą literą a indeksy małymi literami, np.: zmienną  $T_{wew}$  w programie symulacyjnym reprezentuje zmienna  $T_{wew}$ .
2. Oznaczenie transformat funkcji, np.:  $\mathcal{L}\{f(t)\} = f(s)$
3. Często stosowane skróty (np. na rysunkach i w tabelach):  
 $\rightarrow$  – odwołanie do rozdziału/podrozdziału,  
p.r. – punkt równowagi (pracy), stabil. – stabilność, war. – warunki,  
Re – wartości rzeczywiste, Im – wartości urojone.

# **I. Wprowadzenie**



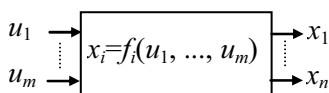
# 1. Przedmiot badań

*czyli o czym trzeba wiedzieć na początek – matematyczny punkt wyjścia*

## 1.1. Model układu

Przedmiotem naszych rozważań są matematyczne modele układów, np. elektrycznych, mechanicznych, hydraulicznych, cieplnych, przeznaczone do opisu, analizy i symulacji własności dynamicznych tych układów. Są stosowane jako prosta reprezentacja obiektów (procesów) technologicznych i wykorzystywane szczególnie podczas projektowania układów sterowania tymi obiektami. Uniwersalność modeli matematycznych umożliwia rozszerzenie tego opisu na inne dziedziny, np. zjawiska chemiczne i biologiczne. **Model układu** (obiektu, procesu, zjawiska) w podręczniku oznacza model matematyczny opisujący zachowanie wybranego układu (fizycznego, chemicznego, biologicznego, ...) za pomocą wyrażeń matematycznych, zawierających (rys. 1-1):

- **zmienne wejściowe** (sygnały wejściowe, wymuszenia)  $u$  – ich wartość jest ustalana na zewnątrz układu (nie zależy od tego się dzieje w układzie),
- **zmienne wyjściowe** (sygnały wyjściowe, rozwiązania)  $x$  – ich wartość jest reakcją układu na określone wymuszenia (wynikiem przetworzenia sygnału wejściowego),
- **parametry** (współczynniki) – stałe wartości (skalary) w wyrażeniach.

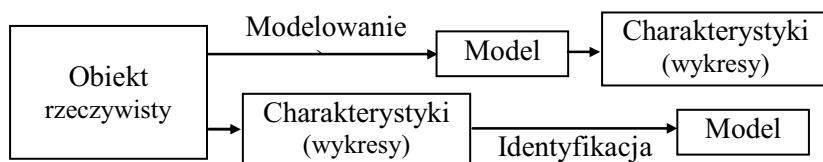


Rys. 1-1. Model układu

Funkcje matematyczne opisujące zachowanie układu mogą mieć postać jawną  $x_i = f_i(u_1, \dots, u_m)$  lub uwiłkaną  $F(u_1, \dots, u_m, x_1, \dots, x_n)$ .

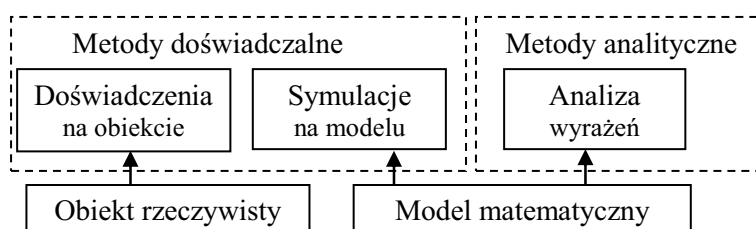
Najprostsze modele opisują relację między jednym wybranym wyjściem  $x$  i jednym wybranym wejściem układu  $u$  (ang. SISO – Single Input Single Output). Modele wielowymiarowe (ang. MIMO – Multiple Input Multiple Output) mogą opisywać zależności między wieloma zmiennymi wyjściowymi ( $x_1, \dots, x_n$ ) i wieloma zmiennymi wejściowymi ( $u_1, \dots, u_m$ ), czyli wektorem zmiennych wyjściowych  $x = [x_1, \dots, x_n]$  i wektorem zmiennych wejściowych  $u = [u_1, \dots, u_m]$ .

Modele można podzielić na modele statyczne  $x(u)$ , opisujące układ w stanie równowagi przy stałych wymuszeniach, oraz modele dynamiki, przedstawiające reakcję układu  $x(t)$  na zmiany wymuszeń  $u(t)$  w czasie. Stosowane są różne metody konstrukcji modeli (rys. 1-2). Analityczna konstrukcja modelu przeprowadzana na podstawie znajomości opisu procesów zachodzących na obiekcie nazywa się modelowaniem. Wynikiem tego działania są wyrażenia matematyczne, które umożliwiają przeprowadzanie analizy własności i przedstawianie tych własności w formie graficznej (różnego typu charakterystyki – wykresy). Wykresy mogą powstawać również na podstawie doświadczeń realizowanych na rzeczywistym obiekcie (tzw. zdejmowanie charakterystyk). Na podstawie odpowiednich wykresów można odtworzyć matematyczny model układu, co nazywamy identyfikacją modelu.



Rys. 1-2. Podstawowe metody konstrukcji modeli: modelowanie i identyfikacja

W podręczniku prezentowane są zarówno metody konstrukcji, jak i analizowania własności modeli. Są wśród nich zarówno metody analityczne, jak i doświadczalne, a relacje między różnymi metodami służą dogłębnemu zrozumieniu zasad, wspomagają efektywny wybór metodologii i poprawną realizację badań. Ogólnie metody badawcze można podzielić ze względu na przedmiot badań – rzeczywisty obiekt lub model, i ze względu na metodę – doświadczenie lub analiza wzorów (rys. 1-3).



Rys. 1-3. Badania doświadczalne i analityczne

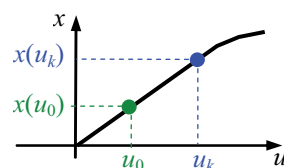
Można więc wyróżnić badania doświadczalne, realizowane na rzeczywistym obiekcie, oraz badania symulacyjne i analityczne przeprowadzane na podstawie modelu. Badania symulacyjne mają także charakter doświadczalny – zasady poprawnego wykonania określonych doświadczeń na modelu są takie same jak na obiekcie, ale zazwyczaj znacznie prostsze w realizacji. Można by postawić pytanie – po co zajmować się metodami analitycznymi, skoro szeroko dostępne są badania symulacyjne? Najkrócej rzecz ujmując, po to, żeby zweryfikować, zinterpretować i uogólnić wyniki symulacji. Z jednej strony symulacje najłatwiej jest wykonać wówczas, gdy wiadomo jaki ma być wynik (mamy potwierdzenie poprawności przeprowadzenia badań). Z drugiej strony badania symulacje stosuje się przede wszystkim do rozwiązywania złożonych problemów, które są często niemożliwe do rozwiązania analitycznego, a więc trudno jest zweryfikować poprawność takich badań. Jeśli więc istnieje możliwość porównania wyników badań analitycznych i symulacyjnych (dla prostych modeli), to można ją wykorzystać do opanowania obu metod badawczych. Jeśli rozwiązanie analityczne jest trudne lub niemożliwe, to metodami analitycznymi można uprościć zadanie i na podstawie jego rozwiązania przewidzieć własności rozwiązania złożonego otrzymanego symulacyjnie.

Analityczne i symulacyjne badania własności modeli układów są oparte na pojęciach i metodach z różnych działów matematyki, takich jak funkcje algebraiczne i przestępne, rachunek różniczkowy i operatorowy, szeregi funkcyjne. Praktyczne

repetitorium wiedzy z tego zakresu, wykorzystywane w badaniach, zawierają na przykład proponowane opracowania [18, 19].

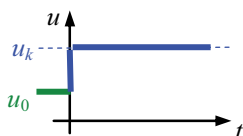
## 1.2. Własności statyczne i dynamiczne układu

**Model statyczny** to najprostszy opis własności układu (obiektu, procesu). Przedstawia on zależności między zmiennymi wejściowymi i wyjściowymi układu w warunkach równowagi, gdy wartości tych zmiennych są stałe. Modele statyczne mają postać równań algebraicznych, natomiast graficzną reprezentacją własności statycznych jest charakterystyka statyczna (rys. 1-4), umożliwiającą odczytywanie wartości wyjść na podstawie wartości wejść, np.  $x(u_0)$ ,  $x(u_k)$ . W najprostszych przypadkach są to funkcje liniowe (np.:  $x = a \cdot u$ ,  $x = a_1 \cdot u_1 + a_2 \cdot u_2$ ). W rzeczywistych warunkach zależności liniowe praktycznie nie występują, jednak są stosowane jako przybliżenie opisu rzeczywistych obiektów i w wielu zastosowaniach wystarczające.

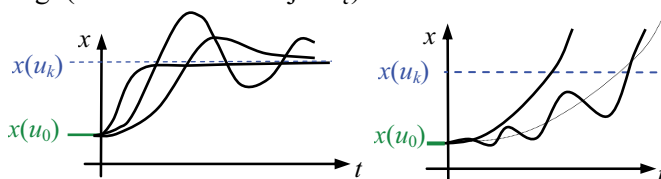


Rys. 1-4. Charakterystyka statyczna  $x(u)$

**Model dynamiki układu** opisuje reakcję układu na zmiany sygnałów wejściowych. W badaniach stosuje się często bardzo proste sygnały wejściowe, takie jak wymuszenie skokowe (rys. 1-5). Podstawową analityczną formą modelu dynamiki są równania różniczkowe (najczęściej zwyczajne), gdzie zmienną niezależną jest czas  $t$ . Analityczne wyznaczenie przebiegu  $x(t)$  wymaga rozwiązania równania różniczkowego dla określonego wymuszenia  $u(t)$  i określonych warunków początkowych, co jest możliwe tylko w prostych przypadkach (np. równania liniowe, różniczkowalne funkcje wymuszające). Najprostszą reprezentacją graficzną opisu dynamiki są charakterystyki czasowe, przedstawiające reakcję obiektu  $x(t)$  na określone wymuszenie  $u(t)$ , na przykład odpowiedź na skokową zmianę wymuszenia na jednym z wejść (rys. 1-6). Własności dynamiczne obiektu sprawiają, że wartości wyjściowe zmieniają się w czasie i mogą mieć charakter oscylacyjny, a co najważniejsze, nie zawsze kończą się osiągnięciem stanu równowagi (układ nie stabilizuje się).



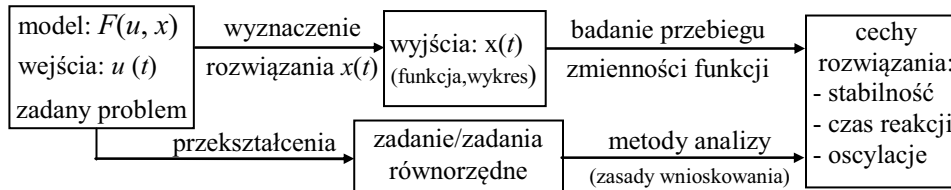
Rys. 1-5. Wymuszenie skokowe (skokowa zmiana wymuszenia)



Rys. 1-6. Reakcje układów stabilnych i niestabilnych na wymuszenie skokowe

Model statyczny opisuje układ w warunkach równowagi przy stałych wymuszeniach, natomiast model dynamiki opisuje czy i w jaki sposób układ dochodzi do stanu równowagi. W praktyce inżynierskiej często nie ma potrzeby wyznaczania reakcji  $x(t)$  w postaci wzoru czy wykresu – wystarczy znajomość charakterystycznych cech przebiegu  $x(t)$ , takich jak stabilność, czas reakcji, wielkość oscylacji. Można je określić

w sposób prostszy niż wyznaczanie rozwiązania i badanie jego przebiegu, to znaczy przez przekształcenie modelu i zastosowanie własności funkcji algebraicznych i trygonometrycznych (rys. 1-7).



Rys. 1-7. Analiza własności dynamicznych modelu

Jednym z pierwszych elementów analizy własności modelu jest prosta klasyfikacja typu równań i funkcji, która umożliwia od razu określenie niektórych cech obiektu i wybranie metody odpowiedniej do dalszych badań. Podstawowa klasyfikacja dotyczy liniowości modelu. Model jest **liniowy**, jeśli zmienne (wejściowe, wyjściowe) podlegają przekształceniom spełniającym dwa warunki:

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2), \quad f(ax) = af(x), \quad \text{gdzie } a \in \text{Re}. \quad (1-1)$$

Kluczową cechą układów liniowych jest możliwość stosowania **superpozycji**.

Zasada superpozycji dotyczy układów liniowych w każdej dziedzinie, ale w fizyce jest szczególnie użyteczna – reakcja układu na złożone wymuszenie jest sumą reakcji na pojedyncze składniki wymuszenia.

W kolejnych podrozdziałach przedstawiono podstawowe elementy analizy matematycznej z zakresu liniowych równań algebraicznych i różniczkowych, wykorzystywane w badaniach własności statycznych i dynamicznych układów.

### 1.3. Wielomiany i układy równań algebraicznych

#### 1.3.1. Wielomiany rzeczywiste

Kluczową rolę w badaniach dynamiki pełnią wielomiany o rzeczywistych współczynnikach, a w szczególności pierwiastki wielomianu, czyli rozwiązania równania:

$$a_n x^n + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0. \quad (1-2)$$

**Pierwiastki wielomianu** mogą być liczbami rzeczywistymi ( $\lambda$ ) lub parami liczb zespolonych sprzężonych ( $\alpha \pm j\omega$ ). Wielomian  $n$ -tego stopnia ma  $n$  pierwiastków (mogą to być pierwiastki wielokrotne). Wielomian rzeczywisty (1-2) można zapisać jako iloczyn wielomianów rzeczywistych stopnia co najwyżej drugiego, jak na przykład:

$$a_n (x - \lambda_1) (x - \lambda_2) \dots (x^2 + b_1 x + b_2) (x^2 + c_1 x + c_2) = 0, \quad (1-3)$$

gdzie wielomiany liniowe są związane z pierwiastkami rzeczywistymi  $\lambda_i$ , a wielomiany kwadratowe (trójmiany o ujemnym wyróżniku  $\Delta$ ) z pierwiastkami zespolonymi

$\alpha_i \pm j\omega_i$  wielomianu (1-2). Można też zawsze zapisać wielomian (1-2) jako iloczyn wielomianów liniowych (niekoniecznie rzeczywistych):

$$a_n(x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \dots (x - \lambda_n) = 0, \quad (1-4)$$

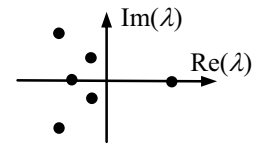
gdzie pierwiastki  $\lambda_{1 \div n}$  mogą być zarówno rzeczywiste, jak i zespolone.

Równoważność postaci ogólnej (1-2) i iloczynowej (1-4) pozwala zweryfikować wartości wyznaczonych pierwiastków  $\lambda_{1 \div n}$ , a także wyprowadzić zależności pomiędzy współczynnikami wielomianu i jego pierwiastkami ( $a_n \neq 0$ ):

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = -a_{n-1} / a_n \\ \lambda_1 \lambda_2 + \dots + \lambda_1 \lambda_n + \lambda_2 \lambda_3 + \dots + \lambda_2 \lambda_n + \dots + \lambda_{n-1} \lambda_n = a_{n-2} / a_n \\ \vdots \\ \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n = (-1)^n a_0 / a_n \end{cases} \quad (1-5)$$

W układzie równań (1-5) mogą wystąpić pierwiastki zarówno rzeczywiste, jak i zespolone. Zależności te, znane jako wzory Viète'a, również bywają wykorzystywane w badaniach analitycznych, na przykład do weryfikacji obliczeń. Pierwiastki wielomianów stopnia 1÷4 można wyznaczyć analitycznie za pomocą powszechnie znanych wzorów. Powyżej stopnia 4 takie wzory nie istnieją – konieczne są inne metody rozwiązywania, na przykład numeryczne ( $\rightarrow$  1.5).

Pierwiastki wielomianu można przedstawić na płaszczyźnie zespolonej (rys. 1-8). W badaniach dynamiki szczególne znaczenie mają przypadki, gdy wszystkie pierwiastki leżą w lewej półpłaszczyźnie – mają ujemną część rzeczywistą. Często wystarcza samo stwierdzenie, że taki przypadek zachodzi, a to można wykonać bez wyznaczania wartości pierwiastków. Na podstawie wzoru (1-4) można wykażać, że jeśli wszystkie pierwiastki leżą w lewej



Rys. 1-8. Pierwiastki na płaszczyźnie zespolonej

półpłaszczyźnie, to wszystkie współczynniki wielomianu są różne od zera i są tego samego znaku. Jednak twierdzenie odwrotne jest prawdziwe tylko dla wielomianów pierwszego i drugiego stopnia. W ogólnym przypadku stosuje się tak zwane kryteria położenia pierwiastków – najbardziej znane to kryteria Routha i Hurwitza, gdzie niezerowa wartość i jednolity znak współczynników wielomianu jest warunkiem koniecznym, ale nie wystarczającym położenia pierwiastków [6].

**Kryterium Hurwitza.** Wszystkie pierwiastki równania  $a_n \lambda^n + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$  leżą w lewej półpłaszczyźnie, jeśli wszystkie współczynniki wielomianu są różne od zera i mają jednakowy znak, a wszystkie minory główne wielomianu są dodatnie. Minory główne to kolejne wyznaczniki  $\Delta_{1 \div n}$ , konstruowane według schematu:

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \quad \text{itd. aż do} \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix} \quad (1-6)$$

Jeśli warunki nie są spełnione, to kryterium nie określa, ile pierwiastków jest dodatnich.

### 1.3.2. Układy równań [18, 19]

Model obiektu może być wielowymiarowy. Typową postacią takiego modelu jest układ kilku równań liniowych i/lub nieliniowych, oparty na zestawie niezależnych zmiennych wyjściowych ( $x_1 \div x_n$ ), które spełniają każde z równań układu. Układ równań, który jest modelem obiektu, może być oznaczony (ma skończoną liczbę rozwiązań) lub nieoznaczony (liczba rozwiązań jest nieskończona), ale nie powinien być sprzeczny (brak rozwiązań). Rozwiązanie układu można wyznaczyć metodami analitycznymi (głównie układy liniowe) lub numerycznie. Oznaczone układy równań liniowych mogą być zapisywane w postaci macierzowej  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} \quad (1-7)$$

i przetwarzane metodami z zakresu algebry liniowej (np. operacje algebraiczne na macierzach, obliczanie wyznacznika macierzy). Sformułowanie problemu w postaci macierzowej jest szczególnie preferowane podczas stosowania badań symulacyjnych. Jeśli macierz  $\mathbf{A}$  jest nieosobliwa ( $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ ), to układ  $n$  równań liniowych jest oznaczony (ma jedno rozwiązanie). Jeśli macierz  $\mathbf{A}$  jest osobliwa ( $\det(\mathbf{A}) = 0$ ), to oznacza, że wśród  $n$  równań jest przynajmniej jedno równanie, które jest liniową kombinacją pozostałych (układ równań jest nieoznaczony).

Analityczne rozwiązywanie układów równań liniowych (1-7) można wykonać różnymi metodami – trzy podstawowe to metoda macierzowa, wzory Cramera oraz podstawianie i eliminowanie kolejnych zmiennych.

**1° Metoda macierzowa.** Układ równań (1-7) zapisany w postaci macierzowej:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \quad (1-8)$$

gdzie poszczególne wektory/macierze współczynników i zmiennych mają postać:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Wyrażenie (1-8) można rozwiązać za pomocą operacji macierzowych:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}, \quad (1-9)$$

co wymaga wyznaczenia macierzy odwrotnej:

$$\mathbf{A}^{-1} = \left( \mathbf{A}^D \right)^T / \det(\mathbf{A}), \quad (1-10)$$

gdzie:  $\det(\mathbf{A})$  – wyznacznik macierzy  $\mathbf{A}$ ;  $(\mathbf{A}^D)^T$  – macierz dołączona, czyli transponowana macierz dopełnień algebraicznych  $\mathbf{A}^D$ , obliczana według wzoru:

$$\mathbf{A}^D = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}, \text{ gdzie } A_{ij} = (-1)^{i+j} \det \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{na} \end{bmatrix}.$$

Przy dużych wymiarach macierzy  $\mathbf{A}$  wyznaczanie odwrotności  $\mathbf{A}^{-1}$  jest pracochłonne, ale jeśli elementy macierzy  $\mathbf{A}$  i wektora  $\mathbf{b}$  mają określone wartości, to wyrażenie (1-9) można obliczyć numerycznie ( $\rightarrow$  1.5).

**Przykład:** Rozwiązanie układu dwóch równań metodą macierzową

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{M} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \mathbf{A}^D = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}a_{22} & (-1)^{1+2}a_{21} \\ (-1)^{2+1}a_{12} & (-1)^{2+2}a_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}, (\mathbf{A}^D)^T = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

$$M = \det(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

**2° Wzory Cramera.** Układ równań (1-7) można też zapisać w postaci wektorowej:

$$\mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \dots + \mathbf{a}_n x_n = \mathbf{b}, \quad (1-11)$$

gdzie współczynniki i zmienne są reprezentowane przez wektory kolumnowe:

$$\mathbf{a}_i = \begin{bmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \dots \\ a_{in} \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

i rozwiązać za pomocą wzorów Cramera:

$$x_i = \frac{W_i}{W} = \frac{\det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{b}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_n)}{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)}. \quad (1-12)$$

**Przykład:** Rozwiązanie układu dwóch równań metodą Cramera

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} x_2 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 = \mathbf{b}$$

$$x_1 = \frac{\det(\mathbf{b}, \mathbf{a}_2)}{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)} = \frac{\det \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{b})}{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)} = \frac{\det \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}$$

**3° Podstawianie i eliminowanie kolejnych zmiennych.** Jeśli rozwiązanie jest wyznaczane analitycznie, to czasem najprostszą metodą rozwiązania układu (1-7) jest metoda podstawiania i eliminowania kolejnych zmiennych, na przykład, gdy ilość równań jest niewielka (2÷3), a współczynniki równań są parametrami (są reprezento-

wane przez symbole lub wyrażenia, a nie przez wartości liczbowe). Metodę można również stosować w przypadku układu równań nieliniowych.

**Przykład:** Rozwiązanie układu dwóch równań metodą podstawiania

$$(1) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \rightarrow x_1 = (b_1 - a_{12}x_2)/a_{11} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

$$(1) \quad a_{21} \frac{b_1 - a_{12}x_2}{a_{11}} + a_{22}x_2 = b_2 \quad | \cdot a_{11} \rightarrow a_{21}b_1 - a_{21}a_{12}x_2 + a_{11}a_{22}x_2 = a_{11}b_2 \rightarrow x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

$$(2) \quad a_{21}x_1 + a_{22} \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} = b_2 \rightarrow a_{21}x_1 = \frac{b_2(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) - a_{22}(a_{11}b_2 - a_{21}b_1)}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \rightarrow x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

## 1.4. Liniowe równania różniczkowe zwyczajne

### 1.4.1. Klasyfikacja równań różniczkowych

W badaniach dynamiki układów (obiektów, procesów) podstawowe znaczenie mają równania różniczkowe zwyczajne, gdzie zmienną niezależną jest czas ( $t$ ). Równanie różniczkowe zwyczajne  $n$ -tego rzędu jest zależnością, w której występuje zmienna wejściowa  $u = u(t)$  i wyjściowa  $x = x(t)$  oraz ich pochodne względem czasu:

$$F(x^{(n)}(t), x^{(n-1)}(t), \dots, \dot{x}(t), x(t), u^{(m)}(t), \dots, \dot{u}(t), u(t)) = 0. \quad (1-13)$$

Jeśli wyrażenie (1-13) można przedstawić w postaci:

$$a_n x^{(n)}(t) + a_{n-1} x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = b_m u^{(m)}(t) + \dots + b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t), \quad (1-14)$$

gdzie wszystkie współczynniki  $a_i$  i  $b_i$  są stałe, to mamy do czynienia z najprostszym przypadkiem, czyli równaniem liniowym stacjonarnym. Jeśli choć jeden ze współczynników  $a_i$  i  $b_i$  zależy od czasu (tylko od czasu), to wyrażenie (1-14) jest równaniem liniowym niestacjonarnym. Liniowe równania różniczkowe można zawsze rozwiązać analitycznie dzięki zasadzie superpozycji. Rozwiązaniem równania różniczkowego jest funkcja  $x(t)$ , która spełnia równanie różniczkowe przy zadanym wymuszeniu (dla określonej funkcji podstawianej pod zmienną  $u(t)$ ) i zadanych warunkach początkowych.

### 1.4.2. Klasyczny algorytm rozwiązywania równania różniczkowego [18, 19]

Klasyczny sposób rozwiązywania równania różniczkowego  $n$ -tego rzędu dotyczy równań postaci (1-14) ze stałymi współczynnikami  $a_i$  i  $b_i$ , i jest stosowany dla ustalonej funkcji podawanej na wejście  $u(t)$  i ustalonych  $n$  warunków początkowych. Zasada superpozycji w przypadku liniowego równania różniczkowego pozwala podzielić rozwiązanie  $x(t)$  na składową swobodną  $x_s(t)$  i składową wymuszoną  $x_w(t)$ :

$$x(t) = x_s(t) + x_w(t). \quad (1-15)$$

Wyznaczanie składowych i pełnego rozwiązania  $x(t)$  składa się z czterech etapów.

**I. Rozwiązanie swobodne (składowa swobodna, przejściowa)**  $x_s(t)$  – rozwiązanie równania różniczkowego jednorodnego (bez wymuszenia)

(1) Ustalić postać równania jednorodnego (wyzerować wymuszenie):

$$a_n x_s^{(n)}(t) + a_{n-1} x_s^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 \dot{x}_s(t) + a_0 x_s(t) = 0. \quad (1-16)$$

(2) Założyć rozwiązanie w postaci funkcji eksponencjalnej o parametrach  $A$  i  $\lambda$ :

$$x_s(t) = A e^{\lambda t}. \quad (1-17)$$

(3) Podstawić założone rozwiązanie (1-17) do równania jednorodnego (1-16):

$$a_n \lambda^n A e^{\lambda t} + a_{n-1} \lambda^{n-1} A e^{\lambda t} + \dots + a_1 \lambda A e^{\lambda t} + a_0 A e^{\lambda t} = 0. \quad (1-18)$$

(4) Równanie (1-18) podzielić obustronnie przez  $A e^{\lambda t}$ , co prowadzi do równania algebraicznego, nazywanego **równaniem charakterystycznym**:

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0. \quad (1-19)$$

(5) Rozwiązać równanie charakterystyczne – wyznaczyć  $n$  pierwiastków  $\lambda_1 \div \lambda_n$ .

(6) Pierwiastki mogą być rzeczywiste i zespolone, jedno- i wielokrotne. Stąd wynika postać  $x_s(t)$ :

(1°) Jeśli wszystkie pierwiastki równania  $\lambda_1 \div \lambda_n$  są rzeczywiste i różne, to

$$x_s(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + A_n e^{\lambda_n t}. \quad (1-20)$$

(2°) W przypadku pierwiastków wielokrotnych, np.  $k$ -ty pierwiastek  $\lambda_k$  jest  $p$ -krotny ( $\lambda_k = \lambda_{k+1} = \dots = \lambda_{k+p-1}$ ), składowa  $x_s(t)$  zawiera  $p$  składników postaci

$$(A_k + A_{k+1}t + A_{k+2}t^2 + \dots + A_{k+p-1}t^{p-1})e^{\lambda_k t}. \quad (1-21)$$

(3°) Jeśli występują pierwiastki zespolone (para liczb sprzężonych), np.  $\lambda_1 = \alpha + j\omega_r$  oraz  $\lambda_2 = \alpha - j\omega_r$ , to  $x_s(t)$  zawiera składniki, które można zapisać na trzy równoważne sposoby [19]:

$$(a) A_1 e^{(\alpha + j\omega_r)t} + A_2 e^{(\alpha - j\omega_r)t} = e^{\alpha t} (A_1 e^{j\omega_r t} + A_2 e^{-j\omega_r t}), \quad (1-22)$$

$$(b) e^{\alpha t} (B_1 \cos \omega_r t + B_2 \sin \omega_r t), \quad (1-23)$$

$$(c) A e^{\alpha t} \sin(\omega_r t + \varphi_1) = A e^{\alpha t} \cos(\omega_r t - \varphi_2), \quad (1-24)$$

$$\text{gdzie: } B_1 = A_1 + A_2, \quad B_2 = j(A_1 - A_2), \quad A = \sqrt{B_1^2 + B_2^2},$$

$$\varphi_1 = \arctg(B_1 / B_2), \quad \varphi_2 = \arctg(B_2 / B_1).$$

Uwaga: Po wyznaczeniu współczynników  $A_1$  i  $A_2$  (1-22) okazuje się, że są one liczbami zespolonymi, a współczynniki  $B_1$  i  $B_2$  (1-23) są liczbami rzeczywistymi – wyrażenia:  $B_1 = A_1 + A_2$  i  $B_2 = j(A_1 - A_2)$  opisują relacje między parametrami, a nie typ wartości.

Wszystkie składniki rozwiązania swobodnego (1-20)÷(1-24) zawierają funkcję eksponencjalną o wykładniku równym  $\alpha t$ , gdzie  $\alpha$  to część rzeczywista pierwiastka,  $t$  to czas ( $t \geq 0$ ). Funkcja ta determinuje podstawową własność rozwiązania – jeśli

część rzeczywista pierwiastka jest ujemna, to składnik związany z tym pierwiastkiem zanika z czasem, a jeśli dodatnia, to składnik dąży do  $+\infty$  lub  $-\infty$ . Tym samym, jeśli wszystkie pierwiastki mają ujemną część rzeczywistą, to całe rozwiązanie swobodne  $x_s(t)$  zanika z czasem (stąd określenie składowa przejściowa).

**II. Rozwiązanie wymuszone (składowa wymuszona, ustalona)  $x_w(t)$**  – rozwiązanie równania różniczkowego dla konkretnej funkcji wymuszającej  $f(t)$  podawanej na wejście  $u(t)$ .

(1) Wypisać funkcję wymuszającą  $f(t)$  i jej kolejne pochodne:

$$f(t), \dot{f}(t), \ddot{f}(t), \dots \quad (1-25)$$

Listę kończą wyrażenia równe zeru lub funkcje, które zaczynają się powtarzać (np. w przypadku funkcji  $\sin$  i  $\cos$ ). Jeśli wśród tych wyrażeń są takie, które występują także w składowej  $x_s(t)$ , to należy je pomnożyć przez  $t^k$ , gdzie  $k$  jest najmniejszym wykładnikiem, który zapewni, że wyrażenia będą się różnić od składników składowej swobodnej.

(2) Założyć, że rozwiązanie wymuszone  $x_w(t)$  jest sumą składników postaci:

$$x_w(t) = C_1 f(t) + C_2 \dot{f}(t) + \dots, \quad (1-26)$$

gdzie  $C_i$  są parametrami rozwiązania.

Z konstrukcji wyrażenia  $x_w(t)$  wynika, że jeśli funkcja wymuszająca  $f(t)$  jest ograniczona, to składowa wymuszona  $x_w(t)$  też jest ograniczona.

(3) Podstawić wymuszenie  $f(t)$  i założone rozwiązanie  $x_w(t)$  do równania (1-25):

$$a_n x_w^{(n)}(t) + a_{n-1} x_w^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 \dot{x}_w(t) + a_0 x_w(t) = b_m f^{(m)}(t) + \dots + b_1 \dot{f}(t) + b_0 f(t). \quad (1-27)$$

(4) Porównać współczynniki przy takich samych funkcjach w całym równaniu.

(5) Rozwiązać otrzymany układ równań względem stałych parametrów  $C_1, C_2, \dots$

W praktyce inżynierskiej najczęściej wymuszenie jest stałe lub sinusoidalne. Najprostsze rozwiązania  $x_w(t)$  zachodzą, gdy wymuszenie jest stałe  $u(t) = u_k$  dla  $t > 0$ :

$$(1) \quad u(t) = u_k, \quad \dot{u}(t) = 0, \quad \ddot{u}(t) = 0, \dots$$

$$(2) \quad x_w(t) = C_1 \cdot u_k \quad \rightarrow \quad \dot{x}_w(t) = 0, \quad \ddot{x}_w(t) = 0, \dots$$

$$(3) \quad a_n 0 + a_{n-1} 0 + \dots + a_1 0 + a_0 C_1 u_k = b_m 0 + \dots + b_0 u_k$$

$$(4) \quad a_0 C_1 u_k = b_0 u_k$$

$$(5) \quad C_1 = b_0 / a_0 \quad \rightarrow \quad x_w(t) = \frac{b_0}{a_0} u_k, \quad \text{gdy } a_0 \neq 0$$

Rozwiązanie to można otrzymać „na skróty”, jako rozwiązanie równania statycznego, otrzymanego po wyzerowaniu wszystkich pochodnych w równaniu (1-14):

$$a_0 x = b_0 u. \quad (1-28)$$

Przy stałym wymuszeniu  $u(t) = u_k$ , rozwiązanie  $x_w(t)$  też jest stałe i równe:

$$x_w(t) = \frac{b_0}{a_0} u_k = x_k, \text{ gdy } a_0 \neq 0. \quad (1-29)$$

Rozwiązanie (1-29) jest stanem równowagi ( $x_k$ ) układu przy stałym wymuszeniu ( $u_k$ ) o ile  $a_0 \neq 0$ . Jeśli  $a_0 = 0$ , to równanie (1-28) nie ma rozwiązania (punktu równowagi), gdy  $u(t) = u_k \neq 0$ , albo ma nieskończenie wiele rozwiązań (dowolny punkt równowagi), gdy  $u(t) = u_k = 0$ .

Wyznaczając rozwiązanie wymuszone dla sygnału sinusoidalnego  $u(t) = \sin(\omega_0 t)$ , można wykazać, że ma ono zawsze postać:

$$x_w(t) = X_m \sin(\omega_0 t + \varphi), \quad (1-30)$$

gdzie amplituda  $X_m$  i przesunięcie fazowe  $\varphi$  zależą od pulsacji sygnału wymuszającego ( $\omega_0$ ). Jeśli na wejście układu liniowego podawany jest sygnał sinusoidalny, to w stanie ustalonym na wyjściu też jest sygnał sinusoidalny o tej samej pulsacji, ale wzmocniony i przesunięty w fazie (analiza częstotliwościowa – patrz rozdz. 14).

Jeśli składowa swobodna  $x_s(t)$  zanika do zera, to w rozwiązaniu równania  $x(t)$  zostaje tylko składowa wymuszona  $x_w(t)$  (stąd określenie składowa ustalona).

**III. Rozwiązanie ogólne równania różniczkowego** (całka ogólna), czyli suma rozwiązania swobodnego (z parametrami  $A_i$ ) i rozwiązania wymuszonego:

$$x(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + A_n e^{\lambda_n t} + x_w(t). \quad (1-31)$$

Rozwiązanie ogólne stanowi całą klasę rozwiązań, ponieważ zawiera parametry  $A_1 \div A_n$ , które są wyznaczane w kolejnym etapie. Jednak najistotniejsza cecha rozwiązania  $x(t)$  nie zależy od wartości  $A_i$ . Jeśli wszystkie elementy składowej swobodnej  $x_s$  zanikają z czasem, to oznacza, że rozwiązanie  $x(t)$  dąży do rozwiązania wymuszonego  $x_w$  – takie równanie różniczkowe nazywamy **stabilnym**. Jeśli natomiast składowa swobodna  $x_s$  rozwiązania  $x(t)$  nie zanika, to równanie różniczkowe nazywamy **niestabilnym**. Stabilność liniowego równania różniczkowego nie zależy ani od wymuszenia, ani od współczynników  $A_i$ . Jeśli wymuszenie na wejściu  $u(t)$  jest ograniczone, to rozwiązanie  $x(t)$  stabilnego równania różniczkowego też jest ograniczone.

**IV. Rozwiązanie szczególne równania różniczkowego** (całka szczególna) – rozwiązanie ogólne z określonymi wartościami parametrów  $A_1 \div A_n$ . Parametry  $A_i$  są obliczane na podstawie  $n$  warunków początkowych, czyli zbioru  $n$  wartości wybranych spośród  $n + 1$  możliwości:

$$x^{(n)}(t_0), \dots, \dot{x}(t_0), x(t_0), \quad (1-32)$$

które definiują wartości rozwiązania i jego pochodnych w wybranej chwili  $t_0$  (zazwyczaj  $t_0 = 0$ ). Warunki początkowe muszą spełniać dane równanie różniczkowe, więc znając na przykład wartości pochodnych w chwili  $t_0$ :

$$x^{(n)}(t_0) = w_n, \quad x^{(n-1)}(t_0) = w_{n-1}, \quad \dots, \quad \dot{x}(t_0) = w_1, \quad (1-33)$$

można podstawić je wraz z wymuszeniem  $f(t_0)$  i jego pochodnymi do równania (1-14) i obliczyć wartość  $x(t_0)$ , co umożliwia wyznaczenie dowolnego, równoważnego zbioru  $n$  warunków początkowych.

Na podstawie  $n$  warunków początkowych podstawionych do rozwiązania  $x(t)$  powstaje układ  $n$  równań, umożliwiający wyznaczenie wartości  $A_1 \div A_n$ . W ten sposób spośród wszystkich możliwości jakie opisuje rozwiązanie ogólne  $x(t)$  wybierane jest jedno rozwiązanie spełniające zadane warunki początkowe. Przy stałych wymuszeniach warunki początkowe często są definiowane jako stan równowagi układu w chwili  $t_0 = 0$ , co oznacza, że wszystkie pochodne w równaniu w chwili początkowej są równe zero (nie ma zmian w układzie), to znaczy:

$$x^{(n)}(0) = 0, x^{(n-1)}(0) = 0, \dots, \dot{x}(0) = 0 \quad (1-34)$$

lub po przeliczeniu na równoważny zbiór warunków początkowych:

$$x^{(n-1)}(0) = 0, \dots, \dot{x}(0) = 0, x(0) = x_0, \text{ gdzie } x_0 = \frac{b_0}{a_0} u_0. \quad (1-35)$$

Klasyczny algorytm rozwiązywania równań różniczkowych jest podstawową metodą wyznaczenia reakcji układów na wymuszenia stałe, skokowe i impulsowe ( $\rightarrow$  4) oraz sinusoidalne ( $\rightarrow$  14.1).

## 1.5. Komputerowe wspomaganie obliczeń

### 1.5.1. Możliwości

Wyznaczenie i analityczne badanie funkcji opisującej reakcję układu na zadane wymuszenia nie zawsze jest konieczne, a w układach nieliniowych często wręcz niemożliwe. Wyprowadzenie wzoru i matematyczna analiza tego wyrażenia są stosowane praktycznie tylko w stosunku do prostych liniowych modeli. Nieliniowość, wysoki stopień wielomianu, wysoki rząd równania różniczkowego czy układ wielu równań są wskazaniem do zastosowania metod numerycznych. Wadą tych metod jest konieczność określenia liczbowej postaci wszystkich współczynników modelu oraz przybliżony charakter rozwiązań.

Wśród wielu programów obliczeniowych w obszarze automatyki szczególnie użyteczne są programy symulacyjne, takie jak **Matlab**. Ten komercyjny pakiet oprogramowania obejmuje wiele dziedzin i stanowi praktycznie międzynarodowy standard obliczeń naukowo-inżynierskich, a kolejne, regularnie pojawiające się wersje Matlaba, wprowadzają różne udogodnienia i rozszerzenia. Taki zakres zastosowania i ciągły rozwój mają swoją cenę, która ogranicza wykorzystanie Matlaba w małych projektach. I tak pojawiło się alternatywne oprogramowanie, wzorowane na Matlabie, takie jak **Scilab** i **Octave**. Ma ono swoje ograniczenia, ale też istotną zaletę – jest darmowe. Wszystkie przykłady zawarte w podręczniku przedstawiono na podstawie tych właśnie pakietów – Matlab, Scilab i Octave.

Ze względu różne możliwości poszczególnych pakietów, opisano podstawowe sposoby wykonania badań, które można zastosować zarówno w nowszych, jak i starszych wersjach Matlab, i które mają swoje odpowiedniki w oprogramowaniu darmowym. W opisach badań stosowane są nazwy funkcji i rozwiązania pochodzące z utrwalonych wersji Matlab. Odpowiedniki nazw funkcji i opcji dla pakietu Matlab, Scilab i Octave są prezentowane w postaci tabel, a także w pracy [4]. Jeśli wersje Matlab wymagają rozróżnienia, to stosowane jest oznaczenie: Matlab(P) – wersja podstawowa (utrwalona), Matlab(N) – wersja nowsza (od wersji 2019). Wykorzystanie niektórych funkcji wymaga zainstalowania (lub uruchomienia) dodatkowych bibliotek: Matlab (Simulink, Control), Scilab (Xcos), Octave (Control, Signal).

Komputerowe wspomaganie obliczeń w zakresie omawianym w podręczniku można podzielić na dwa obszary – rozwiązywanie zadań algebraicznych oraz równań różniczkowych. Programy obliczeniowe można również wykorzystać do weryfikacji przekształceń analitycznych.

### 1.5.2. Rozwiązywanie problemów algebraicznych

Elementarnym sposobem wykorzystania programów obliczeniowych jest rozwiązywanie problemów algebraicznych, takich jak wyznaczanie pierwiastków wielomianu czy rozwiązywanie liniowych układów równań. Mogą być one zrealizowane w środowisku programów symulacyjnych, ale też innych programów obliczeniowych, takich jak Mathematica lub dowolny program wspomagający obliczenia algebraiczne.

Do rozwiązywania wielomianów programy obliczeniowe stosują metody numeryczne niezależnie od stopnia wielomianu, co może powodować pewne różnice w stosunku do wartości pierwiastków wielomianów stopnia  $1 \div 4$ , wyznaczonych na podstawie wzorów. Wyznaczanie pierwiastków wielomianu polega zazwyczaj na użyciu odpowiedniej funkcji (tabela 1-1).

Tabela 1-1. Funkcje wyznaczania pierwiastków wielomianu

|             | Matlab/Scilab/Octave         |
|-------------|------------------------------|
| Pierwiastki | roots([an, ..., a2, a1, a0]) |

Numeryczne rozwiązanie układu równań w środowisku Matlab, Scilab, Octave jest bardzo proste, ponieważ wystarczy zdefiniować macierz **A** i wektor **b** oraz wpisać wyrażenie (1-9), aby w wyniku uzyskać wektor rozwiązania **x** (tabela 1-2).

Tabela 1-2. Rozwiązanie układu równań

|                    | Matlab/Scilab/Octave                                   |
|--------------------|--------------------------------------------------------|
| Definicja macierzy | $A = [a_{11}, a_{12}; a_{21}, a_{22}]; b = [b_1; b_2]$ |
| Rozwiązanie        | $x = \text{inv}(A) * b$                                |
| Rozwiązanie        | $x = A^{(-1)} * b$                                     |
| Rozwiązanie        | $x = A \setminus b$                                    |

1.5.3. Badanie równań różniczkowych

Podstawowym wyróżnikiem programów symulacyjnych jest możliwość rozwiązywania równań różniczkowych za pomocą algorytmów całkowania numerycznego. Najprostszą metodą jest zapisanie równań różniczkowych w pliku funkcyjnym i użycie funkcji, która realizuje algorytm całkowania. W ten sposób można rozwiązywać zarówno równania liniowe, jak i nieliniowe, ale tylko równania pierwszego rzędu lub układy takich równań. Jako przykład zastosowania metody przedstawiono rozwiązanie układu równań Lotki–Volterry, natomiast sposoby przygotowania w odpowiedniej formie są przedmiotem kolejnych rozdziałów podręcznika.

**Przykład.** Numeryczne rozwiązanie układu równań:

$$\begin{cases} \dot{V}(t) = r_v V(t) - aV(t)P(t) \\ \dot{P}(t) = baV(t)P(t) - r_{sp}P(t) \end{cases} \tag{1-36}$$

Równania należy zapisać w pliku funkcyjnym, zgodnie z zasadami określonymi przez dany program symulacyjny (tabela 1-3).

Tabela 1-3. Funkcje definiujące układ (1-36)

| Matlab / Octave                                                                                                                                                            | Scilab                                                                                                                                                            |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| plik lv_model.m                                                                                                                                                            | plik lv_model.sce                                                                                                                                                 |
| <pre>function xp = lv_model(t, x) global a; global b; global Rrv; global Rsp; xp = zeros(2,1); xp(1) = Rrv*x(1) - a*x(1)*x(2); xp(2) = a*b*x(1)*x(2) - Rsp*x(2); end</pre> | <pre>function [xp]=lv_model(t, x) global a;global b; global Rrv, global Rsp;  xp(1) = Rrv*x(1) - a*x(1)*x(2); xp(2) = a*b*x(1)*x(2) - Rsp*x(2); endfunction</pre> |

Uruchomienie symulacji następuje za pomocą jednej z wybranych funkcji – Matlab, Scilab i Octave udostępniają różne algorytmy całkowania, które umożliwiają osiągnięcie kompromisu między dokładnością i czasem trwania obliczeń. Symulację wykonuje się bezpośrednio w oknie komend lub w skrypcie (tabela 1-4).

Tabela 1-4. Przykład symulacji z wykorzystaniem funkcji definiującej model dynamiki

| Matlab / Octave                                                                                                                                                                                     | Scilab                                                                                                                                                                                                                                                              |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <pre>global a; global b; global Rrv; global Rsp; a=0.1;b=0.2;Rrv=0.2; Rsp=0.2; tend=100;          %czas symulacji x0 = [10,10]; [T,x]=ode45('lv_model',[0 tend], x0); plot( x(:,1), x(:,2) );</pre> | <pre>exec('lv_model.sce'); //wczytanie modelu global a;global b; global Rrv, global Rsp; a=0.1;b=0.2;Rrv=0.2; Rsp=0.2; tend=100          //czas symulacji x0 = [10; 10]; t =0:tend [x] = ode(x0, 0, t, lv_model); plot( t, x(1,:), 'b');plot( t, x(2,:), 'g')</pre> |

Poza algorytmami całkowania numerycznego programy symulacyjne udostępniają również wiele innych funkcji obliczeniowych i graficznych oraz tworzą środowisko

do pisania własnych programów (skryptów i funkcji). Funkcje wspomagające inne typowe zadania obliczeniowe są omawiane podczas opisywania poszczególnych badań ( $\rightarrow$  5, 8.3, 15).

#### 1.5.4. Weryfikacja przekształceń analitycznych

Zastosowanie programów wspomagających obliczenia znacznie ułatwia prowadzenie badań o charakterze doświadczalnym, ale to badania analityczne dostarczają dowodów umożliwiających uogólnienie rezultatów badań doświadczalnych. Zastosowanie metod analitycznych jest bardzo cenne, ale ich realizacja wiąże się ze znacznym prawdopodobieństwem popełnienia błędu. Podstawowe metody weryfikacji poprawności przekształceń to zgodność jednostek na każdym etapie przekształceń, realizacja zadania różnymi metodami (wymagającymi wykonania różnych przekształceń), porównywanie różnych parametrów opisujących te same własności. Do kontroli można wykorzystać również program obliczeniowy, chociaż nie realizuje on operacji symbolicznych, na przykład przez porównanie wyników (wykresów) uzyskanych na podstawie rozwiązań analitycznych oraz wygenerowanych przez specjalistyczne funkcje. W szczególności dotyczy to rozwiązań równań różniczkowych wyznaczonych analitycznie i za pomocą badań symulacyjnych. Z kolei w przypadku gdy badany problem jest opisany w ogólny sposób (symbolicznie) lub nie ma odpowiedniej funkcji w programie obliczeniowym, można wykonać weryfikację na wartościach testowych.

## 2. Podstawy konstrukcji modeli dynamiki układów

*czyli skąd się biorą równania różniczkowe*

### 2.1. Ogólne zasady konstrukcji modeli dynamiki

Punktem wyjścia do opisu i analizowania dynamiki układów będą elementarne modele wybranych zjawisk fizycznych. Zastosowanie takich modeli nie ogranicza się do prostych obiektów. Modelowanie prostych przypadków pomaga zrozumieć przyczyny i mechanizmy zjawisk dynamicznych, a uzyskane modele można poddać pełnemu zakresowi badań analitycznych. Modelowanie opiera się na sformułowaniu założeń i konstrukcji wyrażeń matematycznych, które zapewnią dokładność wystarczającą do danego zastosowania.

Jedną z podstawowych metod modelowania analitycznego jest opis obiektu na podstawie równań bilansowych wielkości podlegających prawom zachowania, czyli takich jak masa i energia. Bilanse są konstruowane dla najbardziej znaczących „magazynów”, czyli makroskopowych obszarów układu, które mają zdolność magazynowania określonej wielkości. Każdy bilans opisuje chwilową zmianę zawartości magazynu w czasie, czyli pochodną:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \sum_i (\pm f_i(t)) \pm f_g(t) \rightarrow \dot{x}(t) = \sum_i (\pm f_i(t)) \pm f_g(t), \quad (2-1)$$

gdzie:  $x(t)$  – wielkość podlegająca bilansowaniu (masa, energia),  $f_i(t)$  – strumień bilansowanej wielkości dopływające/odpływające (+/–) z magazynu,  $f_g(t)$  – strumień bilansowanej wielkości generowany/zużywany (+/–) wewnątrz magazynu (np. w wyniku procesów chemicznych).

Modele konstruowane w ten sposób opierają się równaniach różniczkowych zwyczajnych. Wielkości  $x(t)$  opisujące stan magazynów są nazywane **zmiennymi stanu** i zazwyczaj są to równocześnie **zmienne wyjściowe** układu<sup>1</sup>. Po ułożeniu równań bilansowych dla wszystkich magazynów, należy sprawdzić czy wszystkie zmienne w równaniach, poza zmiennymi stanu, są **zmiennymi wejściowymi**, to znaczy, że ich wartości są ustalane na zewnątrz układu (nie zależą od tego, co się dzieje w układzie). Jeśli w układzie równań są zmienne, które nie są zmiennymi stanu i nie można ich uznać za wejścia, to nadmiarowe zmienne należy wyeliminować za pomocą dodatkowych zależności – będą to równania algebraiczne, na przykład wynikające z konstrukcji układu. Model jest jednoznacznie określony (kompletny), jeśli zawiera tyle niezależnych równań bilansowych, ile jest zmiennych wyjściowych, a pozostałe zmienne są zmiennymi wejściowymi. **Model dynamiki układu** stanowi komplet równań różniczkowych, opisujących chwilowe (dynamiczne) bilanse magazynów tego układu. Uproszczenie modelu dynamiki, polegające na wyzerowaniu wszystkich pochodnych, prowadzi do **statycznego modelu układu**. Układ równań stanowiący model statyczny może być oznaczony lub nieoznaczony (w szczególnych przypadkach).

<sup>1</sup> w dalszej części (→ 8) nastąpi formalne rozróżnienie zmiennych stanu i wyjściowych

Konstrukcja modelu obejmuje nie tylko skompletowanie założeń i równań bilansowych, ale również wyznaczenie wartości wszystkich parametrów występujących w równaniach. W tym celu można wykorzystywać informacje o wymiarach geometrycznych i własnościach substancji lub o dostępnych pomiarach zmiennych wejściowych i wyjściowych. W praktyce do wyznaczania lub weryfikacji wartości parametrów wykorzystuje się różne źródła danych, należy więc zwrócić uwagę na zgodność jednostek, co umożliwia rozwiązanie wszelkich wątpliwości wynikających z różnych nazw i oznaczeń stosowanych w literaturze.

Konstrukcje modeli z rozdziałów 2.2÷2.6 wymagają przyjęcia wielu istotnych założeń, choć na tym etapie większość z nich nie została wymieniona. Założenia te umożliwiają konstruowanie bardzo prostych modeli, które są wykorzystywane do ilustracji badań dynamiki. Dokładniejszą analizę poszczególnych zjawisk zawiera na przykład praca [3] lub specjalistyczna literatura z danej dziedziny.

## 2.2. Zbiorniki – otwarte układy hydrauliczne

### 2.2.1. Konstrukcja modeli

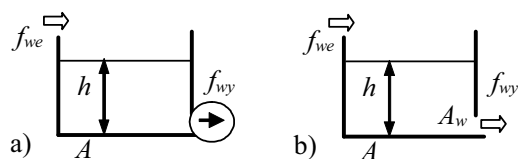
Najprostsze modele dynamiki konstruowane dla obiektów hydraulicznych występują w przypadku układów składających się z otwartych, sztywnych zbiorników, przez które przepływa jednorodna ciecz niezbyt lepka i niezbyt gęsta, tak jak na przykład woda. Takie założenia umożliwiają bilansowanie objętości cieczy zamiast jej masy i pomijanie wpływu tarcia. Konstrukcja modeli opiera się na dynamicznym bilansie objętości cieczy ( $V$ ) w każdym zbiorniku – zmiana objętości w czasie jest wynikiem bilansu strumieni wpływających i wypływających ( $f_i$ ) do/ze zbiornika:

$$\frac{dV(t)}{dt} = \sum \pm f_i(t), \quad [\text{m}^3/\text{s}]. \quad (2-2)$$

Jeśli bilans opisuje zbiornik o płaskim dnie i powierzchni  $A$  i pionowych ścianach, to znaczy, że zamiast objętości  $V$  można podstawić prostą funkcję wysokości  $h$ , czyli:

$$A \frac{dh(t)}{dt} = \sum \pm f_i(t). \quad (2-3)$$

Model dynamiki pojedynczego zbiornika (rys. 2-1) opiera się na jednym równaniu różniczkowym:



Rys. 2-1. Zbiornik: a) z pompą,  
b) ze swobodnym wypływem

$$A \dot{h}(t) = f_{we}(t) - f_{wy}(t). \quad (2-4)$$

W zbiorniku (a) o wypływie cieczy  $f_{wy}$  decyduje pompa, więc jedno równanie (2-4) stanowi kompletny model zbiornika (a) ze zmienną stanu  $h$  i zmiennymi wejściowymi  $f_{we}$  i  $f_{wy}$ . W zbiorniku (b) natomiast ma miejsce swobod-

ny wypływ cieczy  $f_{wy}$  przez otwór w dnie (blisko dna), który zależy od powierzchni otworu  $A_w$  i wysokości cieczy  $h$ :

$$f_{wy}(t) = A_w \sqrt{2gh(t)} \approx ah(t). \quad (2-5)$$

Dokładny wzór na swobodny wypływ jest nieliniowy, więc często jest stosowane jego liniowe przybliżenie (sposób wyznaczenia współczynnika  $a$  zostanie opisany w podrozdziale 3.2). Jeśli w zależności (2-4) uwzględnimy dokładny wzór  $f_{wy}$ , to uzyskujemy nieliniowy model zbiornika:

$$A\dot{h}(t) = f_{we}(t) - A_w \sqrt{2gh(t)}, \quad (2-6)$$

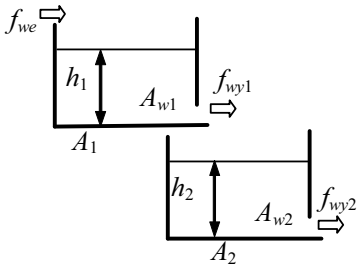
a wykorzystując wzór przybliżony – model liniowy:

$$A\dot{h}(t) = f_{we}(t) - ah(t). \quad (2-7)$$

W obu przypadkach aktualna wysokość cieczy  $h$  jest zmienną stanu (zmienną wyjściową), natomiast strumień wpływu  $f_{we}$  jest zmienną wejściową układu.

W przypadku kaskady zbiorników model dynamiki zawiera tyle równań różniczkowych, ile jest zbiorników, a zmiennymi stanu są wysokości cieczy w poszczególnych zbiornikach. Kaskada na rysunku 2-2 składa się z dwóch zbiorników, więc jej model obejmuje dwa równania bilansowe:

$$\begin{cases} A_1 \dot{h}_1(t) = f_{we}(t) - f_{wy1}(t) \\ A_2 \dot{h}_2(t) = f_{wy1}(t) - f_{wy2}(t) \end{cases}, \quad (2-8)$$



gdzie wysokości  $h_1$  i  $h_2$  są zmiennymi stanu, a przepływy  $f_{wy1}$  i  $f_{wy2}$  wynikają ze wzoru na swobodny wypływ (2-5). Ostatecznie kompletny, dokładny model dynamiki kaskady ma postać:

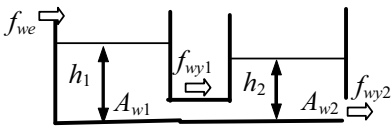
$$\begin{cases} A_1 \dot{h}_1(t) = f_{we}(t) - A_{w1} \sqrt{2gh_1(t)} \\ A_2 \dot{h}_2(t) = A_{w1} \sqrt{2gh_1(t)} - A_{w2} \sqrt{2gh_2(t)} \end{cases}, \quad (2-9)$$

Rys. 2-2. Zbiorniki niepołączone (kaskada niewspółdziałająca)

gdzie  $f_{we}$  jest jedyną zmienną wejściową. Opisując swobodne wypływy  $f_{wy1}$  i  $f_{wy2}$  przybliżoną liniową zależnością (2-5), można uzyskać model liniowy.

Swobodny wypływ cieczy ze zbiornika może następować również przez połączenie z kolejnym zbiornikiem (rys. 2-3). Wówczas strumień wypływu zależy od powierzchni otworu  $A_{w1}$  i różnicy wysokości cieczy w połączonych zbiornikach:

$$\begin{aligned} f_{wy1}(t) &= A_{w1} \sqrt{2g(h_1(t) - h_2(t))}, \\ f_{wy1}(t) &\approx a_1(h_1(t) - h_2(t)). \end{aligned} \quad (2-10)$$



Rys. 2-3. Zbiorniki połączone przewodem (kaskada współdziałająca)

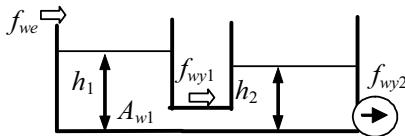
Ta zależność dotyczy tylko przepływu między zbiornikami, ponieważ wypływ  $f_{wy2}$  odbywa się na zewnątrz, zgodnie ze wzorem (2-5).

Model dynamiki tego układu opiera się również na dwóch równaniach bilansowych (2-8), ale z zastosowaniem wyrażenia (2-10). Dokładny model jest nieliniowy:

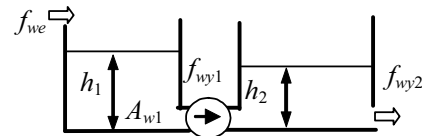
$$\begin{cases} A_1 \dot{h}_1(t) = f_{we}(t) - A_{w1} \sqrt{2g(h_1(t) - h_2(t))} \\ A_2 \dot{h}_2(t) = A_{w1} \sqrt{2g(h_1(t) - h_2(t))} - A_{w2} \sqrt{2gh_2(t)} \end{cases} \quad (2-11)$$

Model układu będzie liniowy, jeśli do opisu swobodnego wypływu zostaną zastosowane przybliżone, liniowe zależności (2-5), (2-10).

Przepływ cieczy w kaskadzie może być również wymuszany za pomocą pomp o sterowanej wydajności, niezależnej od poziomu cieczy w zbiornikach.



Rys. 2-4. Zbiorniki z pompą na końcu



Rys. 2-5. Zbiorniki z pompą między zbiornikami

Taki przepływ jest traktowany jako zmienna wejściowa układu, niezależnie od miejsca zastosowania pompy. Stąd kompletny model układu z rysunku 2-4 ma postać:

$$\begin{cases} A_1 \dot{h}_1(t) = f_{we}(t) - A_{w1} \sqrt{2g(h_1(t) - h_2(t))} \\ A_2 \dot{h}_2(t) = A_{w1} \sqrt{2g(h_1(t) - h_2(t))} - f_{wy2}(t) \end{cases} \quad (2-12)$$

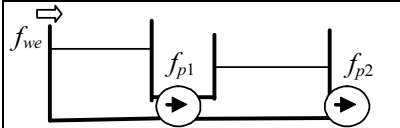
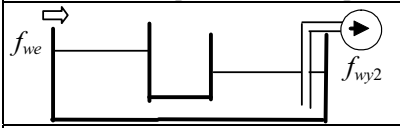
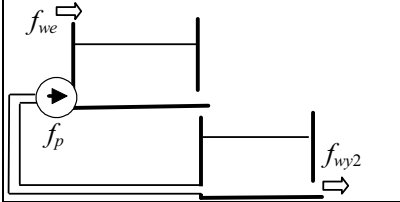
gdzie zmiennymi wejściowymi są  $f_{we}$  i  $f_{wy2}$ ; a model układu z rysunku 2-5 to układ:

$$\begin{cases} A_1 \dot{h}_1(t) = f_{we}(t) - f_{wy1}(t) \\ A_2 \dot{h}_2(t) = f_{wy1}(t) - A_{w2} \sqrt{2gh_2(t)} \end{cases} \quad (2-13)$$

gdzie zmiennymi wejściowymi są  $f_{we}$  i  $f_{wy1}$ .

Na podstawie powyższych przykładów można wnioskować, że dla typowych otwartych układów hydraulicznych należy się spodziewać układów równań pierwszego rzędu i są to zazwyczaj równania nieliniowe. Dysponując zbiornikami oraz pompami o sterowanej wydajności, można konstruować obiekty o różnych własnościach. Tabela 2-1 zawiera przykłady układów dwóch zbiorników – w każdym z przypadków zmiennymi wyjściowymi jest poziom cieczy w zbiornikach ( $h_1$ ,  $h_2$ ), a pozostałe zmienne spełniają warunek zmiennych wejściowych. Na obecnym etapie rozważań przyjmujemy, że wyznaczone modele będą używane tylko w przypadku, gdy zbiorniki nie są puste, a jeśli model zawiera wyrażenie  $A_w \sqrt{2g(h_1(t) - h_2(t))}$ , to spełniony jest warunek  $h_1(t) \geq h_2(t)$ . W przybliżonych modelach liniowych zamiast pierwiastka występuje wyrażenie  $a(h_1(t) - h_2(t))$ , które także wynika z założenia  $h_1(t) \geq h_2(t)$ , ale można je wykonać również gdy  $h_1(t) < h_2(t)$  i model też jest poprawny.

Tabela 2-1. Przykłady obiektów typu otwarte układy hydrauliczne

|                                                                                   |                                                                                                                                                                           |
|-----------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  | $\begin{cases} A_1 \dot{h}_1(t) = f_{we}(t) - f_{p1}(t) \\ A_2 \dot{h}_2(t) = f_{p1}(t) - f_{p2}(t) \end{cases}$                                                          |
|  | $\begin{cases} A_1 \dot{h}_1(t) = f_{we}(t) - A_{w1} \sqrt{2g(h_1(t) - h_2(t))} \\ A_2 \dot{h}_2(t) = A_{w1} \sqrt{2g(h_1(t) - h_2(t))} - f_{wy2}(t) \end{cases}$         |
|  | $\begin{cases} A_1 \dot{h}_1(t) = f_{we}(t) + f_p(t) - A_{w1} \sqrt{2gh_1(t)} \\ A_2 \dot{h}_2(t) = A_{w1} \sqrt{2gh_1(t)} - f_p(t) - A_{w2} \sqrt{2gh_2(t)} \end{cases}$ |

### 2.2.2. Jednostki i identyfikacja wartości parametrów

Jednostką równań bilansowych w otwartych układach hydraulicznych jest  $\text{m}^3/\text{s}$ . Jednostki zmiennych i parametrów to:  $h$  [m],  $f$  [ $\text{m}^3/\text{s}$ ],  $V$  [ $\text{m}^3$ ],  $A$  [ $\text{m}^2$ ],  $A_w$  [ $\text{m}^2$ ]. Zgodność jednostek w równaniu bilansowym można sprawdzić wykonując podstawienie, jak na przykład jednostki w modelu (2-6):

$$A \dot{h}(t) = f_{we}(t) - A_w \sqrt{2gh(t)},$$

$$\text{m}^2 \frac{\text{m}}{\text{s}} = \frac{\text{m}^3}{\text{s}} - \text{m}^2 \sqrt{\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \text{m} \rightarrow \frac{\text{m}^3}{\text{s}}.$$

Identyfikację wartości parametrów modeli hydraulicznych można łatwo wykonać na podstawie wymiarów geometrycznych zbiorników i otworów.

Ze względu na intuicyjność działania i proste wyznaczanie parametrów, modele otwartych układów hydraulicznych są podstawowymi przykładami w podręczniku wykorzystywanymi do ilustracji różnych metod badawczych.

Na potrzeby prezentacji przykładowych badań różnych konfiguracji zbiorników ( $\rightarrow$  2.2.1), opisywanych w podręczniku założono, że wszystkie zbiorniki są takie same – powierzchnia dna  $A = 2\text{m}^2$ , a powierzchnia otworu  $A_w = 10\%A$ .

## 2.3. Obiekty cieplne – układy termokinetyczne

### 2.3.1. Konstrukcja modeli

Pierwszym krokiem w konstrukcji prostych modeli obiektów cieplnych jest wskazanie najbardziej znaczących magazynów ciepła ( $Q$ ), czyli elementów układu, które akumuluje ciepło. Opisywane modele wykorzystują założenie o doskonałym mieszanii, więc cała objętość magazynu jest opisywana za pomocą jednej temperatury  $T$ , która wynika

z faktycznego mieszania się substancji lub z uśrednienia temperatury wewnątrz magazynu. „Ilość ciepła” w magazynie zależy od ilości, własności i temperatury substancji:

$$Q(t) = c_p \rho V T(t) = C_V T(t), [J = W \cdot s], \quad (2-14)$$

gdzie  $C_V$  oznacza pojemność cieplną magazynu – stały parametr zależny od ciepła właściwego  $c_p$ , gęstości  $\rho$  i objętości  $V$  substancji wypełniającej magazyn. Zmiana zawartości magazynu w czasie (dynamiczny bilans ciepła) wynika z bilansu źródeł i strat ciepła ( $P_i$ ) w danym magazynie:

$$\frac{dQ(t)}{dt} = C_V \frac{dT(t)}{dt} = \sum \pm P_i(t), [W]. \quad (2-15)$$

Prostym źródłem ciepła w układzie jest na przykład grzałka elektryczna z możliwością sterowania mocą ( $P_g$ ), natomiast typową przyczyną strat ciepła jest przenikanie ciepła przez przegrody (ściany)<sup>1</sup>. Taki prosty obiekt przedstawiono na rysunku 2-6. Zakładając, że dominującym magazynem ciepła w tym układzie jest powietrze w pomieszczeniu, to do opisu dynamiki układu wystarczy równanie:

$$C_v \dot{T}_{wew}(t) = P_g(t) - K_c (T_{wew}(t) - T_{zew}(t)), \quad (2-16)$$

gdzie współczynnik przenikania ciepła przegrody  $K_c$  zależy od powierzchni  $A$ , grubości  $a_g$  oraz współczynnika przenikalności cieplnej materiału  $\lambda$ :

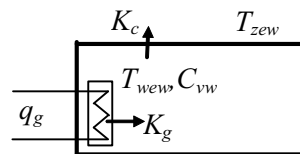
Rys. 2-6. Pomieszczenie z grzejnikiem elektrycznym

$$K_c = \lambda A / a_g, [W/deg]. \quad (2-17)$$

Zmienną wyjściową modelu jest temperatura  $T_{wew}$  opisująca aktualny stan magazynu. Pozostałe zmienne (moc  $P_g$  i temperatura zewnętrzna  $T_{zew}$ ) są zmiennymi wejściowymi, gdyż ich wartość nie zależy od stanu obiektu. Model jest liniowy.

Układ cieplny zawierający kilka znaczących magazynów wymaga ułożenia kilku równań bilansowych – model zawiera tyle równań różniczkowych, ile jest znaczących magazynów ciepła w układzie. Wybór znaczących magazynów następuje na podstawie ich pojemności cieplnych i jest ustalany na etapie formułowania założeń dla modelu. Zmiennymi wyjściowymi są zmienne stanu, to znaczy zmienne opisujące temperatury poszczególnych magazynów. Pozostałe zmienne modelu mają zazwyczaj charakter wejść (są wymuszane na zewnątrz układu).

Założmy, że grzejnik dostarczający ciepło także ma znaczną pojemność cieplną ( $C_{vg}$ ), co wynika nie tyle z jego objętości, ile z substancji wypełniającej grzejnik (np. olej). Wówczas grzałka ogrzewa wnętrze grzejnika, natomiast grzejnik oddaje ciepło przez ściany do pomieszczenia (rys. 2-7).



Rys. 2-7. Pomieszczenie z grzejnikiem olejowym

<sup>1</sup> obejmuje konwekcję (wnikanie/przejmowanie) ciepła z cieczy/gazu do przegrody, przewodzenie ciepła przez przegrodę i konwekcję z przegrody do cieczy/gazu.

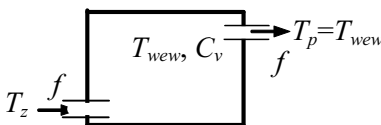
Model układu zawiera dwa równania:

$$\begin{cases} C_{vg} \dot{T}_g(t) = q_g(t) - K_g(T_g(t) - T_{wew}(t)) \\ C_{vw} \dot{T}_{wew}(t) = K_g(T_g(t) - T_{wew}(t)) - K_c(T_{wew}(t) - T_{zew}(t)) \end{cases}, \quad (2-18)$$

gdzie  $T_{wew}$  i  $T_g$  opisują odpowiednio uśrednioną temperaturę wewnątrz pomieszczenia i wewnątrz grzejnika, i są zmiennymi wyjściowymi. W rzeczywistych warunkach istotnym magazynem ciepła są także ściany pomieszczeń (szczególnie grube mury z cegły) – model (2-18) należy rozbudować o równanie akumulacji ciepła w ścianach:

$$\begin{cases} C_{vg} \dot{T}_g(t) = q_g(t) - K_g(T_g(t) - T_{wew}(t)) \\ C_{vw} \dot{T}_{wew}(t) = K_g(T_g(t) - T_{wew}(t)) - K_{c1}(T_{wew}(t) - T_s(t)) \\ C_{vs} \dot{T}_s(t) = K_{c1}(T_{wew}(t) - T_s(t)) - K_{c2}(T_s(t) - T_{zew}(t)) \end{cases}. \quad (2-19)$$

Innym typowym sposobem ogrzewania jest przenoszenie ciepła przez nośnik ciepła, jak na przykład nawiew ciepłego powietrza do pomieszczenia, dopływ gorącej wody do grzejnika. Rysunek 2-8 przedstawia przykład izolowanego pomieszczenia z nawiewem ciepłego powietrza ( $f$ , m<sup>3</sup>/s). Przy założeniu, że ciepło jest akumulowane tylko przez powietrze wewnątrz, model obiektu ma postać:



$C_v \dot{T}_{wew}(t) = c_p \rho f(t)(T_z(t) - T_{wew}(t)), \quad (2-20)$

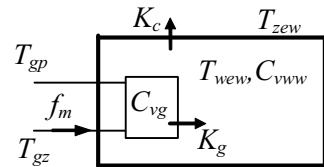
lub, stosując przepływ masowy ( $f_m$ , kg/s):

$$C_v \dot{T}_{wew}(t) = c_p f_m(t)(T_z(t) - T_{wew}(t)), \quad (2-21)$$

Rys. 2-8. Pomieszczenie z nawiewem

gdzie  $c_p \rho f(t) T_z(t) = c_p f_m(t) T_z(t)$  to strumień ciepła dostarczany przez powietrze, natomiast  $c_p \rho f(t) T_{wew}(t) = c_p f_m(t) T_{wew}(t)$  – strumień ciepła wyprowadzany przez powietrze. Założenie o doskonałym mieszaniu powoduje, że temperatura nośnika wypływającego ( $T_p$ ) jest równa temperaturze nośnika wewnątrz ( $T_{wew}$ ). Zmienną wyjściową modelu jest temperatura  $T_{wew}$ , a zmiennymi wejściowymi temperatura  $T_z$  i przepływ  $f$ . Jeśli przepływ  $f$  jest zmienny, to model jest nieliniowy, ale jeśli przepływ jest stały, to jest parametrem obiektu, a model jest liniowy.

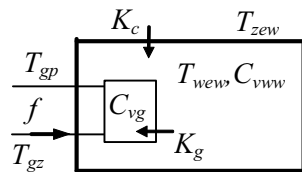
Kolejny przykład obiektu (rys. 2-9) łączy wykorzystanie nośnika ciepła i akumulację ciepła w grzejniku – przez grzejnik przepływa gorąca woda i ogrzewa pomieszczenie, pokrywając stratę ciepła przez ściany (kierunki przepływu ciepła oznaczono strzałkami). Zakładając, że ciepło jest magazynowane przez wodę w grzejniku i powietrze w pomieszczeniu, i że w obu tych magazynach panują warunki doskonałego mieszania, model pomieszczenia składa się z dwóch równań:



Rys. 2-9. Pomieszczenie z grzejnikiem wodnym

$$\begin{cases} C_{vg} \dot{T}_{gp}(t) = c_{pw} f_m(t) T_{gz}(t) - c_{pw} f_m(t) T_{gp}(t) - K_g(T_{gp}(t) - T_{wew}(t)) \\ C_{vw} \dot{T}_{wew}(t) = K_g(T_{gp}(t) - T_{wew}(t)) - K_c(T_{wew}(t) - T_{zew}(t)) \end{cases}. \quad (2-22)$$

Dla ułatwienia konstrukcji równań bilansowych warto wstępnie założyć kierunki przepływu ciepła przez przegrody. Zakładając, że  $T_{gp} > T_{wew}$  określamy kierunek strzałki ( $T_{gp} \rightarrow T_{wew}$ ) i składnik opisujący strumień ciepła  $K_g(T_{gp} - T_{wew})$ , natomiast dodawanie lub odejmowanie tego składnika wynika z interpretacji danego równania bilansowego. Taka metoda konstrukcji zapewnia poprawność równań, nawet po zmianie kierunków przepływu ciepła. Na przykład, rozważmy pomieszczenie z grzejnikiem (rys. 2-10) zakładając, że czynnik w instalacji ma temperaturę kilku stopni (tzw. woda lodowa). Pomieszczenie jest chłodzone ( $T_{wew} > T_{gp}$ ) – zmieni się kierunek przepływu ciepła i składnik opisujący strumień ciepła  $K_g(T_{wew} - T_{gp})$ . Równania bilansowe dla założonych kierunków przepływu ciepła mają postać:



Rys. 2-10. Pomieszczenie z grzejnikiem chłodzącym

$$\begin{cases} C_{vw} \dot{T}_{wew}(t) = K_c (T_{zew}(t) - T_{wew}(t)) - K_g (T_{wew}(t) - T_{gp}(t)) \\ C_{vg} \dot{T}_{gp}(t) = K_g (T_{wew}(t) - T_{gp}(t)) + c_{pw} f_m(t) T_{gz}(t) - c_{pw} f_m(t) T_{gp}(t) \end{cases} \quad (2-23)$$

Model ogrzewania (2-22) i chłodzenia (2-23) są identyczne.

Kolejne przykłady, przedstawione w tabeli 2-2, mają wspólną cechę – zawierają dwa magazyny ciepła, ale różne są relacje między tymi magazynami ciepła.

Tabela 2-2. Przykłady obiektów cieplnych (termokinetycznych)

|  |                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|--|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  | $\begin{cases} C_{vw} \dot{T}_{wew}(t) = P_g(t) - K_p (T_{wew}(t) - T_p(t)) - \\ \quad - K_1 (T_{wew}(t) - T_{zew}(t)) \\ C_{vp} \dot{T}_p(t) = K_p (T_{wew}(t) - T_p(t)) - K_2 (T_p(t) - T_{zew}(t)) + \\ \quad + c_p f_m(t) (T_{zew}(t) - T_p(t)) \end{cases}$   |
|  | $\begin{cases} C_{v1} \dot{T}_1(t) = P_g(t) - K_1 (T_1(t) - T_2(t)) \\ C_{v2} \dot{T}_2(t) = c_p f_m(t) (T_w(t) - T_2(t)) + K_1 (T_1(t) - T_2(t)) - \\ \quad - K_2 (T_2(t) + T_{zew}(t)) \end{cases}$                                                              |
|  | $\begin{cases} C_{v1} \dot{T}_1(t) = c_p f_m(t) (T_w(t) - T_1(t)) - K_1 (T_1(t) - T_{zew}(t)) \\ C_{v2} \dot{T}_2(t) = c_p f_m(t) (T_1(t) - T_2(t)) - K_2 (T_2(t) - T_{zew}(t)) \end{cases}$                                                                       |
|  | $\begin{cases} C_{v1} \dot{T}_1(t) = c_p f_m(t) (T_w(t) - T_1(t)) - K_1 (T_1(t) - T_{zew}(t)) - \\ \quad - K_3 (T_1(t) - T_2(t)) \\ C_{v2} \dot{T}_2(t) = c_p f_m(t) (T_1(t) - T_2(t)) - K_2 (T_2(t) - T_{zew}(t)) + \\ \quad + K_3 (T_1(t) - T_2(t)) \end{cases}$ |

Z przedstawionej zasady konstrukcji równań bilansowych i przykładów układów cieplnych wynika, że modele takich obiektów mają postać układu równań pierwszego

rzędu. Modele są nieliniowe, jeśli w układzie występuje przenoszenie ciepła przez nośnik o zmiennym natężeniu przepływu.

### 2.3.2. Jednostki i identyfikacja wartości parametrów

Jednostką równań bilansowych układów termokinetycznych jest wat (W), natomiast jednostki zmiennych i parametrów to:

$$Q [J = \text{Ws}], P [W], T [^{\circ}\text{C}], f [\text{m}^3/\text{s}], f_m [\text{kg}/\text{s}], c_p [J/(\text{kg} \cdot \text{K})], \rho [\text{kg}/\text{m}^3], \lambda [W/(\text{m} \cdot \text{K})], \\ C_v = c_p \rho V [J/(\text{kg} \cdot \text{K}) \cdot \text{kg}/\text{m}^3 \cdot \text{m}^3 = J/\text{K}], K_c = \lambda A / a_g, [W/(\text{m} \cdot \text{K}) \cdot \text{m}^2 / \text{m} = W/\text{K}].$$

W równaniach bilansowych zawsze występują różnice temperatur, więc zamiast skali Kelwina (K) można stosować skalę Celsjusza ( $^{\circ}\text{C}$ ). Z kolei w modelach, które zawierają opis przepływu nośnika ciepła można wybrać przepływ objętościowy  $f$ , lub masowy  $f_m = \rho f$ . Niezależnie od przyjętych jednostek, w każdym równaniu bilansowym i na każdym etapie przekształceń musi być zachowana zgodność, na przykład:

$$C_v \dot{T}_w(t) = P_g(t) - K_c (T_w(t) - T_{zew}(t)),$$

$$\frac{J}{K} \frac{^{\circ}\text{C}}{s} = W - \frac{W}{^{\circ}\text{C}} (^{\circ}\text{C} - ^{\circ}\text{C}) \rightarrow W.$$

Wartości parametrów w modelach cieplnych można wyznaczyć na podstawie wymiarów geometrycznych magazynów ciepła i własności fizycznych substancji, np.: pojemności cieplne (2-14), współczynniki przenikania przegród (2-17). W przypadku budynków, gdy przegrody nie są jednorodne, to obliczenia parametrów stają się pracochłonne – są one częścią projektu budowlanego w zakresie ogrzewania. Współczynniki strat są obliczane na podstawie powierzchni, konstrukcji i materiału ścian, okien, dachu. To umożliwia wyznaczanie zapotrzebowania budynku na ciepło w tak zwanych warunkach obliczeniowych (nominalnych); w Polsce oznacza to zazwyczaj utrzymanie wewnątrz temperatury  $20^{\circ}\text{C}$  przy temperaturze zewnętrznej  $-20^{\circ}\text{C}$ . Następnie na podstawie zapotrzebowania na ciepło dobiera się odpowiedni typ i wielkość grzejników. Ten złożony projekt można wykorzystać lub odtworzyć, jednak celem modelowania nie jest projektowanie urządzeń, tylko opis obiektu wykonanego zgodnie z projektem. Dlatego w prostych modelach znacznie łatwiejsze jest zastosowanie alternatywnej metody wyznaczenia współczynników przenikania, reprezentujących uśrednione parametry poszczególnych przegród. Metoda polega na wykorzystaniu informacji o wartościach zmiennych w warunkach obliczeniowych ( $T_{zewN}$ ,  $T_{wewN}$ ,  $T_{gzN}$ ,  $T_{gpN}$ ,  $P_{gN}$ ,  $f_N$ , itd.), które są dostępne w projektach budowlanych lub możliwe do wyznaczenia na podstawie pomiarów. Wartości te należy podstawiać układu równań statycznych i rozwiązać ze względu na nieznane współczynniki. Jeśli układ równań jest nieoznaczony (nieznanych współczynników jest więcej niż równań), to można go uzupełnić za pomocą dodatkowych założeń, na przykład na temat relacji między współczynnikami ( $\rightarrow$  3.3.2). Z kolei wartość pojemności cieplnych dla poszczególnych magazynów można zawsze wyznaczyć z definicji (2-14) na podstawie wymiarów i własności materiału

Przykładowe wyniki badań prezentowane w podręczniku dotyczą różnych wariantów ogrzewania pojedynczego pomieszczenia ( $\rightarrow$  2.3.1) i zakładają, że: kubatura pomieszczenia wynosi  $5 \times 10 \times 2.5 \text{ m}^3$ , wewnątrz jest utrzymywana temperatura  $20^\circ\text{C}$ , co przy temperaturze zewnętrznej  $-20^\circ\text{C}$  oznacza zapotrzebowanie na ciepło o wartości 10 kW.

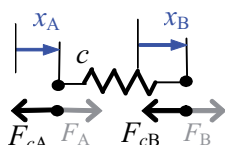
## 2.4. Obiekty mechaniczne

### 2.4.1. Konstrukcja modeli – prosty ruch postępowy

Najprostsze modele dynamiki układów mechanicznych powstają w przypadkach, gdy dotyczą ciał sztywnych poruszających się wzdłuż linii prostej. To umożliwia pomijanie wektorowego charakteru sił – konstrukcja modelu opiera się bilansowaniu wartości sił w określonych punktach układu. Konstrukcję równań bilansowych poprzedza przygotowanie schematu zastępczego, który opisuje działanie układu za pomocą idealnych elementów podstawowych: sprężyn, tłumików i mas oraz sił zewnętrznych.

**Sprężyna** reprezentuje siły sprężystości między dwoma połączeniami (punktami) – zewnętrzna siła akcji przyłożona do danego punktu ( $F_A$ ,  $F_B$ ) powoduje przesunięcie tego punktu, aż do zrównoważenia przez siłę sprężystości (siłę reakcji  $F_{cA}$ ,  $F_{cB}$ ).

Siła reakcji na danym końcu sprężyny jest proporcjonalna do różnicy przesunięć:

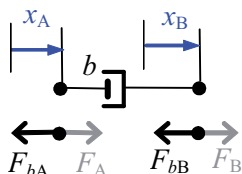


$$\begin{aligned} F_{cA}(t) &= c(x_A(t) - x_B(t)), \\ F_{cB}(t) &= c(x_B(t) - x_A(t)), \end{aligned} \quad (2-24)$$

gdzie:  $x_A(t)$  to aktualne przesunięcie punktu A,  $x_B(t)$  – aktualne przesunięcie punktu B,  $c$  – współczynnik sztywności zależny od konstrukcji i materiału sprężyny.

Rys. 2-11. Sprężyna o sztywności  $c$

**Tłumik** reprezentuje zjawisko tarcia lepkiego (płynnego) podczas ruchu ciała w płynie (ciecz, gaz) lub przy przesuwaniu po warstwie smaru (np. łożysko ślizgowe), które powoduje nieodwracalne przekształcanie energii mechanicznej w ciepło. Zewnętrzna siła akcji ( $F_A$ ,  $F_B$ ) powoduje ruch punktu z prędkością, która wynika z tłumienia/tarcia (siły reakcji  $F_{bA}$ ,  $F_{bB}$ ). Siły reakcji na końcach tłumika zależą od prędkości poruszających się końców tłumika:



$$\begin{aligned} F_{bA}(t) &= b(\dot{x}_A(t) - \dot{x}_B(t)) = b(v_A(t) - v_B(t)), \\ F_{bB}(t) &= b(\dot{x}_B(t) - \dot{x}_A(t)) = b(v_B(t) - v_A(t)), \end{aligned} \quad (2-25)$$

gdzie:  $\dot{x}_A(t) = v_A(t)$  to prędkość punktu A,

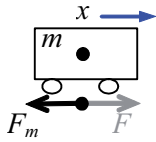
$\dot{x}_B(t) = v_B(t)$  – prędkość punktu B,

$b$  – współczynnik tłumienia, zależny od ruchomych powierzchni, grubości i właściwości płynu.

Rys. 2-12. Tłumik o tłumieniu  $b$

Siła tarcia działająca w przypadku bezpośredniego styku ciał (tarcie suche) nie zależy od prędkości ruchu – ma stałą wartość, zależną od styku (poślizg lub toczenie), siły nacisku i rodzaju powierzchni.

**Masa** jest własnością ciała, która przeciwdziała zmianie prędkości, wymuszonej przez zewnętrzną siłę ( $F$ ). Podstawowy opis nie uwzględnia kształtu ciała i punktu przyłożenia siły – cała masa ciała jest skupiona w jednym punkcie materialnym. Siła reakcji (siła bezwładności  $F_m$ ) w tym punkcie jest proporcjonalna do przyspieszenia:



$$F_m(t) = m\ddot{x}(t) = m\dot{v}(t), \quad (2-26)$$

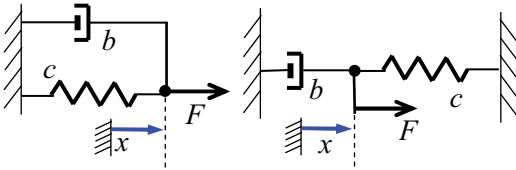
Rys. 2-13. Masa  $m$ 

gdzie:  $\ddot{x}(t) = \dot{v}(t)$  – przyspieszenie,  $m$  – masa.

Konstrukcja modeli układów mechanicznych poruszających się wzdłuż jednego kierunku polega na ułożeniu bilansu sił dla wszystkich punktów bilansowych, które łączą poszczególne elementy schematu i poruszają się z różnymi prędkościami. Po jednej stronie bilansu występują wszystkie zewnętrzne siły akcji ( $F$ ), a po drugiej – suma sił reakcji ( $F_{ri}$ ) wszystkich elementów połączonych z punktem bilansowym:

$$F(t) = \sum \pm F_{ri}(t), [\text{N}]. \quad (2-27)$$

Najprostsze przykłady układów mechanicznych zawierają jeden punkt bilansowy – model zawiera jedno równanie bilansowe. Na przykład połączenie sprężyny i tłumika z jednym usztywnionym końcem (rys. 2-14) jest opisane przez równanie bilansowe sił sprężystości i tarcia oraz siły zewnętrznej:

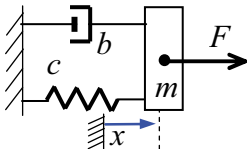


Rys. 2-14. Sprężyna z tłumikiem (siłą arcia

$$F(t) = b\dot{x}(t) + cx(t). \quad (2-28)$$

Przesunięcie  $x$  jest zmienną wyjściową modelu, a zewnętrzna siła  $F$  – zmienną wejściową.

Dla podobnego układu (rys. 2-15) natomiast, w którym występuje jeszcze masa  $m$ , równanie bilansowe sił ma postać:

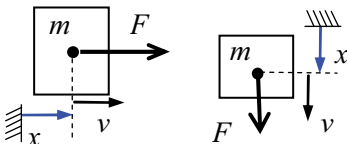


$$F(t) = m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + cx(t). \quad (2-29)$$

Kompletny model układu nadal obejmuje jedno równanie, ale tym razem drugiego rzędu.

Rys. 2-15. Masa, sprężyna i tłumik

Z kolei, jeśli w układzie nie występują siły sprężystości, a jedynie tłumienie (tarcie) i bezwładność, jak na przykład w przypadku ciała poruszającego się w ośrodku gazowym (płynnym), równanie bilansowe:



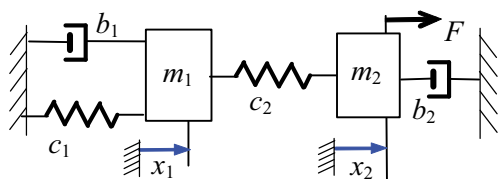
$$F(t) = m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) \quad (2-30)$$

lepiej jest zapisać i analizować, przyjmując jako zmienną wyjściową prędkość  $v$  zamiast przemieszczenia  $x$ :

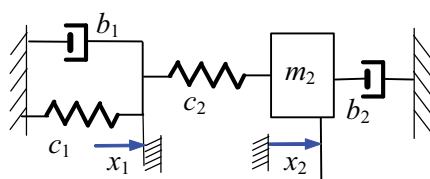
$$F(t) = m\dot{v}(t) + bv(t). \quad (2-31)$$

Rys. 2-16. Ruch ciała w ośrodku płynnym

Punkty bilansowe, dla których należy ułożyć równania różniczkowe, znajdują się często w punktach reprezentujących masy, tak jak na przykład na rysunku 2-17. Występowanie masy nie jest jednak konieczne, co ilustruje rysunek 2-18. Ogólnie można powiedzieć, że punkty bilansowe są wyznaczone przez połączenia końców sprężyn i tłumików.



Rys. 2-17. Dwa punkty i dwie masy



Rys. 2-18. Dwa punkty i jedna masa

W obu powyższych przypadkach występują dwa punkty bilansowe ( $x_1, x_2$ ), które oznaczają jednocześnie zmienne wyjściowe modelu. Pierwszy model stanowi układ dwóch równań:

$$\begin{cases} 0 = m_1 \ddot{x}_1(t) + b_1 \dot{x}_1(t) + c_1 x_1(t) + c_2 (x_1(t) - x_2(t)) \\ F(t) = m_2 \ddot{x}_2(t) + b_2 \dot{x}_2(t) + c_2 (x_2(t) - x_1(t)) \end{cases}, \quad (2-32)$$

gdzie zmienną wejściową jest siła  $F$ . Drugi model to także układ dwóch równań:

$$\begin{cases} 0 = b_1 \dot{x}_1(t) + c_1 x_1(t) + c_2 (x_1(t) - x_2(t)) \\ 0 = m_2 \ddot{x}_2(t) + b_2 \dot{x}_2(t) + c_2 (x_2(t) - x_1(t)) \end{cases}. \quad (2-33)$$

W modelu tym nie występuje również zewnętrzne wymuszenie (nie ma zmiennej wejściowej), ale można badać dynamikę układu, obserwując reakcję wynikającą ze wstępnego naciągnięcia/ściśnięcia sprężyn, czyli warunków początkowych.

Na schematach układów mechanicznych można zaznaczyć kierunki przesunięć punktów bilansowych, jednak nie mają one znaczenia podczas układania równań bilansowych – w bilansie danego punktu zawsze występuje suma sił reakcji, które są proporcjonalne do różnicy położenia (prędkości) końca w punkcie bilansowym i położenia (prędkości) drugiego końca elementu. Punktem odniesienia do wyznaczenia kierunku i wartości przesunięć jest zwykle położenie w stanie spoczynku (brak zewnętrznych sił).

Na podstawie przedstawionych przykładów można zauważyć, że modele układów mechanicznych poruszających się wzdłuż jednego kierunku zawierają liniowe równania różniczkowe maksymalnie drugiego rzędu. Wspólną cechą przykładów z tabeli 2-3 jest to, że zawierają dwa punkty o różnych przesunięciach ( $x_1, x_2$ ), czyli wymagają ułożenia dwóch równań bilansowych.

Tabela 2-3. Przykłady układów mechanicznych

|  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|--|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  | $\begin{cases} F(t) = (m_1 + m_2)\ddot{x}_1(t) + b_2\dot{x}_1(t) + b_1\dot{x}_1(t) + \\ + c_1(x_1(t) - x_2(t)) \\ 0 = c_1(x_2(t) - x_1(t)) + c_2x_2(t) \end{cases}$ <p>Sztywne połączenie mas <math>m_1</math> i <math>m_2</math> tworzy jeden punkt bilansowy</p>                                                                                                                                    |
|  | $\begin{cases} 0 = m\ddot{x}_1(t) + b_2\dot{x}_1(t) + b_1(\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)) + \\ + c(x_1(t) - x_2(t)) \\ F(t) = b_1(\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)) + c(x_2(t) - x_1(t)) \end{cases}$ <p>Podstawiając równanie bilansowe punktu przyłożenia siły (<math>x_2</math>) do równania bilansowego punktu <math>x_1</math>, otrzymujemy model postaci:</p> $F(t) = m\ddot{x}_1(t) + b_2\dot{x}_1(t)$ |

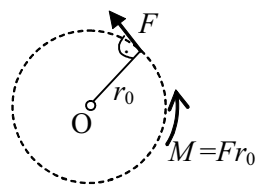
#### 2.4.2. Konstrukcja modeli – prosty ruch obrotowy

W ruchu obrotowym stosowane są analogiczne elementy i zasady konstrukcji modeli jak w ruchu posuwistym – w definicji zamiast przesunięć  $x$  i ich pochodnych występują kąty obrotu  $\varphi$  i ich pochodne, a zamiast sił  $F$  – momenty sił  $M$  (momenty obrotowe). Podstawą konstrukcji modeli jest bilans momentów sił:

$$M(t) = \sum \pm M_{ri}(t), [\text{Nm}]. \quad (2-34)$$

Moment siły jest wielkością wektorową, ale jeśli obrót następuje wokół jednej osi, to zamiast wektora momentu siły można stosować wartość skalarną momentu siły, czyli iloczyn siły  $F$  i ramienia siły  $r_0$  (rys. 2-19).

Elementami równania bilansowego opisującego obracający się układ są momenty reakcji elementów podstawowych reprezentujących sprężystość, tarcie i masę w ruchu obrotowym.

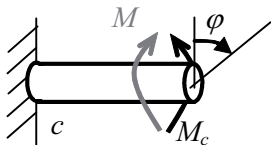


Rys. 2-19. Moment siły w ruchu obrotowym

**Sprężyna** w ruchu obrotowym reprezentuje reakcję materiału na zewnętrzny moment obrotowy ( $M$ ). Moment reakcji ( $M_c$ ) sprężyny z usztywnionym końcem jest proporcjonalny do kąta obrotu wolnego końca:

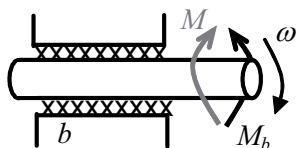
$$M_c(t) = c\varphi(t), \quad (2-35)$$

gdzie:  $\varphi(t)$  – aktualny kąt obrotu,  $c$  – współczynnik sztywności zależny od konstrukcji i materiału sprężyny.



Rys. 2-20. Sprężyna skręcana

**Tłumik** reprezentuje nieodwracalne straty energii mechanicznej w ruchu obrotowym, na przykład podczas obrotu ciała w płynie czy obrotu w łożyskach.



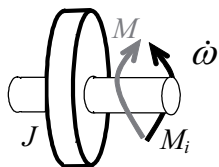
Rys. 2-21. Tłumik

Opisem idealnego tłumika jest moment reakcji ( $M_b$ ) proporcjonalny do prędkości kątowej:

$$M_b(t) = b\dot{\varphi}(t) = b\omega(t), \quad (2-36)$$

gdzie:  $\omega$  to prędkość kątowa,  $b$  oznacza współczynnik tłumienia zależny od konstrukcji i materiałów powodujących tarcie.

**Moment bezwładności** reprezentuje masę ciała, która przeciwdziała zmianie prędkości kątowej. Moment reakcji ( $M_i$ ) elementu jest proporcjonalny do przyspieszenia kątowego:



Rys. 2-22. Moment bezwładności

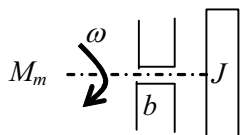
$$M_i(t) = J\ddot{\varphi}(t) = J\dot{\omega}(t), \quad (2-37)$$

gdzie współczynnik proporcjonalności  $J$  nazywa się momentem bezwładności i zależy od kształtu elementu oraz położenia osi obrotu. Dla typowych brył moment

bezwładności  $J$  można obliczyć na podstawie wymiarów geometrycznych i masy ciała, na przykład (zakładając obrót wokół własnej osi):

- tarcza o promieniu  $R \rightarrow J = mR^2 / 2$ ,
- walec o promieniu  $R$  i długości  $l \rightarrow J = mR^2 / 4 + ml^2 / 12$ ,
- kula o promieniu  $R \rightarrow J = 2mR^2 / 5$ .

Typowym przykładem ruchu obrotowego jest obciążenie mechaniczne w układach napędowych (rys. 2-23). Obejmuje on bezwładność obracających się elementów, tarcie w łożyskach oraz zewnętrzny moment obciążenia:

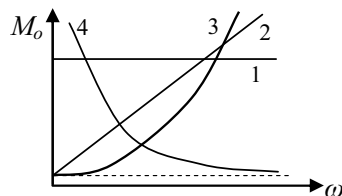


Rys. 2-23. Moment mechaniczny

$$M_m(t) = J\dot{\omega}(t) + b\omega(t) + M_o(t) \approx J\dot{\omega}(t) + M_o(t). \quad (2-38)$$

Moment obciążenia  $M_o$  (moment oporowy maszyny roboczej) wynika nie tylko z tarcia ruchomych elementów w maszynie roboczej, ale przede wszystkim umożliwia wykonanie określonej pracy w procesie technologicznym. Niekiedy moment obciążenia zależy od kąta obrotu ( $\varphi$ ) lub zmienia się w czasie

(np. zależy od ukształtowania terenu, po którym porusza się pojazd, od zadania, które w danym czasie realizuje maszyna). W przypadku maszyn, takich jak dźwig, wentylator, prądnica czy pojazd, moment  $M_o$  jest opisywany przez zależność  $M_o(\omega)$  nazywaną charakterystyką mechaniczną maszyny roboczej. Wartość  $M_o(\omega)$  może być stała lub zależec w różny sposób od prędkości kątowej (rys. 2-24). Równanie (2-38) opisuje jedynie część mechaniczną napędu i wymaga analizy łącznie z silnikiem, który równoważy moment mechaniczny  $M_m$  – elementy napędu działają na siebie nawzajem ( $\rightarrow$  2.5.2).



Rys. 2-24. Typy charakterystyk maszyn roboczych: 1) stała, 2) liniowa, 3) paraboliczna, 4) hiperboliczna

### 2.4.3. Konstrukcja modeli z wektorowym układem sił

Klasycznym przykładem obiektu, który wymaga wektorowego opisu sił, jest wahadło proste (rys. 2-25). Najprostszy model (tzw. wahadło matematyczne) zakłada, że ciężarek o masie  $m$  jest zawieszony na nierozciągliwej i nieważkiej nici o długości  $l$ , a ruch odbywa się bez strat (tarcia) pod wpływem siły ciężkości  $F = mg$ . Siła  $F$  jest stała i zawsze skierowana w dół, ale w trakcie ruchu ciężarka (zmiany kąta  $\varphi$ ) zmienia się rozkład tej siły na dwie składowe:

- siłę, która równoważy naprężenie nici (ramienia):  $F_n(t) = F \cos\varphi(t)$ ,
- siłę, która działa na ciężarek poruszający się po okręgu:  $F_s(t) = F \sin\varphi(t)$ .

Równanie bilansowe ciężarka to równanie w ruchu obrotowym i ma postać:

$$J\ddot{\varphi}(t) = -M(t), \quad (2-39)$$

gdzie:  $J = ml^2$  to moment bezwładności masy  $m$  obracającej się wokół punktu O;  $M(t) = l F_s(t) = l mg \sin\varphi(t)$  to moment obrotowy (w bilansie występuje  $-M$  ze względu na zwrot przeciwny do kąta  $\varphi$ ). Ostatecznie wahadło matematyczne opisuje równanie:

$$ml^2\ddot{\varphi}(t) + lmg \sin(\varphi(t)) = 0 \rightarrow l\ddot{\varphi}(t) + \sin(\varphi(t)) = 0. \quad (2-40)$$

Model jest nieliniowy, ale dla małych kątów stosuje się przybliżenie  $\sin\varphi \approx \varphi$ , uzyskując model liniowy:

$$ml^2\ddot{\varphi}(t) + lmg\varphi(t) = 0 \rightarrow l\ddot{\varphi}(t) + g\varphi(t) = 0. \quad (2-41)$$

W analogiczny sposób można skonstruować najprostszy model wahadła odwróconego, uwzględniając odpowiednie kierunki i zwroty sił (rys. 2-26). Równanie bilansowe tego ciężarka w ruchu obrotowym ma postać:

$$J\ddot{\varphi}(t) = M(t), \quad (2-42)$$

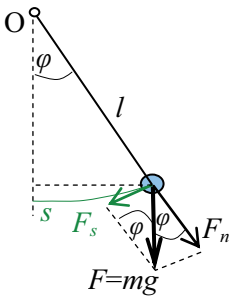
gdzie moment bezwładności  $J = ml^2$  i moment obrotowy  $M(t) = l F_s(t) = l mg \sin\varphi(t)$  (w bilansie występuje  $+M$  ze względu na zwrot momentu jest zgodny z kątem  $\varphi$ ). Ostatecznie model odwróconego wahadła matematycznego to:

$$ml^2\ddot{\varphi}(t) - lmg \sin(\varphi(t)) = 0 \rightarrow l\ddot{\varphi}(t) - g \sin(\varphi(t)) = 0, \quad (2-43)$$

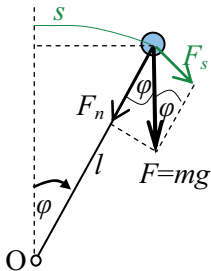
a dla małych kątów ( $\sin\varphi \approx \varphi$ ):

$$ml^2\ddot{\varphi}(t) - lmg\varphi(t) = 0 \rightarrow l\ddot{\varphi}(t) - g\varphi(t) = 0. \quad (2-44)$$

Dokładniejsze modele wahadła (tzw. wahadła fizyczne) wymagają uwzględnienia wymiarów ciężarka, co ma wpływ na obliczenie momentu bezwładności.



Rys. 2-25. Wahadło matematyczne



Rys. 2-26. Wahadło matematyczne odwrócone

### 2.4.4. Jednostki i identyfikacja wartości parametrów

Jednostki równań bilansowych, zmiennych i parametrów w modelach mechanicznych zależą od typu ruchu:

|             | w ruchu postępowym                                                                                       | w ruchu obrotowym                                                                                                                            |
|-------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| – bilans    | N                                                                                                        | Nm                                                                                                                                           |
| – zmienne   | $x$ [m], $\dot{x} = v$ [m/s], $\ddot{x} = \dot{v}$ [m/s <sup>2</sup> ]<br>$F$ [N = kg·m/s <sup>2</sup> ] | $\varphi$ [rad], $\omega$ [rad/s = s <sup>-1</sup> ], $\dot{\omega}$ [rad/s <sup>2</sup> ],<br>$M$ [Nm = kg·m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> ] |
| – parametry | $c$ [N/m], $b$ [Ns/m], $m$ [kg]                                                                          | $c$ [N/m], $b$ [Ns/m], $J$ [kg·m <sup>2</sup> ]                                                                                              |

W ruchu obrotowym zamiast prędkości kątowej  $\omega$ , mierzonej w radianach na sekundę, stosowana jest też prędkość obrotowa  $n$ , czyli liczba obrotów na jednostkę czasu. Relacja między prędkością kątową i obrotową wynika z definicji radiana – pełny obrót to  $2\pi$  radianów, stąd  $\omega = 2\pi n$ , gdzie  $n$  oznacza liczbę obr./sek. W praktyce jako jednostka prędkości  $n$  jest stosowana liczba obr./min (ang. rpm) – wówczas  $\omega = 2\pi n/60$ . Jakkolwiek zmiana jednostek zmiennych czy parametrów musi być uwzględniona w równaniach bilansowych – jednostki muszą się zgadzać, na przykład:

$$\begin{array}{c|c}
 m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + cx(t) = F(t) & M_m(t) = J\dot{\omega}(t) + b\omega(t) + M_o(t) \\
 \text{kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} + \frac{\text{Ns}}{\text{m}} \frac{\text{m}}{\text{s}} + \frac{\text{N}}{\text{m}} \text{m} = \text{N} \rightarrow \text{N} & \text{Nm} = \text{kgm}^2 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} + \text{Nms} \frac{\text{rad}}{\text{s}} + \text{Nm} \rightarrow \text{Nm}
 \end{array}$$

Wśród wielkości charakteryzujących układy mechaniczne, a w szczególności maszyny i pojazdy, bardzo często występuje moc, czyli ilość energii dostarczonej lub zużywanej w jednostce czasu. Energia, która jest zużywana na wykonanie pracy (na przesunięcie lub obrót elementu), przeliczona na jednostkę czasu nazywana jest mocą użyteczną (efektywną). Chwilowa wartość mocy  $P(t)$  zależy działającej siły  $F$  i od prędkości:

$$\begin{array}{l}
 \text{– ruch postępowy: } P(t) = \frac{dW(t)}{dt} = F \frac{dx(t)}{dt} = Fv(t), \quad W = \frac{J}{s} = \frac{\text{Nm}}{s} = \text{N} \frac{\text{m}}{s}, \\
 \text{– ruch obrotowy: } P(t) = \frac{dW(t)}{dt} = F \frac{dx(t)}{dt} = F \frac{d(r\varphi(t))}{dt} = M\omega(t), \quad W = \frac{J}{s} = \frac{\text{Nm}}{s} = \text{Nm} \frac{\text{rad}}{s},
 \end{array}$$

gdzie przesunięcie  $x(t) = r\varphi(t)$  wynika z miary kąta  $\varphi(t)$  wyrażonego w radianach.

Wyznaczenie wartości parametrów układów mechanicznych na podstawie konstrukcji elementów i własności materiałów nie zawsze jest proste ze względu na różnorodność tych elementów, a często także z powodu ich złożonej konstrukcji. Dla typowych elementów stosowanych w praktyce inżynierskiej odpowiednie parametry są określone przez producenta i podawane w danych katalogowych (np. wartości znamionowe maszyn roboczych). W pewnych przypadkach można zastosować proste wzory opisane w podręcznikach czy poradnikach z zakresu mechaniki, które umożliwiają oszacowanie wartości danego parametru. Niekiedy konieczne jest doświadczalne wyznaczenie parametru.

Najłatwiej jest wyznaczyć masę ( $m$ ) poruszającego się ciała, którą można obliczyć na podstawie wymiarów i gęstości materiału, albo na podstawie wagi ciała  $F_g$  ( $F_g = mg$ , gdzie  $g = 9.81 \text{ kg/s}^2$ ). Również moment bezwładności ciała w ruchu obro-

towym dla wielu typowych kształtów (kula, walec, obręcz, kostka, ...) jest opisany prostymi wzorami zawierającymi wymiary i masę ciała.

Wartość współczynnika sztywności ( $c$ ) zależy od rodzaju elementu. W przypadku typowych sprężyn czy resorów wartość  $c$  jest podana w danych katalogowych elementu. Dla elementów typu belka czy sprężyna w postaci zwojów wartość współczynnika  $c$  można oszacować za pomocą prostych wzorów zawierających wymiary elementu i własności materiału (współczynnik sprężystości). Eksperymentalne wyznaczenie sztywności elementów sprężystych można przeprowadzić w stanie równowagi układu na podstawie układu równań statycznych oraz pomiaru sił i przesunięć ( $\rightarrow$  3.3.1).

Najwięcej problemów powoduje wyznaczenie współczynnika tłumienia ( $b$ ). Jeśli ruch ciała odbywa się w gazie lub cieczy, to tarcie wynika z oporu aerodynamicznego (hydrodynamicznego) – zależy więc od kształtu ciała i własności ośrodka, w którym to ciało się porusza. Jeśli przesuwanie ciał jest związane z występowaniem warstwy cieczy lub gazu między przesuwającymi się powierzchniami, to współczynnik  $b$  reprezentuje zjawiska związane z ruchem i własnościami tej cieczy lub gazu (opór hydrauliczny/pneumatyczny). W obu przypadkach wyznaczenie wartości  $b$  najłatwiej jest zrealizować w sposób eksperymentalny na podstawie pomiaru sił i prędkości układu poruszającego się ze stałą prędkością (bez udziału sił bezwładności).

## 2.5. Obwody elektryczne

### 2.5.1. Konstrukcja modeli

Modele dynamiki obwodów elektrycznych opierają się na bilansie napięć w oczkach obwodu i prądów w węzłach. W praktyce do opisu obwodów elektrycznych używa się spadków napięć ( $u$ ) i natężeń prądów ( $i$ ), ponieważ są to wielkości, które łatwo jest zmierzyć. Jednak z definicji natężenia prądu:

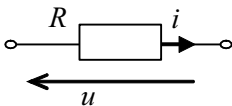
$$i(t) = \dot{q}(t) \quad (2-45)$$

wynika możliwość opisu układów również za pomocą napięć ( $u$ ) i ładunków ( $q$ ).

Podstawowy opis obwodu elektrycznego opiera się na założeniu, że wszystkie istotne zjawiska w obwodzie są reprezentowane przez idealne elementy podstawowe: rezystor, kondensator i cewkę oraz idealne źródła napięcia lub prądu.

**Rezystor** odpowiada za straty energii elektrycznej. Relacja między natężeniem prądu i spadkiem napięcia na rezystorze jest proporcjonalna (prawo Ohma):

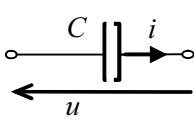
$$u(t) = Ri(t) \leftrightarrow u(t) = R\dot{q}(t), \quad (2-46)$$



Rys. 2-27. Rezystor

gdzie:  $R$  – rezystancja, czyli opór elektryczny (zależny od wymiarów geometrycznych elementu i materiału),  $\dot{q}(t)$  – zmiana ładunku w jednostce czasu, czyli natężenie prądu  $i(t)$ .

**Kondensator** reprezentuje zdolność układu do gromadzenia ładunku, którą opisuje zależność:

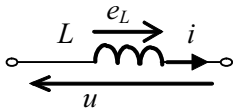


$$u(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt \leftrightarrow i(t) = C \frac{du(t)}{dt} \leftrightarrow q(t) = Cu(t), \quad (2-47)$$

gdzie:  $C$  – pojemność elektryczna (zależna od kształtu i materiału kondensatora),  $q(t)$  – ładunek.

Rys. 2-28. Kondensator

**Cewka** to element bezwładnościowy, który przeciwdziała zmianie natężenia prądu przez samoindukcję siły elektromotorycznej  $e_L$  proporcjonalną do zmiany prądu:



$$e_L(t) = -L \frac{di(t)}{dt} \leftrightarrow e_L(t) = -L\ddot{q}(t), \quad (2-48)$$

gdzie  $L$  to indukcyjność własna (zależna od wymiarów i materiału cewki). Liniowy opis elementu jest odpowiedni dla cewki bez rdzenia lub z rdzeniem o niewielkiej przenikalności magnetycznej. Jeśli rdzeń jest ferromagnetyczny, to cewka

jest elementem nieliniowym (indukcyjność  $L$  zależy od natężenia prądu).

Z praktycznego punktu widzenia obwody elektryczne dzieli się na obwody stałoci i zmiennonapięciowe w zależności od sygnału generowanego przez źródło napięcia (prądu) w obwodzie. Zasady układania równań bilansowych są takie same w obu przypadkach, ale w obwodach zmiennonapięciowych często zamiast definicji opartych na funkcjach czasu (2-46)÷(2-48), stosuje się symboliczny opis poszczególnych elementów za pomocą uogólnionego prawa Ohma w postaci:

$$u(s) = Z(s)i(s) \text{ lub } u(j\omega) = Z(j\omega)i(j\omega), \quad (2-49)$$

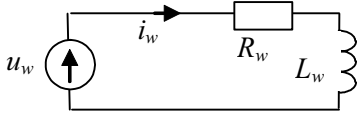
gdzie relacje między natężeniem prądu i napięciem są reprezentowane przez funkcję nazywaną impedancją zespoloną  $Z(s)$  lub  $Z(j\omega)$ . Impedancję można potraktować jako wyrażenie symboliczne, które pozwala zastąpić operatory różniczkowania i całkowania przez operacje mnożenia i dzielenia (tabela 2-4), i tym samym liniowe modele obwodów elektrycznych mogą mieć postać równań algebraicznych – równań operatorowych (matematyczne podstawy tego podejścia opisano w podrozdz. 14.2).

Tabela 2-4. Opisy podstawowych liniowych elementów elektrycznych

|   | Opis napięciowo-prądowy<br>$u(i)$ |                            | Opis prąd.-napięciowy<br>$i(u)$   | $u(q)$                    | Impedancje     |                       |
|---|-----------------------------------|----------------------------|-----------------------------------|---------------------------|----------------|-----------------------|
|   |                                   |                            |                                   |                           | $Z(s)$         | $Z(j\omega)$          |
| R | $u(t) = Ri(t)$                    | $u(s) = Ri(s)$             | $i(t) = Gu(t)$                    | $u(t) = R\dot{q}(t)$      | $R$            | $R$                   |
| C | $u(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt$ | $u(s) = \frac{1}{sC} i(s)$ | $i(t) = C \frac{du(t)}{dt}$       | $u(t) = \frac{1}{C} q(t)$ | $\frac{1}{sC}$ | $\frac{1}{j\omega C}$ |
| L | $e_L(t) = -L \frac{di(t)}{dt}$    | $u(s) = sLi(s)$            | $i(t) = \frac{1}{L} \int u(t) dt$ | $u(t) = L\ddot{q}(t)$     | $sL$           | $j\omega L$           |

Impedancję rezystora nazywa się rezystancją ( $R$ ), impedancję kondensatora – reaktancją pojemnościową ( $X_C$ ), a impedancję cewki – reaktancją indukcyjną ( $X_L$ ). Odwrotnością impedancji ( $Z$ ) jest admitancja ( $Y = 1/Z$ ).

Rozważmy prosty obwód ze źródłem napięcia, cewką i rezystorem (rys. 2-30) – może to być obwód wzbudzenia silnika (indukcyjność i rezystancja zwojów). Bilans napięć w oczku stanowi następujące równanie różniczkowe:



$$L_w \frac{di_w(t)}{dt} + R_w i_w(t) = u_w(t) \quad (2-50)$$

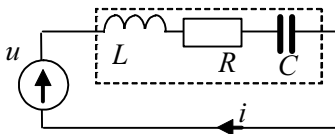
Rys. 2-30. Obwód wzbudzenia silnika

lub odpowiadające mu równanie operatorowe:

$$sL_w i_w(s) + R i_w(s) = u_w(s) \leftrightarrow j\omega L_w i_w(j\omega) + R i_w(j\omega) = u_w(j\omega). \quad (2-51)$$

Zmienną wejściową modelu jest napięcie zasilające  $u_w$ , a zmienną wyjściową natężenie prądu w obwodzie  $i_w$ .

Kolejny prosty obwód elektryczny zawiera elementy RLC (rys. 2-31), a do jego opisania również wystarczy jedno równanie bilansu napięć:



$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt = u(t). \quad (2-52)$$

Rys. 2-31. Szeregowy obwód RLC

Opisując układ za pomocą napięć i prądów, uzyskuje się równanie całkowo-różniczkowe. Model w postaci równania różniczkowego można uzyskać, stosując definicję natężenia

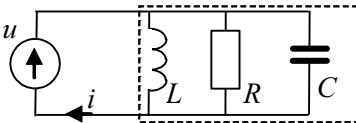
prądu (2-45) i uzyskując opis obwodu za pomocą napięć i ładunków:

$$L\ddot{q}(t) + R\dot{q}(t) + \frac{1}{C}q(t) = u(t). \quad (2-53)$$

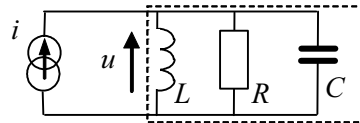
W praktyce inżynierskiej najczęściej jednak występuje postać operatorowa (2-52):

$$sLi(s) + Ri(s) + \frac{1}{sC} i(s) = u(s) \leftrightarrow j\omega Li(j\omega) + Ri(j\omega) + \frac{1}{j\omega C} i(j\omega) = u(j\omega). \quad (2-54)$$

Jeśli te same elementy RLC są połączone równolegle, to podstawą modelu jest bilans prądów – zarówno w obwodzie ze źródłem napięciowym (rys. 2-32), jak i prądowym (rys. 2-33).



Rys. 2-32. Równoległy obwód RLC i źródło napięciowe



Rys. 2-33. Równoległy obwód RLC i źródło prądowe

W obu przypadkach podstawą modelu jest ten sam opis prądowo-napięciowy:

$$\frac{1}{L} \int u(t) dt + Ru(t) + C \frac{du(t)}{dt} = i(t), \quad (2-55)$$

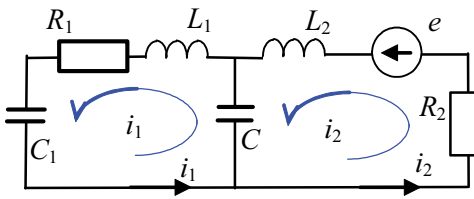
ale różna jest interpretacja zmiennej wejściowej (zmienna generowana przez źródło – napięcie  $u$  lub prąd  $i$ ) i zmiennej wyjściowej (odpowiednio prąd  $i$  lub napięcie  $u$ ). Aby przekształcić wyrażenie (2-55) na równanie różniczkowe, można wyznaczyć pochodną obu stron równania lub wprowadzić zmienną  $u(t) \rightarrow \dot{v}(t)$ , czyli:

$$\frac{1}{L} u(t) + R\dot{u}(t) + C\ddot{u}(t) = di(t)/dt \quad \text{lub} \quad \frac{1}{L} v(t) + R\dot{v}(t) + C\ddot{v}(t) = i(t). \quad (2-56)$$

W operatorowej wersji równania (2-55) natomiast można zastosować odwrotności impedancji (admitancję) elementów:

$$\frac{1}{sL} u(s) + Gu(s) + sCu(s) = i(s) \leftrightarrow \frac{1}{j\omega L} u(j\omega) + Gu(j\omega) + sCu(j\omega) = i(j\omega). \quad (2-57)$$

Jedną z metod układania równań dla złożonych obwodów elektrycznych jest metoda oczkowa. Pierwszy etap metody polega na wyznaczeniu odpowiedniej liczby niezależnych oczek<sup>1</sup>. W układzie przedstawionym na rysunku 2-34 można wyróżnić dwa niezależne oczka, ale gałęzie, które tworzą poszczególne oczka mogą być różne. Równania bilansowe dla wyznaczonych oczek najwygodniej jest zapisać w postaci operatorowej:



Rys. 2-34. Układ dwuobwodowy 1

$$\begin{cases} 0 = sL_1 i_1(s) + R_1 i_1(s) + \frac{i_1(s)}{sC_1} + \frac{i_1(s) - i_2(s)}{sC} \\ e(s) = sL_2 i_2(s) + R_2 i_2(s) + \frac{i_2(s) - i_1(s)}{sC} \end{cases}. \quad (2-58)$$

Równaniom operatorowym (2-58) odpowiadają równania różniczkowo-całkowe:

$$\begin{cases} 0 = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + R_1 i_1(t) + \int \frac{i_1(t)}{C_1} dt + \int \frac{i_1(t) - i_2(t)}{C} dt \\ e(t) = L_2 \frac{di_2(t)}{dt} + R_2 i_2(t) + \int \frac{i_2(t) - i_1(t)}{C} dt \end{cases}$$

<sup>1</sup> Niezależność wybieranych oczek można zapewnić w różny sposób – na przykład, po wyznaczeniu każdego kolejnego oczka należy wyłączać z dalszego wyboru jedną z gałęzi tego oczka

i równania różniczkowe:

$$\begin{cases} 0 = L_1 \ddot{q}_1(t) + R_1 \dot{q}_1(t) + \frac{q_1(t)}{C_1} + \frac{q_1(t) - q_2(t)}{C} \\ e = L_2 \ddot{q}_2(t) + R_2 \dot{q}_2(t) + \frac{q_2(t) - q_1(t)}{C} \end{cases}.$$

Zmienną wejściową modelu jest napięcie na zaciskach źródła  $e$  (siła elektromotoryczna źródła), a zmiennymi wyjściowymi są prądy oczkowe  $i_1$  i  $i_2$ . (lub ładunki  $q_1$  i  $q_2$ ). Na podstawie tych zmiennych można obliczać kolejne, zależnie od potrzeb, na przykład napięcie  $u_2$  na zaciskach rezystora  $R_2$ , czyli  $u_2(t) = R_2 i_2(t)$ .

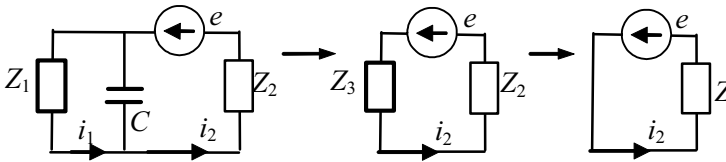
Przedstawiona metoda konstrukcji prowadzi do modeli w postaci układów, które zawierają liniowe równania różniczkowo-całkowe, a po konwersji równania różniczkowe maksymalnie drugiego rzędu lub algebraiczne równania operatorowe. Równania operatorowe i impedancje znacznie ułatwiają konstrukcję modeli. Stosuje się na przykład impedancje zastępcze dla podstawowych połączeń elementów RLC. Równanie (2-54) ilustruje zasadę wyznaczania impedancji zastępczej szeregowego połączenia elementów jako sumy impedancji elementów:

$$Z(s) = sL + R + \frac{1}{sC} = X_L(s) + R + X_C(s), \quad (2-59)$$

a równanie (2-57) – zasadę admitancji zastępczej równoległego połączenia elementów jako sumy admitancji elementów:

$$Y(s) = \frac{1}{sL} + G + sC \quad \text{lub} \quad \frac{1}{Z(s)} = \frac{1}{X_L(s)} + \frac{1}{R} + \frac{1}{X_C(s)}. \quad (2-60)$$

Wykorzystując impedancje zastępcze, można konstruować model obwodu metodą stopniowego upraszczania obwodu. Na przykład na rysunku 2-35 przedstawiono kolejne etapy upraszczania obwodu z rysunku 2-34.



Rys. 2-35. Kolejne etapy upraszczania obwodu z rysunku 2-34

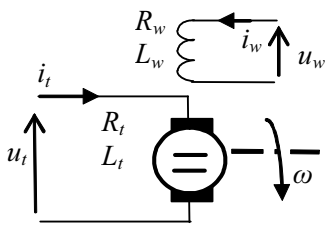
Ostateczny model ma postać  $e(s) = Z(s)i_2(s)$ , gdzie:

$$Z_1 = sL_1 + R_1 + \frac{1}{sC_1}, \quad Z_2 = sL_2 + R_2, \quad \frac{1}{Z_3} = \frac{1}{Z_1} + sC, \quad Z = Z_3 + Z_2.$$

Wybór metody konstrukcji i formy modelu zależy od przeznaczenia modelu.

### 2.5.2. Napędy elektryczne

Model dynamiki napędu elektrycznego obejmuje opis silnika elektrycznego i napędzanej maszyny roboczej. Przekształcanie energii elektrycznej na energię mechaniczną w silnikach opiera się na zjawisku oddziaływania pola magnetycznego na przewodnik, w którym płynie prąd. Ta ogólna zasada jest realizowana za pomocą różnych konstrukcji. Silniki różnią się między innymi sposobem wytwarzania pola magnetycznego. Jeden z podstawowych typów – obcowzbudny silnik prądu stałego (rys. 2-36), wytwarza to pole za pomocą obwodu wzbudzenia, który można opisać równaniem:



Rys. 2-36. Silnik obcowzbudny

$$u_w(t) = R_w i_w(t) + L_w \frac{di_w(t)}{dt}, \quad (2-61)$$

gdzie:  $u_w$  – napięcie zasilania obwodu,  $i_w$  – prąd wzbudzenia. Parametry  $R_w$  i  $L_w$  opisują rezystancję i indukcyjność obwodu wzbudzenia, czyli elektromagnesów wytwarzających strumień pola magnetycznego proporcjonalny do prądu  $i_w$ . W celu uproszczenia dalszego opisu założymy, że ten strumień wzbudzenia jest stały,

tzn. jest parametrem silnika ( $\phi_w$ ). Główny obwód silnika natomiast stanowi uzwojenie twornika opisane równaniem:

$$u_t(t) = R_t i_t(t) + L_t \frac{di_t(t)}{dt} + e(t), \quad (2-62)$$

gdzie:  $u_t$  – napięcie zasilania obwodu,  $i_t$  – prąd obwodu twornika,  $R_t$  i  $L_t$  – rezystancja i indukcyjność obwodu. Zmienna  $e$  natomiast jest siłą elektromotoryczną indukującą się w obwodzie twornika, gdy ten obraca się w polu magnetycznym  $\phi_w$ , a wartość  $e$  jest proporcjonalna do strumienia  $\phi_w$  i do prędkości obrotowej  $\omega$ :

$$e(t) = k_w \phi_w \omega(t) = c_w \omega(t), \quad (2-63)$$

gdzie  $k_w$  i  $c_w = k_w \phi_w$  są stałymi parametrami, wynikającymi z konstrukcji silnika.

Uzupełnieniem opisu silnika ((2-62), (2-63)) jest równanie elektromechaniczne, umożliwiające wyznaczenie wartości momentu obrotowego  $M_e$ , jaki wytwarza silnik:

$$M_e(t) = k_m \phi_w i_t(t) = c_m i_t(t), \quad (2-64)$$

gdzie  $k_m$  i  $c_m = k_m \phi_w$  to stałe parametry konstrukcyjne silnika. Moment obrotowy silnika  $M_e$  jest równoważony przez moment mechaniczny  $M_m$  napędzanej maszyny:

$$M_e(t) = M_m(t), \quad (2-65)$$

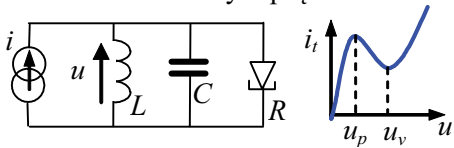
który jest wyznaczony przez model obciążenia mechanicznego (2-38). Pełny model napędu jest połączeniem modelu silnika i modelu obciążenia mechanicznego:

$$\begin{cases} u_t(t) = R_t i_t(t) + L_t \frac{di_t(t)}{dt} + c_w \omega(t) \\ c_m i_t(t) = J \dot{\omega}(t) + M_o(t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} L_t \frac{di_t(t)}{dt} = -R_t i_t(t) - c_w \omega(t) + u_t(t) \\ J \dot{\omega}(t) = c_m i_t(t) - M_o(t) \end{cases}. \quad (2-66)$$

Zmiennymi wyjściowymi modelu są natężenie prądu  $i_t$  i obroty  $\omega$ , a zmienną wejściową napięcie  $u_t$ . Moment obciążenia  $M_o$  zależnie od typu maszyny roboczej jest albo funkcją  $M_o(\omega)$ , albo wartością stałą (zmienną wejściową). Jeśli  $M_o = \text{const}$ , to model napędu jest liniowy, ale bardzo uproszczony. Dokładniejsze modele są nieliniowe nie tylko ze względu na charakterystykę  $M_o(\omega)$ , lecz także ze względu na zmiany strumienia wzbudzenia ( $\phi_w$ ) oraz nieliniowość indukcyjności obwodów wzbudzenia i twornika ( $L_w$  i  $L_t$  zależą od natężenia prądów).

### 2.5.3. Nieliniowe i złożone elementy elektryczne

Klasycznym przykładem nieliniowego obwodu elektrycznego jest równoległy układ RLC z nieliniową rezystancją typu dioda tunelowa (rys. 2-37). Model opiera się na równaniu bilansowym prądów:



$$\frac{1}{L} \int u(t) dt + i_t(t) + C \frac{du(t)}{dt} = i(t), \quad (2-67)$$

Rys. 2-37. Obwód z diodą tunelową

gdzie charakterystykę diody opisuje wzór:

$$i_t = bu^3 - au.$$

Model dynamiki obwodu ma więc postać:

$$\frac{1}{L} \int u(t) dt + bu^3(t) - au(t) + C \frac{du(t)}{dt} = i(t). \quad (2-68)$$

Powyższy wzór można poddać kolejnym przekształceniom:

– różniczkowanie wyrażenia

$$\frac{1}{L} u(t) + (3bu^2(t) - a) \dot{u}(t) + C \ddot{u}(t) = di(t) / dt,$$

– uporządkowanie formy (przy założeniu że  $i(t) = \text{const}$ )

$$LC \ddot{u}(t) - aL \left( 1 - \frac{3b}{a} u^2(t) \right) \dot{u}(t) + u(t) = 0,$$

– wprowadzenie nowej zmiennej  $v(t) = u(t) \sqrt{3b/a}$

$$LC \ddot{v}(t) - aL(1 - v^2(t)) \dot{v}(t) + v(t) = 0,$$

– przeskalowanie czasu  $t = \sqrt{LC} \tau$  (omówienie zasady skalowania czasu  $\rightarrow$  18.4)

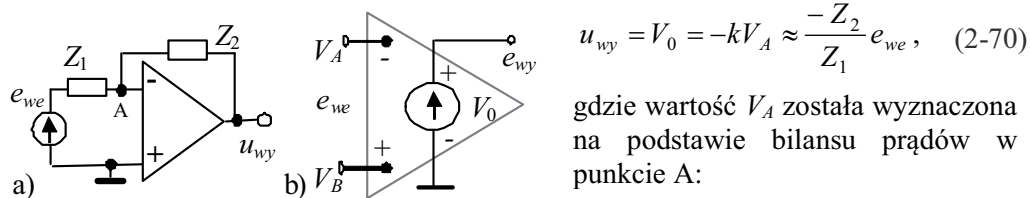
$$\frac{LC \ddot{v}(\tau)}{LC} - \frac{aL(1 - v^2(\tau)) \dot{v}(\tau)}{\sqrt{LC}} + v(\tau) = 0 \rightarrow \ddot{v}(\tau) - a \sqrt{\frac{L}{C}} (1 - v^2(\tau)) \dot{v}(\tau) + v(\tau) = 0.$$

Model (2-68) po przekształceniach jest znany jako **równanie van der Pola**:

$$\ddot{x}(t) - \mu(1 - x^2(t)) \dot{x}(t) + x(t) = 0, \quad (2-69)$$

gdzie  $\mu = \sqrt{L/C}$  nazywa się współczynnikiem tłumienia, natomiast czas  $t$  jest czasem przeskalowanym względem (2-68) (jest podzielony przez  $\sqrt{LC}$ ).

Z kolei typowym przykładem złożonego elementu elektrycznego jest wzmacniacz operacyjny. Ze względu na swoje parametry podczas konstrukcji modeli układów ze wzmacniaczem można stosować prosty schemat zastępczy wzmacniacza (rys. 2-38). Przy dużym wzmocnieniu  $k$  model układu ma postać:



Rys. 2-38. Wzmacniacz operacyjny: a) typowy układ;  
b) schemat zastępczy wzmacniacza  $V_0 = k(V_A - V_B)$

$$u_{wy} = V_0 = -kV_A \approx \frac{-Z_2}{Z_1} e_{we}, \quad (2-70)$$

gdzie wartość  $V_A$  została wyznaczona na podstawie bilansu prądów w punkcie A:

$$\frac{V_A - e_{we}}{Z_1} = \frac{V_0 - V_A}{Z_2}.$$

## 2.5.4. Jednostki i identyfikacja wartości parametrów

Jednostką równania bilansowego w metodzie oczkowej jest wolt ( $V$ ). Jednostki zmiennych i parametrów to:  $u$  [ $V$ ],  $q$  [ $C$ ],  $i$  [ $A = C/s$ ],  $R$  [ $\Omega = V/A$ ],  $C$  [ $F = C/V$ ],  $L$  [ $H = Wb/A = Vs/A$ ]. Każde równanie bilansowe i każde wyrażenie pochodne można sprawdzić ze względu na zgodność jednostek, na przykład jednostki w wyrażeniu:

$$L\ddot{q}(t) + R\dot{q}(t) + \frac{1}{C}q(t) = u(t),$$

$$H \frac{C}{s^2} + \Omega \frac{C}{s} + \frac{1}{F} C = \frac{V}{A/s} \frac{A}{s} + \frac{V}{A} A + \frac{1}{C/V} C = V.$$

Parametry modeli obwodów elektrycznych wynikają z wartości elementów RLC. Często można je obliczyć na podstawie parametrów konstrukcyjnych (kształt, wymiary, materiał), ale w praktyce inżynierskiej korzysta się zwykle z wartości określonych przez producenta. W modelach złożonych urządzeń, takich jak silniki (napędy), często stosuje się normalizację wartości zmiennych względem wartości znamionowych (nominalnych), czyli typowych wartości eksploatacyjnych danego urządzenia ( $\rightarrow$  18.4.2) – wszystkie zmienne są wówczas bezwymiarowe, a parametry znormalizowanego urządzenia są podane przez producenta lub wyznaczane w sposób doświadczalny.

## 2.6. Inne obszary modelowania

### 2.6.1. Zamknięte układy hydrauliczne

W zamkniętych układach hydraulicznych, takich jak sieci wodociągowe lub ciepłownicze, przepływ cieczy jest wymuszany przez różnicę ciśnień, którą wytwarza tak zwana pompa obiegowa. Podstawowym zjawiskiem są spadki ciśnienia na oporach hydraulicznych ( $R$ ) każdego elementu, przez który przepływa ciecz. W uproszczeniu ten spadek jest proporcjonalny do przepływu:

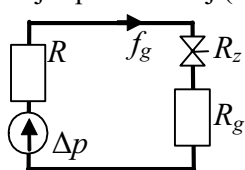
$$\Delta p = Rf, \quad (2-71)$$

a dokładniej do kwadratu przepływu:

$$\Delta p = Rf^2. \quad (2-72)$$

Konstrukcja modeli sieci hydraulicznych opiera się na bilansie spadków ciśnienia ( $\Delta p$ ) w obwodzie i strumieni cieczy ( $f$ ) w węzłach. Dopóki w układzie nie uwzględnia się innych zjawisk (masy i ściśliwości cieczy), dopóty równania bilansowe są równaniami algebraicznymi.

Rozważmy prosty układ instalacji centralnego ogrzewania z pompą, kotłem i grzejnikiem (rys. 2-39). Podstawą modelu jest bilans spadków napięć w obwodzie w wersji uproszczonej (liniowej) albo dokładniejszej (nieliniowej):



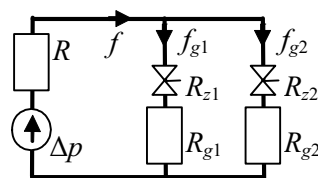
Rys. 2-39. Obwód centralnego ogrzewania

– uproszczony:

$$\Delta p = (R + R_g + R_z)f_g, \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{– dokładniejszy:} \\ \Delta p = (R + R_g + R_z)f_g^2, \end{array} \right. \quad (2-73)$$

gdzie zmienną wejściową jest różnica ciśnień wytwarzana przez pompę ( $\Delta p$ ), a zmienną wyjściową przepływ ( $f_g$ ). Parametrami modelu są opór kotła ( $R$ ), opór grzejnika ( $R_g$ ) oraz opór zaworu ( $R_z$ ). Założono, że opory wszystkich przewodów (rur) są pomijalne lub wliczone do oporu kotła i grzejnika.

Układ, który zawiera kocioł, pompę oraz dwa grzejniki połączone równolegle (rys. 2-40), jest opisany przez bilans strumieni cieczy w węzłach ( $f = f_{g1} + f_{g2}$ ) oraz równania bilansowe spadków ciśnień w niezależnych oczkach. Załóżmy, że opór spadku ciśnienia model uzyskuje różną postać:

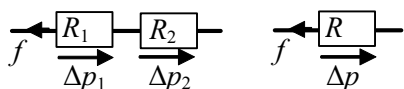


Rys. 2-40. Obwód centralnego ogrzewania z dwoma grzejnikami

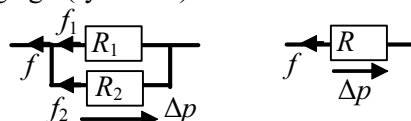
– model uproszczony:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta p = R(f_{g1} + f_{g2}) + (R_{g1} + R_{z1})f_{g1} \\ \Delta p = R(f_{g1} + f_{g2}) + (R_{g2} + R_{z2})f_{g2} \end{array} \right. \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{– model dokładniejszy:} \\ \Delta p = R(f_{g1} + f_{g2})^2 + (R_{g1} + R_{z1})f_{g1}^2 \\ \Delta p = R(f_{g1} + f_{g2})^2 + (R_{g2} + R_{z2})f_{g2}^2 \end{array} \right. \quad (2-74)$$

Układ równań zazwyczaj trzeba rozwiązać ze względu na zmienne wyjściowe  $f_{g1}$  i  $f_{g2}$ . Do rozwiązywania układów równań liniowych można wykorzystać typowe metody algebraiczne ( $\rightarrow$  1.3.2), ale rozwiązywanie układów równań z nieliniową zależnością ciśnienia i przepływu jest bardziej złożone. W celu ułatwienia konstrukcji modeli można wykorzystać zależności opisujące opór zastępczy szeregowego połączenia elementów (rys. 2-41) oraz połączenia równoległego (rys. 2-42).



Rys. 2-41. Połączenie szeregowe



Rys. 2-42. Połączenie równoległe

Niezależnie od dokładności modelu opór zastępczy połączenia szeregowego jest sumą oporów połączonych elementów:

$$R = R_1 + R_2. \quad (2-75)$$

Przy połączeniu równoległym opór zastępczy zależy od dokładności opisu:

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (\text{opis liniowy}), \quad \left| \quad R = \frac{R_1 R_2}{(\sqrt{R_1} + \sqrt{R_2})^2} \quad (\text{opis nieliniowy}). \quad (2-76)$$

Połączenie szeregowe – na podstawie bilansu spadków ciśnień  $\Delta p_1 + \Delta p_2 = \Delta p$ :  
uproszczony (liniowy) | dokładniejszy (nieliniowy)

$$R_1 f + R_2 f = R f$$

$$R_1 f^2 + R_2 f^2 = R f^2$$

$$R = R_1 + R_2$$

$$R = R_1 + R_2$$

Połączenie równoległe – na podstawie bilansu przepływów  $f_1 + f_2 = f$  oraz faktu, że spadek ciśnienia na każdym oporze jest taki sam, ale jego opis zależy od dokładności:

uproszczony (liniowy)

dokładniejszy (nieliniowy)

$$\Delta p = R_1 f_1 = R_2 f_2 = R f$$

$$\Delta p = R_1 f_1^2 = R_2 f_2^2 = R f^2$$

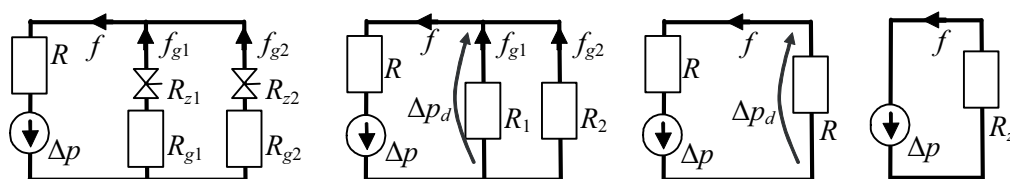
$$f_1 + f_2 = f \rightarrow \frac{\Delta p}{R_1} + \frac{\Delta p}{R_2} = \frac{\Delta p}{R}$$

$$f_1 + f_2 = f \rightarrow \sqrt{\frac{\Delta p}{R_1}} + \sqrt{\frac{\Delta p}{R_2}} = \sqrt{\frac{\Delta p}{R}}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$\frac{1}{R} = \left( \frac{1}{\sqrt{R_1}} + \frac{1}{\sqrt{R_2}} \right)^2$$

Wzory (2-75) i (2-76) są podstawą konstrukcji modeli metodą oporu zastępczego. Ilustracją niech będą kolejne etapy upraszczania schematu na rysunku 2-43.



Rys. 2-43. Kolejne etapy wyznaczania oporów zastępczych dla rysunku 2-40

Celem uproszczeń jest wyznaczenie oporu zastępczego całego układu ( $R_z$ ), co umożliwia obliczenie całkowitego przepływu ( $f_k$ ). Następnie można obliczyć ciśnienie dyspozycyjne na sieci  $\Delta p_d$ , a tym samym ciśnienie dyspozycyjne na każdej gałęzi, a stąd przepływ w każdej gałęzi  $f_{g1}$  i  $f_{g2}$  (tabela 2-5). Metoda oporu zastępczego jest szczególnie użyteczna przy rozbudowanych schematach i obliczeniach wykonywanych na wartościach (bez wyznaczania wzorów).

Tabela 2-5. Metoda oporu zastępczego (rys. 2-43)

| Operacja                                                        | Model liniowy                     | Model nieliniowy                                  |
|-----------------------------------------------------------------|-----------------------------------|---------------------------------------------------|
| Opór każdej z gałęzi – szeregowe połączenie grzejnika i zaworu  | $R_i = R_{gi} + R_{zi}$           | $R_i = R_{gi} + R_{zi}$                           |
| Opór zastępczy obu gałęzi – równoległe połączenie $R_1$ i $R_2$ | $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$   | $R = \frac{R_1 R_2}{(\sqrt{R_1} + \sqrt{R_2})^2}$ |
| Opór zastępczy całego układu                                    | $R_z = R + R_k$                   |                                                   |
| Całkowity przepływ $f_k$                                        | $f_k = \Delta p / R_z$            | $f_k = \sqrt{\Delta p / R_z}$                     |
| Ciśnienie dyspozycyjne ( $\Delta p_d$ ) na sieci                | $\Delta p_d = \Delta p - R_k f_k$ | $\Delta p_d = \Delta p - R_k f_k^2$               |
| Przepływy w gałęziach:                                          | $f_{gi} = \Delta p_d / R_i$       | $f_{gi} = \sqrt{\Delta p_d / R_i}$                |

W modelach układów hydraulicznych można stosować przepływ objętościowy ( $f$ , m<sup>3</sup>/s) lub masowy ( $f_m = \rho_w f$ , kg/s). Z kolei różnica ciśnień  $\Delta p$  [Pa] bywa wyrażana także w kPa. Wszystkie te warianty oraz dokładność opisu (liniowy lub nieliniowy) decydują o jednostce oporu hydraulicznego. Wyznaczanie wartości oporów hydraulicznych na podstawie konstrukcji elementów jest złożone i mało użyteczne w prostych modelach dynamiki. Łatwiej jest uzyskać (zmierzyć) zmienne modelu, czyli przepływy i spadki ciśnienia w różnych częściach układu, podstawić je do modelu i rozwiązać układ równań ze względu na parametry (przykład → 3.3.3).

## 2.6.2. Modele biologiczne

Typowym obszarem zastosowania modelowania analitycznego poza fizyką są modele biologiczne opisujące na przykład zjawiska ekologiczne, epidemiologiczne, immunologiczne. Podstawową wielkością bilansową jest liczebność badanej populacji ( $N$ ), która z natury jest zmienną dyskretną (liczba osobników) i jest wyznaczana w dyskretnych chwilach czasu (co krok czasu  $\Delta t$ ). Przy modelowaniu dużych populacji stosuje się przejście graniczne ( $\Delta t \rightarrow 0$ ):

$$\frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} \rightarrow \dot{N}(t). \quad (2-77)$$

Na tej podstawie konstruowane są ciągle równania bilansowe badanych populacji:

$$\dot{N}(t) = \sum \pm f_i(t), \quad (2-78)$$

gdzie  $N$  to liczebność (lub zagęszczenie) populacji, a  $f_i$  to strumień dopływu i odpływu osobników do/z populacji w wyniku różnych zjawisk.

Jeden z podstawowych modeli ekologicznych opisuje zmianę liczebności jednorodnej populacji, w której osobniki rodzą się i umierają, ale muszą konkurować ze sobą o ograniczone zasoby środowiska. Model ma postać:

$$\dot{N}(t) = rN(t) - v(N), \quad (2-79)$$

gdzie  $r$  oznacza współczynnik rozrodczości netto (różnica współczynnika rozrodczości  $r_r$  i współczynnika śmiertelności  $r_s$ ), natomiast  $v(N)$  jest funkcją, która opisuje

konkurencję o zasoby środowiska. W najprostszym przypadku przyjmuje się, że  $v(N) = aN^2$ , co oznacza, że konkurencyjność zależy od:

- liczby spotkań między osobnikami, a ta jest proporcjonalna do kwadratu liczebności populacji  $N^2$  (jak liczba zderzeń cząsteczek gazu swobodnego),
- współczynnika konkurencyjności  $a = r/K$  ( $K$  – pojemność środowiska), czyli:
  - im większa pojemność środowiska (więcej osobników może przeżyć w środowisku), tym konkurencja jest mniejsza,
  - im większa rozrodczość, tym konkurencja jest większa.

Po uwzględnieniu opisanej funkcji konkurencji model populacji ma postać:

$$\dot{N}(t) = rN(t) - aN^2(t) \quad \text{lub} \quad \dot{N}(t) = rN(t) \left( 1 - \frac{N(t)}{K} \right), \quad (2-80)$$

którą nazywa się **równaniem logistycznym**. Model tego typu można rozbudować na przykład o zjawisko migracji (osobniki imigrują do środowiska sprzyjającego, a emigrują ze środowiska wrogiego) lub o strukturę wieku (rozmnażają się tylko osobniki w pewnym przedziale wiekowym).

Jeśli w danym środowisku występują dwa **gatunki konkurujące** ze sobą o ograniczone zasoby, to model ma postać układu dwóch równań logistycznych:

$$\begin{cases} \dot{N}_1(t) = r_1 N_1(t) \left( 1 - \frac{N_1(t)}{K_1} - a_{12} \frac{N_2(t)}{K_2} \right) \\ \dot{N}_2(t) = r_2 N_2(t) \left( 1 - \frac{N_2(t)}{K_2} - a_{21} \frac{N_1(t)}{K_1} \right) \end{cases}. \quad (2-81)$$

Model umożliwia uwzględnienie różnych współczynników rozrodczości netto ( $r_1, r_2$ ) i różnych pojemności środowiska ( $K_1, K_2$ ) dla obu gatunków. Wzajemne oddziaływanie gatunków na siebie opisują współczynniki  $a_{12}$  i  $a_{21}$ , oznaczające ubytek „energii” w wyniku spotkania z osobnikiem drugiego gatunku – zależy on od zachowania obu gatunków – atak czy ucieczka (strategia jastrzębia i gołębia). Jeśli oba gatunki stosują strategię ataku, to konkurencja jest duża (osobniki tracą energię na walkę), a jeśli oba stosują strategię ucieczki, to konkurencja znacznie się zmniejsza. W przypadku gdy jeden gatunek jest mocniejszy i atakuje, to drugi słabszy ucieka.

Inny bardzo popularny model ekologiczny znany jest pod nazwą **modelu Lotki–Volterry** lub modelu drapieżnik–ofiara i opisuje zmiany populacji dwóch gatunków, przy czym jeden z nich jest drapieżnikiem, a drugi jego ofiarą. Model obejmuje równania bilansowe liczebności (zagęszczenia) populacji ofiar  $V$  (ang. victim) i drapieżników  $P$  (ang. predator) postaci:

$$\begin{cases} \dot{V}(t) = r_{rV} V(t) - a V(t) P(t) \\ \dot{P}(t) = b a V(t) P(t) - r_{sP} P(t) \end{cases}, \quad (2-82)$$

gdzie:  $r_{rV}$  – współczynnik rozrodczości ofiar,  $r_{sP}$  – współczynnik śmiertelności drapieżników,  $a$  – współczynnik skuteczności polowań, czyli część spotkań ( $VP$ ) zakoń-

czona sukcesem,  $b$  – przelicznik upolowanych ofiar ( $aVP$ ) na rozrodczość drapieżników (przyrost populacji). W tej klasycznej postaci zakłada się, że wzrost populacji ofiar jest ograniczany tylko przez występowanie drapieżników, a warunkiem istnienia drapieżników jest obecność ofiar. Model (2-82) można rozbudować, na przykład, wprowadzając ograniczoną pojemność środowiska ( $K$ ) lub możliwość ukrycia się ofiar. Wprowadzenie pojemności środowiska wymaga korekty w bilansie ofiar (składnik analogiczny jak w równaniu logistycznym). Model uzyskuje wówczas postać:

$$\begin{cases} \dot{V}(t) = r_{rV}V(t)(1 - V(t)/K) - aV(t)P(t) \\ \dot{P}(t) = baV(t)P(t) - r_{sP}P(t) \end{cases} \quad (2-83)$$

Najprostsze modele epidemiologiczne (**modele SI**) zakładają istnienie w populacji  $N$  dwóch klas osobników: zdrowi podatni na infekcję  $S$  (ang. susceptible) i zainfekowani  $I$  (ang. infected). Model infekcji obejmuje układ dwóch równań:

$$\begin{cases} \dot{S}(t) = r_r(S(t) + I(t)) - aS(t)I(t) + bI(t) - r_sS(t) \\ \dot{I}(t) = aS(t)I(t) - bI(t) - r_sI(t) \end{cases}, \quad (2-84)$$

gdzie:  $a$  – współczynnik zakażenia (tzn. jaka część kontaktów  $SI$  kończy się infekcją),  $b$  – współczynnik wyzdowień. Przy konstrukcji bilansu założono, że osobniki rodzą się zdrowe oraz że infekcja nie powoduje dodatkowych zgonów (współczynnik śmiertelności  $r_s$  jest taki sam w obu grupach). Modele, które uwzględniają zjawisko nabywania odporności (**modele SIR**) opisują trzy grupy osobników w populacji  $N$ : zdrowi podatni  $S$ , zainfekowani  $I$  i odporni  $R$  (ang. resistant), stąd trzy równania bilansowe:

$$\begin{cases} \dot{S}(t) = r_r(S(t) + I(t) + R(t)) - aS(t)I(t) - r_sS(t) \\ \dot{I}(t) = aS(t)I(t) - bI(t) - r_sI(t) \\ \dot{R}(t) = bI(t) - r_sR(t) \end{cases} \quad (2-85)$$

Modele epidemiologiczne można dalej rozbudowywać, uwzględniając takie zjawiska, jak śmiertelność infekcji czy możliwość utraty odporności. Można też konstruować modele, które skupiają się tylko na zmianach wynikających z infekcji (nie uwzględniają rozrodczości i śmiertelności populacji):

$$\begin{cases} \dot{S}(t) = -aS(t)I(t) \\ \dot{I}(t) = aS(t)I(t) - bI(t) \\ \dot{R}(t) = bI(t) \end{cases} \quad (2-86)$$

Zmienne  $S, I, R$  oznaczają liczebność populacji lub procent osobników z populacji.

Charakterystyczną cechą omówionych modeli biologicznych jest nieliniowość, ponieważ nawet proste modele zjawisk są nieliniowe i trudno tę nieliniowość pominąć lub uprościć. W modelach tych nie występują również zmienne wejściowe – badania dynamiki układu polegają na obserwacjach rozpoczynających się od różnych warunków początkowych (obserwacja ewolucji stanu układu).

## **II. Statyczny opis układów**



### 3. Modele i charakterystyki statyczne

*czyli co można badać bez opisywania dynamiki*

#### 3.1. Statyczne własności układu

**Model statyczny**, czyli równanie (układ równań), które opisuje obiekt (układ) w stanie równowagi, gdy wartości zmiennych wejściowych i wyjściowych są stałe, jest znacznie prostszym opisem niż model dynamiki. Można go otrzymać przez:

- uproszczenie równań dynamiki, polegające na wyzerowaniu wszystkich funkcji pochodnych zmiennych wejściowych i wyjściowych: pochodna ( $dx/dt$ ) to z definicji zmiana wartości ( $dx$ ) w krótkim czasie ( $dt$ ), a w stanie równowagi przy stałym wymuszeniu nie ma zmian ( $dx = 0$ );
- odpowiednią konstrukcję modelu ograniczoną do statycznych równań bilansowych, opisujących układ w stanie równowagi – pomijanie akumulacji wielkości w magazynach ( $\rightarrow$  2.2, 2.3) oraz elementów o własnościach dynamicznych, np. tłumiki i masy ( $\rightarrow$  2.4), cewki, ( $\rightarrow$  2.5).

Modele statyczne są powszechnie stosowane podczas projektowania układów, na przykład projektowanie konstrukcji (budynki, mosty, ...) czy instalacji (ogrzewanie, klimatyzacja, sieć wodociągowa, ...). Na tym etapie własności dynamiczne obiektu nie są rozpatrywane (budynek czy most ma mieć odpowiednią wytrzymałość, sieć grzewcza czy wodociągowa ma przetransportować odpowiednią ilość medium), a projektant ma to zapewnić przez opracowanie konstrukcji mechanicznej, obliczenie parametrów, dobór materiałów i urządzeń. Każda dziedzina ma swoje metody projektowania oparte na modelach statycznych, a opisane w postaci wzorów, tabel i charakterystyk. Jedynie w szczególnych przypadkach potrzebna jest analiza własności dynamicznych, na przykład wpływ wiatru na zachowanie wieżowca czy mostu, wpływ gwałtownego zatrzymania pompy na sieć hydrauliczną, itd.

Pełny model statyczny danego obiektu zakłada znajomość wartości wszystkich parametrów występujących w równaniach. Stałe wartości współczynników zawsze są wynikiem przyjętych założeń (np. że własności materiałów nie zależą od temperatury, ciśnienia itp.). Identyfikacja wartości parametrów (wyznaczenie wartości parametrów) zależy od złożoności modelu i dostępnych informacji. Można je próbować wyznaczyć:

- bezpośrednio na podstawie wymiarów geometrycznych obiektu i własności fizycznych materiałów,
- pośrednio na podstawie wartości obliczeniowych (przykłady  $\rightarrow$  3.3).

Dysponując modelem statycznym, można wyznaczyć rozwiązanie statyczne, czyli rozwiązanie równania (układu równań) ze względu na zmienne wyjściowe ( $\rightarrow$  1.3.2) – wzór/wzory na zmienne wyjściowe w zależności od zmiennych wejściowych.

Liniowe modele statyczne, takie jak na przykład:

$$a_0x = b_0u, \quad a_0x = b_{10}u_1 + b_{20}u_2, \quad 0 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad (3-1)$$

zazwyczaj są oznaczone, więc dla stałych wymuszeń mają jedno rozwiązanie:

$$x = \frac{b_0}{a_0}u, \quad x = \frac{b_{10}}{a_0}u_1 + \frac{b_{20}}{a_0}u_2, \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}. \quad (3-2)$$

Rozwiązanie statyczne (wartości wyjściowe  $x_0, x_{10}, x_{20}$ ) obliczone dla określonych wartości wejściowych ( $u_0, u_{10}, u_{20}$ ) jest nazywane **punktem równowagi**. Punkt równowagi w modelach wielowymiarowych to wektor wartości zmiennych wyjściowych  $[x_{10}, \dots, x_{n0}]$  wyznaczony dla danego wektora wartości wejściowych  $[u_{10}, \dots, u_{m0}]$  – wartości  $x_{10}, \dots, x_{n0}$  stanowią współrzędne jednego punktu równowagi układu. Do obliczeń można wykorzystać numeryczne metody rozwiązywania liniowych układów równań ( $\rightarrow$  1.5).

Opisując własności układów liniowych mówimy, że mają one zawsze **jeden punkt równowagi** (jedno rozwiązanie statyczne), gdyż prawie zawsze jest to układ równań oznaczonych. Ponieważ jednak model statyczny wynika z uproszczenia równań różniczkowych, to mogą wystąpić wyrażenia typu:

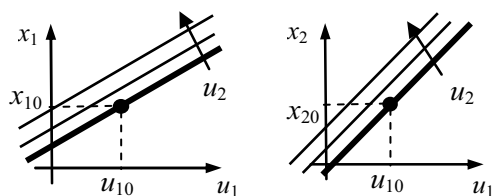
$$\begin{aligned} 1^\circ \quad \dot{x}(t) &= b_0u(t) \rightarrow 0 = b_0u, \\ 2^\circ \quad \begin{cases} \dot{x}_1(t) + x_1(t) - x_2(t) = u_1(t) \\ \dot{x}_2(t) + x_1(t) - x_2(t) = u_2(t) \end{cases} &\rightarrow x_1 - x_2 = u_1 = u_2. \end{aligned} \quad (3-3)$$

Równanie statyczne dla wyrażenia 1° nie określa wartości  $x$  (stan równowagi układu można wyznaczyć na podstawie równania różniczkowego: jeśli  $u \neq 0$ , to nie ma punktu równowagi, jeśli  $u = 0$ , to punktem równowagi może być dowolna wartość  $x$ ). Z kolei rozwiązanie równania statycznego dla wyrażenia 2° zależy od wartości  $u_1$  i  $u_2$  – jeśli  $u_1 = u_2$ , to nie ma rozwiązania, a jeśli  $u_1 \neq u_2$ , to rozwiązaniem są dowolne wartości  $x_1$  i  $x_2$ , które spełniają  $x_1 - x_2 = u_1$ . Mówiąc więc, że układ liniowy ma zawsze jeden punkt równowagi, pamiętamy o szczególnych przypadkach (3-3), gdy nie ma punktu równowagi lub jest ich nieskończenie wiele (układ równań nie jest oznaczony). Nieliniowe równania statyczne (układy równań) mogą mieć więcej niż jedno rozwiązanie i tym samym więcej niż jeden punkt równowagi, na przykład:

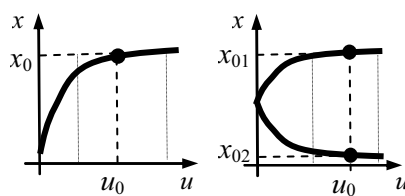
$$a_{02}x^2 + a_{01}x = b_0u, \quad a_{03}x^3 + a_{01}x = b_0u. \quad (3-4)$$

**Charakterystyka statyczna** obiektu jest graficzną prezentacją relacji  $x(u)$ , czyli zależności między zmienną wyjściową ( $x$ ) i wejściową ( $u$ ) w pewnym przedziale wartości  $u$ . Punkt równowagi ( $x_0, u_0$ ) jest punktem wykresu  $x(u)$  wyznaczonym dla określonej wartości  $u_0$  (wartość  $x_0 = x(u_0)$ ). Jeśli model jest wielowymiarowy (obejmuje wiele niezależnych zmiennych wyjściowych i wejściowych), to można narysować charakterystykę statyczną dla każdego z wyjść:  $x_i(u_1 \div u_m)$ . W praktyce ma ona postać rodziny charakterystyk statycznych, gdzie jedna ze zmiennych wejściowych jest re-

prezentowana na osi, a pozostałe są parametrami wykresu (rys. 3-1). W modelach liniowych wszystkie charakterystyki statyczne są liniowe. W modelach nieliniowych nie wszystkie charakterystyki statyczne  $x_i(u_1 \div u_m)$  muszą być nieliniowe lub posiadać wiele punktów równowagi (rys. 3-2), niektóre zależności mogą być liniowe.



Rys. 3-1. Rodzina charakterystyk statycznych, zakres pracy i punkt równowagi



Rys. 3-2. Nieliniowe charakterystyki statyczne (1 i 2 punkty równowagi)

W zastosowaniach inżynierskich stosuje się ograniczenie prezentacji wykresów do zakresu pracy, czyli przedziału wartości zmiennych wejściowych i wyjściowych, które są osiągalne lub stosowane w rzeczywistym układzie. W tym przedziale ustalany jest zazwyczaj punkt pracy obiektu (procesu technologicznego), czyli utrzymanie konkretne wartości na wejściach obiektu, które wyznaczają punkt równowagi do czasu wystąpienia zakłóceń ( $\rightarrow$  5.2.3).

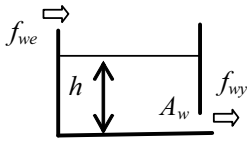
Uwaga: Układ liniowy ma zawsze jeden punkt równowagi (oczywiście poza szczególnym przypadkiem (3-3)), czyli jedno rozwiązanie statyczne, jeden punkt na charakterystyce statycznej wyznaczony dla określonych wartości wejściowych. Punkt równowagi  $(x_0, u_0)$  ma znaczenie ogólne – to każde jedno rozwiązanie równania statycznego (każdy jeden punkt na charakterystyce statycznej). Określenie „różne punkty równowagi układu” w układzie liniowym oznacza punkty równowagi wyznaczone dla różnych wartości wejściowych, np. początkowy i końcowy punkt równowagi, punkt pracy. Oznaczenie  $(x_0, u_0)$  reprezentuje punkt wyznaczony dla konkretnej wartości wejściowej wybranej z zakresu pracy, np. dla  $u_0 = 5$ . Mamy więc badanie układu w różnych punktach pracy (dla różnych wartości  $u_0$ ), przechodzenie układu od jednego do innego punktu równowagi.

Kolejne przykłady zilustrują zastosowanie modeli statycznych do identyfikacji wartości parametrów i analizowania własności układu w stanie równowagi. Przedstawione fragmenty skryptów natomiast zilustrują przykładową realizację tych zadań w badaniach symulacyjnych z uwzględnieniem własności Matlab, w szczególności zastosowanie różnych sposobów generowania wektorów oraz operacje na elementach wektora (zastosowanie operatorów z kropką zamiast pętli).

## 3.2. Zastosowanie charakterystyk do linearyzacji

### 3.2.1. Zbiornik ze swobodnym wypływem

Podstawą otwartych układów hydraulicznych jest pojedynczy zbiornik ze swobodnym wypływem (rys. 3-3). Model takiego elementu ( $\rightarrow$  2.2) to jedno równanie (2-6), które w stanie równowagi przyjmuje postać:



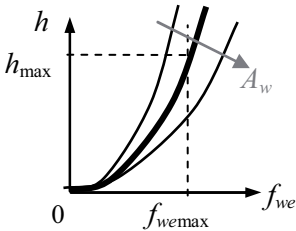
Rys. 3-3. Zbiornik z wypływem

$$0 = f_{we} - A_w \sqrt{2gh} \quad (3-5)$$

i umożliwia wyznaczenie zmiennej wyjściowej  $h$ :

$$h = \frac{f_{we}^2}{2gA_w^2}. \quad (3-6)$$

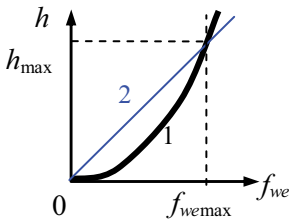
Jedynym parametrem modelu jest powierzchnia otworu ( $A_w$ ), którą łatwo jest zmierzyć (oszacować) na podstawie wymiarów. Na podstawie (3-6) można narysować charakterystykę statyczną zbiornika w zakresie  $0 \div f_{wemax}$ . Przykładowy skrypt poniżej ma na celu porównanie zbiorników o różnych powierzchniach otworu (rys. 3-4) – generuje charakterystyki dla różnych wartości  $A_w$ .



Rys. 3-4. Charakterystyka statyczna (3-6) – wpływ powierzchni  $A_w$

```
g=9.81;
tabAw=[.1, .2, .3];           %wektor parametrów, m2
kolor='grb';                   %wektor kolorów
Fwemax=2;                      %max przepływ wej., m2/s
Fwe=[0:Fwemax/10:Fwemax];     %wektor wartości wejściowych
figure; hold on; grid on;
for i=1:3                       %pętla dla wartości z tabAw
    h=Fwe.^2/(2*g*tabAw(i));    %wektor wartości wyjściowych
    plot(Fwe, h, kolor(i));
end
```

Zamiast nieliniowego równania (3-5) można zastosować jego liniowe przybliżenie:



Rys. 3-5. Charakterystyka statyczna:  
1) dokładna (3-6); 2) przybliżona (3-8)

$$0 = f_{we} - ah, \quad (3-7)$$

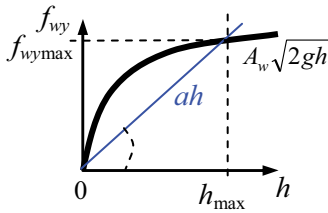
a wówczas charakterystyka statyczna jest oparta na zależności:

$$h = \frac{f_{we}}{a}, \quad (3-8)$$

przy czym wartość  $a$  powinna zapewnić, aby dokładna i przybliżona charakterystyka statyczna zbiornika były zbliżone do siebie (rys. 3-5).

Ponieważ przyczyną nieliniowości jest swobodny wypływ ( $f_{wy} = A_w \sqrt{2gh}$ ), to można zastosować przybliżenie tej zależności za pomocą siecznej (rys. 3-6). Porównując

dokładne i liniowe wyrażenie  $f_{wy}$  dla  $h=0$  i dla  $h=h_{\max}$  (tzn.  $(f_{wy}(0)=0$  oraz  $f_{wy}(h_{\max})=f_{wy\max}$ ), możemy obliczyć współczynnik  $a$ :



Rys. 3-6. Linearyzacja swobodnego wypływu  $f_{wy}(h)$

$$A_w \sqrt{2gh_{\max}} = ah_{\max} \rightarrow a = \frac{A_w \sqrt{2gh_{\max}}}{h_{\max}}, \quad (3-9)$$

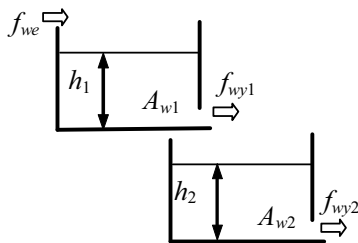
przy czym maksymalna wysokość  $h_{\max}$  występuje dla maksymalnej wartości na wejściu  $f_{we\max}$ :

$$h_{\max} = \frac{f_{we\max}^2}{2gA_w^2}.$$

Współczynnik  $a$  wyznaczony z tej zależności, zapewnia dwa wspólne punkty charakterystyki dokładnej i przybliżonej (rys. 3-5). Błąd liniowego przybliżenia, czyli różnica (3-6) i (3-8), zależy od punktu pracy wyznaczonego przez aktualny przepływ na wejściu  $f_{we}$ .

### 3.2.2. Kaskada zbiorników

Nieliniowe modele kaskad zbiorników ( $\rightarrow$  2.2) również można linearyzować przez przybliżenie sieczną wzoru opisującego swobodny wypływ. W przypadku niewspółdziałającej kaskady zbiorników ze swobodnym wypływem (rys. 3-7) jej model (2-8) w stanie równowagi ma postać układu równań:



Rys. 3-7. Zbiorniki niepołączone

$$f_{we} = A_{w1} \sqrt{2gh_1} = A_{w2} \sqrt{2gh_2}, \quad (3-10)$$

z którego można wyznaczyć zmienne wyjściowe:

$$h_1 = \frac{f_{we}^2}{2gA_{w1}^2}, \quad h_2 = \frac{f_{we}^2}{2gA_{w2}^2}. \quad (3-11)$$

Linowe przybliżenie równań (3-10) to:

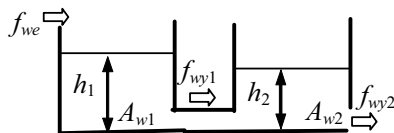
$$f_{we} = a_1 h_1 = a_2 h_2, \quad (3-12)$$

a stąd zmienne wyjściowe modelu:

$$h_1 = f_{we} / a_1, \quad h_2 = f_{we} / a_2. \quad (3-13)$$

Parametry modelu dokładnego ( $A_{w1}$ ,  $A_{w2}$ ) można łatwo zmierzyć, natomiast współczynniki modelu przybliżonego ( $a_1$ ,  $a_2$ ) są analogiczne jak w przypadku (3-9).

W kolejnym przykładzie zbiorniki są połączone przewodem (rys. 3-8). Model tej kaskady to układ równań (2-11), który w stanie równowagi, można zapisać jako:



Rys. 3-8. Zbiorniki połączone przewodem

$$f_{we} = A_{w1} \sqrt{2g(h_1 - h_2)} = A_{w2} \sqrt{2gh_2}. \quad (3-14)$$

Stąd dokładne wzory na zmienne wyjściowe:

$$h_1 = \left( \frac{1}{A_{w1}^2} + \frac{1}{A_{w2}^2} \right) \frac{f_{we}^2}{2g}, \quad h_2 = \frac{f_{we}^2}{2gA_{w2}^2}. \quad (3-15)$$

Przybliżona wersja modelu statycznego (3-14) to układ równań:

$$f_{we} = a_1(h_1 - h_2) = a_2 h_2 \quad (3-16)$$

i jego rozwiązanie:

$$h_1 = \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right) f_{we}, \quad h_2 = \frac{f_{we}}{a_2}. \quad (3-17)$$

Wyznaczenie współczynnika  $a_2$ , wynikającego z linearyzacji wypływu  $f_{wy2}$ , można wykonać identycznie jak dla wypływu z pojedynczego zbiornika (3-9). Z kolei podczas linearyzacji przepływu między zbiornikami ( $f_{wy1}$ ) we wzorze występuje różnica wysokości, wobec tego punkty do wyznaczenia siecznej (rys. 3-9) to:

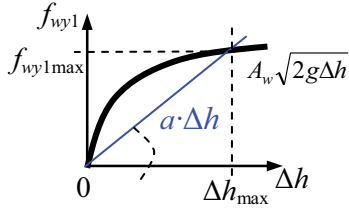
- minimalna różnica  $\Delta h = 0$  (powodująca minimalny wypływ:  $f_{wy1}(0) = 0$ ),
- maksymalna różnica  $\Delta h = \Delta h_{\max}$  (powodująca maksymalny wypływ:  $f_{wy1}(\Delta h_{\max})$ ).

Porównując opis dokładny i przybliżony:

$$A_{w1} \sqrt{2g \cdot \Delta h_{\max}} = a_1 \cdot \Delta h_{\max}$$

otrzymujemy:

$$a_1 = \frac{A_{w1} \sqrt{2g \cdot \Delta h_{\max}}}{\Delta h_{\max}}. \quad (3-18)$$



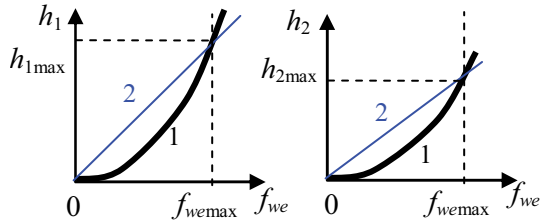
Rys. 3-9. Linearyzacja swobodnego wypływu  $f_{wy1}(\Delta h)$

W stanie równowagi przepływy między zbiornikami są sobie równe ( $f_{wy2\max} = f_{wy1\max} = f_{we\max}$ ),

więc maksymalna różnica  $\Delta h_{\max}$  wynosi:

$$\Delta h_{\max} = \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right) f_{we\max} - \frac{f_{we\max}}{a_2} = \frac{f_{we\max}}{a_1}.$$

Dokładne i przybliżone (zlinearyzowane) charakterystyki statyczne kaskady przedstawiono na rysunku 3-10.



Rys. 3-10. Charakterystyki statyczne:  
1) dokładne (3-15); 2) przybliżona (3-17)

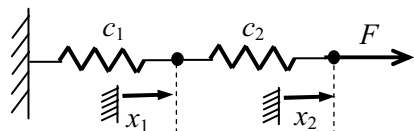
Przedstawione przykłady linearyzacji ilustrują jeden ze sposobów przekształcania modelu nieliniowego w liniowy. Właściwie jest to sposób na unikanie nieliniowości już na etapie konstrukcji modelu, oczywiście kosztem dokładności.

### 3.3. Zastosowanie charakterystyk do identyfikacji

#### 3.3.1. Przykład układu mechanicznego

Zmienne wyjściowe układu mechanicznego ( $\rightarrow$  2.4) oznaczają położenie punktów bilansowych ( $x$ ). Statyczny opis takiego układu zależy jedynie od elementów opisujących siły sprężystości (pozostałe elementy zerują się). Proste połączenie dwóch sprężyn o różnych współczynnikach sztywności  $c_1$  i  $c_2$ , na które działa siła  $F$  (rys. 3-11) może być modelem układu, w którym nie ma innych elementów, lub modelem statycznym, w którym pominięto wpływ masy i sił tarcia, jak np. model (2-32). Model układu ma postać układu równań algebraicznych:

$$\begin{cases} 0 = c_1 x_1 + c_2 (x_1 - x_2) \\ F = c_2 (x_1 - x_2) \end{cases}, \quad (3-19)$$



Rys. 3-11. Połączenie dwóch sprężyn

gdzie siła  $F$  jest zmienną wejściową, natomiast położenia  $x_1$  i  $x_2$  są zmiennymi wyjściowymi.

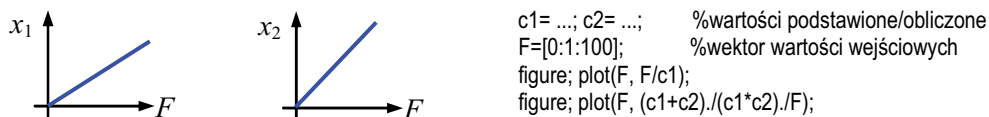
Do prowadzenia badań symulacyjnych konieczna jest znajomość wartości współczynników  $c_1$  i  $c_2$ . Można je obliczyć na podstawie znajomości kształtu i materiału sprężyny, ale można je również wyznaczyć na podstawie pomiaru wartości zmiennych w wybranym punkcie równowagi ( $F_0, x_{10}, x_{20}$ ), które należy podstawić do układu (3-19) i rozwiązać względem  $c_1$  i  $c_2$ :

$$c_1 = \frac{F_0}{x_{10}} \quad \text{oraz} \quad c_2 = \frac{F_0}{x_{20} - x_{10}}. \quad (3-20)$$

Po obliczeniu wartości  $c_1$  i  $c_2$  można wyznaczyć charakterystyki statyczne, rozwiązując ten sam układ (3-19), ale ze względu na zmienne wyjściowe:

$$x_1 = \frac{F}{c_1} \quad \text{oraz} \quad x_2 = \frac{c_1 + c_2}{c_1 c_2} F. \quad (3-21)$$

Wzory te można zastosować do rysowania charakterystyk (rys. 3-12) – w przykładowym skrypcie wykorzystano operacje generowania wektora oraz obliczania elementów wektora bezpośrednio w parametrach funkcji plot:



Rys. 3-12. Charakterystyki statyczne układu

Model (3-19) jest liniowy, więc powyższe zadania można zrealizować bez wyznaczania wzorów (3-21), tylko z zastosowaniem macierzowej postaci równań:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ lub symbolicznie } \mathbf{F} = \mathbf{C}\mathbf{x}, \quad (3-22)$$

gdzie:  $\mathbf{F}$  i  $\mathbf{x}$  to wektory zmiennych układu<sup>1</sup>,  $\mathbf{C}$  – macierz współczynników. Stąd można wyznaczyć wektor zmiennych wyjściowych  $\mathbf{x}$ :

$$\mathbf{x} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{F}. \quad (3-23)$$

Zapis macierzowy można wykorzystać także do wyznaczania wartości współczynników na podstawie pomiarów siły i przesunięć ( $F_0, x_{10}, x_{20}$ ). W tym celu model (3-19) należy zapisać w postaci:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{10} & x_{10} - x_{20} \\ 0 & x_{20} - x_{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \text{ lub symbolicznie } \mathbf{F} = \mathbf{X}\mathbf{c}, \quad (3-24)$$

gdzie tym razem  $\mathbf{F}$  i  $\mathbf{c}$  występują w roli wektorów zmiennych, a  $\mathbf{X}$  w roli macierzy współczynników (wyznaczonych na podstawie wartości zmiennych  $x_{10}, x_{20}$ ), co umożliwia wyznaczenie wartości wektora  $\mathbf{c}$ :

$$\mathbf{c} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{F}. \quad (3-25)$$

Ręczne wykonywanie operacji na macierzach bywa pracochłonne (np. odwracanie dużych macierzy), ale programy symulacyjne są przygotowane do tego typu działań. Są to jednak operacje na wartościach, więc nie będzie możliwości analizy wzorów funkcji. W tym przypadku zarówno wzory na współczynniki (3-20), jak i zmienne (3-21) są bardzo proste. Dla bardziej złożonych modeli obliczanie zmiennych wyjściowych (3-23) za pomocą macierzy powoduje pewną trudność. Jeśli zdefiniujemy wartości siły  $F$  w postaci wektora (np.  $F=[0:1:100]$ ), to realizacja wyrażenia (3-23) oznacza, że zmienne  $\mathbf{F}$  i  $\mathbf{x}$  są macierzami:

$$\begin{bmatrix} x_1(1) & \dots & x_1(n) \\ x_2(1) & \dots & x_2(n) \end{bmatrix} = \mathbf{C}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ F(1) & \dots & F(n) \end{bmatrix} \quad (3-26)$$

i do rysowania charakterystyk statycznych trzeba wybrać odpowiednie elementy:

$$\text{plot}(F(2,:), x(1,:)), \text{plot}(F(2,:), x(2,:), \dots)$$

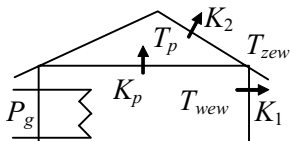
Problem ten nie występuje przy zastosowaniu wzoru (3-23) do obliczania punktu pracy (dla pojedynczej wartości zmiennej  $F$ ).

Powyższy przykład ilustruje różne metody wyznaczania parametrów i charakterystyk statycznych liniowego układu, a w szczególności zastosowanie operacji macierzowych.

<sup>1</sup> Należy rozróżniać wektor wartości zmiennej (np.  $F, x_1, x_2$ ) oraz wektor zmiennych wejściowych  $\mathbf{F}$  (zawierający wartość 0 i zmienną  $F$ ) i wyjściowych  $\mathbf{x}$  (zmienne  $x_1$  i  $x_2$ ).

### 3.3.2. Parametry i charakterystyki statyczne budynku z grzejnikiem

Układ równań bilansowych budynku z poddaszem i ogrzewaniem elektrycznym przedstawiony na rysunku 3-13 uwzględnia ciepło dostarczane przez grzejniki o mocy  $P_g$  oraz ciepło tracone przez zewnętrzne ściany (współczynnik  $K_1$ ), sufit (współczynnik  $K_p$ ) i dach (współczynnik  $K_2$ ). W warunkach statycznych równania mają postać:



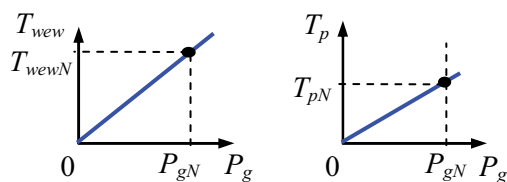
$$\begin{cases} 0 = P_g - K_p(T_{wew} - T_p) - K_1(T_{wew} - T_{zew}) \\ 0 = K_p(T_{wew} - T_p) - K_2(T_p - T_{zew}) \end{cases} \quad (3-27)$$

Rys. 3-13. Budynek z poddaszem i ogrzewaniem elektrycznym

Zmiennymi wejściowymi są moc  $P_g$  i temperatura zewnętrzna  $T_{zew}$ , a zmiennymi wyjściowymi – temperatury wewnątrz budynku,  $T_{wew}$  i  $T_p$ .

Do wyznaczenia wartości współczynników można zastosować metodę opartą na typowych danych, które można znaleźć w projektach budowlanych lub zmierzyć. Założmy, że model reprezentuje budynek o powierzchni  $100 \text{ m}^2$  i jego zapotrzebowanie na ciepło wynosi  $10 \text{ kW}$  (nominalna moc grzejników  $P_{gN} = 10 \text{ kW}$ ). W warunkach obliczeniowych (w Polsce dla  $T_{zewN} = -20^\circ\text{C}$ ) temperatura wewnątrz pomieszczeń  $T_{wewN}$  wynosi  $20^\circ\text{C}$ , a na poddaszu  $T_{pN}$  wynosi  $10^\circ\text{C}$ . Wartości te wyznaczają punkt równowagi; po podstawieniu do (3-27) powstaje układ równań, w którym nieznane są wartości współczynników ( $K_{cw}$ ,  $K_{cwp}$ ,  $K_{cp}$ ). Układ jest nieoznaczony, więc konieczne jest jeszcze jedno równanie, które może powstać jedynie na podstawie dodatkowego założenia, takiego jak relacja między współczynnikami strat (np.  $K_p = 0.25K_2$ ) albo oszacowanie, że 30% zapotrzebowania wynika ze strat ciepła przez ściany w warunkach nominalnych, czyli  $K_2(T_{wewN} - T_{zewN}) = 0.3P_{gN}$ .

Po uzupełnieniu i rozwiązaniu układu równań można narysować charakterystyki statyczne obiektu (rys. 3-14). Obliczanie wartości współczynników i rysowanie wykresów można połączyć w jednym, uniwersalnym skrypcie:



Rys. 3-14. Charakterystyki statyczne układu z rysunku 3-13, dla nominalnej wartości  $T_{zewN}$

```
PgN = 1000; TzewN = -20; TwewN = 20; TpN = 10;
Kcw = ...; Kcwp = ...; Kcp = ...; %współczynniki
Pg = [0 : 0.1*PgN : PgN]; %wektor wartości wej.
Tzew = TzewN; %parametr wykresu
Twew = ...; %obliczenie wektora Twew
Tp = ...; %obliczenie wektora Tp
figure, plot(Pg, Twew, '-', PgN, TwewN, 'o');
figure, plot(Pg, Tp, '-', PgN, TpN, 'o');
```

Rozwiązanie układu (3-27) ze względu na  $T_{wew}$  i  $T_p$  jest funkcją dwóch zmiennych  $P_g$  i  $T_{zew}$ , więc jedna z nich jest zawsze parametrem wykresu. Na wykresach dorysowano punkt, odpowiadający wartościom nominalnym (obliczeniowym). Jeśli wszystkie wzory są poprawnie wyprowadzone i zapisane, to punkt ten trafi na linię wykresu.

Przykład ilustruje wyznaczanie parametrów w oparciu o opis statyczny i dodatkowe założenia, oraz rysowanie i weryfikację charakterystyk modelu typu MIMO.

### 3.3.3. Obwód hydrauliczny

Podstawowe modele zamkniętych układów hydraulicznych są układami równań statycznych ( $\rightarrow$  2.6.1), a parametrami tych modeli są opory hydrauliczne, które trudno wyznaczyć analitycznie, ale można je wyznaczyć na podstawie pomiaru wartości przepływu i ciśnienia. Na przykład liniowy model układu ogrzewania z dwoma grzejnikami (rys. 2-40) zawiera dwa równania:

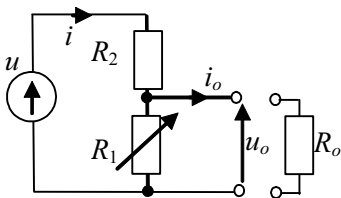
$$\begin{cases} \Delta p = R(f_{g1} + f_{g2}) + (R_{g1} + R_{z1})f_{g1} \\ \Delta p = R(f_{g1} + f_{g2}) + (R_{g2} + R_{z2})f_{g2} \end{cases}, \quad (3-28)$$

które umożliwiają obliczenie rozptywu cieczy ( $f_{g1}, f_{g2}$ ) przy zadanej różnicy ciśnień ( $\Delta p$ ). Opory  $R$ ,  $R_{g1}$  i  $R_{g2}$  są stałymi parametrami układu, które obejmują dany element (kocioł, grzejnik) oraz przewody łączące te elementy. Opory zaworów  $R_{z1}$  i  $R_{z2}$  mogą się zmieniać, przy czym zakładamy, że maksymalnie otwarty zawór ma zerowy opór (minimalny opór maksymalnie otwartego zaworu włączamy do oporu grzejnika). Wartości stałych oporów można obliczyć na podstawie warunków nominalnych, to znaczy gdy zawory są otwarte i znamy wartości  $\Delta p_N, f_{g1N}, f_{g2N}$ . Jednak po podstawieniu tych danych do (3-28) otrzymujemy układ dwóch równań z trzema niewiadomymi ( $R, R_{g1}, R_{g2}$ ); konieczna jest jeszcze dodatkowa informacja, na przykład, że w warunkach nominalnych spadek ciśnienia na kotle ( $\Delta p_{kN} = R(f_{g1N} + f_{g2N})$ ) stanowi 10% ciśnienia jakie wytwarza pompa. Układ równań z dodatkowym równaniem  $R(f_{g1N} + f_{g2N}) = 0.1 \cdot \Delta p_N$  jest oznaczony – umożliwia wyznaczenie wszystkich parametrów.

## 3.4. Zastosowanie charakterystyk do analizowania pracy układu

### 3.4.1. Obwód elektryczny

Rysunek 3-15 przedstawia dzielnik napięcia, w którym za pomocą potencjometru  $R_1$ , można ustawiać wartość napięcia na zaciskach wyjściowych ( $u_o$ ). Dzielnik pełni rolę sterowanego źródła napięcia dla różnych odbiorników  $R_o$ . Rozważymy model samego dzielnika oraz model po włączeniu odbiornika (obciążenia  $R_o$ ). Obwód zawiera tylko rezystancje, więc zależności napięć i prądów są opisem statycznym:



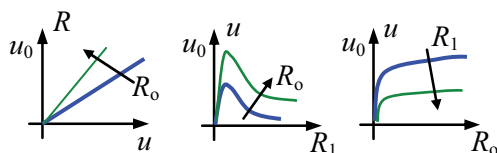
Rys. 3-15. Dzielnik napięcia

| bez obciążenia                                              | z obciążeniem $R_o$                                                                              |
|-------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\begin{cases} u = (R_1 + R_2)i \\ u_o = R_1 i \end{cases}$ | $\begin{cases} u = (R_1 + R_2)i \\ u_o = R_1(i - i_o) \\ u_o = R_o i_o \end{cases} \quad (3-29)$ |

Zmienną wyjściową dzielnika jest napięcie  $u_o$ :

$$u_o = \frac{R_1}{R_1 + R_2} u \quad \left| \quad u_o = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \frac{R_o}{R_1 + R_o} u \quad (3-30)$$

Ze względu na zastosowanie dzielnika przyjmuje się, że rezystancja  $R_2$  jest parametrem, a rezystancje  $R_1$  i  $R_o$  oraz napięcie  $u$  są zmiennymi wejściowymi. W ten sposób powstają charakterystyki statyczne dzielnika w funkcji każdego z wejść (rys. 3-15) przy założeniu, że pozostałe wejścia są parametrami danego wykresu:

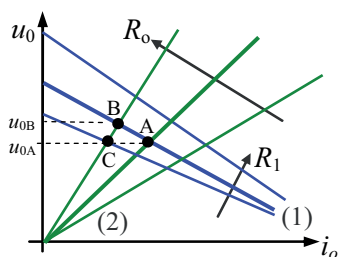


Rys. 3-16. Charakterystyki obwodu z rysunku 3-15

```
%Przykład skryptu – wykres u0(u)
R2=10; R1=1;
tabR0=[1,10];
U=[0:0.1:10];
for i=1:2,
    R0=tabR0(i);
    wyU0=R1./(R1+R2).*R0/(R1+R0)*U; %u0
    plot(U,wyU0,kolor(i)); %kolor='bgr';
end
```

Wykres  $u_o(u)$  został wyznaczony dla wybranej wartości  $R_1$  oraz dwóch różnych wartości  $R_o$ . W ten sposób można badać wpływ poszczególnych zmiennych układu.

Charakterystyki statyczne wykorzystuje się często także do analizy współpracy dwóch części układu – zazwyczaj jedna z nich pełni rolę zasilania, a druga jest odbiornikiem (obciążeniem). W tym celu układ równań obwodu (3-29) został podzielony na opis dzielnika napięcia (1) i opis obciążenia (2):



Rys. 3-17. Charakterystyki dzielnika napięcia i obciążenia

$$(1) \begin{cases} u = (R_1 + R_2)i \\ u_0 = R_1(i - i_o) \end{cases} \rightarrow u_0 = \frac{R_1 u}{R_1 + R_2} - R_1 i_o, \quad (3-31)$$

$$(2) u_0 = R_o i_o.$$

Opis dzielnika i obciążenia stanowi układ równań, który można rozwiązać analitycznie (wynikiem jest wyrażenie (3-30)) lub graficznie (rys. 3-17).

W tym drugim przypadku, oba opisy zostały przetworzone do postaci  $u_o(i_o)$ , która jest podstawą do narysowania wykresu dzielnika i obciążenia, przy czym wykres dzielnika narysowano dla kilku wartości  $R_1$ , natomiast wykres obciążenia dla kilku wartości  $R_o$ . Punkt przecięcia wykresu dzielnika i wykresu obciążenia (A) jest rozwiązaniem układu (punktem pracy) dla określonych wartości  $R_1$  i  $R_o$  (można odczytać wartość napięcia  $u_o$ ). Jeśli parametry dzielnika ( $R_1$ ,  $R_2$ ) pozostają stałe, ale obciążenie ( $R_o$ ) wzrasta, to punkt pracy przesuwa się wzdłuż wykresu dzielnika do nowego punktu pracy (B). Wartość napięcia  $u_o$  w punkcie B jest wyższa niż w punkcie A ( $u_{oB} > u_{oA}$ ), a na podstawie wykresów można wyznaczyć punkt C i określić wartość  $R_1$ , która zapewniłaby utrzymanie napięcia po zmianie obciążenia ( $u_{oC} = u_{oA}$ ).

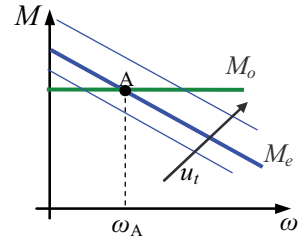
### 3.4.2. Napęd elektryczny

Napędy elektryczne  $e$  w naturalny sposób dzielą się na część elektryczną i mechaniczną i są reprezentowane przez moment elektryczny  $M_e$  wytwarzany przez silnik i moment mechaniczny  $M_m$ , charakteryzujący maszynę roboczą ( $\rightarrow$  2.5.2). W każdej chwili momenty równoważą się:  $M_e(t) = M_m(t)$ . W stanie równowagi ilustrują to charaktery-

styki mechaniczne silnika i obciążenia. Przykładem może być model napędu z silnikiem obcowzbudnym, czyli układ (2-66), który w stanie równowagi ma postać:

$$\begin{cases} 0 = -R_t i_t - c_w \omega + u_t \\ c_m i_t = M_o \end{cases}, \text{ przy czym } c_m i_t = M_e \text{ (z definicji).} \quad (3-32)$$

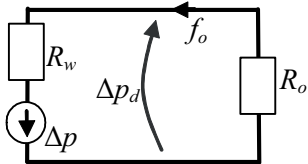
Układ można podzielić na charakterystykę mechaniczną silnika, czyli zależność momentu  $M_e$  od prędkości  $\omega$  (tzn.  $M_e(\omega) = c_m(u_t - c_w \omega)/R_t$ ) i charakterystykę mechaniczną obciążenia, czyli zależność momentu  $M_o$  od prędkości  $\omega$ , odpowiednią dla typu i parametrów maszyny roboczej (rys. 2-24). Wykreślenie tych charakterystyk w jednym układzie (rys. 3-18) pozwala wyznaczyć prędkość obrotową  $\omega$  napędu. Można również wskazać wartość napięcia  $u_t$ , tak aby uzyskać określoną prędkość  $\omega$ . Te same wyniki można uzyskać przez analityczne rozwiązanie układu (3-32), ale w praktyce inżynierskiej rozwiązanie graficzne bywa wygodniejsze, ponieważ charakterystyki mechaniczne silnika i maszyny napędowej są najczęściej nieliniowe i dostępne w postaci graficznej.



Rys. 3-18. Charakterystyka mechaniczna silnika ( $M_e$ ) i obciążenia ( $M_o$ )

### 3.4.3. Zamknięty układ hydrauliczny

Analiza pracy na charakterystykach statycznych jest często wykorzystywana w układach hydraulicznych, zwłaszcza w przypadku nieliniowego opisu układu. Rysunek 3-19 przedstawia prosty schemat sieci hydraulicznej – pompa wytwarza zadaną różnicę ciśnień  $\Delta p_o$ , ale różnica ciśnień podawana na zewnętrzny obwód (ciśnienie dyspozycyjne)  $\Delta p_d$  jest pomniejszona o spadek ciśnienia na oporze wewnętrznym  $R_w$ .



Rys. 3-19. Ciśnienie dyspozycyjne  $\Delta p_d$

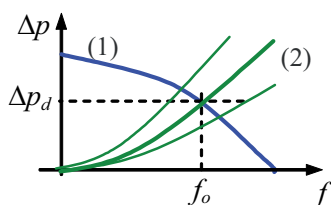
Z jednej strony ciśnienie  $\Delta p_d$  opisuje zależność:

$$(1) \Delta p_d = \Delta p_o - R_w f_o^2, \quad (3-33)$$

a z drugiej strony ciśnienie  $\Delta p_d$  jest zużywane na pokonanie oporów hydraulicznych obciążenia  $R_o$ :

$$(2) \Delta p_d = R_o f_o^2. \quad (3-34)$$

Ten układ równań można rozwiązać graficznie (rys. 3-20) lub analitycznie:



Rys. 3-20. Charakterystyka źródła i obciążenia

$$f_o = \sqrt{\frac{\Delta p_o}{R_w + R_o}}, \quad \Delta p_d = \frac{R_o \Delta p_o}{R_w + R_o}. \quad (3-35)$$

Na charakterystykach można obserwować zmiany przepływu  $f_o$  i ciśnienia dyspozycyjnego  $\Delta p_d$ , jakie powoduje zmiana obciążenia (2) przy niezmienniej charakterystyce źródła ciśnienia (1).

### **III. Badania dynamiki w praktyce inżynierskiej**



## 4. Zasady badania liniowych równań różniczkowych

*czyli baza dla wszystkiego co będzie potem*

### 4.1. Wprowadzenie

Własności dynamiczne powodują, że reakcja obiektu na zmiany nie ustala się natychmiast, co można zilustrować na wykresach czasowych ( $\rightarrow$  1.2). Podstawą modeli, które opisują te własności, są równania różniczkowe i jeśli są to równania liniowe, to zawsze można je rozwiązać ( $\rightarrow$  1.4), czyli wyznaczyć wzór funkcji opisujący reakcję obiektu w czasie. Szczególne znaczenie praktyczne mają równania pierwszego i drugiego rzędu, ponieważ reprezentują one podstawowe własności dynamiki, a jednocześnie są proste do rozwiązania i analizowania ( $\rightarrow$  4.2). Kluczowa w badaniach dynamiki jest część swobodna tych rozwiązań ( $\rightarrow$  4.3) decydująca o stabilności rozwiązania, a złożona zazwyczaj ze składników postaci:  $Ae^{at}$ ,  $Ae^{at}\sin(\omega t + \varphi)$ . Funkcje występujące w rozwiązaniach układów pierwszego i drugiego rzędu są również składnikami bardziej złożonych rozwiązań równań różniczkowych wyższego rzędu i układów równań.

### 4.2. Analityczne rozwiązywanie liniowego równania różniczkowego

#### 4.2.1. Rozwiązanie równania różniczkowego w badaniach dynamiki [19]

W praktyce inżynierskiej ogólny algorytm rozwiązywania równań różniczkowych ( $\rightarrow$  1.4.2) można znacznie uprościć, ponieważ w podstawowych badaniach dynamiki stosowane są szczególne wymuszenia i warunki początkowe. Zasady takiego postępowania zostaną omówione na przykładzie równania drugiego rzędu ( $a_2 \neq 0$ ):

$$a_2 \ddot{x}(t) + a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = b_0 u(t), \quad (4-1)$$

gdzie operacje symboliczne są proste.

#### I. Rozwiązanie swobodne (składowa swobodna, przejściowa)

Równanie charakterystyczne modelu liniowego można zawsze napisać wprost na podstawie równania różniczkowego (4-1). Ma ono następującą postać:

$$a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0. \quad (4-2)$$

Pierwiastki ( $\lambda_1, \lambda_2$ ) tego równania są nazywane **biegunami układu**:

$$\lambda_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{\Delta}}{2a_2}, \quad \lambda_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{\Delta}}{2a_2}, \quad \text{gdzie } \Delta = a_1^2 - 4a_2 a_0, \quad (4-3)$$

a poprawność ich obliczenia można sprawdzić przez podstawienie do iloczynowej postaci równania charakterystycznego:

$$a_2 (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \rightarrow a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0. \quad (4-4)$$

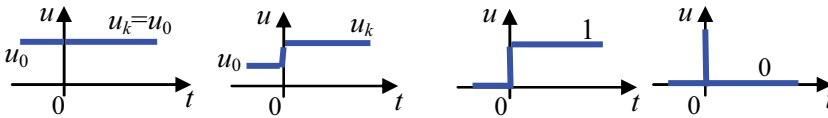
Założmy, że bieguny układu są rzeczywiste i różne, co oznacza, że rozwiązanie swobodne ma następującą postać:

$$x_s(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}. \quad (4-5)$$

Parametry  $A_1$  i  $A_2$  są jeszcze nieznanne, ale niezależnie od ich wartości rozwiązanie swobodne będzie zanikać z czasem, jeśli oba bieguny są ujemne.

## II. Rozwiązanie wymuszone (składowa wymuszona, ustalona)

W przypadku równań opisujących układy automatyki najczęściej wyznaczane są rozwiązania dla wymuszenia  $u(t)$ , które jest stałe dla  $t > 0$ . Warunek ten spełniają funkcje o stałej wartości oraz wymuszenia skokowe i impulsowe (rys. 4-1).



Rys. 4-1. Wymuszenie stałe dla  $t > 0$

We wszystkich tych przypadkach rozwiązanie wymuszone może być wyznaczone na podstawie równania statycznego (po wyzerowaniu pochodnych w (4-1)):

$$a_0 x = b_0 u. \quad (4-6)$$

Jeśli dla  $t > 0$  wymuszenie ma wartość  $u_k$ , to składowa wymuszona  $x_w(t)$  ma postać:

$$x_w(t) = x_k = \frac{b_0}{a_0} u_k = k_{ukl} u_k, \text{ jeśli } a_0 \neq 0. \quad (4-7)$$

W szczególności dla wymuszenia skokowego  $1(t)$  i impulsowego  $\delta(t)$  mamy:

- dla  $u(t) = 1(t)$  jest  $u_k = 1$ , stąd  $x_w(t) = x_k = b_0 / a_0 = k_{ukl}$ ,
  - dla  $u(t) = \delta(t)$  jest  $u_k = 0$ , stąd  $x_w(t) = x_k = 0$ .
- (4-8)

We wszystkich tych przypadkach rozwiązanie wymuszone  $x_w(t)$  jest wartością stałą, o ile tylko  $a_0 \neq 0$ . Współrzędne  $(x_k, u_k)$ , które opisują układ w stanie równowagi, nazywamy **końcowym punktem równowagi**. Równanie liniowe ma tylko jeden punkt równowagi dla danego wymuszenia  $u_k$  (poza szczególnym przypadkiem, gdy  $a_0 = 0$ , co omówiono w  $\rightarrow 3.1$ ). Wartość  $b_0/a_0$  nazywamy **wzmocnieniem układu**  $k_{ukl}$  przy stałym wymuszeniu.

## III. Rozwiązanie ogólne

Rozwiązanie ogólne równania drugiego rzędu (4-1) z wymuszeniem stałym, skokowym lub impulsowym to klasa rozwiązań o postaci:

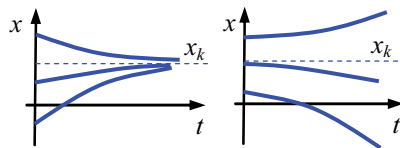
$$x(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} + x_k, \text{ gdzie } x_k = k_{ukl} u_k. \quad (4-9)$$

## IV. Rozwiązanie szczególne

Dwa parametry  $A_1$  i  $A_2$ , występujące w rozwiązaniu ogólnym, są wyznaczane dla konkretnych warunków początkowych, które są niejako podsumowaniem całej przeszłości układu do chwili  $t = 0$  (nie ma znaczenia jak układ osiągnął ten stan).

W praktyce inżynierskiej wybór warunków początkowych zależy od celu badania.

**Badania ze stałym wymuszeniem** ( $u_0 = u_k$ ) służą do analizowania ewolucji stanu układu od różnych warunków początkowych (rys. 4-2). Szczególnym przypadkiem jest badanie układu jednorodnego, czyli bez zmiennych wejściowych ( $u_0 = u_k = 0$ ).



Rys. 4-2. Przykłady ewolucji stanu

Rozważmy dwa warianty warunków początkowych: 1)  $x(0), \dot{x}(0)$ ; 2)  $\dot{x}(0), \ddot{x}(0)$ .

1) Po podstawieniu warunków:  $x(0) = w_0, \dot{x}(0) = w_1$  do (4-9) powstaje układ równań:

$$\begin{cases} w_0 = A_1 e^{\lambda_1 0} + A_2 e^{\lambda_2 0} + x_k \rightarrow w_0 = A_1 + A_2 + x_k, \\ w_1 = \lambda_1 A_1 e^{\lambda_1 0} + \lambda_2 A_2 e^{\lambda_2 0} \rightarrow w_1 = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 \end{cases} \quad (4-10)$$

który umożliwia obliczenie wartości  $A_1$  i  $A_2$ .

2) Warunki początkowe są zadawane często w postaci:  $\dot{x}(0) = w_1, \ddot{x}(0) = w_2$ , co można wykorzystać do ułożenia układu równań postaci:

$$\begin{cases} w_1 = \lambda_1 A_1 e^{\lambda_1 0} + \lambda_2 A_2 e^{\lambda_2 0} \rightarrow w_1 = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 \rightarrow A_1, A_2 \\ w_2 = \lambda_1^2 A_1 e^{\lambda_1 0} + \lambda_2^2 A_2 e^{\lambda_2 0} \rightarrow w_2 = \lambda_1^2 A_1 + \lambda_2^2 A_2 \end{cases} \quad (4-11)$$

Warunki ( $w_1, w_2$ ) wraz z wartością wymuszenia  $u(0) = u_k$  można również podstawić do równania (4-1) i wyznaczyć wartość początkową  $x(0)$ :

$$a_2 w_2 + a_1 w_1 + a_0 x(0) = b_0 u_k \rightarrow x(0), \quad (4-12)$$

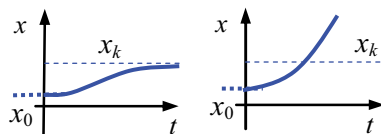
czyli przeliczyć warunki ( $w_1, w_2$ ) na ( $w_0, w_1$ ), a następnie zastosować układ (4-10).

Rozwiązanie szczególne równania (4-1) dla stałego wymuszenia  $x_k$  i warunków początkowych ( $w_0, w_1$ ) ma postać:

$$x(t) = \frac{\lambda_2 (x_k - w_0) + w_1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1 (x_k - w_0) + w_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_2 t} + x_k, \text{ gdzie } x_k = k_{ukl} u_k. \quad (4-13)$$

Badania z wymuszeniem o stałej wartości (lub bez wymuszeń) są stosowane głównie podczas analizowania własności układów bez zmiennych wejściowych, takich jak na przykład modele układów biologicznych ( $\rightarrow$  2.6.2) – przyczyną zmian w układzie (przyczyną ewolucji stanów) są warunki początkowe różne od punktu równowagi. Pewnym wariantem tych badań jest wyznaczanie portretów fazowych ( $\rightarrow$  21.2).

**Badania z wymuszeniem skokowym** należą do podstawowych badań dynamiki. **Odpowiedź na wymuszenie skokowe** jest reakcją układu na skokową zmianę wartości wejściowej ( $u_0 \rightarrow u_k$ ), która pojawia się w czasie, gdy układ jest w stanie równowagi. Ponieważ zazwyczaj analiza zachowania układów dotyczy reakcji na niewielkie zakłócenia wokół początkowego punktu równowagi, to punkt ten nazywa się również **punktem pracy**. Warunek poprawności badania (tzn. stan rów-



Rys. 4-3. Przykłady odpowiedzi na wymuszenie skokowe

nowagi przed wystąpieniem skokowej zmiany) oznacza, że w chwili początkowej wszystkie pochodne są równe zero.

Po podstawieniu warunków  $\dot{x}(0)=0$ ,  $\ddot{x}(0)=0$  do równania (4-1) można wyznaczyć  $x(0)$ :

$$a_2 \cdot 0 + a_1 \cdot 0 + a_0 x(0) = b_0 u_0 \rightarrow x(0) \quad (4-14)$$

i zdefiniować wymagane warunki początkowe w postaci:

$$\dot{x}(0)=0, \quad x(0)=x_0, \quad \text{gdzie } x_0 = k_{ukl} u_0. \quad (4-15)$$

Wartości parametrów  $A_1$  i  $A_2$  w rozwiązaniu (4-9) są wyznaczane z układu równań:

$$\begin{cases} x_0 = A_1 e^{\lambda_1 \cdot 0} + A_2 e^{\lambda_2 \cdot 0} + x_k \rightarrow \begin{cases} x_0 = A_1 + A_2 + x_k \\ 0 = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 \end{cases} \end{cases} \quad (4-16)$$

Ostatecznie odpowiedź równania (4-1) na wymuszenie skokowe ( $u_p \rightarrow u_k$ ) to:

$$x(t) = \frac{\lambda_2 (x_k - x_0)}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 t} - \frac{\lambda_1 (x_k - x_0)}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_2 t} + x_k, \quad \text{gdzie } x_k = k_{ukl} u_k, \quad x_0 = k_{ukl} u_0. \quad (4-17)$$

Szczególnym przypadkiem odpowiedzi na wymuszenie skokowe jest **odpowiedź skokowa**  $h(t)$ , czyli odpowiedź na skok jednostkowy  $1(t)$ . Wówczas:

- dla początkowej wartości wejściowej  $u_0 = 0$ , stan równowagi wynosi  $x_0 = 0$ ,
- końcowa wartość wymuszenia  $u_k = 1$ , więc wartość końcowa  $x_k = b_0/a_0 = k_{ukl}$ .

Odpowiedź skokowa  $h(t)$  równania (4-1) ma więc postać:

$$h(t) = \frac{\lambda_2 x_k}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 t} - \frac{\lambda_1 x_k}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_2 t} + x_k = k_{ukl} \left( 1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 t} - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_2 t} \right). \quad (4-18)$$

### **Badania z wymuszeniem impulsowym**

polegają na wyznaczeniu reakcji układu znajdującego się w stanie równowagi, po podaniu impulsowej zmiany wymuszenia. W badaniach analitycznych wyznacza się **odpowiedź impulsową**, czyli odpowiedź na teoretyczny impuls Diraca – z definicji:

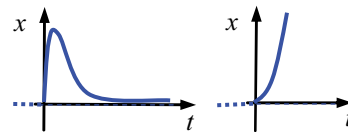
$\delta(t) = 0$  dla  $t \neq 0$  i  $\delta(t) = \infty$  dla  $t = 0$ , a pole tego impulsu wynosi 1. Szczególne własności funkcji impulsowej w chwili 0 utrudniają rozwiązanie, jednak można je uprościć po zastosowaniu jednej z własności układów liniowych – odpowiedź impulsowa  $g(t)$  jest pochodną odpowiedzi skokowej  $h(t)$ :

$$g(t) = \dot{h}(t). \quad (4-19)$$

Stąd odpowiedź impulsowa  $g(t)$  równania (4-1) ma postać:

$$g(t) = k_{ukl} \left( \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 t} - \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_2 t} \right) = k_{ukl} \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} (e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}) \quad (4-20)$$

i jest szczególnym przypadkiem rozwiązania – zawiera tylko składową swobodną.



Rys. 4-4. Przykłady odpowiedzi impulsowych

Zasady postępowania przedstawione powyżej można zastosować również do równań o wielu zmiennych wejściowych, jak na przykład w poniższym przypadku:

$$a_2\ddot{x}(t) + a_1\dot{x}(t) + a_0x(t) = b_{10}u_1(t) + b_{20}u_2(t), \quad a_2 \neq 0. \quad (4-21)$$

Składowa  $x_s(t)$  nie zależy od wymuszeń, ma więc postać (4-5). Natomiast składowa  $x_w(t)$  dla stałych wymuszeń  $u_1$  i  $u_2$  (dla  $t > 0$ ) wynika z równania statycznego:

$$a_0x = b_{10}u_1 + b_{20}u_2 \quad (4-22)$$

i ma stałą wartość  $x_w$ :

$$x_w(t) = x_k = \frac{b_{10}u_{1k} + b_{20}u_{2k}}{a_0} = k_{uk1}u_{1k} + k_{uk2}u_{2k}, \text{ jeśli } a_0 \neq 0. \quad (4-23)$$

Tak więc rozwiązanie ogólne także ma postać (4-9) z dwoma parametrami  $A_1$  i  $A_2$ , które trzeba wyznaczyć na podstawie odpowiednich warunków początkowych.

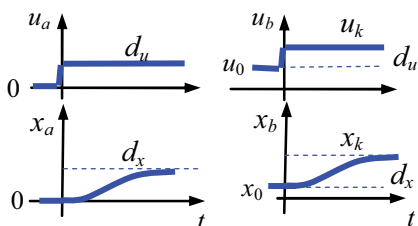
Omówione zasady obliczania reakcji nie obejmują przypadków, gdy w równaniu różniczkowym występują pochodne zmiennej wejściowej, na przykład:

$$a_2\ddot{x}(t) + a_1\dot{x}(t) + a_0x(t) = b_1\dot{u}(t) + b_0u(t). \quad (4-24)$$

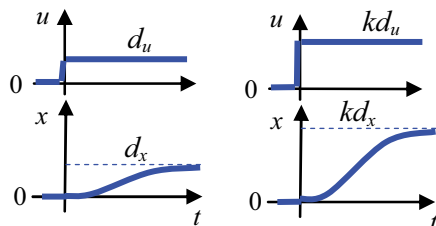
#### 4.2.2. Odpowiedzi skokowe i impulsowe układów 1 i 2 rzędu

Analiza wzorów opisujących reakcje układów liniowych na podstawowe wymuszenia wskazuje na możliwość przesuwania i skalowania odpowiedzi takich układów. Na przykładzie wymuszenia skokowego – jeśli znamy odpowiedź  $x_a(t)$  na skok  $u_a(t)$  od wartości 0 do wartości  $d_u$ , to odpowiedź  $x_b(t)$  na skok  $u_b(t)$ , który:

- wymusza zmianę  $d_u$  od wartości  $u_0$ , jest przesunięta:  $x_b(t) = x_a(t) + x_0$  (rys. 4-5),
- wymusza zmianę  $kd_u$ , jest przeskalowana:  $x_b(t) = k x_a(t)$  (rys. 4-6).



Rys. 4-5. Przesunięcie odpowiedzi



Rys. 4-6. Skalowanie odpowiedzi

Własność tę wykorzystuje się do uogólnienia badań układów liniowych, ponieważ na podstawie odpowiedzi na skok  $1(t)$  i impuls  $\delta(t)$ , można wnioskować o reakcjach układu w dowolnym punkcie pracy i dla dowolnych wymuszeń skokowych (impulsowych). Ogólne wzory odpowiedzi skokowych i impulsowych układów rzędu pierwszego i drugiego zawarto w tabeli 4-1.

Tabela. 4-1. Odpowiedzi skokowe i impulsowe układów rzędu 1 i 2.

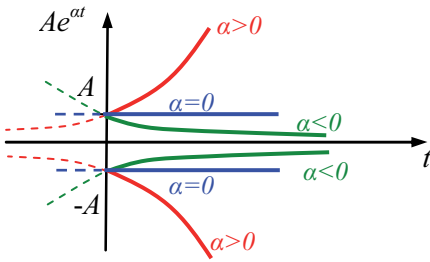
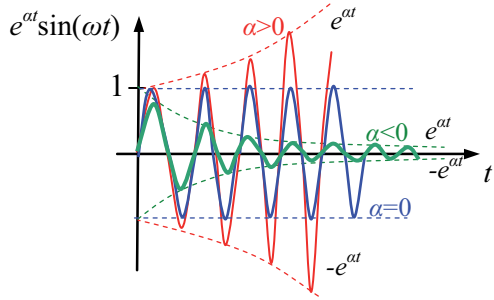
| Odpowiedź skokowa $h(t)$                                                                                                                                                                                                                                                                                               | Odpowiedź impulsowa $g(t)$                                                                |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------|
| $a_1\dot{x}(t) + a_0x(t) = b_0u(t), a_1 \neq 0$                                                                                                                                                                                                                                                                        |                                                                                           |
| dla $a_0 \neq 0$ : $k_{ukl} \left(1 - e^{\lambda t}\right)$ ,<br>gdzie: $\lambda = -a_0/a_1, k_{ukl} = b_0/a_0, k = -\lambda k_{ukl} = b_0/a_1$                                                                                                                                                                        | $-\lambda k_{ukl} e^{\lambda t}$                                                          |
| dla $a_0 = 0$ : $k \cdot t, (k = b_0/a_1)$                                                                                                                                                                                                                                                                             | $k = b_0/a_1$                                                                             |
| $a_2\ddot{x}(t) + a_1\dot{x}(t) + a_0x(t) = b_0u(t), a_2 \neq 0$                                                                                                                                                                                                                                                       |                                                                                           |
| $k_{ukl} \left(1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2} e^{\alpha_1 t} - \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2} e^{\alpha_2 t}\right)$<br>gdzie: $\Delta = a_1^2 - 4a_2a_0 > 0, \lambda_1 = \alpha_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{\Delta}}{2a_2}, \lambda_2 = \alpha_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{\Delta}}{2a_2}$                      | $k_{ukl} \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2} (e^{\alpha_1 t} - e^{\alpha_2 t})$ |
| $k_{ukl} (1 - A_1 e^{\alpha t} - A_2 t e^{\alpha t}) = k_{ukl} (1 - e^{\alpha t} + \alpha t e^{\alpha t})$<br>gdzie: $\Delta = a_1^2 - 4a_2a_0 = 0, \lambda_{1,2} = \alpha = -a_1 / 2a_2$                                                                                                                              | $k_{ukl} \alpha (-e^{\alpha t} + \alpha t e^{\alpha t})$                                  |
| $k_{ukl} \left(1 - \frac{\sqrt{\alpha^2 + \omega_r^2}}{\omega_r} e^{\alpha t} \sin(\omega_r t + \varphi)\right)$<br>gdzie: $\Delta = a_1^2 - 4a_2a_0 < 0, \lambda_1 = \alpha + j\omega_r, \lambda_2 = \alpha - j\omega_r, \alpha = -a_1 / 2a_2, \omega_r = \sqrt{\Delta} / 2a_2, \varphi = \arctg(-\omega_r / \alpha)$ | $k_{ukl} e^{\alpha t} \frac{\alpha^2 + \omega_r^2}{\omega_r} \sin \omega_r t$             |

Dysponując analitycznym rozwiązaniem równania różniczkowego, można obserwować i badać nie tylko pełne rozwiązanie równania  $x(t)$ , ale także jego poszczególne składniki ( $x_s, x_w$ ).

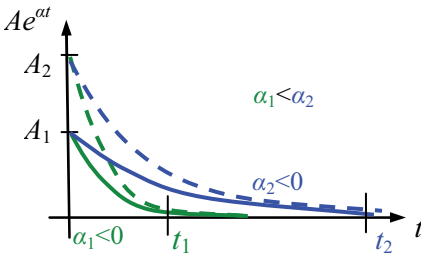
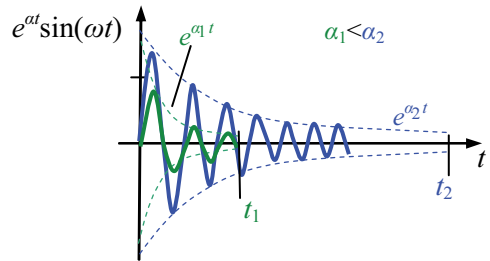
### 4.3. Wykresy podstawowych składników rozwiązania

#### 4.3.1. Parametry i własności składników rozwiązania swobodnego

Własności dynamiki układu liniowego (stabilność, czas) są zdeterminowane przez rozwiązanie swobodne ( $x_s$ ). Składnikami rozwiązania swobodnego są głównie funkcje typu eksponencjalnego  $Ae^{\alpha t}$  (rys. 4-7) i iloczyny takich funkcji z funkcją sinusoidalną  $Ae^{\alpha t} \sin(\omega t + \varphi)$  (rys. 4-8). Z punktu widzenia zastosowania w automatyce interesujące są przebiegi tych funkcji tylko dla  $t > 0$ , czyli od momentu rozpoczęcia obserwacji. Wartość funkcji w chwili  $t = 0$  zależy od współczynnika  $A$ , który wynika z założonych warunków początkowych.

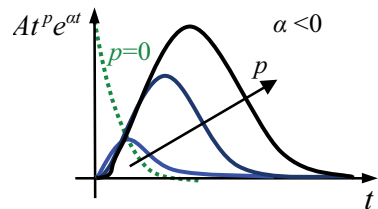
Rys. 4-7. Wykresy  $\pm Ae^{\alpha t}$  (wpływ znaku  $\alpha$ )Rys. 4-8. Wykresy  $Ae^{\alpha t} \sin(\omega t)$  (wpływ znaku  $\alpha$ )

Najistotniejsza cecha funkcji  $Ae^{\alpha t}$  i  $Ae^{\alpha t} \sin(\omega t + \varphi)$  wynika ze znaku współczynnika  $\alpha$  w wykładniku funkcji eksponencjalnej. Dla  $\alpha = 0$  funkcja  $Ae^{\alpha t}$  ma wartość stałą, a funkcja  $Ae^{\alpha t} \sin(\omega t + \varphi)$  to niegasnące drgania. Jeśli  $\alpha > 0$ , to funkcje te zbiegają do  $+\infty$  lub  $-\infty$ , a jeśli  $\alpha < 0$ , to funkcje z biegiem czasu zanikają do zera. Im większa wartość bezwzględna  $\alpha$ , tym te zmiany zachodzą szybciej. Gdy  $\alpha > 0$ , to funkcja  $e^{\alpha t}$  dąży do  $+\infty/-\infty$  tak szybko, że po stwierdzeniu dodatniej wartości  $\alpha$ , praktycznie dalsze badania funkcji są zbędne. Gdy  $\alpha < 0$ , to funkcje dążą do zera w sposób aperiodyczny (rys. 4-9) lub jako tłumiony przebieg oscylacyjny (tłumione drgania) (rys. 4-10).

Rys. 4-9. Przebieg aperiodyczny (wykresy  $Ae^{\alpha t}$  dla  $\alpha < 0$ ) – wpływ wartości  $\alpha$ Rys. 4-10. Tłumione drgania (wykresy  $Ae^{\alpha t} \sin(\omega t)$  dla  $\alpha < 0$ ) – wpływ wartości  $\alpha$ 

Funkcja  $e^{\alpha t}$  dąży do zera (zanika) dla  $t \rightarrow \infty$ , ale przyjmuje się, że poniżej pewnej wartości funkcja  $e^{\alpha t}$  praktycznie nie ma znaczenia. Czas zanikania zależy przede wszystkim od wartości  $\alpha$ ; wartość  $A$  (warunki początkowe) ma drugorzędne znaczenie.

Analizowane przypadki funkcji występują w rozwiązaniach układów, które nie mają biegunów wielokrotnych. Aby uogólnić rozważania, należy opisać własności funkcji  $t^p e^{\alpha t}$  i  $t^p e^{\alpha t} \sin(\omega t + \varphi)$  dla  $p \geq 0$ . Ujemna wartość  $\alpha$  zawsze gwarantuje zanikanie funkcji  $t^p e^{\alpha t}$  do zera, chociaż większa wartość  $p$  wydłuża czas zanikania (rys. 4-11). Zawsze też  $\alpha > 0$  oznacza, że funkcja  $t^p e^{\alpha t}$  zwiększa wartość w nieskończoność. W przypadku granicznym, gdy  $\alpha = 0$ , funkcja  $t^p e^{\alpha t}$  ma wartość stałą (gdy  $p = 0$ ) lub rośnie (gdy  $p \geq 1$ ).

Rys. 4-11. Wykresy  $At^p e^{\alpha t}$  dla  $\alpha < 0$  – wpływ wartości  $p$

W dalszych rozważaniach przypadki graniczne ( $\alpha = 0$ ) nie są specjalnie wyróżniane, gdyż najważniejszą własność rozwiązania – stabilność – zapewnia tylko  $\alpha < 0$  (niezależnie od krotności bieguna).

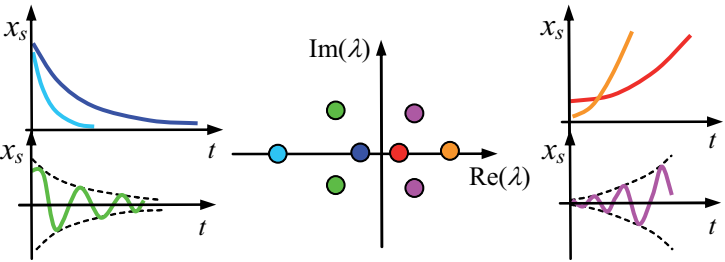
Rysowanie wykresów dla poszczególnych składników rozwiązania oraz pełnych rozwiązań na podstawie wzorów, można zrealizować w różnych programach obliczeniowych. W programach symulacyjnych najlepiej wykorzystać możliwość definiowania wektorów i operacje na elementach wektora (tabela 4-2).

Tabela 4-2. Funkcje rysowania wykresów czasowych (w tym operatory z kropką)

|                     | Matlab / Scilab / Octave                                                                            |
|---------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Definicje zmiennych | <code>t = [0: 0.1: 10];</code><br><code>A = ..., alfa = ..., w = ..., fi = ...</code>               |
| Rysowanie wykresu   | <code>plot(t, A*exp(alfa*t)); plot(t, A*exp(alfa*t).*sin(w*t+fi)); plot(t, A*t.*exp(alfa*t))</code> |

4.3.2. Rozwiązanie swobodne a lokalizacja biegunów

Poszczególne składniki w rozwiązaniu swobodnym  $x_s$  wiążą się biegunami układu. Każdy biegun rzeczywisty ( $\lambda = \alpha + j0$ ) wprowadza do rozwiązania funkcję typu  $Ae^{\alpha t}$ , a każda zespolona para biegunów ( $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\omega_r$ ) funkcję typu  $Ae^{\alpha t}\sin(\omega_r t + \varphi)$ . Własności tych funkcji zależą od wartości biegunów – część rzeczywista ( $\alpha$ ) odpowiada za stabilność i czas zanikania, a część urojona ( $\omega_r$ ) za występowanie oscylacji i ich częstotliwość. Stąd wynika zastosowanie wykresu **położenia biegunów na płaszczyźnie zespolonej** (rys. 4-12) do prezentacji własności dynamiki układu.



Rys. 4-12. Położenie biegunów a składniki rozwiązania swobodnego

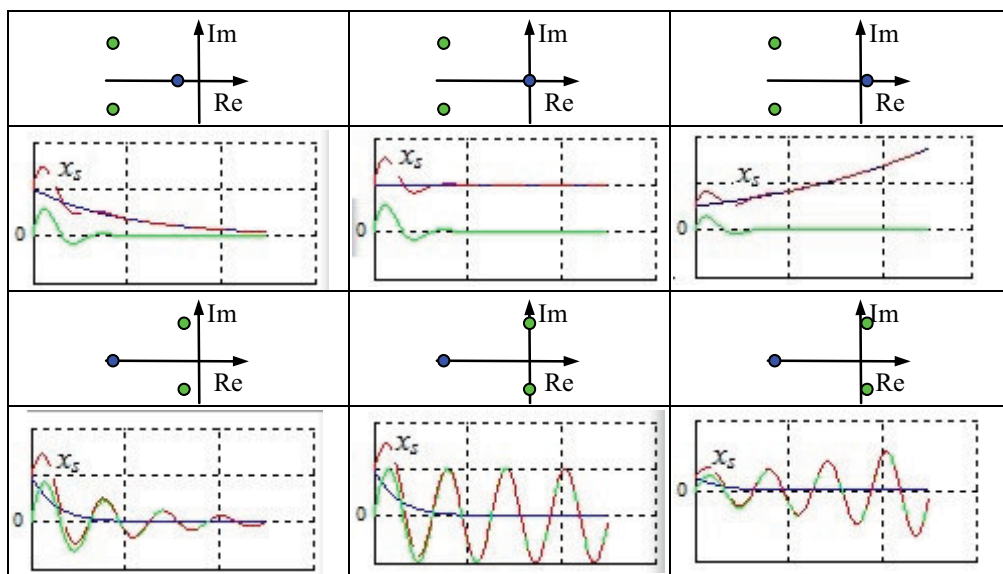
Do wykonania wykresu położenia biegunów wystarczy dowolny program obliczeniowy. W programach symulacyjnych można zastosować funkcję `plot` (tabela 4-3). Współrzędne punktów to część rzeczywista i urojona każdego bieguna.

Tabela 4-3. Funkcje rysowania położenia biegunów

|                   | Matlab / Octave                                  | Scilab                                           |
|-------------------|--------------------------------------------------|--------------------------------------------------|
| Bieguny           | <code>lamb = 2+3*i %lub lamb=2+3*j</code>        | <code>lamm = 2+3%i</code>                        |
| Rysowanie wykresu | <code>plot(real(lamb), imag(lamb), 'go');</code> | <code>plot(real(lamb), imag(lamb), 'go');</code> |

Każdy biegun leżący po prawej stronie osi urojonej  $Im$  (w prawej półpłaszczyźnie zespolonej), to znaczy gdy  $\alpha > 0$ , wprowadza do rozwiązania składnik rosnący z czasem. Każdy biegun po lewej stronie osi urojonej  $Im$  (w lewej części płaszczyzny zespolonej), czyli gdy  $\alpha < 0$ , wprowadza do rozwiązania składnik zanikający z czasem, a im bardziej na lewo leży biegun, tym składnik zanika szybciej. W przypadkach granicznych, gdy biegun leży na osi  $Im$  ( $\alpha = 0$ ), w rozwiązaniu pojawia się składnik, który nie zanika, ale też nie rośnie: wartość stała ( $A$ ) lub przebieg sinusoidalny ( $A\sin(\omega_r t + \varphi)$ ). Na podstawie lokalizacji biegunów układu można przewidzieć charakterystyczne cechy rozwiązania swobodnego  $x_s$ , które jest sumą funkcji związanych z poszczególnymi biegunami (tabela 4-4).

Tabela 4-4. Położenie biegunów a charakter odpowiedzi (– składniki  $x_s$ , - - składowa  $x_s$ )



Jeśli osie płaszczyzny zespolonej są wyskalowane, to można odczytać wartości biegunów i odtworzyć funkcję  $x_s(t)$ . Dla układu, który ma  $n$  różnych pierwiastków rzeczywistych  $\alpha_k$  oraz  $m$  różnych par zespolonych  $\alpha_k \pm j\omega_k$ , funkcja  $x_s(t)$  ma postać:

$$x_s(t) = \sum_{k=1}^n A_k e^{\alpha_k t} + \sum_{k=1}^m A_k e^{\alpha_k t} \sin(\omega_k t + \varphi_k), \quad (4-25)$$

gdzie wartości  $A_k$ ,  $\varphi_k$  mogą być różne (zależnie od warunków początkowych).

Charakter składowej  $x_s(t)$  (z dokładnością do warunków początkowych) można narysować nawet bez odtwarzania wzorów. Wystarczy:

- określić składniki rozwiązania  $x_s$  wprowadzane przez poszczególne bieguny (funkcje typu  $Ae^{\alpha t}$  i  $Ae^{\alpha t}\sin(\omega t + \varphi)$ ),
- uwzględnić wpływ parametru  $\alpha$ , to znaczy znak i odległość od osi  $Im$ ,
- zsumować składniki.

### 4.3.3. Analiza jakościowa – lokalizacja biegunów a przebiegi czasowe

Podstawą analizowania własności dynamiki układu jest znajomość biegunów układu. Wyznaczanie biegunów ( $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ) równania  $n$ -tego rzędu:

$$a_n x^{(n)}(t) + a_{n-1} x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = b_0 u(t) \quad (4-26)$$

odbywa się na podstawie wielomianu charakterystycznego postaci:

$$a_n \lambda^n + \dots + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0 \quad \text{lub} \quad \lambda^n + \dots + a_2^* \lambda^2 + a_1^* \lambda + a_0^* = 0, \quad (4-27)$$

gdzie:  $a_2^* = a_2/a_n$ ,  $a_1^* = a_1/a_n$ ,  $a_0^* = a_0/a_n$ . Równoważność ogólnej i iloczynowej postaci wielomianów pozwala sprawdzić poprawność wyznaczonych biegunów:

$$\begin{aligned} a_n (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n) &\rightarrow a_n \lambda^n + \dots + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0, \\ \text{lub: } (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n) &\rightarrow \lambda^n + \dots + a_2^* \lambda^2 + a_1^* \lambda + a_0^*. \end{aligned} \quad (4-28)$$

Na tej samej zasadzie znajomość wszystkich biegunów układu ( $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ) pozwala odtworzyć równanie charakterystyczne i równanie różniczkowe jednorodne:

$$(\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_n) = \lambda^n + \dots + a_1^* \lambda + a_0^* = 0 \rightarrow x^{(n)}(t) + \dots + a_1^* \dot{x}(t) + a_0^* x(t) = 0. \quad (4-29)$$

Lokalizacja biegunów nie wystarczy do odtworzenia pełnego modelu obiektu, ale wystarczy do określenia kluczowych cech modelu – stabilności i oscylacji.

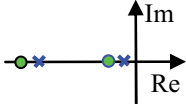
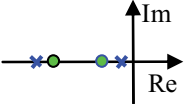
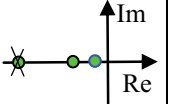
Położenie biegunów układu na płaszczyźnie zespolonej pomaga określić relacje jakościowe między biegunami (blisko/daleko od osi/od siebie) oraz wskazać najbardziej i najmniej znaczące bieguny. Jakościową analizę własności dynamiki często ogranicza się do analizy najbardziej znaczących biegunów:

- 1° Najistotniejsze są bieguny w prawej półpłaszczyźnie – decydują o niestabilności układu (wystarczy pojedynczy dodatni biegun o minimalnej wartości).
- 2° Jeśli brak biegunów w prawej półpłaszczyźnie, to najistotniejsze są bieguny na osi urojonej – jeśli jest to pojedynczy biegun  $\lambda = 0$  lub para  $\lambda = 0 \pm j\omega$ , to w rozwiązaniu występuje składnik, który nie zanika (układ na granicy stabilności).
- 3° Jeśli wszystkie bieguny leżą w lewej półpłaszczyźnie (układ stabilny), to najistotniejsze są bieguny leżące najbliżej osi  $\text{Im}$  – to one decydują o czasie zanikania najwolniejszego składnika rozwiązania swobodnego, a tym samym o czasie ustalania (stabilizacji) odpowiedzi układu. Jeśli niektóre z tych biegunów nie leżą na osi  $\text{Re}$ , to wprowadzą do odpowiedzi układu oscylacje (drgania).

Najmniej znaczącymi biegunami są bieguny leżące najbardziej na lewo (o najmniejszej części rzeczywistej), ponieważ wprowadzają do rozwiązania swobodnego składniki, które zanikają najszybciej. Stąd wynika możliwość upraszczania modeli przez pominięcie najmniej znaczących biegunów.

Analiza jakościowa pozwala przewidywać charakterystyczne cechy reakcji układu i tym samym weryfikować poprawność wykresów uzyskanych na podstawie wzoru lub symulacyjnie, porównywać własności różnych układów, określać zmiany własności po przesunięciu lub uproszczeniu biegunów (tabela 4-5).

Tabela 4-5. Analiza jakościowa na podstawie położenia biegunów

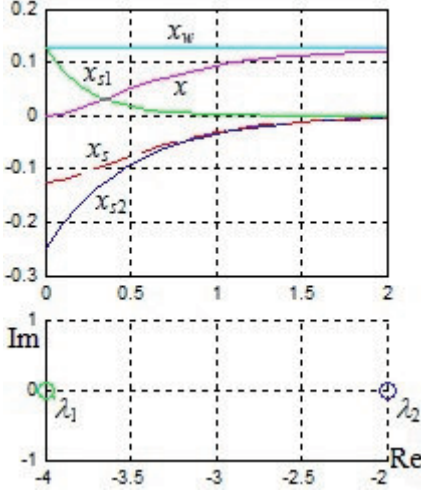
| Który układ jest szybszy?                                                                                                                                                                                                             | Jak się zmieniła reakcja?                                                                                                                                                                                                      | Uproszczenie układu                                                                                                                                                                                              |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  <p>Układ o biegunach • jest szybszy (najbardziej znaczący biegun <math>x</math> wprowadza do <math>x_s</math> składnik, który najdłużej zanika)</p> |  <p>Po zmianie parametrów układu nastąpiło przesunięcie biegunów z pozycji • na <math>x</math> – po zmianie układ stabilizuje się wolniej</p> |  <p>Pomijamy najmniej znaczący biegun, czyli biegun (parę zespoloną) najbardziej na lewo</p> <p>Brak początkowych oscylacji</p> |

Dokładniejsza analiza własności rozwiązania równania różniczkowego pozwala wyznaczyć ścisły związek między rozwiązaniem swobodnym a biegunami układu i wykorzystywać go do projektowania własności dynamicznych na podstawie położenia biegunów układu na płaszczyźnie zespolonej (patrz rozdz. 6÷7).

#### 4.3.4. Komputerowe wspomaganie badań analitycznych

Analityczne badanie własności liniowego równania różniczkowego jest znacznie łatwiejsze, jeśli wszystkie współczynniki modelu mają określone wartości. Wystarczy zastosować ogólnodostępne programy, które ułatwią obliczenie parametrów rozwiązania i narysowanie wykresu, jak w przykładowym skrypcie (tabela 4-6).

Tabela 4-6. Szkic skryptu: odpowiedź na skok i jej składowe oraz położenie biegunów

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |                                                                                      |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| <pre> t = [0:1:2]; % wektor czasu a2 = ...; a1 = ...; a0 = ...; b0 = ...; % współczynniki u0 = ...; uk = ...; % wymuszenie w0 = u0 * b0/a0; w1 = 0; % war.początkowe xw = uk * b0/a0; % składowa xw xwt = t; xwt(:) = xw; % do wykresu xw plot(t, xwt, 'm-'); hold on; grid on % wykres xw if a2 == 0 % równanie rzędu 1 ... else % równanie rzędu 2 delta = ...; bieg1=...; bieg2=...; % liczb bieguny % gdy bieguny jednokrotne, rzeczywiste A1 = ...; A2 = ...; % liczb.współczynniki xs1 = A1*exp(bieg1.*t); xs2 = A2*exp(bieg2.*t); xs = xs1 + xs2; x = xw + xs; % xs, x plot(t, x, 'm', t, xs1, 'g-', t, xs2, 'b-', t, xw, 'r-'); % wykresy figure, hold on; %bieguny plot(real(bieg1), imag(bieg1), 'go'); plot(real(bieg2), imag(bieg2), 'bo'); end </pre> |  |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|

Rys. 4-13. Wynik ( $a_2=1$ ,  $a_1=6$ ,  $a_0=8$ ,  $b_0=1$ )

Powyższy szkic skryptu jest napisany w środowisku Matlab, ale podobne obliczenia można wykonać nawet w arkuszu kalkulacyjnym, gdyż analityczne rozwiązanie liniowych równań różniczkowych rzędu 1 i 2 ( $\rightarrow$  4.2) sprowadza się do:

- obliczenia biegunów układu na podstawie algebraicznego równania charakterystycznego (rozwiązanie równania wielomianowego stopnia 1 lub 2),
- wyznaczania współczynników  $A$  na podstawie warunków początkowych przez rozwiązanie jednego lub układu równań pierwszego stopnia.

W podobny sposób można zrealizować rozwiązywanie i rysowanie wykresów dla równań rzędu 3 i 4, ponieważ istnieją analityczne wzory do wyznaczania pierwiastków wielomianu [19]. W ogólnym przypadku liniowego równania różniczkowego  $n$ -tego rzędu:

$$a_n x^{(n)}(t) + \dots + a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = b_0 u(t), \quad (4-30)$$

gdy wszystkie współczynniki są określone w sposób liczbowy, można zastosować numeryczne metody rozwiązywania wielomianów i układów równań ( $\rightarrow$  1.5). Tego typu zadanie zrealizuje dowolny program do obliczeń algebraicznych.

Algorytm wyznaczania rozwiązania w przypadku (4-30) jest bardzo prosty, gdy równanie ma tylko jednokrotne bieguny rzeczywiste:

1° Bieguny układu – na podstawie równania  $a_n \lambda^n + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$ :

- wektor biegunów:  $\lambda = \text{roots}([a_n, \dots, a_1, a_0])$ ,
- należy zbadać czy faktycznie wszystkie bieguny ( $\lambda_i$ ) są jednokrotne i rzeczywiste (ułatwieniem jest uporządkowanie wektora  $\lambda$  od najmniejszej do największej wartości rzeczywistej),
- każdy składnik ( $x_i$ ) w rozwiązaniu swobodnym jest postaci:  $A(i) \cdot \exp(\lambda(i) \cdot t)$ , gdzie  $t$  jest wektorem czasu;

2° Rozwiązanie wymuszone ( $x_w$ ) dla stałego wymuszenia ( $u_k$ ):  $x_w = u_k \cdot b_0/a_0$ ;

3° Wektor współczynników  $A$  dla warunków początkowych  $w_0, w_1, \dots, w_{n-1}$  (np. stan równowagi dla wymuszenia  $u_0$ ) – na podstawie wzoru:

$$\begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \dots \\ w_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_w \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} w_0 - x_w \\ w_1 \\ \dots \\ w_{n-1} \end{bmatrix}$$

4° Obliczenie sumy składników rozwiązania  $x$  i rysowanie wykresu:

```
x = xw;
for i = 1:n, x = x + A(i)*exp(lambda(i).*t), end;
plot(t,x)
```

Algorytm komplikuje się, gdy występują bieguny wielokrotne i zespolone (funkcja `plot` nie interpretuje wyrażeń o parametrach zespolonych) – trzeba zastosować odpowiednie wzory do składników rozwiązania swobodnego ( $\rightarrow$  1.4.2). Zadanie to jest znacznie łatwiejsze przy wykorzystaniu programów symulacyjnych (algorytmy całkowania numerycznego), co jest tematem rozdziału 5.

#### 4.4. Konwersja modelu do równania $n$ -tego rzędu

Przedstawiane dotychczas zasady realizowania podstawowych badań dynamiki zakładały, że model układu stanowi jedno równanie różniczkowe  $n$ -tego rzędu. Na tej podstawie można w prosty sposób określić:

- rząd modelu, który odpowiada rzędowi równania różniczkowego,
- równanie statyczne, które powstaje po wyzerowaniu pochodnych i pozwala wyznaczyć charakterystykę statyczną oraz punkt równowagi,
- dla układów liniowych – równanie charakterystyczne i bieguny układu, które decydują o podstawowych własnościach dynamiki – stabilności, oscylacyjności.

Tymczasem przykłady konstrukcji modeli opisane w rozdziale 2 pokazują, że najczęściej model ma postać układu równań różniczkowych. Wówczas można podjąć próbę przekształcenia układu równań do jednego równania  $n$ -tego rzędu. Na przykład:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) & (1) \\ \dot{x}_2(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + bu(t) & (2) \end{cases} \quad (4-31)$$

Z równania (1) można wyznaczyć zmienną  $x_2$  i obliczyć jej pochodną:

$$x_2(t) = \frac{1}{a_{12}}\dot{x}_1(t) - \frac{a_{11}}{a_{12}}x_1(t) \quad \rightarrow \quad \dot{x}_2(t) = \frac{1}{a_{12}}\ddot{x}_1(t) - \frac{a_{11}}{a_{12}}\dot{x}_1(t),$$

po czym obie zależności podstawić do równania (2):

$$\frac{1}{a_{12}}\ddot{x}_1(t) - \frac{a_{11}}{a_{12}}\dot{x}_1(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}\left(\frac{1}{a_{12}}\dot{x}_1(t) - \frac{a_{11}}{a_{12}}x_1(t)\right) + bu(t).$$

Równoważny model dla zmiennej  $x_1$  ma postać:

$$\ddot{x}_1(t) - (a_{11} + a_{22})\dot{x}_1(t) + (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_1(t) = a_{12}bu(t). \quad (4-32)$$

Ta sama metoda zastosowana w odniesieniu do zmiennej  $x_2$ : wyznaczenie  $x_1$  z równania (2):

$$x_1(t) = \frac{1}{a_{21}}\dot{x}_2(t) - \frac{a_{22}}{a_{21}}x_2(t) - \frac{b}{a_{21}}u(t) \quad \rightarrow \quad \dot{x}_1(t) = \frac{1}{a_{21}}\ddot{x}_2(t) - \frac{a_{22}}{a_{21}}\dot{x}_2(t) - \frac{b}{a_{21}}\dot{u}(t), \quad (4-33)$$

i podstawienie do równania (1):

$$\frac{1}{a_{21}}\ddot{x}_2(t) - \frac{a_{22}}{a_{21}}\dot{x}_2(t) - \frac{b}{a_{21}}\dot{u}(t) = a_{11}\left(\frac{1}{a_{21}}\dot{x}_2(t) - \frac{a_{22}}{a_{21}}x_2(t) - \frac{b}{a_{21}}u(t)\right) + a_{12}x_2(t).$$

Równoważny model dla zmiennej  $x_2$  ma postać:

$$\ddot{x}_2(t) - (a_{11} + a_{22})\dot{x}_1(t) + (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_1(t) = a_{21}b\dot{u}(t) - a_{11}bu(t). \quad (4-34)$$

Modele (4-32) i (4-34) mają takie samo równanie charakterystyczne, a więc te same bieguny i te same składniki rozwiązania swobodnego (różne będą współczynniki  $A_i$ ). Badania dotyczące określenia stabilności układu, czasu ustalania odpowiedzi i oscylacji można przeprowadzić równie dobrze na podstawie każdego z tych równań. Problemem może być wyznaczenie składowej wymuszonej w rozwiązaniu dla zmiennej  $x_2(t)$ , jeśli w badaniach występuje wymuszenie skokowe i impulsowe, a to ze względu na występowanie pochodnej wymuszenia. W omawianym przykładzie można uniknąć

tego problemu, wyznaczając najpierw rozwiązanie równania (4-32), które nie zawiera pochodnej wymuszenia, tzn.  $x_1(t)$ , a następnie na podstawie (4-33), można wyznaczyć rozwiązanie  $x_2(t)$ . Takie postępowanie nie jest możliwe, gdy oba równania zawierają zmienne wejściowe (tabela 4-7).

Tabela 4-7. Konwersja modeli typu kaskada niewspółdziałająca i współdziałająca

| Kaskada niewspółdziałająca                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | Kaskada współdziałająca                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t) + b_1u_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + b_2u_2(t) \end{cases}$                                                                                                                                                                                                                                           | $\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + b_1u_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + b_2u_2(t) \end{cases}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
| $\begin{aligned} \dot{x}_1(t) - a_{11}x_1(t) &= b_1u_1(t) \quad (\text{bez konwersji}) \\ \ddot{x}_2(t) - a_s\dot{x}_2(t) + a_mx_2(t) &= \\ &= b_{121}u_1(t) + b_2\dot{u}_2(t) - b_{211}u_2(t) \end{aligned}$ <p>gdzie: <math>a_m = a_{11}a_{22}</math>, <math>a_s = a_{11} + a_{22}</math><br/> <math>b_{121} = b_1a_{21}</math>, <math>b_{211} = b_2a_{11}</math></p> | $\begin{aligned} \ddot{x}_1(t) - a_s\dot{x}_1(t) + a_mx_1(t) &= b_1\dot{u}_1(t) - b_{122}u_1(t) + b_{212}u_2(t) \\ \ddot{x}_2(t) - a_s\dot{x}_2(t) + a_mx_2(t) &= b_{121}u_1(t) + b_2\dot{u}_2(t) - b_{211}u_2(t) \end{aligned}$ <p>gdzie: <math>a_m = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}</math>, <math>a_s = a_{11} + a_{22}</math><br/> <math>b_{122} = b_1a_{22}</math>, <math>b_{212} = b_2a_{12}</math>, <math>b_{121} = b_1a_{21}</math>, <math>b_{211} = b_2a_{11}</math></p> |
| $\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} = 0$                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | $\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |

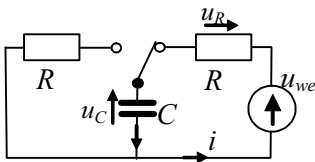
Konwersja kaskad potwierdza możliwość wyznaczenia równania charakterystycznego zarówno na podstawie modelu zmiennej  $x_1$ , jak i zmiennej  $x_2$ . W przypadku gdy jedno z równań układu zawiera tylko jedną ze zmiennych (kaskada niewspółdziałająca), to równania charakterystyczne różnią się stopniem (liczbą biegunów).

Przedstawiona metoda przekształcania układu równań do jednego równania nie sprawia problemów, gdy na kolejnych etapach przekształcania choć jedno z równań układu pozwala wyznaczyć jedną ze zmiennych wyjściowych – można obliczyć pochodne tej zmiennej i podstawić do pozostałych równań. Jeśli równania są nieliniowe lub w każdym równaniu występują pochodne wszystkich zmiennych wyjściowych, to konwersja modelu do jednego równania różniczkowego może być trudna lub niewykonalna. Alternatywą dla konwersji układów równań jest zastosowanie metod dedykowanych do rozwiązywania i analizy układów równań różniczkowych ( $\rightarrow$  8, 11).

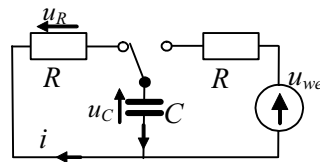
## 4.5. Przykłady zastosowania rozwiązań analitycznych

### 4.5.1. Rozwiązanie i analiza podstawowych przykładów z fizyki

**Przykład 1:** Wyznaczyć wzór opisujący napięcie na kondensatorze podczas procesu jego ładowania (rys. 4-14) i rozładowania (rys. 4-15).



Rys. 4-14. Ładowanie kondensatora



Rys. 4-15. Rozładowanie kondensatora

Podczas ładowania kondensator  $C$  jest podłączony do źródła o napięciu  $u_{we}$  poprzez rezystor  $R$ , co opisuje bilans napięć:

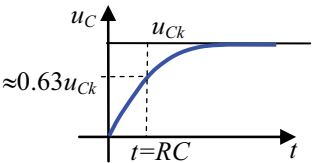
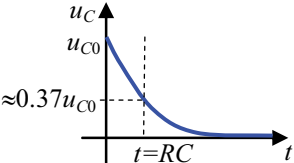
$$u_R(t) + u_C(t) = u_{we} \rightarrow Ri(t) + q(t)/C = u_{we} \rightarrow R\dot{q}(t) + q(t)/C = u_{we}. \quad (4-35)$$

Równanie bilansowe podczas rozładowania w obwodzie z rezystorem  $R$  ma postać:

$$u_R(t) + u_C(t) = 0 \rightarrow Ri(t) + q(t)/C = 0 \rightarrow R\dot{q}(t) + q(t)/C = 0. \quad (4-36)$$

W każdym przypadku zadanie polega na rozwiązaniu tego samego równania różniczkowego, ale dla różnych wartości zmiennej wyjściowej i różnych warunków początkowych (napięcie na zaciskach kondensatora lub zgromadzony ładunek).

Tabela 4-8. Rozwiązanie – ładowanie i rozładowanie kondensatora

|                                      | Ładowanie kondensatora                                                                                    | Rozładowanie kondensatora                                                            |
|--------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| Rozwiązanie:                         | $R\dot{q}(t) + \frac{1}{C}q(t) = u_{we}, q(0) = 0$                                                        | $R\dot{q}(t) + \frac{1}{C}q(t) = 0, q(0) = Cu_C(0) = Cu_{C0}$                        |
| – swobodne $q_s(t)$                  | $R\lambda + \frac{1}{C} = 0 \rightarrow \lambda = -\frac{1}{RC} \rightarrow q_s(t) = Ae^{-\frac{1}{RC}t}$ |                                                                                      |
| – wymuszone $q_w(t)$                 | $\frac{1}{C}q(t) = u_{we} \rightarrow q_w(t) = Cu_{we}$                                                   | $\frac{1}{C}q(t) = 0 \rightarrow q_w(t) = 0$                                         |
| – ogólne<br>$q(t) = q_s(t) + q_w(t)$ | $q(t) = Ae^{-\frac{1}{RC}t} + Cu_{we}$                                                                    | $q(t) = Ae^{-\frac{1}{RC}t}$                                                         |
| – warunki początkowe<br>$q(0)$       | $0 = Ae^{-\frac{1}{RC}0} + Cu_{we} \rightarrow A = -Cu_{we}$                                              | $Cu_{C0} = Ae^{-\frac{1}{RC}0} \rightarrow A = Cu_{C0}$                              |
| – rozwiązanie<br>szczególne          | $q(t) = Cu_{we} \left( 1 - e^{-\frac{1}{RC}t} \right)$                                                    | $q(t) = Cu_{C0} e^{-\frac{1}{RC}t}$                                                  |
| – napięcie $u_C(t) = q(t)/C$         | $u_C(t) = u_{we} \left( 1 - e^{-\frac{1}{RC}t} \right)$                                                   | $u_C(t) = u_{C0} e^{-\frac{1}{RC}t}$                                                 |
| – przebieg $u_C(t)$                  |                        |  |
| – wartość początkowa                 | $u_{C0} = 0$                                                                                              | $u_{C0} > 0$                                                                         |
| – wartość końcowa                    | $u_{Ck} = u_{we}$                                                                                         | $u_{Ck} = 0$                                                                         |
| – wartość dla $t = RC$               | $u_C(RC) = u_{Ck} (1 - e^{-1}) \approx 0.63u_{Ck}$                                                        | $u_C(RC) = u_{C0} e^{-1} \approx 0.37u_{C0}$                                         |

Przedstawione rozwiązania to typowy przykład zastosowania badania z wymuszeniem o stałej wartości. Na podstawie rozwiązania szczególnego  $q(t)$  można wyznaczać i badać kolejne zmienne wyjściowe, nie tylko  $u_C(t) = q(t)/C$ , ale na przykład prąd w obwodzie  $i(t) = dq(t)/dt$ .

**Przykład 2:** Wyznaczyć wzór opisujący przebieg stabilizacji temperatury w pomieszczeniu (rys. 2-6) po zmianie mocy grzałki lub temperatury otoczenia. Model ma postać bilansu (2-16) z dwoma zmiennymi wejściowymi:

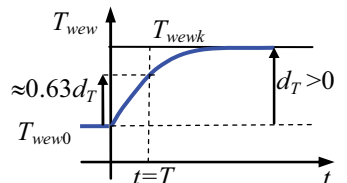
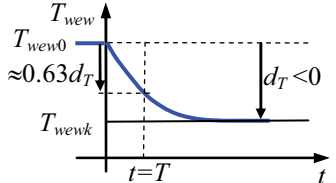
$$C_v \dot{T}_{wew}(t) = P_g(t) - K_c(T_{wew}(t) - T_{zew}(t)).$$

Po uporządkowaniu wyrażenia i założeniu, że w warunkach początkowych obiekt znajduje się w stanie równowagi, otrzymujemy:

$$C_v \dot{T}_{wew}(t) + K_c T_{wew}(t) = P_g(t) + K_c T_{zew}(t), \quad T_{wew}(0) = (P_{g0} + K_c T_{zew0}) / K_c, \quad (4-37)$$

gdzie moc grzałki  $P_g(t)$  lub temperatura  $T_{zew}(t)$  zmienia się skokowo w chwili  $t = 0$ .

Tabela 4-9. Rozwiązanie – zmiana temperatury pomieszczenia

|                                                                                                                                                                        | Skok $P_g$                                                                                                                                   |  | Skok $T_{zew}$                                                                      |  |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|-------------------------------------------------------------------------------------|--|
| Rozwiązanie                                                                                                                                                            | $P_g(t) = P_{g0} + (P_{gk} - P_{g0}) \cdot 1(t),$<br>$T_{zew}(t) = T_{zew0}$                                                                 |  | $T_{gzew}(t) = T_{zew0} + (T_{zewk} - T_{zew0}) \cdot 1(t)$<br>$P_g(t) = P_{g0}$    |  |
| – swobodne $T_{wew}(t)$                                                                                                                                                | $C_v \lambda + K_c = 0 \rightarrow \lambda = -K_c / C_v \rightarrow T_{wew}(t) = Ae^{-(K_c / C_v)t} = Ae^{-(1/T)t}$<br>gdzie $T = C_v / K_c$ |  |                                                                                     |  |
| – wymuszone $T_{wew}(t)$                                                                                                                                               | $T_{wew}(t) = T_{wewk} = (P_{gk} + K_c T_{zew0}) / K_c$                                                                                      |  | $T_{wew}(t) = T_{wewk} = (P_{g0} + K_c T_{zewk}) / K_c$                             |  |
| – ogólne $T_{wew}(t)$                                                                                                                                                  | $T_{wew}(t) = Ae^{-(1/T)t} + T_{wewk}$                                                                                                       |  |                                                                                     |  |
| – war.początkowe $T_{wew}(0)$                                                                                                                                          | $T_{wew0} = Ae^{-(1/T)0} + T_{wewk} \rightarrow A = -(T_{wewk} - T_{wew0})$                                                                  |  |                                                                                     |  |
| – rozwiązanie szczególne                                                                                                                                               | $T_{wew}(t) = -(T_{wewk} - T_{wew0})e^{-(1/T)t} + T_{wewk}$                                                                                  |  |                                                                                     |  |
| – przebieg $T_{wew}(t)$ gdy:<br>• $dT = T_{wewk} - T_{wew0} > 0$<br>(wzrost $P_g$ lub $T_{zew}$ )<br>• $dT = T_{wewk} - T_{wew0} < 0$<br>(spadek $P_g$ lub $T_{zew}$ ) |                                                            |  |  |  |
| – $T_{wew}(t=T)$ , gdy $dT > 0$                                                                                                                                        | $T_{wew}(T) = -(T_{wewk} - T_{wew0})e^{-1} + T_{wewk} = -dT e^{-1} + T_{wew0} + dT \approx T_{wew0} + 0.63 dT$                               |  |                                                                                     |  |
| – $T_{wew}(t=T)$ , gdy $dT < 0$                                                                                                                                        | $T_{wew}(T) = -(T_{wewk} - T_{wew0})e^{-1} + T_{wewk} = -dT e^{-1} + T_{wew0} + dT \approx T_{wew0} - 0.63  dT $                             |  |                                                                                     |  |

Rozwiązania  $T_{wew}(t)$  wyznaczone dla skokowych zmian zmiennych, to typowe badania własności dynamicznych układów w obszarze automatyki.

#### 4.5.2. Konwersja i rozwiązanie układów drugiego rzędu

Modele opisujące trzy typy kaskad zbiorników ( $\rightarrow$  2.2):

1° układ niepołączonych zbiorników (2-9),

2° układ zbiorników połączonych przewodem (2-11),

3° układ zbiorników połączonych przewodem i z pompą wyjściową (2-12),

zapisane w postaci układu równań różniczkowych, można przekształcić do pojedynczego równania różniczkowego (tabela 4-10).

Tabela 4-10. Konwersja modeli typu kaskada niewspółdziałająca i współdziałająca

| Układ        | Model przybliżony                                                                                                                         | Model po konwersji                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|--------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1°<br>(2-9)  | $\begin{cases} A_1 \dot{h}_1(t) = f_{we}(t) - a_1 h_1(t) \\ A_2 \dot{h}_2(t) = a_1 h_1(t) - a_2 h_2(t) \end{cases}$                       | $\begin{aligned} A_1 \dot{h}_1(t) + a_1 h_1(t) &= f_{we}(t) \\ A_1 A_2 \ddot{h}_2(t) + a \dot{h}_2(t) + a_1 a_2 h_2(t) &= a_1 f_{we}(t) \end{aligned}$ <p>gdzie <math>a = A_1 a_2 + A_2 a_1</math></p>                                                                                                 |
| 2°<br>(2-11) | $\begin{cases} A_1 \dot{h}_1(t) = f_{we}(t) - a_1 (h_1(t) - h_2(t)) \\ A_2 \dot{h}_2(t) = a_1 (h_1(t) - h_2(t)) - a_2 h_2(t) \end{cases}$ | $\begin{aligned} A_1 A_2 \ddot{h}_1(t) + a \dot{h}_1(t) + a_1 a_2 h_1(t) &= a_{12} f_{we}(t) + A_2 \dot{f}_{we}(t) \\ A_1 A_2 \ddot{h}_2(t) + a \dot{h}_2(t) + a_1 a_2 h_2(t) &= a_1 f_{we}(t) \end{aligned}$ <p>gdzie <math>a = A_1 (a_2 + a_1) + A_2 a_1</math>, <math>a_{12} = a_1 + a_2</math></p> |
| 3°<br>(2-12) | $\begin{cases} A_1 \dot{h}_1(t) = f_{we}(t) - a_1 (h_1(t) - h_2(t)) \\ A_2 \dot{h}_2(t) = a_1 (h_1(t) - h_2(t)) - f_{wy2}(t) \end{cases}$ | $\begin{aligned} A_1 A_2 \ddot{h}_1(t) + a \dot{h}_1(t) &= a_1 f_{we}(t) + A_2 \dot{f}_{we}(t) - a_1 f_{wy2}(t) \\ A_1 A_2 \ddot{h}_2(t) + a \dot{h}_2(t) &= a_1 f_{we}(t) - A_1 \dot{f}_{wy2}(t) \end{aligned}$ <p>gdzie <math>a = a_1 (A_1 + A_2)</math></p>                                         |

Konwersję wykonano ze względu na zmienną  $h_1$  i  $h_2$  – każde z tych równań pozwala wyznaczyć równanie charakterystyczne i bieguny układu. Analityczne wyznaczenie odpowiedzi skokowych czy impulsowych jest proste ( $\rightarrow$  4.2.1), gdy dane równanie nie zawiera pochodnej zmiennej wejściowej.

W powyższych przykładach konwersji poddano przybliżone (liniowe) wersje modeli i wyznaczono równanie zmiennej  $h_1$  lub  $h_2$ . W przypadku modeli nieliniowych łatwiej zastosować metody analizy niewymagające konwersji do pojedynczego równania.

#### 4.5.3. Fizyczna interpretacja rozwiązania

Każdy z powyższych przykładów ( $\rightarrow$  4.5.1÷4.5.2) jest szczególnym przypadkiem liniowego równania różniczkowego pierwszego lub drugiego rzędu. Alternatywą do takiego indywidualnego podejścia do poszczególnych zjawisk jest zastosowanie wyników opracowanych dla ogólnej postaci równań różniczkowych, w szczególności takich jak:  $a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = b_0 u(t)$ ,  $a_2 \ddot{x}(t) + a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = b_0 u(t)$ . Wówczas zamiast każdorazowo rozwiązywać równanie różniczkowe można wyznaczyć jedynie odpowiednie parametry równania i w ten sposób określić charakterystyczne cechy badanego problemu (np. stabilność, oscylacje, czas stabilizacji). Takie podejście omówiono szczegółowo w rozdziale 7.

Analiza ogólnych równań uwzględnia dowolne wartości parametrów równań i tym samym umożliwia wyznaczenie wszystkich możliwych rozwiązań. Parametry i zmienne modeli rzeczywistych układów natomiast mają ograniczone wartości (na przykład wartości parametrów fizycznych są zazwyczaj dodatnie), co znacznie ułatwia analizowanie różnych wariantów i umożliwia eliminowanie niektórych rozwiązań. Jeśli poszczególnym parametrom równania zostanie przypisana interpretacja fizyczna lub zostanie określona relacja między parametrami równania a wielkościami fizycznymi danego obiektu, to tym samym można badać wpływ poszczególnych wielkości na dynamikę układu lub projektować układ (dobierać wartości poszczególnych wielkości tak, aby uzyskać układ o określonych reakcjach).

5. Symulacyjne rozwiązywanie równań różniczkowych

*czyli jak to samo zrobić symulacyjnie*

5.1. Wprowadzenie – rozwiązania analityczne i symulacyjne

Badanie dynamiki obiektu opisanego liniowym równaniem różniczkowym można przeprowadzić, rozwiązując to równanie analitycznie (→ 1.4.2). Jednak nie zawsze potrzebny jest dokładny wzór rozwiązania, a przede wszystkim nie zawsze jest możliwe uzyskanie takiego wzoru, szczególnie dla równań nieliniowych. Równania różniczkowe liniowe i nieliniowe, w których znane są wartości wszystkich parametrów, można rozwiązywać również symulacyjnie metodami całkowania numerycznego. W ten sposób można wyznaczyć reakcję obiektu na proste wymuszenie w zadanych warunkach początkowych, jak też prowadzić złożone badania.

Zdefiniowanie równania różniczkowego w programie symulacyjnym i wykonanie badań może być realizowane w różny sposób. Jedną z prostych i uniwersalnych metod jest konstrukcja schematu symulacyjnego równania różniczkowego, opartego na blokach całkujących. Metoda jest dostępna w programach, które zawierają edytor graficzny – Matlab (Simulink) i Scilab (Xcos) [18]. Zasady konstrukcji schematów symulacyjnych są takie same dla równań liniowych i nieliniowych (→ 5.2.1). Metoda symulacyjnego badania modeli układów jest stosowana szczególnie wówczas, gdy badania analityczne są zbyt złożone, a to oznacza, że trudno potwierdzić poprawność uzyskanych wyników. Stąd bardzo ważnym etapem badań symulacyjnych jest weryfikacja poprawności przygotowanego schematu przed rozpoczęciem badań (→ 5.2.2).

Zakładamy, że schemat będzie sparametryzowany, a program badań będzie realizowany za pomocą skryptów, tak aby podczas badań nie było potrzeby edytowania schematu, co pozwoli uniknąć przypadkowych błędów.

5.2. Konstrukcja schematu symulacyjnego

5.2.1. Zasady konstrukcji

Graficzny sposób definiowania modeli dostępny w programie Matlab (Simulink) i Scilab (Xcos) opiera się zazwyczaj na kilku podstawowych blokach (tabela 5-1).

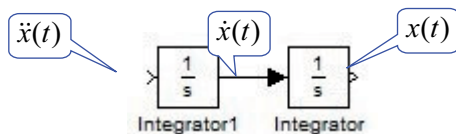
Tabela 5-1. Podstawowe bloki do definiowania schematów modeli liniowych

|                  | Matlab (Simulink) | Scilab (Xcos) |
|------------------|-------------------|---------------|
| Całkowanie       | Integrator        | INTEGRAL_f    |
| Wzmocnienie      | Gain              | GAINBLK_f     |
| Sumator          | Sum               | BIGSOM_f      |
| Sygnal wejściowy | Step              | STEP_FUNCTION |
| Sygnal czasu     | Clock             | CLOCK_c       |

Przygotowanie do konstrukcji schematu symulacyjnego polega na przekształceniu równania (układu równań) w taki sposób, aby po lewej stronie otrzymać najwyższą pochodną zmiennej wyjściowej, na przykład:

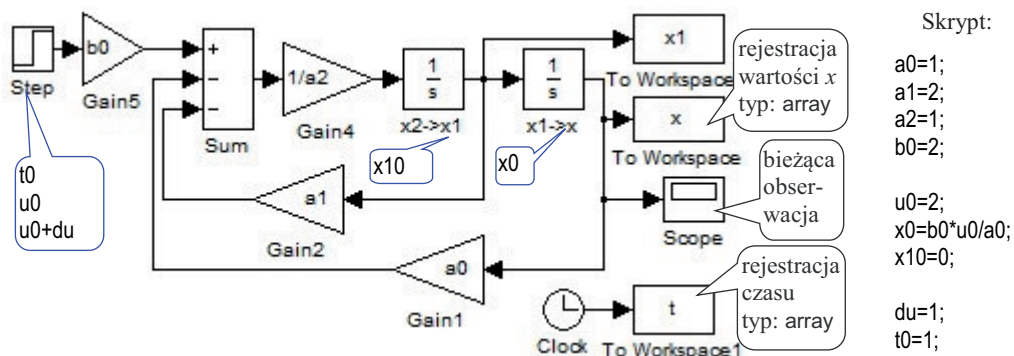
$$a_2 \ddot{x}(t) + a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = b_0 u(t) \rightarrow \ddot{x}(t) = (-a_1 \dot{x}(t) - a_0 x(t) + b_0 u(t)) / a_2. \quad (5-1)$$

Rysowanie schematu warto rozpocząć od łańcucha bloków całkujących (Integrator), w którym na wyjściu ostatniego bloku będzie dostępna zmienna  $x$  (rozwiązanie), a na wejście pierwszego będzie podany sygnał najwyższej pochodnej równania  $\ddot{x}$ :



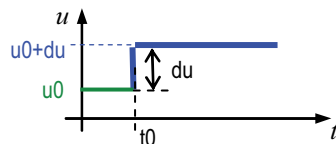
Rys. 5-1. Pierwszy etap konstrukcji schematu – łańcuch bloków całkujących

Sygnał najwyższej pochodnej zostanie skonstruowany na podstawie równania (5-1) za pomocą bloków. Charakterystyczne pętle między wejściami i wyjściami, nie stanowią problemu dla iteracyjnych algorytmów całkowania numerycznego, ponieważ w pętlach występują bloki całkujące, zawierające warunki początkowe (rys. 5-2).



Rys. 5-2. Schemat równania 2. rzędu i skrypt (wersja Matlab(P))

Na schemacie można wpisywać bezpośrednio wartości wszystkich potrzebnych parametrów lub używać zmiennych Matlab (Scilab), które zostaną zdefiniowane przed uruchomieniem symulacji. Zastosowanie zmiennych sprawia, że schemat jest uniwersalny i symulacje można uruchamiać dla różnych zestawów parametrów. Na schemacie (rys. 5-2) użyto zmiennych  $a_0, a_1, a_2, b_0$ , które pełnią rolę parametrów równania ( $a_0, a_1, a_2, b_0$ ), zmiennych  $x_0$  i  $x_{10}$ , definiujących warunki początkowe, oraz  $u_0$  i  $du$  do parametryzowania wymuszenia (rys. 5-3). Sygnał wejściowy  $u(t)$  jest definiowany jako wymuszenie skokowe, sparametryzowane za pomocą zmiennych oznaczających stan początkowy  $u_0$  i zmianę wartości  $du$ . Jeśli  $du=0$ , to na wyjściu bloku Step będzie stała wartość.



Rys. 5-3. Parametry wymuszenia skokowego (bloku Step)

Warunki początkowe równania różniczkowego definiuje się na schemacie za pomocą parametrów Initial condition w blokach całkujących (domyślnie mają one wartość zero). Na schemacie (rys. 5-2) użyto zmiennych  $x_0$  i  $x_{10}$ , które odpowiadają wartościom  $\dot{x}(0)$  i  $x(0)$ . Jeśli warunki początkowe są określone w inny sposób (np. jako  $\ddot{x}(0)$  i  $\dot{x}(0)$ ), to należy je przeliczyć ( $\rightarrow$  1.4.2), czyli podstawić do równania (5-1) wraz z wartością  $u(0)$ , obliczyć  $x(0)$  i użyć wartości  $x_{10}=0$  i  $x_0=u_0/c$ .

Przeprowadzenie symulacji następuje przez wykonanie skryptu<sup>1</sup>, w którym przygotowujemy są parametry, oraz uruchomienie właściwej symulacji z określonymi parametrami algorytmu obliczeniowego, przede wszystkim czasem symulacji.

Najprostszy sposób prezentacji wyników symulacji to zastosowanie na schemacie bloku oscyloskopu (Scope) przeznaczonego przede wszystkim do obserwowania wykresów na bieżąco podczas symulacji. Wykresy można również narysować po zakończeniu symulacji za pomocą funkcji plot, na podstawie wartości zarejestrowanych przy pomocy bloku To workspace (tabela 5-2), przy czym należy rejestrować wektory wartości wybranych zmiennych (np.  $x$ ) oraz wektor czasu  $t$ .

Tabela 5-2. Podstawowe bloki do rejestracji wyników symulacji

|                       | Matlab (Simulink) | Scilab (Xcos) |
|-----------------------|-------------------|---------------|
| Blok typu oscyloskop  | Scope             | Cscope        |
| Blok zbierania danych | To workspace      | TOWS_c        |

Sposób dostępu do zarejestrowanych zmiennych zależy od typu danych (parametr w blokach rejestrujących), a także od wersji Matlaba/Scilaba [15, 16].

### 5.2.2. Weryfikacja poprawności schematu

Doświadczenie uczy, że nawet podczas rysowania prostych schematów zdarzają błędy – pomyłka w połączeniu, zły znak funkcji, nazwa parametru itp. Stąd konieczność weryfikacji poprawności przygotowanego schematu. Podstawą proponowanej metody weryfikacji jest sprawdzanie zachowania modelu w stanie równowagi, w szczególności przy stałych, niezerowych wymuszeniach. Jeśli wszystkie obliczenia zawarte w skrypcie oraz schemat z modelem są wykonane poprawnie, i symulacja jest uruchomiona dokładnie w punkcie równowagi, to wynikiem jest również stan równowagi (od początku symulacji dopóki wartości wejściowe pozostaną stałe). Dotyczy to zarówno modeli stabilnych, jak i niestabilnych. Taka weryfikacja nie zapewnia ujawnienia wszystkich możliwych błędów, ale sprawdza się w większości przypadków.

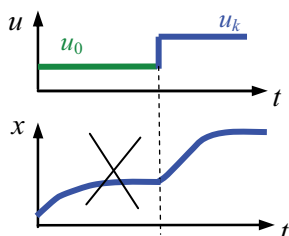
### 5.2.3. Punkt pracy i podstawowe charakterystyki czasowe

Poprawne wykonanie podstawowego badania dynamiki, czyli badania reakcji na skokową zmianę sygnału wejściowego wymaga, aby ten skok był jedyną przyczyną

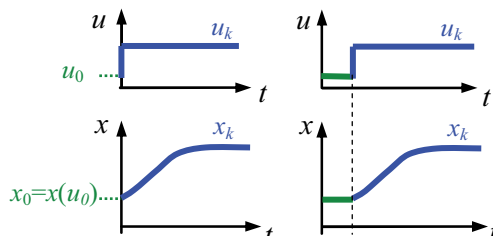
<sup>1</sup> Nazwy plików ze skryptami i schematami powinny być zróżnicowane (niezależnie od różnych rozszerzeń), aby uniezależnić się od kolejności interpretacji nazw przez program symulacyjny

zmian obserwowanych w układzie, to znaczy, że skok musi być podany na układ w czasie, gdy znajduje się on w stanie równowagi. W badaniach symulacyjnych ten stan równowagi (punkt pracy) można zapewnić na dwa sposoby:

- uruchomić symulację od dowolnych warunków początkowych, poczekać na ustalenie stanu równowagi i wówczas podać skok (rys. 5-4) – przebieg do momentu podania skoku wykres nie jest przedmiotem analizy,
- obliczyć stan równowagi  $x_0$  dla początkowej wartości sygnału wejściowego  $u_0$  (rozwiązanie statyczne) i uruchomić symulację od stanu równowagi; skok podaje się na początku symulacji lub przesunięty w czasie (rys. 5-5).



Rys. 5-4. Symulacja od stanu domyślnego (przypadkowego)

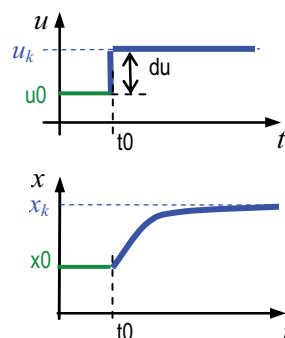


Rys. 5-5. Symulacja od stanu ustalonego

Pierwszy sposób oznacza dłuższy czas symulacji i można go realizować tylko w przypadku układów stabilnych. Drugi sposób wymaga przeprowadzenia dodatkowych obliczeń (wyznaczenia stanu równowagi), ale jest bardziej ogólny (układy stabilne/niestabilne) i pozwala na bieżąco kontrolować poprawność symulacji. Warto więc przygotować schemat i skrypt badanego układu w ten sposób, aby uruchamiać symulację od dowolnego stanu równowagi:

- w skrypcie zainicjować wartość  $u_0$  i wyliczyć wartość  $x_0$  dla tego  $u_0$  (rozwiązanie statyczne),
- na schemacie użyć zmiennej  $u_0$  (wartość początkowa bloku skoku) i  $x_0$  (warunek początkowy w końcowym bloku całkującym).

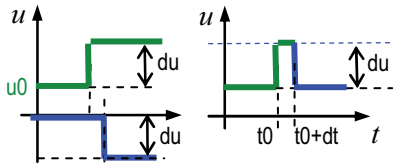
Podczas właściwych badań można zmieniać punkt pracy (wartość  $u_0$ ) i zakłócenie ( $du$ ), ograniczając się jedynie do zmian w skrypcie. Jeśli dodatkowo skok wartości wejściowej będzie przesunięty w czasie (skok w chwili  $t_0 > 0$ ), to można zapewnić ciągłą kontrolę poprawności badania reakcji na wymuszenie skokowe – w czasie  $0 \div t_0$  wykres zawsze musi przedstawiać stan równowagi (rys. 5-6), co potwierdza, że jedyną przyczyną reakcji jest zmiana sygnału wejściowego.



Rys. 5-6. Badanie reakcji układu na skokową zmianę wymuszenia  $u$

W badaniach dynamiki wyznacza się również odpowiedź na zakłócenie impulsowe, a jeśli jest to impuls Diraca  $\delta(t)$ , to mówimy o odpowiedzi impulsowej układu.

Funkcja  $\delta(t)$  to impuls o jednostkowej powierzchni, występujący w jednej chwili i nieskończenie wysoki, więc praktycznie niewykonalny (ani fizycznie, ani symulacyjnie). W badaniach stosuje się przybliżenia tego sygnału, np. prostokątny impuls o powierzchni równej jeden, zrealizowany za pomocą dwóch przebiegów skokowych przesuniętych w czasie (rys. 5-7). Wygenerowany impuls nie może być ani zbyt szeroki, ani zbyt wąski ze względu na dokładność algorytmów numerycznych ( $\rightarrow$  5.2.5).



Rys. 5-7. Wymuszenie impulsowe ( $dt=1/du$ )

Poprawnie wykonane symulacje generują identyczne wykresy jak przebiegi narysowane na podstawie rozwiązań analitycznych, z tym że na podstawie symulacji można narysować jedynie pełne rozwiązanie (nie można wyodrębnić poszczególnych składników rozwiązania).

5.2.4. Automatyzacja badań – uruchamianie symulacji w trybie wsadowym

Realizacja programu badań za pomocą skryptów zapewnia dokumentację badań (przyjętych założeń, wartości parametrów). W połączeniu z elementami programowania (pętle, instrukcje warunkowe) pozwala zautomatyzować powtarzające się operacje, na przykład uruchamianie symulacji dla różnych zestawów parametrów i zbiorczą prezentację wyników. Dotyczy to również modeli zdefiniowanych na schematach, ponieważ zarówno Matlab, jak i Scilab oferują możliwość uruchamiania symulacji w trybie wsadowym (tabela 5-3).

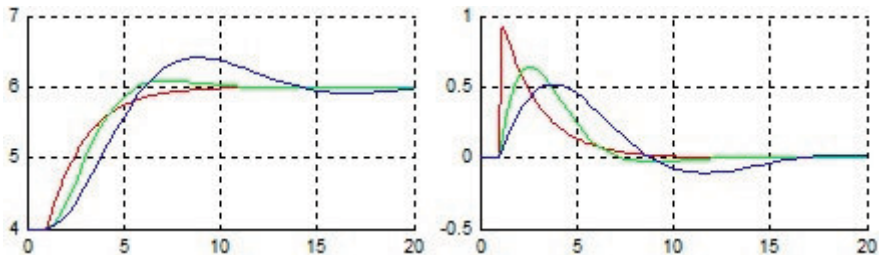
Tabela 5-3. Funkcje do uruchamiania symulacji w trybie wsadowym

|                        | Matlab (Simulink) | Scilab (Xcos)                     |
|------------------------|-------------------|-----------------------------------|
| Uruchomienie symulacji | sim               | xcos_simulate                     |
| Funkcje skojarzone     | simget<br>simset  | loadXcosLibs<br>importXcosDiagram |

Programy symulacyjne wykazują duże różnice w sposobie realizacji tego zadania ze względu na zestaw funkcji i ich działanie. Fragmenty skryptów w tabeli 5-4 zawierają przykład pętli, która uruchamia symulacje dla schematu równania różniczkowego zapisanego w pliku o nazwie 'model'. Efektem działania skryptu są wykresy przebiegów czasowych zmiennej  $x$  i  $x1$  na oddzielnych rysunkach i w różnych kolorach, odpowiadające różnym wartościom parametru  $a2$  (rys. 5-8). W skrypcie Matlab(P) wykorzystano możliwość zapisywania wartości w wektorze czasu ( $t$ ) za pomocą funkcji `sim` oraz założono, że zmienne  $x$  i  $x1$  są rejestrowane przez bloki zbierania danych (To workspace) w postaci prostego wektora (opcja `array`), co ma wpływ na sposób przekazywania parametrów do funkcji `plot`. Skrypty Matlab(N) i Scilab uwzględniają inny sposób rejestrowania zmiennych [15, 16].

Tabela 5-4. Przykład skryptu ze wsadowym uruchamianiem symulacji (model z rysunku 5-2)

| Matlab(P)                                                                                                                                                                                                                        | Matlab(N)                                                                                                                                                                                                                                    | Scilab                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <pre>f1=figure; hold on; grid on; f2=figure; hold on; grid on; kol='rgb'; tab_a=[0.1, 2, 5]; for i=1:3     a2=tab_a2(i);     [t]=sim('model', 20);     figure(f1); plot(t,x,kol(i));     figure(f2); plot(t,x1,kol(i)) end</pre> | <pre>f1=figure; hold on; grid on; f2=figure; hold on; grid on; kol='rgb'; tab_a=[0.1, 2, 5]; for i=1:3     a2=tab_a(i);     [t]=sim('model', 20);     figure(f1);plot(t,tout,t.x,kol(i));     figure(f2);plot(t,tout,t.x1,kol(i)); end</pre> | <pre>loadXcosLibs(); importXcosDiagram('model.xcos'); //scs_m scs_m.props.tf = 20;           // czas sym. n1=figure(); set(gca(), 'auto_clear','off'); set(gca(), 'grid',[1,1]); n2=figure(); set(gca(), 'auto_clear', 'off');set(gca(), 'grid', [1,1]); kol=['r', 'g', 'b']; tab_a=[0.1, 2, 5]; for i=1:3     a2=tab_a(i);     scicos_simulate(scs_m);     figure(n1); plot(x1.time, x.values, kol(i));     figure(n2); plot(x2.time, x1.values, kol(i)); end</pre> |

Rys. 5-8. Wynik działania skryptu z tabeli 5-4 (rozwiązanie  $x(t)$  i jego pochodna)

Matlab i Scilab różnią się dość znacznie w sposobie ustalania parametrów obliczeniowych, takich jak czas symulacji, wybór i parametry algorytmu całkowania. Są one przechowywane w pliku ze schematem i mogą być ustalone podczas edycji schematu. W trybie wsadowym można jednak zmienić parametry symulacji, np. czas symulacji. W Matlabie podaje się go jako parametr funkcji `sim`, a w Scilabie należy zmienić wartość w strukturze `scs_m`, która powstaje po wczytaniu schematu (funkcja `importXcosDiagram`).

### 5.2.5. Algorytmy numerycznego całkowania i różniczkowania

Podstawą symulacyjnego rozwiązywania równań różniczkowych są algorytmy całkowania numerycznego. Programy Matlab, Scilab i Octave różnią się ilością i jakością wykorzystywanych algorytmów. Najprostszy algorytm rozwiązywania równania różniczkowego pierwszego rzędu

$$\dot{x}(t) = f(x, t), x(0) = x_0 \quad (5-2)$$

wynika z definicji pochodnej w chwili  $t_i$ , którą można obliczyć na podstawie ilorazu różnicowego:

$$\dot{x}(t_i) = \frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{t_{i+1} - t_i} \rightarrow \dot{x}(t) = \frac{x(t_i + h) - x(t_i)}{h}, \text{ gdzie } h = t_{i+1} - t_i. \quad (5-3)$$

Porównanie wyrażeń (5-2) i (5-3) pozwala zapisać równanie:

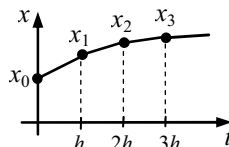
$$\frac{x(t_i + h) - x(t_i)}{h} = f(x_i, t_i) \rightarrow \frac{x_{i+1} - x_i}{h} = f(x_i, t_i), \quad (5-4)$$

z którego można wyznaczyć

$$x_{i+1} = x_i + hf(x_i, t_i). \quad (5-5)$$

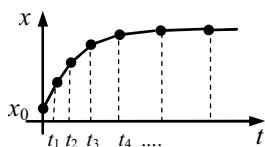
Tak więc, znając rozwiązanie  $x_i$  w chwili bieżącej, można obliczyć wartość pochodnej  $f(x_i, t_i)$ , a następnie wyznaczyć wartość rozwiązania  $x_{i+1}$ . Algorytm, nazywany metodą Eulera, umożliwia wyznaczanie krokowe kolejnych wartości rozwiązania (rys. 5-9).

Metoda ta jest bardzo prosta (opiera się na geometrycznej interpretacji równania różniczkowego), ale jest mało dokładna i mało efektywna – wraz ze zmniejszaniem kroku całkowania  $h$  maleje co prawda błąd obliczeń, ale wzrasta ilość obliczeń. Algorytmy całkowania dostępne w programach symulacyjnych stosują różne mechanizmy, które optymalizują wykonywanie obliczeń [18].



Rys. 5-9. Idea metody Eulera

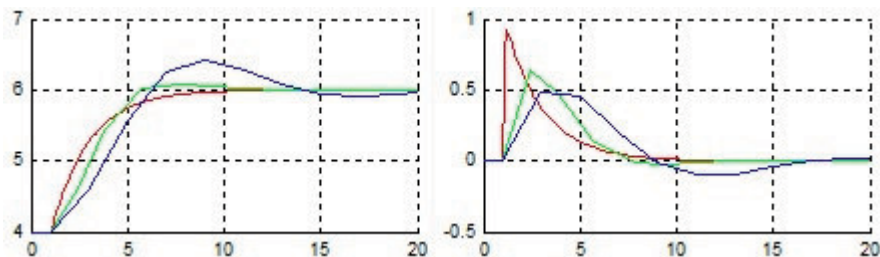
Prowadzenie badań symulacyjnych nie wymaga dokładnej znajomości algorytmu – zazwyczaj wystarczy wiedza o podstawowych zasadach i parametrach, które mają wpływ na działanie algorytmu. Jedną z takich zasad jest podział algorytmów na stałokrokowe (tak jak metoda Eulera) i zmiennokrokowe, które mają wbudowany mecha-



Rys. 5-10. Całkowanie zmiennokrokowe

nizm dostosowania długości kroku całkowania  $h$  do obliczeń w danej chwili czasu (rys. 5-10) – im większa różnica między kolejnymi wartościami rozwiązania  $x$  (szybsza zmiana  $x$ ), tym mniejszy krok całkowania  $h$ , im mniejsza różnica wartości  $x$  (wolniejsza zmiana  $x$ ), tym większy krok  $h$ . Takie działanie pozwala ograniczyć ilość obliczeń, zachowując jednocześnie wymaganą dokładność. Minimalna i maksymalna wartość

kroku  $h$  są parametrami obliczeniowymi, które można zmienić za pomocą funkcji uruchamiającej symulację [15]. Nieodpowiednie wartości parametrów obliczeniowych zniekształcają wykresy, na przykład wykresy nie są gładkie (rys. 5-11).



Rys. 5-11. Wyniki analogiczne do rysunku 5-8, ale zbyt duży maksymalny krok obliczeń

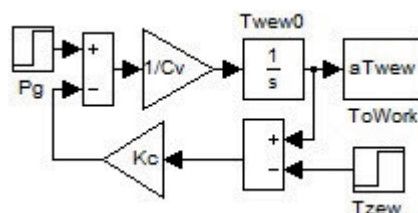
Odpowiedni wybór algorytmu obliczeniowego i jego parametrów umożliwia wykonanie operacji całkowania numerycznego z zadaną dokładnością. Takiej własności nie zapewniają algorytmy numerycznego różniczkowania. Są one źródłem znacznych błędów, ponieważ wartości pochodnych to stosunkowo małe liczby otrzymywane w wyniku odejmowania stosunkowo dużych liczb (małe błędy zaokrągleń w dużych liczbach, w funkcjach pochodnych stają się dużymi błędami względnymi). Z własności algorytmów numerycznych wynika praktyczny wniosek, aby podczas konstrukcji schematów symulacyjnych, o ile to możliwe, unikać bloków różniczkowania.

### 5.3. Przykłady zastosowania badań symulacyjnych

#### 5.3.1. Porównanie rozwiązania analitycznego i symulacyjnego

W rozdziale 4.5 przedstawiono kilka przykładów analitycznego wyznaczenia reakcji układu w określonych warunkach (zadane wymuszenie i warunki początkowe). Jeśli wszystkie wielkości fizyczne mają określone wartości, to te rozwiązania można wyznaczyć metodą symulacyjną, co przedstawimy na przykładzie przebiegu stabilizacji temperatury w pomieszczeniu, opisanego równaniem (4-37).

Schemat modelu (rys. 5-12) jest sparymetryzowany, a cały program badań jest realizowany za pomocą skryptu (tabela 5-5), który zawiera przygotowanie danych dla modelu i symulacji, a następnie uruchamia dwie serie symulacji – reakcję układu na zmianę mocy  $P_g$  i temperatury  $T_{zew}$ .

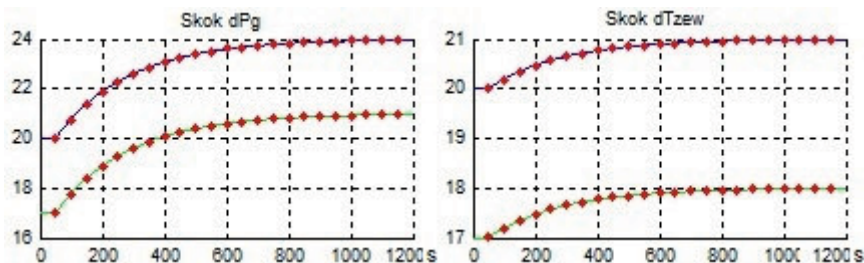


Rys. 5-12. Schemat modelu (4-37) 'pom1e'

Tabela 5-5. Przykład skryptu (Matlab) generującego wykresy z rysunku 5-13

| Przygotowanie                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | Reakcje na skok                                                                                                                                                                                                                            |                                                                                                                                                                                                                                        |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | mocy $P_g$                                                                                                                                                                                                                                 | temperatury $T_{zew}$                                                                                                                                                                                                                  |
| <pre> model='pom1e'; cp=1000; ro=1.2; %J/kgK,k g/m3 V=10*2.5;          %10m2 x 2.5m PgN=5000; TzewN=-20; TwewN=20; %obliczenie współczynników Kc = PgN / (TwewN-TzewN); Cv = cp*ro*V; % dane do symulacji czas_skok=50; czas_sym=1200; kol='bgm'; tabPg0 = [PgN, 0.8*PgN]; tabTzew0 = [TzewN, TzewN + 5]; </pre> | <pre> figure(1), hold on; grid on; title('Skok dPg');  dPg=0.1*PgN; dTzew=0; for i=1:1:2     Pg0 = tabPg0(i);     Tzew0 = tabTzew0(i);     Twew0 = (Pg0 + Kc*Tzew0) / Kc;     t=sim(model,czas_sym);     plot(t,aTwew, kol(i)); end </pre> | <pre> figure(2), hold on; grid on; title('Skok dTzew');  dPg=0; dTzew=1; for i=1:1:2     Pg0 = tabPg0(i);     Tzew0 = tabTzew0(i);     Twew0 = (Pg0 + Kc*Tzew0) / Kc;     t=sim(model,czas_sym);     plot(t,aTwew, kol(i)); end </pre> |

Wyniki każdej serii są przedstawione na dwóch wykresach (rys. 5-13). Do wykresów dorysowano przebieg wygenerowany na podstawie analitycznego rozwiązania równania (4-37), to znaczy:  $T_{wew}(t) = -(T_{wewk} - T_{wewk})e^{-(1/T)t} + T_{wewk}$ . Jeśli badania symulacyjne i rozwiązanie analityczne są poprawne, to wykresy są praktycznie identyczne.

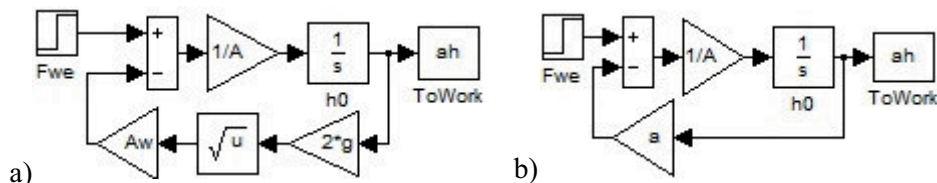


Rys. 5-13. Reakcje  $T_{wew}$  na skok  $P_g$  i skok  $T_{zew}$  w dwóch punktach pracy: wykresy z symulacji (—) i na podstawie funkcji (♦)

Możliwość porównania wykresów dla rozwiązania symulacyjnego i analitycznego pozwala zweryfikować poprawność obu badań.

### 5.3.2. Porównanie własności liniowego i nieliniowego modelu zbiornika

Kolejnym przykładem realizacji badań symulacyjnych jest przygotowanie i podstawowe rezultaty badań zbiornika ze swobodnym wypływem (rys. 2-1), opisanego za pomocą modelu nieliniowego (2-6) i przybliżonego modelu liniowego (2-7). Model nieliniowy i liniowy był analizowany wcześniej na podstawie charakterystyk statycznych (→ 3.2.1), a obecnie zostaną porównane reakcje układu na to samo wymuszenie skokowe podawane w różnych punktach pracy. Dla każdego modelu przygotowano sparametryzowany schemat (rys. 5-14) zapamiętany w pliku.



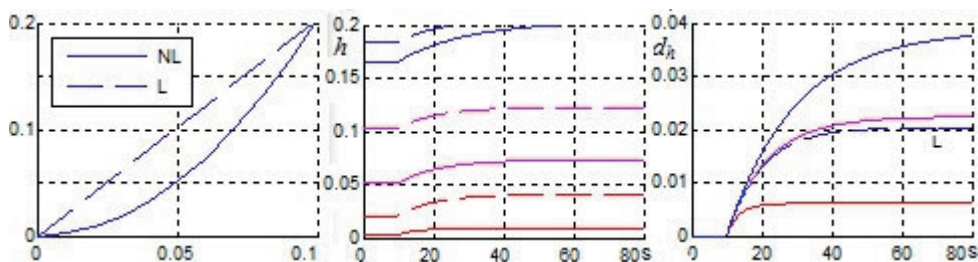
Rys. 5-14. Schemat modelu: a) nieliniowego (2-6) 'zb1NL'; b) liniowego (2-7) 'zb1L'

Założony program badań jest realizowany za pomocą skryptu (tabela 5-6) złożonego z kilku części: przygotowanie danych i wygenerowanie charakterystyk statycznych obu modeli oraz rejestrację odpowiedzi na skok wartości zmiennej wejściowej w trzech punktach pracy dla modelu nieliniowego i liniowego.

Tabela 5-6. Przykład skryptu (Matlab) generującego wykresy z rysunku 5-15

| Przygotowanie<br>i charakterystyki statyczne                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | Reakcje na skok dla modelu                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                                                                                                                                                                                                     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | nieliniowego (2-6)                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | liniowego (2-7)                                                                                                                                                                                     |
| <pre> modelNL='zb1NL'; modelL='z1L'; g=9.81; FweN = 0.1; A=5; Aw=0.05; %dno, otwór (m2) hN = FweN^2 / (2*g*Aw^2); a = Aw*sqrt(2*g*hN) / hN; %linea→ %----- tabFwe = FweN * [0: 0.1: 1]; tabh_nlin = tabFwe.^2./(2*g.*Aw^2); tabh_lin = tabFwe/a; figure, hold on; grid on; plot(tabFwe, tabh_nlin,'b'); plot(tabFwe, tabh_lin,'b--'); </pre> | <pre> czas_skok=10; czas=100; kol='rmb'; tabFwe=FweN*[0.10, 0.5, 0.90] dFwe=0.1*FweN; f1=figure, hold on; grid on; f2=figure, hold on; grid on;  for i=1:1:3     Fwe0 = tabFwe(i);     h0 = Fwe0^2 / (2*g*Aw^2);     t = sim(modelNL,czas);     figure(f1); plot(t,ah,kol(i));     figure(f2); plot(t,ah-h0,kol(i)); end </pre> | <pre> for i=1:1:3     Fwe0 = tabFwe(i);     h0 = Fwe0 / a;     t = sim(modelL,czas);     figure(f1); plot(t,ah,strcat(kol(i),'--'));     figure(f2); plot(t,ah-h0, strcat(kol(i),'--')); end </pre> |

Wynikowe wykresy (rys. 5-15) ilustrują różnice między własnościami modelu nieliniowego (—) i modelu, który jest jego liniowym przybliżeniem (- -).

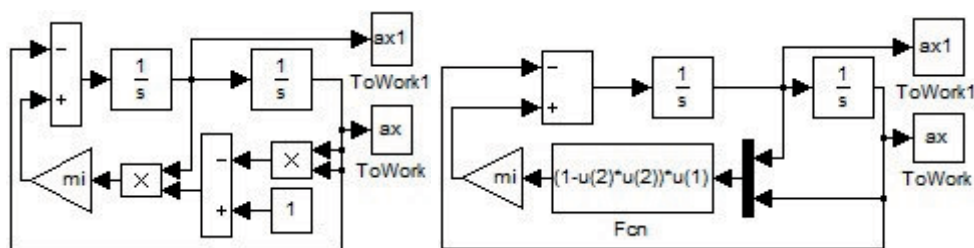


Rys. 5-15. Charakterystyka  $h(f_{we})$  w zakresie  $0 \div 100\% f_{weN}$ ,  
reakcje  $h$  na skok  $10\% f_{weN}$  oraz porównanie reakcji  $dh$  modelu (2-6) (—) i (2-7) (- -)

Charakterystyki statyczne  $h(f_{we})$  potwierdzają własności linearyzacji modelu za pomocą siecznej ( $\rightarrow$  3.2.1). Z kolei na charakterystykach czasowych widoczna jest podstawowa różnica badanych modeli, to znaczy fakt, że reakcja modelu liniowego na takie samo zakłócenie (skok) jest taka sama w każdym punkcie pracy ( $dh$ ), natomiast reakcja modelu nieliniowego zależy od punktu pracy.

### 5.3.3. Alternatywne realizacje schematu

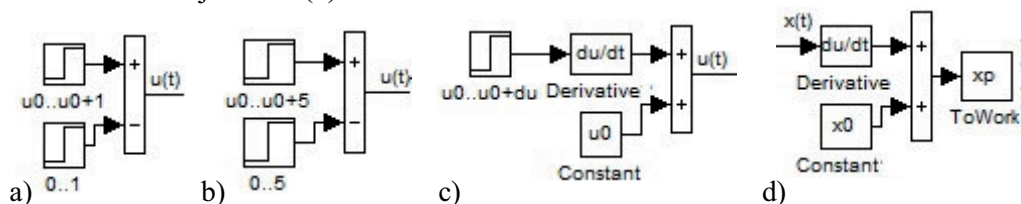
Schematy równań różniczkowych mogą być realizowane przy użyciu różnych bloków. Przykładem mogą być **dwa schematy równania van der Pola** (2-69) – jeden zawiera bloki operacji matematycznych (Sum, Gain, Product), a drugi – blok Fcn umożliwiający definiowanie funkcji, także nieliniowych (rys. 5-16).



Rys. 5-16. Alternatywne schematy modelu van der Pola (2-69)

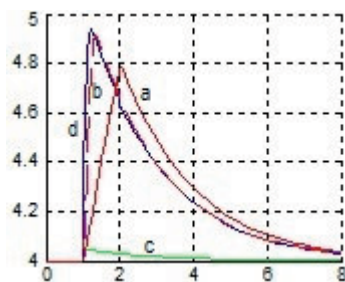
Sposób realizacji schematu zwykle nie wpływa na wyniki symulacji, a przy prostych modelach nie wpływa również na czas. Równanie van der Pola jest przykładem modelu bez zmiennej wejściowej, gdy badania dynamiki polegają na obserwacji rozwiązania dla różnych warunków początkowych ( $\rightarrow$  21.2).

Drugi przykład alternatywnych realizacji badań dotyczy wyznaczenia odpowiedzi impulsowej. Na rysunku 5-17 przedstawiono różne sposoby wygenerowania wymuszenia impulsowego (a÷c), które jest podawane na wejście układu zamiast wymuszenia skokowego (rys. 5-2) oraz uzyskanie odpowiedzi impulsowej na podstawie odpowiedzi skokowej układu (d).



Rys. 5-17. Alternatywne sposoby generowania odpowiedzi impulsowej

Wyniki symulacji różnią się (rys. 5-18). Najdokładniejszy wykres odpowiedzi impulsowej uzyskano w przypadku, gdy wymuszeniem był krótki impuls o wartości 5 (b) oraz gdy zastosowano różniczkowanie odpowiedzi skokowej (d). Przypadek (a) ilustruje reakcję układu, gdy impuls jest zbyt szeroki. W przypadku (c) natomiast ujawniają się typowe błędy obliczeniowe podczas różniczkowania sygnału, który zmienia się w bardzo krótkim czasie.



Rys. 5-18. Odpowiedzi impulsowe zrealizowane zgodnie z rysunkiem 5-17

## **IV. Analiza i projektowanie układów liniowych**



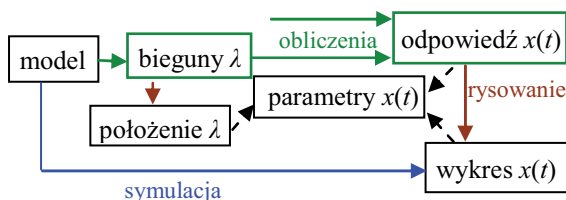
## 6. Własności obiektów liniowych (równanie n-tego rzędu)

*czyli to co da się łatwo policzyć.*

### 6.1. Charakterystyka statyczna i odpowiedzi czasowe

Równania różniczkowe stosowane do opisu dynamiki układów fizycznych (obiektów, procesów technologicznych) wynikają z podstawowych praw fizyki ( $\rightarrow$  2) i stanowią pełną formę modelu układu, która opisuje i własności statyczne, i dynamiczne. Mogą to być równania zarówno liniowe, jak i nieliniowe, przy czym nieliniowość bardzo często dotyczy części statycznej. Badania własności (charakterystyk) statycznych są wykonywane zarówno dla modeli liniowych, jak i nieliniowych ( $\rightarrow$  3), podobnie jak symulacyjne badania dynamiki ( $\rightarrow$  5, 8.3). Możliwość zastosowania analitycznych badań dynamiki jest ograniczona praktycznie do równań liniowych ( $\rightarrow$  1.4). W przypadku równań nieliniowych stosuje się różne metody upraszczania opisu (np. dodatkowe założenia, linearyzacja), tak aby otrzymać prostsze równania liniowe.

Podstawowe metody analizy układów liniowych opierają się na wyznaczeniu biegunów oraz odpowiedzi czasowych na wybrane typy wymuszeń (rys. 6-1). Choć analizy analityczne rozwiązań liniowego równania różniczkowego, czyli wyznaczenie funkcji  $x(t)$



Rys. 6-1. Podstawowa analiza dynamiki układów liniowych

jest zawsze możliwe, to jednak zazwyczaj nie jest konieczne, tym bardziej, że funkcja  $x(t)$  nawet dla układów liniowych jest dość złożona, zwłaszcza gdy układ ten jest wyższego rzędu i ma bieguny zespolone lub wielokrotne. W badaniach realizowanych na potrzeby automatyki celem badań nie jest wyprowadzenie wzoru na odpowiedź układu, tylko wyznaczenie parametrów tej odpowiedzi, które umożliwiają porównywanie własności różnych układów lub projektowanie układów o zadanych parametrach. Parametry te można wyznaczyć z wykresów  $x(t)$ , ale można je też obliczyć na podstawie położenia biegunów.

### 6.2. Parametry statyczne i dynamiczne

#### 6.2.1. Stan ustalony, punkt równowagi oraz wzmocnienie układu

**Stan ustalony** w przypadku układu liniowego oznacza stan po zaniku składowej swobodnej (przejściowej), gdy w rozwiązaniu zostaje tylko składowa wymuszona (ustalona). Na podstawie rozwiązań równań różniczkowych można stwierdzić, że jeśli na wejście układu liniowego podawane jest stałe wymuszenie, to w stanie równowagi na wyjściu też jest stała wartość – punkt równowagi ( $\rightarrow$  4.2, 8.2), a jeśli na wejście ukła-

du liniowego podawany jest sygnał sinusoidalny, to w stanie równowagi na wyjściu też występuje sygnał sinusoidalny ( $\rightarrow$  14.1).

Ustalenie punktu równowagi odbywa się na podstawie charakterystyki statycznej ( $\rightarrow$  3.1) i jest konieczne podczas wyznaczania reakcji układu na wymuszenia skokowe i impulsowe. Badania te wymagają, aby przed zmianą wymuszenia układ znajdował się w stanie równowagi ( $\rightarrow$  4.2.1, 5.2.3). Na podstawie rozwiązań analitycznych można stwierdzić, że reakcja układu liniowego na taką samą zmianę  $du$  jest identyczna w każdym punkcie pracy. Nieliniowość modelu natomiast powoduje, że reakcja układu zależy od punktu pracy.

Liniowość lub nieliniowość równania różniczkowego opisującego procesy technologiczne często dotyczy części statycznej, więc można ją ustalić na podstawie charak-

terystyk statycznych (rys. 6-2). Badanie to można ograniczyć do wyznaczenia wzmocnienia układu  $k_{ukl}$  dla poszczególnych wyjść i wejść. Wzmocnienie układu odpowiada nachyleniu danej charakterystyki statycznej i jest wyznaczane na podstawie przyrostów:

$$k_{ukl} = d_x / d_u. \quad (6-1)$$

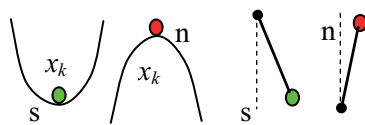
W układach liniowych wzmocnienie jest stałe w całym zakresie zmian danego wyj-

ścia i wejścia. W układach nieliniowych wzmocnienie zależy od punktu pracy, ale jeśli jest to układ o wielu wejściach nie wszystkie zmienne wejściowe muszą występować w nieliniowych funkcjach, np. w równaniu  $x = au_1 + b(u_2)^2$  zmienna  $u_1$  wpływa na punkt pracy liniowo, a zmienna  $u_2$  – nieliniowo.

### 6.2.2. Stabilność

Podstawową własnością dynamiki jest stabilność lub niestabilność układu (obiektu). Praktyczne znaczenie tej własności powoduje, że formułowane są różne definicje stabilności. Jedną z podstawowych definicji ( $\rightarrow$  1.2) opiera się na zachowaniu układu przy stałym wymuszeniu (rys. 6-3):

- **układ stabilny** przy stałym wymuszeniu ( $u_k$ ) dąży do punktu równowagi ( $x_k$ ),
- **układ niestabilny** trwa w punkcie równowagi gdy jest to jego stan początkowy, ale mniejsze zakłócenie powoduje trwałe oddalenie od punktu.



Rys. 6-3. Kulka i wahadło jako układ stabilny (s) i niestabilny (n)

Reakcję stabilnego układu można podzielić na przebieg przejściowy po zmianie wymuszenia oraz przebieg ustalony w stanie równowagi. Jeśli stabilność/niestabilność układu nie zależy ani od warunków początkowych, ani od wielkości wymuszenia, to mówimy o **stabilności/niestabilności globalnej**. Jeśli stabilność zależy od warunków początkowych lub wielkości wymuszenia, to jest to **stabilność /niestabilność lokalna**.

Model statyczny nie wystarcza do zbadania stabilności – konieczny jest model dynamiki. To, że układ ma punkt równowagi, nie oznacza, że będzie do niego dążył. Podstawowe badania dynamiki układów prowadzi się na podstawie:

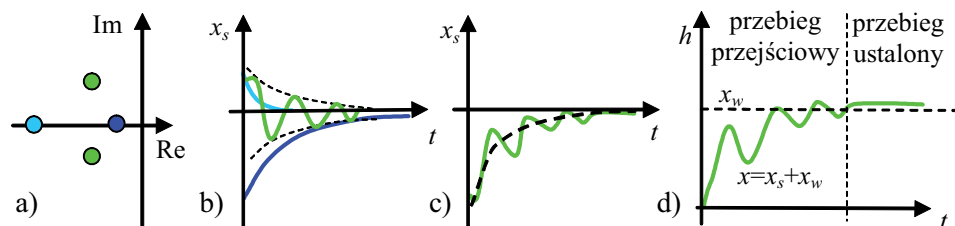
- ewolucji stanu od różnych warunków początkowych przy stałym wymuszeniu,
- reakcji na wymuszenia skokowe i impulsowe podawane w stanie równowagi.

Stabilność układu oznacza, że końcowym stanem w tych badaniach jest stan równowagi (potocznie mówimy też o stabilizacji układu).

**Stabilność układów liniowych** jest prosta do stwierdzenia, ponieważ nie zależy ani od warunków początkowych, ani od wymuszenia (punktu pracy i wielkości skoku). Jeśli układ liniowy jest stabilny, to jest stabilny globalnie, a jeśli jest niestabilny, to jest niestabilny globalnie. Symulacyjne badanie stabilności takich układów można ograniczyć do wyznaczenia reakcji na dowolne wymuszenie skokowe (impulsowe) w dowolnym punkcie pracy.

W badaniu stabilności układów liniowych kluczowe są własności rozwiązania  $x(t)$  równania różniczkowego ( $\rightarrow$  1.4.2), zawierającego dwie składowe (rys. 6-4):

- składową swobodną  $x_s(t)$ , która nie zależy od wymuszenia, a jedynie od parametrów układu – składowa  $x_s(t)$  decyduje o stabilności układu,
- składową wymuszoną  $x_w(t)$ , która zależy zarówno od wymuszenia, jak i od własności układu – składowa  $x_w(t)$  opisuje stan równowagi układu.



Rys. 6-4. Przykładowe wykresy układu stabilnego:

a) lokalizacja biegunów, b) składniki  $x_s$ , c) składowa  $x_w$ , d) odpowiedź skokowa

Z własności rozwiązania swobodnego wynikają różne **kryteria stabilności** układu liniowego, czyli alternatywne warunki, które pozwalają stwierdzić, że układ liniowy jest stabilny (osiąga stan równowagi):

- 1° wszystkie bieguny układu (pierwiastki równania charakterystycznego) leżą w lewej półpłaszczyźnie zespolonej (mają ujemną część rzeczywistą),
- 2° każdy ze składników rozwiązania swobodnego  $x_s(t)$  zanika z czasem (do zera),
- 3° rozwiązanie swobodne  $x_s(t)$  zanika z czasem – zostaje rozwiązanie wymuszone,
- 4° przy braku wymuszenia układ samoistnie wraca do stanu równowagi,
- 5° odpowiedź impulsowa zanika z czasem do zera.

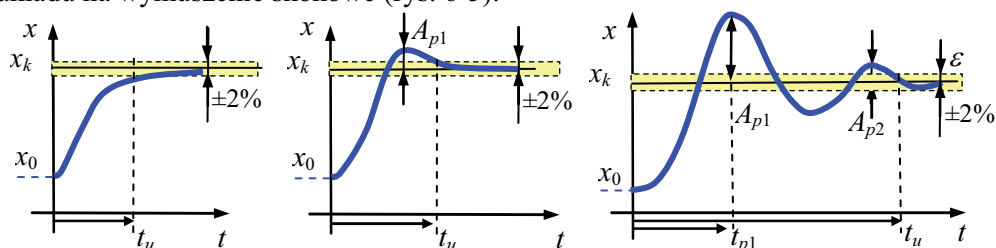
Kryteria te określają **stabilność asymptotyczną** (zgodnie z definicją Lapunowa – formalne definicje stabilności zostaną sformułowane w podrozdziale 22.3). Kryteriów tych nie spełniają bieguny, które leżą na osi Im, ponieważ powodują, że składowa swobodna nie zanika do zera (choć też nie dąży do  $\pm\infty$ ). W podręczniku przyjmuje

się, że pojęcie stabilności oznacza domyślnie stabilność asymptotyczną, natomiast układ, który posiada bieguny w lewej półpłaszczyźnie ( $\text{Re}(\lambda) < 0$ ) oraz biegun lub zespoloną parę biegunów na osi  $\text{Im}$  ( $\text{Re}(\lambda) = 0$ ), jest nazywany układem **na granicy stabilności** (szczegółowa analiza w podrozdziale 22.3). W praktyce inżynierskiej stosowane jest także pojęcie stabilności BIBO (ang. Bounded Input Bounded Output): układ jest stabilny, jeśli na ograniczone wymuszenie  $u(t)$  (np. stałe, skokowe, impulsowe, sinusoidalne) reaguje ograniczonym sygnałem wyjściowym  $x(t)$ . To „słabsza” wersja stabilności, ponieważ obejmuje także przypadki graniczne (bieguny na osi  $\text{Im}$ ).

**Stabilność układów nieliniowych** jest trudna do stwierdzenia i analitycznie, i symulacyjnie, ponieważ układy nieliniowe mogą być stabilne globalnie, ale mogą też być stabilne tylko lokalnie, czyli tylko dla określonych warunków początkowych i określonych wymuszeń. Analityczne badanie stabilności układów nieliniowych wykonuje się zazwyczaj w pewnym obszarze wokół poszczególnych punktów równowagi – za pomocą linearyzacji modelu i badania takiego przybliżonego opisu ( $\rightarrow$  19.2). Badania symulacyjne natomiast wymagają przeprowadzenia wielu eksperymentów – dla różnych wartości wymuszeń, dla różnych warunków początkowych ( $\rightarrow$  21).

### 6.2.3. Czas ustalania (stabilizacji) i oscylacyjność układów stabilnych

Jeśli układ jest stabilny (osiąga stan równowagi), to kolejnymi parametrami opisującymi dynamikę układu jest czas ustalania odpowiedzi oraz wielkość oscylacji. Parametry te są stosowane w automatyce do ilościowego porównywania różnych układów. Są one definiowane na podstawie przebiegów przejściowych, na przykład odpowiedzi układu na wymuszenie skokowe (rys. 6-5).



Rys. 6-5. Parametry przebiegów aperiodycznych i oscylacyjnych (tłumionych)

Teoretycznie stabilny układ (stabilny asymptotycznie) osiąga stan równowagi w nieskończoności ( $t \rightarrow \infty$ ), ale w praktyce przyjmuje się pewien przedział tolerancji ( $\pm \varepsilon$ ) wokół końcowego stanu ustalonego  $x_k$ , na przykład  $\pm 2\%$  zmiany wartości wyjściowej ( $x_k - x_0$ ). **Czas ustalania odpowiedzi** ( $t_u$ ) wyznaczany na podstawie odpowiedzi na wymuszenie skokowe, to czas od momentu podania wymuszenia skokowego do czasu, gdy odpowiedź pierwszy raz znajdzie się w założonym obszarze wokół wartości  $x_k$  i już go nie opuszcza.

Odpowiedzi stabilnego układu mogą mieć charakter aperiodyczny, czyli bez oscylacji (przeregulowania, drgań), lub oscylacyjny (nieaperiodyczny), gdy pojawia się chwilowe przekroczenie stanu ustalonego  $x_k$  – **przeregulowanie**. Wielkość przeregu-

lowania mierzona jako bezwzględna wielkość amplitudy ( $A_{p1}$ ,  $A_{p2}$ ) zazwyczaj jest przeliczana na wartości względne:

$$A_{p\%} = \frac{A_{p1} \cdot 100\%}{x_k - x_0} \quad \text{lub} \quad A_{p\%} = \frac{A_{p1} \cdot 100\%}{x_k}, \quad (6-2)$$

przy czym  $A_{p\%}$  liczone względem zmiany wartości ( $x_k - x_0$ ) jest bardziej uniwersalne.

**Przykład:** Zmienna  $x$  może przyjmować wartości w zakresie: a)  $0 \div 40^\circ\text{C}$ , b)  $-20 \div 20^\circ\text{C}$ .

W obu przypadkach zakres zmian jest taki sam ( $40^\circ\text{C}$ ), więc oczekujemy, że taka sama wartość względna ( $A_{p\%}$ ) oznacza taką samą wartość bezwzględną ( $A_{p1}$ ).

Poza wartością przeregulowania (oscylacji) wyznacza się też **oscylacyjność** układu, którą można wyrazić jako stosunek kolejnych amplitud:

$$k_A = A_{p1} / A_{p2} = \dots = A_{pk+1} / A_{pk}. \quad (6-3)$$

Większa oscylacyjność oznacza wolniejsze zanikanie drgań (co nie musi oznaczać wolniejszego ustalania odpowiedzi). W automatyce układy, które reagują w sposób aperiodyczny, są nazywane obiektami inercyjnymi, a układy reagujące z przeregulowaniem – obiektami oscylacyjnymi.

#### 6.2.4. Położenie biegunów a parametry odpowiedzi

Odpowiedź układu liniowego na wymuszenie skokowe ( $\rightarrow$  1.4.2) można zapisać jako:  $x(t) = x_k + \sum x_{si}(t)$ , gdzie składniki  $x_{si}(t)$  to funkcje typu (dla uproszczenia obliczeń przyjmujemy chwilowo bieguny jednokrotne):

- $A_i e^{\alpha_i t}$ , dla biegunów rzeczywistych  $\lambda_i = \alpha_i$ ,
- $A_i e^{\alpha_i t} \sin(\omega_{ri} t + \varphi_i)$ , dla biegunów zespolonych  $\lambda_{i,i+1} = \alpha_i \pm j\omega_{ri}$ .

Parametry opisujące dynamikę układu (czas ustalania i oscylacyjność) wynikają z rozwiązania swobodnego  $x_s(t)$ . Analizując funkcje  $x_{si}(t)$ , można oszacować parametry odpowiedzi  $x(t)$ .

Odpowiedź stabilnego układu (stabilnego asymptotycznie) ustala się, gdy składowa swobodna  $x_s$  zanika do zera (bez lub z oscylacjami). Każdy z biegunów  $\lambda_i$  wprowadza do rozwiązania swobodnego  $x_s(t)$  składnik  $x_{si}(t)$ , który zanika zgodnie z przebiegiem funkcji  $A_i e^{\alpha_i t}$ , gdzie  $\alpha_i = \text{Re}(\lambda_i)$ . Czas zanikania  $t_{ui}$  składnika to czas, po którym wartość  $x_{si}(t)$  nie przekracza już założonego poziomu  $\varepsilon$  wyznaczanego względem wartości początkowej:

$$x_{si}(t_{ui}) = \varepsilon \cdot x_{si}(0) \rightarrow A_i e^{\alpha_i t_{ui}} = \varepsilon A_i \rightarrow t_{ui} = (\ln \varepsilon) / \alpha_i. \quad (6-4)$$

W praktyce przyjmuje się zwykle  $\varepsilon = 2\%$  lub  $1\%$  i stosuje się przybliżone wartości  $\ln \varepsilon$ : dla  $\varepsilon = 2\% \rightarrow \ln \varepsilon = -3.912 \dots \approx -4$ ; dla  $\varepsilon = 1\% \rightarrow \ln \varepsilon = -4.6052 \dots \approx -4.6$ . **Czas ustalania** odpowiedzi  $t_u$  składowej swobodnej  $x_s(t)$  odpowiada najdłuższemu z czasów zanikania  $t_{ui}$  wszystkich składników  $x_{si}(t)$ :

$$t_u \approx 4 / |\text{Re}(\lambda_i)|_{\min}. \quad (6-5)$$

Wartość  $|\operatorname{Re}(\lambda_i)|_{\min}$  to odległość od osi Im najbliższego bieguna, która decyduje o stabilności i czasie ustalania odpowiedzi i nazywa się stopniem stabilności układu.

Oscylacje w odpowiedzi układu oznaczają, że wśród biegunów jest przynajmniej jedna para biegunów zespolonych, które wprowadzają do rozwiązania swobodnego  $x_s(t)$  składniki oscylacyjne  $x_{si}(t) = A_i e^{\alpha_i t} \sin(\omega_{ri} t + \varphi_i)$ , nazywane **drganiami własnymi układu**. Przeprowadzając klasyczną analizę przebiegu zmienności tej funkcji, można obliczyć wartości kolejnych przeregulowań, a stąd oscylacyjność składnika.

Przeregulowanie  $A_1$  i kolejne przeregulowania to maksymalne wartości funkcji  $A_i e^{\alpha_i t} \sin(\omega_{ri} t + \varphi_i)$  lub jej równoważnej postaci (1-23):  $e^{\alpha_i t} (B_i \cos \omega_{ri} t + B_{i+1} \sin \omega_{ri} t)$ , która zostanie użyta w analizie. Podstawiając warunki początkowe odpowiedzi skokowej, otrzymujemy układ równań ( $0 = B_i x_k$  i  $0 = \alpha_i B_i + B_{i+1} \omega_{ri}$ ), z którego wynika relacja między współczynnikami  $B_{i+1} = -B_i \alpha_i / \omega_{ri}$ . Kolejne kroki obliczeń są następujące:

1° Obliczenie funkcji pochodnej funkcji  $\dot{x}_{si}(t)$

$$x_{si}(t) = e^{\alpha_i t} \left( B_i \cos \omega_{ri} t - \frac{B_i \alpha_i}{\omega_{ri}} \sin \omega_{ri} t \right) \rightarrow \dot{x}_{si}(t) = -B_i \left( \omega_{ri} + \frac{\alpha_i^2}{\omega_{ri}} \right) e^{\alpha_i t} \sin \omega_{ri} t. \quad (6-6)$$

2° Rozwiązanie  $\dot{x}_{si}(t) = 0$  i wyznaczenie czasu kolejnych maksimów funkcji  $x_{si}(t)$

$$\dot{x}_{si}(t) = -B_i \left( \omega_{ri} + \frac{\alpha_i^2}{\omega_{ri}} \right) e^{\alpha_i t} \sin \omega_{ri} t = 0 \rightarrow \sin \omega_{ri} t = 0 \rightarrow \omega_{ri} t = \pi, 3\pi, \dots \rightarrow t_{pk} = k \frac{\pi}{\omega_{ri}}. \quad (6-7)$$

3° Obliczenie wartości kolejnych przeregulowań  $x_{si}(t_{pk})$

$$x_{si}(t_{pk}) = B_i e^{k\pi\alpha_i / \omega_{ri}} \left( \cos k\pi - \frac{\alpha_i}{\omega_{ri}} \sin k\pi \right) = B_i e^{k\pi\alpha_i / \omega_{ri}} = A_{pk}. \quad (6-8)$$

4° Obliczenie oscylacyjności ( $k_A$ ):

$$\frac{A_{pk2}}{A_{pk}} = \frac{B_i e^{3\pi\alpha_i / \omega_{ri}}}{B_i e^{\pi\alpha_i / \omega_{ri}}} = e^{2\pi\alpha_i / \omega_{ri}} = e^{-2\pi|\alpha_i / \omega_{ri}|}. \quad (6-9)$$

Szybkość tłumienia drgań w przebiegu związanym z daną zespoloną parą biegunów ( $\alpha_i \pm j\omega_{ri}$ ) można wyznaczyć na podstawie zależności:

$$\frac{A_{i,pk+1}}{A_{i,pk}} = e^{-2\pi/\mu_i}, \text{ gdzie } \mu_i = \left| \frac{\omega_{ri}}{\alpha_i} \right|. \quad (6-10)$$

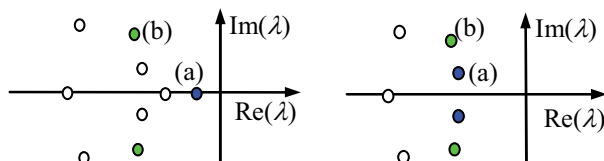
To oznacza, że im większa wartość  $\mu_i$ , tym większa oscylacyjność (wolniejsze zanikanie drgań). O wielkości i szybkości tłumienia oscylacji w odpowiedzi  $x(t)$  układu nie decydują bieguny o największej wartości urojonej, ale bieguny, które mają największy stosunek części urojonej do rzeczywistej:

$$\mu = \left| \operatorname{Im}(\lambda_i) / \operatorname{Re}(\lambda_i) \right|_{\max}. \quad (6-11)$$

Parametr  $\mu$  nazywa się stopniem oscylacyjności układu.

Na podstawie wzorów (6-5) i (6-11) można wykazać, że podstawowe parametry opisujące dynamikę (czas ustalania i oscylacyjność), definiowane na podstawie odpowiedzi  $x(t)$  układu, można również oszacować na podstawie biegunów układu. Stąd

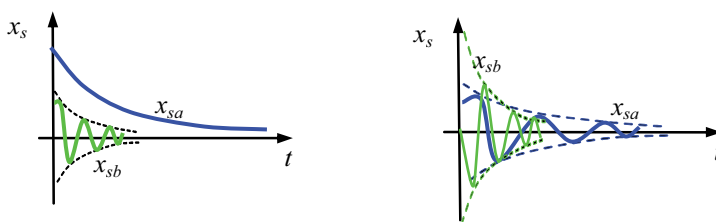
wynikają metody analizowania i projektowania modeli układów na płaszczyźnie zespolonej, przy czym w praktyce stosuje się analizę ograniczoną do biegunów o największym znaczeniu. **Najbardziej znaczące bieguny** układu to te, które wyznaczają stopień stabilności i stopień oscylacyjności układu (rys. 6-6).



Rys. 6-6. Przykłady najbardziej znaczących biegunów układu ze względu na: (a)  $t_u$ , (b)  $\mu$

Na podstawie najbardziej znaczących biegunów można nie tylko przewidzieć jakościowe cechy dynamiki układu ( $\rightarrow$  4.3.2), ale także szacować wartości czasu ustalania ( $t_u$ ) i oscylacyjności ( $A_{p1}/A_{p2}$ ) przebiegu  $x(t)$ . Wyniki z takiej uproszczonej analizy są dokładniejsze w odniesieniu do czasu ustalania – przebieg  $x(t)$  osiąga stan ustalony, gdy zanika najwolniejszy składnik  $x_{si}(t)$ . Niezerowy stopień oscylacyjności układu ( $\mu$ ) nie oznacza jeszcze, że w odpowiedzi  $x(t)$  wystąpi przeregulowanie lub jaka będzie wartość tego przeregulowania. Na przykład (rys. 6-7):

- najbardziej znaczący składnik oscylacyjny ( $x_{sb}(t)$ ) będzie zanikał znacznie szybciej niż składniki aperiodyczne ( $x_{sa}(t)$ ),
- układ ma dwie pary biegunów zespolonych, więc w rozwiązaniu  $x(t)$  występuje złożenie przebiegów oscylacyjnych o różnych częstotliwościach i przesuniętych w fazie (maksymalna wartość sumy może być chwilami większa niż amplituda bardziej znaczącego składnika oscylacyjnego  $x_{sb}(t)$ ).



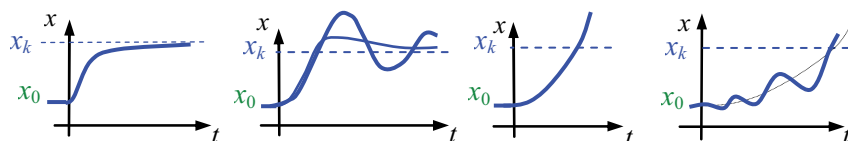
Rys. 6-7. Składowe rozwiązania od najbardziej znaczących biegunów układów z rysunku 6-6

## 7. Modele pierwszego i drugiego rzędu – analiza i projekt

*czyli jak przeliczyć i zrozumieć najprostsze przypadki*

### 7.1. Znaczenie i zastosowanie modeli pierwszego i drugiego rzędu

Na podstawie analizy rozwiązania liniowych równań różniczkowych ( $\rightarrow$  1.4, 6.2) można wnioskować, że własności dynamiki układów wyższego rzędu wynikają z własności układów pierwszego i drugiego rzędu. Szczególną rolę w badaniach dynamiki odgrywa liniowy model drugiego rzędu, ponieważ to najprostszy model, który może reprezentować wszystkie typy reakcji układu. Na wykresach poniżej (rys. 7-1) przedstawiono podstawowe typy odpowiedzi na wymuszenie skokowe w zadanym punkcie pracy: stabilna aperiodyczna i oscylacyjna (z przeregulowaniem) oraz niestabilne (bez/z oscylacjami).



Rys. 7-1. Podstawowe typy odpowiedzi skokowych układu drugiego rzędu

Liniowe modele pierwszego i drugiego rzędu stosuje się do opracowywania metod badania i projektowania obiektów (układów) automatyki, ponieważ:

- ich własności dynamiczne nie zależą od punktu pracy i wymuszenia,
- mogą opisać każdy typ reakcji – stabilny i niestabilny, z oscylacjami lub bez,
- są na tyle proste, że można wykonać badania analityczne, które łatwiej jest uogólnić niż badania symulacyjne (doświadczalne).

Tak prosty opis można uzyskać przez:

- zestaw założeń upraszczających model na etapie konstrukcji ( $\rightarrow$  1.3),
- ograniczenie analizy do najbardziej istotnych biegunów ( $\rightarrow$  6.2.4),
- zastosowanie metod upraszczania modeli (obniżanie rzędu:  $\rightarrow$  4.3.2, 20.2).

Jeśli więc obiekt jest opisany takim modelem, to dostępne są różne inżynierskie metody badań analitycznych typu:

- wyznaczanie własności obiektu o zadanych wartościach parametrów,
- projektowanie lub poprawa własności obiektu poprzez dobór wartości parametrów tak, aby uzyskać określone własności obiektu.

### 7.2. Analiza i projektowanie układu pierwszego rzędu

Najprostszy model dynamiki to równanie różniczkowe pierwszego rzędu:

$$a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = b_0 u(t), \quad a_1 \neq 0. \quad (7-1)$$

Z rozwiązania równania charakterystycznego:

$$a_1 \lambda + a_0 = 0 \quad (7-2)$$

wiadomo że, układ ma zawsze jeden rzeczywisty biegun:

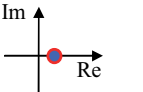
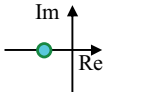
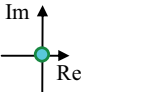
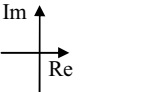
$$\lambda = -a_0 / a_1. \quad (7-3)$$

W reakcjach tego układu nie wystąpią oscylacje, a o stabilności decydują warunki:

- gdy  $a_0 \neq 0$  – układ stabilny gdy  $-a_0/a_1 < 0$ ,
- gdy  $a_0 = 0$  – układ z zerowym biegunem, czyli na granicy stabilności.

W tabeli 7-1 zawarto przypadki najprostszych modeli wraz z ich własnościami.

Tabela 7-1. Własności liniowych równań pierwszego rzędu ( $a_1 \neq 0$ ) i zerowego rzędu ( $a_1 = 0$ )

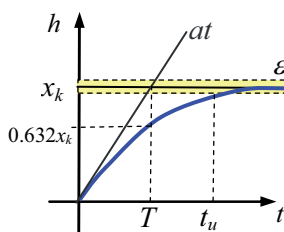
|                  | $a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = b_0 u(t)$                                            |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                     |
|------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| Przypadki        | $a_1 \neq 0, a_0 \neq 0$                                                          | $a_1 \neq 0, a_0 = 0$                                                             | $a_1 = 0, a_0 \neq 0$                                                             |                                                                                     |
| Równanie         | $a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = b_0 u(t)$                                            | $a_1 \dot{x}(t) = b_0 u(t)$                                                       | $a_0 x(t) = b_0 u(t)$                                                             |                                                                                     |
| Obiekt           |                                                                                   | inercyjny                                                                         | całkujący                                                                         | bezinercyjny                                                                        |
| Biegun $\lambda$ | $\lambda = -a_0/a_1 > 0$                                                          | $\lambda = -a_0/a_1 < 0$                                                          | $\lambda = 0$                                                                     |                                                                                     |
|                  |  |  |  |  |
| Stabilność       | niestabilne                                                                       | stabilne                                                                          | na granicy stab.                                                                  | stabilne                                                                            |

Odpowiedź skokowa układu pierwszego rzędu ( $\rightarrow$  4.2.2) jest funkcją postaci:

$$h(t) = x_k (1 - e^{\lambda t}) = k_{ukl} (1 - e^{\lambda t}), \quad x_k = b_0/a_0 = k_{ukl}. \quad (7-4)$$

Rysunek 7-2 ilustruje przebieg i własności funkcji  $h(t)$  w przypadku stabilnego układu. Istotną własność ma styczna do funkcji  $h(t)$  w punkcie  $t = 0$ :

$$h_{stycz}(t) = at, \text{ gdzie } a = \dot{h}(t) \Big|_{t=0} = -x_k \lambda e^{\lambda t} \Big|_{t=0} = -x_k \lambda = x_k a_0 / a_1.$$



Rys. 7-2. Odpowiedź skokowa 1. rzędu (parametry)

W czasie  $t = T$ , gdy styczna osiąga poziom  $x_k$ , czyli:

$$h_{stycz}(T) = aT = x_k \rightarrow T = \frac{x_k}{a} = \frac{x_k}{x_k a_0 / a_1} = \frac{a_1}{a_0},$$

odpowiedź  $h(t)$  osiąga poziom  $0.632 x_k$ :

$$h(T) = x_k (1 - e^{\lambda T}), \text{ gdzie } \lambda T = \frac{-a_0}{a_1} \frac{a_1}{a_0} = -1$$

$$h(T) = x_k (1 - e^{-1}) = x_k (1 - 1/e) \approx 0.632 x_k \quad (7-5)$$

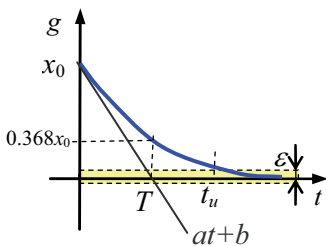
Czas  $T$  jest charakterystycznym parametrem stabilnego układu pierwszego rzędu i nazywa się **stałą czasową**. Niezależnie od wielkości skoku parametr  $T$  oznacza czas, gdy styczna do odpowiedzi na wymuszenie skokowe osiąga wartość końcową, a sama odpowiedź osiąga poziom  $\approx 0.632$  wartości końcowej.

W przypadku stabilnego układu można, na podstawie zależności (6-5), wyznaczyć czas ustalania odpowiedzi  $t_u$ , czyli czas zanikania składowej swobodnej. Dla odpowiedzi skokowej (7-4) czas ustalania  $t_u$  oznacza, że stabilny układ osiąga stan końcowy z określoną dokładnością  $\varepsilon$  (np. 2%):

$$h(t_u) = x_k(1 - \varepsilon) \rightarrow x_k(1 - e^{-\lambda t_u}) = x_k(1 - \varepsilon) \rightarrow t_u = \ln \varepsilon / \lambda \approx 4 / |\lambda| = 4T. \quad (7-6)$$

Wszystkie charakterystyczne własności układu można zilustrować także na przebiegu odpowiedzi impulsowej  $g(t) = dh(t)/dt$ , czyli:

$$g(t) = -\lambda k_{ukl} e^{\lambda t} = x_0 e^{\lambda t}, \quad x_0 = -\lambda k_{ukl} = -\frac{a_0}{a_1} \frac{b_0}{a_0} = \frac{b_0}{a_1}.$$



Rys. 7-3. Odpowiedź impulsowa 1. rzędu (parametry)

W chwili  $t = T$  funkcja  $g(t)$  osiąga poziom około  $0.368x_0 = (1 - 0.632)x_0$ , co można obliczyć ze wzoru:

$$g(T) = x_0 e^{\lambda T} = x_0 e^{-1} = x_0 / e \approx 0.368x_0.$$

Czas ustalania  $t_u$ , to czas gdy  $g(t)$  jest na poziomie  $\varepsilon$  względem zerowego stanu ustalonego:

$$g(t_u) = \varepsilon x_0 \rightarrow x_0 e^{\lambda t_u} = \varepsilon x_0 \rightarrow t_u = \ln \varepsilon / \lambda \approx 4 / |\lambda| = 4T \quad (7-7)$$

(analogicznie jak dla (7-6)).

Prosta styczna do funkcji  $g(t)$  w punkcie  $t = 0$ , zgodnie z ogólną zależnością  $y(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$ , ma postać:

$$g_{stycz}(t) = at + b,$$

$$\text{gdzie: } a = \dot{g}(t) \Big|_{t=0} = \lambda x_0 e^{\lambda t} \Big|_{t=0} = \lambda x_0, \quad b = x_0 \rightarrow g_{stycz}(t) = \lambda x_0 t + x_0,$$

i w chwili  $t = T$  osiąga poziom zerowy (stan ustalony):

$$g_{stycz}(T) = \lambda x_0 T + x_0 = -x_0 + x_0 = 0.$$

Ponieważ rozwiązania układu liniowego mogą być przesuwane i skalowane ( $\rightarrow$  4.2.2), to własności rozwiązań  $h(t)$  i  $g(t)$  dotyczą także odpowiedzi na dowolne wymuszenia skokowe i impulsowe.

## 7.3. Analiza i projektowanie układu drugiego rzędu metodą biegunów

### 7.3.1. Własności równań drugiego rzędu

Podstawowy sposób analizowania i projektowania własności dynamicznych równania drugiego rzędu:

$$a_2 \ddot{x}(t) + a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = b_0 u(t), \quad a_2 \neq 0 \quad (7-8)$$

polega na analizie równania charakterystycznego:

$$a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0 \quad (7-9)$$

za pomocą klasycznej metody wyznaczenia wyróżnika  $\Delta$  i pierwiastków  $\lambda_{1,2}$ :

$$\Delta = a_1^2 - 4a_2 a_0, \quad \lambda_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{\Delta}}{2a_2}. \quad (7-10)$$

Na podstawie (7-10) można określić wszystkie możliwe przypadki rozwiązania swobodnego równania drugiego rzędu (tabela 7-2).

Tabela 7-2. Rozwiązania liniowego równania drugiego rzędu (7-8,  $a_2 \neq 0$ )

| Przypadek    | Bieguny: $\lambda_1 = \alpha + j\omega$ , $\lambda_2 = \alpha - j\omega$                             | Rozwiązanie swobodne                          |
|--------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------|
| $\Delta > 0$ | $\text{Re}(\lambda_{1,2}) = (-a_1 \pm \sqrt{\Delta})/(2a_2)$ , $\text{Im}(\lambda_{1,2}) = 0$        | $A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$   |
| $\Delta = 0$ | $\text{Re}(\lambda_{1,2}) = -a_1/(2a_2)$ , $\text{Im}(\lambda_{1,2}) = 0$                            | $A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 t e^{\lambda_1 t}$ |
| $\Delta < 0$ | $\text{Re}(\lambda_{1,2}) = -a_1/(2a_2)$ , $\text{Im}(\lambda_{1,2}) = \sqrt{-\Delta}/(2a_2) \neq 0$ | $A e^{\alpha t} \sin(\omega_r t + \varphi)$   |

Powyższa tabela jest podstawą do sformułowania warunków projektowych, jakie powinny spełniać współczynniki równania (7-8), aby zapewnić stabilność układu:

**1° Jeśli  $\Delta > 0$** , to bieguny układu są rzeczywiste – w reakcji układu nie występują oscylacje, a warunkiem stabilności jest spełnienie obu nierówności:

$$\lambda_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{\Delta}}{2a_2} < 0 \quad \wedge \quad \lambda_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{\Delta}}{2a_2} < 0. \quad (7-11)$$

**2° Jeśli  $\Delta = 0$** , to układ ma podwójny biegun rzeczywisty – reakcja nie zawiera oscylacji, a stabilność wynika ze spełnienia warunku:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a_1}{2a_2} < 0. \quad (7-12)$$

**3° Jeśli  $\Delta < 0$** , to układ ma parę biegunów zespolonych – reakcja układu ma charakter oscylacyjny, a warunkiem stabilności jest:

$$\text{Re}(\lambda_1) = \text{Re}(\lambda_2) = \frac{-a_1}{2a_2} < 0. \quad (7-13)$$

We wszystkich wzorach (7-10)÷(7-13) musi być spełniony warunek  $a_2 \neq 0$ , co oznacza jedynie, że równanie (7-8) jest drugiego rzędu. Podsumowanie wszystkich przypadków równania drugiego rzędu ( $\Delta > 0$ ,  $\Delta = 0$ ,  $\Delta < 0$ ) zawiera tabela 7-3.

Tabela 7-3. Liniowe równanie drugiego rzędu (7-8) dla różnych parametrów ( $a_0$ ,  $a_1$  i  $a_2$ )

|                                              | bez oscylacji                  |  |  | z oscylacjami                  |  |
|----------------------------------------------|--------------------------------|--|--|--------------------------------|--|
|                                              | $\Delta = a_1^2 - 4a_2a_0 > 0$ |  |  | $\Delta = a_1^2 - 4a_2a_0 = 0$ |  |
| $a_2 \neq 0$<br>$a_1 \neq 0$<br>$a_0 \neq 0$ |                                |  |  |                                |  |
| $a_2 \neq 0$<br>$a_1 = 0$                    |                                |  |  |                                |  |
| $a_2 \neq 0$<br>$a_0 = 0$                    |                                |  |  |                                |  |

W tabeli wyróżniono szczególne przypadki, gdy parametry  $a_0$  i  $a_1$  mają wartość zero, co można wykorzystać na przykład do uproszczenia analizy, ale pozwala też zauważyć, że nawet proste stwierdzenie wyzerowania określonych parametrów umożliwia wnioskowanie o pewnych własnościach układu.

**Dla  $a_2 = 0$**  – równanie pierwszego lub zerowego rzędu (tabela 7-1).

**Dla  $a_1 = 0$**  – równanie  $a_2\ddot{x}(t) + a_0x(t) = u_1(t)$  na podstawie (7-10) ma dwa bieguny:

$$a_2\lambda^2 + a_0 = 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-a_0/a_2}. \quad (7-14)$$

Jeśli parametry  $a_0$  i  $a_1$  są tego samego znaku, to układ zawsze ma parę biegunów urojonych ( $\Delta < 0$ ,  $\text{Re}(\lambda_1) = \text{Re}(\lambda_2) = 0$ ) i w odpowiedzi występują niegasnące oscylacje (układ na granicy stabilności). Gdy znaki  $a_0$  i  $a_1$  są przeciwne, to układ zawsze ma dwa bieguny rzeczywiste ( $\Delta > 0$ ) – jeden dodatni i jeden ujemny (układ niestabilny).

**Dla  $a_0 = 0$**  – równanie  $a_2\ddot{x}(t) + a_1\dot{x}(t) = u_1(t)$  ma dodatni wyróżnik ( $\Delta = a_1^2 > 0$ ) i bieguny można obliczyć na podstawie (7-10) lub zastosować proste przekształcenie:

$$a_2\lambda^2 + a_1\lambda = \lambda(a_2\lambda + a_1) = 0 \rightarrow \lambda_1 = 0 \wedge \lambda_2 = -a_1/a_2. \quad (7-15)$$

Charakterystyczną cechą tego przypadku jest biegun zerowy ( $\lambda_1$ ), co oznacza że w odpowiedzi występuje składnik o stałej wartości ( $Ae^{0t}$ ) i w najlepszym przypadku, układ znajduje się na granicy stabilności, o ile drugi biegun  $\lambda_2 < 0$  ( $a_1$  i  $a_2$  są tego samego znaku).

Wśród pozycji w tabeli 7-3 warto zwrócić uwagę na przypadek, gdy wszystkie parametry  $a_2$ ,  $a_1$  i  $a_0$  są różne od zera, ponieważ jest to także obszar zastosowania kryteriów położenia pierwiastków w lewej półpłaszczyźnie ( $\rightarrow$  1.3.1). Ten pierwszy warunek zastosowania kryteriów Hurwitza i Routha wyłącza niektóre przypadki niestabilne oraz przypadki układów na granicy stabilności. Stosując kolejne warunki kryterium Hurwitza:  $a_2 > 0$ ,  $a_1 > 0$  i  $a_0 > 0$  (jednakowy znak) oraz  $a_1a_2 > 0$ , można

stwierdzić, że do stabilności równania drugiego rzędu wystarczy jednakowy znak wszystkich współczynników (wszystkie niezerowe).

### 7.3.2. Projektowanie własności dynamicznych za pomocą analizy biegunów

Analizując wyrażenia (7-10), można nie tylko badać (lub przewidywać) własności istniejących obiektów, ale także projektować własności nowych układów – dobierać parametry (wymiary, materiały, ...) elementów, tak aby układ wykazywał określone własności (stabilność, oscylacyjność). Na przykład znając (zakładając) dwa z trzech parametrów ( $a_0$ ,  $a_1$  i  $a_2$ ) równania (7-8), można wyznaczyć przedział wartości nieznanego parametru tak, aby układ był stabilny/niestabilny i/lub żeby w reakcji układu występowały lub nie występowały oscylacje (tabela 7-4).

Tabela 7-4. Projektowanie własności liniowego równania drugiego rzędu ( $a_2 \neq 0$ )

| Stabilność             | Oscylacje                                                               | Bez oscylacji                                                                                                                      | Z oscylacjami                                             |
|------------------------|-------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|
|                        | Warunki                                                                 | $\Delta = a_1^2 - 4a_2a_0 \geq 0 \rightarrow \text{Im}(\lambda_{1,2}) = 0$                                                         | $\Delta = a_1^2 - 4a_2a_0 < 0$                            |
| Stabilny               | $\text{Re}(\lambda_1) < 0$<br>$\wedge$<br>$\text{Re}(\lambda_2) < 0$    | $\text{Re}(\lambda_1) = \frac{-a_1 + \sqrt{\Delta}}{2a_2} < 0 \wedge \text{Re}(\lambda_2) = \frac{-a_1 - \sqrt{\Delta}}{2a_2} < 0$ | $\text{Re}(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{-a_1}{2a_2} < 0$ |
| Na granicy stabilności | $\text{Re}(\lambda_1) = 0$<br>$\wedge$<br>$\text{Re}(\lambda_2) \leq 0$ | $\text{Re}(\lambda_1) = 0 \wedge \text{Re}(\lambda_2) = \frac{-a_1}{a_2} \leq 0$                                                   | $\text{Re}(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{-a_1}{2a_2} = 0$ |
| Niestabilny            | $\text{Re}(\lambda_1) = 0$<br>$\wedge$<br>$\text{Re}(\lambda_2) > 0$    | $\text{Re}(\lambda_1) = 0 \wedge \text{Re}(\lambda_2) = \frac{-a_1}{a_2} > 0$                                                      |                                                           |
|                        | $\text{Re}(\lambda_1) > 0$<br>$\vee$<br>$\text{Re}(\lambda_2) > 0$      | $\text{Re}(\lambda_1) = \frac{-a_1 + \sqrt{\Delta}}{2a_2} > 0 \vee \text{Re}(\lambda_2) = \frac{-a_1 - \sqrt{\Delta}}{2a_2} > 0$   | $\text{Re}(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{-a_1}{2a_2} > 0$ |

Tabela opisuje wszystkie przypadki, gdy  $a_2 \neq 0$  (równanie drugiego rzędu). Uzupełnieniem możliwości są przypadki, gdy  $a_2 = 0$  (tabela 7-1), a więc:

- $a_1 \neq 0$  i  $a_0 \neq 0$  – układ rzędu 1, bez możliwości oscylacji, stabilny gdy  $-a_0/a_1 > 0$ ,
- $a_1 \neq 0$  i  $a_0 = 0$  – układ rzędu 1, bez oscylacji, na granicy stabilności,
- $a_1 = 0$  i  $a_0 \neq 0$  – układ statyczny (bezinercyjny), zawsze stabilny.

**Przykłady** sformułowania prostych zadań projektowych dla modelu (7-8).

1° W odpowiedzi układu nie występują oscylacje (układ stabilny lub niestabilny), jeśli:

warunek 1:  $a_2 \neq 0 \wedge \Delta = a_1^2 - 4a_2a_0 \geq 0$

układ 2 rzędu, bieguny rzeczywiste

lub 2:  $a_2 = 0$

układ  $\leq 1$  rzędu

2° Projektowany układ jest stabilny (z oscylacjami lub bez), jeśli:

warunek 1:  $a_2 \neq 0 \wedge \Delta = a_1^2 - 4a_2a_0 \geq 0$

układ 2 rzędu, bieguny rzeczywiste

$\wedge \left( \text{Re}(\lambda_1) = \frac{-a_1 + \sqrt{\Delta}}{2a_2} < 0 \wedge \text{Re}(\lambda_2) = \frac{-a_1 - \sqrt{\Delta}}{2a_2} < 0 \right)$  oba bieguny po lewej

$$\begin{aligned} \text{lub 2: } a_2 \neq 0 \wedge \Delta = a_1^2 - 4a_2a_0 < 0 & \quad \text{układ 2 rzędu, bieguny zespolone} \\ \wedge \left( \operatorname{Re}(\lambda_1) = \operatorname{Re}(\lambda_2) = \frac{-a_1}{2a_2} < 0 \right) & \quad \text{oba bieguny po lewej} \end{aligned}$$

$$\text{lub 3: } a_2 = 0 \wedge a_1 \neq 0 \wedge \lambda = -a_0/a_1 < 0 \quad \text{układ 1 rzędu, biegun po lewej}$$

$$\text{lub 4: } a_2 = 0 \wedge a_1 = 0 \quad \text{układ statyczny}$$

**3° Układ dochodzi do stanu równowagi bez przeregulowań (stabilny aperiodycznie):**

$$\text{warunek 1: } a_2 \neq 0 \wedge \Delta = a_1^2 - 4a_2a_0 \geq 0 \quad \text{układ 2 rzędu, bieguny rzeczywiste}$$

$$\wedge \left( \operatorname{Re}(\lambda_1) = \frac{-a_1 + \sqrt{\Delta}}{2a_2} < 0 \wedge \operatorname{Re}(\lambda_2) = \frac{-a_1 - \sqrt{\Delta}}{2a_2} < 0 \right) \quad \text{oba bieguny po lewej}$$

$$\text{lub 2: } a_2 = 0 \wedge a_1 \neq 0 \wedge \lambda = -a_0/a_1 < 0 \quad \text{układ 1 rzędu, biegun po lewej}$$

$$\text{lub 3: } a_2 = a_1 = 0 \quad \text{układ statyczny}$$

**4° Po zakłóceniu układ nie oscyluje, ale też nie osiąga stanu równowagi, jeśli:**

$$\text{warunek 1: } a_2 \neq 0 \wedge \Delta = a_1^2 - 4a_2a_0 \geq 0 \quad \text{układ 2 rzędu, bieguny rzeczywiste}$$

$$\wedge \left( \operatorname{Re}(\lambda_1) = \frac{-a_1 + \sqrt{\Delta}}{2a_2} \geq 0 \vee \operatorname{Re}(\lambda_2) = \frac{-a_1 - \sqrt{\Delta}}{2a_2} \geq 0 \right) \quad \text{choć 1 biegun } \geq 0$$

$$\text{lub 2: } a_2 = 0 \wedge a_1 \neq 0 \wedge \lambda = -a_0/a_1 \geq 0 \quad \text{układ 1 rzędu, biegun nie po lewej}$$

Projektowanie własności dynamiki na podstawie biegunów polega na sformułowaniu odpowiedniego układu nierówności i poprawnym jego rozwiązaniu [19].

### 7.3.3. Parametry odpowiedzi skokowych

W bardziej złożonych zadaniach projektowych można określać nie tylko wymagania jakościowe (stabilność, brak oscylacji), ale także obliczać parametry odpowiedzi. W przypadku stabilnego układu są to głównie wzmocnienie układu ( $k_{ukl}$ ), a także czas ustalania odpowiedzi i szybkość tłumienia oscylacji. Czas ustalania  $t_u$  na podstawie zależności (6-5) (zakładając dokładność  $\varepsilon = 2\%$ ) wynosi:

$$\text{a) } t_u \approx \frac{4}{|\operatorname{Re}(\lambda_1)|} = \left| \frac{8a_2}{-a_1 + \sqrt{\Delta}} \right| \quad \text{lub b) } t_u \approx \frac{4}{|\operatorname{Re}(\lambda_1)|} = \left| \frac{8a_2}{-a_1} \right|, \quad (7-16)$$

gdzie przypadek a) dotyczy biegunów rzeczywistych – czas  $t_u$  zależy od bieguna  $\lambda_1 = (-a_1 + \sqrt{\Delta})/(2a_2)$ , który leży bliżej osi Im niż  $\lambda_2 = (-a_1 - \sqrt{\Delta})/(2a_2)$ ; przypadek b) dotyczy biegunów zespolonych, które mają taką część rzeczywistą (odległość od osi Im)  $\operatorname{Re}(\lambda_1) = \operatorname{Re}(\lambda_2) = -a_1/(2a_2)$ .

Jeśli układ ma bieguny zespolone, to na podstawie zależności (6-10) można wyznaczyć oscylacyjność ( $\mu$ ) oraz krotność ( $p$ ) zmniejszania się kolejnych amplitud oscylacyjnej odpowiedzi:

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{A_1/p}{A_1} = e^{-2\pi/\mu} \rightarrow p = e^{2\pi/\mu}, \text{ gdzie } \mu = \frac{|\operatorname{Im}(\lambda)|}{|\operatorname{Re}(\lambda)|} = \left| \frac{\sqrt{\Delta}}{a_1} \right|. \quad (7-17)$$

## 7.4. Równania oscylacyjne i komplementarne

### 7.4.1. Własności i parametry równania oscylacyjnego

Najbardziej charakterystyczną postacią modelu drugiego rzędu (7-8) jest **równanie oscylacyjne** zapisywane w postaci:

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\omega_n \dot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) = bu(t), \quad \omega_n > 0, \quad (7-18)$$

gdzie:  $\xi$  – współczynnik tłumienia,  $\omega_n$  – pulsacja układu ( $\omega_n = 2\pi f_n$ , gdzie  $f_n$  to częstotliwość drgań własnych nietłumionych). Założenie o dodatniej wartości  $\omega_n$  wynika z fizycznej interpretacji tego parametru ( $\rightarrow$  7.4.4), a poza tym zapewnia, że znak współczynnika  $2\xi\omega_n$  zależy tylko i wyłącznie od znaku tłumienia  $\xi$ . Bieguny układu wyznaczone na podstawie równania charakterystycznego mają postać:

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} = \omega_n(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}) \\ \lambda_2 = -\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} = \omega_n(-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}) \end{cases} \quad (7-19)$$

Analizując wzory (7-19), można wykazać, że równanie oscylacyjne może mieć parę biegunów rzeczywistych lub zespolonych, leżących w lewej lub prawej półpłaszczyźnie zespolonej, a tym samym jego rozwiązanie może być aperiodyczne lub oscylacyjne, stabilne lub niestabilne. Ponieważ  $\omega_n > 0$ , więc typ biegunów oraz stabilność układu zależy jedynie od tłumienia  $\xi$ .

**1° Jeśli  $\xi^2 \geq 1$** , to oba pierwiastki są rzeczywiste (reakcje bez oscylacji).

$$\text{Re}(\lambda_1) = \omega_n(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}), \quad \text{Im}(\lambda_1) = 0 \quad \text{oraz} \quad \text{Re}(\lambda_2) = \omega_n(-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}), \quad \text{Im}(\lambda_2) = 0.$$

Ponieważ  $\omega_n > 0$ , to znak biegunów zależy od wyrażeń:  $-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}$  i  $-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}$ .

- Dla  $\xi > 1$  układ jest stabilny, ponieważ  $\text{Re}(\lambda_1) < 0$  i  $\text{Re}(\lambda_2) < 0$ .

$$\begin{array}{l} \text{Potwierdzenie:} \quad \left. \begin{array}{l} -\xi + \sqrt{\xi^2 - 1} < 0 \\ \sqrt{\xi^2 - 1} < \xi \quad |()^2 \\ \xi^2 - 1 < \xi^2 \quad (\rightarrow \text{prawda}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\xi - \sqrt{\xi^2 - 1} < 0 \\ -( > 0 ) - ( > 0 ) < 0 \quad (\rightarrow \text{prawda}) \end{array} \end{array}$$

- Dla  $\xi = 1$  układ jest stabilny – ma podwójny pierwiastek:  $\lambda_{1,2} = -\xi\omega_n < 0$ .

- Dla  $\xi < -1$  układ jest niestabilny, ponieważ  $\text{Re}(\lambda_1) > 0$  i  $\text{Re}(\lambda_2) > 0$ .

$$\begin{array}{l} \text{Potwierdzenie:} \quad \left. \begin{array}{l} (-\xi) + \sqrt{\xi^2 - 1} > 0 \\ ( > 0 ) + ( > 0 ) > 0 \quad (\rightarrow \text{prawda}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} (-\xi) - \sqrt{\xi^2 - 1} > 0 \\ (-\xi) > \sqrt{\xi^2 - 1} \quad |()^2 \\ \xi^2 > \xi^2 - 1 \quad (\rightarrow \text{prawda}) \end{array} \end{array}$$

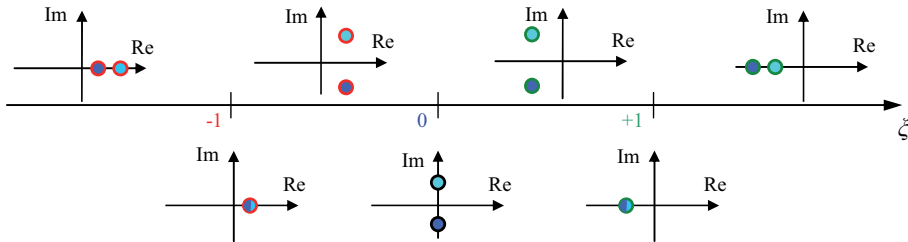
- Dla  $\xi = -1$  układ jest niestabilny – ma podwójny pierwiastek:  $\lambda_{1,2} = -\xi\omega_n > 0$ .

**2° Jeśli  $\xi^2 < 1$** , to pierwiastki są zespolone (reakcje z oscylacjami).

$$\text{Re}(\lambda_1) = \text{Re}(\lambda_2) = -\xi\omega_n \quad \text{i} \quad \text{Im}(\lambda_{1,2}) = \pm\omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}.$$

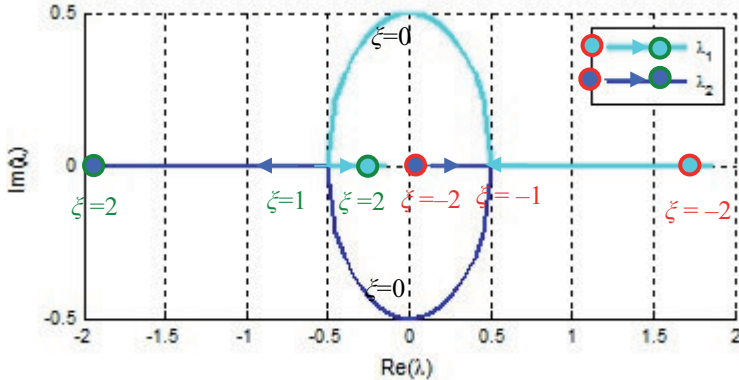
- Dla  $0 < \zeta < 1$  układ jest stabilny, ponieważ część rzeczywista  $\text{Re}(\lambda_1) = \text{Re}(\lambda_2) < 0$ .
- Dla  $-1 < \zeta < 0$  układ jest niestabilny, gdyż część rzeczywista  $\text{Re}(\lambda_1) = \text{Re}(\lambda_2) > 0$ .
- Dla  $\zeta = 0$  układ ma parę pierwiastków urojonych:  $\lambda_{1,2} = \pm j\omega_n$ , więc znajduje się na granicy stabilności.

Zestawienie wszystkich powyższych przypadków równania oscylacyjnego (7-18) przedstawiono na rysunku 7-4.



Rys. 7-4. Zależność biegunów układu oscylacyjnego od tłumienia  $\zeta$

Wpływ wartości tłumienia  $\zeta$  na położenie biegunów można przedstawić dokładniej za pomocą linii pierwiastkowych, jak w przykładzie na rysunku 7-5, gdzie tłumienie  $\zeta$  zmienia się w zakresie od wartości  $-2$  (bieguny rzeczywiste dodatnie) do wartości  $+2$  (bieguny rzeczywiste ujemne) – strzałki pokazują kierunek wzrostu  $\zeta$ .

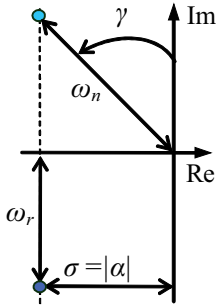


Rys. 7-5. Linie pierwiastkowe dla  $-2 \leq \zeta \leq 2$  ( $\omega_n = 0.5$ )

Równanie oscylacyjne (7-18) obejmuje przypadki, gdy reakcja zawiera i nie zawiera oscylacji. Jedynie dla ułamkowych wartości tłumienia ( $-1 < \zeta < 1$ ) jest to równanie oscylacyjne sensu stricto, to znaczy, że jego rozwiązanie ma charakter oscylacyjny (zawiera składową sinusoidalną). W tych przypadkach bieguny zawierają część rzeczywistą ( $\alpha$ ) i urojoną ( $\omega_r$ ):

$$\begin{cases} \lambda_1 = \alpha + j\omega_r = -\sigma + j\omega_r \\ \lambda_2 = \alpha - j\omega_r = -\sigma - j\omega_r \end{cases}, \text{ gdzie: } \alpha = -\zeta\omega_n, \sigma = |\alpha|, \omega_r = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}. \quad (7-20)$$

Położenie takich biegunów na płaszczyźnie zespolonej i parametry równania oscylacyjnego są związane ze sobą zależnościami geometrycznymi (rys. 7-6).



$$\sqrt{\alpha^2 + \omega_r^2} = \sqrt{(-\xi\omega_n)^2 + (\omega_n\sqrt{1-\xi^2})^2} = \omega_n \quad (7-21)$$

$$\sin \gamma = \frac{|\alpha|}{\sqrt{\alpha^2 + \omega_r^2}} = \frac{\xi\omega_n}{\sqrt{\xi^2\omega_n^2 + \omega_n^2(1-\xi^2)}} = \xi.$$

Ze wzorów wynika, że na podstawie lokalizacji zespolonych biegunów można wskazać układy, które mają to samo tłumienie  $\xi$  lub tę samą pulsację  $\omega_n$ .

Rys. 7-6. Położenie biegunów a parametry równania oscylacyjnego

#### 7.4.2. Równanie komplementarne do równania oscylacyjnego

Nie każde równanie drugiego rzędu można zapisać w postaci równania oscylacyjnego. Równaniem komplementarnym do oscylacyjnego jest zapis:

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\omega_n \dot{x}(t) - \omega_n^2 x(t) = b_0 u(t), \quad \omega_n > 0. \quad (7-22)$$

Biegunki tego układu mają postać:

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2 + 1} = \omega_n(-\xi + \sqrt{\xi^2 + 1}) \\ \lambda_2 = -\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2 + 1} = \omega_n(-\xi - \sqrt{\xi^2 + 1}) \end{cases}, \quad (7-23)$$

z której od razu wynika, że równanie (7-22) ma tylko rzeczywiste biegunki:

$$\operatorname{Re}(\lambda_1) = \omega_n(-\xi + \sqrt{\xi^2 + 1}), \quad \operatorname{Im}(\lambda_1) = 0 \quad \text{oraz} \quad \operatorname{Re}(\lambda_2) = \omega_n(-\xi - \sqrt{\xi^2 + 1}), \quad \operatorname{Im}(\lambda_2) = 0.$$

Ponieważ pulsacja  $\omega_n > 0$ , to dokładniejsza analiza pokazuje, że niezależnie od wartości tłumienia  $\xi$ , jeden biegun jest zawsze ujemny a jeden zawsze dodatni.

- Dla  $\xi \geq 0$  układ ma  $\operatorname{Re}(\lambda_1) > 0$  i  $\operatorname{Re}(\lambda_2) < 0$ .

$$\begin{array}{l|l} \text{Potwierdzenie:} & \begin{array}{l} -\xi + \sqrt{\xi^2 + 1} > 0 \\ \sqrt{\xi^2 + 1} > \xi \quad (\rightarrow \text{prawda}) \end{array} & \begin{array}{l} -\xi - \sqrt{\xi^2 + 1} < 0 \\ (>0) < 0 \quad (\rightarrow \text{prawda}) \end{array} \end{array}$$

- Dla  $\xi < 0$  układ ma  $\operatorname{Re}(\lambda_1) > 0$  i  $\operatorname{Re}(\lambda_2) < 0$ .

$$\begin{array}{l|l} \text{Potwierdzenie:} & \begin{array}{l} (-\xi) + \sqrt{\xi^2 + 1} > 0 \\ (>0) + (>0) > 0 \quad (\rightarrow \text{prawda}) \end{array} & \begin{array}{l} (-\xi) - \sqrt{\xi^2 + 1} < 0 \\ (-\xi) < \sqrt{\xi^2 + 1} \quad (\rightarrow \text{prawda}) \end{array} \end{array}$$

Zarówno postać równania oscylacyjnego (7-18), jak i komplementarnego (7-22) obejmuje warunek  $\omega_n > 0$ , co wynika z fizycznej interpretacji pulsacji  $\omega_n$  (ale też gdyby  $\omega_n = 0$ , to jednocześnie  $2\xi\omega_n = 0$ ) – nie można więc zapisać równania:

$$a_2\ddot{x}(t) + a_1\dot{x}(t) = b_0u(t), \quad (7-24)$$

czyli równania z zerowym biegunem (7-15). Zależnie od wartości drugiego bieguna ( $\lambda_2 = -a_1/a_2$ ) jest to układ:

- na granicy stabilności, jeśli  $\lambda_2 \leq 0$ ,
- niestabilny, jeśli  $\lambda_2 > 0$ .

### 7.4.3. Projektowanie własności dynamiki na podstawie tłumienia układu

Z własności równania oscylacyjnego i komplementarnego wynika kolejna metoda badania i projektowania własności układów drugiego rzędu. Projektowanie na podstawie współczynnika  $\xi$  polega na sprowadzeniu badanego modelu (7-8) do postaci (7-18), (7-22) lub (7-24) i wykorzystaniu własności tych równań. Każda postać wymaga odpowiednich założeń, które trzeba uwzględnić przy formułowaniu ostatecznej odpowiedzi. Tak więc w ogólnym przypadku równania typu:

$$a_2\ddot{x}(t) + a_1\dot{x}(t) + a_0x(t) = b_0u(t) \quad (7-25)$$

mogą wystąpić następujące przypadki.

1° Jeśli  $a_2 \neq 0$  i  $a_0/a_2 > 0$ , to mamy równanie oscylacyjne:

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) + 2\xi\omega_n \dot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) &= bu(t), \quad \omega_n > 0, \\ \ddot{x}(t) + \frac{a_1}{a_2} \dot{x}(t) + \frac{a_0}{a_2} x(t) &= \frac{b_0}{a_2} u_1(t). \end{aligned} \quad (7-26)$$

W tym przypadku można wyznaczyć pulsację i tłumienie:

$$\begin{cases} \omega_n^2 = \frac{a_0}{a_2} > 0 \\ 2\xi\omega_n = \frac{a_1}{a_2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \omega_n = \sqrt{a_0/a_2} \\ \xi = \frac{a_1}{2a_2} \sqrt{\frac{a_2}{a_0}} = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0a_2}} \end{cases}. \quad (7-27)$$

Wyrażenie pod pierwiastkiem  $\sqrt{a_0/a_2}$  jest zawsze dodatnie, co wynika z warunku  $a_0/a_2 > 0$ , a wartość pierwiastka  $\sqrt{a_0/a_2}$  jest zawsze dodatnia, co wynika z założenia  $\omega_n > 0$ . Własności układu (stabilność, oscylacje) zależą jedynie od tłumienia  $\xi$ , które może przyjmować teoretycznie dowolną wartość  $-\infty < \xi < \infty$ .

2° Jeśli  $a_2 \neq 0$  i  $a_0/a_2 < 0$ , to mamy równanie komplementarne do oscylacyjnego:

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) + 2\xi\omega_n \dot{x}(t) - \omega_n^2 x(t) &= bu(t), \quad \omega_n > 0, \\ \ddot{x}(t) + \frac{a_1}{a_2} \dot{x}(t) - \left(\frac{-a_0}{a_2}\right)x(t) &= \frac{1}{a_2} u_1(t). \end{aligned} \quad (7-28)$$

Założenie  $a_0/a_2 < 0$  zapewnia dodatnią wartość pod pierwiastkiem  $\sqrt{-a_0/a_2}$ . Sam pierwiastek też jest dodatni  $\sqrt{-a_0/a_2}$ , ponieważ  $\omega_n > 0$ . Tu również można wyznaczyć parametry, ale równanie jest zawsze niestabilne (bez oscylacji) niezależnie od wartości  $\xi$ .

3° Jeśli  $a_2 \neq 0$  i  $a_0 = 0$ , otrzymujemy równanie z zerowym biegunem:

$$a_2 \ddot{x}(t) + a_1 \dot{x}(t) = b_0 u(t), \quad (7-29)$$

które jest albo na granicy stabilności, albo jest niestabilne.

We wszystkich trzech przypadkach konieczne jest założenie  $a_2 \neq 0$  (ze względu na operację dzielenia). Przypadki, gdy  $a_2 = 0$  muszą być rozważone oddzielnie ( $\rightarrow$  7.2):

- $a_2 = 0$  i  $a_1 \neq 0$  (układ rzędu 1, bez możliwości oscylacji, stabilny lub niestabilny),
- $a_2 = 0$  i  $a_1 = 0$  (model statyczny, układ stabilny).

Każde zadanie projektowe dla modelu (7-8), które można rozwiązać przez analizę biegunów, można także rozwiązać na podstawie tłumienia układu. Schematy rozwiązań polegają na odpowiednim rozpisaniu warunków i rozwiązaniu nierówności [19].

**Przykłady:** Schematy rozwiązania zadań (przykłady z rozdziału 7.3.2)

1° W odpowiedzi układu nie występują oscylacje (układ stabilny lub niestabilny), jeśli:

$$\begin{aligned} \text{warunek 1: } a_2 \neq 0 \wedge a_0/a_2 > 0 & \rightarrow \text{oscylacyjne} \\ \wedge \left( \xi = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0 a_2}} \geq 1 \vee \xi = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0 a_2}} \leq -1 \right) & \text{ i oba bieguny rzeczywiste} \\ \text{lub 2: } a_2 \neq 0 \wedge a_0/a_2 \leq 0 & \text{ równanie komplementarne lub z biegunem 0} \\ \text{lub 3: } a_2 = 0 & \text{ układ } \leq 1 \text{ rzędu} \end{aligned}$$

2° Projektowany układ jest stabilny (z oscylacjami lub bez), jeśli:

$$\begin{aligned} \text{warunek 1: } a_2 \neq 0 \wedge a_0/a_2 > 0 & \text{ równanie oscylacyjne} \\ \wedge \xi = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0 a_2}} > 0 & \text{ i oba bieguny po lewej} \\ \text{lub 2: } a_2 = 0 \wedge a_1 \neq 0 \wedge \lambda = -a_0/a_1 < 0 & \text{ układ 1 rzędu, biegun po lewej} \\ \text{lub 3: } a_2 = 0 \wedge a_1 = 0 & \text{ układ statyczny} \end{aligned}$$

3° Układ dochodzi do stanu równowagi bez przeregulowań (stabilny aperiodycznie), jeśli:

$$\begin{aligned} \text{warunek 1: } a_2 \neq 0 \wedge a_0/a_2 > 0 & \text{ równanie oscylacyjne} \\ \wedge \xi = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0 a_2}} \geq 1 & \text{ i oba bieguny rzeczywiste po lewej} \\ \text{lub 2: } a_2 = 0 \wedge a_1 \neq 0 \wedge \lambda = -a_0/a_1 < 0 & \text{ układ 1 rzędu, biegun po lewej} \\ \text{lub 3: } a_2 = 0 \wedge a_1 = 0 & \text{ układ statyczny} \end{aligned}$$

4° Po zakłóceniu układ nie oscyluje, ale też nie osiąga stanu równowagi, jeśli:

$$\begin{aligned} \text{warunek 1: } a_2 \neq 0 \wedge a_0/a_2 > 0 & \text{ równanie oscylacyjne} \\ \wedge \xi = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0 a_2}} \leq -1 & \text{ i oba bieguny rzeczywiste, po prawej} \\ \text{lub 2: } a_2 \neq 0 \wedge a_0/a_2 \leq 0 & \text{ równanie komplementarne lub z biegunem 0} \\ \text{lub 3: } a_2 = 0 \wedge a_1 \neq 0 \wedge \lambda = -a_0/a_1 \geq 0 & \text{ układ 1 rzędu, biegun nie po lewej} \end{aligned}$$

#### 7.4.4. Parametry odpowiedzi skokowych równania oscylacyjnego

Typowym elementem badania dynamiki obiektów jest obserwacja reakcji układu na skokową zmianę wartości zmiennej wejściowej. W praktyce inżynierskiej zazwyczaj są to układy stabilne, które można opisać równaniem oscylacyjnym. Na podstawie wyrażeń (7-19), które pozwalają wyznaczyć bieguny układu oscylacyjnego, można wyznaczyć również podstawowe parametry odpowiedzi ( $\rightarrow$  7.3.3). Można również wyznaczyć ogólny wzór funkcji (rozwiązanie równania drugiego rzędu jest proste  $\rightarrow$  4.2.2) i przeprowadzić typowe operacje badania przebiegu funkcji. W szczególności dotyczy to odpowiedzi skokowej  $h(t)$  znormalizowanego równania oscylacyjnego, czyli równania oscylacyjnego o jednostkowym wzmocnieniu układu ( $k_{ukl}=1$ ):

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\omega_n \dot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) = \omega_n^2 u(t), \quad \omega_n > 0. \quad (7-30)$$

W poszczególnych przypadkach uzyskujemy następujące rozwiązania:

- dla  $|\xi| > 1$  (bieguny:  $\lambda_1 = \alpha_1 = -\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$ ,  $\lambda_2 = \alpha_2 = -\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$ )

$$h(t) = 1 - A_1 e^{\alpha_1 t} - A_2 e^{\alpha_2 t}, \quad (7-31)$$

$$\text{gdzie: } A_1 = \frac{\alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1} = \frac{\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}}{2\sqrt{\xi^2 - 1}}, \quad A_2 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2} = \frac{-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}}{2\sqrt{\xi^2 - 1}};$$

- dla  $|\xi| = 1$  (biegun podwójny:  $\lambda_1 = \lambda_2 = \alpha = -\xi\omega_n$ )

$$h(t) = 1 - A_1 e^{\alpha t} - A_2 t e^{\alpha t}, \quad (7-32)$$

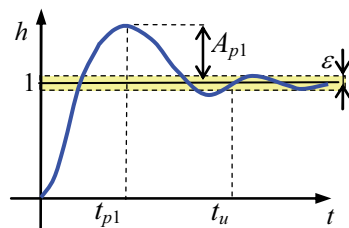
$$\text{gdzie: } A_1 = \frac{1}{1 - \alpha}, \quad A_2 = \frac{\alpha}{\alpha - 1};$$

- dla  $|\xi| < 1$  (bieguny:  $\lambda_1 = \alpha + j\omega$ ,  $\lambda_2 = \alpha - j\omega$ , gdzie:  $\alpha = -\xi\omega_n$ ,  $\omega_r = \omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$ )

$$h(t) = 1 - e^{\alpha t} (\cos\omega_r t - \frac{\alpha}{\omega_r} \sin\omega_r t) = 1 - A e^{\alpha t} \sin(\omega_r t + \varphi_1) = 1 - A e^{\alpha t} \cos(\omega_r t - \varphi_2), \quad (7-33)$$

$$\text{gdzie: } A = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \omega_r^2}}{\omega_r} = \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}}, \quad \varphi_1 = \arctg\left(\frac{\omega_r}{-\alpha}\right) = \arctg\left(\frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi}\right), \quad \varphi_2 = \arctg\left(\frac{-\alpha}{\omega_r}\right).$$

Klasyczna analiza przebiegu funkcji  $h(t)$  pozwala obliczyć charakterystyczne parametry odpowiedzi (podobnie jak analiza składników rozwiązania swobodnego  $\rightarrow$  6.2.4). W szczególności dotyczy to przypadku, gdy  $0 \leq \xi < 1$  i tym samym przebieg  $h(t)$  ma postać (7-33), czyli ograniczone oscylacje (drżania własne układu). Wyznamy podstawowe parametry dynamiki, takie jak czas ustalania odpowiedzi  $t_u$  i amplitudę prze-regulowania  $A_{p1}$  (rys. 7-7).



Rys. 7-7. Parametry tłumionych oscylacji

**Czas ustalania  $t_u$**  odpowiedzi (7-33) to czas osiągnięcia stanu ustalonego:

$$h(t_u) = 1 - \varepsilon \rightarrow 1 - e^{\alpha t_u} \left( \cos \omega_r t_u - \frac{\alpha}{\omega_r} \sin \omega_r t_u \right) = 1 - \varepsilon \rightarrow e^{\alpha t_u} = \varepsilon \rightarrow t_u = \frac{\ln \varepsilon}{\alpha}, \quad (7-34)$$

gdzie  $\varepsilon$  to dokładność osiągnięcia stanu ustalonego; dla  $\varepsilon = 2\%$  czas  $t_u$  wynosi:

$$t_u = \ln 0.02 / \alpha \approx 4 / |\alpha| = 4 / (\zeta \omega_n). \quad (7-35)$$

Z kolei **przeregulowanie  $A_{p1}$**  jest związane z maksymalną wartością funkcji (7-33), więc jest wyznaczane na podstawie funkcji pochodnej  $\dot{h}(t)$ :

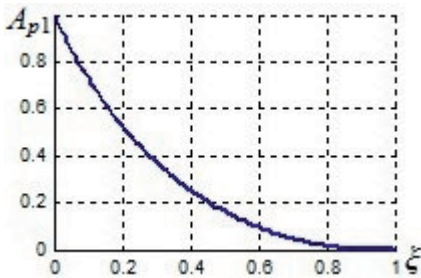
$$h(t) = 1 - e^{\alpha t} \left( \cos \omega_r t - \frac{\alpha}{\omega_r} \sin \omega_r t \right) \rightarrow \dot{h}(t) = e^{\alpha t} \left( \omega_r \sin \omega_r t + \frac{\alpha^2}{\omega_r} \sin \omega_r t \right), \quad (7-36)$$

która w chwili pierwszego przeregulowania ( $t_{p1}$ ) zeruje się:

$$\dot{h}(t) = e^{\alpha t} \left( \omega_r \sin \omega_r t + \frac{\alpha^2}{\omega_r} \sin \omega_r t \right) = 0 \rightarrow \sin \omega_r t = 0 \rightarrow \omega_r t = \pi \rightarrow t_{p1} = \frac{\pi}{\omega_r}. \quad (7-37)$$

Znając czas  $t_{p1}$ , można obliczyć maksymalną wartość funkcji  $h(t_{p1})$ :

$$h(t_{p1}) = 1 - e^{\pi \alpha / \omega_r} \left( \cos \pi - \frac{\alpha}{\omega_r} \sin \pi \right) = 1 + e^{\pi \alpha / \omega_r} = 1 + A_{p1}. \quad (7-38)$$



Rys. 7-8. Wpływ  $\zeta$  na przeregulowanie  $A_{p1}$

Stąd wynika przeregulowanie:

$$A_{p1} = e^{\pi \alpha / \omega_r} = \exp \left( -\zeta \pi / \sqrt{1 - \zeta^2} \right). \quad (7-39)$$

które jest funkcją parametru  $\zeta$  (rys. 7-8), podobnie jak oscylacyjność odpowiedzi:

$$\frac{A_{p2}}{A_{p1}} = \frac{e^{3\pi \alpha / \omega_r}}{e^{\pi \alpha / \omega_r}} = e^{2\pi \alpha / \omega_r} = e^{-2\pi / \mu},$$

$$\mu = |\omega_r / \alpha| = \sqrt{1 - \zeta^2} / \zeta. \quad (7-40)$$

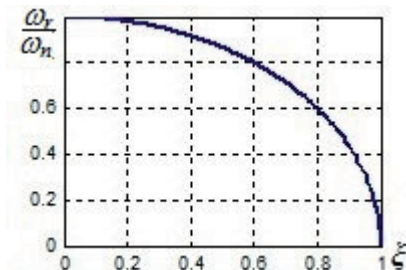
Zależności (7-35) i (7-39) można wykorzystać do wyznaczenia podstawowych parametrów odpowiedzi ( $t_u$ ,  $A_{p1}$ ) na podstawie parametrów modelu ( $\zeta$  i  $\omega_n$ ) lub do projektowania układów o zadanych parametrach odpowiedzi. Na przykład na podstawie wykresu (rys. 7-8) można ustalić, że uzyskanie przeregulowania  $A_{p1}$ , które nie przekracza 5%, 15% i 35%, można zapewnić, przyjmując odpowiednią wartość tłumienia  $\zeta$ , tzn. że nie będzie mniejsza niż około 0.7, 0.5 i 0.3.

Analiza odpowiedzi skokowej (7-33) pozwala także wskazać interpretację i uzasadnienie nazw parametrów związanych z równaniem oscylacyjnym ( $\zeta$ ,  $\omega_n$ ,  $\omega_r$ ):

- $\zeta$  – współczynnik tłumienia względnego (w skrócie: tłumienie układu) to podstawowy parametr odpowiedzialny za stabilność układu oraz występowanie i wielkość oscylacji. Im większe  $\zeta$ , tym mniejsze przeregulowania (rys. 7-8) i mniejsza oscylacyjność, a dla  $\zeta \geq 1$  przebieg jest aperiodyczny (bez oscylacji).

- $\omega_n$  – pulsacja drgań własnych nietłumionych (w skrócie: pulsacja układu) jest pulsacją sinusoidalnego przebiegu składowej swobodnej przy zerowym tłumieniu – na podstawie (7-33) dla  $\xi = 0$  składowa ma postać  $A \sin(\omega_n t + \varphi_1)$ ,
- $\omega_r$  – pulsacja drgań własnych tłumionych (w skrócie: pulsacja odpowiedzi) to pulsacja przebiegu sinusoidalnego w reakcji układu przy tłumieniu  $0 < \xi < 1$  – składowa swobodna we wzorze (7-33) to  $A e^{\alpha t} \sin(\omega_r t + \varphi_1)$ ,  
gdzie pulsacja  $\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$ .

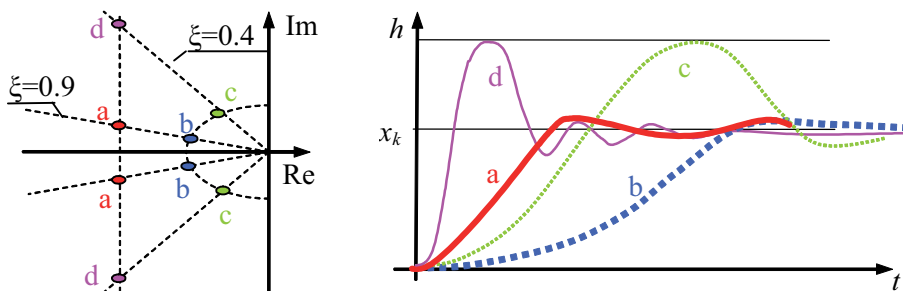
Rysunek 7-9 przedstawia wykres funkcji  $\omega_r(\xi)$ , z którego wynika, że przy niewielkich wartościach tłumienia ( $\xi = 0 \div 0.5$ ) pulsacja  $\omega_r$  zmienia się jedynie w zakresie 13% (praktycznie można założyć  $\omega_r \approx \omega_n$ ).



Rys. 7-9. Wpływ  $\xi$  na pulsację  $\omega_r$  ( $\omega_r / \omega_n$ )

Łącząc analizę odpowiedzi skokowej (7-33) oraz wykres na rysunku 7-6 można zdefiniować relacje między położeniem biegunów a parametrami przebiegu tłumionych oscylacji (rys. 7-10). Jeśli porównywane układy mają:

- bieguny o takiej samej części rzeczywistej  $\alpha$  (leżą w tej samej odległości od osi Im), to mają taką samą szybkość stabilizacji (czas ustalania  $t_u$ ),
- takie same tłumienie  $\xi$  (bieguny leżą na tej samej półprostej), to odpowiedzi mają takie samo przeregulowanie ( $A_{p1}$ ),
- taką samą pulsację  $\omega_n$  (bieguny leżą na tym samym półokręgu), to pulsacja odpowiedzi ( $\omega_r$ ) jest podobna (szczególnie dla małych  $\xi$ ).



Rys. 7-10. Położenie biegunów a odpowiedź układu oscylacyjnego

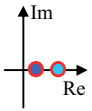
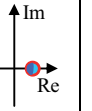
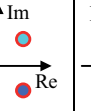
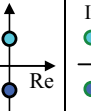
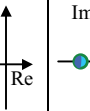
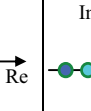
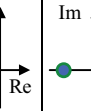
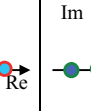
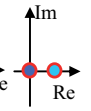
Powyższe relacje uzasadniają zastosowanie analizy położenia biegunów do porównywania lub projektowania układów dynamiki.

## 7.5. Przykłady zastosowania

### 7.5.1. Projektowanie „jakościowe” (przypadki ogólne)

Wszystkie przypadki równania różniczkowego drugiego rzędu można pogrupować ze względu na postać i własności (tabela. 7-5).

Tabela. 7-5. Własności liniowych równań drugiego rzędu ( $a_2 \neq 0$ )

| $a_2 \ddot{x}(t) + a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = b_0 u(t)$                                  |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                    |                                                                                     |                                                                                     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| $a_0/a_2 > 0$                                                                             |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                   | $a_0/a_2 < 0$                                                                     | $a_0 = 0$                                                                          |                                                                                     |                                                                                     |
| równanie oscylacyjne: $\ddot{x} + 2\xi\omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x = bu, \omega_n > 0$ |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                   | * (kompl.)                                                                        | ** (całkujący)                                                                     |                                                                                     |                                                                                     |
| oscylacyjny sensu stricto                                                                 |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                   | inercyjny                                                                         |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                    |                                                                                     |                                                                                     |
| $\Delta > 0$                                                                              | $\Delta = 0$                                                                      | $\Delta < 0$                                                                      |                                                                                   |                                                                                   | $\Delta = 0$                                                                      | $\Delta > 0$                                                                      | $\Delta > 0$                                                                       | $\Delta > 0$                                                                        |                                                                                     |
| $\xi < -1$                                                                                | $\xi = -1$                                                                        | $-1 < \xi < 0$                                                                    | $\xi = 0$                                                                         | $0 < \xi < 1$                                                                     | $\xi = 1$                                                                         | $\xi > 1$                                                                         | $-\infty < \xi < \infty$                                                           |                                                                                     |                                                                                     |
| $\text{Re}(\lambda_i) > 0$<br>$\text{Im}(\lambda_i) = 0$                                  | $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$<br>$\text{Im}(\lambda_i) = 0$                         | $\text{Re}(\lambda_i) > 0$<br>$\text{Im}(\lambda_i) \neq 0$                       | $\text{Re}(\lambda_i) = 0$<br>$\text{Im}(\lambda_i) \neq 0$                       | $\text{Re}(\lambda_i) < 0$<br>$\text{Im}(\lambda_i) \neq 0$                       | $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$<br>$\text{Im}(\lambda_i) = 0$                         | $\text{Re}(\lambda_i) < 0$<br>$\text{Im}(\lambda_i) = 0$                          | $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$<br>$\text{Im}(\lambda_i) = 0$                       | $\lambda_1 = 0, \lambda_2$<br>$\text{Im}(\lambda_i) = 0$                            |                                                                                     |
|          |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| niestabilne                                                                               |                                                                                   |                                                                                   | granica stabil.                                                                   | stabilne                                                                          |                                                                                   |                                                                                   | nie-stabilne                                                                       | granica stabil.                                                                     | nie-stabil.                                                                         |
| bez oscylacji                                                                             |                                                                                   |                                                                                   | oscylacje                                                                         |                                                                                   |                                                                                   | bez oscylacji                                                                     |                                                                                    |                                                                                     |                                                                                     |

\* Równanie  $\ddot{x} + 2\xi\omega_n \dot{x} - \omega_n^2 x = u, \omega_n > 0$ ; \*\* Równanie  $\ddot{x} + b\dot{x} = u$  (jeden biegun zerowy).

Przedstawione zależności są podstawą metod prostego, „jakościowego” projektowania własności dynamicznych obiektów i układów sterowania. Każde zadanie projektowe, które ma na celu określenie warunków, jakie muszą spełniać parametry układu, aby jego reakcje były stabilne i/lub miały charakter aperiodyczny/oscylacyjny, można zrealizować zarówno na podstawie analizy biegunów ( $\rightarrow$  7.3.2), jak i na podstawie analizy tłumienia ( $\rightarrow$  7.4.3). To umożliwia wybranie metody, która w danym przypadku jest prostsza, albo sprawdzenie poprawności obliczeń, przez realizowanie ich na dwa niezależne sposoby. Na przykład, aby zapewnić stabilną, aperiodyczną odpowiedź układu, trzeba spełnić dwa warunki  $\Delta \geq 0$  oraz  $\text{Re}(\lambda_{1,2}) < 0$ , albo zapis w postaci równania oscylacyjnego ( $a_0/a_2 > 0$ ) i  $\xi \geq 1$ .

Jeśli wszystkie współczynniki równania różniczkowego ( $a_2, a_1, a_0$ ) mogą przyjmować dowolne wartości (także zero), to możliwości zawarte tabeli 7-5 należy uzupełnić o dwa przypadki:

–  $a_2 = 0$  i  $a_1 \neq 0$ , czyli równanie pierwszego rzędu:

$$a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = b_0 u(t) \quad (7-41)$$

z jednym biegunem  $\lambda_1 = -a_0/a_1$ , które może być stabilne lub niestabilne,

–  $a_2 = a_1 = 0$ , czyli równanie statyczne:

$$a_0 x(t) = b_0 u(t), \quad (7-42)$$

w którym własności dynamiczne nie występują, czyli jest zawsze stabilne.

Zawsze gdy podstawą projektowania są bieguny układu, to warto sprawdzić, czy zostały wyznaczone poprawnie (bezbłędnie). W przypadku układów drugiego rzędu poprawnie wyznaczone bieguny ( $\lambda_1, \lambda_2$ ) muszą spełniać równoważność:

$$a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0 \leftrightarrow a_2 (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = a_2 (\lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1 \lambda_2). \quad (7-43)$$

Stąd wynikają wzory Viéte’a dla wielomianu drugiego stopnia oraz możliwość zastosowania ich do badania stabilności układu (gdy  $a_2 \neq 0$ ), czyli spełnienia warunku  $\text{Re}(\lambda_{1,2}) < 0$ :

$$-(\lambda_1 + \lambda_2) = a_1 / a_2 > 0 \text{ oraz } \lambda_1 \lambda_2 = a_0 / a_2 > 0. \quad (7-44)$$

Warunki (7-44) są prawdziwe dla biegunów rzeczywistych i zespolonych ( $a_n \neq 0$ ), ale nie odróżniają tych przypadków (nie umożliwiają stwierdzenia, czy w układzie występują oscylacje).

### 7.5.2. Projektowanie ilościowe

Projektowanie własności stabilnych układów pierwszego i drugiego rzędu:

$$a_2 \ddot{x}(t) + a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = b_0 u(t) \quad (7-45)$$

może obejmować wyznaczenie lub zagwarantowanie parametrów ilościowych (czas ustalania odpowiedzi, szybkość tłumienia oscylacji).

Jeśli układ jest stabilny, to można zadać maksymalny czas ustalania odpowiedzi  $t_{uzad}$ . Na podstawie zależności (6-5) oznacza to, że biegun znajdujący się bliżej osi  $\text{Im}$  musi spełniać warunek:

$$|\text{Re}(\lambda_1)| \geq 4 / t_{uzad}. \quad (7-46)$$

Jeśli w tym stabilnym układzie występują oscylacje, to można zadać szybkość tłumienia oscylacji, np. aby każda następna amplituda oscylacji była przynajmniej  $p$  razy mniejsza od poprzedniej ( $A_2 \leq A_1/p$ ). Na podstawie (6-10) można to wymaganie przeliczyć na stopień oscylacyjności  $\mu$ :

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{A_1 / p}{A_1} = \frac{1}{p} \leq e^{-2\pi/\mu} \rightarrow \ln\left(\frac{1}{p}\right) \leq \frac{-2\pi}{\mu} \rightarrow \ln p \leq \frac{2\pi}{\mu} \rightarrow \mu \leq \frac{2\pi}{\ln p} \rightarrow \left| \frac{\text{Im}(\lambda)}{\text{Re}(\lambda)} \right| \leq \frac{2\pi}{\ln p}. \quad (7-47)$$

Podstawą obliczeń mogą być wyznaczone wcześniej bieguny lub parametry równania oscylacyjnego, co przedstawiono w tabeli 7-6.

Tabela 7-6. Parametry dynamiczne liniowych, stabilnych równań rzędu co najwyżej drugiego

|                                         | $a_2\ddot{x}(t) + a_1\dot{x}(t) + a_0x(t) = b_0u(t)$                                                                     |              |                                                                                                          |                                  |
|-----------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------|
| Dla:                                    | $a_2 \neq 0$                                                                                                             |              |                                                                                                          | $a_2 = 0$                        |
| Jeśli:                                  | $a_0/a_2 > 0$                                                                                                            |              |                                                                                                          | $a_1 \neq 0$                     |
|                                         | $\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = bu, \omega_n > 0$                                                        |              |                                                                                                          |                                  |
| $\Delta$                                | $\Delta < 0$                                                                                                             | $\Delta = 0$ | $\Delta > 0$                                                                                             | —                                |
| $\xi$                                   | $0 < \xi < 1$                                                                                                            | $\xi = 1$    | $\xi > 1$                                                                                                | —                                |
| $\text{Re}(\lambda_1) < 0$<br>bliżej Im | $\frac{-a_1}{2a_2} = -\xi\omega_n < 0$                                                                                   |              | $\frac{-a_1 + \sqrt{\Delta}}{2a_2} = \omega_n(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}) < 0$                              | $\frac{-a_0}{a_1} < 0$           |
| $\text{Re}(\lambda_2) < 0$<br>dalej Im  | $\frac{-a_1}{2a_2} = -\xi\omega_n < 0$                                                                                   |              | $\frac{-a_1 - \sqrt{\Delta}}{2a_2} = \omega_n(-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}) < 0$                              | —                                |
| $\text{Im}(\lambda_{1,2})$              | $\frac{\sqrt{\Delta}}{2a_2} = \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$                                                                  | 0            | 0                                                                                                        | —                                |
| $t_u \leq t_{uzad}$ ,<br>jeśli:         | $a_1 \geq \frac{8a_2}{t_{uzad}}, \xi \geq \frac{4\omega_n}{t_{uzad}}$                                                    |              | $a_1 - \sqrt{\Delta} \geq \frac{8a_2}{t_{uzad}}, \xi - \sqrt{\xi^2 - 1} \geq \frac{4\omega_n}{t_{uzad}}$ | $a_0 \geq \frac{4a_1}{t_{uzad}}$ |
| $A_2 \leq A_1/p$ ,<br>jeśli:            | $\left  \frac{\sqrt{\Delta}}{a_1} \right  \leq \frac{2\pi}{\ln p}, \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\xi} \leq \frac{2\pi}{\ln p}$ | —            | —                                                                                                        | —                                |

Warunki określone w tabeli dotyczą tylko projektowania dynamicznych parametrów układu. Poza tym zazwyczaj należy zapewnić także określone wzmocnienie układu. Załóżmy, że zadaniem jest zaprojektowanie układu drugiego rzędu, tak aby przy danym wymuszeniu  $u_k$  jego odpowiedź stabilizowała się poziomie  $x_k$ . Projektowanie obejmuje wówczas dwa etapy:

- dobranie  $a_0$  i  $b_0$ , tak aby  $a_0x_k = b_0u_k$ ,
- dobranie  $a_2$  i  $a_1$ , tak by układ był stabilny, czyli  $\text{Re}(\lambda_1) < 0 \wedge \text{Re}(\lambda_2) < 0$ .

Jeśli poza tym należy zapewnić określony czas ustalania odpowiedzi, to parametry  $a_2$  i  $a_1$  muszą spełniać relację:

- $a_1 - \sqrt{\Delta} \geq 8a_2/t_{uzad}$  w układzie bez oscylacji ( $\Delta > 0$ ),
- $a_1 \geq 8a_2/t_{uzad}$  w układzie z oscylacjami ( $\Delta < 0$ ).



## **V. Badania dynamiki układów wielowymiarowych**



## 8. Zasady badania układów równań różniczkowych

*czyli co zrobić, gdy równań jest wiele*

### 8.1. Wprowadzenie – równania stanu

Modele dynamiki obiektów konstruowane na podstawie znajomości zjawisk fizycznych ( $\rightarrow$  2.1) mają zazwyczaj postać układu równań różniczkowych, który powstaje jako naturalny rezultat zastosowania konstrukcji modeli na podstawie bilansu objętości czy ciepła. Teoretycznie można je przekształcić do jednego równania różniczkowego  $n$ -tego rzędu, a następnie stosować metody analizowania i symulacji dynamiki modelu z jednym wejściem i jednym wyjściem ( $\rightarrow$  4÷7). Jednak zazwyczaj nie ma takiej konieczności, ponieważ analogiczne metody są dostępne dla modeli o wielu wejściach i wyjściach (MIMO).

Typową postacią modeli typu MIMO są **równania stanu**, to znaczy układ równań różniczkowych pierwszego rzędu, liniowych lub nieliniowych:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t)) \\ \dot{x}_2(t) = f_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t)) \\ \dots \\ \dot{x}_n(t) = f_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t)) \end{cases}, \quad (8-1)$$

gdzie  $x_1(t) \div x_n(t)$  to zmienne stanu, a  $u_1(t) \div u_m(t)$  to zmienne wejściowe. Układ  $n$  równań różniczkowych pierwszego rzędu zawiera  $n$  zmiennych stanu i jest modelem  $n$ -tego rzędu. Liczba zmiennych stanu odpowiada liczbie niezależnych elementów magazynujących, które reprezentują wewnętrzny stan układu. Znając aktualny stan układu, równania stanu i sygnały wejściowe, można wyznaczyć jednoznacznie przyszły stan układu. Zmienne stanu mogą pełnić również rolę zmiennych wyjściowych układu lub służyć do obliczenia nowych zmiennych wyjściowych. Przedstawienie modelu dynamiki w postaci układu równań pozwala obserwować wiele zmiennych wyjściowych jednocześnie i pokazuje sprzężenia między poszczególnymi zmiennymi (wpływ zmiennych stanu na siebie nawzajem). Równania stanu (8-1) są niekiedy przedstawiane w postaci symbolicznej:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad (8-2)$$

gdzie:

- $\mathbf{x}$  – wektor zmiennych stanu  $x_1(t) \div x_n(t)$  jest funkcją czasu  $\mathbf{x}(t)$ ,
- $\mathbf{u}$  – wektor zmiennych wejściowych  $u_1(t) \div u_m(t)$  jest funkcją czasu  $\mathbf{u}(t)$ ,
- $\mathbf{f}$  – funkcja wektorowa ( $n$  funkcji, które operują na elementach wektora  $\mathbf{x}$  i  $\mathbf{u}$ ).

Po wyzerowaniu pochodnych w równaniach stanu uzyskujemy model statyczny:

$$0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}). \quad (8-3)$$

Rozwiązanie układu (8-3) umożliwia wyznaczenie punktu równowagi ( $x_{10} \div x_{n0}$ ) dla określonych wartości wejściowych ( $u_{10} \div u_{m0}$ ) oraz charakterystyk statycznych dla poszczególnych zmiennych stanu  $x_i = f_{0i}(u_1, \dots, u_m)$ .

## 8.2. Analityczne rozwiązania równań stanu

### 8.2.1. Liniowe równania stanu

Ogólny przypadek równań stanu może zawierać nieliniowe funkcje ( $\rightarrow 21$ ). Jeśli równania stanu (8-1) są równaniami liniowymi, to można je uporządkować:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \dots + a_{1n}x_n(t) + b_{11}u_1(t) + \dots + b_{1m}u_m(t) \\ \dot{x}_2(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \dots + a_{2n}x_n(t) + b_{21}u_1(t) + \dots + b_{2m}u_m(t) \\ \dots \\ \dot{x}_n(t) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \dots + a_{nn}x_n(t) + b_{n1}u_1(t) + \dots + b_{nm}u_m(t) \end{cases} \quad (8-4)$$

i zapisać model dynamiki obiektu w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \dots \\ u_m(t) \end{bmatrix} \quad (8-5)$$

lub symbolicznie:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{Ax}(t) + \mathbf{Bu}(t), \quad (8-6)$$

gdzie:

- $\mathbf{x}(t)$  jest nazywany **wektorem  $n$  zmiennych stanu** (poszukiwane rozwiązanie),
- $\mathbf{u}(t)$  reprezentuje wektor  $m$  zmiennych wejściowych (funkcje wymuszające),
- $\mathbf{A}$  – **macierz stanu** – podstawowa macierz układu o wymiarze  $n \times n$ ,
- $\mathbf{B}$  – macierz o wymiarze  $n \times m$ .

Wyzerowanie pochodnych w równaniach (8-6) prowadzi do modelu statycznego:

$$0 = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}. \quad (8-7)$$

Rozwiązanie powyższego układu równań algebraicznych ( $\rightarrow 1.3.2$ ) pozwala wyznaczyć punkt równowagi ( $x_{10} \div x_{n0}$ ) dla określonych wartości wejściowych ( $u_{10} \div u_{m0}$ ). Można też wyznaczyć liniowe charakterystyki statyczne dla poszczególnych zmiennych stanu  $x_i = k_{i1}u_1 + \dots + k_{im}u_m$ .

Równania stanu zawierają pełną informację o dynamice obiektu, ale często są jeszcze uzupełniane przez **równania wyjściowe**:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{Cx}(t) + \mathbf{Du}(t), \quad (8-8)$$

które umożliwiają zdefiniowanie dowolnego, dodatkowego zestawu zmiennych wyjściowych  $\mathbf{y}$  na podstawie wektora rozwiązań  $\mathbf{x}$  i zmiennych wejściowych  $\mathbf{u}$ .

### 8.2.2. Analityczne rozwiązanie równań stanu

Rozwiązaniem układu równań (8-5) jest wektor  $\mathbf{x}(t)$  zawierający funkcje dla wszystkich zmiennych stanu  $x_1(t) \div x_n(t)$ . Postać każdego rozwiązania  $x_i(t)$  jest sumą składowej swobodnej  $x_{is}(t)$  i wymuszonej  $x_{iw}(t)$  (analogicznie jak rozwiązanie równania  $n$ -tego rzędu  $\rightarrow$  1.4.2). Wszystkie rozwiązania  $x_1(t) \div x_n(t)$  są związane ze sobą – muszą jednocześnie spełniać układ (8-5), ale być liniowo niezależne (żadne rozwiązanie  $x_i(t)$  nie jest liniową kombinacją innych rozwiązań  $x_1(t) \div x_n(t)$ ). Wyznaczenie rozwiązań można uzyskać metodą wartości własnych.

#### I. Rozwiązania swobodne (składowe swobodne)

(1) Rozwiązanie swobodnego układu równań (8-5) jest wyznaczane na podstawie:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t). \quad (8-9)$$

(2) Założyć, że wektor rozwiązań  $\mathbf{x}_s(t)$  zawiera rozwiązania swobodne  $x_{is}(t)$  postaci:

$$\mathbf{x}_s(t) = e^{\lambda t} \mathbf{v}, \quad (8-10)$$

gdzie  $\lambda$  jest parametrem, a  $\mathbf{v}$  – wektorem, który łączy rozwiązania  $x_{is}(t)$  ze sobą, tak żeby spełniały jednocześnie układ (8-9).

(3) Podstawić rozwiązanie (8-10) do równania (8-9):

$$d(e^{\lambda t} \mathbf{v})/dt = \mathbf{A}e^{\lambda t} \mathbf{v} \rightarrow \lambda e^{\lambda t} \mathbf{v} = \mathbf{A}e^{\lambda t} \mathbf{v} \rightarrow \lambda \mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{v} \rightarrow (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v} = 0. \quad (8-11)$$

Wartości  $\lambda$ , które spełniają taką równość nazywa się wartościami własnymi macierzy  $\mathbf{A}$ , a wektor  $\mathbf{v}$  – wektorem własnym macierzy  $\mathbf{A}$  [18,19].

(4) Wyznaczyć wartości własne  $\lambda$  na podstawie **równania charakterystycznego**:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0. \quad (8-12)$$

Po rozwinięciu macierzy:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Wyznacznik jest  $n$ -tego stopnia, co oznacza  $n$  pierwiastków (rzeczywiste, zespolone, pojedyncze, wielokrotne), czyli  $n$  wartości własnych  $\lambda_1 \div \lambda_n$ .

(5) Dla każdej wartości własnej  $\lambda_j$  wyznaczyć wektor własny  $\mathbf{v}_j$ , czyli taki, który spełnia równość (8-11):

$$(\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{I})\mathbf{v}_j = 0. \quad (8-13)$$

Po rozwinięciu:

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda_j & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda_j & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{j1} \\ v_{j2} \\ \dots \\ v_{jn} \end{bmatrix} = 0$$

Spośród wielu rozwiązań układu (8-13) wybieramy jedno do dalszych obliczeń.

(6) Ostatecznie wektor rozwiązań  $\mathbf{x}_s(t)$  w postaci macierzowej ma postać:

$$\mathbf{x}_s(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + \dots + A_j e^{\lambda_j t} \mathbf{v}_j + \dots + A_n e^{\lambda_n t} \mathbf{v}_n. \quad (8-14)$$

Po rozwinięciu:

$$\begin{bmatrix} x_{1s}(t) \\ x_{2s}(t) \\ \dots \\ x_{ns}(t) \end{bmatrix} = A_1 e^{\lambda_1 t} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ \dots \\ v_{1n} \end{bmatrix} + \dots + A_j e^{\lambda_j t} \begin{bmatrix} v_{j1} \\ v_{j2} \\ \dots \\ v_{jn} \end{bmatrix} + \dots + A_n e^{\lambda_n t} \begin{bmatrix} v_{n1} \\ v_{n2} \\ \dots \\ v_{nn} \end{bmatrix}$$

Parametry  $A_1 \div A_n$  są wyznaczone na podstawie warunków początkowych.

**Wartości własne macierzy A** to bieguny układu (modelu), które mają takie samo znaczenie i zastosowanie jak dla równania  $n$ -tego rzędu, czyli:

- mogą być rzeczywiste i zespolone, pojedyncze i wielokrotne,
- są współczynnikami w wykładnikach funkcji eksponencjalnych, które tworzą składniki rozwiązania swobodnego każdej ze zmiennych stanu  $x_{is}(t)$ ,
- decydują o własnościach dynamiki układu – układ jest stabilny, jeśli wszystkie bieguny leżą w lewej półpłaszczyźnie zespolonej.

Dysponując równaniem charakterystycznym (8-12), można stosować wszystkie metody analizowania i projektowania własności układów liniowych omówione wcześniej ( $\rightarrow 4 \div 7$ ), w szczególności dotyczące stabilności i oscylacyjności układu. **Wektory własne**  $\mathbf{v}_j$  natomiast są konieczne do wyznaczenia rozwiązań dla poszczególnych zmiennych stanu  $x_{is}(t)$ . Ponieważ wektory własne  $\mathbf{v}_j$  wyznaczone dla różnych wartości własnych  $\lambda_j$  są liniowo niezależne, to zapewniają, że rozwiązania:

$$x_{is}(t) = A_{i1} e^{\lambda_1 t} + \dots + A_{ij} e^{\lambda_j t} + \dots + A_{in} e^{\lambda_n t}, \text{ gdzie: } A_{ij} = A_i v_{ji}, i = 1 \div n, j = 1 \div n, \quad (8-15)$$

też są liniowo niezależne – wartości z wektorów własnych korygują współczynniki  $A_1 \div A_n$  odpowiednio dla poszczególnych zmiennych  $x_{is}(t)$ .

## II. Rozwiązania wymuszone (składowe wymuszone)

W automatyce najczęściej poszukiwane jest rozwiązanie wymuszone dla przypadku, gdy wektor wymuszeń  $\mathbf{u}(t)$  ma wartości stałe dla  $t > 0$  (funkcje stałe, skokowe, impulsowe – rys. 4-1), przy czym wymuszenie skokowe lub impulsowe pojawia się tylko na jednym wejściu. Wówczas składowe wymuszone dla każdej zmiennej stanu  $x_{iw}(t)$ , to współrzędne końcowego punktu równowagi:

$$x_{ik} = k_{i1} u_{1k} + \dots + k_{im} u_{mk}, \quad (8-16)$$

obliczone dla zadanych wartości wejściowych  $u_{1k} \div u_{mk}$  na podstawie układu równań statycznych (8-7). Każdy ze współczynników  $k_{i1} \div k_{im}$  można interpretować jako wzmocnienia wyjścia względem poszczególnych wejść modelu. Rozwiązanie układu (8-7) można zrealizować na przykład metodą macierzową:

$$\mathbf{x}_k = -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{u}_k, \quad (8-17)$$

gdzie:  $\mathbf{u}_k = (u_{1k}, \dots, u_{mk})$  – wektor stałych wymuszeń,  $\mathbf{x}_k = (x_{1k}, \dots, x_{nk})$  – wektor składowych wymuszonych (współrzędne końcowego punktu równowagi).

### III. Rozwiązania ogólne

Rozwiązanie ogólne każdej ze zmiennych stanu układu równań (8-5) z wymuszeniem stałym, skokowym lub impulsowym ma postać funkcji:

$$\mathbf{x}(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + \dots + A_j e^{\lambda_j t} \mathbf{v}_j + \dots + A_n e^{\lambda_n t} \mathbf{v}_n + \mathbf{x}_k. \quad (8-18)$$

### IV. Rozwiązania szczególne

Parametry  $A_1 \div A_n$  występujące w rozwiązaniu (8-18) są wyznaczane na podstawie  $n$  warunków początkowych. **Badania z wymuszeniem skokowym** wymagają, aby przed pojawieniem się skoku na wybranym wejściu układ znajdował się w stanie równowagi – ten początkowy punkt równowagi to rozwiązanie układu równań statycznych (8-7) dla wartości wejściowych  $u_{10} \div u_{m0}$ . W postaci macierzowej to:

$$\mathbf{x}_0 = -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{u}_0, \quad (8-19)$$

gdzie:  $\mathbf{u}_0 = (u_{10}, \dots, u_{m0})$  – wektor wymuszeń;  $\mathbf{x}_0 = (x_{10}, \dots, x_{n0})$  – początkowy punkt równowagi. Po podstawieniu tego warunku początkowego do (8-18) otrzymujemy:

$$\mathbf{x}_0 = A_1 e^{\lambda_1 \cdot 0} \mathbf{v}_1 + \dots + A_j e^{\lambda_j \cdot 0} \mathbf{v}_j + \dots + A_n e^{\lambda_n \cdot 0} \mathbf{v}_n + \mathbf{x}_k, \quad (8-20)$$

czyli układ  $n$  równań umożliwiających wyznaczenie  $n$  parametrów ( $A_1 \div A_n$ ):

$$\mathbf{x}_0 = A_1 \mathbf{v}_1 + \dots + A_j \mathbf{v}_j + \dots + A_n \mathbf{v}_n + \mathbf{x}_k. \quad (8-21)$$

Odpowiedź skokowa  $\mathbf{h}(t)$  układu wyznaczana jest analogicznie, z tym że:

- końcowy punkt równowagi  $\mathbf{x}_k$  (8-17) jest wyznaczany dla  $\mathbf{u}_k = (u_{1k}, \dots, u_{mk})$ , gdzie tylko jedna współrzędna wejściowa ma wartość 1, a pozostałe są zerowe,
- zakładamy zerowe warunki początkowe, co oznacza, że wymuszenie  $\mathbf{u}_0$  i punkt równowagi  $\mathbf{x}_0$  mają współrzędne równe zeru (8-19).

**Badania z wymuszeniem impulsowym**, które jest podawane na wybrane wejście, można wyznaczyć jako pochodną odpowiedzi skokowej dla tego wejścia.

**Przykład:** Zastosowanie metody wektorów własnych: wyznaczenie odpowiedzi układu drugiego rzędu na skokową zmianę  $u_1(t)$  (tzn.  $u_1(t) = u_{10} \rightarrow u_{1k}$ , stała wartość  $u_2(t) = u_{20}$ ).

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + b_1u_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + b_2u_2(t) \end{cases}, \text{ np.: } \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}. \quad (8-22)$$

#### I. Rozwiązanie swobodne

– Równanie charakterystyczne i wartości własne (bieguny układu)

$$\det \begin{bmatrix} -2-\lambda & 2 \\ 1 & -3-\lambda \end{bmatrix} = 0 \rightarrow (2+\lambda)(3+\lambda)-2=0 \rightarrow \lambda_1=-1, \lambda_2=-4$$

– Wektory własne dla  $\lambda_1$  i dla  $\lambda_2$

$$\lambda_1: \begin{bmatrix} -2-\lambda_1 & 2 \\ 1 & -3-\lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+1 & 2 \\ 1 & -3+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} -v_{11} + 2v_{12} = 0 \\ v_{11} - 2v_{12} = 0 \end{cases} \rightarrow v_{12} = 0.5v_{11}, \text{ np.: } \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2: \begin{bmatrix} -2-\lambda_2 & 2 \\ 1 & -3-\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+4 & 2 \\ 1 & -3+4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2v_{31} + 2v_{22} = 0 \\ v_{21} + v_{22} = 0 \end{cases} \rightarrow v_{22} = -v_{21}, \text{ np.: } \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

– Rozwiązanie swobodne

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = A_1 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix} + A_2 e^{-4t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

II. Rozwiązanie wymuszone dla  $u_1(t) = u_{1k}$  i  $u_2(t) = u_{20}$

– Układ równań statycznych

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

– Końcowy punkt równowagi

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1k} \\ u_{20} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (u_{1k} + 4u_{20})/4 \\ (3u_{1k} + u_{20})/4 \end{bmatrix}$$

III. Rozwiązanie ogólne

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = A_1 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix} + A_2 e^{-4t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \end{bmatrix}$$

IV. Rozwiązanie szczególne w warunkach początkowego stanu równowagi ( $x_{10}, x_{20}$ )

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{10} \\ u_{20} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (u_{10} + 4u_{20})/4 \\ (3u_{10} + u_{20})/4 \end{bmatrix}$$

– Po podstawieniu ( $x_{10}, x_{20}$ ) do rozwiązania ogólnego ( $t = 0$ )

$$\begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} = A_1 e^{-1 \cdot 0} \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix} + A_2 e^{-4 \cdot 0} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 + A_2 \\ 0.5A_1 - A_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \end{bmatrix},$$

otrzymujemy parametry:  $A_1 = \frac{2(x_{2k} - x_{20})}{3} - \frac{2(x_{1k} - x_{10})}{3}$ ,  $A_2 = \frac{-2(x_{2k} - x_{20})}{3} - \frac{1(x_{1k} - x_{10})}{3}$ .

### 8.2.3. Komputerowe wspomaganie badań analitycznych

Analityczne rozwiązywanie równań stanu jest dość uciążliwe, szczególnie wówczas, gdy macierze mają duży wymiar. Wykorzystanie programów obliczeniowych, przygotowanych do przetwarzania macierzy znacznie ułatwia to zadanie. W tabeli 8-1 przedstawiono podstawowe funkcje w programach Matlab, Scilab i Octave, które można wykorzystać podczas rozwiązywania równań stanu.

Tabela 8-1. Funkcje wspomagające analityczne rozwiązywanie równań stanu

|                                           | Matlab / Octave                 | Scilab                           |
|-------------------------------------------|---------------------------------|----------------------------------|
| Stan równowagi                            | $xk = -\text{inv}(A) * B * uk$  | $xk = -\text{inv}(A) * B * uk$   |
| Wartości własne                           | $\text{lambda} = \text{eig}(A)$ | $\text{lambda} = \text{spec}(A)$ |
| Wartości własne (D)<br>Wektory własne (V) | $[V, D] = \text{eig}(A)$        | $[V, D] = \text{spec}(A)$        |

Założmy, że zadanie polega na wyznaczeniu rozwiązania układu  $n$  równań:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad (8-23)$$

gdy wszystkie współczynniki w macierzach  $\mathbf{A}$  i  $\mathbf{B}$  są określone w sposób liczbowy. Równania są liniowe, więc znana jest postać rozwiązania i wystarczy wyznaczyć wartości współczynników, analogicznie jak w przypadku jednego równania  $n$ -tego rzędu ( $\rightarrow$  4.3.4). Najprostszy algorytm dla przypadku, gdy układ ma tylko jednokrotne bieguny rzeczywiste, zawiera następujące kroki:

1° Wyznaczenie biegunów układu, czyli wartości własnych macierzy  $\mathbf{A}$ :

– bieguny:  $\lambda = \text{eig}(\mathbf{A})$ ; bieguny i wartości własne:  $[\mathbf{V}, \mathbf{D}] = \text{eig}(\mathbf{A})$

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{21} & \dots & v_{n1} \\ v_{12} & v_{22} & \dots & v_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{1n} & v_{2n} & \dots & v_{nn} \end{bmatrix},$$

– sprawdzenie czy faktycznie wszystkie bieguny ( $\lambda_i$ ) są jednokrotne i rzeczywiste,  
 – każdy składnik ( $x_{ij}$ ) w rozwiązaniu każdej zmiennej stanu  $x_i$  jest postaci:  
 $A(i) * \exp(\lambda(i) * t) * V(j,i)$ , gdzie  $t$  jest wektorem czasu;

2° Rozwiązanie wymuszone ( $x_{iw}$ ) dla każdej zmiennej stanu  $x_i$ :  $xw = -\text{inv}(\mathbf{A}) * \mathbf{B} * u$ ;

3° Obliczenie wektora współczynników  $\mathbf{A}$  dla zadanych warunków początkowych  $x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}$  (np. stan równowagi dla wymuszeń początkowych) – na podstawie:

$$\begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \dots \\ x_{n0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ \dots \\ v_{1n} \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{ln} \\ v_{n2} \\ \dots \\ v_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_{1kl} \\ x_{2k} \\ \dots \\ x_{n0} \end{bmatrix}$$

4° Obliczenie sumy składników rozwiązania i rysowanie wykresu zmiennej  $x_i$ :

$i = \dots$ ;  $x = xw(i)$ ;  
 for  $j=1:n$ ,  $x = x + A(i) * \exp(\lambda(i) * t) * V(j,i)$ , end;  
 plot( $t, x$ )

Algorytm można rozbudować, tak aby uwzględniał bieguny wielokrotne i zespolone, co wymaga wprowadzenia odpowiednich składników rozwiązania. Alternatywą do tych obliczeń są badania symulacyjne ( $\rightarrow$  8.3).

### 8.3. Konwersja modelu do równań stanu

Układ równań pierwszego rzędu może wynikać z określonej metody konstrukcji modelu ( $\rightarrow$  2) lub z przekształcenia równania różniczkowego  $n$ -tego rzędu do układu  $n$  równań pierwszego rzędu. Algorytm przekształcenia zostanie przedstawiony na przykładzie równania trzeciego rzędu:

$$a_3 \ddot{x}(t) + a_2 \ddot{x}(t) + a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = bu(t). \quad (8-24)$$

Zamiast zmiennej  $x$  zostaną wprowadzone trzy nowe zmienne  $x_1, x_2, x_3$ , zdefiniowane według wybranego schematu rekurencyjnego:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \quad \ddot{x} = x_1 & \text{b)} \quad x = x_1 & \rightarrow x = x_1 \\ \dot{x} = x_2 \quad (\dot{x}_2 = x_1) & \dot{x}_1 = x_2 & \rightarrow \dot{x} = x_2 \\ x = x_3 \quad (\dot{x}_3 = x_2) & \dot{x}_2 = x_3 & \rightarrow \ddot{x} = x_3 \end{array} \quad (8-25)$$

Nowe zmienne  $x_1, x_2, x_3$  należy podstawić do równania (8-24) odpowiednio zamiast  $x, \dot{x}, \ddot{x}$ . Zamiast najwyższej pochodnej  $\ddot{x}$  w tym równaniu zostanie podstawiona: a)  $\ddot{x} = \dot{x}_1$ , b)  $\ddot{x} = \dot{x}_3$ . Równoważny układ równań stanowi równanie z nowymi zmiennymi oraz dwa równania z danego schematu (8-25):

$$\text{a)} \quad \begin{cases} a_3 \dot{x}_1(t) = -a_2 x_1(t) - a_1 x_2(t) - a_0 x_3(t) + bu(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) \\ \dot{x}_3(t) = x_2(t) \end{cases} \quad \text{b)} \quad \begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t) \\ a_3 \dot{x}_3(t) = -a_2 x_3(t) - a_1 x_2(t) - a_0 x_1(t) + bu(t) \end{cases}$$

Przekształcony model można uporządkować, zapisać w postaci macierzowej:

$$\text{a)} \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_2/a_3 & -a_1/a_3 & -a_0/a_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b/a_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \quad (8-26)$$

$$\text{b)} \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0/a_3 & -a_1/a_3 & -a_2/a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b/a_3 \end{bmatrix} u(t). \quad (8-27)$$

Jeśli przekształcenia są wykonane poprawnie, to równanie charakterystyczne układu przed i po konwersji jest identyczne (niezależnie od schematu wprowadzania zmiennych). Na równanie charakterystyczne nie wpływa również kolejność zmiennych w wektorze stanu, pod warunkiem, że kolejność w wektorze  $\mathbf{x}(t)$  i  $\dot{\mathbf{x}}(t)$  jest taka sama. Wektor  $\mathbf{x}(t)$  zawiera szczególne zmienne stanu, które są pochodnymi innych zmiennych stanu. Można je zinterpretować jako opis fazy ruchu układu, stąd ich nazwa **zmienne fazowe**, oraz nazwa układów (8-26) i (8-27) – **równania fazowe**.

Równania drugiego rzędu powstają często podczas konstrukcji modeli układów mechanicznych i elektrycznych. Po konwersji takich modeli (tabela 8-2) otrzymujemy zmienne fazowe, które mają swoją interpretację fizyczną, co można uwzględnić w oznaczeniach zmiennych:

- prędkość ( $\dot{x} = v$ ) i położenie ( $x = x_2$ ) w układach mechanicznych,
- natężenie prądu ( $\dot{q} = i$ ) i ładunek ( $q = q_2$ ) w układach elektrycznych.

Tabela 8-2. Przykłady konwersji modeli układów mechanicznych i elektrycznych

| Przykład          | Masa, tłumik, sprężyna (rys. 2-15)                                                                                                                                                                                             | Obwód RLC (rys. 2-31)                                                                                                                                                                                                           |
|-------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Pierwotny         | $m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + cx(t) = F(t)$                                                                                                                                                                                    | $L\ddot{q}(t) + R\dot{q}(t) + \frac{1}{C}q(t) = u(t)$                                                                                                                                                                           |
| Konwersja         | $\dot{x} = x_1, \quad x = x_2 \quad (\dot{x}_2 = x_1)$<br>$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \frac{-b}{m}x_1(t) - \frac{c}{m}x_2(t) + \frac{1}{m}F(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) \end{cases}$                                         | $\dot{q} = q_1, \quad q = q_2 \quad (\dot{q}_2 = q_1)$<br>$\begin{cases} \dot{q}_1(t) = \frac{-R}{L}q_1(t) - \frac{1}{LC}q_2(t) + \frac{1}{L}u(t) \\ \dot{q}_2(t) = q_1(t) \end{cases}$                                         |
| Równania stanu    | $\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-b}{m} & \frac{-c}{m} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/m \\ 0 \end{bmatrix} F(t)$ | $\begin{bmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-R}{L} & \frac{-1}{LC} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$ |
| – inne oznaczenia | $\begin{bmatrix} \dot{v}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-b}{m} & \frac{-c}{m} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/m \\ 0 \end{bmatrix} F(t)$   | $\begin{bmatrix} \dot{i}(t) \\ \dot{q}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-R}{L} & \frac{-1}{LC} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$     |

Zastosowana konwersja modelu obwodu elektrycznego prowadzi do pewnej niedogodności. Otóż wśród zmiennych fazowych występuje nie tylko natężenie prądu (prosty pomiar i rejestracja wartości), ale także ładunek. Z tego powodu w obwodach elektrycznych lepiej wprowadzić zmienne stanu w postaci niezależnych napięć na kondensatorach i natężeń prądów w cewkach. Podstawą do wyznaczania równań stanu są wówczas równania całkowo-różniczkowe. Na przykład, w przypadku szeregowego połączenia elementów RLC (rys. 2-31) równania stanu wyznacza się na podstawie bilansu (2-52) w następujący sposób:

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt = u(t) \rightarrow L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + u_c(t) = u(t). \quad (8-28)$$

Zmiennymi stanu w tym bilansie są:

- napięcie na kondensatorze  $u_c(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt$ , skąd wynika, że  $i(t) = C\dot{u}_c(t)$ ,
- natężenie prądu płynącego przez cewkę  $i(t)$ .

Ostatecznie po uporządkowaniu równania stanu mają postać:

$$\begin{cases} L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + u_c(t) = u(t) \\ i(t) = C\dot{u}_c(t) \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} \dot{i}(t) \\ \dot{u}_c(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-R}{L} & \frac{-1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i(t) \\ u_c(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix} u(t). \quad (8-29)$$

Zmienne stanu w postaci natężenia prądów i napięć są wygodniejsze w zastosowaniu (prosty pomiar, ustalenie warunków początkowych), ale to nie jedyna zaleta tej metody. Odpowiedni wybór zmiennych stanu podczas konwersji modelu może niekiedy powodować obniżenie rzędu układu, co faktycznie oznacza ustalenie minimalnego, czyli właściwego rzędu układu (tabela 8-3).

Tabela 8-3. Elementarne przykłady uproszczenia modelu przez zmianę zmiennych stanu

| Przykład   | Masa, tłumik                        | Obwód RC                                                                   | Obwód RL                            |
|------------|-------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------|
| Pierwotny  | $m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) = F(t)$ | $Ri(t) + \frac{1}{C}\int i(t)dt = u(t)$                                    | $L\ddot{q}(t) + R\dot{q}(t) = u(t)$ |
| Po zmianie | $m\dot{v}(t) + bv(t) = F(t)$        | $RC\dot{u}_C(t) + u_C(t) = u(t)$<br>$R\dot{q}(t) + \frac{1}{C}q(t) = u(t)$ | $L\dot{i}(t) + Ri(t) = u(t)$        |

Modele układów mechanicznych i elektrycznych opisane w rozdziale 2 pokazują, jak typowym wynikiem konstrukcji modelu jest układ równań, który zawiera równania różniczkowe i pierwszego, i drugiego rzędu, a także równania różniczkowo-całkowe. Jeśli wszystkie równania takiego modelu są liniowe, to można wyznaczyć równanie charakterystyczne układu, ale konieczne jest przekształcenie całego modelu do jednego równania  $n$ -tego rzędu lub układu  $n$  równań 1 rzędu, co jest bardziej uniwersalne i łatwiejsze (przykłady  $\rightarrow$  10.3).

## 9. Badania symulacyjne na podstawie równań stanu

*czyli symulacja kilku rozwiązań na raz*

### 9.1. Wprowadzenie

Warunki realizacji badań dynamiki układów MIMO są zasadniczo takie same jak układów SISO. Jeśli model jest liniowy, to można rozważyć badania analityczne. Jeśli jednak wszystkie współczynniki i wymuszenia modelu mają określone wartości, i nie ma potrzeby przedstawienia rozwiązania w postaci analitycznej, to wygodnym sposobem badania dynamiki liniowych i nieliniowych modeli MIMO są metody symulacyjne. Podobnie jak w przypadku rozwiązywania pojedynczych równań różniczkowych ( $\rightarrow$  5), uniwersalną metodą definicji modelu w programie symulacyjnym jest schemat oparty na blokach całkujących ( $\rightarrow$  9.2.1). Dostępne są także alternatywne sposoby przygotowania modelu do symulacji, o ile zostanie on zapisany w postaci macierzowych równań stanu ( $\rightarrow$  9.2.2, 9.2.3).

### 9.2. Definicja modeli w blokach, funkcjach i plikach

#### 9.2.1. Schematy graficzne liniowych/nieliniowych równań stanu

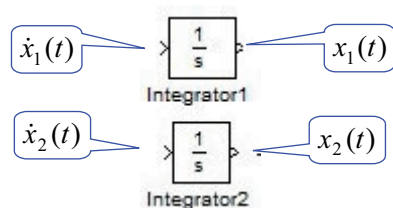
Modele w postaci układu równań różniczkowych można przygotować do symulacji, rysując schemat oparty na blokach całkujących, stosując zasady analogiczne jak dla pojedynczego równania ( $\rightarrow$  5.2). Podstawowe zalety przygotowania schematu symulacyjnego na podstawie bloków całkujących to ograniczenie koniecznych przekształceń modelu (np. nie ma potrzeby konwersji modelu na układ równań 1 rzędu) oraz możliwość realizacji równań nieliniowych.

Układ może obejmować równania dowolnego rzędu, ale za każdym razem należy je przekształcić, tak aby po lewej stronie pozostały najwyższe pochodne poszczególnych zmiennych stanu. Na przykład w przypadku modelu:

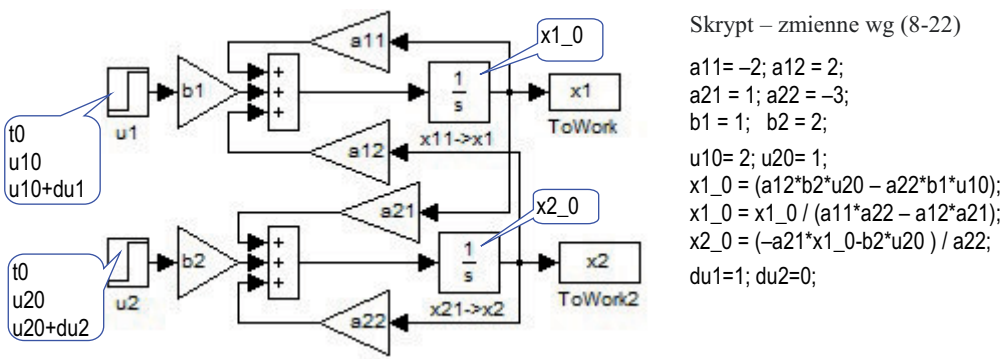
$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + b_1u_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + b_2u_2(t) \end{cases}$$

podstawą rysowania schematu są dwa równania. Dla każdej zmiennej stanu  $x_1$  i  $x_2$  należy przygotować łańcuch bloków całkujących (rys. 9-1), a na wejście każdego łańcucha należy podać sygnał najwyższej pochodnej

( $\dot{x}_1$ ,  $\dot{x}_2$ ), skonstruowany za pomocą podstawowych bloków programu symulacyjnego na podstawie odpowiedniego równania układu (rys. 9-2).



Rys. 9-1. Łańcuchy bloków całkujących



Rys. 9-2. Schemat (plik 'u2w') i skrypt układu dwóch równań (8-22), wersja Matlab(P)

Na schemacie użyto zmiennych  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{21}$ ,  $a_{22}$ ,  $b_1$ ,  $b_2$  odpowiadających parametrom modelu oraz zmiennych  $x_{1\_0}$ ,  $x_{2\_0}$ ,  $x_{2\_1}$  reprezentujących warunki początkowe w blokach całkujących ( $x_1(0)$ ,  $x_2(0)$ ), a także  $u_{10}$ ,  $u_{20}$ ,  $du_1$ ,  $du_2$  opisujących funkcje wejściowe. Uzupełnieniem schematu jest skrypt zawierający przygotowanie zmiennych do badania odpowiedzi układu na skokową zmianę wartości wejściowej  $u_1(t)$ , zgodnie z zaleceniami omówionymi w podrozdziale 5.2.

### 9.2.2. Specjalistyczne bloki na schemacie graficznym

Modele w postaci liniowych równań stanu można zapisać za pomocą macierzy, co umożliwia zastosowanie specjalnych bloków znacznie upraszczających schemat (tabela 9-1).

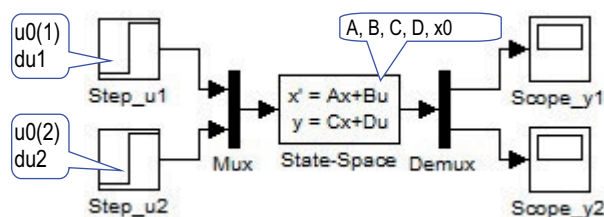
Tabela 9-1. Podstawowe bloki do definiowania modeli w postaci równań stanu

| Operacja                    | Matlab (Simulink) | Scilab (Xcos) |
|-----------------------------|-------------------|---------------|
| Definiowanie równania stanu | State-Space       | CLSS          |
| Łączenie/dzielenie sygnałów | Mux, Demux        | MUX, DEMUX    |

W bloku State-Space można zdefiniować i równania stanu, i równania wyjściowe:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{Cx} + \mathbf{Du}.\end{aligned}\tag{9-1}$$

Zdefiniowanie zmiennych wyjściowych  $\mathbf{y}$  jest konieczne, ponieważ tylko te zmienne są dostępne na wyjściu bloku (aby obserwować zmienne stanu  $\mathbf{x}$ , trzeba skopiować je do zmiennych wyjściowych). Blok równań stanu ma zawsze jedno wejście i jedno wyjście (rys. 9-3), ale mogą to być wejścia wektorowe – sygnały wejściowe można połączyć w wektor za pomocą multipleksera (Mux), a wektor wyjściowy można rozdzielić na sygnały za pomocą demultipleksa (Demux).



Rys. 9-3. Blok równań stanu (plik 'u2w\_ss') (wersja Matlab)

Skrypt – zmienne wg (8-22):

```
A = [-2, 2; 1, -3];
B = [1, 0; 0, 2];
C = [1, 0; 0, 1];
D = [0, 0; 0, 0];
u0 = [2; 1];
x0 = -inv(A) * B * u0;
du1 = 1; du2 = 0; t0 = 1;
```

Macierze **A**, **B**, **C**, **D** mogą być definiowane na liście parametrów bloku lub przekazane za pomocą zmiennych macierzowych (**A**, **B**, **C**, **D**), ale zawsze należy zapewnić zgodność wymiarów. W bloku można podać też wektor wartości początkowych  $x_0$ , co umożliwia uruchamianie symulacji od różnych warunków początkowych zmiennych stanu  $x_0$ , w szczególności od stanu równowagi.

### 9.2.3. Specjalistyczne funkcje w skryptach

Typowe badania modeli zapisanych w postaci macierzowych równań stanu (9-1) można zrealizować również za pomocą prostych funkcji (tabela 9-2).

Tabela 9-2. Wybrane funkcje do definiowania i badania liniowych równań stanu

|                    | Matlab (Control) / Octave (Control) | Scilab                                                                                                                                                                       |
|--------------------|-------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Równania stanu     | <code>model = ss(A,B,C,D)</code>    | <code>model = syslin('c',A,B,C,D);</code><br><code>t = 0: 0.1 :6; //czas</code>                                                                                              |
| Odpowiedzi czasowe | <code>step(model)</code>            | <code>[y1] = csim('step',t,model(:,1)) // u1</code><br><code>[y2] = csim('step',t,model(:,2)) // u2</code><br><code>subplot(211),plot(t, y1),subplot(212),plot(t, y2)</code> |
|                    | <code>impulse(model)</code>         | <code>plot(t, csim('impulse',t,model(:,1))) // u1</code>                                                                                                                     |

gdzie: **A**, **B**, **C**, **D** – macierze definiujące model, `model` – nazwa modelu.

Funkcja `ss` pozwala zdefiniować model jako zmienną specjalnego typu – obiekt LTI (ang. linear time-invariant system). Z kolei funkcje `step` i `impulse` pozwalają wygenerować komplet reakcji modelu MIMO na standardowe zakłócenie  $1(t)$  i  $\delta(t)$  podawane na każde z wejść. Odpowiednia funkcja w Scilabie (`csim`) generuje reakcje dla wybranego wejścia (model SIMO). W nowszych wersjach Matlab'a można zdefiniować parametry wymuszenia skokowego dla funkcji `step()` – wartość początkową  $u_0$  i wartość skoku  $du$ , przy czym zmienne  $u_0$  i  $du$  mogą być wektorami (tabela 9-3). Alternatywą dla definicji parametrów skoku jest skalowanie i przesuwanie odpowiedzi układu liniowego ( $\rightarrow$  4.2.2) na podstawie rezultatów funkcji `step()` zapamiętanych w postaci macierzy [19].

Tabela 9-3. Alternatywne skrypty generujące odpowiedzi na różne wymuszenia skokowe

| Matlab(N)                                                                                                                                                                   | Matlab(P)                                                  |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------|
| A = [-2, 2; 1, -3]; B = [1, 0; 0, 2]; C = [1, 0; 0, 1]; D = [0,0; 0,0]; model = ss(A,B,C,D);<br>u0 = [2,1]; du = [1,3]; %wartości początkowe i wartości skoków na wejściach |                                                            |
| stepDataOptions(); %odczytanie parametrów                                                                                                                                   | x0 = -inv(A) * B * u0; %stan równowagi układu              |
| stepDataOptions('InputOffset',u0);                                                                                                                                          | [y,t] = step(model); %wygenerowanie odp.skokowych          |
| stepDataOptions('StepAmplitude',du);                                                                                                                                        | subplot(221), plot(t, x0(1)+y(:,1,1)*du(1)); %x(1) od u(1) |
| step(model); %wykresy odp.skokowych                                                                                                                                         | subplot(222), plot(t, x0(1)+y(:,1,2)*du(2)); %x(1) od u(2) |
|                                                                                                                                                                             | subplot(223), plot(t, x0(2)+y(:,2,1)*du(1)); %x(2) od u(1) |
|                                                                                                                                                                             | subplot(224), plot(t, x0(2)+y(:,2,2)*du(2)); %x(2) od u(2) |

### 9.3. Przykłady realizacji badań symulacyjnych – zasady symulacji

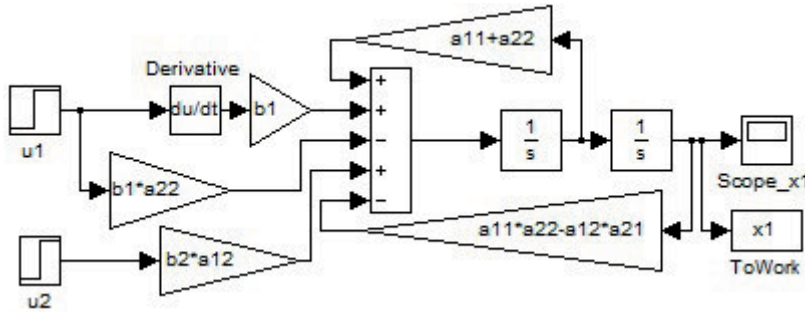
#### 9.3.1. Wybór sposobu symulacji

Na rysunkach 9-2 i 9-3 przedstawiono dwa podstawowe sposoby realizacji badań symulacyjnych dla układu równań różniczkowych (8-22) z zastosowaniem schematu opartego na blokach całkujących oraz schematu z blokiem równań stanu. Dla porównania zrealizowano badanie z wykorzystaniem alternatywnego schematu (rys. 9-4), który powstał na podstawie równania otrzymanego w wyniku konwersji układu równań (tabela 4-7):

$$\ddot{x}_1(t) - (a_{11} + a_{22})\dot{x}_1(t) + ax_1(t) = b_1\dot{u}_1(t) - b_1a_{22}u_1(t) + b_2a_{12}u_2(t),$$

$$\ddot{x}_2(t) - (a_{11} + a_{22})\dot{x}_2(t) + ax_2(t) = b_1a_{21}u_1(t) + b_2\dot{u}_2(t) - b_2a_{11}u_2(t),$$

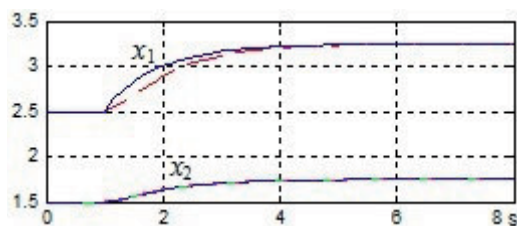
gdzie:  $a = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ .



Rys. 9-4. Schemat zmiennej x1 (plik 'u2w\_pokonwersji') po konwersji układu równań (8-22)

Wyniki z tych różnych symulacji przedstawiono na wspólnym wykresie (rys. 9-5). Zgodnie z oczekiwaniem symulacje na podstawie schematów tworzonych na podstawie układu równań (rys. 9-2, rys. 9-3) prowadzą do identycznych wykresów. Wykres zmiennej  $x_1$  uzyskany na podstawie schematu pojedynczego równania (rys. 9-4) natomiast wykazuje pewne różnice. W tym przypadku uzyskano również znacznie dłuższe wektory zmiennych rejestrowanych przez blok To Workspace. Powodem tych wszystkich różnic jest konieczność zastosowania bloku różniczkowania (Derivative) – operacje

różniczkowania wymagają krótszych kroków obliczeniowych i są wykonywane z mniejszą dokładnością niż operacje całkowania ( $\rightarrow$  5.2.5, 5.3.3).



Rys. 9-5. Reakcje na skok zmiennej  $u_1$  na podstawie rysunków 9-2, 9-3 i 9-4

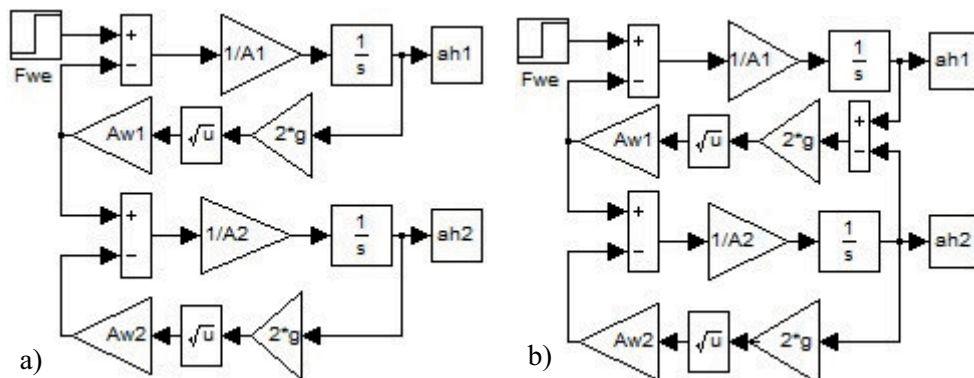
Skrypt (po inicjacji wartości):

```
figure, hold on; grid on;
[t] = sim('u2w', 8);
plot(t, x1, 'b', t, x2, 'g');
[t] = sim('u2w_pokonwersji', 8);
plot(t, x1, 'r--', t, x2, 'm--');
[t] = sim('u2w_ss', 8);
plot(t, x1, 'b--', t, x2, 'b--');
```

### 9.3.2. Badania układów liniowych i nieliniowych

Zastosowanie równań stanu w badaniach symulacyjnych jest dedykowane przede wszystkim do zadań, w których wymagane jest wyznaczenie reakcji różnych wyjść układu na zakłócenia pojawiające się na różnych wejściach układu. Zazwyczaj są to reakcje na wymuszenia skokowe. Poprawne wykonanie badania wymaga aby układ znajdował się w stanie równowagi, a wymuszenie było podawane tylko na jedno z wejść. Zasady te zostaną zilustrowane na kolejnym przykładzie.

Celem badania jest porównanie własności kaskady zbiorników niepołączonych (rys. 2-2) i połączonych (rys. 2-3). Obie kaskady zbudowane są z takich samych zbiorników (dno, otwór) i są badane przy takim samym przepływie wejściowym ( $f_{we}$ ), różni je tylko sposób połączenia. Badania wykonano na podstawie nieliniowych modeli kaskad ((2-9), (2-11)), które posłużyły do przygotowania sparametryzowanych schematów (rys. 9-6).



Rys. 9-6. Schemat nieliniowego modelu kaskady:

a) niewspółdziałającej (2-9), plik 'zb2nNL'; b) współdziałającej (2-11), plik 'zb2wNL'

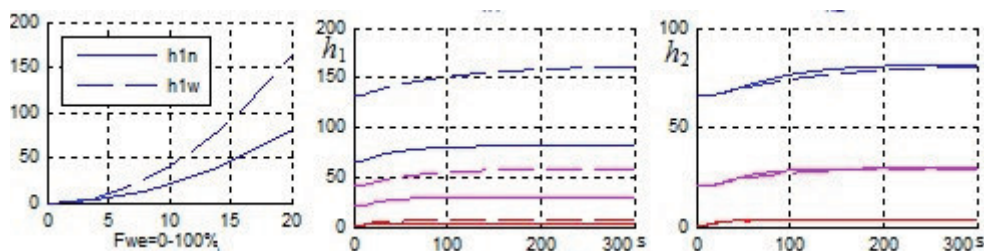
Wykresy do badań są wygenerowane przez skrypt (tabela 9-4), który obejmuje przygotowanie danych i charakterystyki  $h_1(f_{we})$  obu modeli oraz rejestrację wartości

zmiennych  $h_1$  i  $h_2$  ( $ah_1$ ,  $ah_2$ ) obu modeli po skoku wartości zmiennej wejściowej w trzech punktach pracy.

Tabela 9-4. Główne elementy skryptu (Matlab) generującego wykresy z rysunku 9-7

| Przygotowanie<br>i ch-ki statyczne                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | Reakcje na skok dla modelu kaskady                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                                                                                                                    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | niewspółdziałającej (2-9)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | współdziałającej (2-11)                                                                                                                                                                                                                            |
| <pre>modelN = 'zb2nNL'; modelW = 'zb2wNL'; g = 9.81; FweN = 20; A1=5; Aw1=.5; %zbiornik1 A2=5; Aw2=.5; %zbiornik2 %----- tabFwe = FweN * [0: 0.1: 1]; figure, hold on; grid on; h1 = tabFwe.^2/(2*g*Aw1^2); plot(tabFwe,h1,'b'); h2 = tabFwe.^2/(2*g*Aw2^2); h1a = tabFwe.^2/(2*g*Aw1^2); plot(tabFwe,h1a+h2,'b--') nrf = 2;</pre> | <pre>czas_skok=10; czas=100; kol = 'rmb'; tabFwe = FweN*[0.10, 0.5, 0.90]; dFwe = 0.1*FweN; figure(nrf), hold on; grid on; figure(nrf+1), hold on; grid on; for i = 1:3     Fwe0 = tab(i)*FweN;     h10 = Fwe0^2/(2*g*Aw1^2);     h20 = Fwe0^2/(2*g*Aw1^2);     t = sim(modelN,czas);     figure(nrf), plot(t,ah1,kol(i));     figure(nrf+1), plot(t,ah2,kol(i)); end</pre> | <pre>for i = 1:3     Fwe0 = tab(i)*FweN;     h20 = Fwe0^2/(2*g*Aw2^2);     h10 = Fwe0^2/(2*g*Aw1^2)+h20;     t = sim(modelW,czas);     figure(nrf), plot(t,ah1,strcat(kol(i),'--'));     figure(nrf+1), plot(t,ah2,strcat(kol(i),'--')); end</pre> |

Wynikiem symulacji są wykresy (rys. 9-7), które ilustrują różnice między własnościami kaskady niewspółdziałającej (—) i współdziałającej (- -). Z porównania wynika, że największe różnice występują w reakcjach pierwszego zbiornika.



Rys. 9-7. Ch-ka statyczna  $h_1(f_{we})$  oraz reakcje na skok  $0.1 \cdot f_{weN}$  modelu (2-9) (—) i (2-11) (- -)

Przeprowadzenie analogicznych badań na podstawie przybliżonych modeli kaskad:

$$\begin{cases} A_1 \dot{h}_1(t) = f_{we}(t) - a_1 h_1(t) \\ A_2 \dot{h}_2(t) = a_1 h_1(t) - a_2 h_2(t) \end{cases} \quad \text{ i } \quad \begin{cases} A_1 \dot{h}_1(t) = f_{we}(t) - a_1 (h_1(t) - h_2(t)) \\ A_2 \dot{h}_2(t) = a_1 (h_1(t) - h_2(t)) - a_2 h_2(t) \end{cases}$$

można znacznie uprościć, a nawet przeprowadzić w sposób analityczny ( $\rightarrow$  10.2.1).

Uproszczenie badań symulacyjnych dotyczy nie tylko tak oczywistej sprawy jak przygotowanie prostszej wersji schematów (rys. 9-6) i skryptu (tabela 9-4), ale przede wszystkim możliwości zapisu modeli w postaci macierzowej, a wówczas:

- można użyć jednego uniwersalnego schematu (rys. 9-3) i zmieniać macierze,
- badania można wykonać w jednym punkcie pracy, ponieważ własności układów liniowych nie zależą od punktu pracy ( $\rightarrow$  5.3.2).

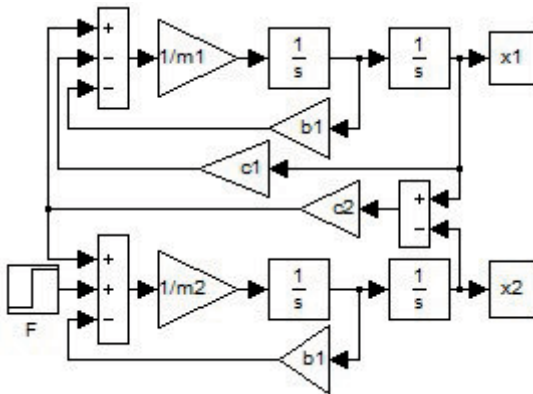
Punkt pracy można łatwo obliczyć macierzowo ( $\mathbf{x}_0 = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \mathbf{u}_0$ ), chociaż nie ma takiej potrzeby, ponieważ może to być punkt zero (zerowe wartości na wejściach i wyjściach). W takim przypadku nie ma potrzeby rysowania schematu, ponieważ badania najłatwiej jest wykonać w skrypcie za pomocą funkcji (tabela 9-3).

### 9.3.3. Układy równań wyższego rzędu

Rysowanie schematu symulacyjnego opartego na blokach całkujących nie wymaga konwersji układu równań na równania stanu. W celu ilustracji przedstawimy konstrukcję schematu wybranego modelu mechanicznego (rys. 2-17):

$$\begin{cases} 0 = m_1 \ddot{x}_1(t) + b_1 \dot{x}_1(t) + c_1 x_1 + c_2 (x_1(t) - x_2(t)) \\ F(t) = m_2 \ddot{x}_2(t) + b_2 \dot{x}_2(t) + c_2 (x_2(t) - x_1(t)) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \ddot{x}_1(t) = \frac{1}{m_1} (-b_1 \dot{x}_1(t) - c_1 x_1 - c_2 (x_1(t) - x_2(t))) \\ \ddot{x}_2(t) = \frac{1}{m_2} (-b_2 \dot{x}_2(t) + c_2 (x_1(t) - x_2(t)) + F(t)) \end{cases}$$

Pierwszym krokiem jest przygotowanie łańcucha bloków całkujących dla  $x_1$  i  $x_2$ , a następnie na wejście każdego łańcucha należy podać sygnał najwyższej pochodnej ( $\ddot{x}_1, \ddot{x}_2$ ) skonstruowany na podstawie poszczególnych równań układu za pomocą bloków dostępnych w programie symulacyjnym (rys. 9-8).



Przykładowy skrypt:

```
m1 = 1; m2 = 2;
b1 = 2; b2 = 1;
c1 = .5; c2 = 3;

F0 = 2;
x1_0 = F0 / c1;
x2_0 = F0 / c2 + x1_0;

x1_1 = 0; x2_1 = 0;

dF = 1;
```

Rys. 9-8. Schemat i skrypt do przykładu (wersja Matlab)

Na schemacie użyto zmiennych  $m_1, m_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ , odpowiadających parametrom modelu ( $m_1, m_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ ), oraz zmiennych  $x1\_0, x1\_1, x2\_0, x2\_1$ , wpisanych do bloków całkujących jako warunki początkowe ( $\dot{x}_1(0), x_1(0), \dot{x}_2(0), x_2(0)$ ). Wartości zmiennych przygotowano w przykładowym skrypcie, tak aby wyznaczyć odpowiedź układu na skokową zmianę wartości wejściowej  $F(t)$ .

## 10. Analiza i projektowanie liniowych równań stanu

*czyli czas na wielowymiarowe przypadki*

### 10.1. Metody analizy i projektowania

Badania symulacyjne znacznie ułatwiają analizowanie własności układów równań różniczkowych. Jednak nie zawsze model jest aż tak złożony, aby rezygnować z badań analitycznych, szczególnie dla układów drugiego rzędu, gdy można zastosować wszystkie metody analizowania i projektowania opisane na podstawie równania różniczkowego ( $\rightarrow$  7). W przypadku modeli nieliniowych analiza jest ograniczona do wyznaczenia punktu równowagi, ale można badać przybliżone, liniowe modele.

Badane obiekty można podzielić na dwa typy, rozróżniane na podstawie opisu działania lub na podstawie równań różniczkowych:

- **kaskada niewspółdziałająca** to układ unilateralny – stan pierwszego magazynu wielkości wpływa na stan drugiego magazynu, ale stan drugiego magazynu nie wpływa na stan pierwszego, co ma swoje odzwierciedlenie w równaniach bilansowych (w równaniu pochodnej  $x_2$  występuje zmienna  $x_1$ , ale równaniu pochodnej  $x_1$  nie ma zmiennej  $x_2$ ),
- **kaskada współdziałająca** – między zmiennymi stanu występują wzajemne sprzężenia (w równaniu pochodnej  $x_1$  występuje zmienna  $x_2$  i odwrotnie).

Tabela 10-1 zawiera ogólne przykłady równań typu kaskada niewspółdziałająca i współdziałająca wraz z punktem równowagi i równaniem charakterystycznym.

Tabela 10-1. Równania stanu kaskady niewspółdziałającej i współdziałającej (por. tabela 4-7)

| Kaskada niewspółdziałająca                                                                                                                                                                                                                                                  | Kaskada współdziałająca                                                                                                                                                                                                                                                          |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t) + b_1u_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + b_2u_2(t) \end{cases}$                                                                                                                                               | $\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + b_1u_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + b_2u_2(t) \end{cases}$                                                                                                                                     |
| $\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$ |
| $x_1 = \frac{-b_1}{a_{11}}u_1, \quad x_2 = \frac{a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}}u_1 - \frac{b_2}{a_{22}}u_2$                                                                                                                                                                       | $x_1 = \frac{-a_{22}b_1u_1 + a_{12}b_2u_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{21}b_1u_1 - a_{11}b_2u_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$                                                                                                                            |
| $(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) = 0$                                                                                                                                                                                                                                  | $(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = 0$                                                                                                                                                                                                                        |

Można wyznaczyć rozwiązania analityczne obu kaskad ( $\rightarrow$  8.2.2), ale wystarczy prosta analiza punktu równowagi i równania charakterystycznego, aby określić podstawowe cechy tych układów. W przypadku kaskady niewspółdziałającej można od razu zauważyć, że niektóre wejścia nie wpływają na wszystkie zmienne wyjściowe ( $u_2$  nie wpływa na  $x_2$ ) oraz że bieguny układu są rzeczywiste i są to bieguny ujemne, jeśli tylko współczynniki  $a_{11}$  i  $a_{22}$  są ujemne. Kaskada współdziałająca może wykazywać różne własności, ale z badania równania charakterystycznego wynika, że układ jest stabilny, jeśli współczynniki  $a_{11}$  i  $a_{22}$  są ujemne, i spełniona jest nierówność  $a_{11}a_{22} > a_{12}a_{21}$ .

Równanie charakterystyczne układu ma postać:

$$(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = 0 \rightarrow \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0.$$

Układ tego typu jest stabilny, jeśli (tabela. 7-5):

$$\left. \begin{array}{l} \text{– jest to obiekt oscylacyjny: } +\omega^2 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0 \rightarrow a_{11}a_{22} > a_{12}a_{21} \\ \text{i ma dodatnie tłumienie: } 2\zeta\omega = -(a_{11}+a_{22}) \rightarrow \zeta = -(a_{11}+a_{22})/(2\omega) > 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a_{11}a_{22} > a_{12}a_{21} \\ a_{11} < 0 \wedge a_{22} < 0 \end{array}$$

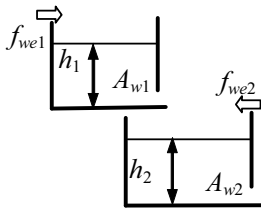
Dokładniejsza analiza własności układów jest znacznie ułatwiona, jeśli parametry mają interpretację fizyczną – zazwyczaj są one dodatnie i zachodzą relacje między wartościami. Typowe przykłady obiektów typu kaskada niewspółdziałająca i współdziałająca to otwarte układy hydrauliczne i cieplne ( $\rightarrow$  10.2). Układy mechaniczne i elektryczne to typowe przykłady modeli, zawierające wyższe pochodne ( $\rightarrow$  10.3).

## 10.2. Przykłady analizy układów hydraulicznych i cieplnych

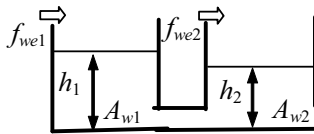
### 10.2.1. Kaskady zbiorników

Przykładem obiektów opisanych równaniami stanu są otarte układy hydrauliczne w postaci kaskady zbiorników ( $\rightarrow$  2.2). Jednak modele kaskad zawierające dokładny opis swobodnego wypływu są układami nieliniowymi i jedyne co można łatwo obliczyć w takim przypadku, to punkt równowagi przy stałych wymuszeniach. W dalszych rozważaniach jest więc stosowane liniowe przybliżenie funkcji swobodnego wypływu, co pozwoli analizować dynamikę modeli zlinearyzowanych.

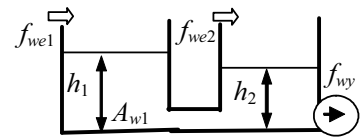
Analizie poddano trzy typy kaskad (porównaj  $\rightarrow$  4.5.2), opisane modelami drugiego rzędu, a ich specyficzne cechy wynikają ze sposobu połączenia zbiorników.



Rys. 10-1. Kaskada niewspółdziałająca



Rys. 10-2. Kaskada współdziałająca ze swobodnym wypływem



Rys. 10-3 Kaskada współdziałająca z pompą

1° Zbiorniki niepołączone, kaskada niewspółdziałająca (rys. 10-1) opisuje układ:

$$\begin{cases} A_1 \dot{h}_1(t) = f_{we1}(t) - a_1 h_1(t) \\ A_2 \dot{h}_2(t) = f_{we2}(t) + a_1 h_1(t) - a_2 h_2(t) \end{cases} \quad (10-1)$$

W zapisie macierzowym model ma postać:

$$\begin{bmatrix} \dot{h}_1(t) \\ \dot{h}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & 0 \\ a_1 & -a_2 \\ A_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ A_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{we1}(t) \\ f_{we2}(t) \end{bmatrix} \quad (10-2)$$

2° Układ zbiorników połączonych przewodem (rys. 10-2) opisują równania:

$$\begin{cases} A_1 \dot{h}_1(t) = f_{we1}(t) - a_1(h_1(t) - h_2(t)) \\ A_2 \dot{h}_2(t) = f_{we2}(t) + a_1(h_1(t) - h_2(t)) - a_2 h_2(t) \end{cases}, \quad (10-3)$$

z których wynika model macierzowy postaci:

$$\begin{bmatrix} \dot{h}_1(t) \\ \dot{h}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{a_1}{A_1} & \frac{a_1}{A_1} \\ \frac{a_1}{A_2} & -\frac{a_{12}}{A_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{A_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{we1}(t) \\ f_{we2}(t) \end{bmatrix}, \text{ gdzie } a_{12} = a_1 + a_2. \quad (10-4)$$

3° Układ połączonych zbiorników z pompą wyjściową (rys. 10-3) opisują równania:

$$\begin{cases} A_1 \dot{h}_1(t) = f_{we1}(t) - a_1(h_1(t) - h_2(t)) \\ A_2 \dot{h}_2(t) = f_{we2}(t) + a_1(h_1(t) - h_2(t)) - f_{wy}(t) \end{cases} \quad (10-5)$$

lub model w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} \dot{h}_1(t) \\ \dot{h}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{a_1}{A_1} & \frac{a_1}{A_1} \\ \frac{a_1}{A_2} & -\frac{a_1}{A_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{A_2} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{we1}(t) \\ f_{we2}(t) \\ f_{wy}(t) \end{bmatrix}. \quad (10-6)$$

Własności powyższych kaskad porównano na podstawie punktu równowagi ( $h_1, h_2$ ), biegunów ( $\lambda_1, \lambda_2$ ) i tłumienia ( $\xi$ ) (tabela 10-2). Analiza jest ułatwiona dzięki fizycznej interpretacji parametrów ( $A_1, A_2, a_1, a_2$ ) – są zawsze dodatnie.

Tabela 10-2. Porównanie parametrów kaskad zbiorników

| Rys. 10-1 (10-2)                                                                                                                                  | Rys. 10-2 (10-4)                                                                                                                                                               | Rys. 10-3 (10-6)                                                                                                                                                                                 |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Kaskada niewspółdziałająca                                                                                                                        | Kaskada współdziałająca                                                                                                                                                        |                                                                                                                                                                                                  |
| $h_1 = \frac{f_{we1}}{a_1}, h_2 = \frac{f_{we1} + f_{we2}}{a_2}$                                                                                  | $h_1 = \frac{a_{12}f_{we1} + f_{we2}}{a_1a_2}, h_2 = \frac{f_{we1} + f_{we2}}{a_2}$<br>gdzie $a_{12} = a_1 + a_2$                                                              | $a_1(h_{10} - h_{20}) = f_{we10} = f_{20}$<br>– gdy $f_{we10} = f_{20} \rightarrow h_{10} = h_{20}$<br>– gdy $f_{we10} \neq f_{20} \rightarrow$ brak p.r.<br>gdzie $f_{20} = f_{we20} - f_{wy0}$ |
| $\left(\frac{-a_1}{A_1} - \lambda\right)\left(\frac{-a_2}{A_2} - \lambda\right) = 0$<br>$A_1A_2\lambda^2 + (A_1a_2 + A_2a_1)\lambda + a_1a_2 = 0$ | $\left(\frac{-a_1}{A_1} - \lambda\right)\left(\frac{-a_{12}}{A_2} - \lambda\right) - \frac{a_1^2}{A_1A_2} = 0$<br>$A_1A_2\lambda^2 + (A_1a_{12} + A_2a_1)\lambda + a_1a_2 = 0$ | $\left(\frac{-a_1}{A_1} - \lambda\right)\left(\frac{-a_1}{A_2} - \lambda\right) - \frac{a_1^2}{A_1A_2} = 0$<br>$A_1A_2\lambda^2 + a_1(A_1 + A_2)\lambda = 0$                                     |
| $\lambda_1 = \frac{-a_1}{A_1}, \lambda_2 = \frac{-a_2}{A_1}$                                                                                      | $\lambda_{1,2} = \frac{-A_1a_{12} - A_2a_1 \pm \sqrt{\Delta}}{2A_1A_2}$<br>$\Delta = (A_1a_{12} + A_2a_1)^2 - 4A_1A_2a_1a_2$                                                   | $\lambda_1 = 0,$<br>$\lambda_2 = -\frac{a_1(A_2 + A_1)}{A_1A_2}$                                                                                                                                 |
| $\frac{a_1a_2}{A_1A_2} > 0 \rightarrow \xi = \frac{A_1a_2 + A_2a_1}{2\sqrt{a_1a_2/A_1A_2}}$                                                       | $\frac{a_1a_2}{A_1A_2} > 0 \rightarrow \xi = \frac{A_1a_{12} + A_2a_1}{2\sqrt{a_1a_2/A_1A_2}}$                                                                                 | brak                                                                                                                                                                                             |
| zawsze: $\text{Im}(\lambda_{1,2}) = 0, \text{Re}(\lambda_{1,2}) > 0$                                                                              | zawsze: $\xi > 0, \Delta > 0$                                                                                                                                                  | zawsze: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0$                                                                                                                                                           |
| Stabilny<br>Bez oscylacji                                                                                                                         | Stabilny<br>Bez oscylacji                                                                                                                                                      | Na granicy stabilności<br>Bez oscylacji                                                                                                                                                          |

Rezultatem porównania kaskad są następujące spostrzeżenia:

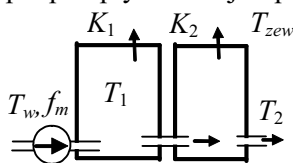
- Kaskada niewspółdziałająca – unilateralność objawia się tym, że w macierzy  $A$  występują zerowe elementy, które powodują, że równanie charakterystyczne ma postać iloczynu elementów opisujących jeden i drugi zbiornik. Bieguny tego układu są zawsze rzeczywiste i ujemne, więc układ jest zawsze stabilny i ma aperiodyczne reakcje (bez oscylacji).
- Kaskada współdziałająca ze swobodnym wypływem – nie jest układem unilateralnym, ponieważ zbiorniki wpływają na siebie nawzajem (oba przepływy wpływają na każdą wysokość). Jest to układ oscylacyjny, a jego tłumienie  $\zeta$  jest zawsze dodatnie (zawsze stabilny). Można też wykazać, że bieguny układu są zawsze rzeczywiste ( $\Delta > 0$ ).

$$\Delta = (A_1(a_1 + a_2) + A_2a_1)^2 - 4A_1A_2a_1a_2 = (A_1(a_1 - a_2) + A_2a_1)^2 + 4A_1^2a_1a_2 > 0 \rightarrow \text{zawsze } \Delta > 0$$

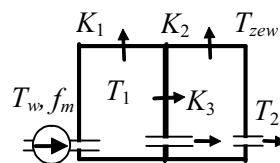
- Kaskada współdziałająca z pompą charakteryzuje się występowaniem zerowego bieguna, a że drugi biegun jest ujemny, to oznacza, że jest to zawsze układ na granicy stabilności. Własność ta oznacza także problem z wyznaczeniem punktu równowagi – brak lub nieskończenie wiele punktów równowagi zależnie od wartości wszystkich wejść układu.

## 10.2.2. Wielowymiarowe obiekty cieplne

Równania stanu są również naturalnym rezultatem konstrukcji modeli układów cieplnych ( $\rightarrow$  2.3). Jeśli w takim układzie występuje transport ciepła poprzez nośnik, to powstają równania nieliniowe. Rozważmy przykład dwóch obiektów, w których nośnik ciepła przepływa kolejno przez dwa pomieszczenia.



Rys. 10-4. Kaskada niewspółdziałająca



Rys. 10-5. Kaskada współdziałająca

W modelach stosowany jest przepływ masowy, a dla umożliwienia zapisu w postaci macierzowej przyjmuje się założenie, że przepływ jest stały ( $f_m(t) = f_{m0}$ ).

1° Układ pomieszczeń połączonych przewodem (rys. 10-4) jest opisany układem:

$$\begin{cases} C_{v1}\dot{T}_1(t) = c_p f_m(t)(T_w(t) - T_1(t)) - K_1(T_1(t) - T_{zew}(t)) \\ C_{v2}\dot{T}_2(t) = c_p f_m(t)(T_1(t) - T_2(t)) - K_2(T_2(t) - T_{zew}(t)) \end{cases} \quad (10-7)$$

Postać macierzowa przy stałym przepływie ( $K_f = c_p f_{m0}$ ) to:

$$\begin{bmatrix} \dot{T}_1(t) \\ \dot{T}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-K_f - K_1}{C_{v1}} & 0 \\ \frac{K_f}{C_{v2}} & \frac{-K_f - K_2}{C_{v2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1(t) \\ T_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{K_f}{C_{v1}} & \frac{K_1}{C_{v1}} \\ 0 & \frac{K_2}{C_{v2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_w(t) \\ T_{zew}(t) \end{bmatrix} \quad (10-8)$$

2° Model układu pomieszczeń ze wspólną ścianą (rys. 10-5) tworzą równania:

$$\begin{cases} C_{v1}\dot{T}_1(t) = c_p f_m(t)(T_w(t) - T_1(t)) - K_1(T_1(t) - T_{zew}(t)) - K_3(T_1(t) - T_2(t)) \\ C_{v2}\dot{T}_2(t) = c_p f_m(t)(T_1(t) - T_2(t)) - K_2(T_2(t) - T_{zew}(t)) + K_3(T_1(t) - T_2(t)) \end{cases} \quad (10-9)$$

Przy założeniu stałego przepływu ( $K_f = c_p f_{m0}$ ) można zapisać równania stanu:

$$\begin{bmatrix} \dot{T}_1(t) \\ \dot{T}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-K_f - K_1 - K_3}{C_{v1}} & \frac{K_3}{C_{v1}} \\ \frac{K_f + K_3}{C_{v2}} & \frac{-K_f - K_2 - K_3}{C_{v2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1(t) \\ T_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{K_f}{C_{v1}} & \frac{K_1}{C_{v1}} \\ 0 & \frac{K_2}{C_{v2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_w(t) \\ T_{zew}(t) \end{bmatrix} \quad (10-10)$$

Powyższe obiekty są przykładem cieplnej kaskady niewspółdziałającej i współdziałającej – ich reakcje są zawsze aperiodyczne (stabilne, bez oscylacji), analogicznie jak kaskad zbiorników ( $\rightarrow$  10.2.1)

Tabela 10-3. Porównanie parametrów kaskad cieplnych

| Rys. 10-4 (10-8)                                                                                            | Rys. 10-5 (10-4)                                                                                                                                               |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Kaskada niewspółdziałająca                                                                                  | Kaskada współdziałająca                                                                                                                                        |
| $T_1 = \frac{K_f T_w + K_1 T_{zew}}{K_f + K_1}$                                                             | $T_1 = \frac{K_f(K_f + K_3)T_w + (K + K_1 K_3)T_{zew}}{(K_f + K_1)(K_f + K_2) - K_3(K_f + K_3)}$                                                               |
| $T_2 = \frac{K_f^2 T_w + K T_{zew}}{(K_f + K_1)(K_f + K_2)}$                                                | $T_2 = \frac{K_f(K_f + K_2)T_w + K T_{zew}}{(K_f + K_1)(K_f + K_2) - K_3(K_f + K_3)}$                                                                          |
| gdzie: $K_f = c_p f_{m0}$ , $K = K_f(K_1 + K_2) + K_1 K_2$                                                  | gdzie: $K_f = c_p f_{m0}$ , $K = K_1(K_f + K_2) + K_2 K_3$                                                                                                     |
| $\left( \frac{-K_f - K_1}{C_{v1}} - \lambda \right) \left( \frac{-K_f - K_2}{C_{v2}} - \lambda \right) = 0$ | $\left( \frac{-K_f - K_1 - K_3}{C_{v1}} - \lambda \right) \left( \frac{-K_f - K_2 - K_3}{C_{v2}} - \lambda \right) - \frac{K_3(K_f + K_3)}{C_{v1} C_{v2}} = 0$ |
| zawsze: $\text{Im}(\lambda_{1,2}) = 0, \text{Re}(\lambda_{1,2}) > 0$                                        | zawsze: $\xi > 0, \Delta > 0$                                                                                                                                  |
| Stabilny, bez oscylacji                                                                                     | Stabilny, bez oscylacji                                                                                                                                        |

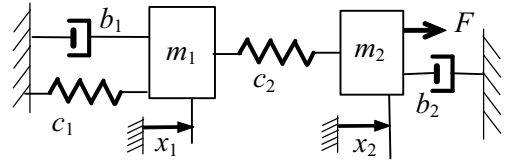
Z porównania opisu różnych obiektów cieplnych ( $\rightarrow$  2.3) wynika, że typowe konstrukcje obiektów, w których występuje wymiana ciepła poprzez przegrody, tworzą układy typu kaskada współdziałająca. Aby uzyskać układ unilateralny (kaskadę niewspółdziałającą), konieczne jest odizolowanie magazynów i transport ciepła między nimi wyłącznie poprzez nośnik ciepła.

## 10.3. Przykłady analizy układów mechanicznych i elektrycznych

### 10.3.1. Zastosowanie przekształcenia w modelach układów mechanicznych

Jeśli model obiektu zawiera równania różnych zmiennych i różnych rzędów, to analityczne badanie jego stabilności wymaga przekształcenia modelu do jednej z form umożliwiających wyznaczenie równania charakterystycznego, np. do równań stanu. Typowe przykłady modeli tego typu występują w układach mechanicznych ( $\rightarrow$  2.4).

Rozważmy układ z dwoma punktami bilansowymi, przedstawiony na rysunku 10-6. Porównane zostaną trzy warianty modelu przy różnych założeniach, dotyczących wartości elementów bezwładnościowych (mas) oraz tłumienia (tarcia).



Rys. 10-6. Układ z dwoma punktami (2)

1° Model układu uwzględniający wpływ mas ( $m_1, m_2$ ) obejmuje dwa równania:

$$\begin{cases} 0 = m_1 \ddot{x}_1(t) + b_1 \dot{x}_1(t) + c_1 x_1(t) + c_2 (x_1(t) - x_2(t)) \\ F(t) = m_2 \ddot{x}_2(t) + b_2 \dot{x}_2(t) + c_2 (x_2(t) - x_1(t)) \end{cases} \quad (10-11)$$

Konwersja po zastosowaniu następującego schematu podstawień:

$$\dot{x}_1 = x_{1a}, \quad x_1 = x_{1b} \quad (\dot{x}_{1b} = x_{1a}), \quad \dot{x}_2 = x_{2a}, \quad x_2 = x_{2b} \quad (\dot{x}_{2b} = x_{2a})$$

pozwalą uzyskać równania stanu czwartego rzędu:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{1a}(t) \\ \dot{x}_{2a}(t) \\ \dot{x}_{1b}(t) \\ \dot{x}_{2b}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-b_1}{m_1} & 0 & \frac{-c_1 - c_2}{m_1} & \frac{c_2}{m_1} \\ 0 & \frac{-b_2}{m_2} & \frac{c_2}{m_2} & \frac{-c_2}{m_2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1a}(t) \\ x_{2a}(t) \\ x_{1b}(t) \\ x_{2b}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} F(t) \quad (10-12)$$

Równanie charakterystyczne wymaga obliczenia wyznacznika macierzy:

$$\begin{vmatrix} \frac{-b_1}{m_1} - \lambda & 0 & \frac{-c_1 - c_2}{m_1} & \frac{c_2}{m_1} \\ 0 & \frac{-b_2}{m_2} - \lambda & \frac{c_2}{m_2} & \frac{-c_2}{m_2} \\ 1 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (10-13)$$

Rozwinięcie względem czwartego wiersza:

$$\begin{aligned} (-1)^{4+2} \begin{vmatrix} \frac{-b_1}{m_1} - \lambda & \frac{-c_1 - c_2}{m_1} & \frac{c_2}{m_1} \\ 0 & \frac{-b_2}{m_2} - \lambda & \frac{c_2}{m_2} \\ 1 & -\lambda & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{4+4} (-\lambda) \begin{vmatrix} \frac{-b_1}{m_1} - \lambda & 0 & \frac{-c_1 - c_2}{m_1} \\ 0 & \frac{-b_2}{m_2} - \lambda & \frac{c_2}{m_2} \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} &= 0 \\ \frac{c_1 + c_2}{m_1} \frac{c_2}{m_2} - \frac{c_2}{m_1} \frac{c_2}{m_2} + \lambda \frac{-c_2}{m_2} \left( \frac{-b_1}{m_1} - \lambda \right) + \lambda^2 \left( \frac{-b_1}{m_1} - \lambda \right) \left( \frac{-b_2}{m_2} - \lambda \right) + \lambda \frac{-c_1 - c_2}{m_1} \left( \frac{-b_2}{m_2} - \lambda \right) &= 0 \quad | \cdot (m_1 m_2) \\ (c_1 + c_2) c_2 - c_2^2 + \lambda c_2 (b_1 + m_1 \lambda) + \lambda^2 (b_1 + m_1 \lambda) (b_2 + m_2 \lambda) + \lambda (c_1 + c_2) (b_2 + m_2 \lambda) &= 0 \\ c_1 c_2 + m_1 c_2 \lambda^2 + b_1 c_2 \lambda + m_1 m_2 \lambda^4 + (m_1 b_2 + m_2 b_1) \lambda^3 + b_1 b_2 \lambda^2 + m_2 (c_1 + c_2) \lambda^2 + b_2 (c_1 + c_2) \lambda &= 0 \\ m_1 m_2 \lambda^4 + (m_1 b_2 + m_2 b_1) \lambda^3 + (m_1 c_2 + m_2 (c_1 + c_2) + b_1 b_2) \lambda^2 + (b_1 c_2 + b_2 (c_1 + c_2)) \lambda + c_1 c_2 &= 0 \end{aligned} \quad (10-14)$$

(W takich przypadkach znacznie łatwiejsza jest metoda operatorowa  $\rightarrow$  13.1.3).

2° Jeśli w analizowanym układzie masy  $m_1$  i  $m_2$  mają pomijalne wartości, to model dynamiki układu obejmuje nadal dwa równania, które można zapisać w postaci:

$$\begin{cases} 0 = b_1 \dot{x}_1(t) + c_1 x_1(t) + c_2 (x_1(t) - x_2(t)) \\ F(t) = b_2 \dot{x}_2(t) + c_2 (x_2(t) - x_1(t)) \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-c_1 - c_2}{b_1} & \frac{c_2}{b_1} \\ \frac{c_2}{b_2} & \frac{-c_2}{b_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{b_2} \end{bmatrix} F(t), \quad (10-15)$$

ale tym razem jest to układ rzędu drugiego.

$$(c_1 + c_2 + b_1 \lambda)(c_2 + b_2 \lambda) - c_2^2 = 0. \quad (10-16)$$

3° Modelem układu, w którym masy i tarcie są pomijalne (liczą się tylko siły sprężystości) są dwa równania statyczne, umożliwiające wyznaczenie punktu równowagi:

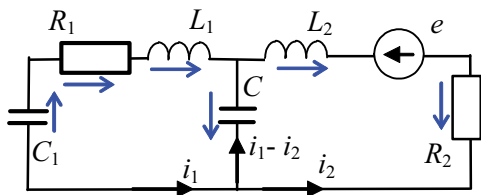
$$\begin{cases} 0 = c_1 x_1(t) + c_2 (x_1(t) - x_2(t)) \\ F = c_2 (x_2(t) - x_1(t)) \end{cases} \rightarrow x_1 = \frac{F}{c_1}, \quad x_2 = \frac{F}{c_1} + \frac{F}{c_2}. \quad (10-17)$$

Statyczny model nie ma równania charakterystycznego – jest to opis z natury stabilny. Model opisuje reakcje, które zachodzą "natychmiast", to znaczy w praktyce „bardzo szybko”. Jeśli reakcje rzeczywistego układu nie mają takiego charakteru, to znaczy, że model (10-17) nie jest odpowiedni dla tego obiektu.

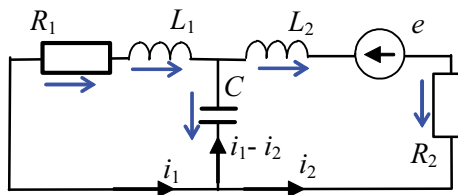
### 10.3.2. Wybór zmiennych stanu w obwodach elektrycznych

Równania, które opisują obwody elektryczne w oparciu o podstawowe definicje rezystora, cewki i kondensatora, zawierają zarówno funkcje różniczkujące, jak całkujące ( $\rightarrow$  2.5). Analityczne badanie stabilności układów równań różniczkowo-całkowych wymaga konwersji modelu, na przykład do postaci równań stanu.

Rozważmy dwa bardzo podobne obwody, w których można wyróżnić dwa niezależne oczka bilansowe (rys. 10-7, rys. 10-8).



Rys. 10-7. Układ z dwuobwodowy (1)



Rys. 10-8. Układ z dwuobwodowy (2)

W tabeli 10-4 przedstawiono różne warianty układów równań opisujących obwody:

- 1° pierwotne równania bilansowe, zawierające funkcje pochodne i całkowe,
- 2° model przekształcony przez wprowadzenie definicji natężenia prądu ( $i(t) = \dot{q}(t)$ )

– schemat konwersji:  $\dot{q}_1 = i_1$ ,  $q_1 = q_{1a}$  ( $\dot{q}_{1a} = i_1$ ),  $\dot{q}_2 = i_2$ ,  $q_2 = q_{2a}$  ( $\dot{q}_{2a} = i_2$ )

- 3° model przekształcony przez przyjęcie zasady, że zmiennymi stanu są niezależne napięcia na kondensatorach i natężenia prądów w cewkach ( $\rightarrow$  8.3)

– zmienne:  $u_C(t) = \int \frac{i_1(t) - i_2(t)}{C} dt$ ,  $u_{C1}(t) = \int \frac{i_1(t)}{C_1} dt$ , ( $C \dot{u}_C(t) = i_1(t) - i_2(t)$ ,  $C_1 \dot{u}_{C1}(t) = i_1(t)$ )

Tabela 10-4. Porównanie wariantów równań stanu modeli obwodów elektrycznych

|    | Rys. 10-7 (obwód 1)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | Rys. 10-8 (obwód 2)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
|----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1° | $\begin{cases} 0 = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + R_1 i_1(t) + \int \frac{i_1(t) - i_2(t)}{C} dt + \int \frac{i_1(t)}{C_1} dt \\ e(t) = L_2 \frac{di_2(t)}{dt} + R_2 i_2(t) + \int \frac{i_2(t) - i_1(t)}{C} dt \end{cases}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | $\begin{cases} 0 = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + R_1 i_1(t) + \int \frac{i_1(t) - i_2(t)}{C} dt \\ e(t) = L_2 \frac{di_2(t)}{dt} + R_2 i_2(t) + \int \frac{i_2(t) - i_1(t)}{C} dt \end{cases}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| 2° | $\begin{cases} 0 = L_1 \ddot{q}_1(t) + R_1 \dot{q}_1(t) + \frac{q_1(t) - q_2(t)}{C} + \frac{q_1(t)}{C_1} \\ e = L_2 \ddot{q}_2(t) + R_2 \dot{q}_2(t) + \frac{q_2(t) - q_1(t)}{C} \end{cases}$ <p>Dla <math>\mathbf{x}(t) = [i_1(t), i_2(t), q_1(t), q_2(t)]^T</math>, <math>\mathbf{u}(t) = e(t)</math></p> $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{-R_1}{L_1} & 0 & \frac{-(C_1 + C)}{L_1 C_1 C} & \frac{1}{L_1 C} \\ 0 & \frac{-R_2}{L_2} & \frac{1}{L_2 C} & \frac{-1}{L_2 C} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L_2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ | $\begin{cases} 0 = L_1 \ddot{q}_1(t) + R_1 \dot{q}_1(t) + \frac{q_1(t) - q_2(t)}{C} \\ e = L_2 \ddot{q}_2(t) + R_2 \dot{q}_2(t) + \frac{q_2(t) - q_1(t)}{C} \end{cases}$ <p>Dla <math>\mathbf{x}(t) = [i_1(t), i_2(t), q_1(t), q_2(t)]^T</math>, <math>\mathbf{u}(t) = e(t)</math></p> $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{-R_1}{L_1} & 0 & \frac{-1}{L_1 C} & \frac{1}{L_1 C} \\ 0 & \frac{-R_2}{L_2} & \frac{1}{L_2 C} & \frac{-1}{L_2 C} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L_2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ |
| 3° | $\begin{cases} 0 = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + R_1 i_1(t) + u_C(t) + u_{C1}(t) \\ e(t) = L_2 \frac{di_2(t)}{dt} + R_2 i_2(t) - u_C(t) \end{cases}$ <p>Dla <math>\mathbf{x}(t) = [i_1(t), i_2(t), u_C(t), u_{C1}(t)]^T</math>, <math>\mathbf{u}(t) = e(t)</math></p> $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{-R_1}{L_1} & 0 & \frac{-1}{L_1} & \frac{-1}{L_1} \\ 0 & \frac{-R_2}{L_2} & \frac{1}{L_2} & 0 \\ \frac{1}{C} & \frac{-1}{C} & 0 & 0 \\ \frac{1}{C_1} & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L_2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$                                           | $\begin{cases} 0 = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + R_1 i_1(t) + u_C(t) \\ e(t) = L_2 \frac{di_2(t)}{dt} + R_2 i_2(t) - u_C(t) \end{cases}$ <p>Dla <math>\mathbf{x}(t) = [i_1(t), i_2(t), u_C(t)]^T</math>, <math>\mathbf{u}(t) = e(t)</math></p> $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{-R_1}{L_1} & 0 & \frac{-1}{L_1} \\ 0 & \frac{-R_2}{L_2} & \frac{1}{L_2} \\ \frac{1}{C} & \frac{-1}{C} & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L_2} \\ 0 \end{bmatrix}$                                                                                            |

Zastosowanie różnych wersji zmiennych stanu nie wpływa na opis własności modelu, o ile nie wprowadza nadmiarowych zmiennych stanu. Wybór zmiennych stanu w postaci niezależnych napięć na kondensatorach i natężenia prądów w cewkach umożliwia wyznaczenie minimalnego wymiaru macierzy stanu (właściwego wymiaru układu), tak jak to nastąpiło w przypadku obwodu 2.

Równanie charakterystyczne obwodu 2 dla wariantu 2° to wyznacznik macierzy:

$$\begin{vmatrix} \frac{-R_1}{L_1} - \lambda & 0 & \frac{-1}{L_1 C} & \frac{1}{L_1 C} \\ 0 & \frac{-R_2}{L_2} - \lambda & \frac{1}{L_2 C} & \frac{-1}{L_2 C} \\ 1 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Po rozwinięciu względem czwartego wiersza

$$\begin{aligned}
 & (-1)^{4+2} \begin{vmatrix} \frac{-R_1}{L_1} - \lambda & \frac{-1}{L_1 C} & \frac{1}{L_1 C} \\ 0 & \frac{1}{L_2 C} & \frac{-1}{L_2 C} \\ 1 & -\lambda & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{4+4} (-\lambda) \begin{vmatrix} \frac{-R_1}{L_1} - \lambda & 0 & \frac{-1}{L_1 C} \\ 0 & \frac{-R_2}{L_2} - \lambda & \frac{1}{L_2 C} \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \\
 & \frac{-1}{L_1 C} \frac{-1}{L_2 C} - \frac{1}{L_1 C} \frac{1}{L_2 C} + \lambda \frac{-1}{L_2 C} \left( \frac{-R_1}{L_1} - \lambda \right) + \lambda^2 \left( \frac{-R_1}{L_1} - \lambda \right) \left( \frac{-R_2}{L_2} - \lambda \right) + \lambda \frac{-1}{L_1 C} \left( \frac{-R_2}{L_2} - \lambda \right) = 0 \quad | \cdot L_1 L_2 C \\
 & \lambda(R_1 + L_1 \lambda) + \lambda^2 C(R_1 + L_1 \lambda)(R_2 + L_2 \lambda) + \lambda(R_2 + L_2 \lambda) = 0 \\
 & L_1 \lambda^2 + R_1 \lambda + L_1 L_2 C \lambda^4 + (L_1 R_2 + L_2 R_1) C \lambda^3 + R_1 R_2 C \lambda^2 + L_2 \lambda^2 + R_2 \lambda = 0 \\
 & L_1 L_2 C \lambda^4 + (L_1 R_2 + L_2 R_1) C \lambda^3 + (L_1 + L_2 + R_1 R_2 C) \lambda^2 + (R_1 + R_2) \lambda = 0 \quad (10-18)
 \end{aligned}$$

Równanie charakterystyczne obwodu 2 dla wariantu 3° to wyznacznik macierzy:

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} \frac{-R_1}{L_1} - \lambda & 0 & \frac{-1}{L_1} \\ 0 & \frac{-R_2}{L_2} - \lambda & \frac{1}{L_2} \\ \frac{1}{C} & \frac{-1}{C} & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -\lambda \left( \frac{-R_1}{L_1} - \lambda \right) \left( \frac{-R_2}{L_2} - \lambda \right) + \frac{1}{L_1 C} \left( \frac{-R_2}{L_2} - \lambda \right) + \frac{1}{L_2 C} \left( \frac{-R_1}{L_1} - \lambda \right) = 0 \\
 & \lambda C(R_1 + L_1 \lambda)(R_2 + L_2 \lambda) + R_2 + L_2 \lambda + R_1 + L_1 \lambda = 0 \\
 & L_1 L_1 C \lambda^3 + (L_1 R_2 + L_2 R_1) C \lambda^2 + R_1 R_2 C \lambda + R_2 + L_2 \lambda + R_1 + L_1 \lambda = 0
 \end{aligned}$$

Ostatecznie:

$$L_1 L_1 C \lambda^3 + (L_1 R_2 + L_2 R_1) C \lambda^2 + (L_1 + L_2 + R_1 R_2 C) \lambda + R_1 + R_2 = 0. \quad (10-19)$$

Równanie charakterystyczne (10-19) jest o rząd niższe niż (10-18) – pomija biegun o wartości zero, który wynika z relacji między zmiennymi stanu (więcej w → 13.1.4).

## **VI. Modele operatorowe**



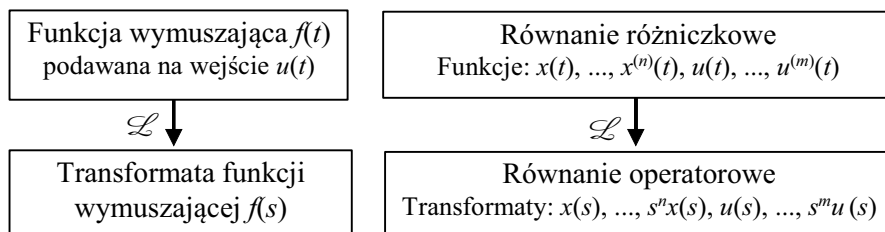
## 11. Podstawy i zasady badania transmitancji

*czyli ucieczka od równań różniczkowych*

### 11.1. Wprowadzenie – transmitancja i jej podstawowe własności

#### 11.1.1. Podstawowe definicje i interpretacje transmitancji [18, 19].

Liniowe równania różniczkowe można poddać przekształceniu Laplace’a  $\mathcal{L}$ , które zamienia wszystkie funkcje czasu na transformaty, czyli funkcje zmiennej  $s$  i powoduje, że równanie różniczkowe, gdzie zmienną niezależną jest czas  $t$ , zmienia się w algebraiczne równanie operatorowe ze zmienną  $s$  (rys. 11-1). Zmienna  $s$  jest zmienną zespoloną i nie ma interpretacji fizycznej.



Rys. 11-1. Przekształcenie modelu różniczkowego w operatorowy

W praktyce inżynierskiej zazwyczaj nie ma potrzeby wykonywania przekształcenia  $\mathcal{L}$  na podstawie definicji (obliczania wyrażeń całkowych), wystarczy bowiem znajomość transformat kilku funkcji (tabela 11-1) i twierdzeń opisujących podstawowe własności przekształcenia Laplace’a:

Tabela 11-1. Transformaty kilku wybranych funkcji

| Oryginał $f(t)$ | Transformata $f(s)$             |
|-----------------|---------------------------------|
| $\delta(t)$     | 1                               |
| 1, $1(t)$       | $\frac{1}{s}$                   |
| $e^{\alpha t}$  | $\frac{1}{s - \alpha}$          |
| $\sin \omega t$ | $\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$ |
| $\cos \omega t$ | $\frac{s}{s^2 + \omega^2}$      |

W praktyce inżynierskiej przyjmuje się, że:

$$u(t) = 1 \rightarrow 1(t) \rightarrow \mathcal{L}\{1\} = 1/s$$

– twierdzenia o liniowości:

$$\mathcal{L}\{af_1(t) + bf_2(t)\} = af_1(s) + bf_2(s), \quad (11-1)$$

– twierdzenia o transformacie pochodnej funkcji:

$$\mathcal{L}\{\dot{f}(t)\} = sf(s) - f(0_+). \quad (11-2)$$

Rozwinięcie twierdzenia (11-2) do pochodnych  $n$ -tego rzędu i założenie zerowych warunków początkowych, czyli zerowej wartości funkcji ( $f(0_+)$ ) i kolejnych pochodnych, prowadzi do zależności:

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n f(s), \quad (11-3)$$

która jest podstawą przekształcania równań różniczkowych przez zamianę operatora różniczkowania na operator potęgowania:

$$\frac{d^k}{dt^k} \leftrightarrow s^k. \quad (11-4)$$

Tak więc liniowe równanie różniczkowe z zerowymi warunkami początkowymi:

$$a_n x^{(n)}(t) + \dots + a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = b_m u^{(m)}(t) + \dots + b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t) \quad (11-5)$$

można przekształcić na równanie operatorowe postaci:

$$a_n s^n x(s) + \dots + a_1 s x(s) + a_0 x(s) = b_m s^m u(s) + \dots + b_1 s u(s) + b_0 u(s). \quad (11-6)$$

Stąd po uporządkowaniu:

$$(a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0) x(s) = (b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0) u(s) \quad (11-7)$$

i podzieleniu stronami:

$$\frac{x(s)}{u(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0} = G(s) \quad (11-8)$$

otrzymujemy funkcję wymierną (iloraz wielomianów), która stanowi model dynamiki nazywany **transmitancją układu**  $G(s)$ . Na podstawie wyrażenia (11-8) definiuje się niekiedy transmitancję jako stosunek transformaty funkcji wyjściowej  $x(s)$  do transformaty funkcji wejściowej  $u(s)$  przy zerowych warunkach początkowych, jednak taka definicja nie wyjaśnia pochodzenia transmitancji. Bardziej użyteczna jest interpretacja transmitancji jako funkcji przejścia, która opisuje sposób przetwarzania sygnału przez układ, albowiem na podstawie transmitancji  $G(s)$  obiektu i transformaty funkcji wejściowej  $u(s)$  można wyznaczyć transformatę funkcji wyjściowej  $x(s)$ , a po zastosowaniu odwrotnego przekształcenia Laplace'a ( $\mathcal{L}^{-1}$ ) odtworzyć oryginał funkcji wyjściowej  $x(t)$ :

$$x(s) = G(s)u(s) \rightarrow x(t) = \mathcal{L}^{-1} \{ x(s) \}. \quad (11-9)$$

W szczególnym przypadku dla wymuszenia impulsowego, mamy  $u(s) = \mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$  i możemy wyznaczyć odpowiedź impulsową  $g(t)$ :

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1} \{ G(s)u(s) \} = \mathcal{L}^{-1} \{ G(s) \}. \quad (11-10)$$

Tym samym można wprowadzić jeszcze jedną interpretację transmitancji poprzez jej związek z odpowiedzią impulsową układu: oryginał transmitancji to odpowiedź impulsowa  $g(t)$ . Zazwyczaj nie ma potrzeby wyznaczania odpowiedzi  $x(t)$  na wymuszenie, ponieważ wszystkie podstawowe badania własności dynamicznych można wykonać na podstawie transmitancji  $G(s)$ .

### 11.1.2. Analityczne badanie transmitancji

Model układu przedstawiony w postaci transmitancji  $G(s)$  pozwala zrealizować podstawowe badania własności obiektu (stabilność, oscylacyjność, punkt równowagi). O stabilności i oscylacyjności układu decydują **bieguny transmitancji** ( $p_1 \div p_n$ ), czyli pierwiastki równania charakterystycznego, wyznaczonego przez przyrównanie mianownika transmitancji (11-8) do zera:

$$a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0 = 0. \quad (11-11)$$

To równanie jest oczywiście identyczne z równaniem charakterystycznym wyznaczonym na podstawie pierwotnego równania różniczkowego (11-5), poza zwyczajowym oznaczeniem zmiennej wielomianu ( $s$  zamiast  $\lambda$ ) i biegunów ( $p_i$  zamiast  $\lambda_i$ ). Pierwiastki wielomianu mogą być rzeczywiste lub zespolone, więc zmienna  $s$  wprowadzona przez przekształcenie  $\mathcal{L}$  jest zmienną zespoloną.

W dokładniejszych badaniach układów wyznacza się też **zera transmitancji** ( $z_1 \div z_m$ ), czyli pierwiastki wielomianu w liczniku (11-8):

$$b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0 = 0. \quad (11-12)$$

Zera mają pewien wpływ na własności dynamiki, ale nie wpływają na stabilność układu. Znając zera i bieguny układu, można zapisać transmitancję (11-8) w równoważnej postaci iloczynowej:

$$G(s) = k \frac{(s - z_1) \dots (s - z_m)}{(s - p_1) \dots (s - p_n)}. \quad (11-13)$$

Aby wyznaczyć **punkt równowagi** na podstawie transmitancji, należy skorzystać z jednej z własności przekształcenia Laplace'a – twierdzenia o wartości końcowej:

$$x_k = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s x(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s G(s) u(s), \quad (11-14)$$

które jest prawdziwe pod warunkiem, że granica  $x(t)$  przy  $t \rightarrow \infty$  istnieje. Problem istnienia granicy trzeba rozstrzygnąć w inny sposób, na przykład na podstawie znajomości rozwiązania równania różniczkowego dla typowych funkcji wymuszających:

- jeśli funkcja wejściowa ma stałą wartość (dla  $t \rightarrow \infty$ ), to rozwiązanie wymuszone ( $x_k$ ) też ma stałą wartość (granica  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$  istnieje).

**Przykłady** dla  $G(s) = 3 / (4s+1)$ :

- gdy  $u(t) = u_k$ , to  $\lim_{s \rightarrow 0} s \frac{3}{4s+1} \frac{u_k}{s} = 3u_k \rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 3u_k$ ,
- gdy  $u(t) = 1(t)$ , to  $\lim_{s \rightarrow 0} s \frac{3}{4s+1} \frac{1}{s} = 3 \rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 3$ ,
- gdy  $u(t) = \delta(t)$ , to  $\lim_{s \rightarrow 0} s \frac{3}{4s+1} 1 = 0 \rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ .
- jeśli na wejściu występuje funkcja sinus, to rozwiązanie wymuszone również ma postać funkcji sinus (funkcja okresowa, więc nie ma granicy).

**Przykład** dla  $G(s) = 3 / (4s+1)$ :

- gdy  $u(t) = \sin t$ , to  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{3}{4s+1} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} = 0$  ale  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$  nie ma granicy.

W ten sam sposób można wyznaczyć **wzmocnienie układu** przy stałym wymuszeniu (o ile istnieje stan ustalony):  $k_{ukl} = x_k / u_k$ .

Transmitancja, która powstaje na podstawie równania różniczkowego, ma zawsze postać funkcji wymiernej, przy czym w modelach rzeczywistych obiektów stopień licznika jest mniejszy niż stopień mianownika, stąd też istnieje wiele metod analizy i projektowania układów spełniających to założenie.

### 11.1.3. Transmitancja o zadanych własnościach

Podstawowe parametry transmitancji to bieguny, zera i wzmacnienie układu. Znając (lub zakładając) wartości tych parametrów, można odtworzyć odpowiednią transmitancję. Typowe zadania tego typu:

1° Znając tylko bieguny transmitancji ( $p_1 \div p_n$ ), można wyznaczyć najprostszą transmitancję postaci:

$$G(s) = \frac{k}{(s - p_1) \dots (s - p_n)}, \text{ gdzie } k \text{ ma dowolną wartość różną od zera.}$$

Wśród biegunów mogą występować również zespolone pary biegunów.

2° Jeśli oprócz biegunów ( $p_1 \div p_n$ ) znane jest też wzmacnienie układu  $k_{ukl}$ , to najprostszą transmitancją  $G(s)$ , która ma takie własności, musi spełniać równanie, z którego można wyznaczyć wartość wzmacnienia  $k$ :

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \frac{k}{(s - p_1) \dots (s - p_n)} \frac{1}{s} = k_{ukl} \quad \rightarrow \quad k = k_{ukl} (-p_1) \dots (-p_n).$$

3° Jednoznacznie zdefiniowane transmitancji wymaga podania biegunów ( $p_1 \div p_n$ ), wzmacnienia układu  $k_{ukl}$  oraz informacji o zerach transmitancji ( $z_1 \div z_m$ ).

$$\text{Wówczas: } G(s) = k \frac{(s - z_1) \dots (s - z_m)}{(s - p_1) \dots (s - p_n)},$$

$$\text{gdzie } \lim_{s \rightarrow 0} s k \frac{(s - z_1) \dots (s - z_m)}{(s - p_1) \dots (s - p_n)} \frac{1}{s} = k_{ukl} \quad \rightarrow \quad k = k_{ukl} \frac{(-p_1) \dots (-p_n)}{(-z_1) \dots (-z_m)}.$$

Bieguny i wzmacnienie transmitancji wynikają z oczekiwanych własności przebiegów czasowych, podobnie jak w przypadku równań różniczkowych ( $\rightarrow$  4.3.3, 7.5.2). Wpływ zer układu na własności dynamiki najłatwiej jest wykazać podczas analizy częstotliwościowej, co jest tematem rozdziału 14.

## 11.2. Transmitancje układów wielowymiarowych

### 11.2.1. Metody wyznaczania transmitancji [19]

Transmitancja z definicji opisuje układ typu SISO. Jeśli układ ma wiele wejść i wiele wyjść (MIMO), to można wyznaczyć wiele transmitancji. Układ równań różniczkowych, tworzący model MIMO, po zastosowaniu operatora (11-4) staje się układem równań operatorowych. Rozwiązując ten układ dla każdej zmiennej wyjściowej  $x_i$ , otrzymujemy wyrażenie w postaci sumy:

$$x_i(s) = G_{i1}(s)u_1(s) + \dots + G_{im}(s)u_m(s), \quad (11-15)$$

gdzie:  $G_{i1} \div G_{im}$  to transmitancje zmiennej  $x_i$  od poszczególnych wejść  $u_j$ . Zbiór wszystkich transmitancji układu MIMO można zapisać w postaci macierzowej:

$$\mathbf{x}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{u}(s), \quad (11-16)$$

gdzie:  $\mathbf{x}(s)$  i  $\mathbf{u}(s)$  to wektory transformat zmiennych wyjściowych i wejściowych, natomiast  $\mathbf{G}(s)$  nazywa się macierzą transmitancji lub transmitancją macierzową.

Pojęcie **transmitancji macierzowej** wynika z metody wyznaczenia transmitancji dla równań stanu. Równania stanu (8-6) są przekształcone do postaci operatorowej:

$$s\mathbf{x}(s) = \mathbf{A}\mathbf{x}(s) + \mathbf{B}\mathbf{u}(s) \quad (11-17)$$

a następnie wykonane są operacje macierzowe:

$$s\mathbf{x}(s) - \mathbf{A}\mathbf{x}(s) = \mathbf{B}\mathbf{u}(s) \rightarrow \mathbf{x}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}\mathbf{u}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{u}(s). \quad (11-18)$$

Transmitancja macierzowa jest rodzajem operatora macierzowego  $\mathbf{G}(s)$ , który opisuje związek transformaty wektora wejściowego  $\mathbf{u}(s)$  i wyjściowego  $\mathbf{x}(s)$ .

**Przykład:** Układ równań:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + b_1u_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + b_2u_2(t) \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \quad (11-19)$$

można zapisać kolejno w postaci macierzowej (11-17) i (11-18), czyli:

$$s \begin{bmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & s - a_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix}.$$

Wykorzystując ogólny wzór na elementy macierzy odwrotnej (1-10), otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1} \frac{s - a_{22}}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} & (-1)^{1+2} \frac{-a_{21}}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} \\ (-1)^{2+1} \frac{-a_{12}}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} & (-1)^{2+2} \frac{s - a_{11}}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s - a_{22}}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} & \frac{a_{12}}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} \\ \frac{a_{21}}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} & \frac{s - a_{11}}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix},$$

gdzie wyrażenie w mianowniku  $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = (s - a_{11})(s - a_{22}) - a_{12}a_{21}$ .

Ostatecznie po uproszczeniu wyrażeń otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(s - a_{22})b_1}{M(s)} & \frac{a_{12}b_2}{M(s)} \\ \frac{a_{21}b_1}{M(s)} & \frac{(s - a_{11})b_2}{M(s)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix}, \quad (11-20)$$

gdzie:  $M(s) = (s - a_{11})(s - a_{22}) - a_{12}a_{21}$ .

Zastosowanie operatora macierzowego (11-18) w przekształceniach analitycznych wymaga odwracania macierzy (co jest uciążliwe, gdy dotyczy operacji symbolicznych na wyrażeniach) i mianownik wszystkich transmitancji układu, który jest kluczowy w badaniu stabilności, jest obliczany na podstawie jednej operacji (mało przekształceń, ale trudno zweryfikować poprawność obliczeń).

Do analitycznego wyznaczania macierzy transmitancji układu MIMO można zastosować analogiczne metody jak to rozwiązywania układów równań ( $\rightarrow$  1.3.2), na przykład wzory Cramera. Po przekształceniu układu równań różniczkowych do postaci operatorowej, wyrażenia ze zmienną  $s$  oraz transformaty zmiennych wejściowych są traktowane analogicznie jak stałe współczynniki i układ zostaje zapisany w postaci:

$$\mathbf{a}_1 x_1(s) + \mathbf{a}_2 x_2(s) + \dots + \mathbf{a}_n x_n(s) = \mathbf{b}, \quad (11-21)$$

gdzie wektory kolumnowe  $\mathbf{a}_1 \div \mathbf{a}_n$  zawierają wyrażenia ze zmienną  $s$ , a wektor  $\mathbf{b}$  zawiera zmienne transformaty zmiennych wejściowych.

**Przykład:** Układ równań (11-19) przekształcony do postaci operatorowej:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + b_1u_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + b_2u_2(t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} sx_1(s) - a_{11}x_1(s) - a_{12}x_2(s) = b_1u_1(s) \\ sx_2(s) - a_{21}x_1(s) - a_{22}x_2(s) = b_2u_2(s) \end{cases}$$

można zapisać kolejno w postaci macierzowej (11-17) i (11-18), czyli:

$$\begin{bmatrix} s - a_{11} \\ -a_{21} \end{bmatrix} x_1(s) + \begin{bmatrix} -a_{12} \\ s - a_{22} \end{bmatrix} x_2(s) = \begin{bmatrix} b_1u_1(s) \\ b_2u_2(s) \end{bmatrix}.$$

Na podstawie wzorów Cramera (1-12) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\det(\mathbf{b}, \mathbf{a}_2)}{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)} = \frac{\det \begin{bmatrix} b_1u_1(s) & -a_{12} \\ b_2u_2(s) & s - a_{22} \end{bmatrix}}{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)} = \frac{(s - a_{22})b_1u_1(s) + a_{12}b_2u_2(s)}{M(s)} = \frac{(s - a_{22})b_1}{M(s)}u_1(s) + \frac{a_{12}b_2}{M(s)}u_2(s), \\ x_2 &= \frac{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{b})}{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)} = \frac{\det \begin{bmatrix} s - a_{11} & b_1u_1(s) \\ -a_{21} & b_2u_2(s) \end{bmatrix}}{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)} = \frac{(s - a_{11})b_2u_2(s) + a_{21}b_1u_1(s)}{M(s)} = \frac{a_{21}b_1}{M(s)}u_1(s) + \frac{(s - a_{11})b_2}{M(s)}u_2(s) \\ \text{gdzie } M(s) &= \det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \det \begin{bmatrix} s - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & s - a_{22} \end{bmatrix} = (s - a_{11})(s - a_{22}) - a_{12}a_{21} \end{aligned}$$

W ten sposób można przekształcać nie tylko równania stanu, ale także modele zawierające równania wyższych rzędów i pochodne zmiennych wejściowych (przykłady  $\rightarrow$  13.1.3). Metoda nie wymaga odwracania macierzy, ale mianownik wszystkich transmitancji jest obliczany na podstawie jednej operacji, podobnie jak przy zastosowaniu operatora macierzowego.

Alternatywny sposób wyznaczania transmitancji układów wielowymiarowych polega rozwiązaniu układu równań operatorowych poprzez eliminowanie kolejnych zmiennych. Można go zastosować do każdego układu równań bez eliminowania pochodnych wyższego rzędu i pochodnych zmiennych wejściowych.

**Przykład:** Układ równań (11-19) w postaci operatorowej można uporządkować:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + b_1u_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + b_2u_2(t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (s - a_{11})x_1(s) = a_{12}x_2(s) + b_1u_1(s) \\ (s - a_{22})x_2(s) = a_{21}x_1(s) + b_2u_2(s) \end{cases} \quad (11-22)$$

i w celu skrócenia zapisu kolejnych operacji wprowadzić robocze symbole  $M_1(s)$  i  $M_2(s)$ :

$$\begin{cases} M_1(s)x_1(s) = a_{12}x_2(s) + b_1u_1(s) \\ M_2(s)x_2(s) = a_{21}x_1(s) + b_2u_2(s) \end{cases}, \text{ gdzie } \begin{cases} M_1(s) = s - a_{11} \\ M_2(s) = s - a_{22} \end{cases}.$$

Wyznaczając z układu (11-22) jedną ze zmiennych wyjściowych, na przykład  $x_1$ :

$$x_1(s) = \frac{a_{12}x_2(s) + b_1u_1(s)}{M_1(s)} \quad (11-23)$$

i podstawiając do drugiego równania, otrzymujemy równanie z jedną niewiadomą  $x_2$ :

$$M_2(s)x_2(s) = a_{21} \frac{a_{12}x_2(s) + b_1u_1(s)}{M_1(s)} + b_2u_2(s) \quad | \cdot M_1(s) .$$

Obustronne mnożenie przez  $M_1(s)$  pozwala wyeliminować wyrażenia ułamkowe:

$$M_1(s)M_2(s)x_2(s) = a_{21}a_{12}x_2(s) + a_{21}b_1u_1(s) + M_1(s)b_2u_2(s) ,$$

ponieważ ostateczna postać transmitancji powinna mieć postać funkcji wymiernej:

$$x_2(s) = \frac{a_{21}b_1u_1(s) + M_1(s)b_2u_2(s)}{M_1(s)M_2(s) - a_{12}a_{21}} .$$

Podstawiając funkcję  $x_2$  do wyrażenia (11-23), uzyskujemy równanie z niewiadomą  $x_1$ :

$$M_1(s)x_1(s) = a_{12} \frac{a_{21}b_1u_1(s) + M_1(s)b_2u_2(s)}{M_1(s)M_2(s) - a_{12}a_{21}} + b_1u_1(s) \quad | \cdot (M_1(s)M_2(s) - a_{12}a_{21}) .$$

Po wyeliminowaniu mianownika równanie ma postać:

$$M_1(s)(M_1(s)M_2(s) - a_{12}a_{21})x_1(s) = a_{12}a_{21}b_1u_1(s) + a_{12}M_1(s)b_2u_2(s) + (M_1(s)M_2(s) - a_{12}a_{21})b_1u_1(s) .$$

Jeśli wszystkie operacje były wykonane poprawnie, to równanie zawsze można uprościć i otrzymać transmitancję postaci:

$$x_1(s) = \frac{M_2b_1(s)u_1(s) + a_{12}b_2u_2(s)}{M_1(s)M_2(s) - a_{12}a_{21}} .$$

Wszystkie wyznaczone transmitancje dla  $x_1(s)$  i  $x_2(s)$  mają taki sam mianownik  $M(s) = (s - a_{11})(s - a_{22}) - a_{12}a_{21}$ , a ponieważ wyrażenie  $M(s)$  było wyznaczane na dwa sposoby, to oznacza z dużym prawdopodobieństwem, że jest ono poprawne.

Metoda eliminowania kolejnych zmiennych jest bardziej pracochłonna, ale ciąg przekształceń umożliwia kontrolowanie poprawności wykonania operacji (zawsze występują te same formy wyrażeń oraz możliwości upraszczania i porządkowania).

### 11.2.2. Analityczne badanie transmitancji układów MIMO

Transmitancja nie zależy od metody przekształcenia układu równań różniczkowych, co można wykorzystać do weryfikacji poprawności obliczeń. Poza tym, podczas przekształceń, można zauważyć powtarzające się schematy przekształceń charakterystyczne dla układów typu kaskada niewspółdziałająca lub współdziałająca ( $\rightarrow$  10.1). Poniżej w tabeli 11-2, przedstawiono porównanie przekształceń za pomocą: a) operatora macierzowego, b) wzorów Cramera, c) eliminowania kolejnych zmiennych. Ostateczna postać transmitancji oczywiście nie zależy od metody przekształcania, ale warto zwrócić uwagę na miejsce występowanie wielomianów  $M_1$  i  $M_2$ , związanych z poszczególnymi równaniami stanu i charakterystyczne dla każdego typu kaskady.

Tabela 11-2. Transmitancje kaskady niewspółdziałającej i współdziałającej (por. tabela 10-1)

|    | Kaskada niewspółdziałająca                                                                                                                                                                                     | Kaskada współdziałająca                                                                                                                                                                                              |
|----|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|    | $\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t) + b_1u_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + b_2u_2(t) \end{cases}$                                                                                  | $\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + b_1u_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + b_2u_2(t) \end{cases}$                                                                         |
|    | $M_1 = s - a_{11}, M_2 = s - a_{22}, M = M_1M_2 - a_{12}a_{21}$                                                                                                                                                |                                                                                                                                                                                                                      |
| a) | $\begin{bmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ -a_{21} & M_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 & -a_{12} \\ -a_{21} & M_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix}$ |
| b) | $\begin{bmatrix} M_1 \\ -a_{21} \end{bmatrix} x_1(s) + \begin{bmatrix} 0 \\ M_2 \end{bmatrix} x_2(s) = \begin{bmatrix} b_1u_1(s) \\ b_2u_2(s) \end{bmatrix}$                                                   | $\begin{bmatrix} M_1 \\ -a_{21} \end{bmatrix} x_1(s) + \begin{bmatrix} -a_{12} \\ M_2 \end{bmatrix} x_2(s) = \begin{bmatrix} b_1u_1(s) \\ b_2u_2(s) \end{bmatrix}$                                                   |
| c) | $\begin{cases} M_1x_1(s) = b_1u_1(s) \\ M_2x_2(s) = a_{21}x_1(s) + b_2u_2(s) \end{cases}$                                                                                                                      | $\begin{cases} M_1x_1(s) = a_{12}x_2(s) + b_1u_1(s) \\ M_2x_2(s) = a_{21}x_1(s) + b_2u_2(s) \end{cases}$                                                                                                             |
|    | $x_1(s) = \frac{b_1}{M_1}u_1(s)$ $x_2(s) = \frac{b_1a_{21}}{M_1M_2}u_1(s) + \frac{b_2}{M_2}u_2(s)$                                                                                                             | $x_1(s) = \frac{b_1M_2}{M(s)}u_1(s) + \frac{a_{12}b_2}{M(s)}u_2(s)$ $x_2(s) = \frac{b_1a_{21}}{M(s)}u_1(s) + \frac{b_2M_1}{M(s)}u_2(s)$                                                                              |
|    | $x_1(s) = G_{11}(s)u_1(s)$ $x_2(s) = G_{21}(s)u_1(s) + G_{22}(s)u_2(s)$                                                                                                                                        | $x_1(s) = G_{11}(s)u_1(s) + G_{12}(s)u_2(s)$ $x_2(s) = G_{21}(s)u_1(s) + G_{22}(s)u_2(s)$                                                                                                                            |

W celu skrócenia zapisu w tabeli zastosowano oznaczenia:  $M_1 = M_1(s)$ ,  $M_2 = M_2(s)$ ,  $M = M(s)$ .

Jeśli układ jest typu kaskada współdziałająca, to wszystkie transmitancje układu mają taki sam mianownik, więc równanie charakterystyczne, które jest podstawą badania stabilności, można wyznaczyć na podstawie mianownika dowolnej transmitancji ( $M(s) = 0$ ). Jeśli układ jest obiektem typu kaskada niewspółdziałająca (układ unilateralny), to wystąpią transmitancje różnego rzędu (różny stopień wielomianu mianowników). Do wyznaczenia równania charakterystycznego układu należy wybrać transmitancje wyższego rzędu, które opisują cały układ. Identyczne transmitancje powstają na podstawie pojedynczych równań (tabela 4-7).

Obliczenie punktu równowagi układu MIMO odbywa się analogicznie jak układu SISO, czyli na podstawie twierdzenia o wartości końcowej (11-14), ale z uwzględnieniem wszystkich wejść. Na przykład dla kaskady współdziałającej z tabeli 11-2 współrzędne punktu równowagi obliczamy na podstawie wyrażeń:

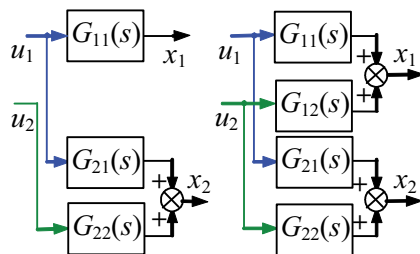
$$\begin{aligned} x_{10} &= \lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s x_1(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s G_{11}(s) u_1(s) + \lim_{s \rightarrow 0} s G_{12}(s) u_2(s), \\ x_{20} &= \lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s x_2(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s G_{21}(s) u_1(s) + \lim_{s \rightarrow 0} s G_{22}(s) u_2(s), \end{aligned} \quad (11-24)$$

o ile granice dla  $x_1(t)$  i  $x_2(t)$  istnieją (układ ma punkt równowagi).

### 11.2.3. Schemat blokowy transmitancji układu MIMO

Pełny model MIMO składa się z kilku transmitancji, które opisują relacje między każdym wejściem i wyjściem obiektu i które można użyć do konstrukcji schematu blokowego modelu. W ten sposób wykonano (rys. 11-2) schematy kaskad, opisanych w tabeli 11-2. Schematy nie odwzorowują wewnętrznej struktury obiektu – nie widać, że zmienne stanu ( $x_1$ ,  $x_2$ ) wpływają na siebie nawzajem. Informacja o wewnętrznych sprzężeniach jest zawarta w każdej z transmitancji, szczególnie w mianowniku, który wyznacza równanie charakterystyczne. Ze schematu wynika, że podstawowe badania dynamiki, które polegają zazwyczaj na obserwowaniu tylko wybranych sygnałów wyjściowych, można realizować na wybranych transmitancjach, ponieważ:

- skokową/impulsową zmianę sygnału podaje się zawsze tylko na jednym, wybranym wejściu,
- wartości początkowe wszystkich sygnałów wejściowych ( $u_1$ ,  $u_2$ ) muszą mieć wartość zero (zerowe warunki początkowe wynikają z definicji transmitancji).



Rys. 11-2. Schematy blokowe kaskad (tabela 11-2)

## 12. Badania symulacyjne na podstawie transmitancji

*czyli znów to samo, ale symulacyjnie*

### 12.1. Wprowadzenie

Zastosowanie transmitancji znacznie ułatwia podstawowe badania symulacyjne układów liniowych, ponieważ:

- często wystarcza badanie relacji między jednym wejściem i jednym wyjściem,
- łatwo jest obliczać i konstruować schematy złożonych obiektów.

Badania z wymuszeniem skokowym i impulsowym można prowadzić z wykorzystaniem schematów graficznych (→ 12.2.1) lub funkcji (→ 12.2.2). Można zdefiniować dowolną transmitancję, ale symulacje można wykonać jedynie dla transmitancji, w której stopień licznika jest co najwyżej równy stopniowi mianownika.

### 12.2. Definicja transmitancji w blokach i funkcjach

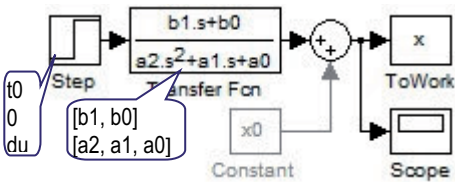
#### 12.2.1. Specjalistyczne bloki na schemacie graficznym

Przygotowanie schematu symulacyjnego na podstawie transmitancji opiera się na specjalnych blokach (), które pozwalają definiować typowe transmitancje, czyli funkcje wymierne zmiennej  $s$ .

Tabela 12-1. Podstawowe bloki do definiowania modeli w postaci transmitancji

|               | Matlab (Simulink) | Scilab (Xcos) |
|---------------|-------------------|---------------|
| transmitancja | Transfer Fcn      | CLR           |

Podstawowy blok Transfer Fcn (rys. 12-1) umożliwia definiowanie modelu SISO:



Rys. 12-1. Blok transmitancji (Matlab)

$$x(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0} u(s), \quad (12-1)$$

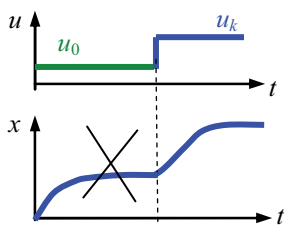
przy czym zawsze  $m \leq n$ . Współczynniki licznika i mianownika są podstawiane do parametrów bloku w postaci wektorów wartości  $[b1, b0]$ ,  $[a4, a3, a2, a1, a0]$ , które można zdefiniować wprost na liście parametrów

lub przekazać za pomocą zmiennych wektorowych. Prezentowany powyżej schemat jest przygotowany do badania reakcji na wymuszenie skokowe  $du$  w zadanym punkcie pracy  $(u0, x0)$ . Uwzględnia on fakt, że blok transmitancji nie zawiera warunków początkowych<sup>11</sup>, co faktycznie oznacza zerowe warunki początkowe (zgodnie z definicją

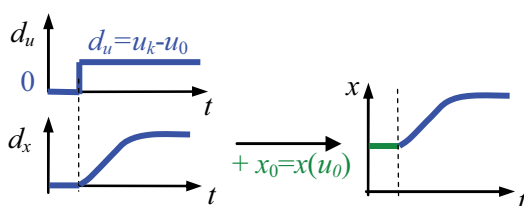
<sup>11</sup> Matlab(N) oferuje blok transmitancji bez tego ograniczenia, jednak jest to de facto blok, który jedynie nie ujawnia ograniczeń (stosuje konwersję na równania stanu).

transmitancji). Jeśli więc symulacja ma się rozpoczynać od stanu równowagi, to wartość początkowa  $u(t)$  musi być równa zero. Poprawne badanie reakcji układu na dowolną skokową zmianę wartości wejściowej w dowolnym punkcie pracy można zrealizować na dwa sposoby ( $\rightarrow$  5.2.3):

- zdefiniować skok jako zmianę  $u_0 \rightarrow u_k$ , uruchomić symulację od zerowych (domyślnych) warunków początkowych i zapewnić aby skokowa zmiana następowała dopiero po tym, jak układ osiągnie stan równowagi dla początkowej wartości wymuszenia  $u_0$  (rys. 12-2),
- zdefiniować skok jako  $0 \rightarrow d_u$  (gdzie  $d_u = u_k - u_0$ ), uruchomić symulację od zerowych (domyślnych) warunków początkowych, i przesunąć sygnał wyjściowy z bloku transmitancji ( $d_x$ ) do punktu równowagi  $x_0$ , wyznaczonego z równania statycznego dla początkowej wartości  $u_0$  (rys. 12-3).



Rys. 12-2. Reakcja bloku transmitancji ( $x$ ) na zmianę wymuszenia  $u_0 \rightarrow u_k$ .



Rys. 12-3. Reakcja bloku transmitancji ( $d_x$ ) na skokową zmianę wymuszenia ( $d_u$ ) i przesunięcie odpowiedzi do punktu  $x_0(u_0)$ .

Podając skokową zmianę  $0 \rightarrow d_u$  na blok transmitancji, otrzymujemy na wyjściu sygnał  $d_x$ , który można interpretować jako reakcję względem stanu równowagi ( $\rightarrow$  4.2.2). Takie badanie wystarcza do analizy układu liniowego, ponieważ jego własności dynamiki nie zależą od punktu pracy. Przesunięcie sygnału do punktu równowagi  $x_0$  stosuje się na przykład podczas porównania wykresów z wartościami pomiarowymi.

Omówiony sposób realizacji badań dotyczył modeli SISO i transmitancji w postaci funkcji wymiernej (12-1). Równoważne postacie transmitancji:

$$G(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0} = k \frac{(s - z_1) \dots (s - z_m)}{(s - p_1) \dots (s - p_n)} = \frac{k_1}{T_1 s + 1} \cdot \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \cdot \dots \quad (12-2)$$

można zdefiniować przez wymnożenie czynników i wyznaczenie współczynników wielomianów licznika i mianownika, albo jako szeregowe połączenie prostych transmitancji. Analogicznie wykonywane są też badania modeli MIMO – na podstawie wybranej transmitancji lub przez konstrukcję i badanie schematu blokowego układu MIMO ( $\rightarrow$  11.2.3).

### 12.2.2. Specjalistyczne funkcje w skryptach

Podstawowe badania dynamiki modeli opisanych za pomocą transmitancji można zrealizować za pomocą prostych funkcji (tabela 12-2). Podstawowy sposób definicji transmitancji postaci (12-2) opiera się na podstawie wartości współczynników wielo-

mianu w liczniku i mianowniku (funkcja `tf`) lub na podstawie wartości zer, biegunów i wzmocnienia (funkcja `zpk`). Jest jeszcze jeden sposób definicji transmitancji (w Scilabie jedyny sposób) – w oparciu o wcześniejszą definicję zmiennej  $s$ , której można następnie używać do zapisania wyrażenia dla każdej postaci transmitancji (12-2). Zdefiniowany model jest zapamiętany w środowisku programu pod wybraną nazwą jako zmienna typu obiekt LTI. Parametry i ograniczenia funkcji są takie same jak analogicznych bloków na schematach.

Tabela 12-2. Wybrane funkcje do definiowania i badania transmitancji

|                         | Matlab (Control) / Octave (Control)                                                                                                      | Scilab                                                                                                                         |
|-------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Definicja transmitancji | <code>model = tf(L, M)</code><br><code>model = zpk(Z, P, k)</code>                                                                       | <code>model = zpk([1 1],[1 2 3],3,"c")</code>                                                                                  |
|                         | <code>s = tf('s');</code><br><code>model = 1/(1+2*s);</code>                                                                             | <code>s = poly(0,'s');</code><br><code>model = syslin('c', 1, (2*s+1));</code><br><code>model = syslin('c', 1/(2*s+1));</code> |
| Połączenia              | <code>+</code> , <code>*</code> , <code>\</code> , <code>/</code><br><code>parallel</code> , <code>series</code> , <code>feedback</code> | <code>+</code> , <code>*</code> , <code>/</code> .                                                                             |
| Odpowiedzi czasowe      | <code>step(model)</code><br><code>impuse(model)</code>                                                                                   | <code>plot(t, csim('step',t,model))</code><br><code>plot(t, csim('impulse',t,model))</code>                                    |

gdzie: `model` – nazwa modelu; `L`, `M` – wektory współczynników licznika i mianownika;  
`Z`, `P` – wektory zer i biegunów; `k` – wzmocnienie, `t` – wektor czasu.

Poza definicją prostych transmitancji można także konstruować złożone schematy blokowe, do czego służą operatory (np. `+`, `*`) i funkcje (np. `parallel`, `series`, `feedback`). Zdefiniowane w ten sposób modele można badać, generując wykresy odpowiedzi skokowych lub impulsowych (`step`, `impulse`), co pozwala zapisać cały program badań w prostych skryptach (tabela 12-3). Odpowiedzi na dowolne wymuszenia skokowe można uzyskać przez skalowanie i przesuwanie (analogicznie jak w przypadku równań stanu – tabela 9-3).

Tabela 12-3. Przykład skryptu do definiowania i badania transmitancji

| Matlab / Octave                                                                           | Scilab                                                                                                                                                |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <code>s = tf('s');</code><br><code>G1 = 1 / (1+2*s);</code><br><br><code>step(G1);</code> | <code>s = poly(0,'s');</code><br><code>G1 = syslin('c', 1/(2*s+1));</code><br><code>t = 0:0.05:5;</code><br><code>plot(t,csim('step', t, G1));</code> |

Badania symulacyjne modeli w postaci transmitancji zazwyczaj ogranicza się do wybranych transmitancji układu, czyli modeli SISO. Możliwość definiowania modeli MIMO zależy od programu symulacyjnego – w Matlabie jest to możliwe poprzez podanie parametrów funkcji `tf`, na przykład dla układów z tabeli 11-2:

$$\text{model} = \text{tf}(\{L11, L12; L21, L22\}, \{M, M; M, M\}),$$

gdzie `L11`, `L12`, `L21`, `L22`, `M` to wektory współczynników w licznikach i mianownikach.

### 12.2.3. Funkcje wspomagające analizę

Modele zdefiniowane jako obiekty LTI, czyli równania stanu i transmitancje, można wzajemnie konwertować na równoważne postacie (tabela 12-4).

Tabela 12-4. Konwersja transmitancji i równań stanu (obiektów LTI)

| Konwersja:    | Matlab (Control) / Octave (Signal)                                                     | Scilab                                                                                 |
|---------------|----------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------|
| równań stanu  | <code>model_tf = ss2tf(model_ss)</code>                                                | <code>model_tf = ss2tf(model_ss)</code>                                                |
| transmitancji | <code>model_ss = tf2ss(model_tf)</code><br><code>model_zpk = tf2zk(model_tf)</code>    | <code>model_ss = tf2ss(model_tf)</code>                                                |
| transmitancji | <code>model_ss = zpk2ss(model_zpk)</code><br><code>model_tf = zpk2tf(model_zpk)</code> | <code>model_ss = zpk2ss(model_zpk)</code><br><code>model_tf = zpk2tf(model_zpk)</code> |

W Matlabie każda z funkcji `ss`, `tf`, `zpk` służy zarówno do definicji (jeśli parametrami są macierze/wektory współczynników), jak i do konwersji (jeśli parametrem jest nazwa obiektu LTI). Przy okazji konwersji transmitancji i równań stanu przez funkcję `zpk` (`zpk2ss`, `zpk2tf`) wyznaczane są podstawowe parametry modelu: wzmocnienie układu, bieguny i zera, zgodnie z (12-2).

Funkcje do definiowania, konwersji i analizy modeli dynamiki (obiekty LTI) są w Matlabie częścią biblioteki Control Toolbox, który zawiera cały szereg funkcji wspomagających analizę i projektowanie układów dynamiki. Są wśród nich zarówno funkcje do wyznaczania podstawowych parametrów dynamiki modelu (tabela 12-5), jak i różne funkcje wspomagające projektowanie układów sterowania obiektem (procesem) technologicznym.

Tabela 12-5. Wybrane funkcje wspomagające badanie transmitancji

|                          | Matlab (Control) / Octave (Control)                 | Scilab                              |
|--------------------------|-----------------------------------------------------|-------------------------------------|
| Bieguny i zera układu    | <code>pole(model)</code> , <code>zero(model)</code> | –                                   |
| Wzmocnienie              | <code>dcgain(model)</code>                          | –                                   |
| Tłumienie                | <code>damp(model)</code>                            | <code>[wn,ksi] = damp(model)</code> |
| Położenie biegunów i zer | <code>pzmap(model)</code>                           | –                                   |

gdzie `model` – nazwa modelu (obektu LTI).

## 13. Analiza i projektowanie na podstawie transmitancji

*czyli czas na aplikacje i interpretacje*

### 13.1. Przykłady układów

#### 13.1.1. Kaskady zbiorników

Kaskady zbiorników opisane za pomocą równań stanu (tabela 10-2), można analizować także za pomocą transmitancji. Przekształcenie rozpoczyna się od wprowadzenia równań operatorowych i uporządkowanie ich zależnie od wybranej metody: a) operatora macierzowego, b) wzorów Cramera, c) eliminowania zmiennych ( $\rightarrow$  11.2.1).

Dla skrócenia zapisu równań operatorowych poniżej zastosowano proste symbole transform:  $h_1 = h_1(s)$ ,  $h_2 = h_2(s)$ ,  $f_{we1} = f_{we1}(s)$ ,  $f_{we2} = f_{we2}(s)$ ,  $f_{wy} = f_{wy}(s)$ .

**1° Kaskada niewspółdziałająca (rys. 10-1):**

$$\begin{cases} A_1 \dot{h}_1(t) = f_{we1}(t) - a_1 h_1(t) \\ A_2 \dot{h}_2(t) = f_{we2}(t) + a_1 h_1(t) - a_2 h_2(t) \end{cases} \quad (13-1)$$

$$a) \quad s \begin{bmatrix} A_1 h_1 \\ A_2 h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & 0 \\ a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{we1} \\ f_{we2} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ -a_1 & M_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{we1} \\ f_{we2} \end{bmatrix},$$

$$b) \quad \begin{cases} sA_1 h_1 + a_1 h_1 = f_{we1} \\ sA_2 h_2 - a_1 h_1 + a_2 h_2 = f_{we2} \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} M_1 \\ -a_1 \end{bmatrix} h_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ M_2 \end{bmatrix} h_2 = \begin{bmatrix} f_{we1} \\ f_{we2} \end{bmatrix},$$

$$c) \quad \begin{cases} (A_1 s + a_1) h_1 = f_{we1} \\ (A_2 s + a_2) h_2 = a_1 h_1 + f_{we2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} M_1 h_1 = f_{we1} \\ M_2 h_2 = a_1 h_1 + f_{we2} \end{cases},$$

gdzie:  $M_1 = A_1 s + a_1$ ,  $M_2 = A_2 s + a_2$ .

**2° Kaskada zbiorników połączonych przewodem (rys. 10-2):**

$$\begin{cases} A_1 \dot{h}_1(t) = f_{we1}(t) - a_1 (h_1(t) - h_2(t)) \\ A_2 \dot{h}_2(t) = f_{we2}(t) + a_1 (h_1(t) - h_2(t)) - a_2 h_2(t) \end{cases} \quad (13-2)$$

$$a) \quad s \begin{bmatrix} A_1 h_1 \\ A_2 h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & a_1 \\ a_1 & -(a_1 + a_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{we1} \\ f_{we2} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 & -a_1 \\ -a_1 & M_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{we1} \\ f_{we2} \end{bmatrix},$$

$$b) \quad \begin{cases} sA_1 h_1 + a_1 h_1 - a_1 h_2 = f_{we1} \\ sA_2 h_2 - a_1 h_1 + (a_1 + a_2) h_2 = f_{we2} \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} M_1 \\ -a_1 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} -a_1 \\ M_2 \end{bmatrix} x_2 = \begin{bmatrix} f_{we1} \\ f_{we2} \end{bmatrix},$$

$$c) \quad \begin{cases} (A_1 s + a_1) h_1 = a_1 h_2 + f_{we1} \\ (A_2 s + a_1 + a_2) h_2 = a_1 h_1 + f_{we2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} M_1 h_1 = a_1 h_2 + f_{we1} \\ M_2 h_2 = a_1 h_1 + f_{we2} \end{cases},$$

gdzie:  $M_1 = A_1 s + a_1$ ,  $M_2 = A_2 s + a_1 + a_2$ ,

**3° Kaskada zbiorników połączonych przewodem i z pompą wyjściową (rys. 10-3):**

$$\begin{cases} A_1 \dot{h}_1(t) = f_{we1}(t) - a_1 (h_1(t) - h_2(t)) \\ A_2 \dot{h}_2(t) = a_1 (h_1(t) - h_2(t)) + f_2(t), \quad f_2(t) = f_{we2}(t) - f_{wy}(t) \end{cases} \quad (13-3)$$

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad s \begin{bmatrix} A_1 h_1 \\ A_2 h_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -a_1 & a_1 \\ a_1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{we1} \\ f_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 & -a_1 \\ -a_1 & M_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{we1} \\ f_2 \end{bmatrix}, \\
 \text{b)} \quad \begin{cases} sA_1 h_1 + a_1 h_1 - a_1 h_2 = f_{we1} \\ sA_2 h_2 - a_1 h_1 + a_1 h_2 = f_2 \end{cases} &\rightarrow \begin{bmatrix} M_1 \\ -a_1 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} -a_1 \\ M_2 \end{bmatrix} x_2 = \begin{bmatrix} f_{we1} \\ f_2 \end{bmatrix}, \\
 \text{c)} \quad \begin{cases} (A_1 s + a_1) h_1 = a_1 h_2 + f_{we1} \\ (A_2 s + a_1) h_2 = a_1 h_1 + f_2 \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} M_1 h_1 = a_1 h_2 + f_{we1} \\ M_2 h_2 = a_1 h_1 + f_2 \end{cases},
 \end{aligned}$$

gdzie:  $M_1 = A_1 s + a_1$ ,  $M_2 = A_2 s + a_1$

Porównując formy równań operatorowych, można wskazać charakterystyczne cechy poszczególnych kaskad, a także podobieństwa na kolejnych etapach przekształcania. W tabeli 13-1 przedstawiono rezultaty tych operacji.

Tabela 13-1. Porównanie transmitancji kaskad zbiorników (por. tabela 11-2, tabela 10-2)

| Rys. 10-1 (13-1)                                                                                                      | Rys. 10-2 (13-2)                                                                                                                                            | Rys. 10-3 (13-3)                                                          |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|
| K. niewspółdziałająca                                                                                                 | Kaskada współdziałająca                                                                                                                                     |                                                                           |
| $h_1(s) = G_{11}(s)f_{we1}(s) + G_{12}(s)f_2(s)$ $h_2(s) = G_{21}(s)f_{we1}(s) + G_{22}(s)f_2(s)$                     |                                                                                                                                                             |                                                                           |
| $M_1 = A_1s + a_1, M_2 = A_2s + a_2$<br>$f_2(s) = f_{we2}(s)$                                                         | $M_1 = A_1s + a_1, M_2 = A_2s + a_1 + a_2$<br>$f_2(s) = f_{we2}(s)$                                                                                         | $M_1 = A_1s + a_1, M_2 = A_2s + a_1$<br>$f_2(s) = f_{we2}(s) - f_{wy}(s)$ |
| $G_{11}(s) = \frac{1}{M_1}, \quad G_{12}(s) = 0$<br>$G_{21}(s) = \frac{a_1}{M_1M_2}, \quad G_{22}(s) = \frac{1}{M_2}$ | $G_{11}(s) = \frac{a_1}{M}, \quad G_{12}(s) = \frac{M_1}{M}$<br>$G_{21}(s) = \frac{M_2}{M}, \quad G_{22}(s) = \frac{a_1}{M}$<br>gdzie: $M = M_1M_2 - a_1^2$ |                                                                           |
| $M_1M_2 = (A_1s+a_1)(A_2s+a_2)$                                                                                       | $M = A_1A_2s^2 + (A_1(a_1+a_2)+A_2a_1)s+a_1a_2$                                                                                                             | $M = A_1A_2s^2 + a_1(A_1+A_2)s$                                           |

W celu skrócenia zapisu w tabeli zastosowano oznaczenia:  $M_1 = M_1(s)$ ,  $M_2 = M_2(s)$ ,  $M = M(s)$ .

Równania charakterystyczne kaskad są identyczne jak wyznaczone wcześniej na podstawie równań stanu (tabela 10-2). Do rozważenia pozostaje wpływ zer, które pojawiają się w transmitancjach kaskady współdziałającej, a które są związane z wielomianami  $M_1$  i  $M_2$  ( $\rightarrow$  13.2.2).

### 13.1.2. Obiekty cieplne

Równania stanu przykładowych kaskad obiektów cieplnych ( $\rightarrow$  10.2.2) zostaną podane przekształceniu na równania operatorowe.

W celu skrócenia zapisu równań operatorowych poniżej zastosowano proste symbole transformacji:  $T_1 = T_1(s)$ ,  $T_2 = T_2(s)$ ,  $T_w = T_w(s)$ ,  $T_{zew} = T_{zew}(s)$ .

1° Układ pomieszczeń połączonych przewodem (rys. 10-4) jest opisany układem :

$$\begin{cases} C_{v1} \dot{T}_1(t) = K_f (T_w(t) - T_1(t)) - K_1 (T_1(t) - T_{zew}(t)) \\ C_{v2} \dot{T}_2(t) = K_f (T_1(t) - T_2(t)) - K_2 (T_2(t) - T_{zew}(t)) \end{cases} \quad (13-4)$$

$$\begin{cases} (C_{v1}s + K_f + K_1)T_1 = K_f T_w + K_1 T_{zew} \\ (C_{v2}s + K_f + K_2)T_2 = K_f T_1 + K_2 T_{zew} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} M_1 T_1 = K_f T_w + K_1 T_{zew} \\ M_2 T_2 = K_f T_1 + K_2 T_{zew} \end{cases},$$

gdzie:  $M_1 = C_{v1}s + K_f + K_1$ ,  $M_2 = C_{v2}s + K_f + K_2$ .

2° Model układu pomieszczeń ze wspólną ścianą (rys. 10-5) tworzą równania:

$$\begin{cases} C_{v1}\dot{T}_1(t) = K_f(T_w(t) - T_1(t)) - K_1(T_1(t) - T_{zew}(t)) - K_3(T_1(t) - T_2(t)) \\ C_{v2}\dot{T}_2(t) = K_f(T_1(t) - T_2(t)) - K_2(T_2(t) - T_{zew}(t)) + K_3(T_1(t) - T_2(t)) \end{cases} \quad (13-5)$$

$$\begin{cases} (C_{v1}s + K_f + K_1 + K_3)T_1 = K_3 T_2 + K_f T_w + K_1 T_{zew} \\ (C_{v2}s + K_f + K_2 + K_3)T_2 = (K_f + K_3)T_1 + K_2 T_{zew} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} M_1 T_1 = K_3 T_2 + K_f T_w + K_1 T_{zew} \\ M_2 T_2 = (K_f + K_3)T_1 + K_2 T_{zew} \end{cases},$$

gdzie:  $M_1 = C_{v1}s + K_f + K_1 + K_3$ ,  $M_2 = C_{v2}s + K_f + K_2 + K_3$ .

Wynikiem dalszych operacji są transmitancje o mianownikach typowych dla kaskady niewspółdziałającej i współdziałającej (tabela 13-2).

Tabela 13-2. Porównanie transmitancji kaskad zbiorników (por. tabela 11-2, tabela 10-3)

| Rys. 10-4 (13-1)                                                                                                                                       | Rys. 10-2 (13-2)                                                                                                                                                                                                            |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Kaskada niewspółdziałająca                                                                                                                             | Kaskada współdziałająca                                                                                                                                                                                                     |
| $T_1(s) = G_{11}(s)T_w(s) + G_{12}(s)T_{zew}(s)$<br>$T_2(s) = G_{21}(s)T_w(s) + G_{22}(s)T_{zew}(s)$                                                   |                                                                                                                                                                                                                             |
| $M_1 = C_{v1}s + K_f + K_1$ , $M_2 = C_{v2}s + K_f + K_2$                                                                                              | $M_1 = C_{v1}s + K_f + K_1 + K_3$ , $M_2 = C_{v2}s + K_f + K_2 + K_3$                                                                                                                                                       |
| $G_{11}(s) = \frac{K_f}{M_1}$ , $G_{12}(s) = \frac{K_1}{M_1}$<br>$G_{21}(s) = \frac{K_f^2}{M_1 M_2}$ , $G_{22}(s) = \frac{K_f K_1 + K_2 M_1}{M_1 M_2}$ | $G_{11}(s) = \frac{c_p f_{m0} M_2}{M}$ , $G_{12}(s) = \frac{K_2 K_3 + K_1 M_2}{M}$<br>$G_{21}(s) = \frac{K_f (K_f + K_3)}{M}$ , $G_{22}(s) = \frac{(K_f + K_3) K_1 + K_2 M_1}{M}$<br>gdzie: $M = M_1 M_2 - (K_f + K_3) K_3$ |

W celu skrócenia zapisu w tabeli zastosowano oznaczenia:  $M_1 = M_1(s)$ ,  $M_2 = M_2(s)$ ,  $M = M(s)$ .

Równania charakterystyczne kaskad są identyczne jak wyznaczone wcześniej na podstawie równań stanu (tabela 10-3). Należy jedynie przeanalizować wpływ zer, które pojawiają się w transmitancjach obu kaskad ( $\rightarrow$  13.2.2).

### 13.1.3. Układy mechaniczne

Układ mechaniczny, który zawiera zarówno masy, jak i elementy sprężyste, jest opisywany modelem dość dużego rzędu. Jeśli model ten ma postać równań stanu, to prowadzenie badań analitycznych, które wiążą się z obliczaniem wyznaczników macierzy jest pracochłonne. Znacznie prostsza jest operatorowa metoda wyznaczania równania charakterystycznego (wyznaczania transmitancji).

Dla przykładu rozważymy ponownie różne warianty liniowego układu mechanicznego z rozdziału 10.3.1. Po przekształceniu układu równań różniczkowych na układ równań operatorowych i wprowadzeniu oznaczeń  $M_1$  i  $M_2$  dla wielomianów związa-

nych z poszczególnymi równaniami stanu (tabela 13-3), widoczne staje się podobieństwo do równań współdziałającej kaskady zbiorników (tabela 13-1).

Tabela 13-3. Porównanie transmitancji układu mechanicznego (rys. 10-6)

| Rys. 10-6, przypadek (10-11)                                                                                                                                                  | Rys. 10-6, przypadek (10-15)                                                                                                                          |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1(t) + b_1 \dot{x}_1(t) + c_1 x_1 + c_2 (x_1(t) - x_2(t)) = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2(t) + b_2 \dot{x}_2(t) + c_2 (x_2(t) - x_1(t)) = F(t) \end{cases}$ | $\begin{cases} b_1 \dot{x}_1(t) + c_1 x_1(t) + c_2 (x_1(t) - x_2(t)) = 0 \\ b_2 \dot{x}_2(t) + c_2 (x_2(t) - x_1(t)) = F(t) \end{cases}$              |
| $\begin{cases} (m_1 s^2 + b_1 s + c_1 + c_2) x_1(s) - c_2 x_2(s) = 0 \\ -c_2 x_1(s) + (m_2 s^2 + b_2 s + c_2) x_2(s) = F(s) \end{cases}$                                      | $\begin{cases} (b_1 s + c_1 + c_2) x_1(s) - c_2 x_2(s) = 0 \\ -c_2 x_1(s) + (b_2 s + c_2) x_2(s) = F(s) \end{cases}$                                  |
| $\begin{cases} M_1 x_1(s) - c_2 x_2(s) = 0 \\ -c_2 x_1(s) + M_2 x_2(s) = F(s) \end{cases}$<br>gdzie: $M_1 = m_1 s^2 + b_1 s + c_1 + c_2$ ,<br>$M_2 = m_2 s^2 + b_2 s + c_2$   | $\begin{cases} M_1 x_1(s) - c_2 x_2(s) = 0 \\ -c_2 x_1(s) + M_2 x_2(s) = F(s) \end{cases}$<br>gdzie: $M_1 = b_1 s + c_1 + c_2$<br>$M_2 = b_2 s + c_2$ |
| $x_1(s) = G_{12}(s)F(s), \quad x_2(s) = G_{22}(s)F(s)$<br>$x_1(s) = \frac{M_1}{M} F(s), \quad x_2(s) = \frac{c_2}{M} F(s)$<br>gdzie: $M = M_1 M_2 - c_2^2$                    |                                                                                                                                                       |
| $M = (m_1 s^2 + b_1 s + c_1 + c_2)(m_2 s^2 + b_2 s + c_2) - c_2^2$                                                                                                            | $M = (b_1 s + c_1 + c_2)(b_2 s + c_2) - c_2^2$                                                                                                        |

W celu skrócenia zapisu zastosowano oznaczenia:  $M_1 = M_1(s)$ ,  $M_2 = M_2(s)$ ,  $M = M(s)$ .

W obu przypadkach wyznaczenie transmitancji polega na rozwiązaniu takiego samego układu dwóch równań, co wynika z liczby punktów bilansowych w układzie i nie zależy od wariantu założeń dotyczących mas i tarcia. Ostatecznie równanie charakterystyczne można wyznaczyć na podstawie jednej wybranej transmitancji, a dokładniej na podstawie mianownika wspólnego dla wszystkich transmitancji układu.

Jeśli w badanym układzie mechanicznym nie ma zewnętrznej siły wymuszającej (brak zmiennej wejściowej), to tym samym nie można wyznaczyć transmitancji. Jednak zazwyczaj układy mechaniczne są obiektami typu kaskada współdziałająca (zbudowanie kaskady niewspółdziałającej wymaga zastosowania specjalnego mechanizmu – jednokierunkowego sprzęgła), więc można założyć występowanie zewnętrznej siły w dowolnym punkcie bilansowym, wyznaczyć transmitancje i równanie charakterystyczne układu, ponieważ wszystkie transmitancje kaskady współdziałającej mają taki sam mianownik (to samo równanie charakterystyczne).

### 13.1.4. Obwody elektryczne

Modele dynamiki w postaci transmitancji są powszechnie stosowane do opisu obwodów elektrycznych, ponieważ zazwyczaj są to układy liniowe. Podstawą do wyznaczania transmitancji są równania operatorowe, które wynikają z przekształcenia równań różniczkowych (różniczkowo-całkowych) opisujących obwód, lub powstają etapie konstrukcji dzięki zastosowaniu impedancji, czyli wprowadzeniu przekształcenia La-

place'a na poziomie opisu poszczególnych elementów ( $\rightarrow$  2.5). Zróznicowane formy równań opisujących obwody elektryczne nie mają znaczenia dla transmitancji, które wynikają z przekształcenia tych równań, co ilustrują przykłady przedstawione w tabeli 13-4.

Tabela 13-4. Porównanie transmitancji modeli obwodów elektrycznych (por. tabela 10-4)

|           | Rys. 10-7 (obwód 1)                                                                                                                                                                                                                 | Rys. 10-8 (obwód 2)                                                                                                                                                              |
|-----------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $1^\circ$ | $\begin{cases} 0 = sL_1i_1 + R_1i_1 + \frac{1}{sC}(i_1 - i_2) + \frac{1}{sC_1}i_1 \\ e = sL_2i_2 + R_2i_2 + \frac{1}{sC}(i_2 - i_1) \end{cases}$                                                                                    | $\begin{cases} 0 = sL_1i_1 + R_1i_1 + \frac{1}{sC}(i_1 - i_2) \\ e = sL_2i_2 + R_2i_2 + \frac{1}{sC}(i_2 - i_1) \end{cases}$                                                     |
|           | $\begin{cases} 0 = (s^2L_1CC_1 + sR_1CC_1 + C + C_1)i_1 - C_1i_2 \\ sCe = -i_1 + (s^2L_2C + sR_2C + 1)i_2 \end{cases}$                                                                                                              | $\begin{cases} 0 = (s^2L_1C + sR_1C + 1)i_1 - i_2 \\ sCe = -i_1 + (s^2L_2C + sR_2C + 1)i_2 \end{cases}$                                                                          |
|           | $\begin{cases} M_1i_1 - C_1i_2 = 0 \\ -i_1 + M_2i_2 = sCe \end{cases}$<br>gdzie: $M_1 = s^2L_1CC_1 + sR_1CC_1 + C + C_1$<br>$M_2 = s^2L_2C + sR_2C + 1$                                                                             | $\begin{cases} M_1i_1 - i_2 = 0 \\ -i_1 + M_2i_2 = sCe \end{cases}$<br>gdzie: $M_1 = s^2L_1C + sR_1C + 1$<br>$M_2 = s^2L_2C + sR_2C + 1$                                         |
| $2^\circ$ | $\begin{cases} 0 = s^2L_1q_1 + sR_1q_1 + \frac{1}{C}(q_1 - q_2) + \frac{1}{C_1}q_1 \\ e = s^2L_2q_2 + sR_2q_2 + \frac{1}{C}(q_2 - q_1) \end{cases}$                                                                                 | $\begin{cases} 0 = s^2L_1q_1 + sR_1q_1 + \frac{1}{C}(q_1 - q_2) \\ e = s^2L_2q_2 + sR_2q_2 + \frac{1}{C}(q_2 - q_1) \end{cases}$                                                 |
|           | $\begin{cases} 0 = (s^2L_1CC_1 + sR_1CC_1 + C + C_1)q_1 - q_2 \\ Ce = -q_1 + (s^2L_2C + sR_2C + 1)q_2 \end{cases}$                                                                                                                  | $\begin{cases} 0 = (s^2L_1C + sR_1C + 1)q_1 - q_2 \\ Ce = -q_1 + (s^2L_2C + sR_2C + 1)q_2 \end{cases}$                                                                           |
|           | $\begin{cases} M_1q_1 - C_1q_2 = 0 \\ -q_1 + M_2q_2 = Ce \end{cases}$<br>gdzie: $M_1 = s^2L_1CC_1 + sR_1CC_1 + C + C_1$<br>$M_2 = s^2L_2C + sR_2C + 1$                                                                              | $\begin{cases} M_1q_1 - q_2 = 0 \\ -q_1 + M_2q_2 = Ce \end{cases}$<br>gdzie: $M_1 = s^2L_1C + sR_1C + 1$<br>$M_2 = s^2L_2C + sR_2C + 1$                                          |
| $3^\circ$ | $\left\{ \begin{array}{l} 0 = sL_1i_1 + R_1i_1 + u_C + u_{C1} \\ e = sL_2i_2 + R_2i_2 - u_C \\ sCu_C = i_1 - i_2 \\ sC_1u_{C1} = i_1 \end{array} \right\} \rightarrow 1^\circ$                                                      | $\left\{ \begin{array}{l} 0 = sL_1i_1 + R_1i_1 + u_C \\ e = sL_2i_2 + R_2i_2 - u_C \\ sCu_C = i_1 - i_2 \end{array} \right\} \rightarrow 1^\circ$                                |
|           | $i_1(s) = \frac{sCC_1}{M_1M_2 - C_1}e(s), i_2(s) = \frac{sCM_1}{M_1M_2 - C_1}e(s)$<br>$q_1(s) = i_1(s)/s, q_2(s) = i_2(s)/s$<br>$u_C(s) = (q_1(s) + q_2(s))/C = (i_1(s) + i_2(s))/(sC)$<br>$u_{C1}(s) = q_1(s)/C_1 = i_1(s)/(sC_1)$ | $i_1(s) = \frac{sC}{M_1M_2 - 1}e(s), i_2(s) = \frac{sCM_1}{M_1M_2 - 1}e(s)$<br>$q_1(s) = i_1(s)/s, q_2(s) = i_2(s)/s$<br>$u_C(s) = (q_1(s) + q_2(s))/C = (i_1(s) + i_2(s))/(sC)$ |

W celu skrócenia zapisu podczas obliczeń zastosowano proste symbole transformat:  $i_1 = i_1(s)$ ,  $i_2 = i_2(s)$ ,  $q_1 = q_1(s)$ ,  $q_2 = q_2(s)$ ,  $u_C = u_C(s)$ ,  $u_{C1} = u_{C1}(s)$ ,  $e = e(s)$ , oraz oznaczenia:  $M_1 = M_1(s)$ ,  $M_2 = M_2(s)$ ,  $M = M(s)$ .

Poszczególne warianty równań ( $1^\circ \div 3^\circ$ ) dla danego obwodu prowadzą do uzyskania transmitancji dla różnych zmiennych wyjściowych ( $1^\circ$ )  $i_1$ ,  $i_2$ , ( $2^\circ$ )  $q_1$ ,  $q_2$ , ale pozostałe transmitancje można obliczyć na podstawie prostych relacji między transformatami tych zmiennych:

$$\begin{aligned} i(t) = \dot{q}(t) &\rightarrow i(s) = s \cdot q(s), \quad q(s) = i(s)/s, \\ u(t) = \frac{1}{C} q(t) &= \frac{1}{C} \int i(t) dt \rightarrow u(s) = q(s)/C = i(s)/(sC). \end{aligned} \quad (13-6)$$

Porównując powyższe przykłady modeli w postaci transmitancji (tabela 13-4) i w postaci równań stanu (tabela 10-4), widoczna jest przewaga operatorowej metody wyznaczania równania charakterystycznego – wyznaczenie transmitancji wymaga jedynie rozwiązania układu dwóch równań, co wynika z liczby oczek i nie zależy od typu elementów. Z kolei porównując mianowniki transmitancji obu układów, można zauważyć, że:

- dla obwodu 1, niezależnie od zmiennych wyjściowych, transmitancje mają taki sam mianownik czwartego rzędu:

$$\begin{aligned} M_1 M_2 - C_1 &= (s^2 L_1 C C_1 + s R_1 C C_1 + C + C_1)(s^2 L_2 C + s R_2 C + 1) - C_1 \\ &= (s^2 L_1 C C_1 + s R_1 C C_1 + C)(s^2 L_2 C + s R_2 C + 1) + C_1(s^2 L_2 C + s R_2 C), \end{aligned} \quad (13-7)$$

- dla obwodu 2, mianownik transmitancji zmiennych  $i_1$  i  $i_2$  jest rzędu czwartego, ale zawiera biegun zerowy, który można uprościć z zerem transmitancji:

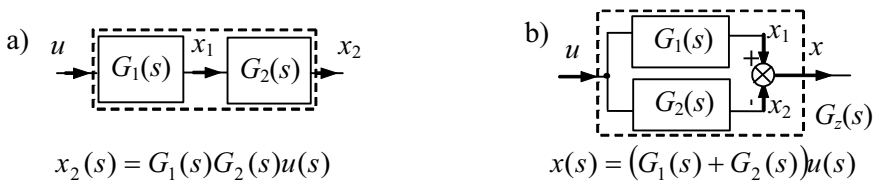
$$\begin{aligned} M_1 M_2 - 1 &= (s^2 L_1 C + s R_1 C + 1)(s^2 L_2 C + s R_2 C + 1) - 1 \\ &= s(s L_1 C + R_1 C)(s^2 L_2 C + s R_2 C + 1) + s^2 L_2 C + s R_2 C. \end{aligned} \quad (13-8)$$

Uproszczenie zerowego bieguna oznacza, że układ jest faktycznie rzędu trzeciego. Tym samym potwierdza się rząd układu wyznaczony na podstawie równań stanu, gdy zmiennymi stanu są niezależne napięcia na kondensatorach i natężenia prądów w cewkach.

## 13.2. Transmitancje złożonych układów

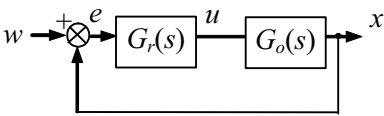
### 13.2.1. Schematy blokowe i transmitancje zastępcze

Transmitancje umożliwiają łatwe **konstruowanie schematów blokowych** obiektów, a to dzięki prostej interpretacji szeregowego i równoległego połączenia bloków, któremu odpowiada mnożenie i dodawanie transmitancji (rys. 13-1).

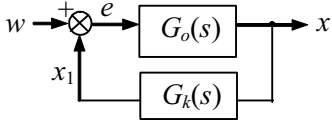


Rys. 13-1. Graficzna interpretacja iloczynu (a) i sumy (b) transmitancji

Ponieważ transmitancje są modelami liniowymi, to **wyznaczanie transmitancji zastępczych** dla bardziej złożonych połączeń też jest proste. Ilustracją niech będzie typowy dla automatyki układ ze sprzężeniem zwrotnym, stosowany jako układ regulacji (rys. 13-2) lub korekcji (rys. 13-3).



Rys. 13-2. Układ regulacji



Rys. 13-3. Układ korekcji

Wyznaczanie modeli zastępczych opiera się na prostych działaniach arytmetycznych, a punktem wyjścia jest skompletowanie układu niezależnych równań, które opisują związki między sygnałami na schemacie. Transmitancja zastępcza obiektu, jako związek między jednym wejściem i jednym wyjściem, powstaje po wyeliminowaniu nadmiarowych zmiennych i uporządkowaniu otrzymanego wyrażenia. Po podstawieniu transmitancji elementów składowych można wyznaczyć równanie charakterystyczne i badać stabilność układu (połączenie stabilnych elementów nie musi oznaczać stabilności układu). Opisane operacje przedstawiono w tabeli 13-5.

Tabela 13-5. Transmitancje zastępcze układów ze sprzężeniem zwrotnym

|                                                     | Układ regulacji (rys. 13-2)                                                              | Układ korekcji (rys. 13-3)                                                                   |
|-----------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------|
| Sygnały wyjściowe                                   | $e, u$ i $x$                                                                             | $e, x$ i $x_1$                                                                               |
| Pełny układ równań                                  | $\begin{cases} e(s) = w(s) - x(s) \\ x(s) = G_o(s)u(s) \\ u(s) = G_r(s)e(s) \end{cases}$ | $\begin{cases} e(s) = w(s) - x_1(s) \\ x(s) = G_o(s)e(s) \\ x_1(s) = G_k(s)x(s) \end{cases}$ |
| Transmitancja zastępcza<br>$G_z(s) = x(s) / u(s)$   | $\frac{G_o(s)G_r(s)}{G_o(s)G_r(s) + 1}$                                                  | $\frac{G_o(s)}{G_o(s)G_k(s) + 1}$                                                            |
| $G_z(s)$ po podstawieniu<br>transmitancji elementów | $\frac{L_o(s)L_r(s)}{M_o(s)M_r(s) + L_o(s)L_r(s)}$                                       | $\frac{M_k(s)L_o(s)}{M_o(s)M_k(s) + L_o(s)L_k(s)}$                                           |

gdzie:  $L_o, L_r, L_k$  – liczniki,  $M_o, M_r, M_k$  – mianowniki transmitancji  $G_o, G_r, G_k$  elementów.

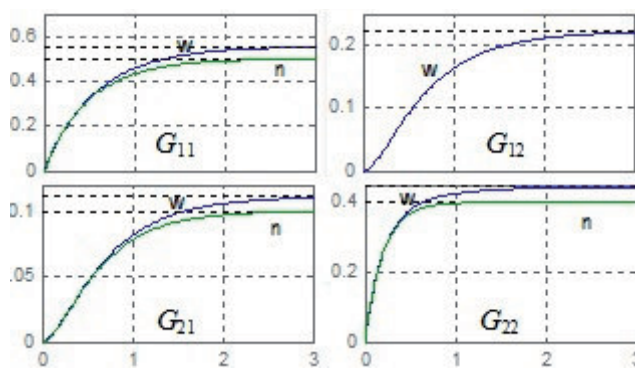
Metoda skompletowania układu równań, które opisują schemat, i rozwiązania tego układu ze względu na wybraną zmienną wyjściową jest metodą ogólną. Gdy schematy blokowe obiektów są bardzo złożone, to pomocne może być **przekształcenie schematu** na równoważną, prostszą postać poprzez łączenie bloków oraz przesuwanie węzłów sumacyjnych i punktów zaczepowych (tabela 13-6).

Tabela 13-6. Wybrane zasady przekształcania schematów [19].

| Przesuwanie węzłów zaczepowych                           |  |  |  |
|----------------------------------------------------------|--|--|--|
|                                                          |  |  |  |
| Przesuwanie węzłów sumacyjnych                           |  |  |  |
|                                                          |  |  |  |
| Zmiana kolejności węzła sumacyjnego i punktu zaczepowego |  |  |  |
|                                                          |  |  |  |

### 13.2.2. Analiza wpływu zer transmitancji

Transmitancje zastępcze nie są przeznaczone do opisywania wewnętrznej struktury obiektu, tym niemniej, jeśli zostaną zapisane w odpowiedni sposób, mogą pomóc w wyjaśnianiu własności układu. Przykładem jest poglądowe wyjaśnienie różnic w odpowiedziach kaskady niewspółdziałającej i współdziałającej (rys. 13-4).

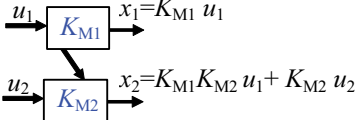
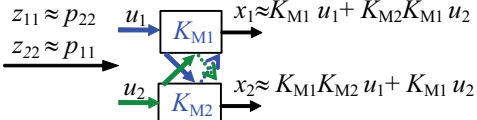


Rys. 13-4. Odpowiedzi skokowe kaskady niewspółdziałającej i współdziałającej (tabela 11-2)

$a_{11}=-2; a_{12}=1; a_{21}=1; a_{22}=-5;$   
 $b_1=1; b_2=2;$   
 $s=tf('s');$   
 $M_1 = s-a_{11}; M_2 = s-a_{22};$   
 $M = M_1*M_2 - a_{12}*a_{21};$   
 $G_{11n} = b_1 / M_1;$   
 $G_{21n} = b_1*a_{21} / (M_1*M_2);$   
 $G_{22n} = b_2 / M_2;$   
 $G_{11w} = b_1*M_2 / M;$   
 $G_{12w} = b_2*a_{12} / M;$   
 $G_{21w} = b_1*a_{21} / M;$   
 $G_{22w} = b_2*M_1 / M;$   
 figure(1); step(G11w,G11n);  
 figure(2); step(G12w);  
 figure(3); step(G21w,G21n);  
 figure(4); step(G22w,G22n);

Zakładamy, że parametry analizowanych transmitancji (tabela 11-2) odpowiadają typowym stabilnym obiektom fizycznym ( $\rightarrow 10.2$ ). Tylko dwie z tych transmitancji są pierwszego rzędu ( $G_{11n}, G_{22n}$ ), pozostałe są drugiego rzędu. Teoretycznie odpowiedzi skokowe układów, które mają więcej niż jeden biegun, można rozpoznać po kształcie – są to przebiegi z punktem przegięcia. Tymczasem na otrzymanych wykresach dwóch transmitancji kaskady współdziałającej ( $G_{11w}, G_{22w}$ ) ta cecha zupełnie nie jest widoczna. Są to jedyne transmitancje zawierające nie tylko bieguny, ale także zera, co można zapisać w postaci iloczynowej (11-13), tak jak to przedstawiono w tabeli 13-7.

Tabela 13-7. Transmitancje kaskady niewspółdziałającej i współdziałającej (wg tabela 11-2).

| Kaskada niewspółdziałająca                                                                                                   | Kaskada współdziałająca                                                                                                                                                                                                        |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $M_1 = s - a_{11}, M_2 = s - a_{22}$                                                                                         |                                                                                                                                                                                                                                |
| $x_1 = \frac{b_1}{M_1} u_1$<br>$x_2 = \frac{b_1 a_{21}}{M_1 M_2} u_1 + \frac{b_2}{M_2} u_2$                                  | $x_1 = \frac{b_1 M_2}{M_1 M_2 - a_{12} a_{21}} u_1 + \frac{b_2 a_{12}}{M_1 M_2 - a_{12} a_{21}} u_2$<br>$x_2 = \frac{b_1 a_{21}}{M_1 M_2 - a_{12} a_{21}} u_1 + \frac{b_2 M_1}{M_1 M_2 - a_{12} a_{21}} u_2$                   |
| $x_1 = \frac{k_{11}}{s - p_{11}} u_1$<br>$x_2 = \frac{k_{21}}{(s - p_{11})(s - p_{22})} u_1 + \frac{k_{22}}{s - p_{22}} u_2$ | $x_1 = \frac{k_{11}(s - z_{11})}{(s - p_{11})(s - p_{22})} u_1 + \frac{k_{12}}{(s - p_{11})(s - p_{22})} u_2$<br>$x_2 = \frac{k_{21}}{(s - p_{11})(s - p_{22})} u_1 + \frac{k_{22}(s - z_{22})}{(s - p_{11})(s - p_{22})} u_2$ |
|                                             |                                                                                                                                              |

W celu skrócenia zapisu w tabeli zastosowano oznaczenia:  $x_i = x_i(s)$ ,  $u_i = u_i(s)$ ,  $M_i = M_i(s)$ .

Można zauważyć, że zera transmitancji wynikają z wielomianów  $M_1$  i  $M_2$ , natomiast bieguny tych transmitancji mają wartości zbliżone do zer, ponieważ:

$$M_1 M_2 - a_{12} a_{21} = (s - p_{11})(s - p_{22}) \quad (13-9)$$

– im mniejsza wartość iloczynu  $a_{12} a_{21}$  (słabsze sprzężenie między magazynami), tym  $z_{11} \approx p_{22}$  i  $z_{22} \approx p_{11}$ , a stąd wynika przybliżenie:

$$\frac{k_{11}(s - z_{11})}{(s - p_{11})(s - p_{22})} \approx \frac{k_{11}}{(s - p_{11})}, \quad \frac{k_{22}(s - z_{22})}{(s - p_{11})(s - p_{22})} \approx \frac{k_{22}}{(s - p_{22})}. \quad (13-10)$$

Mówimy, że zero o wartości zbliżonej do wartości bieguna kompensuje wpływ tego bieguna. Przybliżenie (13-10) znajdzie swoje potwierdzenie podczas analizy częstotliwościowej ( $\rightarrow$  17.3).

Transmitancje kaskady można zinterpretować jako opis przejścia sygnałów wejściowych ( $u_1$ ,  $u_2$ ) przez poszczególne magazyny (zbiorniki) układu  $K_{M1}$ ,  $K_{M2}$ . Najprostszy przypadek to transmitancje kaskady niespółdziałającej, czyli szeregowego połączenia dwóch zbiorników (obiektów o charakterze inercyjnym). Transmitancja  $x_2(s)/u_2(s)$  jest pierwszego rzędu, ponieważ sygnał  $u_2$  przechodzi tylko przez jeden magazyn. Transmitancja  $x_2(s)/u_1(s)$  jest drugiego rzędu, ponieważ opisuje przejście sygnału  $u_1$  kolejno przez dwa magazyny. W przypadku kaskady współdziałającej wzajemne oddziaływanie zbiorników powoduje, że każdy magazyn wpływa na każdy sygnał wejściowy (transmitancje są drugiego rzędu), ale w różnym stopniu. Na podstawie równań różniczkowych wiemy, że sygnał  $u_1$  jest podawany bezpośrednio na pierwszy magazyn, a na drugi magazyn działa za pośrednictwem pierwszego – odpowiedź transmitancji  $x_2(s)/u_1(s)$  jest taka jak układu drugiego rzędu. Z kolei reakcja transmitancji  $x_1(s)/u_1(s)$  pokazuje przede wszystkim przejście  $u_1$  przez pierwszy maga-

zyn, gdyż wtórne oddziaływanie drugiego magazynu jest znacznie słabsze (niewidoczne na wykresach). Interpretacja ta nie jest ścisła, ale pomaga wyjaśnić lub przewidzieć charakter odpowiedzi czasowych badanych układów (obiektów technologicznych).

### 13.2.3. Upraszczenie transmitancji – obniżanie rzędu układu

Podstawowa zasada upraszczania modelu dynamiki polega na pomijaniu najmniej znaczących biegunów układu ( $\rightarrow$  4.3.3). Są to ujemne bieguny o wartościach znacznie mniejszych od pozostałych biegunów, które w rozwiązaniu swobodnym są reprezentowane przez składniki najszybciej zanikające. Uproszczenie to nie zmienia czasu ustalania ani oscylacyjności odpowiedzi układu ( $\rightarrow$  6.2.3). Nie może też zmieniać własności statycznych (wzmocnienia układu, punktu równowagi przy stałym wymuszeniu  $u_0$ ).

Transmitancja pozwala bardzo łatwo zrealizować uproszczenie, zwłaszcza jeśli ma postać iloczynową (11-13), a przynajmniej mianownik transmitancji. Załóżmy, że najmniej znaczącym biegunem układu jest biegun  $p_n$ , wówczas:

$$G(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{(s - p_1) \dots (s - p_{n-1})(s - p_n)} \approx k \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{(s - p_1) \dots (s - p_{n-1})}, \quad (13-11)$$

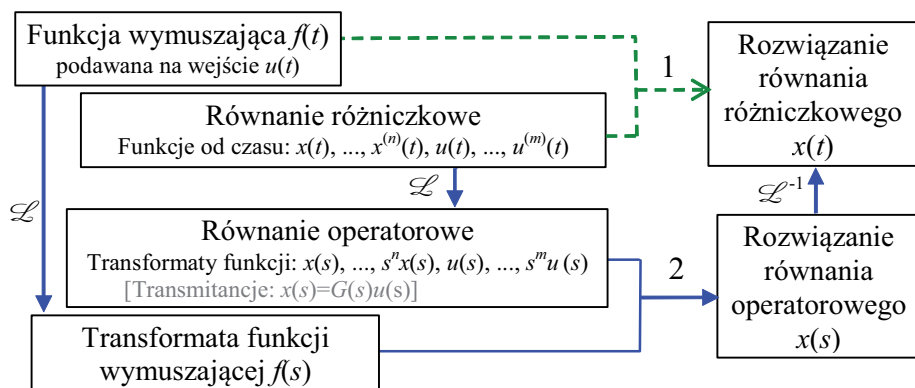
gdzie współczynnik korekcyjny  $k$  zapewnia zachowanie własności statycznych. Wartość  $k$  można wyznaczyć, obliczając wzmocnienie układu ( $k_{ukl}$ ) przed i po uproszczeniu za pomocą twierdzenia o wartości końcowej (11-14):

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{(s - p_1) \dots (s - p_{n-1})(s - p_n)} = \lim_{s \rightarrow 0} k \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{(s - p_1) \dots (s - p_{n-1})} \rightarrow k. \quad (13-12)$$

Dodatkowym warunkiem uproszczenia jest to, aby po wykonaniu operacji, stopień wielomianu licznika nie był większy niż mianownika ( $m \leq n - 1$ ), czym więcej w podrozdziale 20.1.

## 13.3. Operatorowa metoda rozwiązywania równań różniczkowych

Proste ( $\mathcal{L}$ ) i odwrotne ( $\mathcal{L}^{-1}$ ) przekształcenie Laplace'a można zastosować do rozwiązywania równań różniczkowych metodą operatorową (rys. 13-5). Zamiast rozwiązywania równania różniczkowego (1), wykonywane są znacznie prostsze operacje algebraiczne (2), a ich wynikiem jest transformata rozwiązania  $x(s)$ , którą można przekształcić w oryginał funkcji  $x(t)$ , stosując przekształcenie  $\mathcal{L}^{-1}$ .



Rys. 13-5. Rozwiązywanie równań różniczkowych i rachunek operatorowy:  
1 (--) metoda klasyczna, 2 (—) metoda operatorowa

Do wyznaczenia oryginału rozwiązania  $x(t)$  wystarczy znajomość transformat kilku funkcji oraz metoda rozkładu na ułamki proste lub metoda residuów [1, 18, 19]. Zazwyczaj nie ma potrzeby wyznaczania funkcji  $x(t)$ , ale analiza takich przekształceń pozwala wyjaśnić własności transmitancji. W najprostszym przypadku transmitancję układu  $G(s)$  i transformatę wymuszenia  $u(s)$  można zapisać jako:

$$G(s) = \frac{L_g(s)}{(s - p_{g1}) \dots (s - p_{gn})} \text{ i } u(s) = \frac{L_u(s)}{(s - p_{u1}) \dots (s - p_{um})}, \quad (13-13)$$

gdzie bieguny obu wyrażeń są jednokrotne, rzeczywiste i nie ma biegunów wspólnych ( $p_{g1} \neq \dots \neq p_{gn} \neq p_{u1} \neq \dots \neq p_{um}$ ). Wówczas transformatę odpowiedzi:

$$x(s) = G(s)u(s) = \frac{L_g(s)L_u(s)}{(s - p_{g1}) \dots (s - p_{gn})(s - p_{u1}) \dots (s - p_{um})} \quad (13-14)$$

można rozłożyć na ułamki proste postaci:

$$x(s) = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{(s - p_{gk})} + \sum_{k=1}^m \frac{B_k}{(s - p_{uk})}. \quad (13-15)$$

Stałe współczynniki  $A_k$  i  $B_k$  wyrażenia (13-15) zależą zarówno od wszystkich biegunów, jak i od wszystkich zer (obu liczników  $L_g, L_u$ ), ale składniki wyrażenia można pogrupować ze względu związków z biegunami transmitancji i wymuszenia. Podstawiając oryginały składników, otrzymujemy odpowiedź układu w postaci:

$$x(t) = x_s(t) + x_w(t), \quad (13-16)$$

gdzie:  $x_s(t) = \sum_{k=1}^n A_k e^{p_{gk}t}$ ,  $x_w(t) = \sum_{k=1}^m B_k e^{p_{uk}t}$ .

**Przykład.** Zastosowanie metody operatorowej do rozwiązania równania drugiego rzędu ( $a_2\ddot{x}(t) + a_1\dot{x}(t) + a_0x(t) = b_0u(t)$ ) o rzeczywistych biegunach ( $p_1, p_2$ ) i porównanie z rozwiązaniem metodą klasyczną ( $\rightarrow$  4.2.1). Rozwiązanie wyznaczono dla:

a) wymuszenia  $u(t) = u_k$  dla  $t > 0$

$$G(s) = \frac{b_0}{a_2(s-p_1)(s-p_2)}, u(s) = \frac{u_k}{s}$$

$$x(s) = \frac{b_0 u_k}{a_2(s-p_1)(s-p_2)s} = \frac{A_1}{s-p_1} + \frac{A_2}{s-p_2} + \frac{B}{s}$$

$$\frac{b_0 u_k}{a_2} = A_1 s(s-p_2) + A_2 s(s-p_1) + B(s-p_1)(s-p_2)$$

$$\begin{cases} 0 = A_1 + A_2 + B \\ 0 = A_1 p_2 + A_2 p_1 + B(p_1 + p_2) \\ b_0 u_k / a_2 = B p_1 p_2 \end{cases}$$

$$B = \frac{b_0 u_k}{a_2 p_1 p_2} = \frac{b_0 u_k}{a_0} = k_{ukl} u_k$$

$$A_1 = \frac{B p_2}{p_1 - p_2} = \frac{p_2}{p_1 - p_2} k_{ukl} u_k$$

$$A_2 = \frac{B p_1}{p_2 - p_1} = \frac{p_1}{p_2 - p_1} k_{ukl} u_k$$

$$x(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + B$$

$$x(t) = \left( \frac{p_2}{p_1 - p_2} e^{p_1 t} + \frac{p_1}{p_2 - p_1} e^{p_2 t} + 1 \right) k_{ukl} u_k$$

b) wymuszenia  $u(t) = \delta(t)$

$$G(s) = \frac{b_0}{a_2(s-p_1)(s-p_2)}, u(s) = 1$$

$$x(s) = \frac{b_0}{a_2(s-p_1)(s-p_2)} = \frac{A_1}{s-p_1} + \frac{A_2}{s-p_2}$$

$$\frac{b_0}{a_2} = A_1(s-p_2) + A_2(s-p_1)$$

$$\begin{cases} 0 = A_1 + A_2 \\ b_0 / a_2 = -A_1 p_2 - A_2 p_1 \end{cases}$$

$$A_1 = \frac{b_0}{a_2(p_1 - p_2)}$$

$$A_2 = \frac{b_0}{a_2(p_2 - p_1)}$$

$$x(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$$

$$x(t) = \frac{b_0}{a_2(p_1 - p_2)} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t})$$

Obliczenia przeprowadzono na podstawie transmitancji, a to oznacza, że zastosowano zerowe warunki początkowe, zgodnie z definicją transmitancji (11-8). Rozwiązanie  $x(t)$  jest: a) zgodne z (4-18), b) zgodne z (4-20).

Rozwiązanie (13-16) pokazuje bezpośredni związek składników rozwiązania swobodnego z transmitancją układu (biegunami transmitancji). Rozwiązanie wymuszone natomiast jest związane z biegunami wymuszenia:

$$u(s) = \frac{L_u(s)}{(s-p_{u1})...(s-p_{um})} = \sum_{k=1}^m \frac{C_k}{(s-p_{uk})} \leftrightarrow u(t) = \sum_{k=1}^m C_k e^{p_{uk} t}. \quad (13-17)$$

Porównując składniki funkcji  $x_w(t)$  i  $u(t)$ , można wprowadzić pojęcie wzmocnienia każdego ze składników, które jest równe wartości  $G(s)$  dla  $s = p_{uk}$ :

$$x_{wk}(t) / u_k(t) = B_k / C_k = G(p_{uk}). \quad (13-18)$$

## 14. Charakterystyki i analiza częstotliwościowa

*czyli inne spojrzenie na dynamikę*

### 14.1. Wprowadzenie – odpowiedź częstotliwościowa

#### 14.1.1. Odpowiedź częstotliwościowa

W badaniach dynamiki układów, poza wymuszeniem stałym, skokowym i impulsowym, stosuje się również wymuszenie sinusoidalne o określonej pulsacji (częstotliwości<sup>1</sup>). Reakcję na takie wymuszenie dla układu liniowego można wyznaczyć analitycznie, stosując klasyczną metodę rozwiązywania równania różniczkowego (→ 1.4). Pełne rozwiązanie liniowego równania różniczkowego z zadaniem wymuszeniem zawiera składową swobodną ( $x_s$ ) i składową wymuszoną ( $x_w$ ). Składowa swobodna nie zależy od wymuszenia, natomiast składowa wymuszona:

- jest wartością stałą dla wymuszenia, które jest stałe dla  $t > 0$  (→ 4.2.1) – rozwiązanie statyczne,
- jest funkcją sinusoidalną, gdy wymuszenie jest sinusoidalne (→ 14.1.2) i jest nazywane **odpowiedzią częstotliwościową** (drzganiami wymuszonymi).

Parametry odpowiedzi częstotliwościowej można wyznaczyć również metodą symboliczną (→ 14.2) lub na podstawie transmitancji (→ 14.3), a ponieważ parametry te zależą od pulsacji funkcji wymuszającej, to przedstawia się je w graficzny sposób – na charakterystykach częstotliwościowych (→ 14.4).

#### 14.1.2. Wyznaczanie odpowiedzi częstotliwościowej [19]

Algorytm rozwiązywania liniowego równania różniczkowego omówiono w podrozdziale 4.2, przy założeniu, że wymuszenie jest stałe, skokowe lub impulsowe. Obecnie to samo równanie (4-1), czyli:

$$a_2 \ddot{x}(t) + a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = b_0 u(t), \quad (14-1)$$

zostanie rozwiązane dla wymuszenia sinusoidalnego:  $u(t) = U_m \sin(\omega_0 t)$ .

#### I. Rozwiązanie swobodne

Rozwiązanie swobodne nie zależy od wymuszenia i zostało omówione w rozdziale 4.2.1 dla przypadku, gdy układ ma dwa różne, rzeczywiste bieguny (4-5):

$$x_s(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}. \quad (14-2)$$

#### II. Rozwiązanie wymuszone (odpowiedź częstotliwościowa)

Do wyznaczenia rozwiązania wymuszonego można zastosować ogólny algorytm.

<sup>1</sup> Pulsacja (częstotliwość kątowa)  $\omega = 2\pi f$  [rad/s], gdzie  $f$  [Hz = 1/s] – częstotliwość. „Przebieg o częstotliwości  $\omega$ ” oznacza dokładnie „przebieg o częstotliwości kątowej  $\omega$ ”

(1) Funkcja wymuszająca i jej kolejne pochodne:

$$u(t) = U_m \sin(\omega_0 t), \dot{u}(t) = U_m \omega_0 \cos(\omega_0 t). \quad (14-3)$$

(2) Postać rozwiązania wymuszonego  $x_w(t)$  i obliczenie jego pochodnych:

$$x_w(t) = C_1 \sin(\omega_0 t) + C_2 \cos(\omega_0 t), \quad (14-4)$$

$$\dot{x}_w(t) = C_1 \omega_0 \cos(\omega_0 t) - C_2 \omega_0 \sin(\omega_0 t), \ddot{x}_w(t) = -C_1 \omega_0^2 \sin(\omega_0 t) - C_2 \omega_0^2 \cos(\omega_0 t).$$

(3) Podstawić wymuszenie i rozwiązanie  $x_w(t)$  do równania różniczkowego (14-1):

$$a_2(-C_1 \omega_0^2 \sin(\omega_0 t) - C_2 \omega_0^2 \cos(\omega_0 t)) + a_1(C_1 \omega_0 \cos(\omega_0 t) - C_2 \omega_0 \sin(\omega_0 t)) + \\ + a_0(C_1 \sin(\omega_0 t) + C_2 \cos(\omega_0 t)) = b_0 U_m \sin(\omega_0 t) \quad (14-5)$$

(4) Uporządkować wyrażenie i porównać współczynniki przy funkcjach, co prowadzi do układu równań:

$$\begin{cases} -a_2 C_1 \omega_0^2 - a_1 C_2 \omega_0 + a_0 C_1 = b_0 U_m \\ -a_2 C_2 \omega_0^2 + a_1 C_1 \omega_0 + a_0 C_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (a_0 - a_2 \omega_0^2) C_1 - a_1 \omega_0 C_2 = b_0 U_m \\ a_1 \omega_0 C_1 + (a_0 - a_2 \omega_0^2) C_2 = 0 \end{cases}. \quad (14-6)$$

(5) Rozwiązanie układu umożliwia wyznaczenie stałych  $C_1, C_2$ :

$$C_1 = \frac{b_0(a_0 - a_2 \omega_0^2) U_m}{(a_0 - a_2 \omega_0^2)^2 + a_1^2 \omega_0^2}, \quad C_2 = \frac{-b_0 a_1 \omega_0 U_m}{(a_0 - a_2 \omega_0^2)^2 + a_1^2 \omega_0^2}. \quad (14-7)$$

Podstawiając stałe  $C_1, C_2$  do (14-4), otrzymujemy ostateczną postać funkcji  $x_w(t)$ .

Alternatywny sposób wyznaczania  $x_w(t)$  polega na podstawieniu rozwiązania wymuszonego  $x_w(t)$  w równoważnej postaci:

$$x_w(t) = C_1 \sin(\omega_0 t) + C_2 \cos(\omega_0 t) = X_m \sin(\omega_0 t + \varphi), \quad (14-8)$$

gdzie:  $X_m = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ ,  $\varphi = \arctg(C_2 / C_1)$  [18]. Parametry  $X_m$  i  $\varphi$  obliczone na podstawie stałych  $C_1$  i  $C_2$  (14-7) mają postać:

$$X_m = U_m \sqrt{\frac{(b_0(a_0 - a_2 \omega_0^2))^2}{((a_0 - a_2 \omega_0^2)^2 + a_1^2 \omega_0^2)^2} + \frac{(-b_0 a_1 \omega_0)^2}{((a_0 - a_2 \omega_0^2)^2 + a_1^2 \omega_0^2)^2}} = \frac{b_0 U_m}{\sqrt{(a_0 - a_2 \omega_0^2)^2 + a_1^2 \omega_0^2}}, \quad (14-9)$$

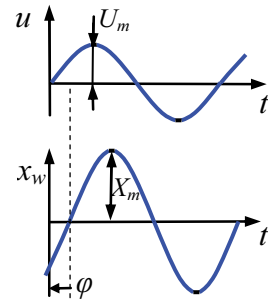
$$\varphi = \arctg\left(\frac{-b_0 a_1 \omega_0}{b_0(a_0 - a_2 \omega_0^2)}\right) = \arctg\left(\frac{-a_1 \omega_0}{a_0 - a_2 \omega_0^2}\right).$$

Równoważną postać rozwiązania (14-8) można zastosować od razu w drugim kroku algorytmu, to znaczy założyć rozwiązanie postaci  $x_w(t) = X_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$  i wykonać kolejne kroki algorytmu – wynik końcowy (parametry  $X_m$  i  $\varphi$ ) jest identyczny.

Rozwiązanie wymuszone  $x_w(t)$  o postaci (14-8) umożliwia wskazanie charakterystycznych cech odpowiedzi częstotliwościowej liniowego układu (rys. 14-1):

- jeśli na wejście podawany jest przebieg sinusoidalny  $U_m \sin(\omega_0 t)$ , to na wyjściu w stanie ustalonym też jest przebieg sinusoidalny  $X_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$  – o takiej samej pulsacji  $\omega_0$ , ale wzmacniony ( $X_m/U_m$ ) i przesunięty ( $\varphi$ ),
- wzmacnienie sygnału ( $X_m/U_m$ ) i przesunięcie fazowe  $\varphi$  zależą od współczynników równania układu (własności dynamicznych) oraz od pulsacji ( $\omega_0$ ) sygnału wejściowego.

Jeśli dla wyrażenia (14-9) można wyznaczyć granicę dla  $\omega \rightarrow 0$ , to uzyskamy wzmacnienie układu przy stałym wymuszeniu  $X_m/U_m \rightarrow k_{ukl}$ , zgodne z definicją (4-7).



Rys. 14-1. Odpowiedź częstotliwościowa.

### III. Rozwiązanie ogólne

Rozwiązanie ogólne równania (14-1) dla  $u(t) = U_m \sin(\omega_0 t)$  stanowi klasa funkcji:

$$x(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} + X_m \sin(\omega_0 t + \varphi), \quad (14-10)$$

gdzie:  $X_m = \frac{b_0 U_m}{\sqrt{(a_0 - a_2 \omega_0^2)^2 + a_1^2 \omega_0^2}}$ ,  $\varphi = \arctg\left(\frac{-a_1 \omega_0}{a_0 - a_2 \omega_0^2}\right)$ ,  $A_1$  i  $A_2$  – parametry.

Rozwiązanie to można jeszcze dokończyć, wyznaczając rozwiązanie szczegółowe, czyli obliczyć wartości  $A_1$  i  $A_2$  na podstawie konkretnych warunków początkowych, ale w praktyce nie ma takiej potrzeby. W badaniach własności dynamicznych wykorzystuje się tylko składową wymuszoną  $x_w(t) = X_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$ , czyli odpowiedź częstotliwościową. Badania te nie dotyczą stabilności układu, którą stwierdza się na podstawie składowej swobodnej (wartości biegunów).

## 14.2. Metoda symboliczna

### 14.2.1. Idea metody [19]

Wiemy, że odpowiedzią każdego liniowego układu na wymuszenie sinusoidalne o pulsacji  $\omega$  jest przebieg sinusoidalny o tej samej pulsacji, ale o innej amplitudzie i przesunięty w fazie:

$$u(t) = U_m \sin(\omega t) \rightarrow x(t) = X_m \sin(\omega t + \varphi). \quad (14-11)$$

Własność ta leży u podstaw symbolicznej metody<sup>1</sup> analizy własności dynamicznych, w której zamiast funkcji sinusoidalnych stosuje się funkcje wykładnicze:

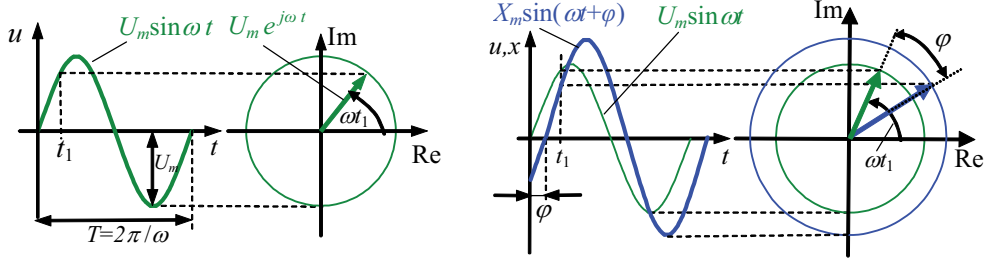
$$u(t) = U_m e^{j\omega t} \rightarrow x(t) = X_m e^{j(\omega t + \varphi)}. \quad (14-12)$$

<sup>1</sup> metoda symboliczna lub metoda liczb zespolonych

Związek pomiędzy funkcjami sinusoidalnymi i wykładniczymi opisują wzory Eulera, między innymi:

$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t). \quad (14-13)$$

Funkcję wykładniczą typu  $e^{j\omega t}$  można interpretować jako opis punktu, który porusza się z prędkością  $\omega$  po jednostkowym okręgu, położonym na płaszczyźnie zespolonej – funkcja sinus to rzut tego wirującego punktu na oś Im (rys. 14-2).



Rys. 14-2. Interpretacja symbolicznego zapisu: a) wymuszenia  $U_m e^{j\omega t}$ , b) odpowiedzi  $X_m e^{j(\omega t + \phi)}$ .

Dzięki tej interpretacji zamiana funkcji (14-11) na (14-12) oznacza zastąpienie ruchu drgającego przez odpowiadający mu ruch po okręgu.

W metodzie symbolicznej ważna jest jednak nie interpretacja, tylko uproszczenie obliczeń. Na przykład relacja między sygnałem wyjściowym i wejściowym to:

$$\frac{x(t)}{u(t)} = \frac{X_m e^{j(\omega t + \phi)}}{U_m e^{j\omega t}} = M e^{j\phi}, \text{ gdzie } M = \frac{X_m}{U_m}. \quad (14-14)$$

W układach dynamicznych zarówno wzmocnienie amplitudy, jak i przesunięcie fazowe zależą od pulsacji przetwarzanego sygnału:  $M(\omega)$ ,  $\phi(\omega)$ .

### 14.2.2. Zastosowanie metody

Zastosowanie metody symbolicznej przedstawimy na przykładzie równania (14-1). Zarówno sinusoidalne wymuszenie na wejściu  $u(t) = U_m \sin(\omega t)$ , jak i poszukiwane sinusoidalne rozwiązanie układu  $x(t) = X_m \sin(\omega t + \phi)$  będą reprezentowane przez funkcje wykładnicze (14-12).

(1) Funkcja  $x(t)$  i jej pochodne

$$\begin{aligned} x(t) &= X_m e^{j(\omega_0 t + \phi)} = X_m e^{j\phi} e^{j\omega_0 t}, \\ \dot{x}(t) &= j\omega_0 X_m e^{j\phi} e^{j\omega_0 t}, \quad \ddot{x}(t) = -\omega_0^2 X_m e^{j\phi} e^{j\omega_0 t}. \end{aligned} \quad (14-15)$$

(2) Podstawienie funkcji i odpowiednich pochodnych do równania różniczkowego:

$$\begin{aligned} a_2 \ddot{x}(t) + a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) &= b_0 u(t), \\ -a_2 \omega_0^2 X_m e^{j\phi} e^{j\omega_0 t} + j a_1 \omega_0 X_m e^{j\phi} e^{j\omega_0 t} + a_0 X_m e^{j\phi} e^{j\omega_0 t} &= b_0 U_m e^{j\omega_0 t}. \end{aligned} \quad (14-16)$$

Po uproszczeniu:

$$(a_0 - a_2\omega_0^2 + ja_1\omega_0)X_m e^{j\varphi} = b_0 U_m$$

i kolejnych przekształceniach otrzymujemy:

$$X_m e^{j\varphi} = U_m \frac{b_0}{a_0 - a_2\omega_0^2 + ja_1\omega_0} = U_m \frac{b_0((a_0 - a_2\omega_0^2) - ja_1\omega_0)}{(a_0 - a_2\omega_0^2)^2 + a_1^2\omega_0^2} = U_m \frac{b_0(a_0 - a_2\omega_0^2) - jb_0a_1\omega_0}{(a_0 - a_2\omega_0^2)^2 + a_1^2\omega_0^2} = U_m M(\omega_0) e^{j\varphi(\omega_0)},$$

gdzie:  $M(\omega_0) = \frac{b_0}{\sqrt{(a_0 - a_2\omega_0^2)^2 + a_1^2\omega_0^2}}, \quad \varphi(\omega_0) = \arctg\left(\frac{-a_1\omega_0}{a_0 - a_2\omega_0^2}\right).$

(3) Ostateczna postać rozwiązania zawiera parametry wyznaczone symbolicznie:

$$x(t) = X_m \sin(\omega t + \varphi) = \frac{b_0 U_m}{\sqrt{(a_0 - a_2\omega_0^2)^2 + a_1^2\omega_0^2}} \sin(\omega t + \varphi), \quad (14-17)$$

gdzie  $\varphi = \arctg\left(\frac{-a_1\omega_0}{a_0 - a_2\omega_0^2}\right).$

Rozwiązanie (14-17) jest identyczne jak rozwiązanie uzyskane klasyczną metodą rozwiązywania równań różniczkowych ((14-8), (14-9)), ale obliczenia są prostsze.

Metoda symboliczna jest szczególnie często wykorzystywana w analizie obwodów elektrycznych zmiennie-napięciowych. Zastosowanie metody do opisu podstawowych elementów RLC jest podstawą definicji pojęcia impedancji i jej poszczególnych przypadków: rezystancji  $R$ , reaktancji pojemnościowej  $X_C$  i reaktancji indukcyjnej  $X_L$  (tabela 2-4).

## 14.3. Transmitancja widmowa (Fourier'a)

### 14.3.1. Definicja i interpretacji transmitancji widmowej [1, 18, 19]

Liniowe równania różniczkowe opisujące model dynamiki mogą być poddane przekształceniu Fourier'a  $\mathcal{F}$ , które zamienia wszystkie funkcje czasu na funkcje pulsacji  $\omega$ . Operację tą można wykonać na podstawie definicji przekształcenia, ale w praktyce inżynierskiej wykorzystuje się prosty związek między zmienną  $s$  w przekształceniu  $\mathcal{L}$  i pulsacją  $\omega$  w przekształceniu  $\mathcal{F}$ :

$$s = j\omega. \quad (14-18)$$

Tak więc model oparty na liniowych równaniach różniczkowych najpierw jest przekształcany na transmitancję  $G(s)$ , a po zastosowaniu podstawienia (14-18) na transmitancję widmową  $G(j\omega)$ :

$$G(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0} \rightarrow G(j\omega) = \frac{b_m (j\omega)^m + \dots + b_1 (j\omega) + b_0}{a_n (j\omega)^n + \dots + a_1 (j\omega) + a_0}. \quad (14-19)$$

Transmitancja  $G(j\omega)$  funkcją zmiennej zespolonej, którą można uporządkować:

$$G(j\omega) = \frac{P_1(\omega) + jQ_1(\omega)}{P_2(\omega) + jQ_2(\omega)} = \frac{P_1(\omega)P_2^*(\omega) + Q_1(\omega)Q_2^*(\omega)}{P_2^2(\omega) + Q_2^2(\omega)} + j \frac{P_2(\omega)Q_1(\omega) - P_1(\omega)Q_2(\omega)}{P_2^2(\omega) + Q_2^2(\omega)}$$

i zapisać w różnej postaci:

$$G(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) = M(\omega)e^{j\varphi(\omega)}, \quad (14-20)$$

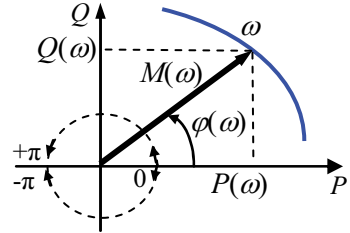
gdzie (zgodnie z rysunkiem 14-3):

$$M(\omega) = |G(j\omega)| = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}$$

$$\varphi(\omega) = \arg(G(j\omega)) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}$$

$$P(\omega) = M(\omega) \cos(\varphi(\omega))$$

$$Q(\omega) = M(\omega) \sin(\varphi(\omega))$$



Rys. 14-3. Interpretacja geometryczna transmitancji  $G(j\omega)$

Uwaga:  $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ , tzn.:

- jeśli  $Q(\omega) > 0$ , to  $0 < \varphi \leq \pi$  (jeśli  $P(\omega) = 0$ , to  $\varphi = \pi/2$ ),
- jeśli  $Q(\omega) < 0$ , to  $-\pi \leq \varphi < 0$  (jeśli  $P(\omega) = 0$ , to  $\varphi = -\pi/2$ ).

Podobieństwo zmiennych i funkcji w przekształceniu  $\mathcal{F}$  do elementów w metodzie symbolicznej, pozwala zastosować fizyczną interpretację transmitancji widmowej. **Transmitancja widmowa  $G(j\omega)$**  (14-20) opisuje jak układ (obiekt) przetwarza sygnał sinusoidalny o pulsacji  $\omega$ . **Moduł transmitancji  $M(\omega)$**  określa stosunek amplitudy sygnału wyjściowego  $X_m(\omega)$  do amplitudy sygnału wejściowego  $U_m(\omega)$ :

$$|G(j\omega)| = M(\omega) = \frac{X_m(\omega)}{U_m(\omega)}, \quad (14-21)$$

natomiast **argument transmitancji  $\varphi(\omega)$**  wyznacza przesunięcie fazowe sygnału wyjściowego względem sygnału wejściowego  $\sin(\omega t)$ :

$$\sin(\omega t + \varphi(\omega)). \quad (14-22)$$

### 14.3.2. Transmitancja widmowa a odpowiedź częstotliwościowa

Interpretacja fizycznej transmitancji  $G(j\omega)$  pozwala zastosować ją do wyznaczenia parametrów odpowiedzi częstotliwościowej układu (14-8). Jako przykład transmitancji widmowej rozważmy transmitancję wyznaczoną dla równania (14-1):

$$G(s) = \frac{b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \rightarrow G(j\omega) = \frac{b_0}{a_2 (j\omega)^2 + a_1 (j\omega) + a_0}. \quad (14-23)$$

Po uporządkowaniu:

$$G(j\omega) = \frac{b_0}{a_0 - a_2 \omega^2 + j a_1 \omega} = \frac{b_0((a_0 - a_2 \omega^2) - j a_1 \omega)}{(a_0 - a_2 \omega^2)^2 + a_1^2 \omega^2} = \frac{b_0(a_0 - a_2 \omega^2) - j b_0 a_1 \omega}{(a_0 - a_2 \omega^2)^2 + a_1^2 \omega^2}$$

można powyższą transmitancję zapisać w postaci wykładniczej (14-20):

$$G(j\omega) = \frac{b_0(a_0 - a_2\omega^2)}{(a_0 - a_2\omega^2)^2 + a_1^2\omega^2} - j \frac{b_0a_1\omega}{(a_0 - a_2\omega^2)^2 + a_1^2\omega^2} = M(\omega)e^{j\varphi(\omega)}, \quad (14-24)$$

gdzie:  $M(\omega) = b_0 / \sqrt{(a_0 - a_2\omega^2)^2 + a_1^2\omega^2}$ ,  $\varphi(\omega) = \arctg\left(\frac{-a_1\omega}{a_0 - a_2\omega^2}\right)$ .

Na podstawie interpretacji transmitancji (14-24) można obliczyć reakcję układu w stanie ustalonym przy wymuszeniu  $u(t) = U_m \sin(\omega_0 t)$ , która ma postać:

$$x(t) = \frac{b_0 U_m}{\sqrt{(a_0 - a_2\omega_0^2)^2 + a_1^2\omega_0^2}} \sin(\omega_0 t + \varphi), \text{ gdzie } \varphi = \arctg\left(\frac{-a_1\omega_0}{a_0 - a_2\omega_0^2}\right), \quad (14-25)$$

co jest zgodne z opisem odpowiedzi częstotliwościowej układu ((14-8), (14-9)).

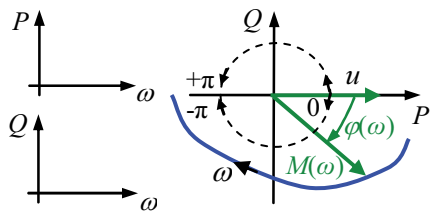
## 14.4. Charakterystyki częstotliwościowe

### 14.4.1. Definicje i własności

Odpowiedź liniowego układu na wymuszenie sinusoidalne  $U_m \sin(\omega t)$  można wyznaczyć klasyczną metodą rozwiązywania równań różniczkowych, metodą symboliczną czy stosując transmitancję Fourier'a. Metody różnią się interpretacją wyrażeń i zestawem operacji, ale prowadzą do jednego wyrażenia  $X_m \sin(\omega t + \varphi)$ . Można więc zamienić mówić o rozwiązaniu wymuszonym (stanie ustalonym) dla wymuszenia sinusoidalnego, odpowiedzi częstotliwościowej, drganiach wymuszonych lub przenoszeniu sygnału sinusoidalnego przez układ. Parametry wyrażenia  $X_m \sin(\omega t + \varphi)$ , czyli  $X_m$  i  $\varphi$ , zależą od współczynników równania różniczkowego i od pulsacji  $\omega$  sygnału sinusoidalnego. Zależność od  $\omega$  można przedstawić graficznie, na podstawie różnych postaci

transmitancji Fourier'a (14-20). Postać kanoniczną jest podstawą następujących charakterystyk (rys. 14-4):

- części rzeczywistej  $P(\omega) = \text{Re}(G(j\omega))$ ,
- części urojonej  $Q(\omega) = \text{Im}(G(j\omega))$ ,
- amplitudowo-fazowa  $Q(P)$ ,  
gdzie pulsacja  $\omega$  zmienia się wzdłuż wykresu (wykres Nyquista).



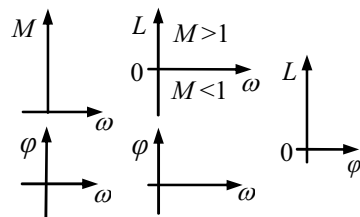
Rys. 14-4. Charakterystyki częstotliwościowe (1)

Charakterystykę amplitudowo-fazową  $Q(P)$  można rysować na podstawie funkcji:

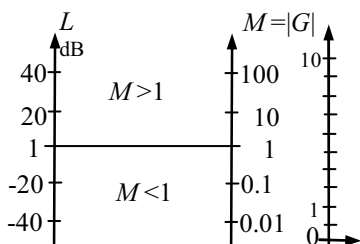
- $P(\omega)$  i  $Q(\omega)$ , które pozwalają obliczyć współrzędne dla kolejnych wartości zmiennej  $\omega$ ,
- $M(\omega)$  i  $\varphi(\omega)$ , czyli amplitudy i fazy ( $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ ), co odpowiada długości i kątowi wektora wodzącego o początku w początku układu współrzędnych i o końcu w punkcie wykresu dla danej częstotliwości  $\omega$ .

Z kolei postać wykładnicza to podstawa dla następujących charakterystyk:

- **modułu**  $M(\omega) = |G(j\omega)|$  (charakterystyka amplitudowa),
- **fazowa**  $\varphi(\omega) = \arg(G(j\omega))$ ,
- **logarytmiczna charakterystyka modułu**  $L(\omega) = 20\lg M(\omega) = |G(j\omega)|_{\text{dB}}$  (logarytmiczna charakterystyka amplitudowa, **wykres Bodego**),
- **logarytmiczna charakterystyka amplitudofazowa**  $L(\varphi)$  (pulsacja zmienia się wzdłuż wykresu).



Rys. 14-5. Charakterystyki częstotliwościowe (2)



Rys. 14-6. Skalowanie osi  $M$  i  $L$

Charakterystyki  $P(\omega)$ ,  $Q(\omega)$ ,  $M(\omega)$ ,  $\varphi(\omega)$ ,  $L(\omega)$  są wyznaczone w szerokim zakresie pulsacji, dlatego na osi  $\omega$  stosowana jest skala logarytmiczna. Przy szerokich zakresach pulsacji amplituda sygnałów również zmienia się w szerokim zakresie, więc na osiach opisujących wzmacnienie amplitudy (moduł transmitancji) także zazwyczaj stosuje się skalę logarytmiczną, w szczególności na osi  $L$  jest to skala decybelowa lub podwójna (rys. 14-6) [19].

Zastosowanie skali decybelowej na wykresie  $L(\omega)$  umożliwia prostą konstrukcję wykresu dla iloczynu transmitancji. Iloczyn odpowiada szeregowemu połączeniu transmitancji i jest jedną z podstawowych operacji w badaniach własności dynamicznych, a najłatwiej oblicza się go przy wykładniczej postaci transmitancji:

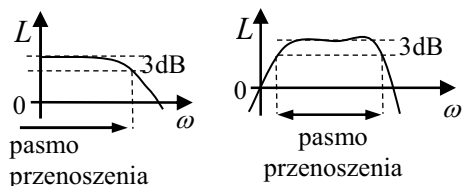
$$G(j\omega) = \prod_{i=1}^n G_i(j\omega) = \prod [M_i(\omega)e^{j\varphi_i(\omega)}] = \prod [M_i(\omega)]e^{j\sum \varphi_i(\omega)}. \quad (14-26)$$

Na tej podstawie oblicza się charakterystyki szeregowego połączenia transmitancji:

- charakterystyka amplitudowa:  $M(\omega) = \prod M_i(\omega)$ ,
- charakterystyka fazowa:  $\varphi(\omega) = \sum \varphi_i(\omega)$ ,
- logarytmiczna charakterystyka modułu:  $L(\omega) = 20\lg(\prod M_i(\omega)) = \sum L_i(\omega)$ .

Spośród tych operacji najłatwiej jest wykonać (zwłaszcza odręcznie) operację dodawania wykresów, dlatego do analizy dynamiki układów często stosuje się logarytmiczne charakterystyki modułu  $L(\omega)$  i fazy  $\varphi(\omega)$ .

Jednym z głównych parametrów wyznaczanych na podstawie charakterystyk częstotliwościowych jest **pasmo przenoszenia**, to znaczy zakres pulsacji, w którym wzmacnienie sygnałów zachowuje określony poziom. Zazwyczaj wyznacza się je na charakterystyce  $L(\omega)$ , przyjmując, że w pasmo przenoszenia wyznacza maksymalny spadek wzmacnienia  $-3$  dB względem wzmacnienia wewnątrz pasma (rys. 14-7). Zmiana wartości  $L(\omega)$  o  $-3$  dB oznacza zmniejszenie wzmacnienia amplitudy sygnału (modułu  $|G(j\omega)|$ ) do około  $0.7$  wartości odniesienia.



Rys. 14-7. Wyznaczanie pasma przenoszenia

Pasmo przenoszenia jest charakterystycznym parametrem filtrów, czyli układów przeznaczonych do przepuszczania lub blokowania sygnałów w określonym zakresie pulsacji. Najczęściej są to układy elektryczne lub pneumatyczne, zapewniające w paśmie przenoszenia  $|G(j\omega)| \approx 1$ , a poza pasmem  $|G(j\omega)| \approx 0$ .

Własności dynamiczne każdego układu fizycznego można interpretować jako własności filtrujące i zazwyczaj są to filtry dolnoprzepustowe (wzmocnienie maleje wraz ze wzrostem pulsacji).

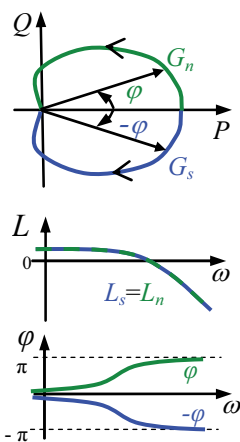
#### 14.4.2. Zastosowanie

Charakterystyki częstotliwościowe opisują układ w stanie ustalonym, ale służą do analizy lub projektowania własności dynamicznych, ponieważ to dynamika układu decyduje o tym jak układ przenosi sygnały sinusoidalne o różnych pulsacjach. Najczęściej są wykorzystywane w badaniach układów stabilnych, ale nie służą do określania stabilności układu ( $\rightarrow$  14.1.2).

**Przykład:** Porównajmy dwa układy (tabela 14-1), które mają takie samo wzmocnienie  $k_{ukl}$  i dwa bieguny w tej samej odległości od osi Im, ale bieguny  $G_s(s)$  leżą w lewej półpłaszczyźnie, a bieguny  $G_n(s)$  w prawej półpłaszczyźnie.

Tabela 14-1. Transmittancje układu stabilnego i niestabilnego

|              | Układ stabilny $G_s(s)$                                                                                                         | Układ niestabilny $G_n(s)$                                                                                                                                                               |
|--------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|              | $p_1 = -2, p_2 = -10, k_{ukl} = 2$                                                                                              | $p_1 = 2, p_2 = 10, k_{ukl} = 2$                                                                                                                                                         |
| $G(s)$       | $\frac{20}{(s+2)(s+10)}$                                                                                                        | $\frac{20}{(s-2)(s-10)}$                                                                                                                                                                 |
| $G(j\omega)$ | $\frac{20}{(2+j\omega)(10+j\omega)}$                                                                                            | $\frac{20}{(-2+j\omega)(-10+j\omega)}$                                                                                                                                                   |
| $M(\omega)$  | $\frac{20}{M_a e^{ja} M_b e^{jb}} = \frac{20}{M_a M_b} e^{-j(a+b)}$                                                             | $\frac{20}{M_a e^{ja} M_b e^{jb}} = \frac{20}{M_a M_b} e^{-j(a+b)}$                                                                                                                      |
| gdzie:       | $M_a = \sqrt{4 + \omega^2}$<br>$M_b = \sqrt{100 + \omega^2}$<br>$a = \arctg \frac{\omega}{2}$<br>$b = \arctg \frac{\omega}{10}$ | $M_a = \sqrt{4 + \omega^2}$<br>$M_b = \sqrt{100 + \omega^2}$<br>$a = \arctg \frac{\omega}{-2} = -\arctg \frac{\omega}{2}$<br>$b = \arctg \frac{\omega}{-10} = -\arctg \frac{\omega}{10}$ |
| gdzie:       | $M e^{j\varphi}$                                                                                                                | $M e^{j\varphi}$                                                                                                                                                                         |
|              | $M = 20 / (\sqrt{4 + \omega^2} \sqrt{100 + \omega^2}), \varphi = \arctg \frac{\omega}{2} + \arctg \frac{\omega}{10}$            |                                                                                                                                                                                          |

Rys. 14-8. Charakterystyki dla  $G_s$  i  $G_n$  (tabela 14-1)

Charakterystyki częstotliwościowe układu umożliwiają analizowanie przenoszenia przez układ nie tylko prostych przebiegów sinusoidalnych, ale także dowolnych przebiegów okresowych, ponieważ każdą funkcję okresową można zapisać jako sumę harmoniczných przebiegów sinusoidalnych [18]. Można więc zastosować zasadę superpozycji:

- wyznaczyć widmo wymuszenia okresowego  $u(t)$ , czyli amplitudę i pulsację poszczególnych harmoniczných funkcji  $u(t)$ ,
- na podstawie charakterystyk częstotliwościowych układu wyznaczyć odpowiedź dla każdej harmonicznej,
- podać rozwiązanie w postaci sumy wyjściowych przebiegów harmoniczných.

Jeśli funkcja okresowa na wejściu jest sumą przebiegów harmoniczných postaci:

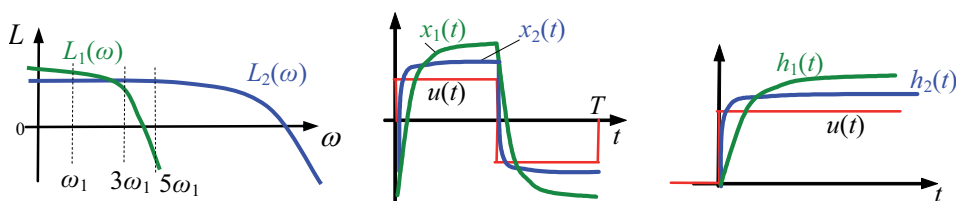
$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} \sin(n\omega_1 t), \text{ to na podstawie charakterystyk } M(\omega) \text{ i } \varphi(\omega) \text{ układu można wy-}$$

znaczyć sygnał na wyjściu układu w postaci:

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_{mn} \sin(n\omega_1 t + \varphi_n), \text{ gdzie: } X_{mn} = M(n\omega_1), \varphi_n = \varphi(n\omega_1).$$

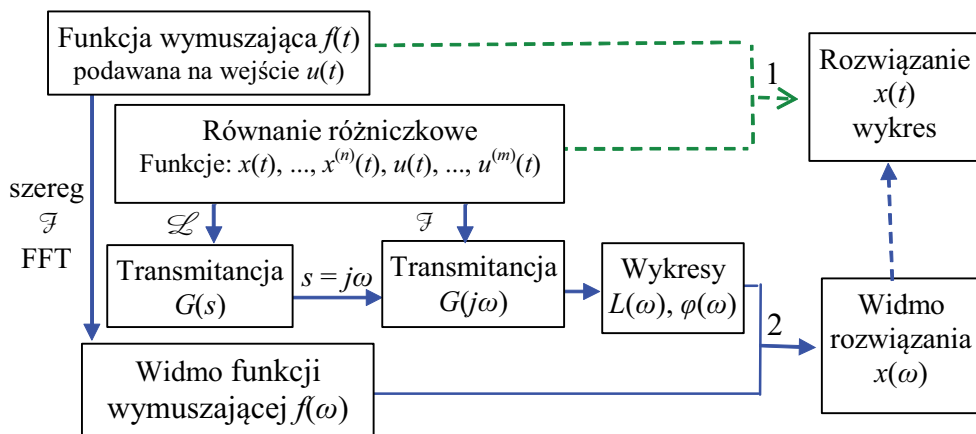
Teoretycznie w rozwinięciu typowych funkcji okresowych (np. fala prostokątna) występuje nieskończenie wiele harmoniczných, ale w praktyce widmo sygnału (liczba harmoniczných) można znacznie ograniczyć, ponieważ im wyższa harmoniczna, tym ma mniejsze znaczenie w rozwinięciu (mniejsza amplituda  $U_{mn}$ ). Poza tym własności dynamiczne fizycznych układów powodują, że wysokie harmoniczne są tłumione – brak wysokich harmoniczných oznacza, że sygnał okresowy po przejściu przez układ jest zniekształcony. Na przykład, jeśli na wejście układu podawany jest przebieg prostokątny, czyli szereg harmoniczny  $u(t) = \frac{4A}{\pi} \left( \frac{\sin \omega_1 t}{1} + \frac{\sin 3\omega_1 t}{3} + \frac{\sin 5\omega_1 t}{5} + \dots \right)$ , to na wyjściu

w stanie ustalonym otrzymujemy przebieg o tym samym okresie, ale zniekształcony i to tym bardziej, im mniejszy zakres pulsacji, dla których układ zachowuje dobre wzmocnienie (węższe pasmo przenoszenia) (rys. 14-9). Ograniczone pasmo przenoszenia wiąże się również ze zniekształceniem przebiegów nieokresowych, co można zaobserwować na przykład w reakcji układu na wymuszenie skokowe – w dziedzinie czasu jest to interpretowane jako wydłużenie czasu stabilizacji. Relacje między charakterystykami częstotliwościowymi i czasowymi zostaną omówione dokładniej na prostych przykładach w podrozdziale 16.4.



Rys. 14-9. Relacje między wykresem wzmocnienia  $L(\omega)$  a przenoszeniem fali prostokątnej przez układ  $x(t)$  i odpowiedzią skokową  $h(t)$

Przebiegi harmoniczne są powszechnie spotykane w fizyce, gdyż różnego typu fale dźwiękowe, świetlne, elektromagnetyczne można przedstawić jako sumę przebiegów harmoniczných. Widmo sygnałów okresowych jest zawsze dyskretne (pulsacje przebiegów harmoniczných są całkowitymi wielokrotnościami pulsacji podstawowej  $\omega_1 = 2\pi/T$ ), ale można wyznaczyć również widmo sygnałów nieokresowych (np. sygnału impulsowego czy stochastycznego) – ma ono charakter ciągły i jest wyznaczane za pomocą przekształcenia Fourier’a  $\mathcal{F}$ , a w obliczeniach numerycznych za pomocą przekształcenia FFT [19]. W ten sposób możliwa jest analiza częstotliwościowa (harmoniczna, widmowa, fourierowska) reakcji układu na różne wymuszenia okresowe i nieokresowe jako alternatywa do analizy przebiegów czasowych (rys. 14-10).



Rys. 14-10. Zastosowanie analizy częstotliwościowej w badaniach dynamiki:

1 (--) analiza czasowa, 2 (—) analiza częstotliwościowa

Opis dynamiki układu w dziedzinie częstotliwości nie jest tak naturalnym sposobem prezentacji własności dynamicznych jak odpowiedzi czasowe, ale jest bardziej precyzyjny i szczególnie użyteczny w badaniach układów przeznaczonych do przetwarzania złożonych sygnałów. Podstawowe badania dynamiki obiektów (procesów) technologicznych nie wymagają zazwyczaj takiej dokładnej analizy. Zastosowanie charakterystyk częstotliwościowych w obszarze automatyki jest znacznie prostsze i często opiera się na logarytmicznych charakterystykach modułu i fazy, które można wyznaczyć w przybliżony sposób i zastosować do analizy i projektowania własności układów ( $\rightarrow 17$ ).

## 15. Częstotliwościowe badania symulacyjne

*czyli symulacyjne ułatwienia dla analizy częstotliwościowej*

### 15.1. Wprowadzenie

Doświadczalne wyznaczanie charakterystyk częstotliwościowych jest pracochłonne, ponieważ wymaga wykonania całej serii eksperymentów. Za każdym razem należy:

- wprowadzić na wejście układu sygnał sinusoidalny o określonej pulsacji  $\omega_1$ ,
- poczekać na ustabilizowanie odpowiedzi – wówczas na wyjściu występuje tylko składowa wymuszona (ustalona) i jest to sygnał sinusoidalny o pulsacji  $\omega_1$ ,
- odczytać amplitudę i przesunięcie fazy sygnału wyjściowego,
- obliczyć wzmocnienie i dodać wyznaczony punkt na wykresie.

Tę sekwencję działań należy powtórzyć wielokrotnie, aby uzyskać odpowiednią dokładność i szeroki zakres wykresu. Na obiektach fizycznych takie działania nie zawsze są możliwe do zrealizowania, ze względu na konieczność generowania sygnałów sinusoidalnych o różnych częstotliwościach. Wyznaczanie charakterystyk częstotliwościowych na podstawie symulacji z wykorzystaniem schematu modelu ( $\rightarrow$  5.2) odbywa się analogicznie jak w warunkach fizycznych, chyba, że program symulacyjny (np. Matlab) zawiera specjalistyczne narzędzia do generowania charakterystyk częstotliwościowych. Jeśli jednak dysponujemy modelem układu w postaci równań stanu czy transmitancji, to wygenerowanie charakterystyk częstotliwościowych najłatwiej jest zrealizować w trybie tekstowym, za pomocą specjalistycznych funkcji ( $\rightarrow$  15.2.1). Zawsze też można narysować wykresy na podstawie definicji ( $\rightarrow$  15.2.2).

### 15.2. Generowanie charakterystyk częstotliwościowych

#### 15.2.1. Specjalistyczne funkcje w skryptach [15,16,17]

Charakterystyki częstotliwościowe najłatwiej jest generować w programach symulacyjnych w trybie tekstowym, przy użyciu specjalizowanych funkcji (tabela 15-1). Można je wykonać dla każdego obiektu LTI – zarówno dla modeli zdefiniowanych w postaci transmitancji (tf), jak i modeli w postaci równań stanu (ss).

Tabela 15-1. Podstawowe funkcje do generowania charakterystyk częstotliwościowych

| Charakterystyka                         | Matlab (Control) / Octave (Control)         | Scilab                                         |
|-----------------------------------------|---------------------------------------------|------------------------------------------------|
| Nyquista $Q(P)$                         | nyquist(model)                              | nyquist(model)                                 |
| Bodego: $L(\omega)$ i $\varphi(\omega)$ | bode(model) %rad/s<br>bodemag(model) %rad/s | bode(Gs,"rad") //rad/s<br>gainplot(model) //Hz |

Charakterystyki częstotliwościowe stosowane są nie tylko do badania dynamiki samych obiektów, ale znacznie częściej do projektowania układów, które zawierają takie

obiekty, na przykład układów regulacji i korekcji (rys. 13-2, rys. 13-3). Dlatego wykresy rysowane za pomocą funkcji nyquist i bode realizują różne dodatkowe zadania, np. automatyczny dobór zakresu pulsacji czy dodatkowe siatki na wykresach. Inny sposób użycia funkcji nyquist i bode to zastosowanie ich jedynie do obliczenia współrzędnych punktów wykresu i użycie tych danych do rysowania za pomocą funkcji plot.

### 15.2.2. Generowanie charakterystyki na podstawie definicji

Specjalistyczne funkcje bardzo ułatwiają rysowanie charakterystyk częstotliwościowych, ale można je też wygenerować na podstawie definicji. W tabeli 15-2 przedstawiono fragmenty skryptów zawierających definicje transmitancji oraz różne warianty generowania wykresu Nyquista (1a÷c) i wykresu Bodego (2a÷c).

Tabela 15-2. Generowanie charakterystyk częstotliwościowych dla transmitancji z tabeli 14-1

| Warianty skryptów i etapy                                                              | Matlab / Octave                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | Scilab                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
|----------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Definicja transmitancji<br>(dla wariantu 1 i 2)                                        | <code>s = tf('s');<br/>Gs = 20/((s+2)*(s+10));</code>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | <code>s = tf('s');<br/>Gs = 20/((s+2)*(s+10));</code>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
| 1a) Obliczenie i rysowanie                                                             | <code>nyquist(Gs);</code>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | <code>nyquist(Gs);</code>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| 1b) Obliczenie<br>Korekcja formatu<br>Rysowanie                                        | <code>[p, q, tabw] = nyquist(Gs);<br/>p = squeeze(p); q = squeeze(q);<br/>plot(p, q, 'g--');</code>                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| 1c) Zakres $\omega$ ( $10^{-1} \div 10^3$ )<br>Obliczenia z definicji<br><br>Rysowanie | <code>tabw = logspace(-1,3,50);<br/>M1 = (20 - tabw.^2) .^2;<br/>M2 = (12*tabw) .^2;<br/>P = 20*(20 - tabw.^2) ./ (M1+M2);<br/>Q = -20* 12*tabw ./ (M1+M2);<br/>plot(P,Q,'r--');</code>                                                                                                                                                                                     | <code>tabw = logspace(-1,3,50);<br/>M1 = (20 - tabw.^2) .^2;<br/>M2 = (12*tabw) .^2;<br/>P = 20*(20 - tabw.^2) ./ (M1+M2);<br/>Q = -20* 12*tabw ./ (M1+M2);<br/>plot(P,Q,'r--');</code>                                                                                                                                                                                     |
| 2a) Obliczenie i rysowanie                                                             | <code>bode(Gs);</code>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | <code>bode(Gs,"rad");</code>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
| 2b) Obliczenie<br>Korekcja formatu<br>Rysowanie                                        | <code>[m,fi, tabw] = bode(Gs);<br/>m = squeeze(m); fi = squeeze(fi);<br/>subplot(2,1,1);<br/>semilog(xtabw, 20*log10(m),'g--');<br/>subplot(2,1,2);<br/>semilogx(tabw, fi,'g--');</code>                                                                                                                                                                                    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| 2c) Zakres $\omega$ ( $10^{-1} \div 10^3$ )<br>Obliczenia z definicji<br><br>Rysowanie | <code>tabw = logspace(-1,3,50);<br/>M1 = (20 - tabw.^2) .^2;<br/>M2 = (12*tabw) .^2;<br/>P = 20*(20 - tabw.^2) ./ (M1+M2);<br/>Q = -20* 12*tabw ./ (M1+M2);<br/>M = sqrt(P.^2+Q.^2);<br/>Fi = atan2(Q,P) * 180/pi;<br/>subplot(2,1,1);<br/>semilog(xtabw, 20*log10(M),'r--');<br/>subplot(2,1,2);<br/>semilogx(tabw, Fi,'r--');<br/>loglog(tabw, 20*log10(M),'r--');</code> | <code>tabw = logspace(-1,3,50);<br/>M1 = (20 - tabw.^2) .^2;<br/>M2 = (12*tabw) .^2;<br/>P = 20*(20 - tabw.^2) ./ (M1+M2);<br/>Q = -20* 12*tabw ./ (M1+M2);<br/>M = sqrt(P.^2+Q.^2);<br/>Fi = atan2(Q,P) * 180/pi;<br/>subplot(2,1,1);<br/>semilog(xtabw, 20*log10(M),'r--');<br/>subplot(2,1,2);<br/>semilogx(tabw, Fi,'r--');<br/>loglog(tabw, 20*log10(M),'r--');</code> |

Wszystkie trzy warianty generowania charakterystyk częstotliwościowych zostały wykonane dla transmitancji  $G_s(j\omega)$  rozważanej już wcześniej (tabela 14-1).

Podstawą skryptów są przekształcenia transmitancji:  $G_s(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) = M(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$

– Przekształcenie  $G_s(s) \rightarrow G_s(j\omega)$ :

$$\frac{20}{(s+2)(s+10)} \rightarrow G_s(j\omega) = \frac{20}{(2+j\omega)(10+j\omega)} = \frac{20}{20-\omega^2+j12\omega} = 20 \frac{20-\omega^2-j12\omega}{(20-\omega^2)^2+(12\omega)^2}$$

– Część rzeczywista i urojona:

$$P(\omega) = 20 \frac{20-\omega^2}{(20-\omega^2)^2+(12\omega)^2}, \quad Q(\omega) = 20 \frac{-12\omega}{(20-\omega^2)^2+(12\omega)^2}$$

– Moduł i faza:

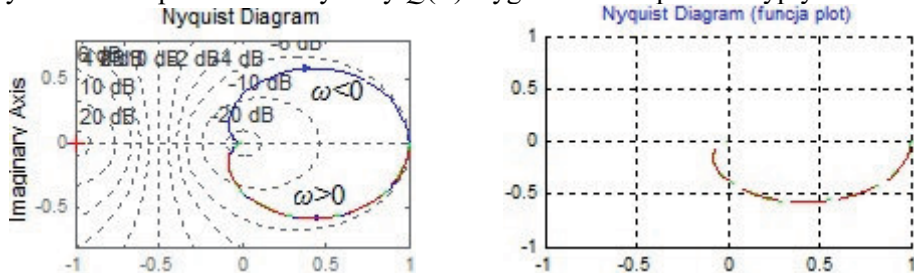
$$M(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} = \frac{20}{\sqrt{(20-\omega^2)^2 + (12\omega)^2}}, \quad \varphi(\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = \arctg \frac{-12\omega}{20-\omega^2}$$

Uwaga:  $\varphi(\omega)$  zmienia się w zakresie  $0 \div \pi$ .

#### Uwagi do skryptu 2c:

- Wartości  $M(\omega)$  można obliczyć na podstawie definicji  $M = \sqrt{P^2 + Q^2}$  lub na podstawie wzoru końcowego, czyli:  $M = 20 / \sqrt{M1^2 + M2^2}$ .
- Wartości  $\varphi(\omega)$  trzeba obliczać na podstawie definicji  $\varphi = \text{atan2}(Q, P)$ , ponieważ funkcja  $\text{atan}$  zwraca wartości  $\varphi$  w zakresie  $-\pi \div \pi$ . Zastosowanie wzoru końcowego, w którym występuje funkcja  $\text{atan}$ , czyli  $\varphi = \text{atan}(-12\omega / (20 - \omega^2))$ , zwraca wartości tylko w zakresie  $-\pi/2 \div \pi/2$ .

Na rysunku 15-5 porównano wykresy  $Q(P)$  wygenerowane przez skrypty 1a÷c.



Rys. 15-1. Wykres Nyquista (tabela 15-2): po lewej skrypty 1a÷c; po prawej tylko skrypty 1b÷c

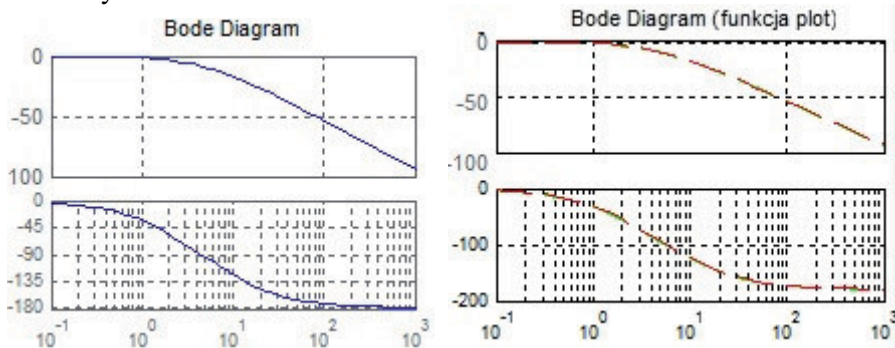
**Skrypt 1a:** Funkcja nyquist oblicza i rysuje wykres  $Q(P)$ , który jest rysowany dla  $\omega > 0$  i  $\omega < 0$  (części wykresu są symetryczne względem osi  $\omega$ ).

**Skrypt 1b:** Funkcja nyquist oblicza współrzędne  $P$  i  $Q$  tylko dla  $\omega > 0$  i w takim zakresie jest rysowany wykres  $Q(P)$ .

**Skrypt 1c:** Współrzędne  $P$  i  $Q$  są obliczane z definicji i rysowane dla wygenerowanego wektora pulsacji ( $10^{-2} \div 10^3$ ).

W Matlabie funkcja nyquist poza narysowaniem wykresu oznacza punkt  $(-1, 0)$  i dodaje siatkę, która umożliwia wyznaczenie wartości  $M(\omega)$  i  $\varphi(\omega)$  dla transmitancji  $1/(G(j\omega)+1)$ , co jest wykorzystywane podczas projektowania układów regulacji.

Porównanie wykresów  $L(\omega)$  narysowane poprzez wykonanie skryptów 2a÷c przedstawiono na rysunku 15-2.



Rys. 15-2. Wykresy Bodego (tabela 15-2): po lewej skrypt 2a; po prawej skrypty 2b÷c

**Skrypt 2a:** Funkcja bode oblicza wzmocnienie oraz fazę, rysuje  $M(\omega)$  w skali decybelowej  $L(\omega)$  oraz  $\varphi(\omega)$  w stopniach.

**Skrypt 2b:** Funkcja bode oblicza  $M(\omega)$  i  $\varphi(\omega)$ . Aby uzyskać wykresy identyczne jak dla skryptu 2a należy:

- otrzymane wartości  $M(\omega)$  przeliczyć na dB i narysować w skali półlogarytmicznej (funkcja semilogx),
- otrzymane wartości  $\varphi(\omega)$  narysować w skali półlogarytmicznej (funkcja semilogx).

**Skrypt 2c:** Wartości  $M(\omega)$  i  $\varphi(\omega)$  są obliczane z definicji dla wygenerowanego wektora pulsacji ( $10^{-1} \div 10^3$ ). Aby uzyskać wykresy identyczne jak dla skryptu 2a należy:

- otrzymane wartości  $M(\omega)$  przeliczyć na dB i narysować w skali półlogarytmicznej (funkcja semilogx),
- otrzymane wartości  $\varphi(\omega)$  przeliczyć na stopnie i narysować w skali półlogarytmicznej (funkcja semilogx).

W Matlabie funkcja bode poza narysowaniem wykresu zapewnia jeszcze siatkę logarytmiczną, która ułatwia odczytywane wartości.

## **VII. Podstawowe obiekty dynamiki**



## 16. Podstawowe obiekty dynamiki

*czyli zestaw elementarnych wzorców dynamiki*

### 16.1. Wprowadzenie

Najprostsze przypadki modeli dynamiki, przedstawiane zazwyczaj w postaci transmitancji, nazywane są **podstawowymi obiektami dynamiki** lub **podstawowymi członami dynamiki**. Mogą to być modele wynikające z bardzo uproszczonego opisu obiektu albo składniki złożonych układów dynamiki. Podstawowe człony są często wykorzystywane w różnych metodach analizowania i projektowania własności obiektów i układów regulacji [8, 10].

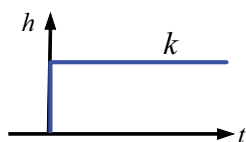
Omówione zostaną przede wszystkim najważniejsze przypadki stosowane w praktyce inżynierskiej, to znaczy idealne człony dynamiki z typowymi, czyli dodatnimi wartościami wzmocnienia  $k$  i parametrów czasowych ( $\rightarrow$  16.2÷16.8). Krótką charakterystykę pozostałych, szczególnych przypadków zawiera podrozdział 16.9. Własności członów zilustrowano za pomocą podstawowych charakterystyk czasowych (odpowiedzi skokowych) oraz charakterystyk częstotliwościowych.

### 16.2. Człon proporcjonalny

#### 16.2.1. Definicje i charakterystyki

**Człon proporcjonalny** (wzmacniający, bezinercyjny) oznacza wzmocnienie sygnału wejściowego bez opóźnienia i zniekształcenia (rys. 16-1), czyli transmitancję:

$$G(s) = k. \quad (16-1)$$



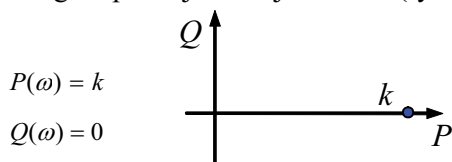
Rys. 16-1. Odpowiedź skokowa członu proporcjonalnego

Jest to jednocześnie opis statyczny obiektu:

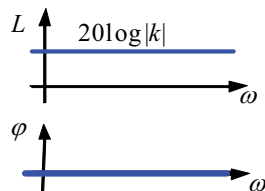
$$a_0 x(t) = b_0 u(t) \rightarrow x(t) = k_{ukl} u(t). \quad (16-2)$$

Model taki jest zawsze stabilny – rozwiązanie zawiera tylko składową wymuszoną (nie ma równania charakterystycznego, biegunów i składowej swobodnej).

Własności członu proporcjonalnego nie zależą od pulsacji, to znaczy, że układ przenosi wszystkie sygnały sinusoidalne z takim samym wzmocnieniem  $k$  i bez przesunięcia fazowego. Charakterystyki Nyquista mają więc postać punktu (rys. 16-2), a Bodego – prostej o stałej wartości (rys. 16-3).



Rys. 16-2. Wzory i wykres Nyquista członu (16-1)



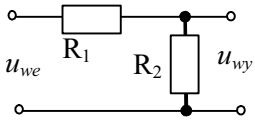
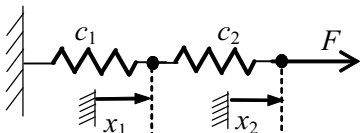
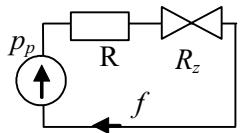
Rys. 16-3. Wykresy Bodego członu (16-1)

Człon proporcjonalny wzmacnia tak samo sygnały o stałej wartości i sygnały sinusoidalne ( $k = k_{ukt}$ ).

16.2.2. Fizyczne realizacje członu

Tak prosty opis obiektu jak człon proporcjonalny stosuje się wówczas, gdy jego reakcja na zmiany następuje prawie natychmiast, tzn. jest bardzo szybka w porównaniu do innych procesów. Przykłady fizycznych układów, które mają charakter członu proporcjonalnego przedstawiono w tabeli 16-1.

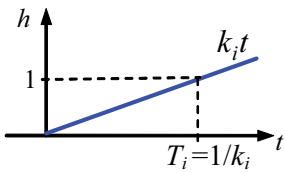
Tabela 16-1. Wybrane przykłady obiektów typu człon proporcjonalny

| Dzielnik napięcia                                                                 | Układ sprężyn                                                                                      | Obwód hydrauliczny                                                                 |
|-----------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
|  |                   |  |
| $u_{wy}(t) = R_2 \frac{u_{we}(t)}{R_1 + R_2}$                                     | $\begin{cases} 0 = c_1 x_1(t) + c_2 (x_1(t) - x_2(t)) \\ F(t) = c_2 (x_2(t) - x_1(t)) \end{cases}$ | $p_p(t) = f(t)(R + R_z)$<br>zależności przybliżone                                 |
| $u_{wy}(s) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} u_{we}(s)$                                     | $x_1(s) = \frac{1}{c_1} F(s), \quad x_2(s) = \frac{c_1 + c_2}{c_1 c_2} F(s)$                       | $f(s) = \frac{1}{R + R_z} p_p(s)$                                                  |

16.3. Człon całkujący

16.3.1. Definicje i charakterystyki

**Człon całkujący** realizuje operację całkowania sygnału wejściowego (rys. 16-4) i w zapisie operatorowym jest przedstawiany w postaci:



Rys. 16-4. Odpowiedź skokowa a parametry członu całkującego

$$G(s) = \frac{1}{T_i s} \text{ lub } G(s) = k_i \frac{1}{s}, \tag{16-3}$$

gdzie:  $T_i$  – czas całkowania,  $k_i$  – wzmacnienie całkowania. Równanie różniczkowe członu:

$$a_1 \dot{x}(t) = b_0 u(t) \rightarrow \dot{x}(t) = k_i u(t) \tag{16-4}$$

i jego rozwiązanie:  $x(t) = k_i \int u(t) dt + x_0$  umożliwia

wyjaśnienie braku równania statycznego i wzmacnienia  $k_{ukt}$ , co obserwujemy podczas analizy własności członu (tabela 16-2).

Tabela 16-2. Wybrane elementy analizy członu całkującego

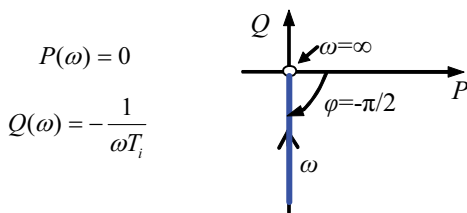
| Na podstawie                                                                    | równania różniczkowego                | transmitancji                                                                                          |
|---------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Punkt równowagi $x_k$ dla $u(t) = \text{const} \neq 0$<br>Wzmocnienie $k_{ukl}$ | brak                                  | $x_k = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{T_i s} \frac{u_k}{s} = \infty$<br>brak $x_k$ , brak $k_{ukl}$ |
| Punkt równowagi dla $u(t) = \delta(t)$                                          | $x_k = k_i \int \delta(t) dt = k_i$   | $x_k = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{T_i s} 1 = \frac{1}{T_i}$                                     |
| Równanie charakterystyczne i bieguny                                            | $a_1 \lambda = 0 \rightarrow p_1 = 0$ | $T_i s = 0 \rightarrow p_1 = 0$                                                                        |
| Odpowiedź skokowa $h(t)$                                                        | $h(t) = k_i t$                        | $h(t) = t / T_i$                                                                                       |
| Odpowiedź impulsowa $g(t)$                                                      | $g(t) = \dot{h}(t) = k_i$             | $g(t) = \dot{h}(t) = 1 / T_i$                                                                          |

Rozwiązanie  $h(t)$  uzasadnia graficzną interpretację czasu całkowania  $T_i$  – w chwili  $t = T_i$  układ całkujący osiąga na wyjściu wartość stałego wymuszenia na wejściu. Specyficzną cechą członu całkującego jest także biegun o wartości zero, leżący na osi Im, czyli na granicy stabilności. Ten zerowy biegun wprowadza do rozwiązania składową swobodną postaci  $Ae^{0t} = A$ , czyli stałą (zależną od warunków początkowych), a to oznacza, że nie jest spełniony warunek stabilności asymptotycznej ( $\rightarrow$  6.2.2). Stosując słabszą definicję stabilności BIBO, człon całkujący jest stabilny dla wymuszenia impulsowego, ale dla wymuszenia skokowego jest niestabilny.

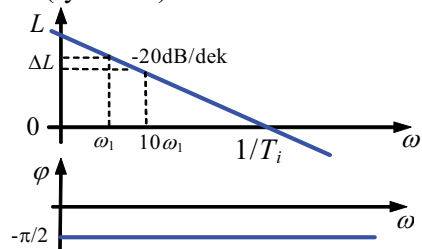
Charakterystyki częstotliwościowe członu całkującego powstają po wyznaczeniu transmitancji widmowej zgodnie z (14-20), czyli:

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega T_i} = -j \frac{1}{\omega T_i} = \left| \frac{1}{\omega T_i} \right| e^{-j\pi/2}. \quad (16-5)$$

Wyrażenie  $G(j\omega)$  zawiera tylko część urojoną  $Q(\omega)$ , która jest zawsze ujemna i ma wartość proporcjonalną do odwrotności pulsacji  $\omega$ , co oznacza, że wykres Nyquista leży na ujemnej części osi Im i zmierza od  $-\infty$  do 0 (rys. 16-5).



Rys. 16-5. Wzory i wykres Nyquista członu (16-3)



Rys. 16-6. Wykresy Bodego członu (16-3)

W tej sytuacji moduł transmitancji  $M(\omega)$  jest również jest proporcjonalny do nieliniowej funkcji  $1/\omega$ . Charakterystyka  $L(\omega)$  (rys. 16-6) natomiast, czyli:

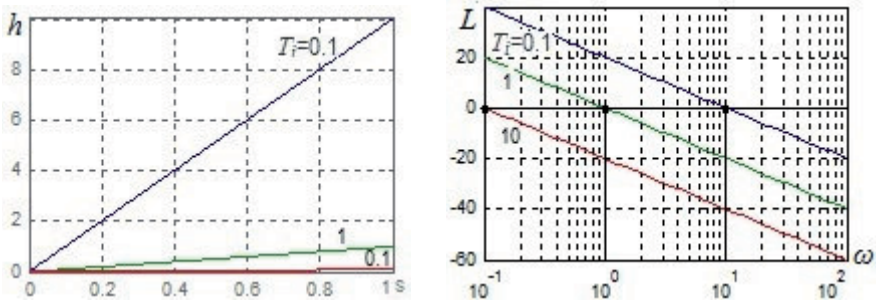
$$L(\omega) = 20 \lg \left| \frac{1}{\omega T_i} \right| = 20 \lg 1 - 20 \lg T_i - 20 \lg \omega, \quad (16-6)$$

jest proporcjonalna do  $\lg \omega$ , czyli jest linią prostą w układzie z logarytmiczną skalą osi  $\omega$ . Prosta, która wyznacza wykres  $L(\omega)$  ma następujące własności:

- przecina oś  $\omega$  w punkcie  $\omega = 1/T_i$ ,  
Wykres  $L(\omega) = 20\lg|M(\omega)|$  przecina oś, wówczas gdy  $M(\omega) = 1$ , czyli  $\frac{1}{\omega T_i} = 1 \rightarrow \omega = \frac{1}{T_i}$
- ma nachylenie  $-20$  dB/dek, niezależnie od parametrów członu.  
Nachylenie jako zmiana wartości  $\Delta L = L(10\omega_1) - L(\omega_1)$ , tzn. w zakresie 1 dekady  $\omega$ :  
$$\frac{\Delta L}{\Delta \omega} = 20\lg\left|\frac{1}{10\omega_1 T_i}\right| - 20\lg\left|\frac{1}{\omega_1 T_i}\right| = -20\lg(10\omega_1) + 20\lg(\omega_1) = 20\lg\frac{\omega_1}{10\omega_1} = 20\lg\frac{1}{10} = -20 \frac{\text{dB}}{\text{dek}}$$

Wykresy Bodego pokazują, że człon całkujący powoduje zawsze takie samo przesunięcie fazowe sygnałów sinusoidalnych ( $-90^\circ$ ), ale wraz ze wzrostem pulsacji pogarsza się ich wzmocnienie.

Charakterystyki przykładowych członów całkujących przedstawiono na rysunku 16-7.



Rys. 16-7. Charakterystyki  $h(t)$  i  $L(\omega)$  czlonu całkujacego ( $T_i = 0.1; 1; 10$ )

16.3.2. Fizyczne realizacje czlonu

Można wskazać proste obiekty fizyczne o własnościach całkujących, a przykłady takich układów przedstawiono w tabeli 16-3.

Tabela 16-3. Wybrane przykłady obiektów typu czlon całkujący

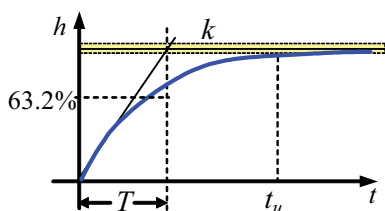
| Zbiornik z pompą                                         | Ruch bez oporu                                | Idealny kondensator                      | Element całkujący                |
|----------------------------------------------------------|-----------------------------------------------|------------------------------------------|----------------------------------|
|                                                          |                                               |                                          |                                  |
| $A\dot{h}(t) = f_{we}(t) - f_{wy}(t)$                    | $m\ddot{x}(t) = F(t)$<br>$m\dot{v}(t) = F(t)$ | $u_c(t) = \frac{1}{C} \int i_{we}(t) dt$ |                                  |
| $h(s) = \frac{1}{As} f_{we}(s) - \frac{1}{As} f_{wy}(s)$ | $v(s) = \frac{1}{sm} F(s)$                    | $u_c(s) = \frac{1}{sC} i_{we}(s)$        | $u_{wy} = \frac{-1}{sRC} e_{we}$ |

Przykład zbiornika z pompą dobrze ilustruje charakterystyczną cechę układów całujących – wpływ z magazynu nie zależy od zawartości magazynu. Człon ma szczególne znaczenie w konstrukcji urządzeń sterujących (np. regulator PID).

## 16.4. Człon inercyjny

### 16.4.1. Definicje i charakterystyki

Podstawowy **człon inercyjny** to stabilny układ pierwszego rzędu, który osiąga stan ustalony sposób w aperiodyczny (rys. 16-8) i jest opisany transmitancją postaci:



$$G(s) = \frac{k}{Ts + 1}, \quad (16-7)$$

gdzie stała czasowa  $T$  jest większa od zera i ma swoją interpretację graficzną. Transmitancja ta wynika z równania różniczkowego:

$$a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = b_0 u(t). \quad (16-8)$$

Rys. 16-8. Odpowiedź skokowa  
a parametry członu inercyjnego

Na podstawie równania różniczkowego lub transmitancji można wyznaczyć charakterystyczne własności członu inercyjnego (tabela 16-4).

Tabela 16-4. Wybrane elementy analizy członu inercyjnego ( $\rightarrow$  7.2)

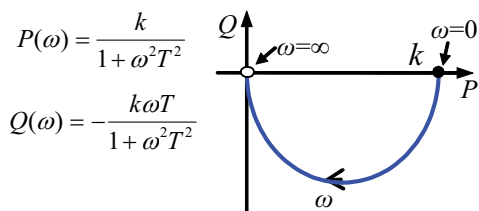
|                                                                                 | Na podstawie | równania różniczkowego                                                         | transmitancji                                                                                        |
|---------------------------------------------------------------------------------|--------------|--------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Punkt równowagi $x_k$ dla $u(t) = \text{const} \neq 0$<br>Wzmocnienie $k_{ukl}$ |              | $a_0 x = b_0 u \rightarrow k_{ukl} = \frac{b_0}{a_0}$ ,<br>$x_k = k_{ukl} u_u$ | $x_k = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{k}{Ts + 1} \frac{u_k}{s} = k u_k$<br>$\rightarrow k_{ukl} = k$ |
| Równanie charakterystyczne i bieguny                                            |              | $a_1 \lambda + a_0 = 0 \rightarrow p_1 = -a_0/a_1$                             | $Ts + 1 = 0 \rightarrow p_1 = -1/T$                                                                  |
| Odpowiedź skokowa $h(t)$<br>(składowa wymuszona i swobodna)                     |              | $h(t) = k_{ukl} \left(1 - e^{(-a_0/a_1)t}\right)$                              | $h(t) = k_{ukl} \left(1 - e^{(-1/T)t}\right)$                                                        |
| Czas ustalania ( $p_1 < 0$ , $\varepsilon = 2\%$ ) $t_u \approx 4/ p_1 $        |              | $t_u \approx 4a_1/a_0$                                                         | $t_u \approx 4T$                                                                                     |

Analizując wzór na odpowiedź skokową członu inercyjnego ( $\rightarrow$  7.2), można wykazać, że styczna w punkcie  $t = 0$  przecina poziom stanu ustalonego po czasie równym stałej czasowej  $T$ , natomiast wartość rozwiązania w chwili  $t = T$  wynosi 63.2% wartości stanu ustalonego. Ta interpretacja graficzna wskazuje, że stała czasowa jest wyrażana w tych samych jednostkach jak czas na osi  $t$ .

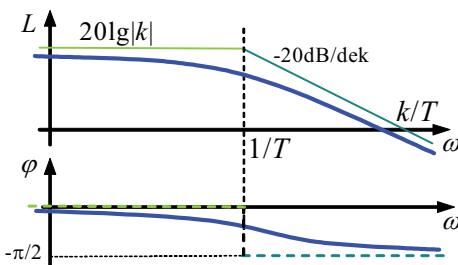
Charakterystyki częstotliwościowe członu inercyjnego, oparte na różnych postaciach transmitancji widmowej (14-20), czyli:

$$G(j\omega) = \frac{k}{1 + j\omega T} = \frac{k}{1 + \omega^2 T^2} - j \frac{k\omega T}{1 + \omega^2 T^2} = \left| \frac{k}{1 + j\omega T} \right| e^{j \arctg(-\omega T)}, \quad (16-9)$$

przedstawiono na rysunkach 16-9 i 16-10.



Rys. 16-9. Wzory i wykres Nyquista członu (16-7)



Rys. 16-10. Wykresy Bodego dokładne i asymptotyczne (16-7)

Dla logarytmicznej charakterystyki  $L(\omega)$ , można narysować dwie asymptoty:

- dla małych wartości  $\omega$ , tzn. gdy  $\omega \ll 1/T$ , transmitancja  $G(j\omega) \approx k$ , czyli człon proporcjonalny,
- dla dużych wartości  $\omega$ , tzn. gdy  $\omega \gg 1/T$ , transmitancja  $G(j\omega) \approx k/(j\omega T)$ , czyli człon całkujący.

$$G(j\omega) = \frac{k}{1 + j\omega T} \xrightarrow{1 \gg \omega T} \frac{k}{1} = k = k_{ukl}$$

$$G(j\omega) = \frac{k}{1 + j\omega T} \xrightarrow{1 \ll \omega T} \frac{k}{j\omega T}$$

Wykresy członu proporcjonalnego i całkującego tworzą krzywą łamaną, którą nazywamy logarytmiczną asymptotyczną charakterystyką modułu. Jest ona na tyle dokładna, że można ją stosować podczas badań i projektowania układów – maksymalny błąd w punkcie załamania wynosi 3 dB.

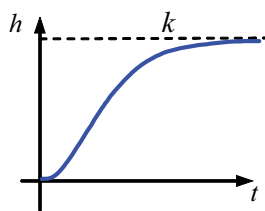
Dla  $\omega = \frac{1}{T}$  charakterystyka dokładna:  $L(\omega) = 20\lg \left| \frac{k}{1 + j} \right| = 20\lg \left( \frac{k}{\sqrt{2}} \right)$ , a przybliżona:  $20\lg|k|$

$$\text{Różnica: } 20\lg \left( \frac{k}{\sqrt{2}} \right) - 20\lg(k) = 20\lg \left( \frac{k}{k\sqrt{2}} \right) = 20\lg \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \approx -3\text{dB}$$

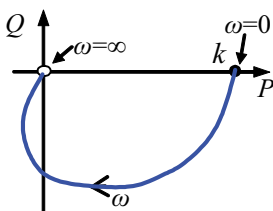
Człon inercyjny jest podstawowym składnikiem opisu dynamiki większości obiektów fizycznych. Iloczyn  $n$  członów inercyjnych nazywany jest **członem inercyjnym  $n$ -tego rzędu**, np.:

$$\frac{k}{(T_1 s + 1) \dots (T_n s + 1)} \text{ lub } \frac{k}{(T s + 1)^n}. \quad (16-10)$$

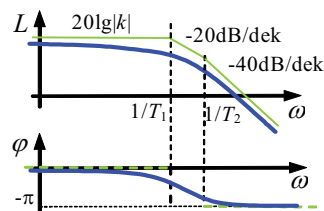
Gdy stałe czasowe są dodatnie, to układ jest stabilny i jego odpowiedź skokowa ma postać przebiegu aperiodycznego z mniej lub bardziej widocznym punktem przegięcia (rys. 16-11). Z kolei wykres Nyquista członu  $n$ -tego rzędu przechodzi przez  $n$  ćwiartek płaszczyzny zespolonej (rys. 16-12).



Rys. 16-11. Odpowiedź skokowa układu rzędu  $> 1$



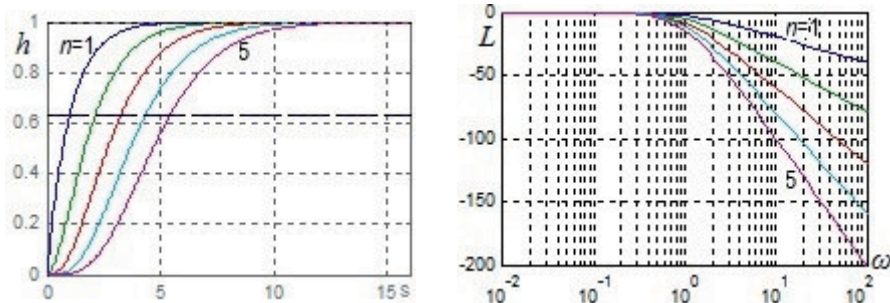
Rys. 16-12. Wykres Nyquista (układ drugiego rzędu)



Rys. 16-13. Wykresy Bodego dokładne i asymptotyczne (układ drugiego rzędu)

Jednak najciekawsze własności mają wykresy Bodego (rys. 16-13), ponieważ są one sumą wykresów członów składowych, zgodnie z (14-26) (najłatwiej jest wykonać tę operację na charakterystykach asymptotycznych, co omówimy w → 17.2). Asymptota  $20\lg|k|$  wyznacza maksymalne wzmocnienie członu przy najniższych pulsacjach ( $\omega \rightarrow 0$ ) i odpowiada wzmocnieniu układu ( $k_{ukl}$ ). Nachylenie charakterystyki  $L(\omega)$  osiąga wartość  $n \cdot 20$  dB/dek, a przesunięcie fazowe zmierza do  $-n \cdot 90^\circ$ .

Wpływ rzędu inercji na charakterystyki można zaobserwować na przykład dla członów inercyjnych o tej samej stałej czasowej i rzędach 1÷5 (rys. 16-14).



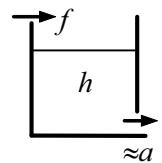
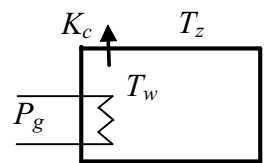
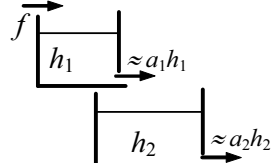
Rys. 16-14. Charakterystyki  $h(t)$  i  $L(\omega)$  członów inercyjnych rzędu  $n = 1 \div 5$  ( $T = 1$ ,  $k_{ukl} = 1$ )

Na podstawie wykresów Bodego można interpretować człon inercyjny jako filtr dolnoprzepustowy – układ dobrze przenosi sygnały o pulsacji  $\omega < 1/T$ . Im mniejsza stała czasowa, tym szersze pasmo przenoszenia, czyli zakres pulsacji, w którym występuje wzmocnienie sygnału (moduł transmitancji jest większy od 1).

## 16.4.2. Przykłady obiektów fizycznych

Człony inercyjne to podstawowy sposób opisywania układów fizycznych, ponieważ większość zjawisk ma charakter inercyjny, to znaczy, że zmiana sygnałów wejściowych powoduje stopniowe dochodzenie układu do nowego stanu ustalonego. Tabela 16-5 zawiera kilka przykładów bardzo prostych obiektów inercyjnych, zawierających magazyny masy i energii.

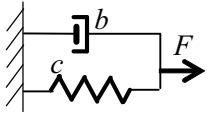
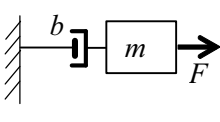
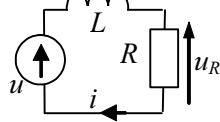
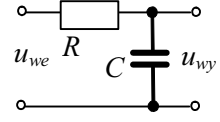
Tabela 16-5. Wybrane przykłady obiektów inercyjnych (zbiorniki, obiekty cieplne)

| Zbiornik                                                                          | Pomieszczenie z grzałką                                                                      | Kaskada niewspółdziałająca                                                                                                           |
|-----------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  |             |                                                    |
| $A\dot{h}(t) = f(t) - ah(t)$                                                      | $C_v \dot{T}_w(t) = P_g(t) - K_c(T_w(t) - T_z(t))$                                           | $\begin{cases} A_1 \dot{h}_1(t) = f(t) - a_1 h_1(t) \\ A_2 \dot{h}_2(t) = a_1 h_1(t) - a_2 h_2(t) \end{cases}$                       |
| $h(s) = \frac{1}{As + a} f(s)$                                                    | $T_w(s) = \frac{1}{C_v s + K_c} P_g(s) + \frac{K_c}{C_v s + K_c} T_z(s)$                     | $\begin{aligned} h_1(s) &= \frac{1}{A_1 s + a_1} f(s) \\ h_2(s) &= \frac{1}{A_1 s + a_1} \frac{a_1}{A_2 s + a_2} f(s) \end{aligned}$ |
| $T = \frac{A}{a}, \frac{\text{m}^2}{\text{m}^2/\text{s}} = \text{s}$              | $T = \frac{C_v}{K_c}, \frac{\text{J/K}}{\text{W/K}} = \frac{\text{Ws}}{\text{W}} = \text{s}$ | $T = \frac{A}{a}, \frac{\text{m}^2}{\text{m}^2/\text{s}} = \text{s}$                                                                 |

Porównując równania bilansowe zbiornika z wypływem i pomieszczenia z grzałką, można zauważyć wspólną cechę tych obiektów – zdolność do samowyrównywania. Wynika ona z wewnętrznego sprzężenia, które polega na tym, że im większa zawartość magazynu (objętość cieczy, akumulacja energii), tym większy wypływ (straty). Na podstawie tej obserwacji można wskazać inne przykłady układów inercyjnych, nazywanych inaczej **obiektami z samowyrównywaniem**. Połączenie takich układów tworzy obiekty inercyjne wyższych rzędów. Bardzo łatwo można to zaobserwować w przypadku transmitancji, która opisuje szeregowe połączenie układów (kaskadą niewspółdziałającą). Dotyczy to także kaskad współdziałających, ponieważ bieguny takich układów są zawsze rzeczywiste, ujemne (tabela 10-2). W tym przypadku jednak nie wszystkie transmitancje kaskady są członami czysto inercyjnymi (niektóre liczniki transmitancji zawierają wielomiany).

Z kolei układy mechaniczne i elektryczne o własnościach inercyjnych najłatwiej jest wskazać, gdy zawierają one element reprezentujący straty energii – w układach mechanicznych tłumik, w obwodach elektrycznych rezystancja (tabela 16-6).

Tabela 16-6. Wybrane przykłady obiektów inercyjnych (układy mechaniczne, elektryczne)

| Sprężyna i tłumik                                                                 | Ruch w ośrodku                                                                                                                                            | Obwód z cewką                                                                          | Czwórnik inercyjny                                                                                                       |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  |                                                                          |       |                                        |
| $b\dot{x}(t) + cx(t) = F(t)$                                                      | $m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) = F(t)$<br>$m\dot{v}(t) + bv(t) = F(t)$                                                                                       | $sLi(s) + Ri(s) = u(s)$                                                                | $u_{wy}(s) = \frac{1}{sC} \frac{u_{we}(s)}{R + 1/(sC)}$                                                                  |
| $x(s) = \frac{1/c}{sb/c + 1} F(s)$                                                | $v(s) = \frac{1/b}{sm/b + 1} F(s)$                                                                                                                        | $i(s) = \frac{1/R}{sL/R + 1} u(s)$<br>$u_R(s) = \frac{1}{sL/R + 1} u(s)$               | $u_{wy}(s) = \frac{1}{sRC + 1} u_{we}(s)$                                                                                |
| $T = \frac{b}{c}, \frac{\text{Ns/m}}{\text{N/m}} = \text{s}$                      | $T = \frac{m}{b}, \frac{\text{kg}}{\text{Ns/m}} = \text{s}$<br>( $\text{N} = \text{kg} \cdot \text{m/s}^2 \rightarrow \text{kg} = \text{Ns}^2/\text{m}$ ) | $T = \frac{L}{R}, \frac{\text{H}}{\Omega} = \frac{\text{Vs/A}}{\text{V/A}} = \text{s}$ | $T = RC, \Omega F = \frac{\text{V}}{\text{A}} \frac{\text{C}}{\text{V}} = \text{s}$<br>( $C = \text{A} \cdot \text{s}$ ) |

W przedstawionych przykładach wyznaczono wzór na stałą czasową  $T$  układu i wykonano operacje na jednostkach fizycznych, które potwierdzają interpretację tego parametru na osi czasu (rys. 16-8) i sekundę jako jej wymiar.

## 16.5. Człon różniczkujący

### 16.5.1. Definicje i charakterystyki

**Człon różniczkujący** opisuje operację idealnego różniczkowania sygnału wejściowego (rys. 16-15), która w zapisie operatorowym ma postać transmitancji:



Rys. 16-15. Odpowiedź skokowa idealnego członu różniczkującego

$$G(s) = T_d s, \quad (16-11)$$

gdzie:  $T_d$  – czas różniczkowania. Pierwotna postać członu to równanie:

$$a_0 x(t) = b_1 \dot{u}(t) \rightarrow x(t) = k_d \dot{u}(t), \quad (16-12)$$

które jednocześnie określa rozwiązanie. Zawiera ono tylko składową wymuszoną (nie występuje składowa swobodna, nie ma równania charakterystycznego, nie ma biegunów) – obiekt jest stabilny. Z analizy własności członu (tabela 16-7) wynika, że odpowiedzią na wymuszenie skokowe jest funkcja impulso-wa, ale fizyczne uzyskanie takiej odpowiedzi nie jest możliwe, ponieważ idealny impuls to funkcja  $\delta(t)$ , która ma wartość zero poza jedyną chwilą  $t = 0$ , gdy ma wartość ma nieskończoną.

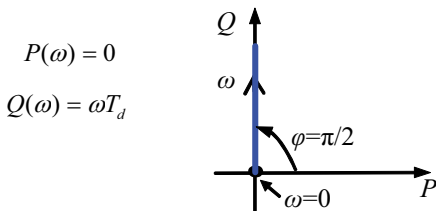
Tabela 16-7. Wybrane elementy analizy członu różniczkującego

|                                                        | Na podstawie | rów.różniczkowego          | transmitancji                                                             |
|--------------------------------------------------------|--------------|----------------------------|---------------------------------------------------------------------------|
| Punkt równowagi $x_k$ dla $u(t) = \text{const} \neq 0$ |              | $x_k = 0$ , brak $k_{ukl}$ | $x_k = \lim_{s \rightarrow 0} s T_d s \frac{u_k}{s} = 0$ , brak $k_{ukl}$ |
| Wzmocnienie $k_{ukl}$                                  |              |                            |                                                                           |
| Równanie charakterystyczne i bieguny                   |              | brak                       | brak                                                                      |
| Odpowiedź skokowa $h(t)$                               |              | $h(t) = k_d \delta(t)$     | $h(t) = T_d \delta(t)$                                                    |

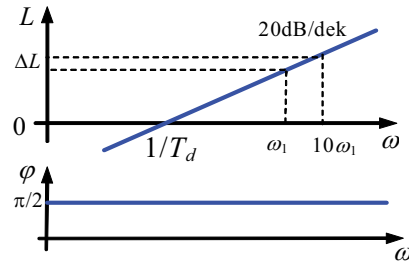
Przedstawienie idealnego członu różniczkującego na charakterystykach częstotliwościowych opiera się na transmitancji widmowej postaci:

$$G(j\omega) = j\omega T_d = |\omega T_d| e^{j\pi/2}. \quad (16-13)$$

Wyrażenie  $G(j\omega)$  zawiera tylko część urojoną  $Q(\omega)$ , która jest zawsze dodatnia i proporcjonalna do pulsacji  $\omega$ , a więc wykres Nyquista leży na dodatniej części osi Im (rys. 16-16).



Rys. 16-16. Wykres Nyquista członu (16-11)



Rys. 16-17. Wykresy Bodego członu (16-11)

Moduł transmitancji  $M(\omega)$  jest także proporcjonalny do pulsacji  $\omega$ , natomiast charakterystyka  $L(\omega)$ , czyli:

$$L(\omega) = 20 \lg |\omega T_d| = 20 \lg T_d + 20 \lg \omega, \quad (16-14)$$

jest proporcjonalna do  $\lg \omega$  – to znaczy, że jest linią prostą w układzie z logarytmiczną skalą osi  $\omega$ . Prosta, która wyznacza wykres  $L(\omega)$  ma następujące własności:

- przecina oś  $\omega$  w punkcie  $\omega = 1/T_d$ ,

Wykres  $L(\omega) = 20 \lg |M(\omega)|$  przecina oś, wówczas gdy  $M(\omega) = 1$ , czyli  $\omega T_d = 1 \rightarrow \omega = \frac{1}{T_d}$

- ma nachylenie  $+20 \text{ dB/dek}$ , niezależnie od parametrów członu.

Nachylenie jako zmiana wartości  $\Delta L = L(10\omega_1) - L(\omega_1)$ , tzn. w zakresie 1 dekadę  $\omega$ :

$$\frac{\Delta L}{\Delta \omega} = 20 \lg |10\omega_1 T_d| - 20 \lg |\omega_1 T_d| = 20 \lg(10\omega_1) - 20 \lg(\omega_1) = 20 \lg \frac{10\omega_1}{\omega_1} = 20 \lg 10 = 20 \text{ dB/dek}.$$

Z analizy wykresów Bodego wynika, że idealny człon różniczkujący powinien powodować zawsze takie samo przesunięcie fazowe sygnałów sinusoidalnych ( $90^\circ$ ), ale co ważniejsze, wraz ze wzrostem pulsacji powinno się także zwiększać w nieskończoność wzmocnienie sygnałów, co ilustruje fizyczną niemożność realizacji takiego układu. Praktyczne realizacje członu różniczkującego zawsze są związane z występowaniem



Rys. 16-18. Odpowiedź skokowa rzeczywistego członu różniczkującego

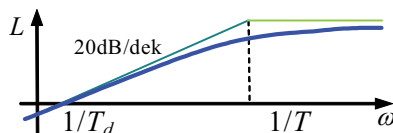
niem choćby niewielkiej inercji (rys. 16-18), co opisuje **rzeczywisty człon różniczkujący**:

$$G(s) = \frac{T_d s}{T s + 1} \quad (16-15)$$

i odpowiadające mu równanie:

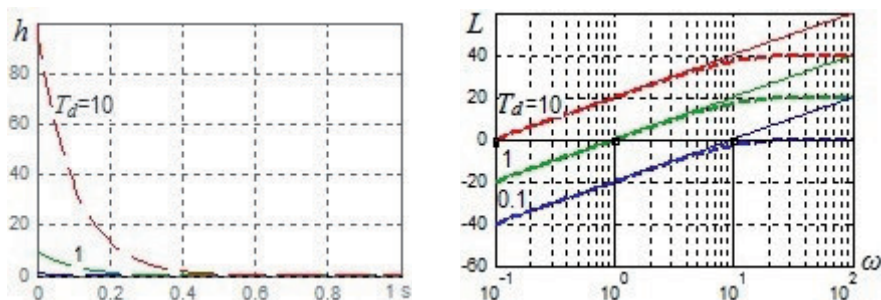
$$a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = b_1 \dot{u}(t). \quad (16-16)$$

Aby taki człon dobrze spełniał swoje zadanie, to wartość stałej czasowej  $T$  musi być odpowiednio mała w porównaniu z czasem różniczkowania  $T_d$ , co dobrze ilustruje wykres  $L(\omega)$ , przedstawiony na rysunku 16-19, szczególnie w wersji asymptotycznej (konstrukcja  $\rightarrow$  17.2). Im mniejsza wartość stałej czasowej  $T$ , tym szerszy zakres pulsacji ( $0 \div 1/T$ ), w którym człon rzeczywisty zachowuje się tak, jak idealny człon różniczkujący.



Rys. 16-19. Wykres  $L$  dokładny i asymptotyczny członu (16-15)

Charakterystyki przykładowych członów różniczkujących w wersji idealnej i rzeczywistej przedstawiono na rysunku 16-20.



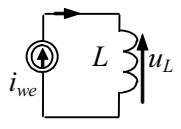
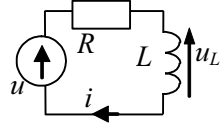
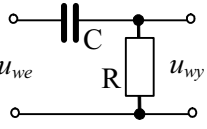
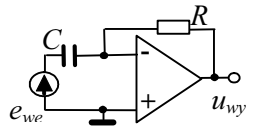
Rys. 16-20. Charakterystyki czasowe i częstotliwościowe dla  $T_d = 0.1; 1; 10$  oraz  $T = 0$  (—) i  $T = 0.1$  (- -).

Charakterystyki czasowe  $h(t)$  nie zawierają wykresu dla idealnego członu różniczkującego ze względu na ograniczenia algorytmów obliczeniowych. Brak możliwości zarówno zbudowania, jak i obliczenia idealnego członu różniczkującego uzasadnia warunek sygnalizowany podczas definicji transmitancji ( $\rightarrow$  11.1), to znaczy, że w transmitancjach rzeczywistych obiektów stopień licznika nie jest większy niż stopień mianownika. Ograniczenie to nie przeszkadza w wygenerowaniu charakterystyk Bodego, przedstawiono więc porównanie członów idealnych (linie ciągłe) i rzeczywistych (linie przerywane). Najlepsze przybliżenie idealnego członu różniczkującego (odpowiedź skokowa najbardziej zbliżona do impulsu) występuje, gdy stała czasowa ( $T = 0.1$ ) jest 100 razy mniejsza od czasu różniczkowania ( $T_d = 10$ ).

16.5.2. Fizyczne realizacje członu

Przy realizacji członu różniczkującego zawsze występuje inercja, a jej przyczyny można wyjaśnić na przykładzie kilku fizycznych układów (tabela 16-8).

Tabela 16-8. Wybrane przykłady obiektów typu człon różniczkujący

| Idealna cewka                                                                     | Obwód z cewką                                                                     | Czwórnik                                                                          | Element różniczkujący                                                              |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
|  |  |  |  |
| $u_L(t) = L \frac{di_{we}(t)}{dt}$                                                | $\begin{cases} sLi(s) + Ri(s) = u(s) \\ u_L(s) = sLi(s) \end{cases}$              | $\begin{cases} i(s)/(sC) + Ri(s) = u_{we}(s) \\ u_{wy}(s) = Ri(s) \end{cases}$    | $u_{wy} = \frac{-R}{1/(sC)} e_{we}$                                                |
| $u_L(s) = sLi_{we}(s)$                                                            | $u_L(s) = \frac{sL/R}{sL/R + 1} u(s)$                                             | $u_{wy}(s) = \left( \frac{sCR}{sCR + 1} \right) u_{we}(s)$                        | $u_{wy} = -sRC e_{we}$                                                             |

Poszukując różnych realizacji członu różniczkującego, należy zwrócić uwagę nie tylko na formę transmitancji, ale także na wartości parametrów, które powinny spełniać warunek  $T \ll T_d$ . Dlatego najlepszym rozwiązaniem jest element różniczkujący oparty na wzmacniaczu operacyjnym. Z kolei w obwodzie z cewką i czwórnikiem z kondensatorem uzyskujemy  $T = T_d$ , co nie spełnia warunku realizacji rzeczywistego członu różniczkującego. Człon różniczkujący ma szczególne znaczenie w konstrukcji urządzeń sterujących, takich jak regulatory PID.

16.6. Człon forsujący

**Człon forsujący** to transmitancja, która w pewien sposób uzupełnia zestaw podstawowych członów (rys. 16-21) i ma postać:

$\frac{1}{T_i s + 0}$

$\frac{T_d s + 0}{1}$

$\frac{1}{T s + 1}$

$\frac{T_f s + 1}{1}$

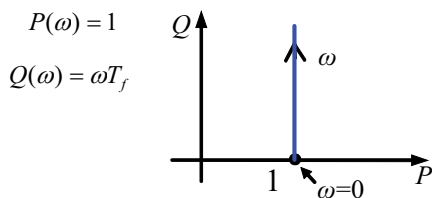
$$G(s) = T_f s + 1 . \tag{16-17}$$

Człon ten samodzielnie nie opisuje rzeczywistych układów (nie spełnia warunku, że stopień licznika jest mniejszy niż stopień mianownika). Można go uznać za odwrotność członu inercyjnego, który jest związany z zerami transmitancji, podobnie jak człon inercyjny z biegunami transmitancji.

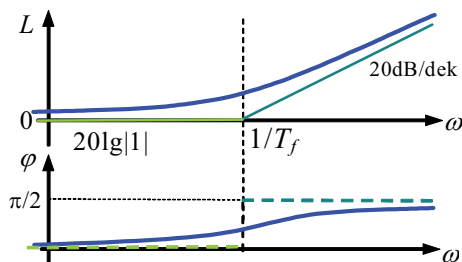
Charakterystyki częstotliwościowe członu, wynikające z transmitancji widmowej:

$$G(j\omega) = 1 + j\omega T_f = \left| 1 + j\omega T_f \right| e^{j \arctg(\omega T_f)} , \tag{16-18}$$

przedstawiono na rysunkach 16-22 i 16-23.



Rys. 16-22. Wykres Nyquista członu (16-18)



Rys. 16-23. Wykresy Bodego dokładne i asymptotyczne (16-18)

W przypadku charakterystyki  $L(\omega)$  można narysować dwie asymptoty:

- dla małych wartości  $\omega$ , tzn. gdy  $\omega \ll 1/T_f$ , transmitancja  $G(j\omega) \approx 1$ , czyli człon proporcjonalny,
- dla dużych wartości  $\omega$ , tzn. gdy  $\omega \gg 1/T_f$ , transmitancja  $G(j\omega) \approx j\omega T_f$ , czyli człon różniczkujący.

$$G(j\omega) = 1 + j\omega T_f \xrightarrow{\omega \gg 1/T_f} 1$$

$$G(j\omega) = 1 + j\omega T_f \xrightarrow{\omega \ll 1/T_f} j\omega T_f$$

Charakterystyka asymptotyczna członu opiera się na wykresach członu proporcjonalnego i różniczkującego, maksymalny błąd w punkcie załamania to 3 dB.

Dla  $\omega = \frac{1}{T_f}$  charakterystyka dokładna:  $L(\omega) = 20\lg|1 + j| = 20\lg(\sqrt{2})$ , a przybliżona:  $20\lg|1|$ .

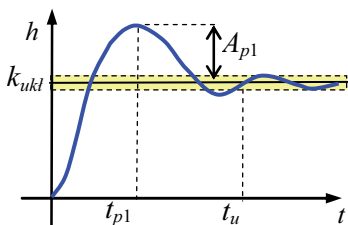
$$\text{Różnica: } 20\lg(\sqrt{2}) - 20\lg(1) = 20\lg(\sqrt{2}) \approx 3\text{dB}$$

Człon forsujący jest składnikiem wielu transmitancji opisujących układy MIMO, w szczególności występuje w opisie kaskad współdziałających (tabela 16-5).

## 16.7. Człon oscylacyjny

### 16.7.1. Definicje i charakterystyki

**Człon oscylacyjny** to układ drugiego rzędu, który można zapisać w postaci:



Rys. 16-24. Odpowiedź skokowa członu oscylacyjnego sensu stricto

$$G(s) = \frac{k}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}, \quad \omega_n > 0, \quad (16-19)$$

gdzie:  $\xi$  – współczynnik tłumienia względnego (tłumienie układu),  $\omega_n$  – pulsacja drgań własnych nietłumionych (pulsacja układu). Transmitancji tej odpowiada równanie oscylacyjne:

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\omega_n \dot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) = ku(t), \quad \omega_n > 0. \quad (16-20)$$

Na podstawie analizy równania przedstawionej szczegółowo w podrozdziale 7.4, wiadomo, że warunek  $\xi > 0$  zapewnia stabilność członu, a warunek  $0 < \xi < 1$  oznacza, że jest to człon oscylacyjny sensu stricto (rys. 16-24). Przypadek  $\xi \geq 1$  natomiast oznacza, że układ ma dwa rzeczywiste, ujemne bieguny, więc można go zapisać i analizować jako człon inercyjny drugiego rzędu ( $\rightarrow$  16.4). Wybrane elementy analizy członu (16-19) przedstawiono w tabeli 16-9.

Tabela 16-9. Wybrane elementy analizy członu oscylacyjnego ( $\rightarrow$  7.4.4)

| człon                                                                                    | oscylacyjny sensu stricto ( $0 < \xi < 1$ )                                                                                                                                                                                                                       | oscylacyjny (inercyjny)                                                                                                                                       |
|------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Punkt równowagi $x_k$<br>dla $u(t) = \text{const} \neq 0$ .                              | $\omega_n^2 x = ku \rightarrow x_k = k_{ukl} u_k \quad \text{lub} \quad x_k = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{k}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \frac{u_k}{s} = \frac{k u_k}{\omega_n^2}$                                                                      |                                                                                                                                                               |
| Wzmocnienie $k_{ukl}$ .                                                                  | $k_{ukl} = k / \omega_n^2$                                                                                                                                                                                                                                        |                                                                                                                                                               |
| Równ.charakterystyczne                                                                   | $s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0$                                                                                                                                                                                                                           |                                                                                                                                                               |
| Bieguny                                                                                  | $p_{1,2} = \alpha \pm j\omega_r$                                                                                                                                                                                                                                  | $p_{1,2} = -\sigma \pm j\omega_r$                                                                                                                             |
| $\text{Re}(p) = \alpha = -\sigma$<br>$\text{Im}(p) = \omega_r$                           | $\alpha = -\xi \omega_n$<br>$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$                                                                                                                                                                                                | $\alpha_1 = \omega_n \left( -\xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \right)$<br>$\alpha_2 = \omega_n \left( -\xi - \sqrt{\xi^2 - 1} \right)$                                  |
| Odpowiedź skokowa $h(t)$<br>(składowa wymuszona i swobodna)                              | $h(t) = k_{ukl} (1 - A e^{\alpha t} \sin(\omega_r t + \varphi_1))$<br>$A = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \omega_r^2}}{\omega_r} = 1 / \sqrt{1 - \xi^2}$ ,<br>$\varphi_1 = \arctg\left(\frac{-\omega_r}{\alpha}\right) = \arctg\left(\frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi}\right)$ | $h(t) = k_{ukl} (1 - A_1 e^{\alpha_1 t} - A_2 e^{\alpha_2 t})$<br>$A_1 = \frac{\alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1}$ , $A_2 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2}$ |
| Przeregulowanie $A_{p1}$                                                                 | $A_{p1} = e^{\pi\alpha / \omega_r} = \exp\left(-\xi\pi / \sqrt{1 - \xi^2}\right)$                                                                                                                                                                                 | brak                                                                                                                                                          |
| Czas ustalania<br>( $\alpha_{1,2} < 0, \varepsilon = 2\%$ ) $t_u \approx 4 /  \alpha_1 $ | $t_u \approx 4 / (\xi\omega_n)$                                                                                                                                                                                                                                   | $t_u \approx 4 / \left( \omega_n \left  -\xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \right  \right)$                                                                              |

W dalszych rozważaniach zakładamy, że człon oscylacyjny oznacza transmitancję (16-19) z warunkiem  $0 \leq \xi < 1$ . W literaturze stosowane są różne formy zapisywania takiego członu, przy czym często jest to człon znormalizowany (tzn.  $k_{ukl} = 1$ ):

$$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad \text{lub} \quad \frac{1}{T_n^2 s^2 + 2\xi T_n s + 1}, \quad \text{lub} \quad \frac{\sigma^2 + \omega_r^2}{(s + \sigma)^2 + \omega_r^2}. \quad (16-21)$$

Aby zapisać układ o innym wzmocnieniu, wystarczy pomnożyć daną transmitancję przez współczynnik  $k_{ukl}$ . Transmitancje (16-21) są sobie równoważne na postawie relacji między parametrami:  $T_n = 1/\omega_n$ ,  $\sigma = |\text{Re}(p_{1,2})|$ ,  $\omega_r = \text{Im}(p_{1,2})$ .

Przeliczanie postaci transmitancji (16-21):

$$\frac{p_1 p_2}{(s - p_1)(s - p_2)} = \frac{(-\sigma + j\omega_r)(-\sigma - j\omega_r)}{(s - (-\sigma + j\omega_r))(s - (-\sigma - j\omega_r))} = \frac{\sigma^2 + \omega_r^2}{(s + \sigma)^2 - (j\omega_r)^2} = \frac{\sigma^2 + \omega_r^2}{(s + \sigma)^2 + \omega_r^2},$$

$$\frac{\sigma^2 + \omega_r^2}{s^2 + 2\sigma s + \sigma^2 + \omega_r^2} = \frac{(\xi\omega_n)^2 + (\omega_n\sqrt{1-\xi^2})^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + (\xi\omega_n)^2 + (\omega_n\sqrt{1-\xi^2})^2} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}.$$

Nazwy parametrów odzwierciadlają ich interpretację:

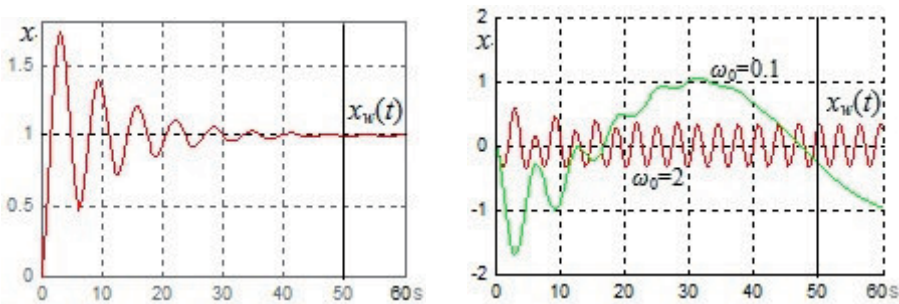
- $\omega_n, T_n$  – pulsacja i okres drgań własnych nietłumionych,
- $\omega_r$  – pulsacja drgań własnych tłumionych.

**Drgania własne** to składowa swobodna  $x_s(t) = Ae^{\alpha t} \sin(\omega_r t + \varphi_1)$ , która występuje w odpowiedzi członu oscylacyjnego o tłumieniu w zakresie  $0 \leq \xi < 1$ :

- gdy  $0 < \xi < 1$ , to bieguny członu leżą w lewej półpłaszczyźnie ( $\alpha < 0$ ) i w jego odpowiedzi występują gasnące oscylacje (drżania tłumione) o pulsacji  $\omega_r$  i maksymalnym przeregulowaniu  $A_{p1}$  (tabela 16-4),
- gdy  $\xi = 0$ , to bieguny członu leżą na osi Im ( $\alpha = 0$ ), co oznacza, że odpowiedź zawiera niegasnące oscylacje (drżania nietłumione) o pulsacji  $\omega_r = \omega_n$ , czyli o okresie drgań  $T_n = 1/\omega_n$  (okres drgań w sensie odwrotności pulsacji  $\omega_n = 2\pi f_n$ , a nie odwrotności częstotliwości  $f_n$ ).

Parametry drgań własnych (pulsacja  $\omega_r$ , amplituda  $A_{p1}$ ) w znacznym stopniu zależą od tłumienia  $\xi$  członu (co można zobrazować na wykresach – rys. 7-8, rys. 7-9).

Drgania własne są najlepiej widoczne przy wymuszeniu skokowym lub impulsowym, gdy odpowiedź układu składa się z drgań własnych i stałej składowej wymuszonej  $x_w(t)$ . Przy wymuszeniu sinusoidalnym  $\sin(\omega_0 t)$  natomiast składowa wymuszona również ma postać sinusoidalną i przebiegi się nakładają (rys. 16-25).



Rys. 16-25. Odpowiedź członu ( $\xi = 0.1$ ,  $\omega_n = 1$ ) na wymuszenie  $1(t)$  i  $\sin(\omega_0 t - \pi/2)$ ,  $\omega_0 = 2$  i  $0.1$ .

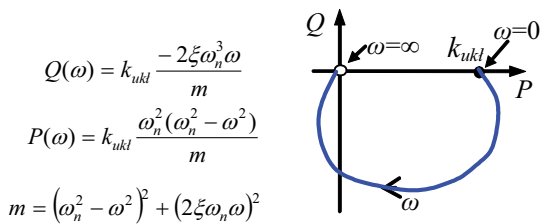
**Drgania wymuszone** to sinusoidalna składowa wymuszona, którą obserwuje się w stanie ustalonym, a parametry tych drgań opisują charakterystyki częstotliwościowe członu:  $x_w(t) = M(\omega) \cdot \sin(\omega t + \varphi(\omega))$ . Wzory do konstrukcji charakterystyk częstotliwościowych, opartych na różnych formach transmitancji widmowej (14-20), dla członu znormalizowanego mają następującą postać:

$$G(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\xi\omega_n(j\omega) + \omega_n^2} = \omega_n^2 \frac{(\omega_n^2 - \omega^2) - j2\xi\omega_n\omega}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega_n\omega)^2} = M(\omega)e^{j\varphi(\omega)}, \quad (16-22)$$

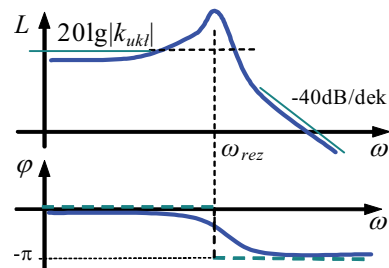
$$\text{gdzie: } M(\omega) = \frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega_n\omega)^2}}, \quad \varphi(\omega) = \arctg \frac{-2\xi\omega_n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2}$$

$$\text{lub } M(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1 - T_n^2\omega^2)^2 + (2\xi T_n\omega)^2}}, \quad \varphi(\omega) = \arctg \frac{-2\xi T_n\omega}{1 - T_n^2\omega^2}.$$

Aby uwzględnić inne wzmocnienie układu, wystarczy pomnożyć funkcje  $P(\omega)$ ,  $Q(\omega)$ ,  $M(\omega)$  przez współczynnik  $k_{ukl}$ . Takie właśnie przypadki przedstawiono na wykresie Nyquista (rys. 16-26), który przechodzi przez 2 ćwiartki układu (jak dla każdego członu drugiego rzędu), oraz na wykresie  $L(\omega)$  (rys. 16-27), który wykazuje zwiększenie wzmocnienia (**szczyt rezonansowy**), charakterystyczne dla członu oscylacyjnego.



Rys. 16-26. Wzory i wykres Nyquista członu (16-22)



Rys. 16-27. Wykresy Bodego dokładne (16-22) ( $k_{ukl} > 1$ )

Dla charakterystyki  $L(\omega)$  można wyznaczyć dwie asymptoty:

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>dla <math>\omega \ll \omega_n</math><br/>transmitancja <math>G(j\omega) \approx k_{ukl}</math><br/>człon proporcjonalny</li> <li>dla <math>\omega \gg \omega_n</math> jest<br/><math>G(j\omega) \approx k_{ukl}(1/(j\omega T_n))^2</math><br/>człon podwójnie całkujący</li> </ul> | $G(j\omega) = \frac{k_{ukl}\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\xi\omega_n(j\omega) + \omega_n^2} \xrightarrow{\omega \ll \omega_n} \frac{k_{ukl}\omega_n^2}{\omega_n^2} = k_{ukl}$ $G(j\omega) = \frac{k_{ukl}\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\xi\omega_n(j\omega) + \omega_n^2} \xrightarrow{\omega \gg \omega_n} \frac{k_{ukl}\omega_n^2}{(j\omega)^2} = \frac{k_{ukl}}{(j\omega T_n)^2}$ |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Można przeprowadzić dokładniejszą analizę:

- dla małych wartości  $\omega$  ( $\omega \ll \sigma$ ):  $G(j\omega) = \frac{k_{ukl}(\sigma^2 + \omega_r^2)}{(\sigma + j\omega)^2 + \omega_r^2} \xrightarrow{\sigma \gg \omega} k_{ukl} \frac{\sigma^2 + \omega_r^2}{(\sigma)^2 + \omega_r^2} = k_{uklk}$
- dla dużych wartości  $\omega$  ( $\omega \gg \sigma$ ):  $G(j\omega) = \frac{k_{ukl}(\sigma^2 + \omega_r^2)}{(\sigma + j\omega)^2 + \omega_r^2} \xrightarrow{\sigma \ll \omega} k_{ukl} \frac{\sigma^2 + \omega_r^2}{(j\omega)^2 + \omega_r^2} = k_{uklk} \frac{\sigma^2 + \omega_r^2}{\omega_r^2 - \omega^2}$

tzn.  $M(\omega) = |G(j\omega)|$  jest proporcjonalne do  $1/\omega^2$ , a  $L(\omega) = 20\lg M(\omega)$  do  $\lg \omega$ .

W skali logarytmicznej wykres  $L(\omega)$  jest liniowy i ma nachylenie 40 dB/dek:

$$\frac{\Delta L}{\Delta \omega} = 20 \lg \left| k_{uklk} \frac{\sigma^2 + \omega_r^2}{\omega_r^2 - (10\omega)^2} \right| - 20 \lg \left| k_{uklk} \frac{\sigma^2 + \omega_r^2}{\omega_r^2 - \omega^2} \right| = 20 \lg \left| \frac{\omega_r^2 - \omega^2}{\omega_r^2 - (10\omega)^2} \right|$$

$$\xrightarrow{\omega \gg \omega_r} 20 \lg \left| \frac{-\omega^2}{-(10\omega)^2} \right| = 40 \lg \left| \frac{\omega}{10\omega} \right| = -40 \text{ dB/dek}$$

Szczyt rezonansowy na wykresie  $L(\omega)$  powoduje, że asymptoty nie mogą spełniać roli logarytmicznej asymptotycznej charakterystyki modułu członu oscylacyjnego. Asymptotę  $20 \lg |k_{uklk}|$  można potraktować jako poziom odniesienia dla wielkości szczytu rezonansowego. Parametry szczytu rezonansowego można wyznaczyć na podstawie badania przebiegu zmienności funkcji  $M(\omega)$ , w szczególności pulsację rezonansową  $\omega_{rez}$  i maksymalne wzmocnienie  $M_{max} = M(\omega_{rez})$ .

Funkcja  $M(\omega)$  ma wartość maksymalną, gdy jej pochodna ma wartość zero ( $dM/d\omega = 0$ ):

– obliczanie pochodnej złożonej funkcji  $M(\omega)$ :

$$\frac{dM(\omega)}{d\omega} = k_{ukl} \frac{-1}{((\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega_n\omega)^2)^{3/2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega_n\omega)^2}} \cdot (2(\omega_n^2 - \omega^2)(-2\omega) + (2\xi\omega_n)^2 2\omega)$$

– pochodna jest równa zero jeśli:

$$2(\omega_n^2 - \omega^2)(-2\omega) + (2\xi\omega_n)^2 2\omega = 0 \rightarrow -(\omega_n^2 - \omega^2) + 2\xi^2\omega_n^2 = 0 \rightarrow \omega = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$$

Wartość **pulsacji rezonansowej**  $\omega_{rez}$  można obliczyć ze wzoru:

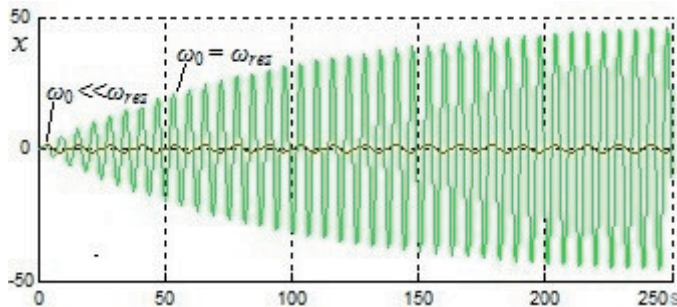
$$\omega_{rez} = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}, \text{ pod warunkiem, że } 1 - 2\xi^2 > 0. \quad (16-23)$$

Stąd wynika maksymalne wzmocnienie (bezwzględne  $M_{max}$ , względne  $M_{rez}$ ):

$$M_{max} = M(\omega_{rez}) = \frac{k_{ukl}}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}} \text{ lub } M_{rez} = \frac{M(\omega_{rez})}{M(0)} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}}, \quad (16-24)$$

gdzie  $M(0)$  jest wzmocnieniem dla pulsacji  $\omega \rightarrow 0$ .

Wzory na parametry  $\omega_{rez}$  i  $M_{max}$  określają warunki wystąpienia **rezonansu**, czyli zjawiska znacznego zwiększenia amplitudy drgań na wyjściu, gdy wartość pulsacji wymuszenia  $\sin(\omega t)$  jest zbliżona do pulsacji rezonansowej  $\omega_{rez}$  (rys. 16-28),

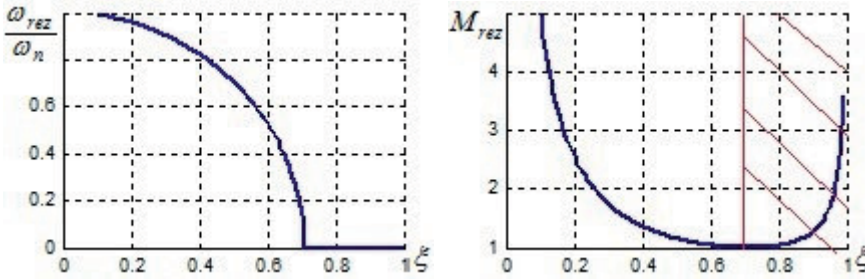


Rys. 16-28. Drgania rezonansowe ( $\xi = 0.01$ )

Wystąpienie i wielkość rezonansu zależy od tłumienia członu:

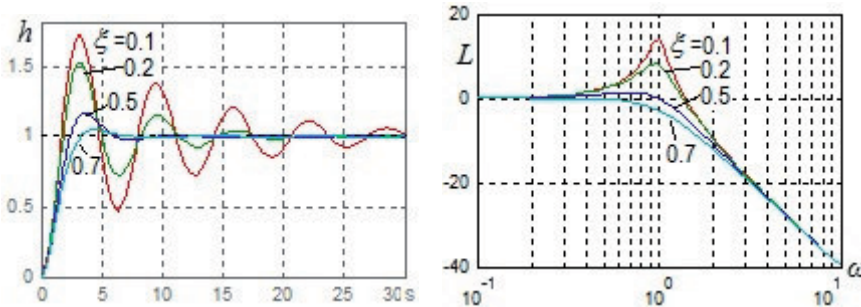
- występuje dla  $0 < \xi < \sqrt{0.5} \approx 0.707$  (na podstawie warunku (16-23)),
- w tym zakresie można zastosować wzór (16-24) i obliczyć wartość  $M_{max}$ .

Zależność pulsacji  $\omega_{rez}$  i wysokości  $M_{max}$  od tłumienia  $\xi$  ilustruje rysunek 16-29.



Rys. 16-29. Wpływ  $\xi$  na drgania wymuszone

Im mniejsze tłumienie  $\xi$ , tym wyższa pulsacja rezonansowa i wyższy szczyt rezonansowy (teoretycznie dla  $\xi \rightarrow 0$  wartość  $M_{rez}$  rośnie w nieskończoność), co można zaobserwować na charakterystyce  $L(\omega)$  (rys. 16-20).



Rys. 16-30. Charakterystyki czasowe i częstotliwościowe członów o różnych tłumieniach ( $\omega_n = 1$ )

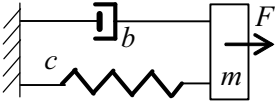
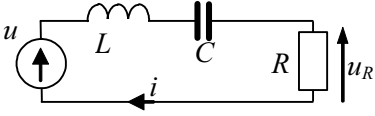
Również odpowiedź skokowa  $h(t)$  wykazuje większe oscylacje przy mniejszych wartościach tłumienia  $\xi$ . Obie charakterystyki ilustrują wpływ  $\xi$ , a wykres  $h(t)$  to drgania własne, a charakterystyka  $L(\omega)$  to drgania wymuszone.

### 16.7.2. Fizyczne realizacje członu oscylacyjnego

Klasyczne przykłady członów oscylacyjnych to układ mechaniczny oraz obwód elektryczny – każdy oparty na trzech podstawowych elementach (tabela 16-10). Modele tych układów można przedstawić w postaci równań różniczkowych (różniczkowo-całkowych) lub operatorowych, stosując różne formy definicji elementów i wybierając różne zmienne wyjściowe do obserwacji. W efekcie uzyskuje się transmitancje, które dokładnie odpowiadają postaci członu oscylacyjnego lub zawierają dodatkowo człon różniczkujący. Jeśli jednak odpowiedzi skokowe zmiennych  $x(t)$  i  $q(t)$  mają charakter

oscylacyjny, to przebiegi  $v(t)$  i  $i(t)$ , jako pochodne zmiennych  $x(t)$  i  $q(t)$ , też mają charakter oscylacyjny.

Tabela 16-10. Wybrane przykłady obiektów typu człon oscylacyjny ( $0 < \xi < 1$ )

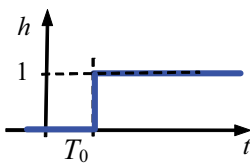
| Człon oscylacyjny mechaniczny                                                     |                                               | Człon oscylacyjny elektryczny                                                      |                                                   |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------|
|  |                                               |  |                                                   |
| $m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = F$                                                   | $m\dot{v} + bv + c \int v dt = F$             | $L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = u$                                          | $L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = u$ |
| $\frac{x(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + c}$                                     | $\frac{v(s)}{F(s)} = \frac{s}{ms^2 + bs + c}$ | $\frac{q(s)}{u(s)} = \frac{C}{LCs^2 + RCs + 1}$                                    | $\frac{i(s)}{u(s)} = \frac{sC}{LCs^2 + RCs + 1}$  |
| warunek: $\xi = \frac{b}{2\sqrt{mc}} < 1$                                         |                                               | warunek: $\xi = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} < 1$                                |                                                   |

W zapisie równań różniczkowych w tabeli pominięto oznaczenie zależności od czasu ( $t$ ).

Przedstawione przykłady pozwalają uzyskać jedynie członów z dodatnim tłumieniem. Nawet uzyskanie zerowego tłumienia wymaga założenia o braku tarcia podczas ruchu czy zerowej rezystancji przewodów. Własności oscylacyjnych układów mechanicznych i elektrycznych można analizować, sprowadzając dany model do ogólnej postaci członu oscylacyjnego i wykorzystując wszystkie własności tego członu. W praktyce inżynierskiej spotyka się także często analizę opartą bezpośrednio na fizycznych parametrach układu, w szczególności podczas badania zjawiska rezonansu [18].

## 16.8. Opóźnienie

Uzupełnieniem kolekcji podstawowych członów dynamiki jest **opóźnienie sygnału** (rys. 16-31), które przenosi sygnał z wejścia na wyjście bez zmian, jedynie przesuwając go w czasie. Transmitancja członu ma postać funkcji niewymiernej:



Rys. 16-31. Odpowiedź skokowa członu opóźniającego

$$G(s) = e^{-sT_0}, \quad (16-25)$$

która wynika z przekształcenia  $\mathcal{L}$  funkcji opisującej człon w dziedzinie czasu:

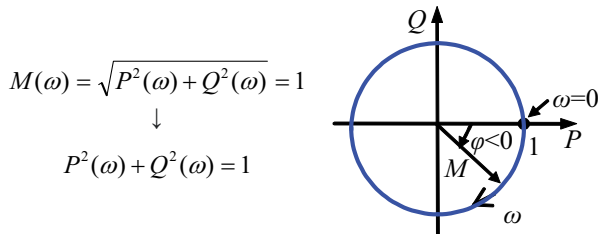
$$x(t) = u(t - T_0). \quad (16-26)$$

Jest to element liniowy, który w stanie ustalonym ma jednostkowe wzmocnienie i jest zawsze stabilny.

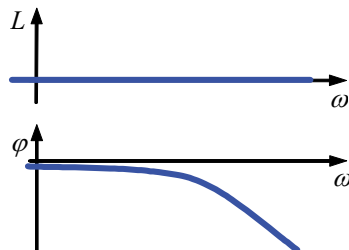
Po podstawieniu  $s = j\omega$  do transmitancji operatorowej (16-25) otrzymujemy wprost transmitancję widmową w postaci wykładniczej:

$$G(j\omega) = e^{-j\omega T_0}, \quad (16-27)$$

z której wynika stałe, jednostkowe wzmocnienie  $M(\omega)$  członu oraz przesunięcie fazowe  $\varphi(\omega)$  proporcjonalne do  $\omega$ , a więc nieograniczone (rys. 16-33). Wykres Nyquista ma wówczas postać okręgu jednostkowego (rys. 16-32), co wynika z interpretacji modułu i przesunięcia  $\varphi$  w układzie  $Q(P)$ .

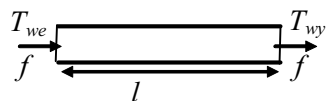


Rys. 16-32. Wzory i wykres Nyquista członu (16-27)



Rys. 16-33. Wykresy Bodego (16-27)

Fizyczne realizacje członu opóźniającego można wskazać w obszarze zagadnień transportowych, takich jak transport energii cieplnej przez doskonale izolowany rurociąg (rys. 16-34) czy przenoszenie materiału za pomocą taśmociągu.

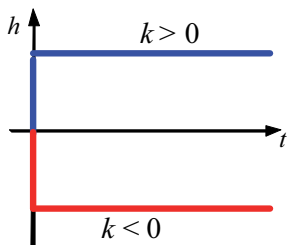
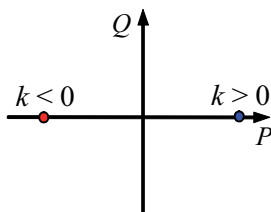
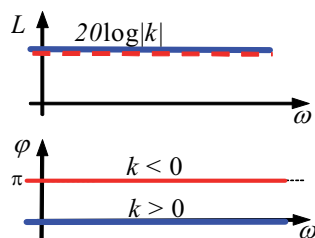


Rys. 16-34. Opóźnienie transportowe

## 16.9. Przypadki szczególne

### 16.9.1. Ujemne wzmocnienie

We wszystkich członach dynamiki omówionych powyżej zakładaliśmy dodatnie wzmocnienie  $k$ , co odpowiada opisowi większości układów (procesów). W przypadku członu proporcjonalnego ujemne wzmocnienie oznacza proste odwrócenie znaku odpowiedzi czasowej (rys. 16-35), a na charakterystykach częstotliwościowych zmianę wartości przesunięcia fazowego  $0 \rightarrow \pi$  (rys. 16-36, rys. 16-37). Teoretycznie przesunięcie fazowe ujemnego wzmocnienia mogłoby mieć wartość  $\pi$  lub  $-\pi$ , jednak  $\varphi(\omega) = \pi$  jest zgodna z interpretacją innych członów o ujemnym wzmocnieniu.

Rys. 16-35. Odpowiedzi skokowe  $G(s)=k$  ( $k > 0$ ,  $k < 0$ )Rys. 16-36. Wykresy Nyquista  $G(s)=k$  ( $k > 0$ ,  $k < 0$ )Rys. 16-37. Wykresy Bodego  $G(s)=k$  ( $k > 0$ ,  $k < 0$ )

Ujemne wzmocnienie może dotyczyć również członów inercyjnych i członu oscylacyjnego. W przypadku odpowiedzi czasowych  $k < 0$  oznacza zawsze zmianę znaku,

czyli wykres symetryczny względem osi  $t$ . Wpływ znaku wzmocnienia na charakterystyki częstotliwościowe natomiast można zilustrować na przykładzie członu inercyjnego pierwszego rzędu.

$k > 0$ :

$$\frac{k_{(+)}}{1+j\omega T} = \frac{k_{(+)}}{1+\omega^2 T^2} - j \frac{k_{(+)}\omega T}{1+\omega^2 T^2} = M(\omega)e^{j\varphi(\omega)} \rightarrow \begin{cases} M(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2} \\ \varphi(\omega) = \arctg(-\omega T) \end{cases} \rightarrow \varphi = 0 \div -\pi/2$$

$P > 0 \quad Q < 0 \quad Q/P < 0$

$k < 0$ :

$$\frac{k_{(-)}}{1+j\omega T} = \frac{k_{(-)}}{1+\omega^2 T^2} - j \frac{k_{(-)}\omega T}{1+\omega^2 T^2} = M(\omega)e^{j\varphi(\omega)} \rightarrow \begin{cases} M(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2} \\ \varphi(\omega) = \arctg(-\omega T) \end{cases} \rightarrow \varphi = 0 \div +\pi/2$$

$P < 0 \quad Q > 0 \quad Q/P < 0$

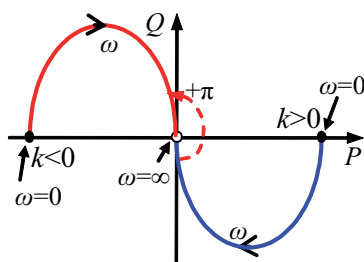
Wykres  $Q(P)$  dla  $k < 0$  jest obrocony o kąt  $\pi$  względem wykresu dla  $k > 0$  (rys. 16-38). Wykresy Bodego natomiast różnią się tylko w części opisującej przesunięcie fazowe  $\varphi(\omega)$  – wykres  $\varphi(\omega)$  dla  $k < 0$  jest przesunięty o wartość  $+\pi$  względem wykresu dla  $k > 0$  (rys. 16-39).

Dla  $k > 0$

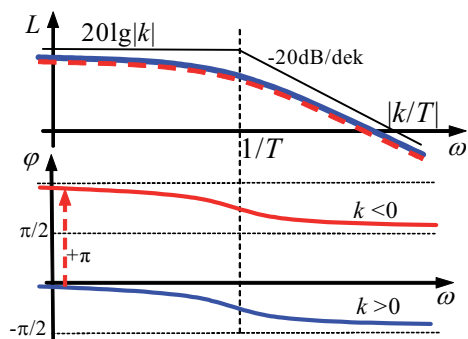
$P(\omega) > 0$   
 $Q(\omega) < 0$

Dla  $k < 0$

$P(\omega) < 0$   
 $Q(\omega) > 0$



Rys. 16-38. Wykresy Nyquista  
członu inercyjnego ( $k > 0$ ,  $k < 0$ )



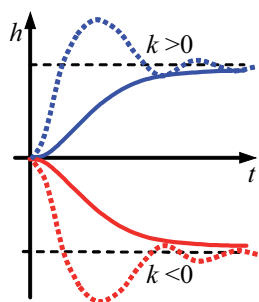
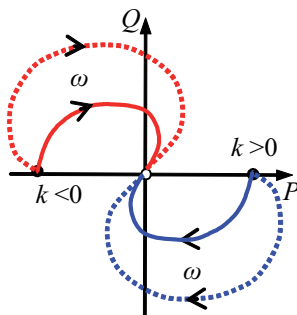
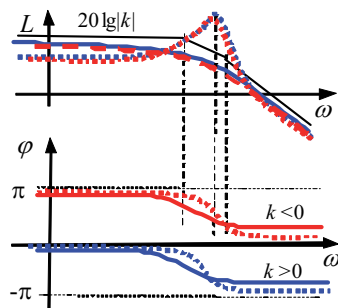
Rys. 16-39. Wykresy Bodego  
członu inercyjnego ( $k > 0$ ,  $k < 0$ )

Przesunięcie wykresu  $\varphi(\omega)$  o  $+\pi$  można stwierdzić na podstawie interpretacji transmitancji widmowej (rys. 14-3) – sam zapis funkcji  $\varphi(\omega) = \arctg(-\omega T)$  nie zawiera pełnej informacji. To przesunięcie można również uzasadnić zapisując transmitancję w postaci iloczynu członu inercyjnego z dodatnim wzmocnieniem i członu wzmacniającego o wartości  $-1$ , a następnie wykonując operacje na postaciach wykładniczych

$$\frac{k_{(-)}}{1+j\omega T} = \frac{k_{(+)}}{1+j\omega T} (-1) = \left( \frac{k_{(+)}}{1+\omega^2 T^2} - j \frac{k_{(+)}\omega T}{1+\omega^2 T^2} \right) \cdot (-1) = M(\omega)e^{j\arctg(-\omega T)} \cdot |-1|e^{+j\pi} = M(\omega)e^{j\varphi(\omega)},$$

$P > 0 \quad Q < 0$       gdzie:  $\begin{cases} M(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2} \\ \varphi(\omega) = \arctg(-\omega T) + \pi \end{cases}$

Analogicznie można wykazać wpływ ujemnego wzmocnienia na człon inercyjny wyższego rzędu i człon oscylacyjny (rysunki 16-40÷16-42).

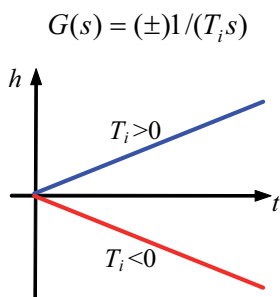
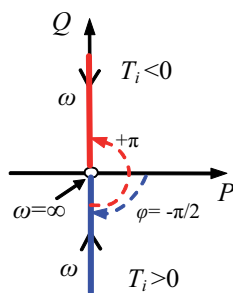
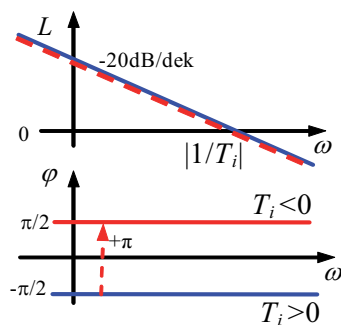
Rys. 16-40. Odpowiedzi skokowe 2. rzędu ( $k > 0$ ,  $k < 0$ )Rys. 16-41. Wykresy Nyquista 2. rzędu ( $k > 0$ ,  $k < 0$ )Rys. 16-42. Wykresy Bodego 2. rzędu ( $k > 0$ ,  $k < 0$ )

Ujemne wzmocnienie nie zmienia stabilności układu, powoduje jedynie, że:

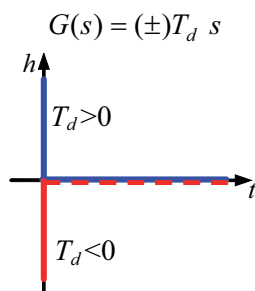
- odpowiedź czasowa jest symetryczna względem osi  $t$ ,
- wykres Nyquista jest obrócony o kąt  $+\pi$ ,
- wykresy modułu  $L(\omega)$  są takie same, a wykres  $\varphi(\omega)$  jest przesunięty o  $+\pi$ .

### 16.9.2. Ujemne parametry czasowe

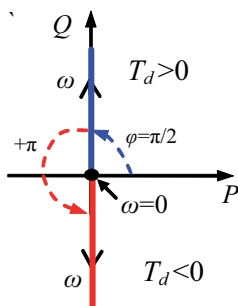
Opis podstawowych członów dynamiki zakłada, że wszystkie parametry czasowe członów są dodatnie, co wynika z interpretacji tych parametrów w typowych realizacjach fizycznych. Można jednak przeanalizować własności członów z ujemnymi czasami, a najłatwiej jest to przeprowadzić dla członu **całkującego i różniczkującego**, zapisując je w postaci iloczynu członu z dodatnim parametrem czasowym ( $T_i$ ,  $T_d$ ) i wzmocnienia o wartości  $-1$ . Wpływ ujemnego parametru czasowego jest analogiczny jak ujemnego wzmocnienia ( $\rightarrow$  16.9.1), co ilustrują wykresy dla członu całkującego (rysunki 16-43÷16-45)

Rys. 16-43. Odp. skokowe  $G(s) = 1/(sT_i)$  ( $T_i > 0$ ,  $T_i < 0$ )Rys. 16-44. Wykresy Nyquista  $G(s) = 1/(sT_i)$  ( $T_i > 0$ ,  $T_i < 0$ )Rys. 16-45. Wykresy Bodego  $G(s) = 1/(sT_i)$  ( $T_i > 0$ ,  $T_i < 0$ )

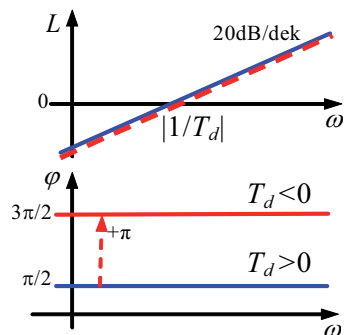
oraz wykresy dla członu różniczkującego (rysunki 16-46÷16-48).



Rys. 16-46. Odp. skokowe  
 $G(s) = sT_d$  ( $T_d > 0$ ,  $T_d < 0$ )



Rys. 16-47. Wykresy Nyquista  
 $G(s) = sT_d$  ( $T_d > 0$ ,  $T_d < 0$ )



Rys. 16-48. Wykresy Bodego  
 $G(s) = sT_d$  ( $T_d > 0$ ,  $T_d < 0$ )

Ujemne parametry członu całkującego i różniczkującego nie wpływają na stabilność modelu – człon całkujący jest układem na granicy stabilności, a różniczkujący – układem stabilnym. Z kolei każda ujemna stała czasowa w członie inercyjnym jest równoznaczna z występowaniem dodatniego bieguna układu, ma więc decydujący wpływ na stabilność członu – odpowiedzi skokowe nie stabilizują się i nie można zastosować graficznej interpretacji stałej czasowej (rys. 16-8).

Wpływ dodatnich i ujemnych stałych czasowych na charakterystyki częstotliwościowe przeanalizujemy na podstawie **członu inercyjnego pierwszego rzędu**.

$T > 0$ :

$$\frac{k}{1 + j\omega T_{(+)}} = \frac{k}{1 + \omega^2 T_{(+)}^2} - j \frac{k\omega T_{(+)}}{1 + \omega^2 T_{(+)}^2} = M(\omega)e^{j\varphi(\omega)} \rightarrow \begin{cases} M(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2} \\ \varphi(\omega) = \arctg(-\omega T_{(+)}) \rightarrow \varphi = 0 \div -\pi/2 \end{cases}$$

$P > 0 \quad Q < 0 \quad Q/P < 0$

$T < 0$ :

$$\frac{k}{1 + j\omega T_{(-)}} = \frac{k}{1 + \omega^2 T_{(-)}^2} - j \frac{k\omega T_{(-)}}{1 + \omega^2 T_{(-)}^2} = M(\omega)e^{j\varphi(\omega)} \rightarrow \begin{cases} M(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2} \\ \varphi(\omega) = \arctg(-\omega T_{(-)}) \rightarrow \varphi = 0 \div +\pi/2 \end{cases}$$

$P > 0 \quad Q > 0 \quad Q/P > 0$

Potwierdzeniem zakresu zmian kąta  $\varphi$  jest zgodność z asymptotami:

|                                                      |                                                                                                                                                                  |                                                                                                                                                                                                |
|------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| – dla $\omega \ll 1/T$ ,<br>– dla $\omega \gg 1/T$ , | $G(j\omega) = \frac{k}{1 + j\omega T} \xrightarrow{1 \gg \omega T} k$<br>$G(j\omega) = \frac{k}{1 + j\omega T} \xrightarrow{1 \ll \omega T} \frac{k}{j\omega T}$ | – gdy $T > 0$ , to $\varphi \rightarrow 0$<br>– gdy $T < 0$ , to $\varphi \rightarrow 0$<br>– gdy $T > 0$ , to $\varphi \rightarrow -\pi/2$<br>– gdy $T < 0$ , to $\varphi \rightarrow +\pi/2$ |
|------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Ujemna stała czasowa (dodatni biegun) powoduje zmianę znaku części urojonej w transmitancji członu inercyjnego, co przekłada się na zmianę znaku przesunięcia fazowego  $\varphi(\omega)$ , ale nie zmienia wzmocnienia  $M(\omega)$ . W efekcie wykresy  $Q(P)$  dla  $T > 0$  i  $T < 0$  są symetryczne względem osi  $P$  (rys. 16-49), podobnie jak wykresy  $\varphi(\omega)$  (rys. 16-50), natomiast wykres  $L(\omega)$  pozostaje taki sam.

$$G(s) = \frac{1}{(\pm)Ts + 1}$$

Dla  $T > 0$

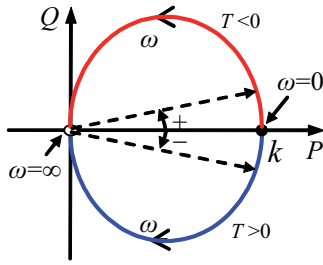
$$P(\omega) > 0$$

$$Q(\omega) < 0$$

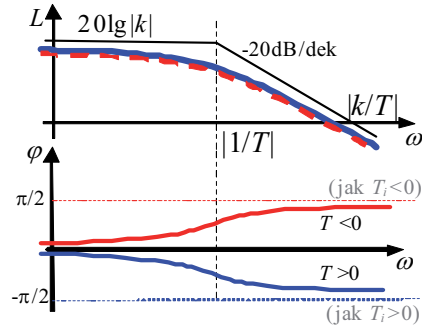
Dla  $T < 0$

$$P(\omega) > 0$$

$$Q(\omega) > 0$$



Rys. 16-49. Wykresy Nyquista  
członu inercyjnego ( $T > 0$ ,  $T < 0$ )



Rys. 16-50. Wykresy Bodego  
członu inercyjnego ( $T > 0$ ,  $T < 0$ )

Na podstawie członu inercyjnego pierwszego rzędu można wnioskować o wpływie ujemnych stałych czasowych (dodatnich biegunów) na charakterystyki częstotliwościowe członu inercyjnego wyższego rzędu, ponieważ zawsze można go zapisać w postaci iloczynu członów inercyjnych pierwszego rzędu, a to oznacza, że charakterystyki  $L(\omega)$  i  $\varphi(\omega)$  członu wyższego rzędu są sumą charakterystyk pierwszego rzędu:

$$\frac{k}{1 + j\omega T_1} \cdot \frac{k}{1 + j\omega T_2} = M_1(\omega)e^{j\varphi_1(\omega)} \cdot M_2(\omega)e^{j\varphi_2(\omega)} = M(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

$$\begin{cases} M(\omega) = M_1(\omega)M_2(\omega) \rightarrow L(\omega) = L_1(\omega) + L_2(\omega) \\ \varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) \end{cases}$$

Znaki stałych czasowych nie wpływają na wzmocnienie poszczególnych członów, więc nie wpływają też na wykres  $L(\omega)$ . Przesunięcie fazowe  $\varphi(\omega)$  natomiast, jako suma przesunięć od poszczególnych członów, będzie mniej ujemne, jeśli człon ma choć jedną ujemną stałą czasową (dodatni biegun).

Na podstawie **członu forsującego**  $T_f$  przeanalizujemy wpływ ujemnych i dodatnich zer układu.

$$T_f > 0: \quad 1 + j\omega T_{f(+)} = M(\omega)e^{j\varphi(\omega)} \rightarrow \begin{cases} M(\omega) = \sqrt{1 + Q^2} \\ \varphi(\omega) = \arctg(\omega T_{f(+)}) \rightarrow \varphi = 0 \div +\pi/2 \end{cases}$$

$$P = 1 \quad Q > 0 \quad Q/P > 0$$

$$T_f < 0: \quad 1 + j\omega T_{f(-)} = M(\omega)e^{j\varphi(\omega)} \rightarrow \begin{cases} M(\omega) = \sqrt{1 + Q^2} \\ \varphi(\omega) = \arctg(\omega T_{f(-)}) \rightarrow \varphi = 0 \div -\pi/2 \end{cases}$$

$$P = 1 \quad Q < 0 \quad Q/P < 0$$

Potwierdzeniem zakresu zmian kąta  $\varphi$  jest zgodność z asymptotami:

$$\begin{aligned} - \text{dla } \omega \ll 1/T_f, \quad G(j\omega) &\xrightarrow{1 \gg \omega T_f} 1 & - \text{gdy } T_f > 0, \text{ to } \varphi \rightarrow 0 \\ & & - \text{gdy } T_f < 0, \text{ to } \varphi \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - \text{dla } \omega \gg 1/T_f, \quad G(j\omega) &\xrightarrow{1 \ll \omega T_f} j\omega T_f & - \text{gdy } T_f > 0, \text{ to } \varphi \rightarrow +\pi/2 \\ & & - \text{gdy } T_f < 0, \text{ to } \varphi \rightarrow -\pi/2 \end{aligned}$$

Ujemny parametr  $T_f$  powoduje zmianę znaku części urojonej w transmitancji członu forsującego, co nie wpływa na wzmocnienie  $M(\omega)$  (wykres  $L(\omega)$  pozostaje taki sam),

ale zmienia przesunięcie fazowe  $\varphi(\omega)$ . Wykresy  $Q(P)$  dla  $T_f > 0$  i  $T_f < 0$  są symetryczne względem osi  $P$  (rys. 16-51) i można by się spodziewać, że wykresy  $\varphi(\omega)$  będą symetryczne względem osi  $\omega$  (rys. 16-52). Jednak dla zachowania zgodności wykresu  $\varphi(\omega)$  z asymptotą  $\omega \rightarrow \infty$ , to przesunięcie  $\varphi(\omega)$  dla  $T_f < 0$  należy opisać w zakresie  $(2\pi \div 3\pi/2)$ , to znaczy, że przesunięciu fazowemu  $\varphi$  dla  $T_f > 0$ , odpowiada przesunięcie  $2\pi - \varphi$  dla  $T_f < 0$  (wykres  $\varphi(\omega)$  jest symetryczny względem osi  $\omega$ , a następnie przesunięty o  $+2\pi$ ).

$$G(s) = (\pm)T_f s + 1$$

Dla  $T_f > 0$

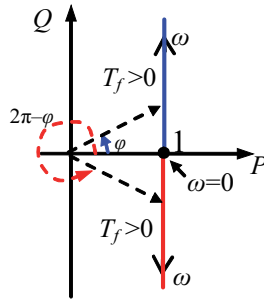
$$P(\omega) = 1$$

$$Q(\omega) > 0$$

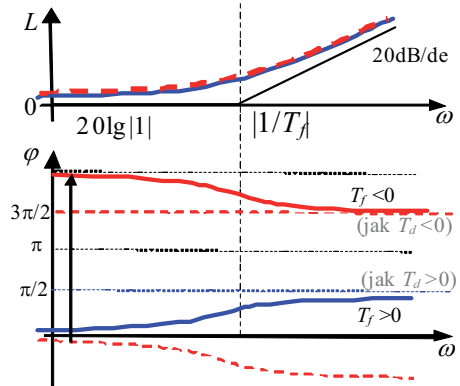
Dla  $T_f < 0$

$$P(\omega) = 1$$

$$Q(\omega) < 0$$



Rys. 16-51. Wykresy Nyquista członu forsującego ( $T_f > 0$ ,  $T_f < 0$ )



Rys. 16-52. Wykresy Bodego członu forsującego ( $T_f > 0$ ,  $T_f < 0$ )

Wykresy członu forsującego pokazują, że ujemne wartości  $T_f$  (dodatnie zera) mają znacznie większy wpływ na charakterystyki częstotliwościowe (przesunięcie fazowe) niż dodatnie wartości  $T_f$  (ujemne zera).

### 16.9.3. Aproxymacja Padé – przesuwnik fazowy

Transmitancje wszystkich podstawowych członów dynamiki mają postać funkcji wymiernej, z wyjątkiem opóźnień. Można jednak przybliżyć transmitancję członu opóźniającego za pomocą funkcji wymiernej, a podstawą tej aproksymacji jest rozwinięcie funkcji eksponencjalnej w szereg potęgowy [18]:

$$e^x = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + x^4/4! + \dots \quad (16-28)$$

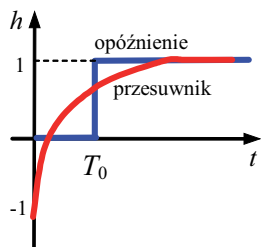
Metoda nazywa się **aproxymacją Padé** i polega na zastosowaniu rozwinięcia:

$$e^{-sT_0} = \frac{e^{-sT_0/2}}{e^{sT_0/2}} = \frac{1 - \frac{sT_0}{2} + \frac{s^2T_0^2}{2 \cdot 2} - \frac{s^3T_0^3}{6 \cdot 2} + \dots}{1 + \frac{sT_0}{2} + \frac{s^2T_0^2}{2 \cdot 2} + \frac{s^3T_0^3}{6 \cdot 2} + \dots} \quad (16-29)$$

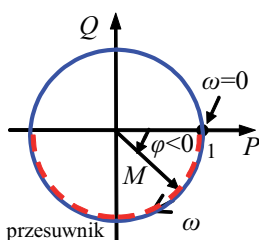
oraz ograniczeniu liczby elementów szeregu. Najczęściej stosuje się aproksymację Padé pierwszego rzędu, to znaczy:

$$e^{-sT_0} \approx \frac{1 - sT_0/2}{1 + sT_0/2}. \quad (16-30)$$

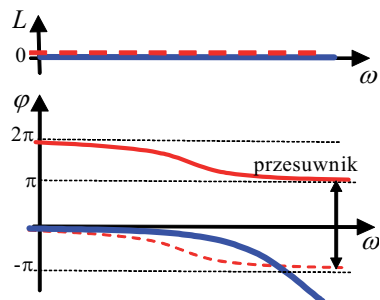
Transmitancje uzyskane przez aproksymację Padé nazywa się **przesuwnikami fazowymi**. Zachowują one takie cechy opóźnienia, jak jednostkowe wzmocnienie w stanie ustalonym i stabilność (czas opóźnienia  $T_0 > 0$ ). Z kolei jakość przybliżenia w stanie nieustalonym można ocenić na podstawie porównania charakterystyk opóźnienia i aproksymacji pierwszego rzędu. Odpowiedzi skokowe różnią się dość znacznie, w szczególności początkowa reakcja po pojawieniu się skoku (rys. 16-53).



Rys. 16-53. Odp. skokowe opóźnienia i przesuwника



Rys. 16-54. Wykres Nyquista opóźnienia i przesuwника



Rys. 16-55. Wykresy Bodego opóźnienia i przesuwника

Zgodność opóźnienia i przesuwника jest widoczna najwyraźniej na charakterystykach częstotliwościowych (rys. 16-54, rys. 16-55), a w szczególności na wykresach Bodego. Transmitancja przesuwника jest iloczynem członu inercyjnego oraz członu forsującego o ujemnym parametrze, więc wykresy  $L(\omega)$  i  $\varphi(\omega)$  są sumą wykresów tych dwóch elementów. Wykres fazowy przesuwника zmienia się w zakresie  $2\pi \div \pi$ , ale dla lepszego porównania można go przesunąć o  $2\pi$ , a wówczas widoczna jest zgodność z wykresem opóźnienia w zakresie niskich pulsacji. Oznacza to, że im niższa pulsacja przebiegu sinusoidalnego, tym przybliżenie opóźnienia za pomocą przesuwника jest dokładniejsze.

## 17. Zastosowanie podstawowych członów

*czyli jak korzystać ze wzorców*

### 17.1. Układy minimalnofazowe i nieminimalnofazowe

#### 17.1.1. Podział podstawowych członów

Podstawowe człony dynamiki są często wykorzystywane zarówno w badaniach teoretycznych, jak i w praktyce inżynierskiej. Transmitancje podstawowych członów to proste modele, które reprezentują różne charakterystyczne cechy dynamiki układów i tworzą spójny zbiór elementów do konstrukcji i analizy bardziej złożonych modeli lub jako bardzo uproszczona reprezentacja całego obiektu. Ze względu na postać transmitancji można wyróżnić siedem elementarnych członów i wszystkie poza opóźnieniem mają postać funkcji wymiernej (tabela 17-1).

Tabela 17-1. Zestawienie elementarnych członów dynamiki

| $G(s)$                                                          | Minimalno- | Nieminimalno- | Nazwy                                                                                                          |
|-----------------------------------------------------------------|------------|---------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                                                 | fazowe     |               | Człon                                                                                                          |
| $k$                                                             | $k > 0$    | $k < 0$       | proporcjonalny (wzmocnienie)<br>$k$ – wzmocnienie                                                              |
| $\frac{1}{T_i s}$                                               | $T_i > 0$  | $T_i < 0$     | całkujący (całkowanie)<br>$T_i$ – czas całkowania (zdwojenia)                                                  |
| $T_d s$                                                         | $T_d > 0$  | $T_d < 0$     | różniczkujący (różniczkowanie)<br>$T_d$ – czas różniczkowania                                                  |
| $\frac{1}{Ts + 1}$                                              | $T > 0$    | $T < 0$       | inercyjny (inercja)<br>$T$ – stała czasowa                                                                     |
| $T_f s + 1$                                                     | $T_f > 0$  | $T_f > 0$     | forsujący<br>$T_f$ – czas                                                                                      |
| $\frac{1}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$<br>$\omega_n > 0$ | zawsze     | —             | oscylacyjny<br>$\xi$ – współczynnik tłumienia względnego<br>$\omega_n$ – pulsacja drgań własnych nietłumionych |
| $e^{-sT_0}$ , $T_0 > 0$                                         | —          | zawsze        | opóźniający (opóźnienie)<br>$T_0$ – czas opóźnienia                                                            |

Ze względu na własności, człony można podzielić na układy minimalno- i nieminimalnofazowe. **Człony minimalnofazowe** to klasa wymiernych transmitancji o dodatnich wartościach parametrów, czyli dodatnie wzmocnienie i parametry czasowe (lub inaczej dodatnie wzmocnienie oraz ujemne bieguny i zera transmitancji). Pozostałe transmitancje wymierne o ujemnych parametrach oraz człon opóźniający to człony nieminimalnofazowe. Nazwa i charakterystyczne cechy tego podziału wynikają z prawidłowości, które można zaobserwować na wykresach Bodego członów:

1° Dodatnie i ujemne wartości parametrów danego członu nie wpływają na logarytmiczny wykres modułu  $L(\omega)$  tego członu, ale zmieniają wykres przesunięcia fazo-

wego  $\varphi(\omega)$  – tak więc ogólnie na podstawie danego wykresu  $L(\omega)$  nie można jednoznacznie odtworzyć wykresu  $\varphi(\omega)$ .

2° Z porównania wykresów  $\varphi(\omega)$  dla dodatnich i ujemnych parametrów członu wynika, że najmniejsze wartości  $\varphi^*(\omega)$  przyjmuje wykres członu o dodatnich parametrach – stąd określenie członu jako minimalnofazowego.

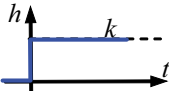
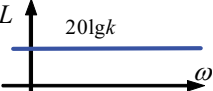
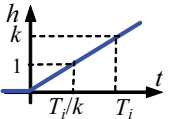
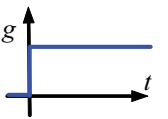
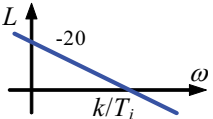
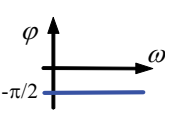
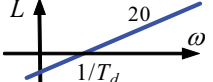
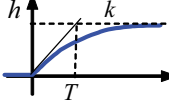
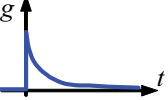
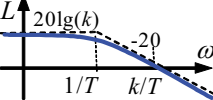
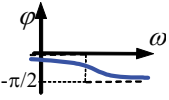
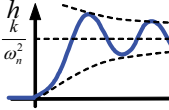
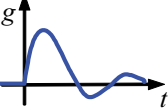
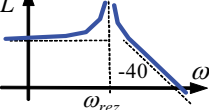
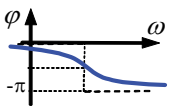
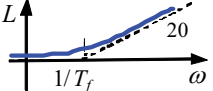
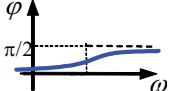
3° Dla członu minimalnofazowego istnieje jednoznaczny związek między wykresem fazy a nachyleniem wykresu  $L(\omega)$ , liczonym jako wielokrotność  $N$  nachylenia 20 dB/dek:

$$\varphi = N \cdot \pi / 2, \quad (17-1)$$

- człon proporcjonalny:  $N = 0$ ; całkujący:  $N = -1$ ; różniczkujący:  $N = +1$ ;
- dla członu inercyjnego, forsującego i oscylacyjnego zależność (17-1) odnosi się do asymptot wykresów przy niskich i wysokich pulsacjach.

Charakterystyczne cechy członów minimalnofazowych umożliwiają rozpoznanie charakteru układu fizycznego (tabela 17-2).

Tabela 17-2. Człony minimalnofazowe i ich charakterystyki (założenie  $k > 1$ )

| Człon                                                          | Odpowiedź                                                                           |                                                                                     | Logarytmiczna charakterystyka                                                       |                                                                                      |
|----------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
|                                                                | skokowa $h(t)$                                                                      | impulsowa $g(t)$                                                                    | modułu $L(\omega)$                                                                  | fazy $\varphi(\omega)$                                                               |
| proporcjonalny<br>$k$                                          |    |    |    |    |
| całkujący<br>$\frac{k}{T_i s}$                                 |   |   |   |   |
| różniczkujący<br>$T_d s$                                       |  |  |  |  |
| inercyjny<br>$\frac{k}{Ts + 1}$                                |  |  |  |  |
| oscylacyjny<br>$\frac{k}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$ |  |  |  |  |
| forsujący<br>$T_f s + 1$                                       |  |  |  |  |

Interpretacja parametrów czasowych członów minimalnofazowych na charakterystykach czasowych potwierdza, że jednostką stałej czasowej  $T$ , czasu całkowania  $T_i$

czy czasu różniczkowania  $T_d$  jest jednostka czasu  $t$  (czyli zazwyczaj sekunda). Te same parametry czasowe używane na charakterystykach częstotliwościowych  $L(\omega)$  do odmierzania charakterystycznych punktów  $1/T$ ,  $1/T_i$ ,  $1/T_d$  na osi  $\omega$  wyskalowanej w rad/sek.

Układ, który powstaje z szeregowego połączenia członów minimalnofazowych, też jest układem minimalnofazowym. Większość układów fizycznych występujących w praktyce inżynierskiej zalicza się do tej kategorii, a podstawowe badania i projektowanie układów minimalnofazowych jest znacznie łatwiejsze, ponieważ:

- jednoznaczny związek wykresów  $L(\omega)$  i  $\varphi(\omega)$  pozwala ograniczyć podstawową analizę częstotliwościową do wykresu  $L(\omega)$ ,
- zamiast dokładnego wykresu  $L(\omega)$  można używać prostego do wykonania wykresu asymptotycznego.

Podstawowe zastosowania członów dynamiki zostaną opisane przy założeniu, że są to człony minimalnofazowe.

## 17.2. Rozkład i synteza transmitancji

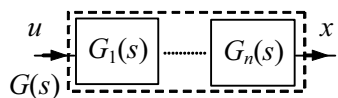
### 17.2.1. Iloczyn podstawowych członów

Jedną z typowych operacji wykonywanych podczas analizy transmitancji obiektów jest przekształcenie jej do równoważnego wyrażenia zawierającego iloczyn podstawowych członów. Transmitancja opisująca układ fizyczny może być rezultatem różnych operacji, takich jak:

- przekształcenie równania/układu równań różniczkowych ( $\rightarrow$  11.1, 11.2),
- obliczenie transmitancji zastępczej na podstawie schematu blokowego ( $\rightarrow$  13.2).

Podstawowe badania analityczne, takie jak określenie stabilności (wyznaczenie biegunów) i stanu równowagi, można zrealizować wprost na wyznaczonej transmitancji. Alternatywą metodą jest **rozkład transmitancji na podstawowe człony dynamiki**, czyli przedstawienie jej w postaci iloczynu tych członów:

$$G(s) = G_1(s) \dots G_n(s). \quad (17-2)$$



Rys. 17-1. Iloczyn transmitancji

Iloczyn transmitancji można interpretować jako szeregowo połączenie transmitancji (rys. 17-1), które nie ma związku ze strukturą układu fizycznego. W praktyce inżynierskiej rozkład na podstawowe

człony jest wykonywany zazwyczaj dla konkretnych wartości parametrów transmitancji, zwłaszcza gdy licznik i mianownik transmitancji jest wielomianem o ogólnej postaci. Zdarza się jednak, że wielomiany te mają postać iloczynową, którą wystarczy dopasować do sformalizowanej postaci członów.

Iloczyn podstawowych członów występuje w różnych metodach analizy, ale jeden z podstawowych obszarów zastosowania to **konstrukcja logarytmicznych charakterystyk częstotliwościowych**, ponieważ mnożeniu transmitancji odpowiada dodawanie charakterystyk logarytmicznych ( $\rightarrow$  14.4). W ten sposób zarówno można łatwo wyja-

śnić własności poszczególnych członów ( $\rightarrow$  16), jak i konstruować charakterystyki złożonych transmitancji (o czym szerzej w podrozdziale 17.2).

Iloczyn transmitancji jest stosowany również jako metoda **syntezy modelu dynamiki**. Transmitancję o zadanych własnościach można zdefiniować na podstawie wartości biegunów, zer i wzmocnienia układu ( $\rightarrow$  11.1.3) albo jako połączenie podstawowych członów. Na przykład, jeśli dynamikę układu charakteryzuje tłumienie  $\xi$  oraz stała czasowa  $T_1$ , to oznacza, że modelem jest transmitancja postaci:

$$G(s) = k \cdot \frac{1}{Ts + 1} \cdot \frac{1}{T_n s^2 + 2\xi T_n s + 1}, \text{ gdzie } k \text{ i } T_n \text{ mają dowolne niezerowe wartości.}$$

Jednoznaczne wyznaczenie transmitancji wymaga określenia wzmocnienia układu  $k$  oraz okresu drgań własnych nietłumionych  $T_n$ . Synteza modelu z podstawowych członów jest podstawowym elementem konstrukcji modeli na podstawie eksperymentów (o czym szerzej w podrozdziale 17.4).

17.2.2. Suma transmitancji

W badaniach analitycznych wykorzystuje się niekiedy przedstawienie transmitancji w postaci sumy prostszych składników. Przykładem takiego podejścia jest **rozkład transmitancji na ułamki proste**, czyli na sumę funkcji postaci:

$$\frac{A_{ki}}{(s - p_k)^i} \text{ i } \frac{D_{ki}s + B_{ki}}{(s^2 + b_k s + c_k)^i}. \tag{17-3}$$

Ułamki proste są podobne do członu inercyjnego oraz złożenia członu oscylacyjnego i forsującego, ale postać tych transmitancji jest ukierunkowana głównie na wyznaczenie transformaty odwrotnej  $\mathcal{L}^{-1}$  funkcji zmiennej  $s$  [18, 19].

W automatyce głównym obszarem zastosowania sumy podstawowych członów jest idea klasycznego algorytmu sterowania stosowanego w układzie regulacji (rys. 13-2), to znaczy **synteza algorytmu PID** (tabela 17-3).

Tabela 17-3. Klasyczne algorytmy regulacji PID

| PI                                                    | PD            | PID                                                                         |
|-------------------------------------------------------|---------------|-----------------------------------------------------------------------------|
| $K_p + \frac{1}{T_i s} = \frac{K_p T_i s + 1}{T_i s}$ | $K_p + T_d s$ | $K_p + \frac{1}{T_i s} + T_d s = \frac{K_p T_i s + 1 + T_i T_d s^2}{T_i s}$ |

Choć idea działania regulatora opiera się na równoległym połączeniu członu proporcjonalnego, całkującego i różniczkującego, to przy projektowaniu układów regulacji wykorzystuje się postać iloczynową, ponieważ metody projektowania opierają się w znacznej mierze na charakterystykach częstotliwościowych.

### 17.2.3. Komputerowo wspomagane wyznaczanie parametrów członów

Rozkład transmitancji na podstawowe człony jest szczególnie użyteczny w badaniach analitycznych. Podstawowy problem sprowadza się do przedstawienia wielomianu licznika i mianownika transmitancji w postaci iloczynowej:

$$- \quad b_m s^m + \dots + b_2 s^2 + b_1 s + b_0 = b_m (s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m),$$

$$- \quad a_n s^n + \dots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = a_n (s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n),$$

po czym następuje uporządkowanie i wyróżnienie poszczególnych członów:

$$G(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0} = k \frac{(s - z_1) \dots (s - z_m)}{(s - p_1) \dots (s - p_n)} = \frac{k_1}{T_1 s + 1} \cdot \frac{1}{s^2 + a_1 s + a_0} \cdot (T_2 s + 1) \cdot \dots$$

Programy symulacyjne nie przewidują specjalnych funkcji do rozkładu transmitancji na podstawowe człony, ale pozwalają wyznaczyć wszystkie parametry, które to umożliwiają (tabela 17-4).

Tabela 17-4. Funkcje wspomagające wyznaczanie i badanie podstawowych członów

|                        | Matlab / Octave              | Scilab                       |
|------------------------|------------------------------|------------------------------|
| Pierwiastki wielomianu | roots([an, ..., a2, a1, a0]) | roots([an, ..., a2, a1, a0]) |
| Bieguny i zera układu  | [p,z] = pzmap(model)         |                              |
| Bieguny układu         | pole(model)                  |                              |
| Zera układu            | zero(model)                  |                              |
| Wzmocnienie układu     | dcgain(model)                |                              |
| Tłumienie              | damp(model)                  | [wn,ksi] = damp(model)       |
| Konwersja modelu       | modelZPK = zpk(model)        | modelZPK = zpk(model)        |

gdzie model – nazwa modelu (transmitancja o dowolnej postaci).

Jako przykład zastosowania funkcji posłuży analiza dwóch transmitancji zdefiniowanych za pomocą podstawowych członów (tabela 17-5).

Tabela 17-5. Przykłady interpretacji wyników funkcji z tabeli 17-4 (Matlab, Octave)

| Funkcja:                    | pzmap                                     | pole                           | zero  | dcgain | damp<br>Eigenvalue Damping Freq                                            | zpk                                        |
|-----------------------------|-------------------------------------------|--------------------------------|-------|--------|----------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------|
| $\frac{4s+1}{(2s+1)(3s+1)}$ | p = -0.5<br>-0.33<br>z = -0.25            | -0.5<br>-0.33                  | -0.25 | 1      | -3.33e-1 1.0e+0 3.33e-1<br>-5.00e-1 1.0e+ 0 5.00e-1                        | $\frac{0.6667 (s+0.25)}{(s+0.5)(s+0.333)}$ |
| $\frac{2}{(s+4)(s^2+4s+5)}$ | p = -4.0<br>-2.0+1.0i<br>-2.0-1.0i<br>z = | -4.0<br>-2.0+1.0i<br>-2.0-1.0i |       | 0.1    | -2.0+1.0i 8.94e-1 2.24e0<br>-2.0-1.0i 8.94e-1 2.24e0<br>-4.0 1.0e+0 4.00e0 | $\frac{2}{(s+4)(s^2+4s+5)}$                |

Wyniki analizy wskazują na konieczność uważnej i właściwej interpretacji wartości zwracanych przez funkcje – w szczególności dotyczy to funkcji  $\text{damp}$  i  $\text{zpk}$ :

- parametr  $\text{Damping}$  wskazuje wartość tłumienia tylko w zakresie  $0 \leq \xi \leq 1$ , natomiast wartość 1 oznacza, że tłumienie faktycznie nie jest obliczane (biegun jest rzeczywisty lub należy do pary zespolonej, związanej z tłumieniem  $\xi \geq 1$ ),
- parametr  $\text{Freq}$  dla biegunów zespolonych oznacza wartość  $\omega_n$  (pulsację drgań własnych nietłumionych), a dla biegunów rzeczywistych wartość  $|\text{Re}(p)|$ ,
- wzmocnienie obliczane przez funkcję  $\text{zpk}$  to inny parametr niż wzmocnienie układu ( $k_{uki}$ ) obliczane przez funkcję  $\text{dcgain}$ .

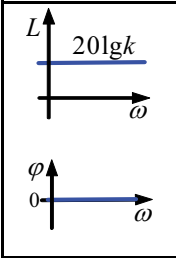
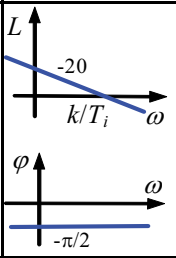
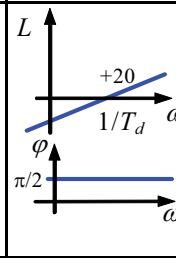
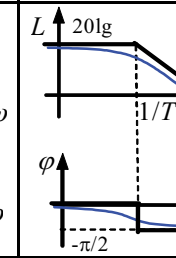
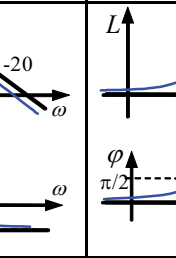
### 17.3. Asymptotyczne charakterystyki Bodego

#### 17.3.1. Charakterystyki najprostszych członów

Ze względu na własności logarytmicznej charakterystyki modułu  $L(\omega)$  można wyróżnić trzy podstawowe człony, dla których wykres  $L(\omega)$  ma kształt linii prostej o nachyleniu niezależnym od parametrów członu: człon proporcjonalny (prosta o nachyleniu zerowym), człon całkujący (prosta o nachyleniu  $-20$  dB/dek) i człon różniczkujący (prosta o nachyleniu  $+20$  dB/dek). Na podstawie tych trzech prostych charakterystyk można wyznaczyć asymptotyczne charakterystyki kolejnych dwóch członów – dla członu inercyjnego asymptotami są charakterystyki członu proporcjonalnego i całkującego ( $\rightarrow 16.4$ ), a dla członu forsującego – charakterystyki członu proporcjonalnego i różniczkującego ( $\rightarrow 16.6$ ). Dokładność charakterystyk asymptotycznych umożliwia wykorzystanie ich podczas analizowania i projektowania własności dynamicznych układów. Asymptoty charakterystyk fazowych  $\varphi(\omega)$  nie mają takiej własności – umożliwiają jedynie określenie granicznych wartości przesunięć fazowych. Jeśli jednak badane przypadki są ograniczone do układów minimalnofazowych ( $\rightarrow 17.1$ ), to analizę można ograniczyć do charakterystyki  $L(\omega)$ .

Na bazie pięciu podstawowych członów (tabela 17-6) można konstruować i interpretować asymptotyczne wykresy Bodego bardziej złożonych układów.

Tabela 17-6. Minimalnofazowe składniki asymptotycznych wykresów Bodego (por. tabela 17-2)

| Proporcjonalny                                                                      | Całkujący                                                                           | Różniczkujący                                                                       | Inercyjny                                                                           | Forsujący                                                                            |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| $k$                                                                                 | $\frac{k}{sT_i}$                                                                    | $sT_d$                                                                              | $\frac{k}{1+sT}$                                                                    | $1+sT_f$                                                                             |
|  |  |  |  |  |

### 17.3.2. Asymptotyczne wykresy Bodego złożonych transmitancji

Wyznaczanie asymptotycznych wykresów Bodego złożonej transmitancji jest dość proste, jeśli można ją przedstawić jako iloczyn członów podstawowych (tabela 17-6). Zakładamy, że są to człony o typowych, to znaczy dodatnich wartościach parametrów, a więc człony minimalnofazowe.

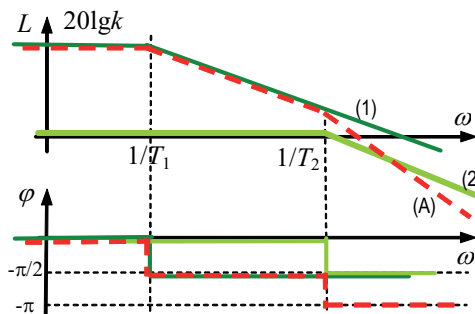
Układ drugiego rzędu, który jest stabilny i bez oscylacji, można rozłożyć na dwa człony inercyjne:

$$\frac{1}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{k}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} = \frac{k}{(T_1 s + 1)} \cdot \frac{1}{(T_2 s + 1)}. \quad (17-4)$$

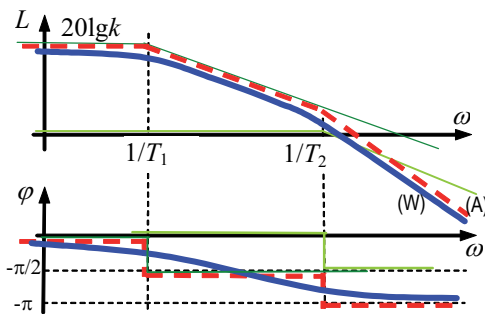
Asymptotyczny wykres  $L(\omega)$  układu powstaje z zsumowania asymptot (rys. 17-2):

- (1) członu inercyjnego o stałej czasowej  $T_1$  i wzmacnieniu  $k$ ,
- (2) członu inercyjnego o stałej czasowej  $T_2$  i wzmacnieniu jednostkowym.

Wynikiem dodawania jest asymptotyczny wykres układu (A), który jest przybliżeniem wykresu dokładnego (W) (rys. 17-3). Każdy biegun układu zmienia nachylenie asymptoty o  $-20$  dB/dek, a punkty załamania to pulsacje  $\omega$  odpowiadające odwrotności danej stałej czasowej. Asymptoty charakterystyki  $\varphi(\omega)$  mają charakter poglądowy, ale wyznaczają zakres zmian wartości przesunięcia fazowego.



Rys. 17-2. Konstrukcja asymptotycznego wykresu  $L(\omega)$  transmitancji (17-4),  $k > 1$ ,  $T_1 > T_2$

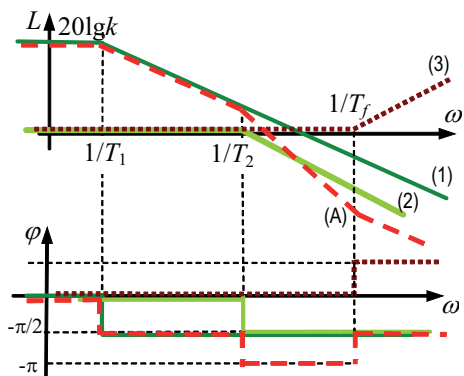


Rys. 17-3. Asymptotyczny i dokładny wykres  $L(\omega)$  transmitancji (17-4)

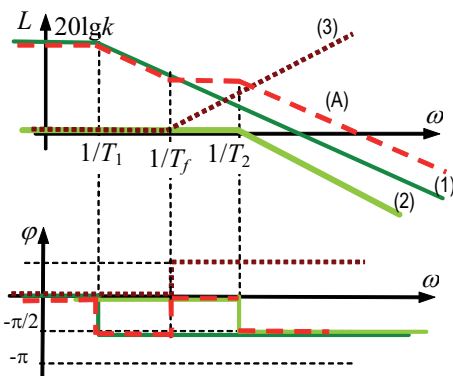
Również zera układu mają istotny wpływ na asymptoty  $L(\omega)$ , powodując zmianę nachylenia asymptot o  $+20$  dB/dek, co można zilustrować, na przykład wyznaczając wykres transmitancji:

$$\frac{b_1 s + b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{k(T_f s + 1)}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} = \frac{k}{(T_1 s + 1)} \cdot \frac{1}{(T_2 s + 1)} \cdot (T_f s + 1). \quad (17-5)$$

Wykres jest sumą: 1) członu inercyjnego o wzmacnieniu  $k$ , 2) członu inercyjnego o wzmacnieniu 1, 3) członu forsującego. Kształt asymptoty wynikowej (A) po zsumowaniu składników, zależy od relacji między parametrami transmitancji (rys. 17-4, rys. 17-5).



Rys. 17-4. Konstrukcja asymptotycznego wykresu  $L(\omega)$  transmitancji (17-5),  $k > 1, T_1 > T_2 > T_f$



Rys. 17-5. Konstrukcja asymptotycznego wykresu  $L(\omega)$  transmitancji (17-5),  $k > 1, T_1 > T_f > T_2$

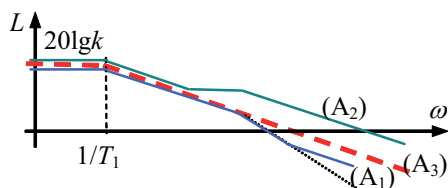
Każdy biegun transmitancji spowodował zmianę nachylenia wykresu asymptotycznego o  $-20$  dB/dek, a zero transmitancji zmianę nachylenia o  $+20$  dB/dek.

W przypadku gdy zero transmitancji ma wartość zbliżoną do bieguna tej transmitancji, to zmiana nachylenia o  $+20$  i  $-20$  dB/dek następuje dla podobnych pulsacji (rys. 17-6) – zero kompensuje wpływ bieguna układu (człon forsujący kompensuje stałą czasową członu inercyjnego). Takie zjawisko zachodzi na przykład w transmitancjach kaskady współdziałającej ( $\rightarrow$  13.2.2) i powoduje, że niektóre odpowiedzi układu drugiego rzędu wyglądają jak odpowiedzi układu pierwszego rzędu.

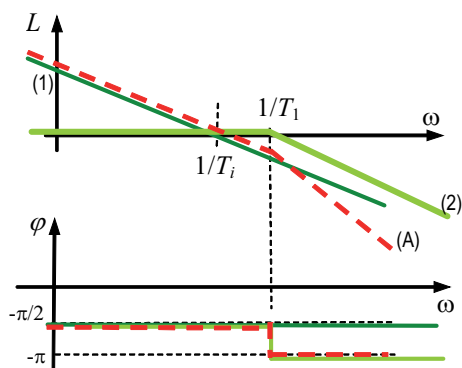
Jeśli transmitancja zawiera człon całkujący lub różniczkujący, jak na przykład w następujących przypadkach:

$$\frac{a}{s(T_1s + 1)} = \frac{s}{1/a} \cdot \frac{1}{T_1s + 1}, \quad \frac{sa}{T_1s + 1} = sa \cdot \frac{1}{T_1s + 1}, \quad (17-6)$$

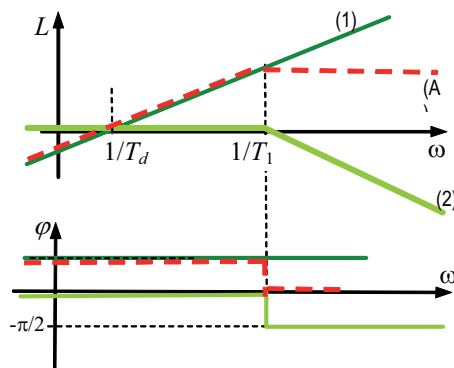
to niezerowe nachylenie asymptot występuje od początku wykresu  $L(\omega)$ :  $-20$  dB/dek dla członu całkującego (rys. 17-7),  $20$  dB/dek dla członu różniczkującego (rys. 17-8). Parametr  $a$ , który występuje w członach transmitancji (17-6), można zinterpretować również jako wzmocnienie członu inercyjnego lub wydzielić w postaci członu proporcjonalnego – jeśli asymptoty są rysowane w wyskalowanym układzie współrzędnych, to ostateczny wykres będzie identyczny.



Rys. 17-6. Kompensacja bieguna i zera transmitancji (17-5): A<sub>1</sub>)  $T_1 > T_2 > T_f$ , A<sub>2</sub>)  $T_1 > T_f > T_2$ , A<sub>3</sub>)  $T_1 > T_2 = T_f$



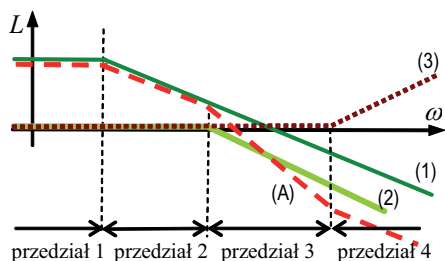
Rys. 17-7. Konstrukcja asymptotycznego wykresu całkowania z inercją (17-5),  $T_i = 1/a > T_1$



Rys. 17-8. Konstrukcja asymptotycznego wykresu różniczkowania z inercją (17-5),  $T_d = a > T_1$

Operacje dodawania składników charakterystyki asymptotycznej  $L(\omega)$  najłatwiej wykonywać, dzieląc wykres na przedziały (rys. 17-9) wyznaczone przez pulsacje załamania asymptot poszczególnych składników. Następnie, rozpoczynając od lewej strony wykresu (od najmniejszych pulsacji), dodajemy składniki pierwszego przedziału, natomiast początek każdego kolejnego przedziału powoduje jedynie odpowiednią zmianę załamania asymptoty wynikowej.

W analogiczny sposób można przeprowadzić także dekonstrukcję wykresu, czyli odtworzyć składniki tworzące daną asymptotyczną charakterystykę  $L(\omega)$ , to znaczy podzielić wykres na przedziały i rozpoczynając od lewej strony wykresu, wyznaczyć pierwszy składnik, którego wykres pasuje do asymptoty w pierwszym przedziale (jest to człon proporcjonalny, całkujący lub różniczkujący). Każda kolejna zmiana nachylenia (punkt załamania) oznacza wprowadzenie albo członu inercyjnego  $1/(T_i \cdot s + 1)$ , albo członu forsującego  $(T_f \cdot s + 1)$ , czyli członów, które do punktu załamania mają asymptotę położoną na osi (wzmocnienie jednostkowe  $\rightarrow L(\omega) = 0$ ). Iloczyn wszystkich zidentyfikowanych składników wykresu  $L(\omega)$  odpowiada transmitancji układu.



Rys. 17-9. Konstrukcja i dekonstrukcja wykresu  $L(\omega)$  z rysunku 17-4

### 17.3.3. Własności częstotliwościowych wykresów Bodego

Wszystkie rysunki z podrozdziału 17.3.2 mają charakter poglądowy (w transmitancjach występują parametry, a wykresy są rysowane w umownej skali), tym niemniej pozwalają określić kształt charakterystyk asymptotycznych. I chociaż programy symulacyjne bardzo ułatwiają rysowanie dokładnych charakterystyk częstotliwościowych, to charakterystyki asymptotyczne ciągle są użyteczne. Podstawowy obszar zastosowań

to analizowanie i projektowanie układów dynamiki oraz identyfikacja modelu układu na podstawie eksperymentu ( $\rightarrow$  17.4.3).

Asymptotyczne logarytmiczne charakterystyki modułu są bardzo użyteczne podczas rozwiązywania różnych zadań ze względu na następujące własności:

- charakterystyki członów połączonych szeregowo sumują się,
- nachylenie asymptot to wielokrotności  $\pm 20$  dB/dek,
- każdy biegun transmitancji objawia się załamaniem asymptot o  $-20$  dB/dek,
- każde zero transmitancji objawia się załamaniem asymptot o  $+20$  dB/dek,
- charakterystyki asymptotyczne członu inercyjnego i forsującego mają określone błędy (dla pulsacji załamania maksymalny błąd 3 dB, a w odległości oktawy od pulsacji załamania błąd 1 dB).

Wykresy asymptotyczne pomagają w interpretacji i kształtowaniu własności układu, ponieważ załamania asymptot wyostrzają wpływ poszczególnych parametrów. Znając charakterystykę asymptotyczną  $L(\omega)$  układu, można od razu określić ile biegunów i zer ma transmitancja tego układu, a także czy układ ma własności całkujące lub różniczkujące (przykłady w tabeli 17-7).

Tabela 17-7 Przykładowe wykresy asymptotyczne ( $n$  biegunów i  $m$  zer)

|                |                                  |                  |                                     |
|----------------|----------------------------------|------------------|-------------------------------------|
|                |                                  |                  |                                     |
| $n = 2, m = 1$ | $n = 2, m = 1$<br>w tym $T_{ds}$ | $n = 1, m = 1$ ; | $n = 1, m = 2$<br>w tym $1/(T_i s)$ |

Własności te można potwierdzić, przeprowadzając dekonstrukcję wykresu asymptotycznego  $L(\omega)$  na podstawowe człony, a nawet wyznaczyć wartości parametrów członów na podstawie charakterystycznych punktów asymptot.

## 17.4. Identyfikacja modeli układów

### 17.4.1. Podstawy

Jednym z podstawowych obszarów zastosowania elementarnych członów dynamiki w automatyce są klasyczne metody identyfikacji modelu dynamiki obiektu, czyli konstrukcja modelu w postaci transmitancji o parametrach wyznaczonych na podstawie charakterystyk czasowych lub częstotliwościowych. Wspólną cechą metod identyfikacji jest możliwość wyznaczenia modelu układu bez znajomości zachodzących tam zjawisk, jak tego wymaga modelowanie analityczne ( $\rightarrow$  2). Metody identyfikacji wymagają za to przeprowadzenia odpowiedniego eksperymentu na obiekcie, co w rzeczywistych warunkach może być niekiedy trudne.

Model w postaci transmitancji jest z definicji opisem liniowym, więc stosowanie go wiąże się z przyjęciem założenia o liniowości opisywanego układu. Jeśli jednak

układ jest nieliniowy, to zastosowanie transmitancji oznacza jednocześnie przybliżony charakter opisu układu, który zachowuje wystarczającą dokładność tylko w pewnym otoczeniu punktu pracy.

### 17.4.2. Identyfikacja na podstawie odpowiedzi na wymuszenie skokowe

Najprostsze metody identyfikacji modelu opierają się na interpretacji parametrów podstawowych członów dynamiki na charakterystykach czasowych ( $\rightarrow$  16), a procedura postępowania jest następująca:

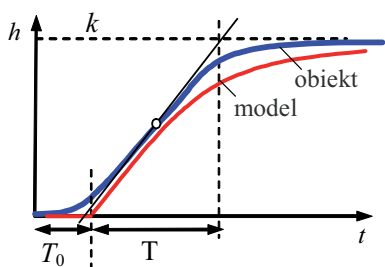
- wyznaczenie reakcji obiektu na skokową zmianę sygnału wejściowego,
- wybór prostej transmitancji o odpowiedzi skokowej o podobnym kształcie,
- dobór parametrów, które zapewnią dopasowanie odpowiedzi modelu i obiektu.

W praktyce inżynierskiej identyfikowany obiekt bardzo często ma charakter inercyjny. W najprostszym przypadku odpowiedź skokowa obiektu  $h(t)$  jest podobna do odpowiedzi skokowej członu inercyjnego pierwszego rzędu (rys. 16-8), więc przyjmuje się, że modelem obiektu jest człon inercyjny, a parametry  $k$  i  $T$  wyznacza się wprost na podstawie odpowiedzi skokowej. Gdy odpowiedź obiektu jest podobna do reakcji członu inercyjnego rzędu większego niż jeden (rys. 16-11), to zazwyczaj rolę modelu pełni trzyparametrowa transmitancja typu:

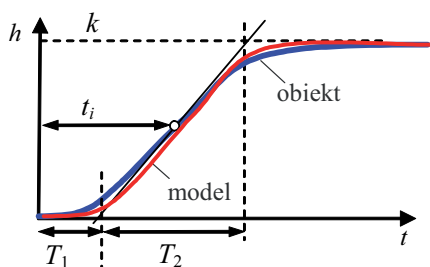
– model Kūpfmüllera  $\frac{k}{Ts+1} e^{-sT_0}$  (ang. FOTD – First Order Time Delay), (17-7)

– model Strejca  $\frac{k}{(Ts+1)^n}$ . (17-8)

Wartości parametrów tych transmitancji można wyznaczyć na podstawie pomiaru odpowiednich odcinków związanych z prostą styczną do odpowiedzi  $h(t)$  w punkcie przegięcia. W przypadku modelu (17-7) wartości wzmocnienia  $k$ , stałej czasowej  $T$  i opóźnienia  $T_0$  można odczytać bezpośrednio z wykresu (rys. 17-10). Odpowiedź wyznaczonego w ten sposób modelu będzie zawsze różnić się kształtem od odpowiedzi obiektu, jednak model ten jest bardzo często stosowany w praktyce ze względu na prosty sposób wyznaczania parametrów.



Rys. 17-10. Identyfikacja modelu Kūpfmüllera na podstawie odpowiedzi skokowej



Rys. 17-11. Identyfikacja modelu Strejca na podstawie odpowiedzi skokowej

W przypadku modelu (17-8) wzmocnienie również odczytuje się z wykresu, natomiast stałą czasową i opóźnienie można obliczyć na przykład, na podstawie parametrów wykresu (rys. 17-11) i tabeli 17-8 w następujących krokach:

- z wykresu odczytać  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $t_i$ ,
  - obliczyć  $T_1/T_2$  i odnaleźć w tabeli wiersz zawierający najbliższą temu wartość  $(T_1/T_2)_{\text{tab}}$ ,
  - z wiersza odczytać rząd  $n$  oraz wartość  $(t_i/T)_{\text{tab}}$ ,
  - obliczyć stałą czasową  $T$  z relacji:  $t_i/T = (t_i/T)_{\text{tab}}$ .
- Jeśli stosunek  $T_1/T_2$  odbiega od wartości  $(T_1/T_2)_{\text{tab}}$ , to można poprawić dokładność modelu:
- przyjąć, że  $T_1/T_2$  ma wartość mniejszą,
  - a więc model będzie niższego rzędu,
  - połączyć model z członem opóźniającym o czasie opóźnienia  $T_0 = (T_1/T_2 - (T_1/T_2)_{\text{tab}})T_2$ .

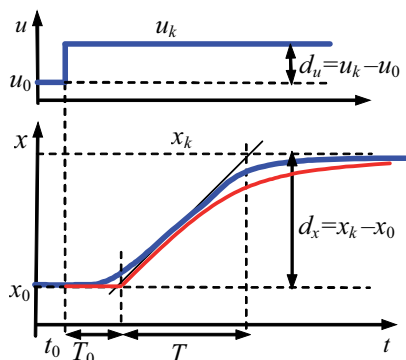
Tabela 17-8. Parametry modelu Strejca

| $n$ | $(T_1/T_2)_{\text{tab}}$ | $(t_i/T)_{\text{tab}}$ |
|-----|--------------------------|------------------------|
| 1   | 0                        | 0                      |
| 2   | 0.104                    | 1                      |
| 3   | 0.218                    | 2                      |
| 4   | 0.319                    | 3                      |
| 5   | 0.410                    | 4                      |
| 6   | 0.493                    | 5                      |
| 7   | 0.570                    | 6                      |
| 8   | 0.642                    | 7                      |
| 9   | 0.709                    | 8                      |
| 10  | 0.773                    | 9                      |

Transmitancje Kűpfműllera i Strejca to z definicji przybliżone modele obiektu, a ich parametry mogą być wyznaczane również innymi metodami.

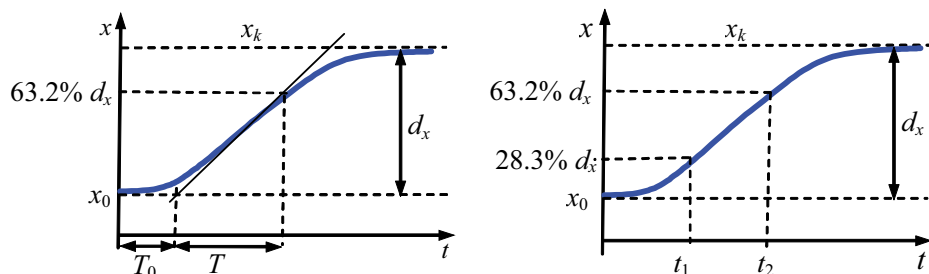
Zastosowanie tych metod w praktyce wymaga uwzględnienia warunków przeprowadzenia eksperymentu. Najważniejszy z nich to fakt, że na rzeczywistych obiektach bardzo rzadko wyznacza odpowiedź skokową, czyli reakcję na wymuszenie  $1(t)$ .

Uogólnione postępowanie (rys. 17-12) zakłada, że skokowa zmiana na wejściu następuje od wartości  $u_0 \neq 0$  do wartości  $u_k$  i ma miejsce w chwili  $t_0$ , gdy obserwacja potwierdza, że układ znajduje się w stanie równowagi  $x_0 \neq 0$ . Po skoku reakcja obiektu zmienia się do wartości  $x_k$ . Identyfikację modelu należy przeprowadzić względem początkowego stanu równowagi i chwili  $t_0$ . To oznacza, że wzmocnienie modelu jest liczone jako zmiana wartości na wyjściu do zmiany wartości na wejściu ( $k = d_x/d_u$ ), natomiast parametry czasowe są liczone od chwili  $t_0$ . Po identyfikacji modelu zawsze warto wykonać jego weryfikację, czyli sprawdzić poprawność i jakość modelu, porównując odpowiedzi modelu i obiektu na to samo wymuszenie, pamiętając, że wyznaczona transmitancja opisuje reakcję obiektu względem początkowego punktu równowagi. Jeśli więc wymuszenie podawane na obiekt zmienia się od  $u_0$  do  $u_k$ , to wymuszenie podawane na blok transmitancji musi zmieniać się od 0 do  $d_u = u_k - u_0$ , a odpowiedź modelu należy przesunąć do punktu  $x_0$  (rys. 12-3).

Rys. 17-12. Identyfikacja na podstawie reakcji na dowolną skokową zmianę  $d_u$ 

Metody identyfikacji bazujące na konstrukcji stycznej w punkcie przegięcia są metodami graficznymi – styczna może być wyznaczona odręcznie. Dokładność wyzna-

czenia stycznej przekłada się na dokładność modelu, tym bardziej, że wskazanie punktu przegięcia w reakcjach rzeczywistych obiektów bywa problemem. Stąd w praktyce inżynierskiej stosowane są różne alternatywne sposoby wyznaczania parametrów modelu, na przykład metody dwupunktowe (rys. 17-13).

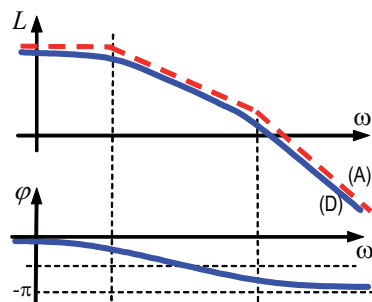


Rys. 17-13. Dwupunktowa identyfikacja stałej czasowej i opóźnienia ( $T = 1,5 \cdot (t_2 - t_1)$ ,  $T_0 = t_2 - T$ )

Przedstawione metody identyfikacji rozwiązują większość zadań inżynierskich, chociaż dotyczą najprostszych reakcji. Identyfikację trudniejszych przypadków (np. reakcja oscylacyjna lub niestabilna) można wykonać w podobny sposób – wybór odpowiedniej postaci transmitancji i dopasowanie jej parametrów.

### 17.4.3. Identyfikacja na podstawie charakterystyk Bodego

Identyfikacja modelu na podstawie charakterystyk częstotliwościowych wymaga wykonania całej serii eksperymentów, które umożliwią narysowanie logarytmicznej charakterystyki modułu  $L(\omega)$  i fazy  $\varphi(\omega)$  ( $\rightarrow$  15.1). Za każdym razem na wejście układu podawany jest sygnał sinusoidalny o określonej pulsacji  $\omega$ , a po ustaleniu się odpowiedzi wyznaczane jest wzmocnienie oraz przesunięcie fazowe sygnału wyjściowego, które są podstawą do narysowania wykresów Bodego (rys. 17-4). Wykres doświadczalny (D) jest następnie obudowywany asymptotami, przy czym wiadomo, że nachylenie każdej z nich może być tylko wielokrotnością  $\pm 20$  dB/dek. Uzyskana w ten sposób charakterystyka asymptotyczna (A) układu jest poddawana dekonstrukcji, która pozwala wyznaczyć podstawowe człony wraz parametrami ( $\rightarrow$  17.3.2). Modelem układu jest iloczyn wyznaczonych członów, co najczęściej kończy identyfikację, ponieważ większość układów fizycznych występujących w praktyce to układy minimalnofazowe ( $\rightarrow$  17.1). Aby potwierdzić tę własność, należy włączyć do identyfikacji wykres fazy i sprawdzić, czy zachowany jest związek (17-1) między wykresem  $\varphi(\omega)$  a nachyleniem wykresu  $L(\omega)$ . Odstępstwa pozwalają zidentyfikować człony nieminimalnofazowe (opóźnienia transportowe, ujemne parametry czasowe, ujemne wzmocnienia).



Rys. 17-14. Doświadczalny (—) i asymptotyczny (--) wykres Bodego



## **VIII. Optymalizacja modelu i badań**



## 18. Model optymalny

*czyli co i jak można uprościć*

### 18.1. Wprowadzenie

Celem modelowania i identyfikacji w dziedzinie automatyki jest jak najprostszy model, który opisuje tylko to, co jest istotne z punktu widzenia sterowania obiektem, czyli model optymalny ze względu na jego przeznaczenie. Taki model nie służy do tworzenia wirtualnej rzeczywistości. Im większa dokładność, tym:

- potrzeba wyznaczenia większej liczby parametrów (co może być trudniejsze od samej konstrukcji modelu),
- badania analityczne są trudniejsze,
- symulacje trwają dłużej i są bardziej wrażliwe na błędy obliczeniowe.

Zazwyczaj zaczyna się od konstrukcji bardzo prostego modelu z małą liczbą parametrów, a jeśli jest dostępny dokładniejszy model, to można podjąć próbę jego uproszczenia. Decyzja jest podejmowana na przykład na podstawie weryfikacji charakterystyk czasowych modelu z danymi doświadczalnymi.

Kluczową cechą modelu przeznaczonego do zastosowania w obszarze automatyki jest możliwość zastosowania opisu makroskopowego ( $\rightarrow$  2.1), czyli opis za pomocą równań różniczkowych zwyczajnych (w przeciwieństwie do równań różniczkowych cząstkowych) lub za pomocą transmitancji. Drugą niezwykle istotną cechą jest liniość modelu, która decyduje o metodologii prowadzenia badań. W dalszej kolejności optymalizacja modelu dotyczy obniżenia rzędu modelu lub wyboru formy matematycznej, na przykład ze względu na ułatwienie badań analitycznych.

### 18.2. Układy liniowe i nieliniowe

#### 18.2.1. Własności układów liniowych

Metody analizy dynamiki obiektów opisane w rozdziałach 4 ÷ 17, dotyczą układów o liniowych własnościach i skupionych parametrach. Metody są różne, ale wzajemnie się uzupełniają, co wynika z charakterystycznych własności układów liniowych:

- 1° Podstawą własności układów liniowych jest zasada superpozycji, która sprawia, że rozwiązanie równania różniczkowego (układu równań) jest sumą rozwiązania swobodnego i wymuszonego.
- 2° Rozwiązanie swobodne decyduje o własnościach dynamicznych układu liniowego, a w szczególności o stabilności układu (własności dynamiczne nie zależą od wymuszenia).
- 3° Postać rozwiązania swobodnego układu jest znana, a jego parametry są wyznaczane na podstawie algebraicznego równania charakterystycznego.

- 4° Kryterium położenia pierwiastków równania charakterystycznego wystarcza do określenia stabilności układu liniowego.
- 5° Stabilność lub niestabilność układu nie zależy od warunków początkowych – jeśli układ liniowy jest stabilny, to jest stabilny globalnie, a jeśli jest niestabilny, to również globalnie.
- 6° Odpowiedź na pochodną sygnału równa się pochodnej odpowiedzi na ten sygnał – na przykład skoro impuls  $\delta(t)$  jest pochodną skoku  $1(t)$ , to odpowiedź impulsowa jest pochodną odpowiedzi skokowej.
- 7° Układ liniowy ma jeden punkt równowagi – jedno rozwiązanie statyczne (poza szczególnym przypadkiem, gdy układ liniowy ma własności całkujące).
- 8° Układy liniowe można opisać i badać za pomocą transmitancji, co wynika z możliwości przekształcenia równań różniczkowych na algebraiczne równania operatorowe (przekształcenie Laplace’a i Fouriera).

Dzięki powyższym własnościom:

- 1. Modele układów można konstruować i badać w różnej postaci (równanie /układ równań różniczkowych lub operatorowych) – dostępnych jest wiele metod, a nawet gotowych rozwiązań do analizowania i projektowania.
- 2. Badanie stabilności odbywa się na podstawie równania charakterystycznego, które można wyznaczyć z jednej z trzech form: pojedyncze równanie  $n$ -tego rzędu, układ równań pierwszego rzędu (równania stanu), transmitancja.
- 3. Badania doświadczalne można ograniczyć do realizacji w jednym, dowolnym punkcie pracy (reakcja na takie samo zakłócenie jest identyczna w każdym punkcie pracy).
- 4. Wykresy czasowe można przesuwąć i skalować.
- 5. Dostępna jest analiza częstotliwościowa (wykresy częstotliwościowe).

Programy symulacyjne wykorzystują te własności i udostępniają różne sposoby definiowania modeli liniowych w postaci schematów lub funkcji ( $\rightarrow$  5.2, 9.2, 12.2).

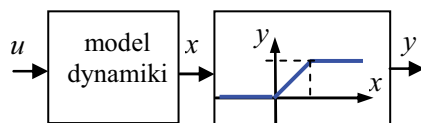
### 18.2.2. Rodzaje i własności układów nieliniowych

Nieliniowości rzeczywistych obiektów (procesów) mogą mieć charakter funkcji różniczkowalnych (np. funkcje potęgowe, wymierne) lub funkcji nieróżniczkowalnych (np. nasycenie).

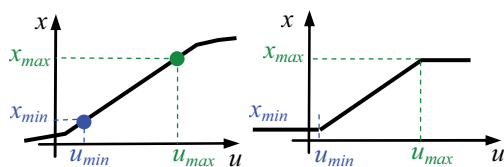
Jedną z głównych przyczyn nieliniowości modelu jest dokładny opis zjawisk. Wśród przykładów ilustrujących zasady konstrukcji modeli na podstawie równań bilansowych ( $\rightarrow$  2) występowały nieliniowe funkcje opisujące: swobodny wypływ zależny od wysokości cieczy ( $f_{wy}(t) = A_w \sqrt{2gh(t)}$ ), strumień ciepła zależny od przepływu i temperatury nośnika ( $q(t) = c_p \rho f(t) T(t)$ ), spadek ciśnienia proporcjonalny do kwadratu przepływu ( $\Delta p(t) = R f^2(t)$ ). Jeśli tego typu zjawiska występują na obiekcie, to powodują nieliniowość zarówno modelu dynamiki, jak i modelu statycznego. Liniowy opis zjawisk zawsze jest opisem wyidealizowanym, ponieważ w praktyce każda liniowa zależność obowiązuje jedynie w ograniczonym zakresie. Dotyczy to mię-

dzy innymi założenia o stałej wartości parametrów, gdyż właściwie wszystkie własności fizyczne zależą od wielu czynników, a szczególnie od temperatury, która ma wpływ na gęstość, wymiary, rezystancję itd. Badanie układu w bardzo zmiennych warunkach pracy wymaga uwzględnienia zmian wartości parametrów, co oznacza wprowadzenie nieliniowego opisu zjawisk i znaczną rozbudowę modelu.

Ograniczony zakres liniowości układu wynika również z konstrukcji obiektu, na przykład: nie ma ujemnego poziomu cieczy w zbiorniku, grzałka nie może wytworzyć więcej ciepła niż moc znamionowa, zbyt duże rozciągnięcie sprężyny powoduje nieodwracalne odkształcenie elementu, itp. Aby ograniczyć zakres wartości zmiennych, stosuje się blok nasycenia (rys. 18-1), czyli funkcję, która jest nie tylko nieliniowa, ale też nieróżniczkowalna. Zdarza się też, że dokładny opis układu jest nieliniowy, ale



Rys. 18-1. Ograniczenie wartości zmiennych



Rys. 18-2. Ograniczona liniowość i nasycenie

zkładając zawężony zakres stosowania modelu, można używać opisu liniowego z ograniczeniem zakresu za pomocą funkcji nasycenia (rys. 18-2). Każda nieliniowość ogranicza możliwość badań analitycznych – stąd częste wykorzystywanie badań symulacyjnych.

Definiowanie schematów modeli liniowych i nieliniowych w programach symulacyjnych opiera się na tych samych zasadach ( $\rightarrow$  5.2). Badanie dynamiki modeli nieliniowych jest jednak bardziej pracochłonne – własności układu nieliniowego powinny być zbadane w różnych punktach pracy i dla różnych parametrów wymuszeń. Ostrożna powinna być też interpretacja wniosków – wyniki badań symulacyjnych dotyczą konkretnych wartości parametrów i zmiennych, i trudno je uogólnić.

Badania analityczne umożliwiają formułowanie ogólnych wniosków, ale są trudne do zrealizowania w przypadku układów nieliniowych (nie działa zasada superpozycji, więc trzeba szukać pełnego rozwiązania). W przypadku nieliniowych równań różniczkowych zazwyczaj w prosty sposób można jedynie określić równanie statyczne (zerując funkcje pochodne wszystkich zmiennych) i wyznaczyć rozwiązanie statyczne, czyli punkt równowagi układu dla określonych wartościach na wejściu. Równania nieliniowe mogą mieć więcej niż jeden punkt równowagi, jeśli równanie statyczne ma więcej niż jedno rozwiązanie, jak na przykład model  $\dot{x}(t) + x^2(t) = u(t)$ , którego równanie statyczne ( $x_0^2 = u_0$ ) ma dwa pierwiastki  $x_0 = \pm\sqrt{u_0}$  (dwa punkty równowagi).

Własności dynamiki układów nieliniowych zależą i od warunków początkowych, i od funkcji wymuszających, co można zaobserwować na podstawie reakcji układu na takie samo zakłócenie – są różne w różnych punktach pracy. Może wystąpić nawet zjawisko stabilności/niestabilności lokalnej – układ jest stabilny, gdy warunki początkowe lub wartości wymuszenia pochodzą z pewnego obszaru wartości, a dla innych jest niestabilny.

Ponieważ możliwości analitycznego badania dynamiki układów nieliniowych są bardzo ograniczone i złożone, to stosuje się linearyzację, czyli różne zabiegi, aby sprowadzić zadanie do problemu liniowego. Taki zlinearyzowany opis można stosować (badać) w pewnym ograniczonym zakresie zmian wielkości, na przykład w otoczeniu punktu pracy. Do badania modeli liniowych i zlinearyzowanych stosuje się te same metody, jednak wnioski z analizy modelu zlinearyzowanego są poprawne tylko w ograniczonym zakresie. Jeśli nieliniowość układu wynika jedynie z ograniczenia zakresu pracy, to przeprowadza się badania analityczne liniowego modelu w założonych zakresach wartości zmiennych, natomiast nasycenie jest uwzględniane w badaniach symulacyjnych.

### 18.3. Przekształcanie i upraszczanie formy modelu

#### 18.3.1. Wprowadzenie

Model dynamiki danego układu może mieć różną postać matematyczną, która wynika z zastosowanej metody konstrukcji i innych przekształceń. Jeśli model ma być przedmiotem badań analitycznych, to może wymagać konwersji na postać, która umożliwia zastosowanie określonych operacji – na przykład wyznaczenie równania charakterystycznego wymaga modelu w postaci jednego równania  $n$ -tego rzędu, równań stanu lub transmitancji. Celem konwersji jest jedynie zmiana formy opisu. Niekiedy wynikowa forma jest prostsza, ale to nie oznacza uproszczenia modelu (nie wpływa w istotny sposób na dokładność modelu).

#### 18.3.2. Hipoteza skracalności [11]

Podczas wyznaczania i przekształcania transmitancji często stosowana jest operacja skracania wielomianów w liczniku i mianowniku, którą wykonuje się na podstawie hipotezy skracalności. Formalnie hipoteza ta dotyczy ciągłości funkcji typu:

$$F(s) = \frac{s - p}{s - p}, \quad (18-1)$$

która ma wartość 1 wszędzie poza punktem  $s = p$ , gdzie jest nieokreślona (0/0). Hipoteza ciągłości przypisuje funkcji  $F(s)$  w punkcie  $s = p$  wartość jej granicy przy  $s \rightarrow p$ , którą można wyznaczyć, stosując regułę de l'Hospitala:

$$F(s)|_{s=p} = \lim_{s \rightarrow p} \frac{s - p}{s - p} = \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{\frac{d(s - p)}{ds}}{\frac{d(s - p)}{ds}} = 1. \quad (18-2)$$

**Hipoteza skracalności** oznacza, że wyrażenia typu (18-1) można zastąpić przez podstawienie  $F(s) = 1$ , co pozwala upraszczać transmitancje, ale hipoteza ta ma jedynie charakter roboczy – wynik musi być potwierdzony doświadczalnie. W praktyce za-

zwyczaj stosuje się hipotezę skracalności, zakładając milcząco, że weryfikacja wyników jest pozytywna.

**Przykład 1.** Przekształcenie równania operatorowego na transmitancję ( $\rightarrow 11$ )

Linowe równanie różniczkowe po przekształceniu do postaci operatorowej ma postać:

$$M(s)x(s) = L(s)u(s),$$

gdzie  $M(s)$  i  $L(s)$  są wielomianami zmiennej  $s$ . Aby wyznaczyć transmitancję, należy równanie operatorowe podzielić obustronnie przez wielomian  $M(s)$ , a następnie skrócić lewą stronę, aby otrzymać wyrażenie do obliczenia  $x(s)$ :

$$\frac{M(s)x(s)}{M(s)} = \frac{L(s)u(s)}{M(s)} \rightarrow x(s) = \frac{L(s)}{M(s)}u(s), \text{ czyli } x(s) = G(s)u(s).$$

Formalnie operacja dzielenia przez  $M(s)$  wymaga założenia, że  $M(s) \neq 0$ , co nie jest prawdą, gdy wartości  $s$  są równe pierwiastkom wielomianu  $M(s)$ . Podczas przekształceń przyjęto (milcząco) hipotezę skracalności – wyznaczono transmitancję  $G(s)$  i jest ona poprawna w całym zakresie wartości  $s$ , również w biegunach transmitancji.

**Przykład 2.** Wyznaczanie złożonej transmitancji (sprzężenie zwrotne,  $\rightarrow 13.2$ )

Dwie transmitancje  $G_o(s) = L_o(s)/M_o(s)$  i  $G_r(s) = L_r(s)/M_r(s)$  są składnikami układu ze sprzężeniem zwrotnym. Podstawiając te transmitancje do wyrażenia na transmitancję zastępczą układu regulacji, otrzymujemy:

$$\frac{G_o(s)G_r(s)}{1 + G_o(s)G_r(s)} = \frac{\frac{L_o(s)}{M_o(s)} \frac{L_r(s)}{M_r(s)}}{1 + \frac{L_o(s)}{M_o(s)} \frac{L_r(s)}{M_r(s)}} = \frac{\frac{L_o(s)L_r(s)}{M_o(s)M_r(s)}}{\frac{M_o(s)M_r(s) + L_o(s)L_r(s)}{M_o(s)M_r(s)}} = \frac{L_o(s)L_r(s)}{M_o(s)M_r(s) + L_o(s)L_r(s)}.$$

Na końcowym etapie przekształceń wykonano skrócenie wyrażenia, przyjmując hipotezę skracalności. Wynik jest poprawny.

Hipoteza skracalności zawodzi lub jest problematyczna (warunkowa) w następujących przypadkach:

- jeśli w wyniku skrócenia następuje zmniejszenie rzędu układu (tracimy część informacji o dynamice układu),
- jeśli skrócenie dotyczy zera i bieguna transmitancji, które leżą na osi  $\text{Im}$  lub w prawej półpłaszczyźnie zespolonej (to pozorna kompensacja wpływu bieguna, który powoduje niestabilność transmitancji),
- jeśli skrócenie dotyczy zera i bieguna wynikających z odrębnych elementów układu fizycznego – na przykład celowo rozbudowano badany układ przez proste szeregowo dołączenie elementu, który ma skompensować biegun układu.

**Przykład 3.** Szeregowo połączenie transmitancji

Transmitancja szeregowo połączenia niestabilnego członu inercyjnego ( $k > 0$ ,  $T > 0$ ) i przesuwnika fazowego ma postać:

$$G(s) = \frac{k}{1-sT} \cdot \frac{1-sT}{1+sT}.$$

Po wprowadzeniu pętli sprzężenia transmitancja ma postać  $G_z(s) = 1/(1+G(s))$  (tabela 13-5):

a) przyjmując hipotezę skracalności  $G(s)$

$$G_z(s) = \frac{1}{1 + \frac{k}{1+sT}} = \frac{1+sT}{1+sT+k}$$

Bieguny  $G_z(s)$ :  $p_1 = -(k+1)/T < 0$

Wniosek: układ  $G_z(s)$  jest stabilny

b) odrzucając hipotezę skracalności  $G(s)$

$$G_z(s) = \frac{1}{1 + \frac{k}{1-sT} \frac{1-sT}{1+sT}} = \frac{(1-sT)(1+sT)}{(1-sT)(1+sT+k)}$$

Bieguny  $G_z(s)$ :  $p_1 = -(k+1)/T < 0$ ,  $p_2 = 1/T > 0$

Wniosek: układ  $G_z(s)$  jest niestabilny

Uzyskano sprzeczne wnioski na temat stabilności. Doświadczalna weryfikacja własności pokazuje, że i obiekt  $G(s)$ , i układ  $G_z(s)$  są niestabilne (hipoteza skracalności zawodzi).

#### Przykład 4. Sprzętowa kompensacja biegunów

Do układu  $G_o(s)$  dołączono szeregowo dodatkowy element (korektor)  $G_k(s) = (s - z_k)/(s - p_o)$ .

Transmitancja tego układu ma postać:

$$G(s) = G_o(s)G_k(s) = \frac{L_o(s)}{M_o(s)(s - p_o)} \cdot \frac{(s - z_k)}{(s - p_o)}$$

Jeśli  $z_k \approx p_o$  i  $p_o < 0$  ( $z_k < 0$ ), to warunkowo można przyjąć hipotezę skracalności i pominąć czynniki  $(s - p_o)$  i  $(s - z_k)$ , chociaż  $p_o$  i  $z_k$  nie są idealnie równe. Warunek dotyczy ograniczenia, że skrócony model nie będzie stosowany do badania układu w różnych warunkach początkowych, które mogą być ustalane niezależnie dla układu i korektora (badania takie wymagają konwersji transmitancji na równania różniczkowe).

Jeśli  $z_k \approx p_o$ , ale  $p_o \geq 0$  ( $z_k \geq 0$ ), to nie należy przyjmować hipotezy skracalności. Jest to próba szeregowej kompensacji niestabilności układu – metoda zawodna, ponieważ trudno zakładać, że korektor utrzyma idealne dostrojenie parametrów do układu ( $z_k = p_o$ ).

### 18.3.3. Zamiana formy modelu

W obszarze automatyki często stosowana jest optymalizacja modelu polegająca na zamianie transmitancji na inną równoważną formę transmitancji, która ułatwia prowadzenie badań. W szczególności dotyczy to zastosowania przesuwника fazowego i członu inercyjnego  $n$ -tego rzędu.

Jedną z podstawowych metod identyfikacji modelu na podstawie odpowiedzi czasowych układu ( $\rightarrow$  17.4) stosuje założenie, że każdy układ powyżej pierwszego rzędu może reprezentować iloczyn członu inercyjnego i opóźniającego. Jeśli niewymierna transmitancja opóźnienia jest przeszkodą do dalszych badań, to stosuje się aproksymację Padé ( $\rightarrow$  16.9.3) i model uzyskuje postać członu inercyjnego z **przesuwnikiem fazowym**:

$$G(s) = \frac{k}{Ts + 1} e^{-sT_0} \rightarrow G_z(s) = \frac{k}{Ts + 1} \cdot \frac{1 - sT_0/2}{1 + sT_0/2}. \quad (18-3)$$

Inna metoda identyfikacji modelu ( $\rightarrow$  17.4) zakłada, że każdy układ powyżej pierwszego rzędu można opisać za pomocą **członu inercyjnego  $n$ -tego rzędu**. Model ten może również reprezentować układ o różnych stałych czasowych:

$$G(s) = \frac{L(s)}{(1 + sT_1)(1 + sT_2) \dots (1 + sT_n)} \rightarrow G_z(s) = k \frac{L(s)}{(1 + sT_z)^n}, \quad (18-4)$$

gdzie:  $G(s)$  – transmitancja układu wyznaczona na przykład na podstawie modelowania analitycznego,  $G_z(s)$  – transmitancja zastępcza o uśrednionej stałej czasowej  $T_z$  [14]. Transmitancja zastępcza zapewnia zachowanie wzmocnienia  $k_{ukl}$ :

$$k_{ukl} = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} G_z(s) \rightarrow k = 1,$$

natomiast metodę wyznaczania zastępczej stałej czasowej  $T_z$  można opracować na podstawie porównania mianownika transmitancji pierwotnej:

$$M(s) = (1 + sT_1)(1 + sT_2) \dots (1 + sT_n) = 1 + s(T_1 + T_2 + \dots + T_n) + \dots + s^n T_1 T_2 \dots T_n$$

i zastępczej:

$$M_z(s) = (1 + sT_z)^n = 1 + snT_z + \dots + s^n T_z^n.$$

Przyjmuje się wartość stałej  $T_z$  równą wartości:

1° średniej arytmetycznej

$$T_{z1} = (T_1 + T_2 + \dots + T_n) / n, \quad (18-5)$$

2° średniej geometrycznej

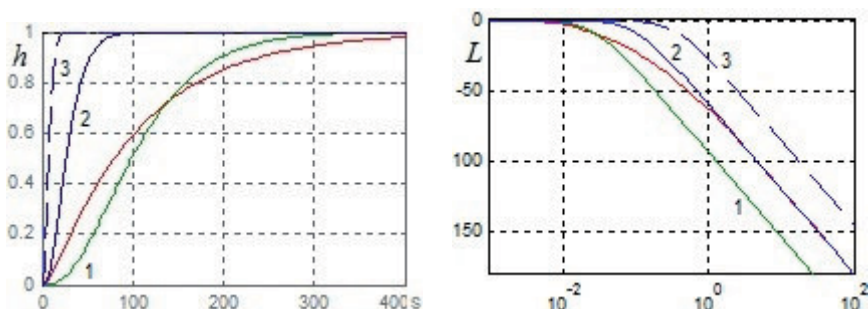
$$T_{z2} = (T_1 T_2 \dots T_n)^{1/n}, \quad (18-6)$$

3° średniej harmonicznej

$$T_{z3} = \frac{n}{1/T_1 + 1/T_2 + \dots + 1/T_n}. \quad (18-7)$$

Z własności funkcji wiadomo, że zawsze  $T_{z1} \geq T_{z2} \geq T_{z3}$ . Różne metody wyznaczenia stałej  $T_z$  prowadzą do różnej dokładności modelu zastępczego, co można zaobserwować na wykresach czasowych i częstotliwościowych (rys. 18-3).

**Przykład:** Załóżmy, że model jest trzeciego rzędu, a stałe czasowe modelu mają bardzo różne wartości: 1, 10 i 100. Średnia arytmetyczna wynosi  $T_{z1} = 37$ , średnia geometryczna:  $T_{z2} = 10$ , średnia harmoniczna:  $T_{z3} = 2.7027$ . Efekty zastosowania transmitancji zastępczej przedstawiono na podstawie odpowiedzi skokowej  $h(t)$  wykresu  $L(\omega)$  (rys. 18-3).



Rys. 18-3. Model ( $T_1 = 1$ ;  $T_2 = 10$ ;  $T_3 = 100$ ) i model zastępczy ze średnią: 1)  $T_{z1}$ , 2)  $T_{z2}$ , 3)  $T_{z3}$

Średnia arytmetyczna  $T_{z1}$  zapewnia najlepszą dokładność odpowiedzi skokowej, ponieważ czas ustalania odpowiedzi wyznacza największa stała czasowa (w przykładzie

$T = 100$ ), a  $T_{z1}$  jest zawsze największą ze średnich (najbardziej zbliżoną do największej stałej czasowej). Średnia arytmetyczna  $T_{z1}$  jest też najdokładniejsza w zakresie niewielkich pulsacji, a średnia geometryczna  $T_{z2}$  w zakresie dużych pulsacji.

## 18.4. Skalowanie modelu i zmiennych

### 18.4.1. Skalowanie czasu

Układając równania bilansowe ( $\rightarrow 2$ ), przyjmowaliśmy, że wszystkie wartości zmiennych są wyrażone w jednostkach podstawowych. Ponieważ czas jest wyrażony wówczas w sekundach, więc taka jest też jednostka wektora czasu generowanego przez programy symulacyjne. Aby zmienić jednostkę czasu, na przykład na minuty czy godziny, trzeba przeskalować otrzymany wektor czasu. Alternatywą dla tej operacji jest przeskalowanie czasu w równaniu różniczkowym, tak aby przeskalowany czas dotyczył wszystkich badań analitycznych i symulacyjnych.

Skalowanie czasu można wykonać na liniowych i nieliniowych równaniach różniczkowych, a polega ono na wprowadzaniu nowej zmiennej czasu  $\tau$ :

$$\tau = t / n, \quad (18-8)$$

gdzie  $n$  jest współczynnikiem przeliczenia (np. zamiana sekund na minuty:  $n=60$ ).

Należy w każdym miejscu równania podstawić  $t = n\tau$ , to znaczy:

- wszystkie zmienne stają się funkcjami zmiennej  $\tau$ :  $x(t) = x(n\tau)$ ,  $u(t) = u(n\tau)$ ,
- pochodne liczone po zmiennej  $t$ , są liczone po zmiennej  $\tau$ :

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{dx(n\tau)}{d(n\tau)} = \frac{1}{n} \frac{dx(n\tau)}{d\tau}, \quad \frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{d^2x(n\tau)}{d(n\tau)^2} = \frac{1}{n^2} \frac{d^2x(n\tau)}{d\tau^2}, \dots$$

Ponieważ  $n$  jest stałym współczynnikiem, więc każde oznaczenie  $x(n\tau)$ ,  $u(n\tau)$  oznacza faktycznie funkcję nowej zmiennej:  $x(\tau)$ ,  $u(\tau)$ .

Przeskalowanie czasu nie zmienia żadnych własności równania różniczkowego, co można wykazać na przykładzie równania oscylacyjnego:

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\omega \dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \omega^2 u(t). \quad (18-9)$$

Po podstawieniu  $t = n\tau$  otrzymujemy postać:

$$\frac{1}{n^2} \ddot{x}(\tau) + \frac{2\xi\omega}{n} \dot{x}(\tau) + \omega^2 x(\tau) = \omega^2 u(\tau), \quad (18-10)$$

która będzie używana podczas definiowania modelu w programie symulacyjnym i spowoduje, że wektory czasu będą wyskalowane w jednostkach zmiennej  $\tau$ .

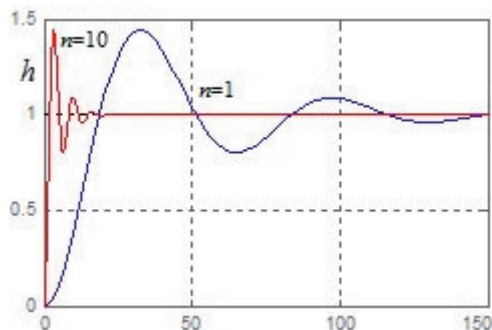
Po uporządkowaniu równania (18-10) otrzymujemy:

$$\ddot{x}(\tau) + 2\xi\omega n \dot{x}(\tau) + \omega^2 n^2 x(\tau) = \omega^2 n^2 u(\tau), \quad (18-11)$$

a po zastosowaniu podstawienia  $\omega n = \omega_1$  przeskalowane równanie ma postać:

$$\ddot{x}(\tau) + 2\xi\omega_1 \dot{x}(\tau) + \omega_1^2 x(\tau) = \omega_1^2 u(\tau). \quad (18-12)$$

Równanie pierwotne (18-9) i przeskalowane (18-12) mają taki sam współczynnik tłumienia  $\xi$ . Pulsacje  $\omega$  i  $\omega_1$  są też takie same, ale wyrażone w różnych jednostkach, podobnie jak wszystkie parametry dynamiki, np. czas ustalania odpowiedzi. Wykresy na rysunku 18-4 przedstawiają odpowiedzi równania pierwotnego i przeskalowanego dla



Rys. 18-4. Odpowiedź skokowa nieskalowana ( $n = 1$ ) i przeskalowana ( $n = 10$ )

czytelności wykresu zastosowano przeskalowanie czasu ( $n = 10$ ). Wykres równania pierwotnego ( $n = 1$ ) i przeskalowanego ( $n = 10$ ) są narysowane w tym samym układzie współrzędnych, ale różnią się interpretacją skali czasu – dla równania pierwotnego wartości na osi czasu oznaczają zakres  $0 \div 150$  sekund, a dla równania przeskalowanego wartości na osi czasu oznaczają zakres  $0 \div 150$  „decysekund” (dziesiątki sekund).

Powyższe skalowanie dotyczy tylko osi  $t$  – nie dotyczy wartości zmiennych, takich jak na przykład przepływ. Zmiana jednostek zmiennych wymaga albo przeliczenia wartości przed podstawieniem do równania bilansowego, albo wprowadzenia współczynnika przeliczającego w równaniu (tabela 18-1).

Tabela 18-1 Skalowanie czasu i zmiana jednostek przepływu

| Bez skalowania                                                                                                                                                                                                                                          | Skalowanie czasu ( $n = 60$ )                                                                                                                                                                                                                                                                        | Zmiana jednostki przepływu                                                                                                                                                                                                                                     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Model (2-6):</p> $A\dot{h}(t) = f_{we}(t) - A_w\sqrt{2gh(t)}$ $\frac{\text{m}^2}{\text{s}} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \frac{\text{m}^3}{\text{s}} - \text{m}^2 \sqrt{\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \text{m} \rightarrow \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$ | <p>Model (2-6), <math>\tau = t/n</math></p> $\frac{1}{n} A\dot{h}(\tau) = f_{we}(\tau) - A_w\sqrt{2gh(\tau)}$ $\frac{\text{m}^2}{\text{s}} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \frac{\text{m}^3}{\text{s}} - \text{m}^2 \sqrt{\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \text{m} \rightarrow \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$ | <p>Model (2-6), <math>f_{we} [\text{m}^3/\text{h}]</math></p> $A\dot{h}(t) = f_{we}(t) - A_w\sqrt{2gh(t)}$ $\frac{\text{m}^2}{\text{s}} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 3600 \frac{\text{m}^3}{\text{h}} - \text{m}^2 \sqrt{\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \text{m}$ |
| <p>Model (2-21):</p> $C_v \dot{T}_w(t) = c_p f_m(t) (T_z(t) - T_w(t))$ $\frac{\text{J}}{\text{K}} \frac{\text{K}}{\text{s}} = \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \frac{\text{kg}}{\text{s}} (\text{K} - \text{K}) \rightarrow \text{W}$          | <p>Model (2-21), <math>\tau = t/n</math></p> $\frac{1}{n} C_v \dot{T}_w(t) = c_p f_m(t) (T_z(t) - T_w(t))$ $\frac{\text{J}}{\text{K}} \frac{\text{K}}{\text{s}} = \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \frac{\text{kg}}{\text{s}} (\text{K} - \text{K}) \rightarrow \text{W}$                   | <p>Model (2-21), <math>f_m [\text{kg}/\text{min}]</math></p> $C_v \dot{T}_w(t) = c_p f_m(t) (T_z(t) - T_w(t))$ $\frac{\text{J}}{\text{K}} \frac{\text{K}}{\text{s}} = \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} 60 \frac{\text{kg}}{\text{min}} \text{K}$      |

## 18.4.2. Normalizacja wartości

Porównanie wzorów opisujących reakcje układów liniowych na podstawowe wymuszenia potwierdza możliwość przesuwania i skalowania odpowiedzi takich układów ( $\rightarrow$  4.2.2). Szczególnym przypadkiem skalowania zmiennych jest normalizacja modelu względem wartości znamionowych konkretnego układu, stosowana bardzo często w modelach silników i układów napędowych ( $\rightarrow$  2.5.2). Na przykład model napędu postaci:

$$\begin{cases} L_t \frac{di_t(t)}{dt} = -R_t i_t(t) - c_w \omega(t) + u_t(t) \\ J \dot{\omega}(t) = c_m i_t(t) - M_o(t) \end{cases} \quad (18-13)$$

normalizuje się zazwyczaj względem znamionowych wartości napięcia ( $U_{tN}$ ), prądu ( $I_{tN}$ ), obrotów ( $\Omega_N$ ) i momentu siły ( $M_N$ ).

Wprowadzenie do wzoru (18-13) wartości względnych  $U_t(t) = u_t(t) / U_{tN}$ ,  $I_t(t) = i_t(t) / I_{tN}$ ,  $\Omega(t) = \omega(t) / \Omega_N$ ,  $m_o(t) = M_o(t) / M_N$  można wykonać w następujący sposób:

$$\begin{aligned} \frac{I_{tN}}{I_{tN}} L_t \frac{di_t(t)}{dt} &= -\frac{I_{tN}}{I_{tN}} R_t i_t(t) - \frac{\Omega_N}{\Omega_N} c_w \omega(t) + \frac{U_{tN}}{U_{tN}} u_t(t) & \frac{\Omega_N}{\Omega_N} J \frac{d\omega(t)}{dt} &= \frac{I_{tN}}{I_{tN}} c_m i_t(t) - \frac{M_N}{M_N} M_o(t) \\ L_t I_{tN} \frac{dI_t(t)}{dt} &= -R_t I_{tN} I_t(t) - c_w \Omega_N \Omega(t) + U_{tN} U_t(t) & J \Omega_N \frac{d\Omega(t)}{dt} &= c_m I_{tN} I_t(t) - M_N m_o(t) \\ \frac{L_t I_{tN}}{R_t I_{tN}} \frac{dI_t(t)}{dt} &= -I_t(t) - \frac{c_w \Omega_N}{R_t I_{tN}} \Omega(t) + \frac{U_{tN}}{R_t I_{tN}} U_t(t) & \frac{J \Omega_N}{M_N} \frac{d\Omega(t)}{dt} &= \frac{c_m I_{tN}}{M_N} I_t(t) - m_o(t) \\ \frac{L_t}{R_t} \frac{dI_t(t)}{dt} &= -I_t(t) - \frac{U_{tN}}{R_t I_{tN}} \frac{c_w \Omega_N}{U_{tN}} \Omega(t) + \frac{U_{tN}}{R_t I_{tN}} U_t(t) & \frac{J \Omega_N}{M_N} \frac{d\Omega(t)}{dt} &= \frac{M_N}{M_N} I_t(t) - m_o(t) \end{aligned}$$

Wprowadzenie oznaczeń:

$$K_t = U_{tN} / (R_t I_{tN}) = R_N / R_t,$$

$$T_e = L_t / R_t, a_{cw} = c_w \Omega_N / U_{tN},$$

$$T_e \frac{dI_t(t)}{dt} = -I_t(t) + K_t (U_t(t) - a_{cw} \Omega(t))$$

Wprowadzenie oznaczeń:

$$T_m = J \Omega_N / M_N$$

$$T_m \frac{d\Omega(t)}{dt} = I_t(t) - m_o(t)$$

Zmienne  $U_t(t)$ ,  $I_t(t)$ ,  $\Omega(t)$  i  $m_o(t)$  są bezwymiarowe, a model ma postać:

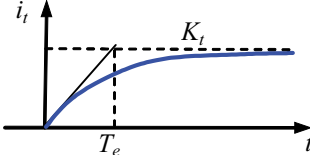
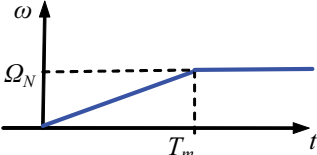
$$\begin{cases} T_e \dot{I}_t(t) = -I_t(t) + K_t (U_t(t) - a_{cw} \Omega(t)) \\ T_m \dot{\Omega}(t) = I_t(t) - m_o(t) \end{cases} \quad (18-14)$$

Równaniom (18-14) odpowiadają następujące transmitancje:

$$\begin{aligned} I_t(s) &= \frac{K_t T_m s}{T_m s (T_e s + 1) + a_{cw} K_t} U_t(s) + \frac{K_t a_{cw}}{T_m s (T_e s + 1) + a_{cw} K_t} m_o(s), \\ \Omega(s) &= \frac{K_t}{T_m s (T_e s + 1) + a_{cw} K_t} U_t(s) + \frac{T_e s + 1}{T_m s (T_e s + 1) + a_{cw} K_t} m_o(s). \end{aligned} \quad (18-15)$$

W analizie napędów parametry modelu  $K_t$ ,  $T_e$  i  $T_m$  nazywane są wzmocnieniem i stałymi czasowym, jednak interpretacja określenia stała czasowa jest inna niż to wynika z definicji parametrów podstawowych członów dynamiki ( $\rightarrow 16$ ). Stała czasowa elektryczna ( $T_e$ ) i mechaniczna ( $T_m$ ) są wyznaczane na podstawie odpowiedzi układu w szczególnych warunkach, które eliminują sprzężenie między równaniem obwodu twornika i równaniem momentów siły (tabela 16-2).

Tabela 18-2. Doświadczalne wyznaczanie parametrów napędu

| Doświadczenie i wyznaczenie stałej czasowej elektrycznej ( $T_e$ )                                                                                                                                                                                                                     | Doświadczenie i wyznaczenie stałej czasowej mechanicznej ( $T_m$ )                                                                                                                                                                           |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Przebieg natężenia prądu <math>I_t</math> po skoku napięcia <math>U_t</math> przy zachowaniu stałej prędkości obrotowej – wówczas model napędu ogranicza się do równania:</p> $T_e \dot{I}_t(t) = -I_t(t) + K_t(U_t(t) - a_{cw}\Omega),$ <p>gdzie <math>T_e = L_t / R_t</math>.</p> | <p>Rozruch silnika na biegu jałowym (<math>m_o = 0</math>) i przy znamionowym prądzie twornika (<math>I_t = 1</math>) – wówczas model napędu ogranicza się do równania:</p> $T_m \dot{\Omega}(t) = 1, \text{ gdzie } T_m = J\Omega_N / M_N.$ |
| <p>Reakcja układu ma charakter inercyjny o wzmocnieniu <math>K_t</math> i stałej czasowej <math>T_e</math>.</p>                                                                                       | <p>Reakcja układu ma charakter całkujący – czas <math>T_m</math> to czas gdy <math>\omega = \Omega_N</math>.</p>                                           |

## 18.5. Przybliżanie i upraszczanie modelu

Optymalnie prosty model uzyskuje się za pomocą przybliżeń i uproszczeń. **Przybliżenie (aproksymacja)** polega na zastosowaniu prostszego opisu danego zjawiska czy zależności, a najczęściej stosowanym przybliżeniem jest linearyzacja. **Uproszczenie** modelu natomiast to pominięcie pewnych istotnych zjawisk czy cech, które prowadzi zazwyczaj do obniżenia rzędu modelu (liczba biegunów)<sup>1</sup>. Przybliżanie i upraszczanie wykonuje się zarówno na etapie konstrukcji modelu, jak i na etapie analizy.

Przybliżanie i upraszczanie na etapie konstrukcji modelu ma postać zbioru założeń, nawet jeśli nie zostały one jawnie wymienione. **W modelowaniu analitycznym** ( $\rightarrow 2$ ) zawsze ma miejsce:

- określenie granic modelowanego układu (procesu), czyli wskazanie zmiennych wejściowych i wyjściowych oraz warunków pracy,
- wskazanie najważniejszych zjawisk, w tym określenie bilansowanych wielkości i istotnych magazynów (obszarów akumulacji) tych wielkości, np. które magazyny są największe ( $\rightarrow 2.2$ ) lub mają największą pojemność cieplną ( $\rightarrow 2.3$ ); które masy w układzie mechanicznym są znaczące ( $\rightarrow 2.4$ ),
- decyzja dotycząca dokładności opisu zjawisk (liniowe/nieliniowe funkcje, stałe/zmienne parametry), np. czy swobodny wypływ cieczy ze zbiornika ( $\rightarrow 2.2$ ) należy opisać dokładną nieliniową zależnością (może wystarczy przybliżona, ale liniowa zależność), czy natężenie przepływu nośnika ciepła ( $\rightarrow 2.3$ ) zmienia się.

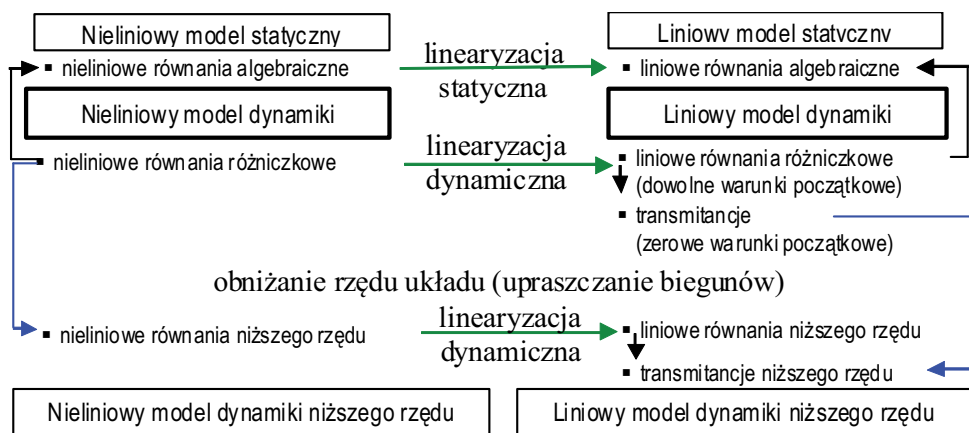
Przyjęte założenia mają decydujący wpływ na liniowość i rząd modelu (liczba biegunów). Opis można też uprościć, zakładając ograniczenia zastosowania modelu – na

<sup>1</sup> Potocznie „upraszczaniem modelu” bywa nazywane każde przekształcenie, które obniża rząd, linearyzuje wyrażenie czy zmienia postać modelu.

przykład: konstruowany model zachowa dokładność, jeśli wartości zmiennych mieszczą się w określonym zakresie lub modelowany układ pracuje w określonych warunkach (np. stała temperatura, jednorodność materiałów).

Z kolei konstrukcja modelu za pomocą klasycznych **metod identyfikacji** ( $\rightarrow$  17.4) daje w wyniku transmitancję, czyli opis liniowy z definicji. Zastosowanie identyfikacji wiąże się więc z przyjęciem założenia o liniowości opisywanego układu, a jeśli układ jest nieliniowy, to oznacza, że wyznaczona transmitancja jest przybliżonym opisem, który zachowuje wystarczającą dokładność tylko w pewnym otoczeniu punktu pracy. Różne metody identyfikacji umożliwiają uzyskanie różnych postaci transmitancji tego samego układu, na przykład model układu inercyjnego w postaci inercji z opóźnieniem (17-7) lub inercji  $n$ -tego rzędu (17-8). Wybór formy zależy zazwyczaj od dalszego przeznaczenia modelu.

Optymalizowanie modelu na etapie analizy odbywa się za pomocą operacji matematycznych – głównie to linearyzacja i obniżanie rzędu układu (rys. 18-5).



Rys. 18-5. Linearyzacja i upraszczanie modelu

Linearyzacja statyczna obejmuje różne metody liniowego przybliżenia nieliniowych charakterystyk (równań) statycznych ( $\rightarrow$  19.1). Linearyzacja dynamiczna natomiast jest ogólną metodą, stosowaną do nieliniowych równań różniczkowych ( $\rightarrow$  19.2). Z kolei analityczne upraszczanie modelu polegające na obniżeniu rzędu układu dotyczy modeli liniowych (lub zlinearyzowanych) i polega na pomijaniu najmniej znaczących biegunów ( $\rightarrow$  20.1), co powoduje, że reakcja uproszczonego modelu będzie mniej dokładna, ale zachowa swoje najistotniejsze cechy (np. czas stabilizacji i oscylacyjność).

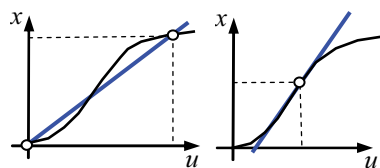
## 19. Linearyzacja modelu

*czyli jak „wyprostować” problem*

### 19.1. Linearyzacja statyczna

#### 19.1.1. Zasady

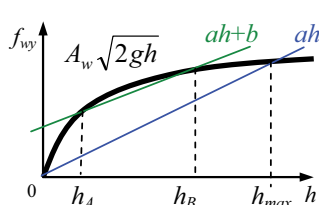
Nieliniowość modeli dynamiki układów fizycznych często dotyczy tylko części statycznej, to znaczy, że wszystkie nieliniowe zależności modelu występują w modelu statycznym (po wyzerowaniu pochodnych w równaniach bilansowych). W ogólności mogą to być funkcje różniczkowalne i nieróżniczkowalne (np. nasycenie). Linearyzację statyczną stosujemy dla funkcji różniczkowalnych, a ogólna zasada polega na zastosowaniu liniowego przybliżenia nieliniowej funkcji, które można wyznaczyć na przykład metodą prostej siecznej lub stycznej (rys. 19-1). Wybór metody zależy od oczekiwanej dokładności i planowanego zastosowania. Sieczna łącząca skrajne punkty wykresu, jest lepszym przybliżeniem, gdy model będzie stosowany w szerokim zakresie wartości zmiennych. Styczna wyznaczona w punkcie pracy zapewnia większą dokładność, ale blisko punktu pracy (w ograniczonym zakresie).



Rys. 19-1. Liniowe przybliżenie funkcji

#### 19.1.2. Sieczna i styczna funkcji jednej zmiennej (swobodny wypływ)

Przykłady linearyzacji statycznej **metodą siecznej** przedstawiono w rozdziale 3.2 w odniesieniu do zbiorników ze swobodnym wypływem. Dokładny i zlinearyzowany model pojedynczego zbiornika to:



Rys. 19-2. Sieczna funkcji wypływu

$$A\dot{h}(t) = f_{we}(t) - A_w \sqrt{2gh(t)} \approx f_{we}(t) - ah(t), \quad (19-1)$$

gdzie  $ah(t)$  jest zlinearyzowaną funkcją opisującą swobodny wypływ  $f_{wy}(t) = A_w \sqrt{2gh(t)}$  (rys. 19-2).

Współczynnik  $a$  wyznaczony na podstawie punktów  $f_{wy}(0) = 0$  i  $f_{wy}(h_{max}) = f_{wy_{max}}$  ma wartość:

$$A_w \sqrt{2gh_{max}} = ah_{max} \rightarrow a = A_w \sqrt{2gh_{max}} / h_{max}. \quad (19-2)$$

Takie przybliżenie modelu zapewnia najlepszą dokładność, gdy zbiornik jest prawie pusty lub prawie pełny (dla minimalnej i maksymalnej wartości  $f_{we}$ ). Nie jest to najlepsze rozwiązanie, jeśli model jest używany głównie przy częściowym wypełnieniu zbiornika, gdzie błąd przybliżenia jest największy albo gdy wypełnienie zmienia się w

pełnym zakresie  $0 \div h_{max}$ . Alternatywą jest wyznaczenie siecznej funkcji  $f_{wy}$  na podstawie dwóch punktów  $f_{wy}(h_A)$  i  $f_{wy}(h_B)$ . Wówczas zlinearyzowany model ma postać:

$$A\dot{h}(t) = f_{we}(t) - (ah(t) + b), \quad (19-3)$$

a współczynniki  $a$  i  $b$  są obliczane z układu równań:

$$\left. \begin{aligned} A_w \sqrt{2gh_A} &= ah_A + b \\ A_w \sqrt{2gh_B} &= ah_B + b \end{aligned} \right\} \rightarrow a = A_w \sqrt{2g} \frac{\sqrt{h_B} - \sqrt{h_A}}{h_B - h_A}, b = -ah_A + A_w \sqrt{2gh_A}. \quad (19-4)$$

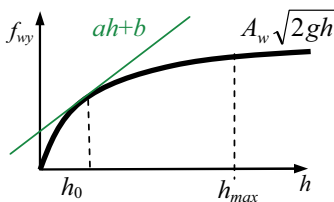
Dobierając odpowiednio poziom  $h_A$  i  $h_B$  (albo wartości  $f_{weA}$  i  $f_{weB}$ , które wyznaczają poziom  $h_A$  i  $h_B$ ), można zminimalizować największą różnicę między modelem zlinearyzowanym i dokładnym. Podczas rozwiązywania lub analizy równania różniczkowego (19-3) stały parametr  $b$  można formalnie interpretować jak kolejny sygnał wejściowy, który zawsze ma stałą wartość (w technice taki sygnał nazywa się przesunięciem punktu pracy, ang. bias).

Linearyzacja statyczna **za pomocą stycznej** polega na zastosowaniu prostej  $y(x)$  stycznej do wykresu  $f(x)$  w punkcie  $(x_0, y_0 = f(x_0))$ , zgodnie z ogólną zależnością:  $y(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$ . Tak więc linearyzacja funkcji  $f_{wy} = A_w \sqrt{2gh}$  jest realizowana w następujący sposób:

$$\begin{aligned} \left. \frac{df_{wy}}{dh} \right|_0 (h - h_0) + f_{wy}(h_0) &= \left. \frac{d(A_w \sqrt{2gh})}{dh} \right|_0 (h - h_0) + A_w \sqrt{2gh_0} = \\ &= \frac{A_w \sqrt{2g}}{2\sqrt{h_0}} (h - h_0) + A_w \sqrt{2gh_0} = ah + b. \end{aligned} \quad (19-5)$$

Zlinearyzowany model zbiornika ze swobodnym wypływem można zapisać w postaci (19-3), gdzie współczynniki  $a$  i  $b$  (rys. 19-3) wynikają ze wzoru

(19-5):



Rys. 19-3. Styczna do funkcji wypływu

$$a = \frac{A_w \sqrt{2g}}{2\sqrt{h_0}}, b = -ah_0 + A_w \sqrt{2gh_0}. \quad (19-6)$$

Można też podstawić wzór

(19-5) do pierwotnego bilansu:

$$A\dot{h}(t) = f_{we}(t) - (a(h(t) - h_0) + f_{wy}(h_0))$$

i zastosować zmienne przyrostowe:

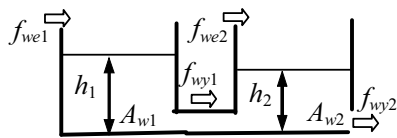
$$A\Delta\dot{h}(t) = \Delta f_{we}(t) - a\Delta h(t). \quad (19-7)$$

Zmienne  $\Delta h(t)$  i  $\Delta f_{we}(t)$  są liczone względem punktu linearyzacji ( $f_{we0}$ ,  $h_0$ , a także  $f_{wy}(h_0)$ ), który stanowi początek układu współrzędnych dla modelu (19-7).

Linearyzacja za pomocą stycznej pozwala zachować dobrą dokładność przybliżenia w przypadku, gdy wypełnienie zbiornika zmienia się w niewielkim zakresie wokół wybranego poziomu  $h_0$ , ale nie pozwala przeprowadzić linearyzacji dla  $h_0 \approx 0$ , gdy współczynnik  $a$  ma nieskończoną wartość (styczna w tym punkcie jest prostopadła do osi  $h$ ) – w takim przypadku lepiej jest zastosować linearyzację za pomocą siecznej.

### 19.1.3. Sieczna i styczna funkcji wielu zmiennych (swobodny przepływ)

Analogiczne sposoby linearyzacji statycznej można zrealizować w przypadku kaskady z przepływem między zbiornikami (rys. 19-4). W rozdziale 3.2 opisano taką linearyzację przy założeniu, że występuje tylko zmienna wejściowa  $f_{we1}$  ( $f_{we2} = 0$ ) – zlinearyzowany model ma postać:



Rys. 19-4. Zbiorniki połączone przewodem

$$\begin{cases} A_1 \dot{h}_1(t) = f_{we1}(t) - a_1(h_1(t) - h_2(t)) \\ A_2 \dot{h}_2(t) = a_1(h_1(t) - h_2(t)) - a_2 h_2(t) \end{cases}, \quad (19-8)$$

gdzie współczynniki  $a_1$  i  $a_2$ , wyznaczone **metodą siecznej** dla zerowych i maksymalnych wartości  $f_{wy1}$  i  $f_{wy2}$ , mają postać:

$$f_{wy1}(\Delta h_{\max}): \quad A_{w1} \sqrt{2g \cdot \Delta h_{\max}} = a_1 \cdot \Delta h_{\max} \rightarrow a_1 = \frac{A_{w1} \sqrt{2g \cdot \Delta h_{\max}}}{\Delta h_{\max}}, \quad (19-9)$$

$$f_{wy2}(h_{2\max}): \quad A_{w2} \sqrt{2gh_{2\max}} = a_2 h_{2\max} \rightarrow a_2 = A_{w2} \sqrt{2gh_{2\max}} / h_{2\max}.$$

Zerowe wartości  $f_{wy1}$  i  $f_{wy2}$  występują dla  $f_{we1} = 0$  (puste zbiorniki), a maksymalne wartości  $f_{wy1}$  i  $f_{wy2}$  dla maksymalnej wartości  $f_{we1}$ , ponieważ w stanie równowagi  $f_{wy1} = f_{wy2} = f_{we1}$ . Dopóki  $f_{we2} = 0$ , łatwo wykonać ten i każdy inny wariant linearyzacji za pomocą siecznej, ponieważ zawsze  $h_1 \geq h_2$  (na podstawie wzorów do wyznaczenia stanu równowagi (3-14)).

Zadanie komplikuje się, gdy pojawia się druga zmienna wejściowa ( $f_{we2} > 0$ ), ponieważ dokładny model kaskady ma wówczas dwa warianty:

- gdy  $h_1 \geq h_2$  i ciecz przepływa ( $f_{wy1}$ ) ze zbiornika 1 do 2:

$$\begin{cases} A_1 \dot{h}_1(t) = f_{we1}(t) - A_{w1} \sqrt{2g(h_1(t) - h_2(t))} \\ A_2 \dot{h}_2(t) = f_{we2}(t) + A_{w1} \sqrt{2g(h_1(t) - h_2(t))} - A_{w2} \sqrt{2gh_2(t)} \end{cases}, \quad (19-10)$$

a stan równowagi to:

$$h_2 = \frac{(f_{we1} + f_{we2})^2}{2gA_{w2}^2}, \quad h_1 = h_2 + \frac{f_{we1}^2}{2gA_{w1}^2}, \quad \text{więc } h_1 - h_2 = \frac{f_{we1}^2}{2gA_{w1}^2}; \quad (19-11)$$

- gdy  $h_2 > h_1$  i ciecz przepływa ( $f_{wy1}$ ) ze zbiornika 2 do 1:

$$\begin{cases} A_1 \dot{h}_1(t) = f_{we1}(t) + A_{w1} \sqrt{2g(h_2(t) - h_1(t))} \\ A_2 \dot{h}_2(t) = f_{we2}(t) - A_{w1} \sqrt{2g(h_2(t) - h_1(t))} - A_{w2} \sqrt{2gh_2(t)} \end{cases}, \quad (19-12)$$

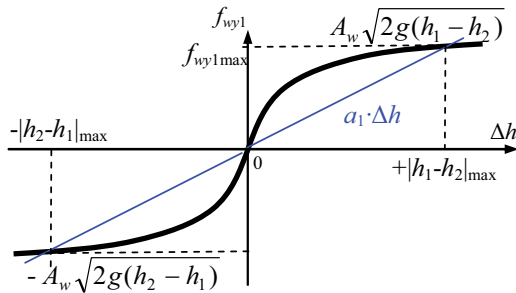
a stan równowagi to:

$$h_2 = \frac{(f_{we2} - f_{we1})^2}{2gA_{w2}^2}, \quad h_1 = h_2 - \frac{f_{we1}^2}{2gA_{w1}^2}, \quad \text{więc } h_2 - h_1 = \frac{f_{we1}^2}{2gA_{w1}^2}. \quad (19-13)$$

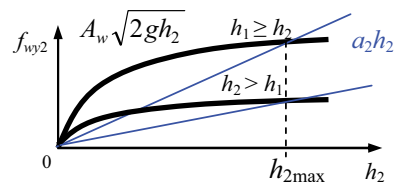
Model zlinearyzowany ma tę samą postać niezależnie od kierunku przepływu  $f_{wy1}$ :

$$\begin{cases} A_1 \dot{h}_1(t) = f_{we1}(t) - a_1(h_1(t) - h_2(t)) \\ A_2 \dot{h}_2(t) = f_{we2}(t) + a_1(h_1(t) - h_2(t)) - a_2 h_2(t) \end{cases} \quad (19-14)$$

Współczynnik przepływu między zbiornikami ( $a_1$ ) wynika z linearyzacji wyrażenia  $f_{wy1} = A_{w1} \sqrt{2g|h_1 - h_2|}$  i ma taką samą wartość niezależnie od kierunku przepływu (rys. 19-5), ponieważ na podstawie zależności (19-11) i (19-13) można wykazać, że  $|h_1 - h_2|_{\max} = |h_2 - h_1|_{\max}$ . Z kolei współczynnik  $a_2$ , który wynika z linearyzacji funkcji  $f_{wy2} = A_{w1} \sqrt{2gh_2}$  dla wartości granicznych ( $h_{2\max}$ ), ma różne wartości zależnie od kierunku przepływu (rys. 19-6).



Rys. 19-5. Linearyzacja przepływu  $f_{wy1}(|\Delta h|)$



Rys. 19-6. Sieczna funkcji wypływu  $f_{wy2}$

Linearyzacja statyczna kaskady współdziałającej z możliwością dwukierunkowego przepływu między zbiornikami jest możliwa, ale wymaga ustalenia kompromisu pomiędzy szerokim zakresem wartości zmiennych i dokładnością przybliżonego modelu. Przy niewielkim wypełnieniu zbiorników można poprawić dokładność linearyzacji – zastosować sieczną wyznaczoną przy niewielkiej różnicy  $|h_1 - h_2| < |h_2 - h_1|_{\max}$  (rys. 19-5) i niewielkiej wysokości  $h_2 < h_{2\max}$  (rys. 19-6).

Kaskada zbiorników jest dość szczególnym przypadkiem układu nieliniowego, ponieważ podstawową trudność stanowi tu konieczność zapewnienia dodatniego argumentu funkcji pierwiastkowej. Rozwiązanie w postaci dwóch wariantów modelu ( $h_1 \geq h_2$ ,  $h_2 > h_1$ ) oznacza formalnie wprowadzenie funkcji, która jest nie tylko nieliniowa, ale też nieróżniczkowalna. Badanie takiego modelu w pełnym zakresie zmian wartości zmiennych najłatwiej jest wykonać symulacyjnie. Z kolei badania analityczne, które można wykonać dla modelu zlinearyzowanego, należałoby wykonać oddzielnie dla każdego z wariantów lub stosując inną metodę linearyzacji, np. stycznej.

Linearyzacja statyczna **za pomocą stycznej** w przypadku przepływu między zbiornikami  $f_{wy1}$  wymaga wyznaczenia stycznej do funkcji dwóch zmiennych  $f(x,y)$ .

Jest to płaszczyzna  $z(x, y)$  styczna do wykresu  $f(x, y)$  w punkcie  $(x_0, y_0, z_0 = f(x_0, y_0))$ , którą można obliczyć na podstawie wzoru:

$$z(x, y) = \left( \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right) \bigg|_0 (x - x_0) + \left( \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right) \bigg|_0 (y - y_0) + f(x_0, y_0), \quad (19-15)$$

w skrócie:  $z(x, y) = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + f(x_0, y_0) =$   
 $= f'_x(x_0, y_0)x + f'_y(x_0, y_0)y - f'_x(x_0, y_0)x_0 - f'_y(x_0, y_0)y_0 + f(x_0, y_0).$

Linearyzacja funkcji przepływu, gdy  $h_{10} \geq h_{20}$  (czyli  $f_{wy1} = A_{w1} \sqrt{2g(h_1 - h_2)}$ ), to:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f_{wy1}}{\partial h_1} \bigg|_0 (h_1 - h_{10}) + \frac{\partial f_{wy1}}{\partial h_2} \bigg|_0 (h_2 - h_{20}) + f_{wy1}(h_{10}, h_{20}) = \\ & = \frac{A_{w1} \sqrt{2g}}{2\sqrt{h_{10} - h_{20}}} (h_1 - h_{10}) - \frac{A_{w1} \sqrt{2g}}{2\sqrt{h_{10} - h_{20}}} (h_2 - h_{20}) + A_{w1} \sqrt{2g(h_{10} - h_{20})}, \end{aligned} \quad (19-16)$$

a linearyzacja funkcji przepływu, gdy  $h_{20} > h_{10}$  (tzn.  $f_{wy1} = A_{w1} \sqrt{2g(h_2 - h_1)}$ ) to:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f_{wy1}}{\partial h_2} \bigg|_0 (h_2 - h_{20}) + \frac{\partial f_{wy1}}{\partial h_1} \bigg|_0 (h_1 - h_{10}) + f_{wy1}(h_{10}, h_{20}) = \\ & = \frac{A_{w1} \sqrt{2g}}{2\sqrt{h_{20} - h_{10}}} (h_2 - h_{20}) - \frac{A_{w1} \sqrt{2g}}{2\sqrt{h_{20} - h_{10}}} (h_1 - h_{10}) + A_{w1} \sqrt{2g(h_{20} - h_{10})}. \end{aligned} \quad (19-17)$$

Linearyzacja funkcji  $f_{wy2} = A_{w2} \sqrt{2gh_2}$  jest analogiczna do

(19-5) i ma postać:

$$\frac{df_{wy2}}{dh_2} \bigg|_0 (h_2 - h_{20}) + f_{wy2}(h_{20}) = \frac{A_{w2} \sqrt{2g}}{2\sqrt{h_{20}}} (h_2 - h_{20}) + A_{w2} \sqrt{2gh_{20}}. \quad (19-18)$$

Model kaskady z przepływami zlinearyzowanymi za pomocą stycznej w punkcie odpowiadającym wysokościami  $h_{10}$  i  $h_{20}$  dla poszczególnych wariantów:

– dla (19-10):  $h_{10} \geq h_{20} \rightarrow \Delta h_1 \geq \Delta h_2$

$$\begin{cases} A_1 \dot{h}_1(t) = f_{we1}(t) - a_1(\Delta h_1(t) - \Delta h_2(t)) - f_{wy10} \\ A_2 \dot{h}_2(t) = f_{we2}(t) + a_1(h_1(t) - h_2(t)) + f_{wy10} - a_2 \Delta h_2(t) - f_{wy20} \end{cases},$$

$$\text{gdzie: } a_1 = \frac{A_{w1} \sqrt{2g}}{2\sqrt{h_{10} - h_{20}}}, a_2 = \frac{A_{w2} \sqrt{2g}}{2\sqrt{h_{20}}}, f_{wy10} = A_{w1} \sqrt{2g(h_{10} - h_{20})}, f_{wy20} = A_{w2} \sqrt{2gh_{20}},$$

– dla (19-12):  $h_{20} > h_{10} \rightarrow \Delta h_2 \geq \Delta h_1$

$$\begin{cases} A_1 \dot{h}_1(t) = f_{we1}(t) + a_1(\Delta h_2(t) - \Delta h_1(t)) + f_{wy10} \\ A_2 \dot{h}_2(t) = f_{we2}(t) - a_1(\Delta h_2(t) - \Delta h_1(t)) - f_{wy10} - a_2 \Delta h_2(t) - f_{wy20} \end{cases},$$

gdzie:  $a_1 = \frac{A_{w1} \sqrt{2g}}{2\sqrt{h_{20} - h_{10}}}$ ,  $a_2 = \frac{A_{w2} \sqrt{2g}}{2\sqrt{h_{20}}}$ ,  $f_{wy10} = A_{w1} \sqrt{2g(h_{20} - h_{10})}$ ,  $f_{wy20} = A_{w2} \sqrt{2gh_{20}}$ ,

po zamianie zmiennych  $f_{we1}(t)$ ,  $f_{we2}(t)$ ,  $h_1(t)$ ,  $h_2(t)$  na przyrosty  $\Delta f_{we1}(t)$ ,  $\Delta f_{we2}(t)$ ,  $\Delta h_1(t)$ ,  $\Delta h_2(t)$ , liczone względem punktu linearyzacji ( $f_{we10}$ ,  $f_{we20}$ ,  $h_{10}$ ,  $h_{20}$ ), można połączyć w jeden układ postaci:

$$\begin{cases} A_1 \Delta \dot{h}_1(t) = \Delta f_{we1}(t) - a_1(\Delta h_1(t) - \Delta h_2(t)) \\ A_2 \Delta \dot{h}_2(t) = \Delta f_{we2}(t) + a_1(\Delta h_1(t) - \Delta h_2(t)) - a_2 \Delta h_2(t) \end{cases}, \quad (19-19)$$

gdzie:  $a_1 = \frac{A_{w1} \sqrt{2g}}{2\sqrt{|h_{10} - h_{20}|}}$ ,  $a_2 = \frac{A_{w2} \sqrt{2g}}{2\sqrt{h_{20}}}$ .

Jednak w punkcie, który łączy wariant (19-10) i (19-12), czyli gdy  $|h_{10} - h_{20}| \rightarrow 0$ , to  $a_1 \rightarrow \infty$  (styczna do wykresu  $f_{wy1}$  jest prostopadła do osi  $\Delta h$ ) – nie można zastosować zlinearyzowanego modelu. Jeśli wypełnienie zbiorników kaskady jest niewielkie, to lepszym sposobem linearyzacji jest zastosowanie siecznej.

#### 19.1.4. Inne metody linearyzacji statycznej

Analityczne metody linearyzacji są uniwersalne, ale w szczególnych przypadkach można uzyskać liniowy model znacznie łatwiej. Jako szczególny sposób linearyzacji statycznej można uznać **parametryzowanie zmiennej**. Jeśli w modelu występuje funkcja, która jest iloczynem zmiennych, to jedną z tych zmiennych uznaje się za parametr modelu, który może przyjmować różne wartości, ale opisują one różne warunki pracy układu. Typowe przypadki to:

- założenie o stałych własnościach substancji, np. gęstość, rezystancja,
- założenie o stałym natężeniu przepływu, np. nośnika ciepła.

Przykładem może być model pomieszczenia z nawiewem powietrza, opisany w podrozdziale 2.3 przy założeniu, że kubatura pomieszczenia oraz ciepło właściwe i gęstość powietrza są stałe, więc model układu ma postać (2-21) i jest nieliniowy:

$$C_v \dot{T}_{wew}(t) = c_p f_m(t) (T_z(t) - T_{wew}(t)). \quad (19-20)$$

Dodanie założenia o stałej wartości przepływu  $f_m(t) = f_{m0}$  zapewnia liniowość:

$$C_v \dot{T}_{wew}(t) = c_p f_{m0} (T_z(t) - T_{wew}(t)). \quad (19-21)$$

Podobna sytuacja ma miejsce w przypadku modelu pomieszczenia z grzejnikiem – opis skonstruowany na podstawie podobnych założeń zawiera dwa równania bilansowe (2-22). Model jest nieliniowy przy zmiennym przepływie  $f_m(t)$ :

$$\begin{cases} C_{vg} \dot{T}_{gp}(t) = c_{pw} f_m(t) (T_{gz}(t) - T_{gp}(t)) - K_g (T_{gp}(t) - T_{wew}(t)) \\ C_{vw} \dot{T}_{wew}(t) = K_g (T_{gp}(t) - T_{wew}(t)) - K_c (T_{wew}(t) - T_{zew}(t)) \end{cases}, \quad (19-22)$$

ale jeśli można założyć, że przepływ jest stały  $f_m(t) = f_{m0}$ , to model jest liniowy:

$$\begin{cases} C_{vg} \dot{T}_{gp}(t) = c_{pw} f_{m0} (T_{gz}(t) - T_{gp}(t)) - K_g (T_{gp}(t) - T_{wew}(t)) \\ C_{vw} \dot{T}_{wew}(t) = K_g (T_{gp}(t) - T_{wew}(t)) - K_c (T_{wew}(t) - T_{zew}(t)) \end{cases} \quad (19-23)$$

W obu przykładach (19-21) i (19-23) przepływ  $f_{m0}$  pełni rolę parametru. Jeśli  $f_{m0}$  wykazuje niewielkie zmiany, to można je uznać za niedokładność parametru liniowego modelu. Jeśli  $f_{m0}$  może przyjmować różne wartości, to można badać różne warianty modelu o różnych wartościach parametru. Można też wykonać dokładniejszą analizę wpływu wartości  $f_{m0}$  na własności układu, badając równanie charakterystyczne liniowego modelu, gdzie  $f_{m0}$  pełni rolę parametru.

**Przykład.** Model (19-23) zapisujemy w postaci równań stanu:

$$\begin{bmatrix} \dot{T}_{gp}(t) \\ \dot{T}_{wew}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-(c_{pw} f_{m0} + K_g)}{C_{vg}} & \frac{K_g}{C_{vg}} \\ \frac{K_g}{C_{vw}} & \frac{-(K_g + K_c)}{C_{vw}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{gp}(t) \\ T_{wew}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{c_{pw} f_{m0}}{C_{vg}} & 0 \\ 0 & \frac{K_c}{C_{vw}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{gz}(t) \\ T_{zew}(t) \end{bmatrix}.$$

Można również wyznaczyć transmitancje:

$$T_{gp}(s) = G_{11}(s)T_{gz}(s) + G_{12}(s)T_{zew}(s), \quad T_{wew}(s) = G_{21}(s)T_{gz}(s) + G_{22}(s)T_{zew}(s).$$

Wyznaczamy równanie charakterystyczne:

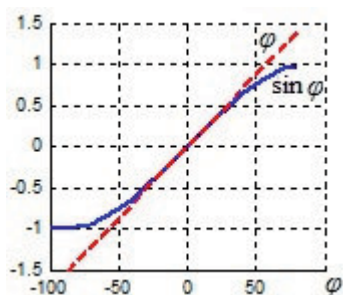
$$\left( \frac{-(c_{pw} f_{m0} + K_g)}{C_{vg}} - \lambda \right) \left( \frac{-(K_g + K_c)}{C_{vw}} - \lambda \right) - \frac{K_g^2}{C_{vg} C_{vw}} = 0.$$

Po uporządkowaniu równania:

$$C_{vg} C_{vw} \lambda^2 + (C_{vg} (c_{pw} f_{m0} + K_g) + C_{vw} (K_g + K_c)) \lambda + c_{pw} f_{m0} (K_g + K_c) + K_g K_c = 0,$$

wyberamy jedną z metod analizy opisanych w rozdziale 7. Analiza jest znacznie prostsza, jeśli współczynniki występują w postaci wartości i przepływ  $f_{m0}$  jest jedynym parametrem równania.

Inny, szczególny sposób linearyzacji to **zamiana funkcji** nieliniowej na liniową, która w pewnym zakresie zapewnia podobne wartości.



Rys. 19-7. Funkcja  $\sin x$  i  $x$

Klasycznym przypadkiem jest przybliżenie funkcji  $\sin \varphi$  za pomocą jej argumentu  $\varphi$  (rys. 19-7). Jest ono często stosowane w modelu wahadła matematycznego (2-40):

$$ml^2 \ddot{\varphi}(t) + lmg \sin(\varphi(t)) = 0, \quad (19-24)$$

który dla małych kątów może być w prosty sposób zastąpiony przez model liniowy:

$$ml^2 \ddot{\varphi}(t) + lmg \varphi(t) = 0. \quad (19-25)$$

Zamianę funkcji  $\sin \varphi$  na kąt  $\varphi$  można uzasadnić nie tylko na podstawie obserwacji, ale także linearyzacji za pomocą stycznej (zgodnie z  $y(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$ ):

$$\left. \frac{d \sin \varphi}{d \varphi} \right|_0 (\varphi - \varphi_0) + \sin \varphi_0 = \cos \varphi \Big|_0 (\varphi - \varphi_0) + \sin \varphi_0 \xrightarrow{\varphi_0=0} \cos 0 \cdot (\varphi - 0) + \sin 0 = \varphi. \quad (19-26)$$

## 19.2. Linearyzacja dynamiczna

### 19.2.1. Zasady [1, 5, 10, 11]

Ogólna metoda linearyzacji nieliniowego modelu dynamiki polega na wykonaniu **linearyzacji dynamicznej** w wybranym punkcie równowagi (pracy, linearyzacji). Jeśli nieliniowy model ma postać funkcji:

$$f(x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(n)}(t), u(t), \dot{u}(t), \dots, u^{(m)}(t)) = 0, \quad (19-27)$$

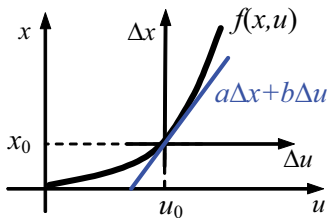
to linearyzacja polega na rozwinięciu funkcji  $f$  w szereg Taylora w wybranym punkcie  $(x_0, u_0)$  wyznaczonym z równania statycznego  $f(x, u) = 0$ , według wzoru:

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_0 \Delta x(t) + \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right|_0 \Delta \dot{x}(t) + \dots + \left. \frac{\partial f}{\partial x^{(n)}} \right|_0 \Delta x^{(n)}(t) + \\ & + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_0 \Delta u(t) + \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{u}} \right|_0 \Delta \dot{u}(t) + \dots + \left. \frac{\partial f}{\partial u^{(n)}} \right|_0 \Delta u^{(n)}(t) = 0. \end{aligned} \quad (19-28)$$

Oznaczenia  $\Delta x(t), \Delta \dot{x}(t), \dots, \Delta u(t), \Delta \dot{u}(t), \dots$  to zmienne i pochodne zlinearyzowanego modelu – zmienne przyrostowe względem punktu równowagi  $(x_0, u_0)$ . Parametrami modelu są wartości pochodnych funkcji  $f$  po zmiennych  $x, u$  i ich pochodnych, obliczone w punkcie równowagi  $(x_0, u_0)$ :

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_0, \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right|_0, \dots, \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_0, \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{u}} \right|_0, \dots$$

Warunkiem linearyzacji jest więc różniczkowalność wszystkich funkcji. Rysunek 19-8 przedstawia graficzną interpretację linearyzacji dynamicznej ograniczoną do zmiennych  $x$  i  $u$ . Przybliżenie liniowe to prosta styczna do funkcji  $f(x, u) = 0$  w punkcie równowagi  $(u_0, x_0)$ , który jest także początkiem nowego układu współrzędnych. Tak zlinearyzowany model  $a\Delta x + b\Delta u = 0$  operuje na zmiennych przyrostowych liczonych względem punktu równowagi i zachowuje odpowiednią dokładność w pewnym otoczeniu tego punktu.



Rys. 19-8. Linearyzacja dynamiczna w punkcie równowagi

**Przykład.** Praktyczna realizacja linearyzacji na przykładzie wyrażenia:

$$ax(t)\dot{x}(t) + bx(t) = \sqrt{x(t)}u(t). \quad (19-29)$$

Linearyzacja wykonywana jest w punkcie równowagi  $(u_0, x_0)$ , który wyznaczamy z równania statycznego. Stosujemy rozwinięcie Taylora, przy czym:

- traktujemy każdą z funkcji  $x(t), \dot{x}(t), u(t)$  jak niezależną zmienną  $(x, \dot{x}, u)$ ,
- ograniczamy rozwinięcie do wyrazów liniowych (pierwsze pochodne każdej zmiennej),
- obliczamy wartość pochodnych w punkcie pracy (w wybranym punkcie równowagi).

Operacje te wykonujemy na każdym ze składników:

$$ax(t)\dot{x}(t) \rightarrow \left. \frac{\partial(ax\dot{x})}{\partial x} \right|_0 \cdot \Delta x + \left. \frac{\partial(ax\dot{x})}{\partial \dot{x}} \right|_0 \cdot \Delta \dot{x} = (a\dot{x})_0 \cdot \Delta x + (ax)_0 \cdot \Delta \dot{x} = a \cdot 0 \cdot \Delta x + ax_0 \cdot \Delta \dot{x} = ax_0 \cdot \Delta \dot{x},$$

$$bx(t) \rightarrow \left. \frac{\partial(bx)}{\partial x} \right|_0 \cdot \Delta x = (b)_0 \cdot \Delta x = b\Delta x,$$

$$\sqrt{x(t)}u(t) \rightarrow \left. \frac{\partial(\sqrt{x}u)}{\partial x} \right|_0 \cdot \Delta x + \left. \frac{\partial(\sqrt{x}u)}{\partial u} \right|_0 \cdot \Delta u = \left( u \frac{\partial(\sqrt{x})}{\partial x} \right)_0 \cdot \Delta x + \left( \sqrt{x} \frac{\partial(u)}{\partial u} \right)_0 \cdot \Delta u = \frac{u_0}{2\sqrt{x_0}} \cdot \Delta x + \sqrt{x_0} \cdot \Delta u.$$

Po podstawieniu składników do (19-29) i zastosowaniu zmiennych przyrostowych mamy:

$$ax_0 \cdot \Delta \dot{x}(t) + b\Delta x(t) = \frac{u_0}{2\sqrt{x_0}} \cdot \Delta x(t) + \sqrt{x_0} \cdot \Delta u(t). \quad (19-30)$$

Ostatecznie po uporządkowaniu wyrażenie (19-29) zlinearyzowanie w punkcie równowagi  $(x_0, u_0)$  ma postać:

$$a_1 \Delta \dot{x}(t) + a_0 \Delta x(t) = b_0 \Delta u(t), \quad (19-31)$$

gdzie:  $a_1 = ax_0$ ,  $a_0 = b - \frac{u_0}{2\sqrt{x_0}}$ ,  $b_0 = \sqrt{x_0}$ .

Wyrażenie (19-31) zapisywane jest też w postaci:  $a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = b_0 u(t)$ , jednak zmienne  $x(t), \dot{x}(t), u(t)$  po linearyzacji oznaczają w rzeczywistości zmienne przyrostowe liczone względem punktu równowagi  $(x_0, u_0)$ .

Ogólną zasadę linearyzacji można stosować w odniesieniu do układów nieliniowych równań różniczkowych dowolnego rzędu, co oznacza zastosowanie operacji (19-18) w odniesieniu do każdego równania. Jeśli model jest uporządkowany i ma postać nieliniowych równań stanu ( $\rightarrow$  8.1):

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \text{ lub dokładniej } \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad (19-32)$$

to wynikiem linearyzacji jest model postaci:

$$\Delta \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_0 \Delta \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_0 \Delta \mathbf{u}(t) \text{ lub } \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_0 \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_0 \mathbf{u}(t), \quad (19-33)$$

gdzie elementy macierzy  $\mathbf{A}_0$ :  $a_{ij} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_0$  i macierzy  $\mathbf{B}_0$ :  $b_{ik} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial u_k} \right|_0$  ( $i=1 \div n, j=1 \div n$ ,

$k=1 \div m$ ), są obliczane w punkcie równowagi  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$ , wyznaczonym z równania statycznego  $0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ . Oznaczenia zmiennych  $\mathbf{x}(t)$  i  $\mathbf{u}(t)$ , stosowane w modelu zlinearyzowanym dla skrócenia zapisu, zawsze oznaczają zmienne przyrostowe względem punktu równowagi ( $\Delta \mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{x}(t), \Delta \mathbf{u}(t) \rightarrow \mathbf{u}(t)$ ).

Rozwinięcie zapisu (19-32) i (19-33):

1° Nieliniowe równania stanu i równania statyczne do obliczenia punktów równowagi

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t)) \\ \dot{x}_2(t) = f_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t)), \\ \dots \\ \dot{x}_n(t) = f_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t)) \end{cases} \quad \begin{cases} 0 = f_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t)) \\ 0 = f_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t)) \\ \dots \\ 0 = f_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t)) \end{cases}$$

2° Wynik linearyzacji ( $\Delta \mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{x}(t)$ ,  $\Delta \mathbf{u}(t) \rightarrow \mathbf{u}(t)$ ).

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right|_0 & \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right|_0 & \dots & \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \right|_0 \\ \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right|_0 & \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right|_0 & \dots & \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \right|_0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \left. \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \right|_0 & \left. \frac{\partial f_n}{\partial x_2} \right|_0 & \dots & \left. \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \right|_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial f_1}{\partial u_1} \right|_0 & \dots & \left. \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \right|_0 \\ \left. \frac{\partial f_2}{\partial u_1} \right|_0 & \dots & \left. \frac{\partial f_2}{\partial u_m} \right|_0 \\ \dots & \dots & \dots \\ \left. \frac{\partial f_n}{\partial u_1} \right|_0 & \dots & \left. \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \right|_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \dots \\ u_m(t) \end{bmatrix}$$

Zlinearyzowany model nieliniowego układu umożliwia przeprowadzenie badań analitycznych układu z wykorzystaniem metod dostępnych dla układów liniowych, w tym metod badania stabilności na podstawie wartości własnych macierzy  $\mathbf{A}_0$  ( $\rightarrow$  8.2), czyli biegunów zlinearyzowanego modelu. Wszystkie uzyskane rezultaty są prawdziwe dla zlinearyzowanego modelu, ale przy rozszerzaniu wniosków na pierwotny model nieliniowy należy zachować ostrożność ( $\rightarrow$  21.1). Jeśli jednak nieliniowy układ ma jeden punkt równowagi (jedno rozwiązanie  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$ ) i można wykazać, że w całym zakresie pracy (dla każdego punktu pracy) układ zlinearyzowany jest stabilny, to układ nieliniowy też jest stabilny.

### 19.2.2. Przykłady zastosowania

Jako przykłady linearyzacji dynamicznej posłużą w pierwszej kolejności te same modele, które były poddawane linearyzacji statycznej ( $\rightarrow$  19.1).

**Przykład 1:** Linearyzacja dynamiczna modelu zbiornika ze swobodnym wypływem (por. 19.1.2):

$$A\dot{h}(t) = f_{we}(t) - A_w\sqrt{2gh(t)},$$

w punkcie pracy  $(h_0, f_{we0})$  prowadzi do następującego rezultatu:

$$A\Delta\dot{h}(t) = \Delta f_{we}(t) - a\Delta h(t), \text{ gdzie } a = \frac{A_w\sqrt{2g}}{2\sqrt{h_0}}. \quad (19-34)$$

Obliczenia: punkt pracy  $h_0 = \frac{f_{we0}^2}{2gA_w^2}$ , współczynnik  $\left. \frac{\partial(A_w\sqrt{2gh})}{\partial h} \right|_0 = \frac{A_w\sqrt{2g}}{2\sqrt{h_0}} = a$ .

Model (19-34) zlinearyzowany w punkcie  $(h_0, f_{we0})$  pozwala wyznaczyć i badać równanie charakterystyczne i biegun w każdym punkcie pracy  $(h_0, f_{we0})$ :

$$A\lambda + \frac{A_w\sqrt{2g}}{2\sqrt{h_0}} = 0 \rightarrow \lambda = \frac{-A_w\sqrt{2g}}{2A\sqrt{h_0}} < 0, \text{ tzn. że układ nieliniowy też jest stabilny.}$$

**Przykład 2:** Kaskada zbiorników ze swobodnym przepływem (por. 19.1.3):

$$\begin{cases} A_1 \dot{h}_1(t) = f_{we1}(t) - A_{w1} \sqrt{2g(h_1(t) - h_2(t))} \\ A_2 \dot{h}_2(t) = f_{we2}(t) + A_{w1} \sqrt{2g(h_1(t) - h_2(t))} - A_{w2} \sqrt{2gh_2(t)} \end{cases},$$

zlinearyzowana w punkcie pracy ( $f_{we10}, f_{we20}, h_{10}, h_{20}$ ) ma postać:

$$\begin{cases} A_1 \Delta \dot{h}_1(t) = \Delta f_{we1}(t) - (a_1 \Delta h_1(t) - a_1 \Delta h_2(t)) \\ A_2 \Delta \dot{h}_2(t) = \Delta f_{we2}(t) + (a_1 \Delta h_1(t) - a_1 \Delta h_2(t)) - a_2 \Delta h_2(t) \end{cases}, \quad (19-35)$$

$$\text{gdzie: } a_1 = \frac{A_{w1} \sqrt{2g}}{2\sqrt{h_{10} - h_{20}}}, \quad a_2 = \frac{A_{w2} \sqrt{2g}}{2\sqrt{h_{20}}}.$$

Obliczenia:

$$\text{– punkt pracy: } h_{20} = \frac{(f_{we10} + f_{we20})^2}{2gA_{w2}^2}, \quad h_{10} = h_{20} + \frac{f_{we10}^2}{2gA_{w1}^2}, \quad \text{stad } h_{10} - h_{20} = \frac{f_{we10}^2}{2gA_{w1}^2},$$

$$\text{– współczynniki: } \frac{\partial(A_{w1} \sqrt{2g(h_1 - h_2)})}{\partial h_1} \Big|_0 = \frac{A_{w1} \sqrt{2g}}{2\sqrt{h_{10} - h_{20}}} = a_1, \quad \frac{\partial(A_{w1} \sqrt{2g(h_1 - h_2)})}{\partial h_2} \Big|_0 = -a_1,$$

$$\frac{\partial(A_{w2} \sqrt{2gh_2})}{\partial h_2} \Big|_0 = \frac{A_{w2} \sqrt{2g}}{2\sqrt{h_{20}}} = a_2.$$

Model (19-35) zawiera parametry zależne od punktu równowagi ( $h_{10}, h_{20}, f_{we10}, f_{we20}$ ).

Równanie charakterystyczne można wyznaczyć na podstawie równań stanu:

$$\begin{bmatrix} \dot{h}_1(t) \\ \dot{h}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-A_{w1} \sqrt{2g}}{2A_1 \sqrt{h_{10} - h_{20}}} & \frac{A_{w1} \sqrt{2g}}{2A_1 \sqrt{h_{10} - h_{20}}} \\ \frac{A_{w1} \sqrt{2g}}{2A_2 \sqrt{h_{10} - h_{20}}} & \frac{-A_{w1} \sqrt{2g}}{2A_2 \sqrt{h_{10} - h_{20}}} - \frac{A_{w2} \sqrt{2g}}{2A_2 \sqrt{h_{20}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{A_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{we1}(t) \\ f_{we2}(t) \end{bmatrix}.$$

Można także wyznaczyć jedną z transmitancji:

$$h_1(s) = G_{11}(s)f_{we1}(s) + G_{12}(s)f_{we2}(s), \quad h_2(s) = G_{21}(s)f_{we1}(s) + G_{22}(s)f_{we2}(s).$$

W obu przypadkach zmienne  $f_{we1}, f_{we2}, h_1, h_2$  oznaczają teraz zmienne przyrostowe względem punktu równowagi, natomiast równanie charakterystyczne ma postać:

$$2A_1A_2\sqrt{(h_{10} - h_{20})h_{20}}\lambda^2 + \sqrt{2g}(A_{w1}\sqrt{h_{20}}(A_1 + A_2) + A_{w2}A_1\sqrt{h_{10} - h_{20}})\lambda + A_{w1}A_{w2}g = 0.$$

Pierwiastki równania zależą od punktu pracy, co można badać metodami z rozdziału 7.

Porównując powyższe zlinearyzowane modele zbiorników ((19-34), (19-35)) z odpowiednimi wynikami linearyzacji statycznej ( $\rightarrow$  19.1), widoczny jest związek, jaki występuje między linearyzacją dynamiczną wynikającą z zastosowania szeregów funkcyjnych a linearyzacją statyczną za pomocą stycznej (prostej, powierzchni itp.), która wynika z interpretacji geometrycznej. Obie metody prowadzą do tego samego rezultatu, o ile analizowany model zawiera tylko nieliniowości statyczne, a model zlinearyzowany stosuje przyrostowe zmienne wejściowe i wyjściowe liczone względem punktu równowagi (linearyzacji).

**Przykład 3:** Kolejny przykład linearyzacji dynamicznej dotyczy modelu pomieszczenia z nawiewem (por. (19-20)), czyli:

$$C_v \dot{T}_{wew}(t) = c_p f_m(t) (T_z(t) - T_{wew}(t)).$$

Po wyznaczeniu pochodnych i uporządkowaniu wyrażenia otrzymujemy oczekiwaną postać modelu, zawierającą zmienne przyrostowe  $\Delta f_m(t)$ ,  $\Delta T_z(t)$ ,  $\Delta T_{zew}(t)$ :

$$C_v \Delta \dot{T}_{wew}(t) = c_p (T_{z0} - T_{wew0}) \Delta f_m(t) + c_p f_{m0} \Delta T_z(t) - c_p f_{m0} \Delta T_{zew}(t). \quad (19-36)$$

Z definicji jest to linearyzacja w punkcie równowagi – gdy wartości zmiennych wejściowych wynoszą  $f_{m0}$  i  $T_{z0}$ , to wartość wyjściowa  $T_{wew0} = T_{z0}$ . Po podstawieniu punktu równowagi do (19-36) model upraszcza się:

$$C_v \Delta \dot{T}_{wew}(t) = c_p f_{m0} \Delta T_z(t) - c_p f_{m0} \Delta T_{zew}(t), \quad (19-37)$$

tracąc niestety zmienną wejściową  $\Delta f_m(t)$ . Jednak to dość szczególny przypadek.

**Przykład 4:** Model pomieszczenia z grzejnikiem (por. (19-22)):

$$\begin{cases} C_{vg} \dot{T}_{gp}(t) = c_{pw} f_m(t) (T_{gz}(t) - T_{gp}(t)) - K_g (T_{gp}(t) - T_{wew}(t)) \\ C_{vw} \dot{T}_{wew}(t) = K_g (T_{gp}(t) - T_{wew}(t)) - K_c (T_{wew}(t) - T_{zew}(t)) \end{cases},$$

po linearyzacji dynamicznej uzyskuje postać:

$$\begin{cases} C_{vg} \Delta \dot{T}_{gp}(t) = a_f \Delta f_m(t) + a_T (\Delta T_{gz}(t) - \Delta T_{gp}(t)) - K_g (\Delta T_{gp}(t) - \Delta T_{zew}(t)) \\ C_{vw} \Delta \dot{T}_{wew}(t) = K_g (\Delta T_{gp}(t) - \Delta T_{zew}(t)) - K_c (\Delta T_{zew}(t) - \Delta T_{zew}(t)) \end{cases}. \quad (19-38)$$

Obliczenia:

– punkt pracy:  $T_{gp0} = \frac{c_{pw} f_{m0} (K_g + K_c) T_{gz0} + K_g K_c T_{zew0}}{c_{pw} f_{m0} (K_g + K_c) + K_g K_c}$ ,  $T_{wew0} = \frac{c_{pw} f_{m0} K_g T_{gz0} + (c_{pw} f_{m0} + K_g) K_c T_{zew0}}{c_{pw} f_{m0} (K_g + K_c) + K_g K_c}$ ,

– współczynniki:  $\left. \frac{\partial (c_{pw} f_m (T_{gz} - T_{gp}))}{\partial f_m} \right|_0 = c_{pw} (T_{gz0} - T_{gp0}) = a_f$ ,

$$\left. \frac{\partial (c_{pw} f_m (T_{gz} - T_{gp}))}{\partial T_{gz}} \right|_0 = c_{pw} f_{m0} = a_T, \quad \left. \frac{\partial (c_{pw} f_m (T_{gz} - T_{gp}))}{\partial T_{gp}} \right|_0 = -c_{pw} f_{m0} = -a_T.$$

Wartości zmiennych wejściowych ( $T_{gz0}$ ,  $T_{zew0}$ ,  $f_{m0}$ ) i wyjściowych ( $T_{gp0}$ ,  $T_{wew0}$ ), które wyznaczają punkt pracy (równowagi) mają wpływ na własności dynamiczne, co można przeanalizować na podstawie równania charakterystycznego, wyznaczonego z równań stanu:

$$\begin{bmatrix} \dot{T}_{gp}(t) \\ \dot{T}_{wew}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-(c_{pw} f_{m0} + K_g)}{C_{vg}} & \frac{K_g}{C_{vg}} \\ \frac{K_g}{C_{vw}} & \frac{-(K_g + K_c)}{C_{vw}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{gp}(t) \\ T_{wew}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{c_{pw} f_{m0}}{C_{vg}} & 0 & \frac{c_{pw} (T_{gz0} - T_{gp0})}{C_{vg}} \\ 0 & \frac{K_c}{C_{vw}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{gz}(t) \\ T_{zew}(t) \\ f_m(t) \end{bmatrix}$$

lub jednej z transmitancji:

$$T_{gp}(s) = G_{11}(s) T_{gz}(s) + G_{12}(s) T_{zew}(s) + G_{13}(s) f_m(s),$$

$$T_{wew}(s) = G_{21}(s) T_{gz}(s) + G_{22}(s) T_{zew}(s) + G_{23}(s) f_m(s),$$

gdzie zmienne  $T_{gz}$ ,  $T_{zew}$ ,  $f_m$ ,  $T_{gp}$ ,  $T_{wew}$  oznaczają teraz zmienne przyrostowe.

Równanie charakterystyczne ma postać:

$$C_{vg}C_{vw}\lambda^2 + (C_{vg}(c_{pw}f_{m0} + K_g) + C_{vg}(K_g + K_c))\lambda + c_{pw}f_{m0}(K_g + K_c) + K_gK_c = 0.$$

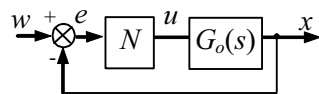
Wykorzystując metody opisane w rozdziale 7, można zbadać np. wpływ wartości  $f_{m0}$  na własności dynamiczne.

Równanie charakterystyczne modelu (19-38), czyli po linearyzacji dynamicznej, jest identyczne z równaniem charakterystycznym modelu (19-23) uzyskanym przez parametryzację zmiennej  $f_m(t)$ . Linearyzacja dynamiczna zapewnia jednak możliwość analitycznego badania reakcji układu na zmiany przepływu  $f_m(t)$  czy wyznaczenia transmitancji związanych z przepływem  $f_m(t)$ .

Linearyzacja dynamiczna jest ogólną metodą wyznaczenia liniowego przybliżenia modelu, które zachowuje dokładność w pewnym otoczeniu wybranego punktu równowagi (punktu pracy). Można ją zastosować do każdego nieliniowego modelu, o ile wszystkie funkcje modelu są różniczkowalne.

### 19.3. Inne metody linearyzacji

Spośród innych sposobów linearyzacji przytoczymy jeszcze metodę nazywaną **linearyzacją harmoniczną** [1, 11], którą można zastosować nawet w odniesieniu do funkcji nieróżniczkowalnych takich jak nasycenie, strefa martwa, przekaźnik z/bz histerezy. W stanie ustalonym reakcją układu liniowego na wymuszenie sinusoidalne jest przebieg sinusoidalny ( $\rightarrow$  14), natomiast reakcją układu nieliniowego jest zniekształcony przebieg sinusoidalny, który można opisać jako sumę wielu składowych harmonicznich ( $\rightarrow$  14.4.2). Linearyzacja harmoniczna polega na zastosowaniu w badaniach tylko pierwszej harmonicznej tej reakcji. Ponieważ wyższe harmoniczne są pomijane, więc dokładność tej analizy jest tym lepsza, im lepsze własności filtrujące ma liniowa część modelu. Na podstawie pierwszej harmonicznej można wyznaczyć „pseudo-transmitancję” nieliniowego elementu, nazywaną funkcją opisującą. Dla typowych nieliniowości statycznych (nasycenie, strefa martwa, przekaźnik itp.) dostępne są gotowe wzory do wyznaczenia funkcji opisującej dla danej nieliniowości. Linearyzacja harmoniczna jest stosowana szczególnie do projektowania i badania układów regulacji z nieliniowym elementem sterującym (rys. 19-9). Jednak w praktyce inżynierskiej stosuje się wówczas raczej badania symulacyjne.



Rys. 19-9. Nieliniowy układ regulacji

Zadanie linearyzacji może być też zrealizowane za pomocą specjalistycznych programów, które wykorzystują zaawansowane metody linearyzacji. W szczególności pakiet Matlab automatycznie uruchamia linearyzację modeli zdefiniowanych w środowisku Simulink jako przygotowanie do zastosowania funkcji, które wymagają modeli liniowych, na przykład takich, jak narzędzia do analizy dynamicznej (Linear Analysis) czy projektowanie układów regulacji (Control Design). Niezależnie od tego czy prowadzone są badania analityczne zlinearyzowanego modelu, czy badania symula-

cyjne modelu nieliniowego, pozostaje problem zweryfikowania rezultatów badań w różnych punktach pracy i dla różnych wartości wymuszeń.

## 20. Upraszczanie modelu

*czyli jak „odchudzić” problem*

### 20.1. Założenia obniżające rząd modelu

Upraszczanie modelu na etapie konstrukcji jest podwójnie korzystne – otrzymujemy model, który jest niższego rzędu i ma mniej parametrów do wyznaczenia. Uzyskanie prostego modelu jest efektem przyjętych założeń, a przede wszystkim ustalenia zjawisk, które decydują o dynamice badanego układu. Problem polega na tym, że wskazanie tych zjawisk na etapie konstrukcji modelu wymaga pewnego doświadczenia. Weryfikację przyjętych założeń można przeprowadzić na podstawie zgodności różnych charakterystyk modelu i obiektu, np. odpowiedzi na wymuszenie skokowe. Można też porównać bieguny różnych wersji modelu – w szczególności czy prostszy model zawiera najbardziej znaczące bieguny (stałe czasowe) układu.

Konstrukcja modeli dynamiki układów hydraulicznych i cieplnych opiera się na równaniach bilansowych najbardziej znaczących magazynów ( $\rightarrow 2.2 \div 2.3$ ). W układach hydraulicznych znaczenie magazynu wynika z jego wymiarów. Na podstawie prostych przykładów (tabela 16-5) można stwierdzić, że ważna jest nie tyle objętość zbiornika, ile przekrój zbiornika w stosunku do powierzchni otworu (w przypadku zbiorników o płaskim dnie i pionowych ścianach). Znaczenie magazynu ciepła natomiast wynika z jego pojemności cieplnej, która zależy i od wymiarów, i od własności substancji. Z tego powodu, konstruując modele ogrzewania pomieszczeń/budynków (rys. 2-7), należałoby uwzględniać przede wszystkim magazynowanie ciepła w ścianach – zmienną stanu byłaby wówczas temperatura ścian (nieistotna z praktycznego punktu widzenia), natomiast najważniejszą zmienną obiektu, temperaturę wewnątrz, trzeba wyznaczyć na jej podstawie.

Dla ułatwienia analizy można ułożyć równania bilansowe, które zawierają zarówno najbardziej znaczące magazyny, jak i najbardziej znaczące zmienne (2-19):

$$\begin{cases} C_{vg} \dot{T}_g(t) = q_g(t) - K_g(T_g(t) - T_{zew}(t)) \\ C_{vw} \dot{T}_{zew}(t) = K_g(T_g(t) - T_{zew}(t)) - K_{c1}(T_{zew}(t) - T_s(t)) \\ C_{vs} \dot{T}_s(t) = K_{c1}(T_{zew}(t) - T_s(t)) - K_{c2}(T_s(t) - T_{zew}(t)) \end{cases}$$

a następnie wprowadzić założenia dotyczące nieznaczących magazynów, co pomaga ustalić równania stanu i równania wyjściowe ( $\rightarrow 8.2$ ).

Gdy  $C_{vw} \approx 0$  i  $C_{vg} \approx 0$ , to otrzymujemy równanie stanu:

$$C_{vs} \dot{T}_s(t) = q_g(t) - K_{c2}(T_s(t) - T_{zew}(t)) \rightarrow \dot{T}_s(t) = \frac{-K_{c2}}{C_{vs}} T_s(t) + \frac{1}{C_{vs}} q_g(t) + \frac{K_{c2}}{C_{vs}} T_{zew}(t)$$

oraz równania wyjściowe dla pozostałych zmiennych:

$$\begin{cases} 0 = q_g(t) - K_g(T_g(t) - T_{wew}(t)) \\ 0 = K_g(T_g(t) - T_{wew}(t)) - K_{cl}(T_{wew}(t) - T_s(t)) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} T_{wew}(t) = T_s(t) + \frac{1}{K_{cl}} q_g(t), \\ T_g(t) = T_s(t) + \left( \frac{1}{K_g} + \frac{1}{K_{cl}} \right) q_g(t) \end{cases}.$$

Można również rozważyć alternatywne podejście do uproszczenia tego modelu cieplnego, które polega na ułożeniu równań bilansowych z pojemnością cieplną wnętrza ( $C_{vw}$ ) i grzejnika ( $C_{vg}$ ), natomiast magazynowanie ciepła w ścianach uwzględnić przez skorygowanie wartości  $C_{vw}$ . Jednak najistotniejszym założeniem upraszczającym każdy z tych analizowanych wariantów modelu ogrzewania budynku jest opis obiektu jako całości (bez podziału na pomieszczenia i grzejniki).

W układach mechanicznych rząd modelu zwiększa się znacznie, gdy zawiera on wszystkie podstawowe typy reakcji – sprężystość, tłumienie i bezwładność ( $\rightarrow$  2.4). Podczas konstrukcji modeli warto więc rozważyć możliwość pominięcia mniej znaczących zjawisk. Zazwyczaj model musi uwzględniać tłumienie związane ze stratami energii podczas ruchu elementów w rzeczywistych warunkach. Jeśli masa poruszającego elementu jest znacząca, to proste modele często pomijają siły sprężystości. Jeśli model musi opisać sprężyste połączenia elementów, to można pominąć mało znaczące masy elementów (przykłady  $\rightarrow$  10.3.1).

Tłumienie jest także podstawowym zjawiskiem w obwodach elektrycznych ( $\rightarrow$  2.5). Modele obwodów uwzględniają przede wszystkim spadki napięć na rezystancjach. O rzędzie modelu decydują znaczące pojemności i indukcyjności elementów obwodu – liczba zmiennych stanu (rząd modelu) odpowiada liczbie niezależnych napięć na kondensatorach i prądów w cewkach ( $\rightarrow$  10.3.2). W przypadku maszyn elektrycznych (np. transformator, silnik, prądnica) uwzględniana jest zazwyczaj tylko rezystancja i indukcyjność obwodów.

Również zamknięte układy hydrauliczne wymagają opisu, który uwzględnia przede wszystkim opory przepływu ( $\rightarrow$  2.6.1). W ten sposób powstają bezinercyjne modele układów hydraulicznych, a więc właściwie modele statyczne. O dokładności modelu w większym stopniu decyduje zastosowanie nieliniowej zależności opisującej spadek ciśnienia na oporze hydraulicznym ( $\Delta p = Rf^2$ ) niż uwzględnienie własności dynamicznych wynikających głównie z masy cieczy. Podobna sytuacja występuje w zamkniętych układach pneumatycznych – najważniejsze są opory przepływu. Własności dynamiczne natomiast wynikają głównie ze ściśliwości gazów (ściśliwość gazów jest znacznie większa niż cieczy, ale masa gazów jest znacznie mniejsza niż cieczy).

## 20.2. Obniżanie rzędu modelu

### 20.2.1. Pomijanie najmniej znaczących biegunów [14]

Podstawowa zasada upraszczania modelu polega na pomijaniu najmniej znaczących biegunów ( $\rightarrow$  4.3.3), przy czym nie zmienia się wzmocnienie układu, stabilność, czas

ustalania i oscylacyjność odpowiedzi czasowych modelu ( $\rightarrow$  6.2.4), a po uproszczeniu stopień licznika transmitancji jest nie większy niż stopień mianownika ( $\rightarrow$  16.5).

Operację pomijania biegunów najłatwiej jest przeprowadzić na modelu w postaci transmitancji ( $\rightarrow$  13.2.3), a jej podstawą jest bezpośredni związek między biegunami transmitancji a składnikami składowej swobodnej odpowiedzi (operatorowa metoda rozwiązywania równań różniczkowych  $\rightarrow$  13.3). Jeśli mianownik transmitancji ma postać iloczynową, to uproszczenie opisuje następującą operację:

$$G(s) = \frac{L(s)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} \approx k \frac{L(s)}{\prod_{i=1}^{n_1} (s - p_i)}, \quad (20-1)$$

gdzie:  $p_i$  – bieguny transmitancji w kolejności od najbardziej znaczących ( $1 \leq i \leq n_1$ ) do najmniej znaczących ( $n_1 < i \leq n$ ),  $k$  – współczynnik korekcyjny, który zapewni zachowanie wzmocnienia układu  $k_{ukl}$ :

$$k_{ukl} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{L(s)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} \rightarrow \lim_{s \rightarrow 0} k \frac{L(s)}{\prod_{i=1}^{n_1} (s - p_i)} = k_{ukl} \rightarrow k. \quad (20-2)$$

Najmniej znaczące bieguny są określane przede wszystkim na podstawie części rzeczywistej. Jeśli  $|\operatorname{Re}(p_i)|_{\min}$  oznacza odległość od osi  $\operatorname{Im}$  najbliższego ujemnego biegunu, to w transmitancji  $G(s)$  można pominąć człony  $(s - p_i)$  dla których:

$$|\operatorname{Re}(p_i)| > r |\operatorname{Re}(p_i)|_{\min}, \quad (20-3)$$

gdzie współczynnik  $r$  jest dostatecznie duży (np.  $r = 10$ ), co oznacza, że na płaszczyźnie zespolonej te bieguny leżą znacznie bardziej na lewo od pozostałych biegunów. Pominięcie takich biegunów oznacza, że w składowej swobodnej odpowiedzi układu pomijane są składniki związane z tym biegunami, a są to składniki, które najszybciej zanikają (nie mają wpływu na czas ustalania odpowiedzi,  $\rightarrow$  6.2.4). Jeśli pomijane są pary biegunów zespolonych, to muszą spełniać także warunek:

$$|\operatorname{Im}(p_i) / \operatorname{Re}(p_i)| < |\operatorname{Im}(p_i) / \operatorname{Re}(p_i)|_{\max}. \quad (20-4)$$

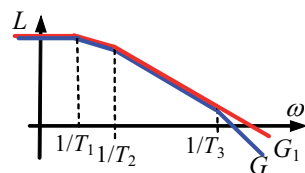
Pozostawienie biegunów o największym stosunku części urojonej do rzeczywistej, czyli  $|\operatorname{Im}(p_i) / \operatorname{Re}(p_i)|_{\max}$ , oznacza zachowanie najistotniejszych oscylacji.

Jeśli transmitancja ma postać iloczynu podstawowych członów dynamiki, to upraszczaniu najmniej istotnych biegunów odpowiada upraszczanie członów inercyjnych o najmniejszych stałych czasowych:

$$G(s) = \frac{L(s)}{\prod_{i=1}^n (T_i s + 1)} \approx \frac{L(s)}{\prod_{i=1}^{n_1} (T_i s + 1)}, \quad (20-5)$$

gdzie  $T_i$  – stałe czasowe od największych do najmniejszych, przy czym pomijane czło-

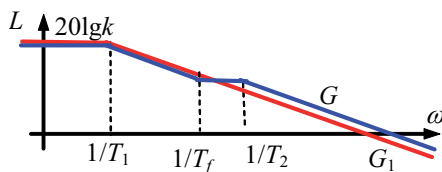
ny spełniają warunek (20-3), to znaczy, że ich stałe czasowe  $T_i$  ( $n_1 < i \leq n$ ) są  $r$  razy mniejsze od największej stałej  $T_1$ . Na tej podstawie można zilustrować wpływ, jaki ma upraszczanie transmitancji na charakterystyki częstotliwościowe, w szczególności na wykresy asymptotyczne (rys. 20-1). Pomijanie małych stałych czasowych zmienia własności modelu jedynie w zakresie wyższych pulsacji, a więc dotyczy mało znaczących harmoniczných o pulsacjach  $\omega > r/T_1$  ( $\rightarrow 14.4.2$ ).



Rys. 20-1. Przed ( $G$ ) i po ( $G_1$ ) uproszczeniu biegunu

## 20.2.2. Pomijanie zer i biegunów

Na podstawie wykresów  $L(\omega)$  można wskazać zasadę upraszczania zer transmitancji, która pomaga zachować warunek, aby stopień licznika nie był większy niż stopień mianownika. Z konstrukcji wykresu asymptotycznego  $L(\omega)$  wynika, że zmiana nachylenia asymptot spowodowana przez człon forsujący i człon inercyjny kompensują się wzajemnie, gdy parametry tych członów są zbliżone (rys. 20-2). Można więc skrócić transmitancję, np:



Rys. 20-2. Przed ( $G$ ) i po ( $G_1$ ) uproszczeniu biegunu i zera

$$\frac{b_1 s + b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{k(T_f s + 1)}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} \approx \frac{k}{(T_1 s + 1)}, \text{ gdy } T_f \approx T_2. \quad (20-6)$$

To oznacza, że w transmitancji można pominąć zero i biegun o podobnych wartościach, pamiętając o konieczności zachowania wzmocnienia układu  $k_{ukl}$  ( $\rightarrow 13.2.3$ ). Wykonując taką operację, przyjmujemy hipotezę skracalności ( $\rightarrow 18.3.2$ ), więc na przykład nie można skracać dodatnich biegunów.

Zera i bieguny o podobnych wartościach występują w transmitancjach obiektów typu kaskada współdziałająca (tabela 13-7). Wszystkie transmitancje takiego układu mają ten sam mianownik (te same bieguny), ale różne liczniki:

$$x_1(s) = \frac{b_1(s - a_{22})}{(s - a_{11})(s - a_{22}) - a_{12}a_{21}} u_1(s) + \frac{a_{12}b_2}{(s - a_{11})(s - a_{22}) - a_{12}a_{21}} u_2(s),$$

$$x_2(s) = \frac{a_{21}b_1}{(s - a_{11})(s - a_{22}) - a_{12}a_{21}} u_1(s) + \frac{b_2(s - a_{11})}{(s - a_{11})(s - a_{22}) - a_{12}a_{21}} u_2(s).$$

W transmitancjach  $x_1(s)/u_1(s)$  i  $x_2(s)/u_2(s)$  występuje zero o wartości zbliżonej do jednego z biegunów. Kompensacyjny wpływ zera powoduje, że odpowiedź skokowa transmitancji wygląda jak reakcja układu niższego rzędu, co można zaobserwować na przykładowych wykresach układu hydraulicznego ( $\rightarrow 13.2.2$ ). Z tego powodu identyfikacja modelu na podstawie odpowiedzi skokowej ( $\rightarrow 17.4.2$ ) nie pozwala ustalić

precyzyjnie rzędu układu – identyfikowany model jest uproszczony (pomija m.in. skompensowane zera i bieguny).

### 20.2.3. Obniżanie rzędu bez wyznaczania biegunów [14]

Podstawową wadą upraszczania na podstawie wzorów (20-1), (20-5) i (20-6) jest konieczność wyznaczenia biegunów i zer transmitancji. Jeśli transmitancja ma współczynniki liczbowe, to można wykorzystać programy wspomagające rozkład transmitancji na postać iloczynową ( $\rightarrow$  17.2.3). Alternatywą jest metoda obniżenia rzędu modelu bez wyznaczania biegunów. Metoda polega na pomijaniu w mianowniku składnika o najwyższym stopniu:

$$G(s) = \frac{L(s)}{a_{n+1}s^{n+1} + a_n s^n + \dots + a_1 s + 1} \approx \frac{L(s)}{a_n s^n + \dots + a_1 s + 1}, \quad (20-7)$$

co w określonych warunkach odpowiada pomijaniu najmniej znaczącego bieguna lub innymi słowy, najmniejszej stałej czasowej.

Zamiast mianownika, który ma  $n$  ujemnych biegunów o zbliżonych wartościach, rozważymy podobny mianownik  $M_n$ , który ma  $n$  takich samych biegunów, czyli  $n$  takich samych stałych czasowych  $T$ :

$$M_n(s) = (sT + 1)^n = T^n s^n + nT^{n-1}s^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}T^{n-2}s^{n-2} + \dots + nTs + 1.$$

Porównamy go z mianownikiem  $M_{n+1}$ , który ma także  $n$  stałych czasowych  $T$  i dodatkowo jeszcze jedną znacznie mniejszą  $qT$ , gdzie  $q \ll 1$ , czyli:

$$\begin{aligned} M_{n+1}(s) &= (sT + 1)^n (sqT + 1) = \left( T^n s^n + nT^{n-1}s^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}T^{n-2}s^{n-2} + \dots + nTs + 1 \right) (sqT + 1) = \\ &= qT^{n+1}s^{n+1} + \left( 1 + q\frac{n}{1} \right) T^n s^n + n \left( 1 + q\frac{n-1}{2} \right) T^{n-1}s^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} \left( 1 + q\frac{n-2}{3} \right) T^{n-2}s^{n-2} + \dots + (n+q)Ts + 1. \end{aligned}$$

W celu łatwiejszego porównania mianowników  $M_n$  i  $M_{n+1}$  wprowadzimy zmienną  $S$ , przez postawienie  $s = S/T$ :

$$\begin{aligned} M_n(S) &= S^n + nS^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}S^{n-2} + \dots + nS + 1, \\ M_{n+1}(S) &= qS^{n+1} + \left( 1 + q\frac{n}{1} \right) S^n + n \left( 1 + q\frac{n-1}{2} \right) S^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} \left( 1 + q\frac{n-2}{3} \right) S^{n-2} + \dots + (n+q)S + 1. \end{aligned}$$

Porównując współczynniki wielomianów  $M_n$  i  $M_{n+1}$  przy tych samych potęgach zmiennej  $S$ , można stwierdzić, że:

- $q \ll 1$  więc współczynniki  $a_1 \div a_n$  mają podobne wartości, np.  $a_1 = nT \approx (n+q)T$ ,
- współczynnik przy  $S^{n+1}$  jest bardzo mały – równy wartości  $q$  ( $a_{n+1} = q \ll 1$ ).

Jeśli mianownik  $M_{n+1}(s)$  ma mało znaczący biegun (małą stałą czasową), to po zamianie zmiennych ( $s = S/T$ ) w wyrażeniu  $M_{n+1}(S)$  współczynnik przy  $S^{n+1}$  ma małą wartość, co oznacza, że można zastosować uproszczenie  $M_{n+1}(s) \approx M_n(s)$ .

Wobec powyższego procedura uproszczenia wzoru (20-7) jest następująca:

- pierwotny mianownik  $M_{n+1}(s) = a_{n+1}s^{n+1} + a_ns^n + \dots + a_1s + 1$ , stąd  $a_1 = nT \rightarrow T = a_1/n$ ,
- podstawiamy  $s = S/T = Sn/a_1$  i uzyskujemy postać

$$M_{n+1}(S) = a_{n+1} \left( \frac{nS}{a_1} \right)^{n+1} + a_n \left( \frac{nS}{a_1} \right)^n + \dots + a_1 \left( \frac{nS}{a_1} \right) + 1, \text{ stąd } q = a_{n+1} \left( \frac{n}{a_1} \right)^{n+1},$$

- jeśli  $q \ll 1$ , to przyjmujemy mianownik uproszczony  $M_n(s) = a_ns^n + \dots + a_1s + 1$ .

Procedurę można powtarzać wielokrotnie, dopóki kolejna wartość  $q$  jest znacznie mniejsza od 1.

**Przykład 1.** Mianownik:  $M_5(s) = 0.0022s^5 + 0.0733s^4 + 0.7089s^3 + 1.7711s^2 + 2.1333s + 1$

- Czy można uprościć  $M_5(s) = 0.0022s^5 + 0.0733s^4 + 0.7089s^3 + 1.7711s^2 + 2.1333s + 1$  do  $n=4$ ?

Wartość  $a_1 = 2.1333$ , więc podstawiamy  $s = S \cdot 4/2.133$

Po podstawieniu  $M_5(s) = \mathbf{0.0510S^5} + 0.906S^4 + 4.6731S^3 + 6.2267S^2 + 4S + 1$ ,

Stąd  $q = a_5 = 0.051 \ll 1$ , więc  $M_5(s)$  można uprościć do  $M_4(s)$

- Czy można uprościć  $M_4(s) = 0.0733s^4 + 0.7089s^3 + 1.7711s^2 + 2.1333s + 1$  do rzędu  $n=3$ ?

Wartość  $a_1 = 2.1333$ , więc podstawiamy  $s = S \cdot 3/2.133$

Po podstawieniu  $M_4(s) = \mathbf{0.2867S^4} + 1.9715S^3 + 3.5025S^2 + 3S + 1$

Stąd  $q = a_4 = 0.2867 \ll 1$ , więc  $M_4(s)$  można uprościć do  $M_3(s)$

- Czy można uprościć  $M_3(s) = 0.7089s^3 + 1.7711s^2 + 2.1333s + 1$  do rzędu  $n=2$ ?

Wartość  $a_1 = 2.1333$ , więc podstawiamy  $s = S \cdot 2/2.133$

Po podstawieniu  $M_3(s) = \mathbf{0.5841S^3} + 1.5567S^2 + 2S + 1$

Stąd  $q = a_3 = 0.5841 \approx 1$ , więc  $M_3(s)$  nie można uprościć

Odpowiedź:  $M_5(s)$  można uprościć do  $M_3(s) = 0.7089s^3 + 1.7711s^2 + 2.1333s + 1$

Weryfikacja procedury na podstawie biegunów układu po kolejnych uproszczeniach

|          | Bieguny         |                 |                                 | Do uproszczenia | $\mu$ (6-11) |
|----------|-----------------|-----------------|---------------------------------|-----------------|--------------|
| $M_5(s)$ | $s_{1,2} = -1$  | $s_{2,3} = -15$ | $s_{4,5} = -1 \pm j1$           | -15             | $\mu=1$      |
| $M_4(s)$ | $s_1 = -1.0086$ | $s_2 = -6.6442$ | $s_{3,4} = -1.0086 \pm j1.0121$ | -6.6442         | $\mu=1.0035$ |
| $M_3(s)$ | $s_1 = -0.8967$ |                 | $s_{2,3} = -0.8008 \pm j0.9653$ |                 | $\mu=1.2054$ |

Najmniej znaczący biegun  $M_5(s)$  to podwójny biegun -15 i to on został uproszczony.

**Przykład 2.** Mianownik:  $M_5(s) = 0.002212s^5 + 0.07522s^4 + 0.7765s^3 + 2.336s^2 + 2.1633s + 1$

- Czy można uprościć do rzędu  $n=4$ ? Podstawiamy  $s = S \cdot 4/2.633$ .

Wartość  $q = a_5 = 0.002212 \cdot (4/2.633)^5 = 0.0179 \ll 1$

- Czy można uprościć do rzędu  $n=3$ ? Podstawiamy  $s = S \cdot 3/2.633$ .

Wartość  $q = a_4 = 0.07522 \cdot (3/2.633)^4 = 0.1268 \ll 1$

- Czy można uprościć do rzędu  $n=2$ ? Podstawiamy  $s = S \cdot 2/2.633$ .

Wartość  $q = a_3 = 0.7765 \cdot (2/2.633)^3 = 0.3403$

Odpowiedź:  $M_5(s)$  można uprościć do  $M_3(s) = 0.7765s^3 + 2.336s^2 + 2.1633s + 1$

Weryfikacja procedury na podstawie biegunów układu po kolejnych uproszczeniach

|          | Bieguny                         |                        |                 | Do uproszczenia | $\mu$ (6-11) |
|----------|---------------------------------|------------------------|-----------------|-----------------|--------------|
| $M_5(s)$ | $s_{1,2} = -1$                  | $s_{3,4} = -15 \pm j1$ | $s_5 = -2$      | $-15 \pm j1$    | $\mu=0.667$  |
| $M_4(s)$ | $s_{1,2} = -0.9859 \pm j0.0671$ | $s_3 = -6.1312$        | $s_4 = -2.2206$ | -6.1312         | $\mu=0.681$  |
| $M_3(s)$ | $s_{1,2} = -1.1151 \pm j0.6411$ |                        | $s_3 = -0.7784$ |                 | $\mu=0.5749$ |

Gdy uproszczenie polega na pominięciu bieguna rzeczywistego (przykład 1) – wówczas wszystkie pozostałe bieguny ulegają niewielkim zmianom. Gdy najmniej znaczące bieguny to para zespolona (przykład 2), to uproszczenie powoduje pominięcie jednego bieguna, ale może zmienić i położenie, i typ pozostałych biegunów.

## 21. Podstawowe badania układów nieliniowych

*czyli przymiarka do uogólnienia*

### 21.1. Badanie stabilności lokalnej

#### 21.1.1. Wprowadzenie [1, 10, 19]

Stabilność nieliniowych równań różniczkowych w ogólnym przypadku jest złożonym zagadnieniem, ale nie każdy problem wymaga ogólnego podejścia. W praktyce inżynierskiej określanie stabilności nieliniowych układów często jest oparte na badaniu zlinearyzowanych modeli ( $\rightarrow$  19.2). Układ nieliniowych równań stanu (19-32) poddany linearyzacji dynamicznej uzyskuje postać liniową (19-33):

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \rightarrow \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_0 \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_0 \mathbf{u}(t). \quad (21-1)$$

Badanie stabilności opiera się na wartościach własnych macierzy stanu  $\mathbf{A}_0$ :

$$\det(\mathbf{A}_0 - \lambda \mathbf{I}) = 0. \quad (21-2)$$

To samo zadanie można zrealizować bez odwoływania się do pojęcia linearyzacji. Dla układu nieliniowych równań stanu (19-32) należy wyznaczyć **macierz Jacobiego J**:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \rightarrow \mathbf{J}, \quad (21-3)$$

gdzie wiersze macierzy  $\mathbf{J}$  zawierają pochodne cząstkowe po zmiennych stanu ( $\partial f_i / \partial x_j$ ). Następnie należy obliczyć wartość macierzy  $\mathbf{J}$  w punkcie równowagi układu (macierz  $\mathbf{J}_0$ ) i wyznaczyć wartości własne macierzy  $\mathbf{J}_0$ , czyli wyznaczyć pierwiastki równania charakterystycznego:

$$\det(\mathbf{J}_0 - \lambda \mathbf{I}) = 0. \quad (21-4)$$

Równania charakterystyczne (21-2) i (21-4) są identyczne – zastosowano jedynie różne pojęcia (określenia).

1° Rozwinięcie zapisu (21-3) i wyznaczenie macierzy  $\mathbf{J}$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t)) \\ \dot{x}_2(t) = f_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t)) \\ \dots \\ \dot{x}_n(t) = f_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t)) \end{cases} \rightarrow \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

2° Wyrażenie (21-4), czyli obliczenie macierzy  $\mathbf{J}_0$  i wyznaczenie wartości własnych  $\mathbf{J}_0$ :

$$\det(\mathbf{J}_0 - \lambda \mathbf{I}) = 0 \rightarrow \det \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right|_0 - \lambda & \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right|_0 & \dots & \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \right|_0 \\ \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right|_0 & \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right|_0 - \lambda & \dots & \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \right|_0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \left. \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \right|_0 & \left. \frac{\partial f_n}{\partial x_2} \right|_0 & \dots & \left. \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \right|_0 - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

Wartości własne macierzy  $\mathbf{A}_0$  ( $\mathbf{J}_0$ ) – bieguny modelu zlinearyzowanego w określonym punkcie równowagi – opisują własności dynamiczne tego modelu ( $\rightarrow$  6.2.2):

- wszystkie bieguny w lewej półpłaszczyźnie ( $\text{Re}(\lambda) < 0$ ) – model stabilny asymptotycznie,
- choć jeden biegun w prawej półpłaszczyźnie ( $\text{Re}(\lambda) > 0$ ) – model niestabilny,
- występuje biegun lub zespolona para biegunów na osi urojonej ( $\text{Re}(\lambda) = 0$ ) – model na granicy stabilności (może być stabilny, ale nie asymptotycznie).

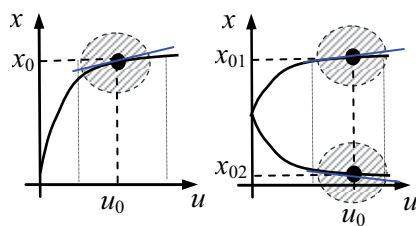
Jeśli linearyzacja zostanie wykonana w innym punkcie pracy (dla innych wartości na wejściach układu), to zlinearyzowany model może mieć inne własności.

Wnioskowanie o stabilności układu nieliniowego na podstawie stabilności zlinearyzowanego modelu ma charakter lokalny – dotyczy określonego punktu pracy (punktu linearyzacji) i opiera się na następujących zasadach:

- zlinearyzowany model jest stabilny asymptotycznie  $\rightarrow$  układ nieliniowy też jest stabilny asymptotycznie,
- zlinearyzowany model jest niestabilny  $\rightarrow$  układ nieliniowy też jest niestabilny,
- zlinearyzowany model jest na granicy stabilności (może być stabilny, ale nie asymptotycznie)  $\rightarrow$  nie można rozstrzygać stabilności układu nieliniowego.

Zasady stanowią pośrednią metodą badania stabilności układu nieliniowego i są nazywane **pierwszą metodą Lapunowa**. Taki sposób badania stabilności jest dość prosty, ale ograniczony (rys. 21-1):

- wnioski na temat stabilności dotyczą tylko pewnego obszaru wokół punktu pracy (dla określonego  $u_0$ ) i nie obejmują przypadków granicznych,
- układ nieliniowy może mieć wiele punktów równowagi (wiele rozwiązań statycznych dla określonego  $u_0$ ) – można zbadać lokalną stabilność/niestabilność poszczególnych punktów równowagi.



Rys. 21-1. Badanie stabilności w punkcie/punktach równowagi

Przy okazji linearyzacji dynamicznej ( $\rightarrow$  19.2) przedstawiono przykłady stwierdzenia stabilności nieliniowego układu, gdy układ ma jeden punkt równowagi i można wykazać, że w całym zakresie pracy zlinearyzowany model układu jest stabilny.

### 21.1.2. Przykłady zastosowania

Badanie lokalnej stabilności w kolejnych przykładach oparto na macierzy Jacobiego. Parametry modeli są dodatnie, co znacznie upraszcza analizę.

**Przykład 1:** Równania Lotki–Volterry (2-82)

$$\text{Model: } \begin{cases} \dot{V}(t) = r_{rV}V(t) - aV(t)P(t) \\ \dot{P}(t) = baV(t)P(t) - r_{sP}P(t) \end{cases}, \text{ stąd macierz } \mathbf{J}: \begin{bmatrix} r_{rV} - aP & -aV \\ baP & baV - r_{sP} \end{bmatrix}$$

$$\text{Opis statyczny: } \begin{cases} V(r_{rV} - aP) = 0 \\ P(baV - r_{sP}) = 0 \end{cases}, \text{ stąd punkty równowagi: } \begin{cases} 1) V = 0, P = 0 \\ 2) V = r_{sP}/(ab), P = r_{rV}/a \end{cases}$$

Wartości własne macierzy  $\mathbf{J}_0$  w poszczególnych punktach równowagi:

$$1) \det \begin{bmatrix} r_{rV} - \lambda & 0 \\ 0 & -r_{sP} - \lambda \end{bmatrix} = -(r_{rV} - \lambda)(r_{sP} + \lambda) \rightarrow \lambda_1 = r_{rV} > 0, \lambda_2 = -r_{sP} < 0$$

→ układ niestabilny,

$$2) \det \begin{bmatrix} -\lambda & -r_{sP}/b \\ br_{rV} & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + r_{rV}r_{sP} \rightarrow \lambda_{1,2} = \pm j\sqrt{r_{rV}r_{sP}}$$

→ układ na granicy stabilności (niegasnące oscylacje).

**Przykład 2:** Równania Lotki–Volterry z ograniczeniem środowiska (2-83)

$$\text{Model: } \begin{cases} \dot{V}(t) = r_{rV}V(t)(1 - V(t)/K) - aV(t)P(t) \\ \dot{P}(t) = baV(t)P(t) - r_{sP}P(t) \end{cases} \rightarrow \mathbf{J}: \begin{bmatrix} r_{rV} - 2r_{rV}V/K - aP & -aV \\ baP & baV - r_{sP} \end{bmatrix}$$

$$\text{Opis statyczny: } \begin{cases} r_{rV}V(1 - V/K) - aVP = 0 \\ baVP - r_{sP}P = 0 \end{cases} \rightarrow \text{punkty równowagi: } \begin{cases} 1) V = 0, P = 0 \\ 2) V = K, P = 0 \\ 3) V = \frac{r_{sP}}{ab}, P = \frac{r_{rV}}{a} \left(1 - \frac{r_{sP}}{abK}\right) \end{cases}$$

Wartości własne macierzy  $\mathbf{J}_0$  w poszczególnych punktach równowagi:

$$1) \det \begin{bmatrix} r_{rV} - \lambda & 0 \\ 0 & -r_{sP} - \lambda \end{bmatrix} = -(r_{rV} - \lambda)(r_{sP} + \lambda) \rightarrow \lambda_1 = r_{rV} > 0, \lambda_2 = -r_{sP} < 0$$

→ układ niestabilny,

$$2) \det \begin{bmatrix} -r_{rV} - \lambda & 0 \\ 0 & -r_{sP} - \lambda \end{bmatrix} = (r_{rV} + \lambda)(r_{sP} + \lambda) \rightarrow \lambda_1 = -r_{rV} < 0, \lambda_2 = -r_{sP} < 0$$

→ układ stabilny,

$$3) \det \begin{bmatrix} \frac{-r_{rV}r_{sP}}{abK} - \lambda & \frac{-r_{sP}}{b} \\ r_{rV}b \left(1 - \frac{r_{sP}}{abK}\right) & -\lambda \end{bmatrix} = abK\lambda^2 + r_{rV}r_{sP}\lambda + r_{rV}r_{sP}(abK - r_{sP}) \rightarrow$$

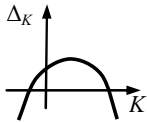
$$\rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-r_{rV}r_{sP} \pm \sqrt{\Delta}}{2abK}, \quad \Delta = (r_{rV}r_{sP})^2 - 4abKr_{rV}r_{sP}(abK - r_{sP}).$$

Stabilność układu w punkcie (3) zależy od wartości parametrów.

Analiza biegunów ( $\rightarrow$  7.3) pozwala zbadać typ biegunów np. w zależności od  $K$  (dla  $K > 0$ )

$$\Delta = (r_{rV}r_{sP})^2 - 4abKr_{rV}r_{sP}(abK - r_{sP})$$

$$1^\circ \Delta \geq 0 \rightarrow r_{rV}r_{sP} - 4abK(abK - r_{sP}) \geq 0 \rightarrow -4a^2b^2K^2 + 4abr_{sP}K + r_{rV}r_{sP} \geq 0$$



$$\Delta_K = 16a^2b^2r_{sP}^2 + 16a^2b^2r_{rV}r_{sP} = 16a^2b^2(r_{sP}^2 + r_{rV}r_{sP})$$

$$K_{1,2} = \frac{-4abr_{sP} \pm \sqrt{\Delta_K}}{-8a^2b^2} = \frac{-4abr_{sP} \pm 4ab\sqrt{r_{sP}^2 + r_{rV}r_{sP}}}{-8a^2b^2} = \frac{r_{sP} \pm \sqrt{r_{sP}^2 + r_{rV}r_{sP}}}{2ab}$$

$$\text{Wniosek: } \Delta \geq 0 \text{ gdy } K \leq \frac{r_{sP} + \sqrt{r_{sP}^2 + r_{rV}r_{sP}}}{2ab}$$

$$\Delta \geq 0, \text{ to } \lambda_{1,2} \text{ bieguny rzeczywiste: } \lambda_1 = \frac{-r_{rV}r_{sP} + \sqrt{\Delta}}{2abK}, \quad \lambda_2 = \frac{-r_{rV}r_{sP} - \sqrt{\Delta}}{2abK} < 0$$

$$\lambda_1 < 0 \rightarrow r_{rV}r_{sP} > \sqrt{\Delta}$$

$$(r_{rV}r_{sP})^2 > (r_{rV}r_{sP})^2 - 4abKr_{rV}r_{sP}(abK - r_{sP})$$

$$K > r_{sP}/(ab)$$

$$\text{Wniosek: } \Delta \geq 0 \text{ i } \operatorname{Re}(\lambda_1) < 0 \text{ i } \operatorname{Re}(\lambda_2) < 0, \text{ gdy } \frac{r_{sP}}{ab} < K \leq \frac{r_{sP} + \sqrt{r_{sP}^2 + r_{rV}r_{sP}}}{2ab}$$

$$2^\circ \Delta < 0 \text{ gdy } K > \frac{r_{sP} + \sqrt{r_{sP}^2 + r_{rV}r_{sP}}}{2ab}$$

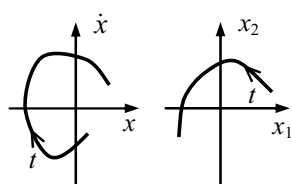
$$\Delta < 0, \text{ to } \lambda_{1,2} \text{ bieguny zespolone } \rightarrow \operatorname{Re}(\lambda_{1,2}) = \frac{-r_{rV}r_{sP}}{2abK} < 0 \text{ zawsze}$$

$$\text{Wniosek: } \Delta \geq 0 \text{ i } \operatorname{Re}(\lambda_{1,2}) < 0, \text{ gdy } K > \frac{r_{sP} + \sqrt{r_{sP}^2 + r_{rV}r_{sP}}}{2ab}$$

## 21.2. Portrety fazowe

### 21.2.1. Wprowadzenie [1, 10, 11]

Portret fazowy to jeden ze sposobów graficznego przedstawiania własności dynamiki układów liniowych i nieliniowych, który stosuje się praktycznie jedynie do układów pierwszego lub drugiego rzędu. **Portretem fazowym** nazywamy rodzinę wykresów (trajektorii) przedstawioną na płaszczyźnie fazowej lub płaszczyźnie stanu (rys. 21-2), prezentującą rozwiązania równania czy układu równań różniczkowych dla jednego, stałego wymuszenia (wymuszeń), ale dla różnych warunków początkowych. Portret wyznacza się więc w szczególności dla jednego równania różniczkowego maksymalnie drugiego rzędu:



Rys. 21-2. Trajektoria na płaszczyźnie fazowej i na płaszczyźnie stanu

$$\dot{x}(t) = f_1(x(t), u_0), \quad (21-5)$$

$$\ddot{x}(t) = f_1(x(t), \dot{x}(t), u_0) \rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = f_1(x_1(t), x_2(t), u_0) \end{cases} \quad (21-6)$$

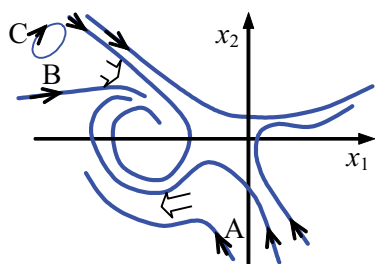
lub układu równań pierwszego rzędu:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(x_1(t), x_2(t), u_{10}) \\ \dot{x}_2(t) = f_2(x_1(t), x_2(t), u_{20}) \end{cases} \quad (21-7)$$

Wartość  $u_0$  ( $u_{10}$ ,  $u_{20}$ ) w równaniach reprezentuje stałe wymuszenie (wymuszenia), które jest parametrem portretu, przy czym często wykonywane są portrety układów jednorodnych (dla zerowych wymuszeń). Płaszczyzna fazowa jest szczególnym przypadkiem płaszczyzny stanów, gdy jedna ze zmiennych stanu jest pochodną drugiej zmiennej stanu (zmienna fazowa), tak jak w równaniu (21-6).

Każde rozwiązanie równań (21-5) i (21-6) dla określonych warunków początkowych, czyli funkcja  $x(t)$ , podobnie jak każde rozwiązanie układu równań (21-7) dla określonych warunków początkowych, czyli funkcje  $x_1(t)$  i  $x_2(t)$ , pozwalają narysować wykres czasowy rozwiązania, a także pojedynczą trajekcję na płaszczyźnie fazowej (płaszczyźnie stanów). Portrety fazowe można więc łatwo uzyskać **metodami symulacyjnymi** ( $\rightarrow$  5.2, 9.2), uruchamiając symulację wielokrotnie przy stałym wymuszeniu i różnych warunkach początkowych – wartości odpowiednich zmiennych stanu ( $x(t)$  i  $\dot{x}(t)$  lub  $x_1(t)$  i  $x_2(t)$ ) zarejestrowane podczas symulacji pozwalają narysować kolejne trajektorie portretu. Liczba trajektorii i zestaw warunków początkowych jest określana doświadczalnie. Wybór trajektorii koniecznych do odtworzenia portretu można ograniczyć ze względu na dwie cechy:

- trajektorie są ciągłe – nieciągłość oznaczałaby możliwość skokowej zmiany stanu (co wymaga przekazania nieograniczonej energii),
- trajektorie nie przecinają się, ponieważ układ jest deterministyczny (tzn. nie ma losowego czynnika, który decydowałby o zachowaniu układu w punkcie przecięcia).



Rys. 21-3. Przykłady wnioskowania o przebiegu trajektorii

Ciągłość i brak punktów przecinania umożliwiają ocenę zachowania układu na podstawie kilku wyznaczonych trajektorii (rys. 21-3) – np. stany układu reprezentowane przez zakreskowane obszary (A, B) ewoluują do tych samych punktów jak trajektorie sąsiadujące z nimi. Teoretycznie w obszarach tych mogą wystąpić trajektorie zamknięte (stan zmieniający się cyklicznie), ale to dość szczególne przypadki.

Trajektorie zależą od czasu, choć czas nie występuje w sposób jawny – formalnie są to funkcje algebraiczne opisujące zależność między zmiennymi fazowymi  $(x, \dot{x})$  lub zmiennymi stanu  $(x_1 \text{ i } x_2)$ :

$$\left. \begin{matrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{matrix} \right\} \rightarrow \dot{x} = f(x) \quad \text{lub} \quad \left. \begin{matrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{matrix} \right\} \rightarrow x_2 = f(x_1), \quad (21-8)$$

natomiast upływ czasu  $(t)$  na wykresach wskazuje się za pomocą strzałki. Funkcje trajektorii można próbować obliczyć i wykorzystać do rysowania portretów zamiast badań symulacyjnych. Równanie pierwszego rzędu w postaci (21-5) już jest funkcją opisującą trajektorie:

$$\dot{x} = f_1(x, u_0), \quad (21-9)$$

która pozwala narysować portret układu na płaszczyźnie fazowej  $(x, \dot{x})$ .

Z kolei równanie drugiego rzędu (21-6) można potraktować jako szczególny przypadek układu równań (21-7), a ten problem jest rozwiązywany w następujący sposób. Pochodną funkcji  $x_2(t)$  można przedstawić jako:

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = \frac{dx_2(t)}{dx_1(t)} \frac{dx_1(t)}{dt}$$

i przekształcić to wyrażenie, dzieląc obustronnie przez  $dx_1(t)/dt$ :

$$\frac{dx_2(t)/dt}{dx_1(t)/dt} = \frac{dx_2(t)}{dx_1(t)} \rightarrow \frac{\dot{x}_2(t)}{\dot{x}_1(t)} = \frac{dx_2(t)}{dx_1(t)},$$

a następnie podstawić wzory na pochodne zmiennych  $x_1$  i  $x_2$ , czyli równania (21-7)

$$\frac{dx_2(t)}{dx_1(t)} = \frac{f_2(x_1(t), x_2(t), u_{20})}{f_1(x_1(t), x_2(t), u_{10})}.$$

Powyższe wyrażenie wyznacza przebieg trajektorii  $x_2 = f_2(x_1)$ :

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2, u_{20})}{f_1(x_1, x_2, u_{10})}, \quad (21-10)$$

ponieważ  $dx_2/dx_1$  jest nachyleniem trajektorii, które można wyznaczyć w każdym punkcie płaszczyzny stanów  $(x_1, x_2)$ , jeśli tylko choć jedna z funkcji  $f_1$  i  $f_2$  ma niezerową wartość (jeśli  $f_1 \neq 0$  i  $f_2 = 0$ , to  $dx_2/dx_1 = 0$ , czyli nachylenie równoległe do osi  $x_1$ ; jeśli  $f_1 = 0$  lecz  $f_2 \neq 0$ , to  $dx_2/dx_1 = \infty$ , więc nachylenie równoległe do osi  $x_2$ ). Punkt, w którym następuje zerowanie obu funkcji  $f_1$  i  $f_2$ , jest **punktem osobliwym**, ponieważ wyrażenie (21-10) jest symbolem nieokreślonym:

$$dx_2 / dx_1 = 0 / 0,$$

co oznacza, że w tym punkcie nachylenie trajektorii jest nieokreślone. Zerowanie obu funkcji  $f_1$  i  $f_2$  oznacza zerowe wartości pochodnych obu zmiennych stanu, a więc punktem osobliwym jest każdy punkt równowagi obliczony na podstawie równań statycznych badanego układu (21-7) – punkt równowagi statycznej. Nachylenie trajektorii

w punkcie równowagi jest nieokreślone, ponieważ trajektorie do tego punktu zmierzają, ale go nie osiągają, lub się od niego oddalają – jeśli punkt równowagi jest warunkiem początkowym, to układ nie zmienia stanu.

Interpretacja wyrażenia (21-10) jest podstawą dla analitycznych i graficznych metod konstrukcji portretów. **Metoda analityczna** polega na rozwiązywaniu równania (21-10) przez całkowanie, co wymaga indywidualnego podejścia do każdego problemu i może być trudne do zrealizowania w przypadku modeli nieliniowych.

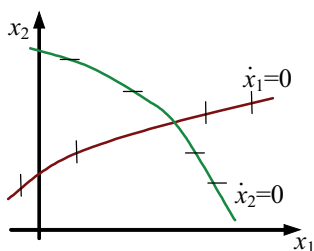
**Metoda graficzna** polega na pokryciu płaszczyzny stanu polem wektorowym, które wyznacza kierunek i zwrot trajektorii przechodzących przez poszczególne punkty pola – w punkcie  $(x_1, x_2)$  kierunek wektora wyznacza równanie (21-10), a zwrot określa się na podstawie równań układu (21-7) (dodatnia wartość  $\dot{x}_1$  oznacza zwiększanie wartości  $x_1$ , a ujemna – zmniejszanie, i analogicznie dla  $x_2$ ). Wystarczająco gęste pole pozwala ustalić przebieg trajektorii (rys. 21-4). Do wyznaczania pola wektorowego można wykorzystać metodę izoklin, tzn. linii,

które odpowiadają takiemu samemu nachyleniu trajektorii ( $dx_2/dx_1 = k = \text{const}$ ). Izoklina to krzywa, która spełnia równanie:

$$\frac{f_2(x_1, x_2, u_{20})}{f_1(x_1, x_2, u_{10})} = k. \quad (21-11)$$

Najłatwiej jest wyznaczyć izokliny zerowe obu zmiennych, czyli krzywe spełniające równania:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, u_{10}) = 0 &\rightarrow x_2(x_1, u_{10}), \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, u_{20}) = 0 &\rightarrow x_2(x_1, u_{20}). \end{aligned} \quad (21-12)$$



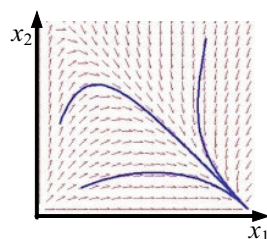
Rys. 21-5. Przykład izoklin zerowych

Po narysowaniu tych krzywych (rys. 21-5) można wykorzystać następujące własności izoklin zerowych:

- izokliny przecinają się w punkcie (punktach) równowagi układu ( $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$ ),
- na izoklinach można dowolnie gęsto oznaczyć kierunki nachylenia trajektorii: na zerowej izoklinie zmiennej  $x_1$  nachylenie jest równoległe do osi  $x_2$ , a na zerowej izoklinie zmiennej  $x_2$  nachylenie jest równoległe do osi  $x_1$ ,
- izokliny dzielą płaszczyznę na obszary o ustalonych kierunkach zmian:
  - gdy  $\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, u_{10}) > 0$ , to  $x_1$  rośnie; gdy  $\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, u_{10}) < 0$ , to  $x_1$  maleje,
  - gdy  $\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, u_{20}) > 0$ , to  $x_2$  rośnie; gdy  $\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, u_{20}) < 0$ , to  $x_2$  maleje.

Jeśli uzyskany obraz nie wystarczy do oszacowania przebiegu trajektorii, to wyznacza się kolejne izokliny z równania (21-11), np. dla  $k=1, -1, 2, -2, 1/2, -1/2, \dots$

Portrety fazowe wyznacza się dla układów liniowych i nieliniowych, szczególnie w celu określenia stabilności układu, w tym także stabilności (niestabilności) lokalnej,



Rys. 21-4. Przykład pola wektorowego

która może wystąpić w układach nieliniowych (→ 6.2.2). W typowych zadaniach z zakresu automatyki wyznaczane są przede wszystkim trajektorie o warunkach początkowych z otoczenia wybranego punktu pracy (równowagi).

21.2.2. Portrety układów liniowych

Badanie własności układów liniowych i to ograniczonych do pierwszego i drugiego rzędu, można zrealizować znacznie łatwiej i dogłębniej innymi metodami niż portret fazowy (→ 7, 8). Jednak typy i własności tych portretów są punktem odniesienia do konstrukcji i interpretacji przypadków nieliniowych.

**Portrety fazowe liniowego równania pierwszego rzędu:**  $\dot{x}(t) + a_0x(t) = u_0$  są wykonywane na płaszczyźnie fazowej. Trajektorie te można wyznaczyć na podstawie wzoru:  $\dot{x} = -a_0x + u_0$ . Kierunek upływu czasu wynika z własności funkcji pochodnej – dla  $\dot{x}(t) > 0$  wartość  $x(t)$  rośnie; dla  $\dot{x}(t) < 0$  wartość  $x(t)$  maleje. Portrety układu zawierają dwie trajektorie, które zbiegają lub oddalają się od punktu równowagi (tabela 21-1).

Tabela 21-1 Portrety fazowe liniowego układu pierwszego rzędu ( $u_0 = 0$ )

| Węzeł stabilny | Węzeł niestabilny |
|----------------|-------------------|
|                |                   |
|                |                   |

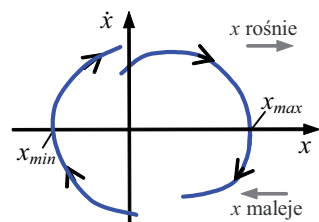
**Portrety fazowe liniowego równania drugiego rzędu:**  $\ddot{x}(t) + a_1\dot{x}(t) + a_0x(t) = u_0$ , wykonywane na płaszczyźnie fazowej  $(x, \dot{x})$ , stanowią całą rodzinę trajektorii. Portrety można podzielić na sześć charakterystycznych typów (tabela 21-2), które odpowiadają określonym własnościom układu dotyczącym stabilności i oscylacyjności – odpowiadają położeniu biegunów układu (→ 7.3) i tłumieniu (→ 7.4).

Tabela 21-2 Charakterystyczne typy portretów fazowych układów liniowych ( $u_0 = 0$ )

| Węzeł stabilny | Ognisko stabilne | Centrum     | Ognisko niestabilne | Węzeł niestabilny | Siodło |
|----------------|------------------|-------------|---------------------|-------------------|--------|
|                |                  |             |                     |                   |        |
|                |                  |             |                     |                   |        |
| $\zeta \geq 1$ | $1 > \zeta > 0$  | $\zeta = 0$ | $0 > \zeta > -1$    | $-1 \leq \zeta$   |        |

Na podstawie własności funkcji pochodnej można sformułować następujące własności trajektorii tworzących dany **portret na płaszczyźnie fazowej**, poza tym, że są ciągłe i nie przecinają się.

- 1° Punkt równowagi układu leży na osi  $x$  (w stanie równowagi  $\dot{x} = 0$ ), a dokładne położenie punktu zależy od wartości wymuszenia  $u_0$  (rozwiązania statycznego), a więc dla wymuszenia zerowego jest to punkt w środku układu współrzędnych.
- 2° Zwrot trajektorii (kierunek upływu czasu) jest określony jednoznacznie na podstawie własności funkcji pochodnej (nad osią  $x \rightarrow \dot{x} > 0 \rightarrow x \uparrow$ ; pod osią  $x \rightarrow \dot{x} < 0 \rightarrow x \downarrow$ ).
- 3° Trajektorja, która przecina oś  $x$  poza punktem równowagi, przecina ją pod kątem  $90^\circ$ . W punktach przecięcia trajektorii z osią  $x$  pochodna  $\dot{x} = 0$ , tzn., że funkcja  $x(t)$  osiąga wartość maksymalną lub minimalną, tak więc z trajektorii łatwo można odczytać amplitudy kolejnych oscylacji rozwiązania  $x(t)$ .
- 4° Trajektorja nie dostarcza jawnie informacji o skali upływającego czasu, ale teoretycznie istnieje możliwość obliczenia czasu przejścia wzdłuż trajektorii  $\dot{x} = f(x)$  od stanu  $x_a$  do stanu  $x_b$ :



Rys. 21-6. Wyznaczanie kierunku trajektorii

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} \rightarrow dt = \frac{dx}{\dot{x}} = \frac{dx}{f(x)} \Rightarrow t_{ab} = \int_{x_a}^{x_b} \frac{dx}{f(x)}. \quad (21-13)$$

Portrety fazowe układów liniowych dobrze ilustrują własność **stabilności i niestabilności globalnej** tych układów – w układzie liniowym możliwy jest tylko jeden punkt równowagi, więc układ stabilny dąży do tego punktu niezależnie od warunków początkowych (jest stabilny globalnie), a układ niestabilny oddala się od tego punktu, nawet jeśli początkowy stan był bardzo blisko stanu równowagi (jest niestabilny globalnie). Zmiana wartości wymuszenia, dla której powstaje portret, powoduje jedynie przesunięcie punktu równowagi na osi  $x$ , ale nie wpływa na kształt trajektorii.

**Portret fazowy liniowych równań stanu** drugiego rzędu ze stałymi wymuszeniami ( $u_{10}, u_{20}$ ):

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(x_1(t), x_2(t), u_{10}) \\ \dot{x}_2(t) = f_2(x_1(t), x_2(t), u_{20}) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + u_{10} \\ \dot{x}_2(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + u_{20} \end{cases}, \quad (21-14)$$

wykonywany na płaszczyźnie stanu ( $x_1, x_2$ ) obejmuje rodzinę trajektorii, a ich przebieg można określić na podstawie wyrażenia (21-10), czyli:

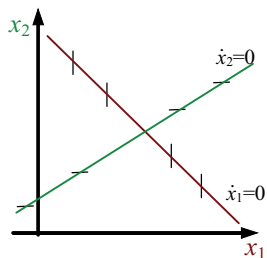
$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + u_{20}}{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + u_{10}}. \quad (21-15)$$

Wyznamy zerowe izokliny portretu zgodnie z (21-12):

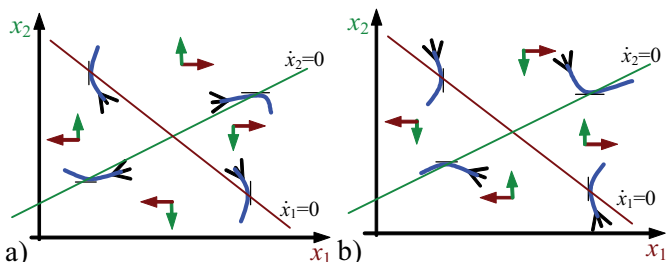
$$\begin{aligned} \dot{x}_1 = 0 &\rightarrow a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + u_{10} = 0 \rightarrow x_2 = -(a_{11}x_1 + u_{10})/a_{12} \text{ lub } x_1 = -(a_{12}x_2 + u_{10})/a_{11}, \\ \dot{x}_2 = 0 &\rightarrow a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + u_{20} = 0 \rightarrow x_2 = -(a_{21}x_1 + u_{20})/a_{22} \text{ lub } x_1 = -(a_{22}x_2 + u_{20})/a_{21}. \end{aligned}$$

Zerowe izokliny równań stanu są liniami prostymi, które przecinają się w punkcie równowagi i dzielą płaszczyznę stanu na cztery obszary (rys. 21-7). Na każdej izokli-

nie można zaznaczyć kąta, pod jakim trajektorie będą ją przecinać (czyli nachylenie trajektorii równoległe do osi  $x_1$  lub  $x_2$ ). Dla każdej izokliny można też wyznaczyć znak pochodnej w obszarze nad i pod izokliną (rozwiązując nierówności  $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 > 0$ ,  $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 > 0$ ) oraz ocenić przebieg fragmentów trajektorii przecinających izokliny, które spełniają wszystkie warunki (rys. 21-8).



Rys. 21-7. Przykład izoklin zerowych równań stanu

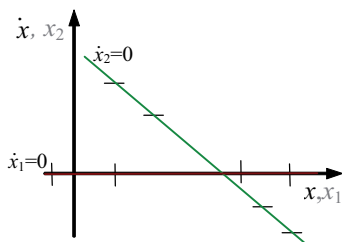


Rys. 21-8. Ocena przebiegu trajektorii na podstawie obszarów wzrostu:  
a)  $x_1$  i  $x_2$  rosną nad izokliną, b)  $x_1$  rośnie nad, a  $x_2$  pod izokliną

Zerowe izokliny to za mało do wyznaczenia typu portretu, ale może wystarczyć do wnioskowania o stabilności układu – można ocenić, czy fragmenty trajektorii przecinające zerowe izokliny mogą się zbliżyć do punktu równowagi (przypadek a), czy są „odpychane” od punktu równowagi (przypadek b).

Ten sam schemat postępowania można zastosować dla równania drugiego rzędu  $\ddot{x}(t) + a_1\dot{x}(t) + a_0x(t) = u_0$ , które po konwersji ma postać równań fazowych:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -a_0x_1(t) - a_1x_2(t) + u_0 \end{cases}, \quad (21-16)$$



Rys. 21-9. Izokliny zerowe równań fazowych

Zerowe izokliny portretu (rys. 21-9) to krzywe:

$$\dot{x}_1 = 0 \rightarrow x_2 = 0,$$

$$\dot{x}_2 = 0 \rightarrow x_2 = (-a_0x_1 - u_0)/a_1.$$

Izoklina zmiennej fazowej  $x_1$  (zmiennej  $x$ ) leży na zawsze osi  $x_1$  (osi  $x$ ). Stąd wszystkie przedstawione wcześniej własności trajektorii na płaszczyźnie fazowej są szczególnym przypadkiem własności trajektorii na płaszczyźnie stanu.

Portrety na płaszczyźnie stanu dotyczą układów drugiego rzędu, więc występują analogiczne typy portretów jak w przypadku równania drugiego rzędu (tabela 21-2) z uwzględnieniem uogólnionych własności trajektorii na płaszczyźnie stanu, czyli:

- 1° Punkt równowagi (rozwiązanie statyczne) leży na przecięciu zerowych izoklin obu zmiennych stanu.
- 2° Zwrot trajektorii (kierunek upływu czasu) jest określony jednoznacznie na podstawie znaku funkcji opisujących pochodne  $x_1$  i  $x_2$  w obszarach wyznaczonych przez izokliny zerowe.

- 3° Trajektorie przecinają zerową izoklinę zmiennej  $x_1$  równolegle do osi  $x_2$ , a izoklinę zmiennej  $x_2$  równolegle do osi  $x_1$ .
- 4° W punktach przecięcia trajektorii z zerową izokliną  $x_1$  funkcja  $x_1(t)$  osiąga wartość maksymalną lub minimalną (można wyznaczyć amplitudę drgań), i analogicznie dla drugiej zmiennej stanu  $x_2$ .
- 5° Czas przejścia od stanu  $x_a$  do stanu  $x_b$  można obliczyć na dwa sposoby:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 = \frac{dx_1}{dt} \rightarrow dt = \frac{dx_1}{\dot{x}_1} = \frac{dx_1}{f_1(x_1, x_2(x_1))} \Rightarrow t_{ab} &= \int_{x_{1a}}^{x_{1b}} \frac{dx_1}{f_1(x_1, x_2(x_1))}, \\ \dot{x}_2 = \frac{dx_2}{dt} \rightarrow dt = \frac{dx_2}{\dot{x}_2} = \frac{dx_2}{f_2(x_1(x_2), x_2)} \Rightarrow t_{ab} &= \int_{x_{2a}}^{x_{2b}} \frac{dx_2}{f_2(x_1(x_2), x_2)}, \end{aligned} \quad (21-17)$$

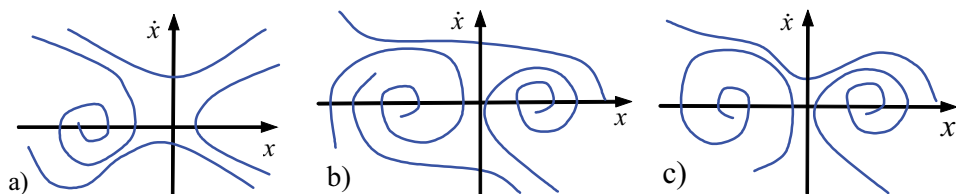
gdzie  $x_2(x_1)$  to wzór trajektorii jako zmiennej  $x_1$ , natomiast  $x_1(x_2)$  to alternatywny wzór trajektorii jako zmiennej  $x_2$ .

### 21.2.3. Portrety układów nieliniowych

Portrety fazowe mają szczególne znaczenie podczas badania własności dynamicznych układów nieliniowych, a mogą to być nawet układy z funkcjami nieróżniczkowalnymi, takimi jak nasycenie, strefa nieczułości, przekładnik itp.<sup>1</sup> W dalszym ciągu pozostaniemy jednak przy ograniczeniu opisu do układów, które zawierają tylko elementy o charakterystykach ciągłych i różniczkowalnych, ale nawet przy tym założeniu portrety nieliniowych modeli mogą być znacznie bardziej złożone niż modeli liniowych, na przykład z powodu wielu punktów równowagi, lokalnej stabilności/niestabilności, występowania cykli zamkniętych.

Dany układ nieliniowy może mieć więcej niż jeden punkt równowagi statycznej (rozwiązanie statyczne), jak na przykład model  $\dot{x}(t) + cx^2(t) = u(t)$  o dwóch punktach równowagi ( $x = \pm\sqrt{u_0/c}$ ). Portret fazowy, który ma w pełni opisać własności układu, należy wykonać w odpowiednio szerokim obszarze warunków początkowych, tak aby objąć wszystkie punkty równowagi. W pobliżu punktów równowagi portret układu nieliniowego jest zbliżony do liniowych wzorców, czyli ma formę stabilnego/niestabilnego węzła/ogniska, siodła. W ten sposób można zidentyfikować punkty równowagi na portretach wyznaczonych doświadczalnie (rys. 21-10). Ta własność uzasadnia badanie stabilności układu nieliniowego za pomocą linearyzacji w punkcie równowagi ( $\rightarrow$  19.2) – układ zlinearyzowany w pewnym otoczeniu punktu równowagi jest dobrym przybliżeniem układu nieliniowego i wnioski o stabilności układu w tym obszarze są poprawne.

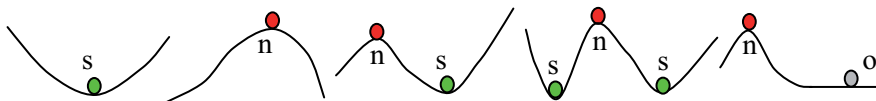
<sup>1</sup> Szczegółowe omówienia w literaturze z zakresu nieliniowych układów sterowania.



Rys. 21-10. Przykłady portretów fazowych wygenerowanych eksperymentalnie:

a) stabilne ognisko i siodło, b) dwa stabilne ogniska i siodło, c) stabilne i niestabilne ognisko oraz siodło

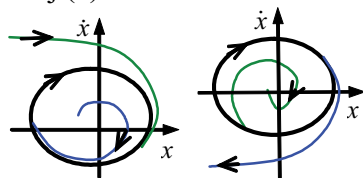
Dany układ nieliniowy może być stabilny/niestabilny globalnie, czyli niezależnie od warunków początkowych. Może być też tak, że układ jest stabilny dla pewnego obszaru warunków, a dla innych jest niestabilny – układ jest stabilny/niestabilny lokalnie. Wyznaczenie portretu fazowego w odpowiednio dużym otoczeniu punktów równowagi umożliwia określenie obszaru warunków początkowych, które zapewniają lokalną stabilność. Portret fazowy pozwala na zobrazowanie różnych przypadków stabilności/niestabilności lokalnej i globalnej – w mechanice używa się też pojęcia stanu równowagi trwałej, nietrwałej i obojętnej (rys. 21-11).



Rys. 21-11. Stabilność/niestabilność globalna/lokalna – równowaga trwała (s), nietrwała (n), obojętna (o)

Stabilność układu oznacza, że dąży on zawsze do któregoś ze stanów równowagi trwałej (s), nawet jeśli posiada stany równowagi nietrwałej (n).

Na portretach układów nieliniowych mogą wystąpić niekiedy trajektorie, które ilustrują cykliczne zmiany wartości. Cykl graniczny można uznać za rodzaj stanu ustalonego (rys. 21-12) i stosować pojęcie stabilnego/niestabilnego cyklu granicznego zależnie od tego, czy trajektorie zbiegają lub oddalają się od tego cyklu. Cykl graniczny może mieć kształt elipsy (drgania charakterze sinusoidalnym), ale w układach nieliniowych możliwe są drgania o bardzo złożonym kształcie.



Rys. 21-12. Stabilny i niestabilny cykl graniczny

Podstawowe własności trajektorii portretu nieliniowego układu na płaszczyźnie fazowej i na płaszczyźnie stanu są takie jak układów liniowych (tabela 21-3). O ile badania reakcji układu na różne wymuszenia w różnych punktach pracy pokazują, że własności dynamiki układów nieliniowych (stabilność, oscylacje) zależą i od warunków początkowych, i od funkcji wymuszających ( $\rightarrow$  18.2.2), to portret fazowy dobrze ilustruje zależność własności układu od warunków początkowych przy określonym stałym wymuszeniu. Wpływ funkcji wymuszających można zbadać porównując portrety nieliniowego układu wykonane dla różnych wartości wymuszeń (zmiana wartości wymuszenia może spowodować nawet zmianę liczby punktów równowagi).

Tabela 21-3 Własności trajektorii na płaszczyźnie stanów i na płaszczyźnie fazowej

|    | Trajektorie na płaszczyźnie fazowej                                                          | Trajektorie na płaszczyźnie stanu                                                                                                        |
|----|----------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1° | Punkty równowagi leżą na osi $x$                                                             | Punkty równowagi leżą na przecięciu izoklin zerowych                                                                                     |
| 2° | Zwrot trajektorii jest określony przez znak pochodnej nad i pod osią $x$                     | Zwrot trajektorii jest określony przez znak funkcji pochodnych $x_1$ i $x_2$ w obszarach wyznaczonych przez izokliny zerowe              |
| 3° | Trajektoria przecina oś $x$ pod kątem $90^\circ$ (równoległe do osi $\dot{x}$ )              | Trajektoria przecina izoklinę zerową zmiennej $x_1$ równoległe do osi $x_2$ , a izoklinę zerową zmiennej $x_2$ równoległe do osi $x_1$ . |
| 4° | W punktach przecięcia trajektorii z osią $x$ można zmierzyć amplitudę drgań przebiegu $x(t)$ | W punktach przecięcia trajektorii z izokliną zerową $x_1$ można zmierzyć amplitudę drgań przebiegu $x_1(t)$ i tak samo dla $x_2$         |
| 5° | Czas przejścia wzdłuż trajektorii można obliczyć ze wzoru (21-13)                            | Czas przejścia wzdłuż trajektorii można obliczyć ze wzoru (21-17)                                                                        |

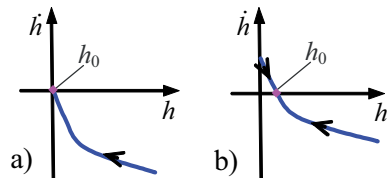
#### 21.2.4. Przykłady portretów na płaszczyźnie fazowej

Przykłady portretów równań pierwszego rzędu można wykonać symulacyjnie, ale bardzo łatwo jest przedstawić funkcję opisującą trajektorie i wskazać charakterystyczne cechy portretu nawet dla modeli nieliniowych.

**Przykład 1:** Nieliniowy model zbiornika, analizowany wcześniej na podstawie odpowiedzi skokowych ( $\rightarrow$  5.3.2). Model ma postać (2-6) (tzn.  $A\dot{h}(t) = f_{we}(t) - A_w\sqrt{2gh(t)}$ ), więc funkcja opisująca trajektorie to:

$$\dot{h} = (f_{we0} - A_w\sqrt{2gh}) / A.$$

Portret ma jeden punkt osobliwy (rozwiązanie statyczne):  $h_0 = f_{we0}^2 / (2gA_w^2)$ , a portret rzeczywistego układu jest ograniczony do zakresu  $h \geq 0$  (rys. 21-13). Portret (a) przedstawia swobodne opróżnianie zbiornika, gdy  $f_{we} = 0$ , a portret (b) wyrównywanie poziomu w zbiorniku gdy  $f_{we} > 0$ .



Rys. 21-13. Szcik portretu nieliniowego zbiornika: a)  $f_{we} = 0$ ; b)  $f_{we} > 0$ ;

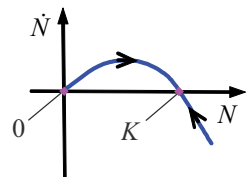
**Przykład 2:** Równanie logistyczne ( $\rightarrow$  2.6.2).

Model (2-80) ( $\dot{N}(t) = rN(t)(1 - N(t)/K)$ ) pozwala wyzna-

czyć funkcję trajektorii:  $\dot{N} = -\frac{r}{K}N^2 + rN$  oraz rozwiąza-

nia statyczne (punkty osobliwe):  $N = 0$  i  $N = K$ . Portret rzeczywistego układu (rys. 21-14) jest ograniczony do zakresu  $N \geq 0$ . Analiza portretu wykazuje, że punkt osobliwy  $N = 0$

jest stanem równowagi nietrwałej, a punkt  $N = K$  jest stanem równowagi trwałej. Układ jest globalnie stabilny – jeśli tylko początkowa liczebność populacji  $N \neq 0$ , to populacja osiąga stan równowagi wypełniając pojemność środowiska ( $K$ ).

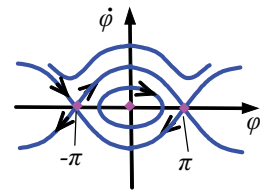


Rys. 21-14. Szcik portretu równania logistycznego

**Przykład 3:** Wahadło matematyczne ( $\rightarrow$  2.4.3)

Model (2-40) można zapisać jako:  $\ddot{\varphi}(t) + a \sin(\varphi(t)) = 0$ .

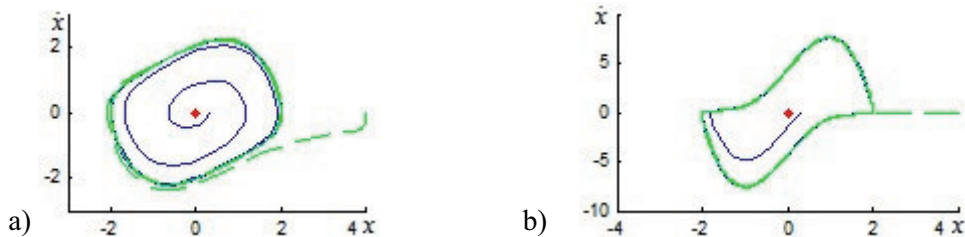
Punkty osobliwe portretu to  $\varphi = 0$  oraz wielokrotności  $\pm\pi$ . Portret układu (rys. 21-15) ilustruje nie tylko charakterystyczne wahania wokół stanu równowagi trwałej ( $\varphi = 0$ ) o amplitudzie zależnej od warunków początkowych, ale także możliwość przejścia ciężarka przez stan równowagi nietrwałej ( $\varphi = \pm\pi$ ).



Rys. 21-15. Szkic portretu wahadła matematycznego

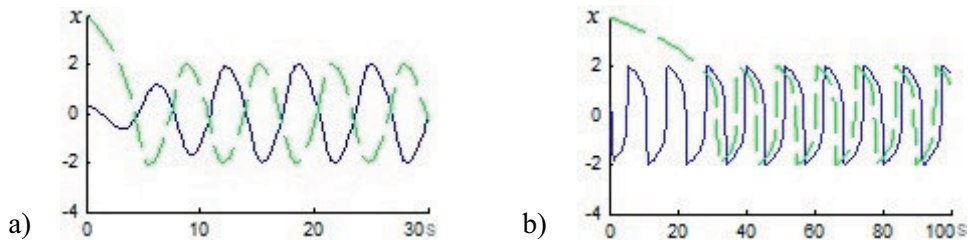
**Przykład 4:** Równanie van der Pola ( $\rightarrow$  2.5.3).

Nieliniowy model (2-69) ma postać:  $\ddot{x}(t) - \mu(1 - x^2(t))\dot{x}(t) + x(t) = 0$ , z której wynika jedno rozwiązanie statyczne (punkt osobliwy):  $x = 0$ . Jeśli tylko układ nie startuje od rozwiązania statycznego (zerowych warunków początkowych), to trajektorie portretu dążą do stabilnego cyklu granicznego, a kształt krzywej granicznej zależy od wartości współczynnika  $\mu$  (rys. 21-16).



Rys. 21-16. Portret fazowy równania van der Pola dla: a)  $\mu = 0.5$ ; b)  $\mu = 5$ .

Punkt osobliwy  $x = 0$  jest stanem równowagi nietrwałej. Dla pozostałych warunków początkowych układ dochodzi i utrzymuje okresowe zmiany wartości (rys. 21-17).



Rys. 21-17. Przebiegi czasowe równania van der Pola dla: a)  $\mu = 0.5$ ; b)  $\mu = 5$ .

Drgania odpowiadające stabilnemu cyklowi granicznemu mają podobny charakter jak niegasnące drgania w równaniu oscylacyjnym (portret typu centrum).

**21.2.5. Przykłady portretów na płaszczyźnie stanów [6]**

Typowe zastosowanie portretów fazowych w badaniach własności dynamiki zilustrują przykłady dla modeli układów biologicznych. W tego typu modelach badanie

reakcji układu wokół punktu równowagi ma niewielkie znaczenia, najważniejsza jest analiza stanów nieustalonych i wpływ warunków początkowych.

**Przykład 1:** Równania Lotki–Volterry (→ 2.6.3)

Model (2-82) ma postać:

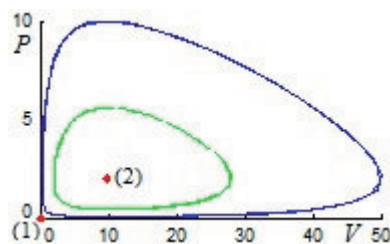
$$\begin{cases} \dot{V}(t) = r_{rV}V(t) - aV(t)P(t) \\ \dot{P}(t) = baV(t)P(t) - r_{sP}P(t) \end{cases},$$

z którego wynikają dwa punkty równowagi:

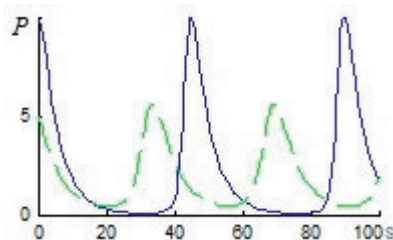
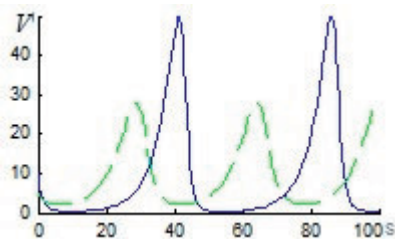
- 1)  $V = 0, P = 0$ ; 2)  $V = r_{sP}/(ab), P = r_{rV}/a$ .

Portret fazowy (rys. 21-19) zawiera trajektorie cykliczne, które mają podobny charakter jak trajektorie na portrecie typu centrum (tabela 21-1)

– obejmują punkt równowagi (2), a układ zlinearyzowany w tym punkcie ma parę biegunów urojonych (→ 21.1.2). W pobliżu punktu (1) natomiast trajektorie mają charakter siodła – układ zlinearyzowany w tym punkcie ma jeden biegun dodatni i jeden ujemny. Trajektorie cykliczne wskazują na występowanie przebiegów okresowych (rys. 21-19), a wielkość, okres i kształt oscylacji zależy od początkowej liczebności populacji  $V$  i  $P$ .



Rys. 21-18. Portret fazowy równań Lotki–Volterry  
( $r_{rV} = r_{sP} = 0.2, a = 0.1, b = 0.2$ )



Rys. 21-19. Przebiegi czasowe równania Lotki–Volterry ( $r_{rV} = r_{sP} = 0.2, a = 0.1, b = 0.2$ )

Model ilustruje zjawisko cykliczności obserwowane w przyrodzie, choć nie uwzględnia wielu ważnych czynników, takich jak ograniczone zasoby środowiska.

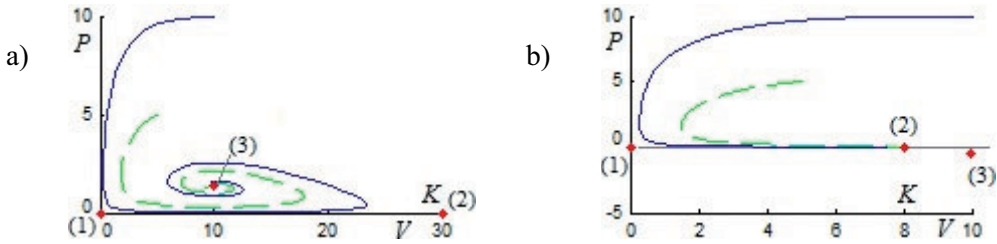
**Przykład 2:** Populacje  $V$  i  $P$  w środowisku o ograniczonej pojemności  $K$ , zgodnie

z (2-83) są opisane przez: 
$$\begin{cases} \dot{V}(t) = r_{rV}V(t)(1 - V(t)/K) - aV(t)P(t) \\ \dot{P}(t) = baV(t)P(t) - r_{sP}P(t) \end{cases},$$
 a równania

statyczne wyznaczają trzy punkty równowagi:

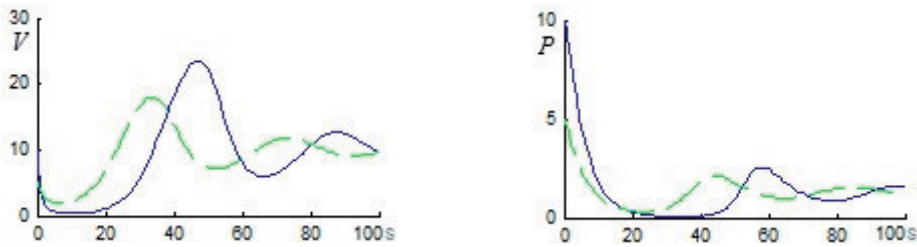
- 1)  $V=0, P=0$ ; 2)  $V=K, P=0$ ; 3)  $V = r_{sP}/(ab), P = r_{rV}/a(1 - r_{sP}/(abK))$ .

Można zlinearyzować model w tych punktach i zbadać lokalną stabilność/niestabilność układu (→ 21.1.2). Portrety fazowe modelu są znacznie pełniejszym opisem ewolucji populacji – pokazują nie tylko wpływ warunków początkowych, ale także znaczący wpływ pojemności środowiska  $K$  (rys. 21-20).



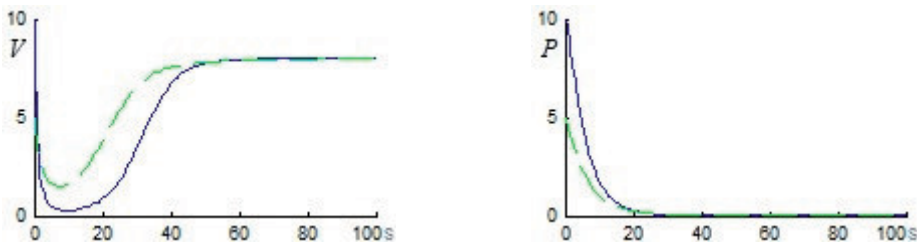
Rys. 21-20. Portret fazowy równań Lotki–Volterry ( $r_{rV}=r_{sP}=0.2$ ,  $a=0.1$ ,  $b=0.2$ ) dla: a)  $K=30$ , b)  $K=8$

Nawet gdy środowisko ma dużą pojemność ( $K=30$ ), to ostatecznie, po początkowych oscylacjach, populacje  $V$  i  $P$  osiągają stan równowagi:  $V = r_{sP}/(ab) < K$ , co można prześledzić dokładnie na wykresach czasowych (rys. 21-21).



Rys. 21-21. Przebiegi czasowe równań Lotki–Volterry ( $r_{rV}=r_{sP}=0.2$ ,  $a=0.1$ ,  $b=0.2$ ), duże  $K$  ( $K=30$ )

Mała pojemność środowiska ( $K=8$ ) natomiast powoduje taki spadek populacji ofiar ( $V$ ), że populacja drapieżników ( $P$ ) nie może się wyżywić i ginie, a wówczas populacja  $V$  osiąga maksymalną wartość określoną przez pojemność  $K$  (rys. 21-22). Warto zwrócić uwagę, że w tym przypadku punkt równowagi (3) wyznaczony przez  $V = r_{sP}/(ab)$  jest nierealny ( $V > K$ ,  $P < 0$ ).



Rys. 21-22. Przebiegi czasowe równań Lotki–Volterry ( $r_{rV}=r_{sP}=0.2$ ,  $a=0.1$ ,  $b=0.2$ ), małe  $K$  ( $K=8$ )

Przedstawione portrety zostały wykonane metodą symulacji – można spodziewać się, że model z ograniczoną pojemnością środowiska jest globalnie stabilny (zmierza do jednego z punktów równowagi). Formalnie badania doświadczalne nie stanowią dowodu stabilności globalnej, potrzebny jest dowód analityczny. Badania, jakie można wykonać dla modeli zlinearyzowanych w punktach równowagi, pozwalają określić tylko stabilność/niestabilność lokalną.

## 22. Podsumowanie i zastosowanie

*czyli popatrzymy teraz na całość*

### 22.1. Podsumowanie metod badania

#### 22.1.1. Wybór modelu, metody badania i programu

Programy symulacyjne oferują różne sposoby definiowania i badania modeli dynamiki układów. W ogólności wybór metody zależy od:

- założonego celu – jak model będzie wykorzystywany, jakie zjawiska i własności będą badane,
- możliwości technicznych – jakie funkcje są dostępne w wybranym (dostępnym) programie symulacyjnym,
- umiejętności badacza – opanowanie różnych metod daje możliwość wybrania metody optymalnej (prostej, szybkiej, uniwersalnej, ...) w danym przypadku.

W szczególności podczas wyboru metody uwzględnia się:

- typ modelu – czy badany model jest liniowy lub może być liniowy,
- formę modelu – czy pierwotny model ma postać równań różniczkowych czy też transmitancji, czy można (warto) przekształcić go na inną formę,
- wybór zmiennych wejściowych – czy można ograniczyć liczbę wejść modelu przyjmując, że niektóre z nich mają stałe wartości (są parametrami modelu),
- sposób prezentacji wyników – charakterystyki czasowe, wskaźniki obliczone na ich podstawie.

#### 22.1.2. Analogie

Porównując modele obiektów różnego typu ( $\rightarrow 2$ ), można zauważyć wiele podobnych wyrażeń, które są podstawą do formułowania analogii. Analogie ułatwiają przenoszenie wiedzy pomiędzy dziedzinami i pokazują znaczenie uniwersalnych metod analizy, opartych na równaniach różniczkowych i transmitancjach. W podręczniku wielokrotnie przywoływane są obiekty nazywane kaskadą współdziałającą i niewspółdziałającą – z jednej strony opisywane są układy fizyczne – hydrauliczne i cieplne ( $\rightarrow 4.5.2, 10.2, 13.1$ ), ale przytaczane są także przykłady analizy oparte na uniwersalnych modelach kaskad ( $\rightarrow 4.4, 10.1, 11.2.2, 13.2.2$ ). Podobnie można wskazać pary przykładów dla układów mechanicznych i elektrycznych ( $\rightarrow 8.3, 10.3, 13.1$ ).

Analogia może, ale nie musi, oznaczać podobieństwa mechanizmów zjawisk, wystarczy podobieństwo opisu. Każda analogia ma swoje ograniczenia – zakres zastosowania – często jest to założenie o liniowości zastosowanego opisu. Można sformułować i stosować różne analogie (tabela 22-1).

Tab.22-1. Przykłady analogii

|               | obiekty<br>cieplne                  | obwody elektryczne                |                             | układy mechaniczne    |                                    | układy hydrauliczne                    |                                   |
|---------------|-------------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------|-----------------------|------------------------------------|----------------------------------------|-----------------------------------|
|               |                                     | zamknięte                         |                             | otwarte               |                                    | zamknięte                              |                                   |
| magazyn       | $\bar{Q} = C_v T$                   | $q = Cu$                          | $u = \frac{1}{C} q$         | $F = cx$              |                                    |                                        | $V = Ah$                          |
|               | $\frac{dQ}{dt} = C_v \frac{dT}{dt}$ | $\frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt}$ |                             |                       |                                    |                                        | $\frac{dV}{dt} = A \frac{dh}{dt}$ |
| sprężystość   | $q = C_v \frac{dT}{dt}$             | $i = C \frac{du}{dt}$             | $u = \frac{1}{C} \int i dt$ | $F = c \int v dt$     | $\Delta p = \frac{K}{V} \int f dt$ | $f = \frac{V}{K} \frac{d\Delta p}{dt}$ |                                   |
| opór (tarcie) | $q = K_e T$                         | $i = \frac{1}{R} u$               | $u = Ri$                    | $F = bv$              | $\Delta p \approx Rf^{(*)1}$       | $f = \frac{1}{R} \Delta p$             | $f \approx ah^{(*)2}$             |
| bezwładność   |                                     | $i = \frac{1}{L} \int u dt$       | $u = L \frac{di}{dt}$       | $F = m \frac{dv}{dt}$ | $\Delta p = m \frac{df}{dt}$       |                                        |                                   |
| źródła        | $q$                                 | $i$                               | $u$                         | $F$                   | $\Delta p$                         | $f$                                    | $f$                               |
| funkcje czasu | $Q(t), I(t)$                        | $q(t), i(t), u(t)$                |                             | $x(t), v(t), F(t)$    | $\Delta p(t), f(t)$                |                                        | $V(t), f(t), h(t)$                |
| bilans        | $\sum q$                            | $\sum i, \sum u$                  |                             | $\sum F$              | $\sum q, \sum f$                   |                                        | $\sum f$                          |

Uwaga: W tabeli pominięto oznaczenie funkcji czasu, na przykład jest  $T$  zamiast  $T(t)$

Analogie dotyczą opisu liniowego, natomiast zależności dokładne to:  $(*)1) \Delta p = Rf^2, (*)2) f = k\sqrt{h}$

Zmienne i jednostki:

- obiekty cieplne:  $Q(t)$  – ciepło [J],  $q(t)$  – moc, strumień ciepła [W],  $T(t)$  – temperatura [K], [°C];
- obwody elektryczne:  $q(t)$  – ładunek elektryczny [C],  $i(t)$  – natężenie prądu [A],  $u(t)$  – napięcie, różnica potencjałów [V];
- układy mechaniczne:  $x(t)$  – przesunięcie [m],  $v(t)$  – prędkość [m/s],  $F(t)$  – siła [N];
- układy hydrauliczne:  $V(t)$  – objętość [m<sup>3</sup>],  $f(t)$  – przepływ, strumień [m<sup>3</sup>/s],  $\Delta p(t)$  – ciśnienie [Pa=N/m<sup>2</sup>].

Jak można zauważyć na podstawie tabeli, najbardziej podobne są do siebie opisy układów elektrycznych i mechanicznych – spadki napięć odpowiadają siłom, a ładunki – przesunięciom. Poza tym w obu układach występują elementy gromadzące energię (kondensator, sprężyna) i rozpraszające energię (rezystor, tłumik) oraz elementy bezwładnościowe przeciwdziałające zmianom (cewka, masa). To, co wyróżnia elementy elektryczne, to duży zakres liniowości opisu w porównaniu do elementów mechanicznych. Analogie elektryczno-mechaniczną można rozszerzyć o układy hydrauliczne (pneumatyczne) zamknięte, czyli układy, w których przepływ medium wymuszony przez różnicę ciśnień pod warunkiem, że przyjmuje się uproszczony, liniowy opis spadku ciśnienia. Przepływające medium wykazuje pewną masę i jest ściśliwe – przy przepływie cieczy uwzględnia się jej masę i zwykle pomija ściśliwość, natomiast przy przepływie gazu należy uwzględnić ściśliwość, a masę można pominąć (nie dotyczy modeli, które opisują termodynamiczne przemiany gazu).

Drugą parę bardzo podobnych opisów stanowią modele obiektów cieplnych i układów hydraulicznych otwartych (zbiorniki) – magazynom ciepła odpowiada wypełnienie zbiorników, a strumieniom ciepła (mocy) – przepływy medium. W obu przypadkach bilansuje się zawartość pewnego rodzaju magazynów (ciepła, objętości), a ich stan charakteryzują zmienne stanu (temperatura, wysokość). W porównaniu do układów mechanicznych i elektrycznych nie występuje tu odpowiednik zjawiska bezwładności. W obiektach cieplnych można za to wskazać charakterystyczne elementy opóźniające, wynikające z zastosowania przepływającego medium jako nośnika ciepła.

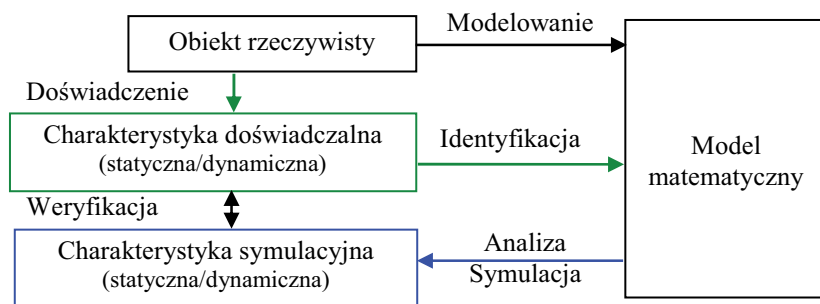
Analogie mogą być wykorzystane w konstrukcji modeli dla zupełnie różnych obszarów wiedzy. Na przykład model van der Pola jest stosowany jako element do konstrukcji modelu opisującego rytm serca, a podstawą są przede wszystkim analogiczne przebiegi, jakie można uzyskać, badając model i rzeczywiste serce (w tym wypadku można też wskazać fizjologiczne podstawy zastosowania modelu van der Pola).

## **22.2. Inżynierski aspekt badań, czyli zasady realizacji**

### **22.2.1. Cel badań doświadczalnych**

W podręczniku położono nacisk na badania doświadczalne prowadzone metodą symulacji, a otrzymywane wykresy statyczne i dynamiczne (czasowe, częstotliwościowe) służyły do graficznej prezentacji własności badanych modeli. Jednak wszystkie zasady poprawnego wykonania tych badań obowiązują również w badaniach doświadczalnych na rzeczywistych obiektach.

Badania doświadczalne łączy też forma wyników – bezpośrednim efektem badań są zazwyczaj charakterystyki (rys. 22-1).



Rys. 22-1. Konstrukcja i weryfikacja modelu

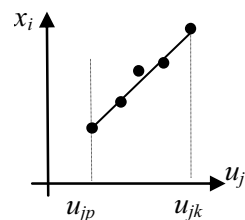
Charakterystyki wynikające z doświadczeń na obiekcie (charakterystyki doświadczalne) mogą być podstawą do identyfikacji modelu, który będzie wykorzystany w symulacjach. Z kolei porównanie zgodności charakterystyk otrzymanych na podstawie modelu i charakterystyk doświadczalnych można wykorzystać do weryfikacji poprawności i oceny dokładności zidentyfikowanego modelu. Prowadzenie badań doświadczalnych na rzeczywistych obiektach często jest bardzo utrudnione i kosztowne, a bywa, że nawet niemożliwe czy to ze względów technicznych (urządzenia potrzebne do realizacji eksperymentu), czy technologicznych (zakłócenie procesu). Załóżmy jednak, że wszystkie problemy ograniczają się do zapewnienia podstawowych warunków wykonania eksperymentu, możliwości wygenerowania odpowiednich sygnałów wymuszających oraz dokładności pomiaru. W kolejnych punktach omówimy warunki poprawnego zdejmowania charakterystyk doświadczalnych.

### 22.2.2. Charakterystyki statyczne

Doświadczalne wyznaczanie charakterystyki statycznej  $x_i(u_j)$  polega na wymuszaniu i rejestrowaniu wartości w wybranych punktach równowagi. W czasie gdy obiekt nie podlega zakłóceniom (zmienne wejściowe mają stałe wartości), na obiekt podawany jest wybrany sygnał wejściowy  $u_j$  o określonej wartości, a po osiągnięciu stanu równowagi przez układ mierzona jest wartość zmiennej wyjściowej  $x_i$ . Powtórzenie tych operacji dla wystarczającego zbioru wartości  $u_j$  pozwala narysować charakterystykę  $x_i(u_j)$  w badanym zakresie.

W rzeczywistych warunkach wartości zmiennych wyjściowych są mierzone zawsze z pewną dokładnością, a poza tym praktycznie nie ma takich okresów, w których wszystkie zmienne wejściowe utrzymywały stałe wartości, dlatego wyznaczenie charakterystyki statycznej na podstawie punktów pomiarowych wymaga aproksymacji (rys. 22-2). Liniowość wykresu  $x_i(u_j)$  oznacza liniową zależność jedynie między zmienną  $x_i$  i  $u_j$  w stanie równowagi w badanym zakresie zmian  $u_{jp} \div u_{jk}$ .

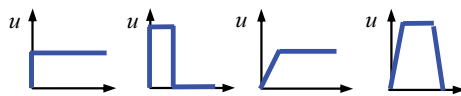
Inne zależności i opis dynamiki układu mogą być nieliniowe ( $\rightarrow$  3.1).

Rys. 22-2. Aproksymacja charakterystyki statycznej  $x_i(u_j)$

Porównanie charakterystyk statycznych wyznaczonych na podstawie modelu i charakterystyk wyznaczonych doświadczalnie jest jednym z elementów weryfikacji poprawności modelu dynamiki (choćby jedynie w zakresie własności statycznych). Weryfikacja występuje także w odwrotnym kierunku – ogólna wiedza na temat zjawisk na obiekcie pozwala przewidzieć charakter zależności między zmienną wejściową i wyjściową (np. liniowy), co ułatwia zdejmowanie charakterystyk na obiekcie.

### 22.2.3. Odpowiedzi czasowe

Najprostsze i najczęściej wykonywane badania dynamiki polegają na rejestracji reakcji układu na skokową zmianę wymuszenia na jednym z wejść, które wystąpiło, gdy układ znajdował się w stanie równowagi. Dotyczy to badań analitycznych ( $\rightarrow$  4.2), symulacyjnych ( $\rightarrow$  5.2) i doświadczeń na fizycznych układach. Stosowane są szczególnie w obszarze automatyki jako przygotowanie do projektowania układów sterowania danym obiektem (procesem). Zdarza się jednak, że na rzeczywistym obiekcie nie można wykonać długotrwałej zmiany wartości sygnału wejściowego (np. z powodu ograniczeń technologicznych) – wówczas alternatywą może być wygenerowanie wymuszenia impulsowego i analiza reakcji na to wymuszenie. Można też odtworzyć reakcję na wymuszenie skokowe na podstawie związku między odpowiedzią impulsową  $g(t)$  i skokową  $h(t)$ :  $g(t) = \dot{h}(t)$ . W rzeczywistych warunkach problemem jest również wygenerowanie idealnego wymuszenia skokowego czy impulsowego – stosowane są zazwyczaj sygnały przybliżone (rys. 22-3). Aby zminimalizować wpływ tego przybliżenia, zmiany wartości powinny następować jak najszybciej, a wymuszenie impulsowe dodatkowo po winno mieć krótki czas trwania i jednostkowe pole impulsu. Poza tym wartości sygnałów muszą być dostosowane do zakresu zmiennej wejściowej, więc bardzo rzadko jest to skok jednostkowy. W praktyce inżynierskiej doświadczenia wykonuje się w dogodnym punkcie pracy a zmiany wartości wejściowej dobiera się tak, aby wywoływały zauważalne reakcje (np. zmiana o  $5 \div 10\%$  zakresu pomiarowego). Jeśli badany układ jest liniowy, to wybór punktu pracy i wielkości zakłócenia nie mają wpływu na parametry opisujące własności dynamiczne, ponieważ wykresy można skalować i przesuwac ( $\rightarrow$  4.2.2). W układach nieliniowych badania wykonuje się w różnych punktach pracy i przy niewielkich zmianach wartości (na przykład  $1 \div 5\%$  zakresu).

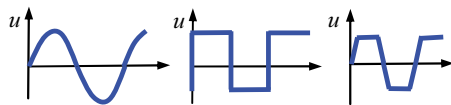


Rys. 22-3. Przykłady sygnałów wymuszających dla odpowiedzi czasowej

### 22.2.4. Odpowiedzi częstotliwościowe

Wykonanie charakterystyki częstotliwościowej wymaga generowania sinusoidalnych sygnałów wymuszających o różnych pulsacjach  $U_m \sin(\omega t)$  i rejestrowania sinusoidalnego sygnału wyjściowego w stanie ustalonym  $X_m \sin(\omega t + \varphi)$ . Techniczne sposoby generowania sygnałów sinusoidalnych są bardzo proste w obwodach elektrycznych

(generator napięcia), dość proste w układach mechanicznych (generator siły), ale na innych obiektach może być to bardzo trudne lub niemożliwe (np. gdy sygnałem jest temperatura, strumień ciepła, przepływ cieczy). Rozwiązaniem może być wówczas zamienne użycie innych sygnałów okresowych (rys. 22-4) i zinterpretowanie sygnału wyjściowego jako przybliżenia sygnału sinusoidalnego (przybliżenie za pomocą pierwszej harmonicznej). Podobną interpretację odpowiedzi częstotliwościowej stosuje się również w przypadku układów nieliniowych.



Rys. 22-4. Przykłady sygnałów wymuszających dla odpowiedzi częstotliwościowej

Jeśli na wejście układu nieliniowego zostanie podany sygnał  $U_m \sin(\omega t)$ , to na wyjściu w stanie ustalonym wystąpi „zniekształcony sinus”, który będzie interpretowany jako przybliżenie sygnału sinusoidalnego (tzw. linearyzacja harmoniczna).

Zdejmowanie charakterystyk częstotliwościowych na rzeczywistym obiekcie jest pracochłonne – wymaga całej serii eksperymentów ( $\rightarrow$  15). Programy symulacyjne generują charakterystyki na podstawie wzorów (bez udziału algorytmów całkowania numerycznego).

## 22.3. Stabilność

### 22.3.1. Wprowadzenie

W ramach podsumowania badań dynamiki przedstawionych podręczniku omówimy możliwość uogólnienia pojęcia stabilności układu, które jest podstawową cechą opisu własności dynamiki. Formalne definicje stabilności stosują z konieczności różne założenia, które umożliwiają wykonanie badań analitycznych, na przykład odwołują się do pojęcia punktu równowagi ( $x_e$ ) i zakładają (czasem milcząco), że w chwili początkowej układ znajduje się poza punktem równowagi lub został z niego wytrącony. Punkt (stan) równowagi jest szczególnym przypadkiem stanu ustalonego, wyznaczonym dla stałych wartości sygnałów wejściowych, ale tylko takie warunki można przedstawić na portretach fazowych. Proste definicje mają zwykle charakter intuicyjny, np. układ stabilny bez wymuszenia samoistnie dąży do stanu równowagi lub układ stabilny po wyprowadzeniu go ze stanu równowagi układ wraca do tego stanu. Takie sformułowanie jest obrazowe, ale:

- nie jest precyzyjne – tylko chwilowe wyprowadzenie ze stanu równowagi, czyli sygnał typu impuls powoduje powrót do tego samego stanu, ale wyprowadzenie ze stanu równowagi, na przykład przez sygnał o skokowej zmianie wartości, powoduje przejście do nowego stanu równowagi,
- nie jest ogólne – trzeba rozróżnić stan równowagi w potocznym rozumieniu i w sensie wynikającym z matematycznej interpretacji rozwiązań.

W podejściu inżynierskim, opartym na interpretacji wykresów czasowych (szczególnie w analizie obwodów elektrycznych), zamiast pojęcia stanu równowagi stosuje się określenie stan ustalony – na przykład stan ustalony w obwodzie prądu stałego to stałe

wartości prądów i napięć, a w obwodzie prądu zmiennego to funkcje okresowe o ustalonej częstotliwości. Przejście od jednego stanu ustalonego do innego stanu ustalonego nazywa się stanem przejściowym (nieustalonym). Pojęcie stanu równowagi i stanu ustalonego zazwyczaj można uznać za równoważne (stąd podwójne nazwy składowych rozwiązania liniowego równania różniczkowego  $\rightarrow$  1.4), ale stanem ustalonym można też nazwać niegasnące oscylacje członu oscylacyjnego z zerowym tłumieniem czy cykle graniczne równań van der Pola i Lotki–Volterry.

Różne definicje stabilności nie są sobie równoważne:

- stabilność asymptotyczna oznacza, że rozwiązanie  $x(t)$  dąży do stanu równowagi ( $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_e$ ) – można uznać, że praktycznie osiąga ono stan równowagi,
- stabilność w sensie Lapunowa oznacza, że rozwiązanie  $x(t)$ , które rozpoczyna się dostatecznie blisko stanu równowagi, pozostanie na zawsze dostatecznie blisko tego stanu,
- stabilność BIBO oznacza ograniczone rozwiązanie  $x(t)$  przy ograniczonym wymuszeniu  $u(t)$  – system stabilny w sensie BIBO nie musi być stabilny w sensie Lapunowa.

Ze względu na wszystkie szczególne przypadki układów można mówić o:

- stabilności poszczególnych rozwiązań równania różniczkowego,
- stabilności punktu równowagi (stanu równowagi),
- stabilności danego układu.

W podręczniku pojęcie stabilności dotyczy układów opisywanych za pomocą równań różniczkowych, które zawsze można sprowadzić do układu równań różniczkowych liniowych lub nieliniowych:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}). \quad (22-1)$$

Złożoność problemu w przypadkach nieliniowych powoduje, że wyróżnia się:

- **stabilność wewnętrzną** (stabilność ze względu na warunki początkowe) – dotyczy układu jednorodnego (zerowe wejścia  $u$ , układ w stanie swobodnym),
- **stabilność zewnętrzną** (stabilność ze względu na wymuszenia, ang. Input-to-state stability, **ISS**) – dotyczy układu z zewnętrznymi wejściami (układ poddany działaniom zewnętrznym, układ ze sterowaniem).

W dalszych rozważaniach skupimy się głównie na stabilności wewnętrznej i przyjmiemy nieco uproszczony zapis układu równań:

$$\dot{x} = f(x), \quad (22-2)$$

gdzie  $x$  i  $f$  to zmienne i funkcje wektorowe:  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ . Układ ten jest analizowany od pewnej chwili początkowej ( $t > t_0$ ), a warunki początkowe ( $x_0$ ) są różne od stanu równowagi ( $x_e$ ). Niekiedy zakłada się, że  $x_e = 0$ , ale układ (22-2) może mieć stan równowagi  $x_e \neq 0$ . Założenie  $x_e = 0$  może uprościć przekształcenia, ale nie jest konieczne w definicji stabilności. Definicje stabilności i kryteria badania stabilności są dość proste dla układów liniowych ( $\rightarrow$  22.3.2), ale ich uogólnienie wymaga uwzględnienia zjawisk, jakie mogą wystąpić w układach nieliniowych ( $\rightarrow$  22.3.3).

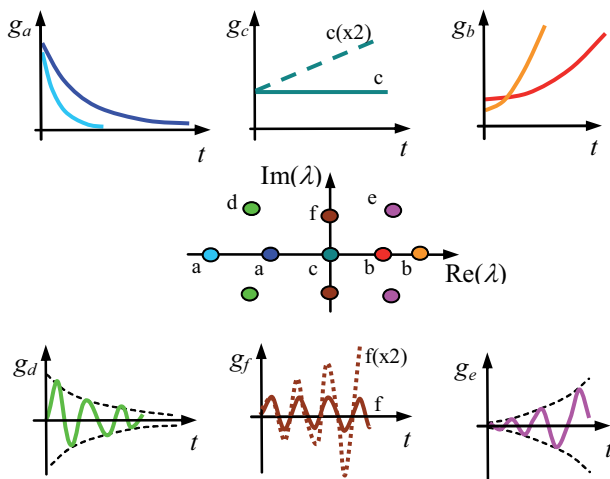
### 22.3.2. Układ liniowy – bieguny, odpowiedź impulsowa i portret fazowy

Jeśli równania (22-1) są liniowe, to odpowiedź układu składa się z części swobodnej i wymuszonej:  $x(t) = x_s(t) + x_w(t)$ . W badaniach dynamiki ( $\rightarrow$  1.4) układ jest uznawany za stabilny, gdy składowa swobodna  $x_s(t)$  z czasem zanika praktycznie do zera. To znaczy, że stabilność zależy jedynie od rozwiązania równań jednorodnych czyli stabilność wewnętrzna implikuje stabilność zewnętrzną. Stan ustalony układu liniowego oznacza składową wymuszoną (ustaloną)  $x_w(t)$ , która zależy od funkcji podawanej na wejście, na przykład:

- przy wymuszeniu typu stała wartość (także zerowa, czyli brak wymuszenia), wymuszenie skokowe lub impulsowe stanem ustalonym jest punkt równowagi ( $x_w = \text{const}$ ), czyli określone, stałe wartości poszczególnych współrzędnych  $x_1, \dots, x_n$  ( $\rightarrow$  4.2) – mówimy też o punkcie/stanie równowagi statycznej, ponieważ wartości współrzędnych są wyznaczane z modelu statycznego,
- przy wymuszeniu sinusoidalnym stanem ustalonym jest odpowiedź częstotliwościowa, czyli przebieg sinusoidalny przeskalowany i przesunięty w fazie ( $\rightarrow$  14.1), wyznaczany na podstawie modelu dynamiki,
- ogólniej przy wymuszeniu okresowym stanem ustalonym jest funkcja okresowa o takiej samej częstotliwości jak wymuszenie.

Taka interpretacja stabilności oznacza stabilność asymptotyczną – rozwiązanie  $x(t)$  dąży do stanu ustalonego właściwego dla danego wymuszenia. W układach liniowych stabilność ma charakter globalny – jeśli układ jest stabilny, to jest stabilny dla każdych warunków początkowych i dla każdego ograniczonego wymuszenia ( $\rightarrow$  6.2.2, 18.2.1) – stabilny układ ma stabilny punkt równowagi i każde rozwiązanie jest stabilne.

Liniowość układu sprawia, że można ją badać na podstawie biegunów układu – pierwiastków równania charakterystycznego (rys. 22-5).



Podstawowe przypadki położenia biegunów na płaszczyźnie zespolonej:

- biegun rzeczywisty  $\lambda = \alpha < 0$
- biegun rzeczywisty  $\lambda = \alpha > 0$
- biegun rzeczywisty  $\lambda = \alpha = 0$  (pojedynczy i podwójny)
- para zespolona  $\lambda = \alpha \pm j\omega_r, \alpha < 0$
- para zespolona  $\lambda = \alpha \pm j\omega_r, \alpha > 0$
- para zespolona  $\lambda = \alpha \pm j\omega_r, \alpha = 0$  (para pojedyncza i podwójna)

Rys. 22-5. Odpowiedź impulsowa a położenie bieguna

Precyzyjne określenie własności układu wymaga uwzględnienia położenia i krotności biegunów (tabela 22-1).

Tabela 22-1 Położenie biegunów a odpowiedzi skokowe  $h(t)$  i impulsowe  $g(t)$

| Położenie i krotność biegunów               |                                                          | $h(t) = x_s(t) + x_w(t)$                                                                        | $g(t) = x_s(t) + x_w(t)$                                                                   |
|---------------------------------------------|----------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------|
| pojedynczy<br>biegun<br>rzeczywisty         | $\lambda < 0$ (człon inercyjny)                          | $A \cdot e^{\lambda t} + x_{w0}$                                                                | $B \cdot e^{\lambda t} + 0$                                                                |
|                                             | $\lambda > 0$ (układ niestabilny)                        |                                                                                                 |                                                                                            |
|                                             | $\lambda = 0$ (człon całkujący)                          | $0 + k_i t$                                                                                     | $0 + k_i$                                                                                  |
| podwójny<br>biegun rze-<br>czywisty         | $\lambda < 0$ (człon inercyjny rzędu 2)                  | $A_1 \cdot e^{\lambda t} + A_2 \cdot t e^{\lambda t} + x_{w0}$                                  | $B_1 \cdot e^{\lambda t} + B_2 \cdot t e^{\lambda t} + 0$                                  |
|                                             | $\lambda > 0$ (układ niestabilny)                        |                                                                                                 |                                                                                            |
|                                             | $\lambda = 0$ (człon całkujący rzędu 2)                  | $A_1 + A_2 t + k_i t^2$                                                                         | $B_1 + B_2 t$                                                                              |
| para<br>zespolona<br>$\alpha \pm j\omega_r$ | $\alpha < 0$ (człon oscylacyjny<br>tłumiony)             | $A \cdot e^{\alpha t} \sin(\omega_r t + \varphi) + x_{w0}$                                      | $B \cdot e^{\alpha t} \sin(\omega_r t + \varphi_1)$                                        |
|                                             | $\alpha > 0$ (człon oscylacyjny<br>niestabilny)          |                                                                                                 |                                                                                            |
|                                             | $\alpha = 0$ (człon oscylacyjny<br>nietłumiony)          | $A \cdot \sin(\omega_r t + \varphi) + x_{w0}$                                                   | $B \cdot \sin(\omega_r t + \varphi_1)$                                                     |
| podwójna<br>para zespo-<br>lona             | $\alpha = 0$ (podwójny człon oscylacyjny<br>nietłumiony) | $A_1 \cdot \sin(\omega_r t + \varphi) +$<br>$+ B_2 \cdot t \sin(\omega_r t + \varphi) + x_{w0}$ | $B_1 \cdot \sin(\omega_r t + \varphi_1) +$<br>$+ B_2 \cdot t \sin(\omega_r t + \varphi_1)$ |

Bieguny w lewej półpłaszczyźnie ( $\alpha < 0$ ) zapewniają asymptotyczną stabilność układu (składowa swobodna zanika z czasem do zera niezależnie od krotności bieguna). Bieguny w prawej półpłaszczyźnie ( $\alpha > 0$ ) zawsze powodują niestabilność. Bieguny na osi urojonej to przypadki graniczne:

1° człon całkujący ( $\lambda = 0$ ) – stabilność rozwiązania zależy od wymuszenia:

- odpowiedź impulsowa ma stałą wartość – punkt równowagi  $x_w = 0$ , ale  $g(t) = x_s(t) = \text{const} \neq 0$ , więc rozwiązanie  $g(t)$  jest ograniczone,
- odpowiedź skokowa zwiększa się z czasem – układ nie ma punktu równowagi, reakcja jest nieograniczona, więc rozwiązanie jest niestabilne, chociaż składowa  $x_s(t) = 0$ ;

2° człon oscylacyjny nietłumiony ( $\lambda = \pm j\omega_r$ ) – rozwiązanie  $g(t)$  i  $h(t)$  oscyluje wokół punktu równowagi, jest ograniczone,

3° podwójny człon całkujący ( $\lambda_{1,2} = 0$ ) – zarówno rozwiązanie  $g(t)$ , jak i  $h(t)$  są niestabilne,

4° podwójny człon oscylacyjny nietłumiony ( $\lambda_{1,2} = \pm j\omega_r$ ) – rozwiązania  $g(t)$  i  $h(t)$  są niestabilne.

Rozwiązania dla przypadków granicznych o pojedynczych biegunach mogą być stabilne, ale nie asymptotycznie – dla członu całkującego stabilna jest tylko odpowiedź impulsowa (1°a), natomiast rozwiązania dla członu oscylacyjnego nietłumionego zawsze są stabilne (2°).

Warto zwrócić uwagę na praktyczną interpretację przebiegów dla stabilnych przypadków granicznych ( $1^\circ$ a,  $2^\circ$ ). Obserwując te przebiegi, można uznać, że osiągają one stan ustalony (wartość lub oscylacje nie zmieniają się), ale nie jest to stan równowagi związany ze składową wymuszoną  $x_w$  – w tych szczególnych przypadkach pojęcia stanu równowagi i stanu ustalonego nie są równoważne.

Powyższa analiza pokazuje, w jaki sposób przypadki graniczne (bieguny na osi  $\text{Im}$ ) komplikują ocenę stabilności układu. **Ogólne kryteria stabilności liniowego układu** dowolnego rzędu można sformułować w następujący sposób:

- jeśli wszystkie bieguny układu leżą w lewej półpłaszczyźnie (niezależnie od krotności), to układ jest stabilny asymptotycznie,
- jeśli choć jeden biegun leży w prawej półpłaszczyźnie, to układ jest niestabilny,
- jeśli układ posiada wielokrotne bieguny na osi  $\text{Im}$ , to jest niestabilny,
- jeśli układ ma wszystkie bieguny w lewej półpłaszczyźnie i tylko jednokrotny biegun lub jednokrotną zespoloną parę biegunów na osi  $\text{Im}$ , to jest to układ na granicy stabilności, a wówczas:
  - układ jednorodny (stabilność wewnętrzna) stabilny, ale nie asymptotycznie,
  - stabilność układu z wymuszeniem (stabilność zewnętrzna) zależy od wymuszenia:
    - jednokrotny biegun –  $h(t)$  niestabilne,  $g(t)$  stabilne, ale nie asymptotycznie,
    - para zespolona –  $h(t)$  i  $g(t)$  stabilne, ale nie asymptotycznie.

Układy na granicy stabilności to szczególne przypadki obiektów, które można łatwo rozpoznać i wykonać szczegółową analizę, na przykład:

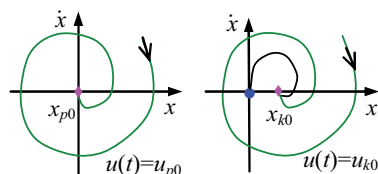
- w układach typu kaskada z pompą wystąpią własności całkujące ( $\rightarrow$  10.2.1),
- z kolei nietłumiony człon oscylacyjny wymaga specjalnych zabiegów konstrukcyjnych i praktycznie zawsze jest idealizacją rzeczywistego układu ( $\rightarrow$  16.7.2).

Uzupełnieniem opisu stabilności układów liniowych pierwszego i drugiego rzędu jest interpretacja portretów fazowych. Dla układów liniowych można określić wszystkie typy portretów i ich związek z biegunami układu (tabela 21-1). Punkt równowagi jest punktem osobliwym portretu. Trajektorie na portrecie układu stabilnego (stabilny węzeł/ognisko) zbliżają się do punktu równowagi (występuje zbieżność wszystkich stanów do punktu równowagi), a na portrecie układu niestabilnego (niestabilny węzeł/ognisko, siodło) trajektorie oddalają się od punktu równowagi. Przypadek graniczny (ognisko) dotyczy pary biegunów na osi  $\text{Im}$  – trajektoria zmian stanu układu zależy od warunków początkowych.

Portrety fazowe są wyznaczane przy stałej wartości wszystkich zmiennych wejściowych  $u(t)$ , ale można go wykorzystać nie tylko do analizowania ewolucji stanu od wybranych warunków początkowych.

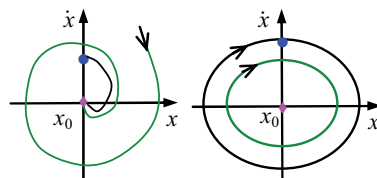
**Przykład 1:** Reakcja na skokową zmianę  $u(t)$ .

Portrety układu dla  $u(t) = u_{p0}$  i dla  $u(t) = u_{k0}$  różnią się położeniem punktu osobliwego ( $\blacklozenge$ ), np. rys. 22-6. Reakcja układu na skokową zmianę wartości od  $u_{p0}$  do  $u_{k0}$  odpowiada ewolucji stanu, którą można obserwować na portrecie dla  $u(t) = u_{k0}$ , gdy warunkiem początkowym ( $\bullet$ ) jest punkt  $x_{p0}$ .



Rys. 22-6. Ewolucja stanu przy stałym wymuszeniu i po skokowej zmianie  $u(t)$

**Przykład 2:** Reakcja układu po impulsowym zakłóceniu  $u(t)$ . Ponieważ zmienna wejściowa  $u(t)$  przed i po zakłóceniu impulsowym ma te same wartości, to portret układu się nie zmienia (rys. 22-7 – dwa przykłady portretów). Idealny impuls powoduje wytrącenie układu ze stanu równowagi – tak jakby „przeskoczenie” stanu do innego punktu na płaszczyźnie ( $\bullet$ ) i ewolucję stanu według trajektorii, która przechodzi przez ten punkt. Jeśli impuls pojawi się w trakcie stanu nieustalonego, to spowoduje zmianę trajektorii po której układ ewoluje do (lub od) punktu równowagi. Zmiana trajektorii na portrecie typu centrum oznacza trwałą zmianę parametrów oscylacji (amplitudy).



Rys. 22-7. Ewolucja stanu dwóch układów po impulsowym zakłóceniu  $u(t)$

### 22.3.3. Ogólne definicje stabilności [10, 11]

Jeśli równania (22-2) są nieliniowe, to dobrą ilustracją zagadnień związanych ze stabilnością układu są portrety fazowe pomimo ograniczeń, które trzeba przyjąć podczas analizy – maksymalnie drugi rząd układu i stałe wymuszenia (zazwyczaj zerowe). Analizując przykładowe portrety fazowe ( $\rightarrow$  21.2), można zaobserwować różne typy stanów układu, które można uznać za stan ustalony:

- punkt/punkty równowagi – wynikają z rozwiązania równania statycznego, a ich liczba może zależeć nie tylko od rodzaju funkcji, ale też od wartości wymuszeń (np. liczba rozwiązań równania  $x^2 + 1 = u$  zależy od wartości  $u$ );
- przebiegi okresowe – szczególne rozwiązania równania różniczkowego, które na portretach fazowych mają postać trajektorii zamkniętych, np. centrum (tabela 21-1, rys. 21-15, rys. 21-18), cykl graniczny (rys. 21-16).

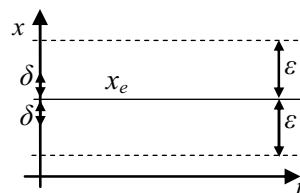
Stany równowagi wynikające z rozwiązania modelu statycznego są punktami osobliwymi portretów fazowych (nie należą do żadnej trajektorii). Przytoczone poniżej definicje stabilności są formułowane w odniesieniu do stanu równowagi  $x_e$ , (reprezentowanego na rysunkach przez punkt), ale można je zinterpretować także w odniesieniu do trajektorii zamkniętych typu cykl graniczny.

Dane rozwiązanie  $x(t)$  jest stabilne, jeśli z upływem czasu (dla  $t \rightarrow \infty$ ) znajdzie się i pozostanie w ograniczonym otoczeniu stanu równowagi. Jeśli rozwiązanie  $x(t)$  dąży do stanu równowagi, to jest stabilne asymptotycznie. W układach nieliniowych stabilność może mieć charakter lokalny (czy i do którego stanu równowagi rozwiązanie dą-

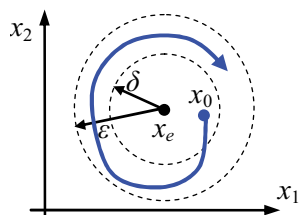
ży zależy od warunków początkowych), dlatego formalne definicje stabilności są związane z określonym stanem równowagi  $x_e$  i jego otoczeniem (rys. 22-8). Stan równowagi  $x_e$  jest **stabilny**, jeśli każde rozwiązanie  $x(t)$ , które startuje „dostatecznie blisko” tego stanu, na zawsze pozostaje „dostatecznie blisko”. Jeśli każde rozwiązanie  $x(t)$  nie tylko pozostaje „dostatecznie blisko”, ale dąży do tego stanu równowagi, to oznacza **stabilność asymptotyczną**.

Tę opisową definicję stabilności można dokładniej przedstawić na płaszczyźnie stanów i sformułować w następujący sposób:

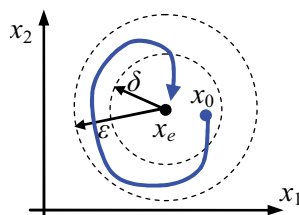
- **Stan równowagi  $x_e$  jest stabilny**, jeśli każda trajektoria, rozpoczynająca się punkcie  $x_0$  leżącym wewnątrz otoczenia o promieniu  $\delta$ , pozostanie wewnątrz otoczenia o promieniu  $\varepsilon$  dla dowolnej chwili  $t > 0$  (rys. 22-9).
- Jeśli dodatkowo każda taka trajektoria dąży do stanu  $x_e$ , to **stan  $x_e$  jest stabilny asymptotycznie** (rys. 22-10).



Rys. 22-8. Stan równowagi i jego otoczenie



Rys. 22-9. Stabilność



Rys. 22-10. Stabilność asymptotyczna

Formalną postać powyższej definicji stabilności, która obejmuje układy dowolnego rzędu, można sformułować w następujący sposób:

- Stan równowagi  $x_e$  równania (22-2) jest **stabilny w sensie Lapunowa**, jeśli dla każdego  $\varepsilon > 0$  istnieje takie  $\delta > 0$ , że każde rozwiązanie  $x(t)$  równania (22-2) o warunkach początkowych spełniających nierówność  $\|x(t_0) - x_e\| < \delta$ , spełnia także nierówność  $\|x(t) - x_e\| < \varepsilon$  dla każdego  $t \geq t_0$ .
- Stan równowagi  $x_e$  jest **stabilny asymptotycznie**, jeśli jest stabilny w sensie Lapunowa i dodatkowo spełnia nierówność  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x_e\| = 0$ .

Wszystkie przytoczone definicje dotyczą badania stabilności wybranego stanu równowagi  $x_e$ , czyli określają tylko lokalną stabilność/niestabilność układu w pewnym obszarze wokół stanu równowagi, a układy (22-2) mogą mieć wiele punktów równowagi. W rozdziale 21.1 opisano pośrednią metodę badania stabilności poszczególnych punktów równowagi układu na podstawie zlinearyzowanych modeli (**pierwszą metodę Lapunowa**). Najbardziej ogólną metodę określania stabilności punktu równowagi układów dowolnego rzędu (liniowych i nieliniowych, stacjonarnych i niestacjonarnych, ciągłych i dyskretnych) jest **druga metoda Lapunowa**, nazywana też kryte-

rium stabilności Lapunowa lub metodą bezpośrednią. Metoda polega na próbach skonstruowania dowolnej funkcji  $V(x)$  (nazywanej funkcją Lapunowa), która spełniałaby następujące warunki:

- 1°  $V(x) = 0$  wtedy i tylko wtedy gdy  $x = x_e$ ,
- 2°  $V(x) > 0$  dla każdego  $x \neq x_e$  (tzn. dla każdej trajektorii – każdego stanu poza  $x_e$ ),
- 3°  $\dot{V}(x) \leq 0$  (stabilność) lub  $\dot{V}(x) < 0$  (stabilność asymptotyczna) dla każdego  $x \neq x_e$ .

Jeśli układ posiada taką funkcję  $V(x)$ , to jest odpowiednio stabilny lub stabilny asymptotycznie. Metoda nie wymaga rozwiązywania równań stanu, a jej związek z równaniami stanu wynika z interpretacji pochodnej funkcji Lapunowa:

$$\dot{V}(x) = \frac{d}{dt}V(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x) = \nabla V \cdot f(x) \leq 0. \quad (22-3)$$

**Przykład:** Układ oscylacyjny, na przykład mechaniczny

$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + cx(t) = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Zmienne stanu:  $x_1(t) = x(t)$  przemieszczenie masy, prędkość masy  $x_2(t) = \dot{x}(t)$ .

Punkt równowagi ( $x_e$ ):  $x_{10} = 0$ ,  $x_{20} = 0$ .

Przykład konstrukcji funkcji  $V(x)$  jako całkowitej energii układu:

$$E(x_1, x_2) = \frac{1}{2} cx_1^2 + \frac{1}{2} mx_2^2,$$

gdzie poszczególne zmienne stanu są związane z energią układu:

- $x_1$  – energia potencjalna zgromadzona w sprężynie:  $cx_1^2 / 2$ ,
- $x_2$  – energia kinetyczna poruszającej się sprężyny:  $mx_2^2 / 2$ .

Własności funkcji  $E$ :

- 1°  $E(x_{10}, x_{20}) = 0$  – w punkcie równowagi  $x_e$  energia jest zerowa,
- 2°  $E(x_1, x_2) > 0$  – całkowita energia (poza punktem równowagi) jest dodatnia,
- 3° Obliczenie pochodnej funkcji  $E(x_1, x_2)$ :

$$\dot{E}(x_1, x_2) = \frac{d}{dt}E(x_1(t), x_2(t)) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} cx_1^2(t) + \frac{1}{2} mx_2^2(t) \right) = cx_1(t)\dot{x}_1(t) + mx_2(t)\dot{x}_2(t).$$

Podstawiając pochodne zmiennych stanu z równań stanu, otrzymujemy:

$$\dot{E}(x_1, x_2) = cx_1(t)(x_2(t)) + mx_2(t) \left( -\frac{c}{m} x_1(t) - \frac{b}{m} x_2(t) \right) = -bx_2^2(t)$$

- a) dla  $b = 0$  jest  $\dot{E}(x_1, x_2) = 0 \rightarrow$  punkt  $x_e$  stabilny

(całkowita energia jest stała wzdłuż dowolnej trajektorii),

- b) dla  $b > 0$  jest  $\dot{E}(x_1, x_2) = -bx_2^2(t) < 0 \rightarrow$  punkt  $x_e$  stabilny asymptotycznie.

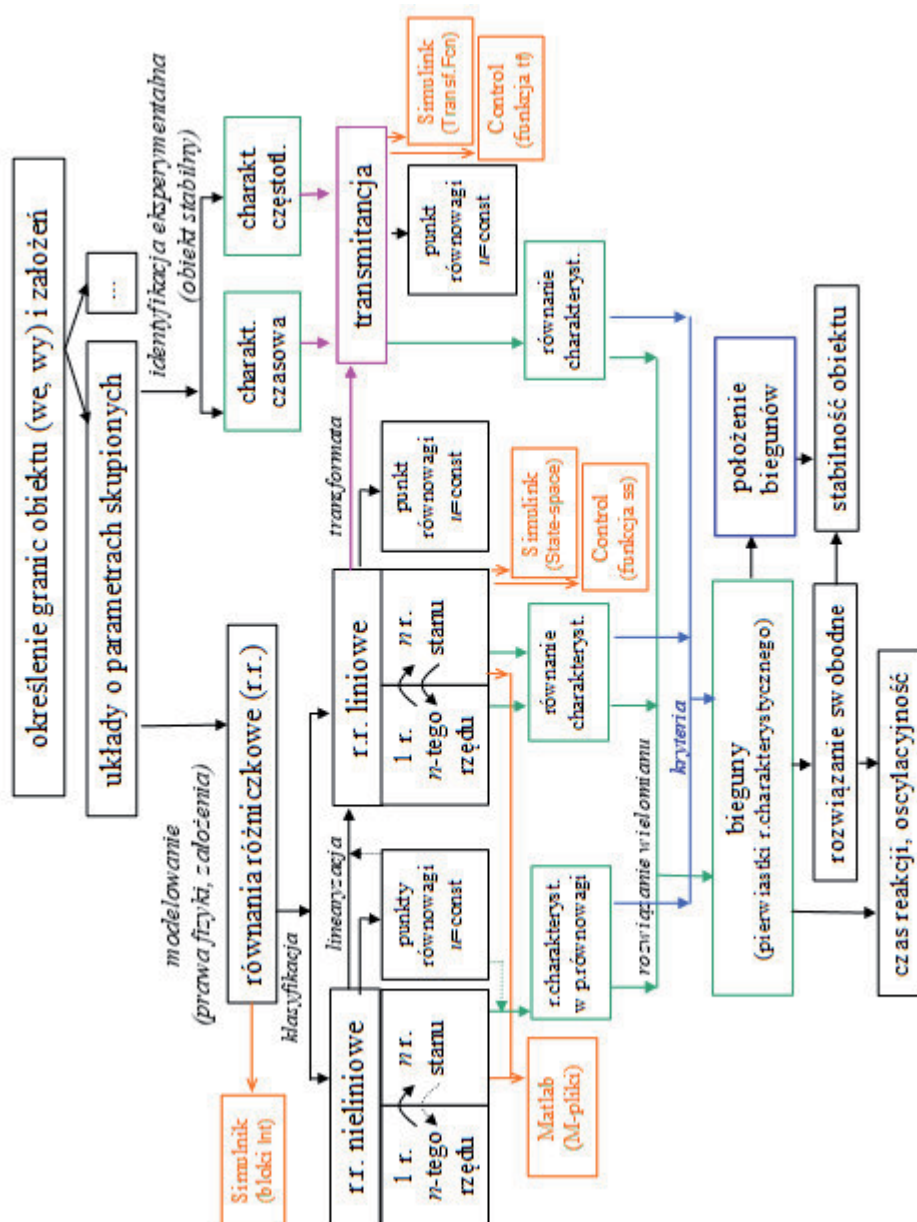
Interpretacja: a) człon oscylacyjny nietłumiony; b) człon oscylacyjny tłumiony.

Przykład ilustruje możliwość wykorzystania energii całkowitej układu jako funkcji Lapunowa, ale w wielu nieliniowych modelach nie ma odpowiednika takiej wielkości. Znalezienie funkcji  $V(x)$  jest podstawowym problemem w zastosowaniu metody –

pomaga doświadczenie, intuicja i przegląd literatury. Rozszerzenie idei funkcji Lapunowa jest wykorzystywane w badaniu stabilności zewnętrznej (ISS), czyli nieliniowych układów sterowania z zewnętrznymi wejściami.

## **22.4. Ciąg dalszy nastąpi?**

Modele przedstawiane i analizowane w podręczniku dotyczą tylko wybranych obiektów/procesów elektrycznych, mechanicznych, hydraulicznych, cieplnych, biologicznych. Są to proste modele deterministycznych zjawisk, które można konstruować i badać na różne sposoby (rys. 22-11). Wzajemne relacje między różnymi metodami umożliwiają z jednej strony wybór metody badawczej, a z drugiej obserwację obiektu z różnych perspektyw. Schemat nie zawiera wszystkich możliwych przekształceń, a jedynie te najczęściej wykorzystywane w obszarze automatyki, w szczególności dotyczące wyznaczenia transmitancji i badania stabilności obiektu. Ciąg dalszy to zaproszenie Czytelnika do podjęcia własnych badań interesujących obiektów, procesów czy zjawisk, oraz poszerzanie wiedzy.



Rys.22.11. Wybrane metody konstrukcji i badania modelu dynamiki

## Literatura

Metodologia badań własności układów dynamicznych jest obszarem, na którym spotka się wiele dziedzin, ze względu na stosowane narzędzia (analityczne i symulacyjne) i ze względu na wykorzystanie w odniesieniu do różnorodnych obiektów/procesów. Każda z tych dziedzin jest tak obszerna, że rozwija się już w pewien sposób niezależnie i dysponuje własną bardzo rozległą literaturą. Jest także wiele opracowań dostępnych w Internecie – ich liczba szybko rośnie i są łatwo dostępne (ze wszystkim konsekwencjami tej formy publikacji).

Kilka wybranych tytułów, które przytaczam poniżej, to pozycje wykorzystywane bezpośrednio podczas pisania podręcznika („ulubione” tytuły autora), gdzie można znaleźć rozwinięcie poszczególnych zagadnień.

### Wybrane publikacje:

1. Amborski K., Marusak A., *Teoria sterowania w ćwiczeniach*, WNT, Warszawa 1978.
2. Close C.C., Frederick D.K., Newell J.C., *Modeling and analysis of dynamic systems*, John Wiley & Sons, 2002.
3. Czemplik A., *Modele dynamiki układów fizycznych*, WNT, Warszawa 2008.
4. Czemplik A., *Scilab i Matlab podstawowe zastosowania inżynierskie*, Politechnika Wrocławska 2012, [www.dbc.wroc.pl](http://www.dbc.wroc.pl)
5. Findeisen W., *Technika regulacji automatycznej*, PWN, Warszawa 1978.
6. Foryś U., *Matematyka w biologii*, WNT, Warszawa 2005.
7. Franklin G.F. i in., *Feedback control of dynamic systems*, Pearson, 2010.
8. Greblicki W., *Podstawy automatyki*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2006.
9. Kaczorek T., *Teoria układów regulacji automatycznej*, WNT, Warszawa 1974.
10. Kaczorek T., Dzieliński A., Dąbrowski W., Łopatka., *Podstawy teorii sterowania*, WNT, Warszawa 2005.
11. Kurman K.J., *Teoria regulacji*, WNT, Warszawa 1975.
12. Morrison F., *Sztuka modelowania układów dynamicznych*, WNT, Warszawa 1996.
13. Osowski S., *Modelowanie i symulacja układów i procesów dynamicznych*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2007.
14. Żuchowski A., *Uproszczone modele dynamiki*. Wydawnictwo Uczelniane Politechniki Szczecińskiej, Szczecin 1998.
15. *Dokumentacja Matlab*, <https://www.mathworks.com>
16. *Dokumentacja Scilab*, <https://www.scilab.org>
17. *Dokumentacja Octave*, <https://www.gnu.org/software/octave>
18. *Matematyka, Fizyka, Chemia*, <https://epodreczniki.open.agh.edu.pl>
19. *Preliminary*, [anna.czemplik.staff.iiar.pwr.wroc.pl](http://anna.czemplik.staff.iiar.pwr.wroc.pl) (strona internetowa autora, zawierająca m.in. materiały dydaktyczne, zbiory zadań)

Publikacje z lat siedemdziesiątych można zastąpić nowszymi opracowaniami, ale podane powyżej pozycje to klasyka dziedziny. Nowsze publikacje poszczególnych autorów są udostępniane stopniowo także w postaci ogólnie dostępnych e-podręczników.

## Skorowidz

### Biegun

- definicja 72,133,159
- lokalizacja 79,81
- znaczenie 79,108
- kompensacja 233

### Bodego wykres 190

#### Charakterystyka

- czasowa 13,292
- statyczna 13,59,102,253,291
- częstotliwościowa
  - asymptotyczna 231
  - Nyquista 189
  - Bodego 190,234,292

#### Czas

- całkowania 201
- opóźnień 218
- różniczkowania 208
- ustalania 105,122

#### Drgania

- własne 107,214
- wymuszone 214

#### Ewolucja stanu 74

#### Hipoteza skracalności 244

#### Identyfikacja 11,64,235,252

#### Jacobiego macierz 272

#### Kaskada 28,62,147,171

#### Lapunowa metoda 273,294,299

#### Linearyzacja

- statyczna 61,253
- dynamiczna 260

#### Nyquista wykres 189

#### Metoda rozwiązywania

- równań różniczkowych
  - klasyczna 18,72
  - operatorowa 181
  - wartości własnych 132
  - symboliczna 185
- równań statycznych 16

#### Model

- dynamiki 13, 26
- konwersja 84,136,152,170
- liniowy 14,131,241,279
- obiekt podstawowy 200
- statyczny 13,26,58

#### Modelowanie 11,251

### Obiekt (model, równanie)

- całkujący 201
- forsujący 211
- inercyjny 90,204
- minimalnofazowy 226
- opóźniający 218
- oscylacyjny 116,212
  - komplementarny 118
- proporcjonalny 200
- przesuwnik fazy 225,246
- różniczkujący 208,210
- samowyrównywanie 208
- unilateralny 147

### Odpowiedź

- skokowa 74,110,121,134
  - na skok 74
- impulsowa 75,111,134
- częstotliwościowa 183

### Oscylacyjność

- definicja 106
- stopień oscylacyjności 107

### Pade aproksymacja 244,246

### Pasmo przenoszenia 190,206

### Portret fazowy 275

### Pulsacja

- drgań własnych 116,123
- rezonansowa 216

### Punkt

- pracy 60,74
- równowagi 59,73,160,273
- osobliwy 277

### Przebieg

- aperiodyczny 78, 105
- oscylacyjny 78

### Przeregulowanie 105,122

### Rezonans 216

### Rozwiązanie

- ogólne 21,73,134
- statyczne 58
- swobodne 19,72,77,104,132
- szczególne 21,73,134
- wymuszone 20,73,184

### Równanie

- charakterystyczne 19,72,132
- logistyczne 53,284

- Lotki–Volterry 53,274,286
- liniowe stacjonarne 18
- operatorowe 159
- stanu 130
- van der Pola 48,98,285

### Skalowanie 76,111,248

### Stabilność

- asymptotyczna 104,273,299
- BIBO 105,202,294
- globalna 103,242,280
- kryteria 15,104,294
- Lapunowa 273,294,299
- lokalna 103,272
- rozwiązanie 21
- stopień stabilności 108
- układ 103

### Stan

- przejściowy 104,294
- ustalony 102,293

### Stała czasowa 111,204

### Symulacja

- funkcje 142,169,194
- schematy 89,140,167

### Tłumienie 116

### Transmitancja

- argument 188
- bieguny i zera 159,232
- definicja 159,162
- moduł 188
- rozkład na iloczyn 228
- rozkład na ułamki 229
- widmowa 188

### Upraszczenie

- formy 244
- modelu 81,109,180,251,266

### Wzmocnienie

- układu 73,103,115,160,185

### Zasada

- superpozycji 14

### Zmienna

- fazowe 138,276
- stanu 26,130
- wejściowa 11,26
- wyjściowa 11,26,130





Dynamika układów jest pojęciem stosowanym w odniesieniu do różnorodnych obiektów i procesów, takich jak układy elektryczne, mechaniczne, cieplne, hydrauliczne, biologiczne, chemiczne i in. Na czym polega dynamika układu i czym jest spowodowana? Jak skonstruować jej matematyczny model? Po co i jak badać modele dynamiki? Co i jak można policzyć, a jak należy przeprowadzić badania symulacyjne?

Odpowiedzi udzielane przez autorkę są ukierunkowane na fizyczną interpretację i praktyczne zastosowanie opisywanych modeli i metod. Celem jest przygotowanie czytelnika do precyzyjnego stosowania pojęć i poprawnego wykonywania badań doświadczalnych i analitycznych, czyli kształtowanie podstawowych umiejętności inżynierskich, które można następnie rozwijać z wykorzystaniem opracowań o charakterze teoretycznym. Podręcznik jest w związku z tym adresowany głównie do studentów kierunków inżynierskich, związanych z automatyką i mechatroniką, ale także do szerokiego grona osób zainteresowanych konstrukcją modeli dynamiki różnych obiektów i procesów oraz prowadzeniem podstawowych badań analitycznych i symulacyjnych.



Oficyna Wydawnicza  
Politechniki Wrocławskiej  
Wybrzeże Wyspiańskiego 27  
50-370 Wrocław  
ISBN 978-83-7493-171-7

