

Jerzy Stelmach

WYZNACZANIE OCZEKIWANEJ REALNEJ STOPY PROCENTOWEJ W POLSCE Z WYKORZYSTANIEM MODELU PRZESTRZENI STANÓW*

1. Wstęp

Podstawowym elementem polityki pieniężno-kredytowej w gospodarce rynkowej jest stopa procentowa stosowana w transakcjach finansowych. Przy podejmowaniu decyzji ekonomicznych szczególnie istotną rolę odgrywa realna stopa procentowa. W odróżnieniu od nominalnej stopy procentowej jest ona korygowana o oczekiwane zmiany poziomu cen, dzięki czemu dokładniej odzwierciedla rzeczywisty koszt kredytu.

W procesie wykorzystywania realnych stóp procentowych w prowadzonych analizach ekonomicznych warto rozważyć kwestię związaną z ich prawidłowym pomiarem. Najczęściej realną stopę procentową oblicza się, odejmując bieżącą stopę inflacji obserwowaną na rynku od nominalnej stopy procentowej. Jednak taki pomiar *ex post* nie stanowi dokładnej miary właściwej realnej stopy procentowej, którą powinny brać pod uwagę podmioty gospodarcze, podejmując decyzje dotyczące konsumpcji i inwestycji.

Realne stopy procentowe stanowią miarę oczekiwanych, realnych zwrotów z inwestycji w określonym przedziale czasu. W przypadku konsumpcji i inwestycji istotne są pomiary *ex ante* realnych stóp procentowych lub inaczej¹ – oczekiwanych realnych stóp procentowych, tzn. różnic pomiędzy rynkowymi stopami procentowymi oraz oczekiwanymi zmianami poziomu inflacji w okresie inwestycji. Oczywiście jest, że w dowolnym czasie w danym kraju oczekiwania dotyczące przyszłej inflacji w okresach dłuższych niż kilka miesięcy mogą różnić się znacznie od aktualnego poziomu inflacji. A zatem problem pomiaru realnych stóp pro-

* Praca została przygotowana w ramach grantu promotorskiego nr 1H02B/027/30, finansowanego przez Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego.

¹ W polskiej literaturze przedmiotu te dwa określenia są stosowane zamiennie. Zob. np. [1; 15; 17].

centowych *ex ante* polega na tym, że zarówno oczekiwania inflacyjne, jak i same realne stopy procentowe *ex ante* są nieobserwowalne. W teorii ekonomii opracowano wiele miar i sposobów² formułowania oczekiwań inflacyjnych, lecz według najlepszej wiedzy autora istnieją tylko nieliczne próby oszacowania wartości oczekiwanych realnych stóp procentowych. Wśród tych prób należy wymienić prace [6; 19], w których w tym celu wykorzystano wektorowe modele autoregresyjne oraz pracę [5] wykorzystującą metodologię przełącznikowych modeli Markowa.

Klasą modeli, które w sposób naturalny uwzględniają zjawisko nieobserwowalności, są modele przestrzeni stanów. Biorąc to pod uwagę, za cel artykułu przyjęto próbę estymacji oczekiwanej realnej stopy procentowej w Polsce za pomocą modelu przestrzeni stanów, a także wykorzystanie otrzymanych wartości realnej stopy procentowej do weryfikacji prawdziwości hipotezy Fishera, polegającej na odzwierciedlaniu przez zmiany nominalnych stóp procentowych fluktuacji oczekiwanego poziomu inflacji.

2. Model teoretyczny

Zgodnie z twierdzeniem wybitnego monetarysty XX w. – Irvinga Fishera, na poziom nominalnej stopy procentowej składają się realna stopa procentowa oraz stopa inflacji. Stopa nominalna jest wielkością pewną, ustaloną przez zawierających transakcję, stopa realna zaś jest wielkością oczekiwaną i może być ustalona dopiero wówczas, kiedy będzie znana stopa inflacji. Dlatego też, rozpatrując powyższą zależność w ujęciu *ex ante*, Fisher³ operuje pojęciem oczekiwanej stopy inflacji. Równanie Fishera (1) wyraża matematyczny związek między nominalną i realną stopą procentową oraz stopą inflacji:

$$1 + i_t = (1 + r_t)(1 + \pi_t^e), \quad (1)$$

gdzie: i_t – nominalna stopa procentowa,
 r_t – oczekiwana realna stopa procentowa,
 π_t^e – oczekiwana stopa inflacji.

Po prostym przekształceniu równania (1), ze względu na bardzo małą wartość w warunkach niskiej inflacji, iloczyn $r_t \pi_t^e$ nie odgrywa żadnej roli i zazwyczaj jest pomijany w obliczeniach. Równanie Fishera upraszcza się zatem do następującej postaci:

$$i_t = r_t + \pi_t^e + r_t \pi_t^e,$$

² Zwięzły przegląd zawiera m.in. praca [17].

³ Zob. np. [4].

$$i_t = r_t + \pi_t^e. \quad (2)$$

Na podstawie swego równania Fisher sformułował hipotezę głoszącą, że nominalna stopa procentowa rośnie dokładnie o oczekiwaną stopę inflacji lub spada o oczekiwaną stopę deflacji. Ten prosty związek 1:1 między nominalną stopą procentową a oczekiwaną stopą inflacji zakładał, że realna stopa procentowa jest względnie stała w czasie. Fisher przyjął również, że inflacja jest w pełni przewidywalna i nie wpływa na realną stopę procentową [17]. Jeśli tylko oczekiwania inflacyjne są prawidłowo mierzone, to wzrost oczekiwanej stopy inflacji π_t^e jest w pełni odzwierciedlony we wzroście nominalnej stopy procentowej i_t .

Założenie o stałości realnej stopy procentowej *ex ante* stanowi podstawę częstej krytyki teorii Fishera. Jest tak, ponieważ niespełnienie tego założenia nie pozwala ocenić, w jakim stopniu zmienność nominalnych stóp procentowych spowodowana jest zmianami oczekiwań inflacyjnych, w jakim zaś stopniu wynika ze zmian realnych stóp procentowych. Dlatego też w niniejszym artykule nie zakłada się spełnienia tego założenia. Wymagane jest jedynie, aby realna stopa procentowa charakteryzowała się stacjonarnością.

W celu identyfikacji nieobserwowalnych wartości r_t najpierw należy zdefiniować błąd losowy obciążający prognozy oczekiwań inflacyjnych⁴:

$$w_t = \pi_t^e - \pi_t, \quad (3)$$

gdzie: π_t – rzeczywisty poziom inflacji w momencie t .

W myśl teorii racjonalnych oczekiwań zakłada się, że w_t jest procesem zintegrowanym w stopniu zerowym, czyli $w_t \sim I(0)$. Podstawiając wartość π_t^e uzyskaną z (3) do równania (2), otrzymujemy:

$$i_t - \pi_t = r_t + w_t. \quad (4)$$

Równanie (4) przedstawia realną stopę procentową *ex post* ($i_t - \pi_t$) jako sumę realnej stopy procentowej *ex ante* i błędu prognozy inflacji w_t . Zostanie ono wykorzystane w dalszej części artykułu.

3. Specyfikacja modelu przestrzeni stanów

W niniejszym artykule model teoretyczny (równanie (4)) zostanie zapisany w notacji przestrzeni stanów, dlatego poniżej zwięźle przedstawiono ideę modeli przestrzeni stanów⁵.

⁴ Wykorzystano tu zmodyfikowane podejście zaprezentowane w pracy [3].

⁵ Zaprezentowany tu opis oparty na pracy [16].

Dynamiczny liniowy gaussowski model przestrzeni stanów w swojej postaci podstawowej składa się z dwóch następujących równań:

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{H}\mathbf{z}_t + \mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{w}_t, \quad (5)$$

$$\mathbf{z}_t = \mathbf{F}\mathbf{z}_{t-1} + \mathbf{v}_t, \quad (6)$$

gdzie: $\mathbf{z}_t$ – r -wymiarowy wektor nieobserwowalnych stanów,

$\mathbf{y}_t$ – n -wymiarowy wektor obserwacji,

$\mathbf{x}_t$ – k -wymiarowy wektor nielosowych zmiennych egzogenicznych,

$\mathbf{F}$ – macierz stanów o wymiarach $(r \times r)$,

$\mathbf{H}$ – macierz wyjścia o wymiarach $(n \times r)$,

$\mathbf{A}$ – macierz wejścia w równaniach obserwacji o wymiarach $(n \times k)$,

$\mathbf{w}_t$ – n -wymiarowy wektor błędów pomiaru, $\mathbf{w}_t \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{R})$,

$\mathbf{v}_t$ – r -wymiarowy wektor zakłóceń, $\mathbf{v}_t \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{Q})$,

$E(\mathbf{w}_t, \mathbf{v}_s) = \mathbf{0}$, dla każdego t i s ,

$t, s = 1, 2, \dots, T$.

Postać przestrzeni stanów zawsze wymaga zapisu w postaci dwóch równań macierzowych, dlatego też (5) jest równaniem obserwacji, równanie (6) zaś nosi nazwę równania stanu. Z postaci tych równań wynika, że proces stanów $\mathbf{z}_t$ ma własność Markowa, a obserwacje (sygnały) $\mathbf{y}_t$ są warunkowo niezależne przy danym $\mathbf{x}_t$. Estymacja modelu przestrzeni stanów jest rozumiana jako znalezienie najlepszego, w sensie błędu średniokwadratowego, wektora ocen zmiennych stanu $\mathbf{z}_t$, przy danym wektorze $\mathbf{y}_t$ oraz założeniu niezależności $\mathbf{w}_t$ i $\mathbf{v}_t$. Narzędziem estymacji jest filtr Kalmana⁶, wykorzystanie którego odbywa się na ogół w trzech formach: predykcji, filtracji oraz wygładzania. Wszystkie pojęcia oznaczają estymację $\mathbf{z}_t$ na podstawie różnych zbiorów informacji. Filtr Kalmana jest również podstawą wyznaczania parametrów ujętych w macierzach $\mathbf{A}$, $\mathbf{F}$, i $\mathbf{H}$ w metodzie największej wiarygodności.

Podsumowując, procedurę estymacji zastosowaną w artykule można podzielić na trzy etapy:

- 1) ustalenie wartości startowych algorytmu,
- 2) zastosowanie filtru Kalmana i otrzymanie ocen zmiennej stanu,
- 3) maksymalizacja wartości odpowiedniej funkcji wiarygodności dla danego wektora stanu i otrzymanie ocen parametrów modelu,

Ze względu na ograniczoną objętość i odmienny cel danej publikacji powstrzymano się od prezentacji odpowiedniego aparatu formalnomatematycznego, którego szczegółowe omówienie można znaleźć m. in. w pracach [2; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 16].

Ponownie odwołując się do równania Fishera (2) i definiując r_t jako:

⁶ Filtr Kalmana jest to rekurencyjna, algorytmiczna metoda estymacji nieobserwowalnych zmiennych stanu oraz parametrów w modelach opisanych w formie równań stanu.

$$r_t = i_t - \pi_t^e - \mu, \quad (7)$$

gdzie μ oznacza średni poziom oczekiwanej realnej stopy procentowej, równanie (4) można sprowadzić do postaci:

$$i_t - \pi_t = \mu + (i_t - \pi_t^e - \mu) + (\pi_t^e - \pi_t) = \mu + r_t + w_t, \quad (8)$$

gdzie: $i_t - \pi_t$ – realna stopa procentowa *ex post*,

w_t – składnik losowy, $w_t \sim N(0, \sigma_w)$.

Ponadto zakłada się, że dynamika r_t zostanie opisana za pomocą procesu AR(1):

$$r_t = \varphi r_{t-1} + v_t, \quad (9)$$

gdzie: v_t – składnik losowy, $v_t \sim N(0, \sigma_v)$,

φ – parametr autoregresji, $|\varphi| < 1$.

Przyjmując we wzorach (5) i (6), że $r = n = 1$, $F = \varphi$, $y_t = i_t - \pi_t$, $Ax_t = \mu$, $H = 1$ oraz $z_t = r_t$, łatwo jest zauważyć, że równania (8) i (9) tworzą liniowy model przestrzeni stanów, w którym rolę równania obserwacji odgrywa (8), a rolę równania stanu – (9). Ostatecznie można zapisać:

$$y_t = \mu + r_t + w_t, \quad (10)$$

$$r_t = \varphi r_{t-1} + v_t. \quad (11)$$

Równania (10) i (11) będą głównym przedmiotem analizy i estymacji w części empirycznej artykułu.

4. Wyniki empiryczne

Wartości liczbowe realnej stopy procentowej *ex post* oznaczonej wyżej jako y_t stanowią jedyne dane wejściowe niezbędne do oszacowania parametrów rozważanego modelu. Zostały one wyliczone zgodnie z następującą formułą:

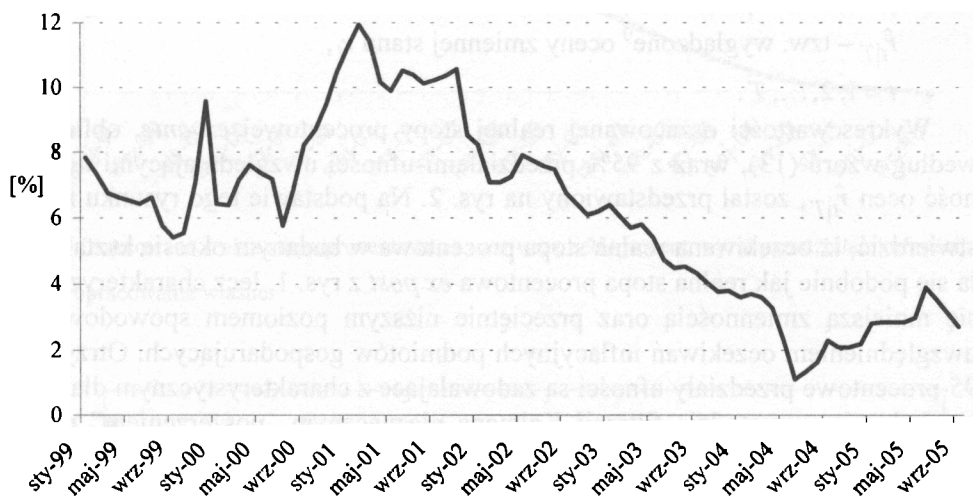
$$y_t = 100 \cdot \frac{1 + i_t}{1 + \pi_t}, \quad (12)$$

gdzie: i_t – średniomiesięczna stopa procentowa na rynku międzybankowym⁷ (WIBOR1M),

π_t – wskaźnik cen towarów i usług konsumpcyjnych (analogiczny miesiąc poprzedniego roku = 100).

⁷ Stopy procentowe na międzybankowym rynku pieniężnym uznaje się powszechnie za rynkowe ceny pieniądza (zob. np. [17, s. 25]).

Wykorzystane informacje są danymi miesięcznymi z okresu od stycznia 1999 r. do września 2005 r., a więc liczba obserwacji wyniosła 81. Kształtowanie się y_t w badanym okresie (zob. rys. 1) jest zgodne ze zmianami, które w tym czasie zachodziły w gospodarce polskiej. Standardowo wykorzystywane testy na obecność pierwiastka jednostkowego (ADF, KPSS) wykazały niestacjonarność y_t , pomimo to nie użyto żadnej procedury transformacji wartości y_t , ponieważ modele przestrzeni stanów pozwalają na wykorzystywanie szeregów niestacjonarnych, a także utracona zostałaby możliwość wartościowej interpretacji ekonomicznej.



Rys. 1. Realna stopa procentowa *ex post*

Źródło: opracowanie własne.

Oceny parametrów modelu przestrzeni stanów (równania (10) i (11)) wraz z odpowiednimi błędami szacunku, otrzymane⁸ metodą największej wiarygodności, przedstawione zostały w tab. 1.

Oceny błędów standardowych są względnie niskie (oprócz błędu dla parametru σ_w), co sugeruje wysoką precyzję oszacowań parametrów.

Tabela 1. Oceny parametrów modelu (10)-(11)

Parametr	μ	φ	σ_w	σ_v
Ocena parametru	5,8275	0,9623	0,0002	0,7381
Błąd standardowy	1,7125	0,0264	0,1466	0,0581

Źródło: opracowanie własne.

⁸ Do przeprowadzenia obliczeń wykorzystano program komputerowy autorstwa J. Hamiltona dostępny w Internecie pod adresem: <http://weber.ucsd.edu/~jhamilto/software.htm>.

Oszacowania zmiennej stanu r_t zgodnie z definicją (7) można interpretować jako odchylenia nieobserwowalnej realnej stopy procentowej od jej wartości średniej μ . Dlatego też w celu obliczenia wartości realnej stopy procentowej *ex ante* należy skorzystać z następującej zależności:

$$i_t - \hat{\pi}_t^e = \hat{\mu} + \hat{r}_{t|T}, \quad (13)$$

gdzie: $i_t - \hat{\pi}_t^e$ – oszacowanie realnej stopy procentowej *ex ante*,

$\hat{\pi}_t^e$ – oszacowanie oczekiwanej stopy inflacji,

$\hat{\mu}$ – ocena parametru μ ,

$\hat{r}_{t|T}$ – tzw. wygładzone⁹ oceny zmiennej stanu r_t ,

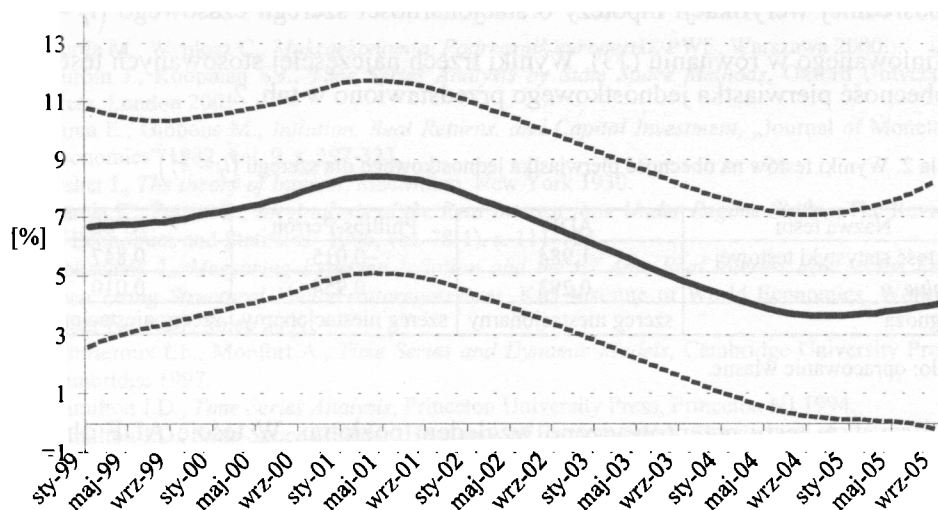
$t = 1, 2, \dots, T$.

Wykres wartości oszacowanej realnej stopy procentowej *ex ante*, obliczonej według wzoru (13), wraz z 95% przedziałami ufności uwzględniającymi niepewność ocen $\hat{r}_{t|T}$, został przedstawiony na rys. 2. Na podstawie tego rysunku można stwierdzić, iż oczekiwana realna stopa procentowa w badanym okresie kształtowała się podobnie jak realna stopa procentowa *ex post* z rys. 1, lecz charakteryzowała się mniejszą zmiennością oraz przeciętnie niższym poziomem spowodowanym uwzględnieniem oczekiwań inflacyjnych podmiotów gospodarujących. Otrzymane 95-procentowe przedziały ufności są zadowalające z charakterystycznym dla etapu wygładzania w metodzie filtracji Kalmana nieznacznym „poszerzeniem” na początku i końcu próby¹⁰, spowodowanym widocznym na rys. 3 zwiększeniem wartości błędu średniokwadratowego dla obserwacji znajdujących się blisko początku i końca próby.

Po obliczeniu i analizie jakości otrzymanych ocen realnej stopy procentowej *ex ante* można przystąpić do realizacji drugiego celu sformułowanego we wstępie artykułu, polegającego na weryfikacji hipotezy Fishera, opisanej w punkcie 2. Aby wykazać prawdziwość hipotezy, należy zweryfikować, czy oczekiwana realna stopa procentowa jest procesem stacjonarnym. W literaturze ekonomicznej (np. prace [6; 17; 19]), ze względu na nieobserwowalność realnej stopy procentowej *ex ante*, proponuje się pewne ominięcie tego problemu, polegające na analizie zależności kointegracyjnej między nominalną stopą procentową i_t a zrealizowaną stopą inflacji π_t : jeśli oba szeregi i_t oraz π_t są zintegrowane stopnia $I(1)$, ale skointegrowane stopnia $CI[1, 1]$, to realna stopa procentowa *ex ante* jest procesem stacjonarnym $I(0)$. Zaletą podejścia prezentowanego w artykule jest możliwość

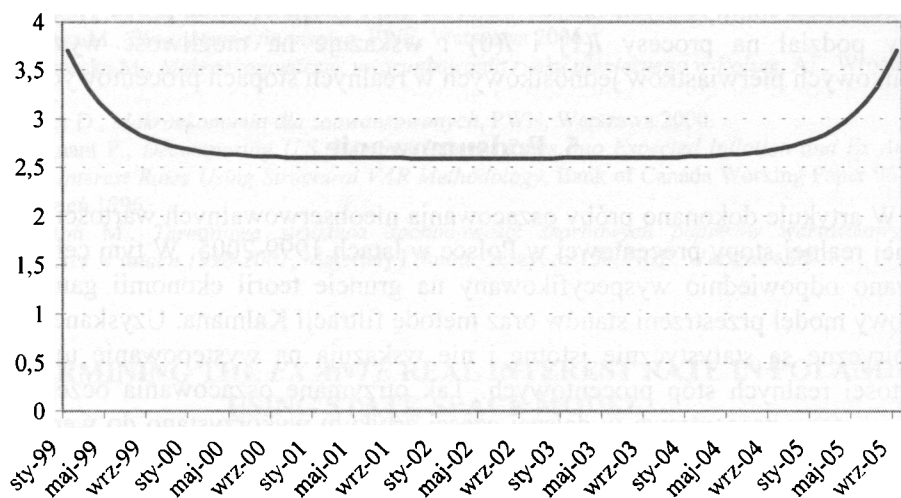
⁹ Wygładzanie jest to wyznaczanie warunkowych ocen wektora stanu w filtrze Kalmana, gdy znany jest pełny zbiór obserwacji.

¹⁰ Zob. np. [10].



Rys. 2. Oszacowana realna stopa procentowa *ex ante* wraz z 95-procentowymi przedziałami ufności

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 3. Wartości błędów średniokwadratowych dla wygładzonych ocen zmiennej stanu

Źródło: opracowanie własne.

bezpośredniej weryfikacji hipotezy o stacjonarności szeregu czasowego $(i_t - \hat{\pi}_t^e)$ zdefiniowanego w równaniu (13). Wyniki trzech najczęściej stosowanych testów¹¹ na obecność pierwiastka jednostkowego przedstawiono w tab. 2.

Tabela 2. Wyniki testów na obecność pierwiastka jednostkowego dla szeregu $(i_t - \hat{\pi}_t^e)$

Nazwa testu	ADF	Phillips-Perron	KPSS
Wartość statystyki testowej	-1,984	-0,015	0,847
<i>p-value</i>	0,293	0,954	0,010
Diagnoza	szereg niestacjonarny	szereg niestacjonarny	szereg niestacjonarny

Źródło: opracowanie własne.

Wszystkie testy przeprowadzono względem poziomu. W teście ADF długość opóźnienia w równaniu testowym została ustalona na podstawie kryterium AIC i wyniosła 2.

Przeprowadzone testy jednoznacznie wskazują na niestacjonarność realnej stopy procentowej *ex ante*, a co za tym idzie – na fałszywość hipotezy Fishera dla badanego okresu w Polsce. Niestacjonarność rozważanej stopy procentowej może powodować szereg negatywnych implikacji dla założeń wielu modeli w makroekonomii i finansach (zob. np. [18, s. 427]). Uzyskane wyniki znajdują potwierdzenie w badaniach empirycznych innych autorów (np. [14]), chociaż praca [13] neguje ostry podział na procesy $I(1)$ i $I(0)$ i wskazuje na możliwość wystąpienia ułamkowych pierwiastków jednostkowych w realnych stopach procentowych.

5. Podsumowanie

W artykule dokonano próby oszacowania nieobserwowalnych wartości oczekiwanej realnej stopy procentowej w Polsce w latach 1999-2005. W tym celu zastosowano odpowiednio wyspecyfikowany na gruncie teorii ekonomii gaussowski liniowy model przestrzeni stanów oraz metodę filtracji Kalmana. Uzyskane wyniki empiryczne są statystycznie istotne i nie wskazują na występowanie ujemnych wartości realnych stóp procentowych. Tak otrzymane oszacowania oczekiwanej realnej stopy procentowej w dalszej części artykułu wykorzystano do weryfikacji hipotezy Fishera, głoszącej, że nominalna stopa procentowa rośnie dokładnie o oczekiwaną stopę inflacji. Na podstawie przeprowadzonych w tym celu testów stacjonarności należy uznać, iż dla badanego okresu rozważana hipoteza nie znalazła potwierdzenia.

¹¹ Szczegółowy opis testów można znaleźć w pracy [8].

Literatura

- [1] Burda M., Wyplosz C., *Makroekonomia. Podrecznik europejski*, PWE, Warszawa 2000.
- [2] Durbin J., Koopman S.J., *Time Series Analysis by State Space Methods*, Oxford University Press, London 2001.
- [3] Fama E., Gibbons M., *Inflation, Real Returns, and Capital Investment*, „Journal of Monetary Economics” 1982, vol. 9, s. 297-323.
- [4] Fisher I., *The theory of Interest*, MacMillan, New York 1930.
- [5] Garcia R., Perron P., *An Analysis of the Real Interest Rate Under Regime Shifts*, „The Review of Economics and Statistics” 1996, vol. 78(1), s. 111-125.
- [6] Gottschalk J., *Measuring Expected Inflation and the Ex Ante Real Interest Rate in the Euro Area Using Structural Vector Autoregressions*, Kiel Institute of World Economics, Working Paper No 1067, lipiec 2001.
- [7] Gourieroux Ch., Monfort A., *Time Series and Dynamic Models*, Cambridge University Press, Cambridge 1997.
- [8] Hamilton J.D., *Time Series Analysis*, Princeton University Press, Princeton NJ 1994.
- [9] Hamilton J.D., *State-Space Models*, „Handbook of Econometrics”, Elsevier, vol. 4.
- [10] Harvey A.C., *Forecasting, Structural Time Series Models and the Kalman Filter*, Cambridge University Press, Cambridge 1989.
- [11] Jakubczyc J., *Wprowadzenie do ekonometrii dynamicznej*, PWN, Warszawa 1996.
- [12] Kim C.J., Nelson C.R., *State-Space Models with Regime Switching*, MIT Press, Massachusetts 1999.
- [13] Lai K.S., *Long-term Persistence in the Real Interest Rate: Some Evidence of a Fractional Unit Root*, „International Journal of Finance and Economics” 1997, vol. 2(3), s. 225-235.
- [14] Mishkin F.S., *Is the Fisher Effect for Real? A Reexamination of the Relationship Between Inflation and Interest Rates*, NBER Working Paper, 1991.
- [15] Mishkin F.S., *Ekonomika pieniądza, bankowości i rynków finansowych*, PWN, Warszawa 2002.
- [16] Osińska M., *Ekonometria finansowa*, PWE, Warszawa 2006.
- [17] Piotrowska M., *Makroekonomiczne uwarunkowania rynku pieniężnego w Polsce*, AE, Wrocław 1998.
- [18] Romer D., *Makroekonomia dla zaawansowanych*, PWN, Warszawa 2000.
- [19] St-Amant P., *Decomposing U.S. Nominal Interest Rates into Expected Inflation and Ex Ante Real Interest Rates Using Structural VAR Methodology*, Bank of Canada Working Paper 96-2, grudzień 1996.
- [20] Świętoń M., *Terminowa struktura dochodowości skarbowych papierów wartościowych w Polsce w latach 1998-2001*, Materiały i Studia, zeszyt nr 150, NBP, Warszawa 2002.

DETERMINING THE EX ANTE REAL INTEREST RATE IN POLAND USING STATE-SPACE MODEL

Summary

The *ex ante* real interest rate – the difference between nominal rates and expected inflation – is a crucial variable in economic decision-making process. Due to nonobservability of expected inflation rate, appropriate measuring of *ex ante* real interest rate encounters certain difficulties. In this paper, a state-space model was employed in order to estimate unobserved expected real interest rate in Poland between 1999 and 2005. The obtained results are used to verify well-known Fisher effect.

Mgr Jerzy Stelmach jest doktorantem w Katedrze Ekonometrii Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu.