

*INSTYTUT ENERGGOELEKTRYKI POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ
ZAKŁAD AUTOMATYKI I STEROWANIA W ENERGETYCE*

**Cyfrowe algorytmy pomiaru częstotliwości
w systemie elektroenergetycznym**

Praca doktorska

Janusz Staszewski

Promotor: dr hab. inż. Eugeniusz Rosołowski

Wrocław 2003



Biblioteka Główna i OINT
Politechniki Wrocławskiej



001758548



315946L/1

Pamięci mojej Mamy

Podziękowania:

- *mojemu Promotorowi, dr hab. inż. Eugeniuszowi Rosołowskiemu - za podjęcie trudu kierowania moją pracą oraz za cenne rady i wskazówki,*
- *mojej ukochanej Żonie i Dzieciom - za wspieranie oraz wytrwałość,*
- *Kolegom z Zakładu Automatyki i Sterowania w Energetyce - za niepowtarzalną atmosferę pracy i koleżeństwa.*

SPIS TREŚCI

1. WSTĘP	4
1.1. Częstotliwość jako parametr sygnału mierzonego przez układy automatyki elektroenergetycznej	4
1.2. Cel i teza pracy	5
1.3. Podział metod pomiaru częstotliwości	6
2. METODY STOSOWANE W ALGORYTMACH POMIARU CZĘSTOTLIWOŚCI.....	8
2.1. Wstępne przetwarzanie sygnałów	8
2.2. Estymacja parametrów sygnału	10
2.2.1. Ortogonalizacja sygnałów - algorytm filtracyjny	10
2.2.2. Ortogonalizacja sygnałów - algorytm korelacyjny	10
2.2.3. Dyskretna transformata Fouriera	11
2.2.4. Metoda najmniejszych kwadratów	12
- Nierekursywna metoda najmniejszych kwadratów	12
- Rekursywna metoda najmniejszych kwadratów	13
- Nieliniowa metoda najmniejszych kwadratów	14
2.2.5. Filtracja Kalmana	15
- Liniowy filtr Kalmana	15
- Rozszerzony filtr Kalmana	16
2.3. Obróbka wyników pomiaru	17
2.4. Metody testowania i weryfikacji algorytmów pomiaru częstotliwości	18
3. POMIAR CZĘSTOTLIWOŚCI W UKŁADZIE JEDNOFAZOWYM	19
3.1. Metody wykorzystujące liniowy model sygnałowy	19
3.1.1. Pomiar częstotliwości poprzez określanie fazy sygnału	21
3.1.2. Wykorzystanie rozkładu sygnału na składowe ortogonalne	23
- Algorytm adaptacyjny bazujący na nadążnej modyfikacji ortogonalnych filtrów w zależności od częstotliwości	31
- Algorytm adaptacyjny z zależną od częstotliwości modyfikacją wzmocnienia ortogonalnych filtrów	33
3.1.3. Zastosowanie dyskretnej transformaty Fouriera DFT	36
- Transformata Fouriera o stałej częstotliwości próbkowania	36
- Transformata Fouriera o zmiennej częstotliwości próbkowania	39
- Transformata Fouriera o zmiennej długości okna pomiarowego	41
- Zmodyfikowana dyskretna transformata Fouriera (SDFT)	43
3.1.4. Wykorzystanie filtru Kalmana	45
3.2. Metody wykorzystujące nieliniowy model sygnałowy	47
3.2.1. Wykorzystanie rozkładu sygnału w szereg Taylora	47
3.2.2. Wykorzystanie nieliniowej metody najmniejszych kwadratów	50
3.2.3. Wykorzystanie nieliniowych rekursywnych algorytmów MNK	52
3.2.4. Metoda wykorzystująca model estymacyjny Prony'ego	54
4. POMIAR CZĘSTOTLIWOŚCI W UKŁADZIE TRÓJFAZOWYM	57
4.1. Metody wykorzystujące model sygnału trójfazowego oparty na wektorze przestrzennym	58
4.2. Pomiar częstotliwości poprzez demodulację dwóch sygnałów zespolonych	65
4.3. Wykorzystanie rozszerzonego filtru Kalmana	67

5. POMIAR CZĘSTOTLIWOŚCI W OPARCIU O APROKSYMACJĘ SYGNAŁU WIELOMIANEM p-TEGO RZĘDU	69
5.1. Model sygnałowy Prony'ego	69
5.2. Zasada pomiaru częstotliwości w oparciu o model Prony'ego - algorytm nierekursywny	72
5.2.1. Analiza algorytmu	75
5.2.2. Proponowane rozwiązanie	76
5.3. Pomiar częstotliwości w oparciu o model Prony'ego - algorytm rekursywny	78
5.3.1. Wyniki przeprowadzonych symulacji	78
5.3.2. Algorytm rekursywny dla modelu VI rzędu	84
- Analiza algorytmu	85
5.3.3. Algorytm rekursywny - wersja zmodyfikowana	91
5.4. Pomiar częstotliwości w układzie trójfazowym	94
5.5. Wpływ częstotliwości próbkowania na wynik pomiaru	96
5.6. Śledzenie zmian częstotliwości w czasie	97
6. PRAKTYCZNA WERYFIKACJA ALGORYTMÓW POMIARU CZĘSTOTLIWOŚCI	99
7. PODSUMOWANIE	106
7.1. Wkład własny autora	107
DODATEK	109
A. Opis sygnałów testowych	109
A.1. Sygnały jednofazowe	109
A.2. Sygnały trójfazowe	111
A.3. Sygnały symulacyjne	113
B. Opis parametrów technicznych i sposobu programowania generatora HAMEG 8131.2	116
C. Przykładowa realizacja algorytmu pomiaru częstotliwości w języku C na procesorze sygnałowym	117
C.1. Algorytm nierekursywny, dla modelu sygnału I rzędu, z zastosowaniem okna filtracyjnego Hamminga	117
C.2. Algorytm rekursywny, dla modelu sygnału VI rzędu	118
LITERATURA	122

Wykaz ważniejszych oznaczeń

$(\cdot)^*$	- operacja wyznaczania funkcji sprzężonej wyrażenia w nawiasie
$\mathbf{1}_{x*y}$	- macierz jednostkowa o wymiarach $x*y$
$A[\cdot]$	- operacja uśredniania (średnia arytmetyczna) wyrażenia w nawiasie
$A(\omega), B(\omega)$	- obwiednie: górna i dolna, charakterystyki częstotliwościowej estymatora amplitudy
$a = \frac{2\pi}{N}$	- kąt pomiędzy sąsiednimi próbkami sygnału
$\arg(\cdot)$	- operacja obliczania argumentu wyrażenia w nawiasie
DFT	- dyskretna transformata Fouriera
$E(\cdot)$	- wartość oczekiwana wyrażenia w nawiasie
f_0	- częstotliwość znamionowa podstawowej harmonicznej
f_p	- częstotliwość próbkowania
$\mathbf{H}, \mathbf{h}$	- macierz, wektor
$\mathbf{H}^{-1}, \mathbf{H}^\#$	- macierz odwrotna, pseudoodwrotna
$\text{Im}(\cdot)$	- operacja wyznaczania części urojonej wyrażenia w nawiasie
$\text{int}(\cdot)$	- operacja wyznaczania części całkowitej wyrażenia w nawiasie
$\mathbf{J}$	- Jacobian
LMS	- algorytm gradientu stochastycznego
MNK	- metoda najmniejszych kwadratów
N	- liczba próbek w okresie podstawowej harmonicznej sygnału
N_f	- liczba próbek w oknie filtru
NOI	- filtr o nieskończonej odpowiedzi impulsowej
NMNK	- nieliniowa metoda najmniejszych kwadratów
$\mathbf{Q}$	- macierz kowariancji zakłóceń stanu
$\mathbf{R}$	- macierz kowariancji zakłóceń pomiarowych
$\text{Re}(\cdot)$	- operacja wyznaczania części rzeczywistej wyrażenia w nawiasie
RMNK, RLS	- rekursywna metoda najmniejszych kwadratów
ROCOF	- współczynnik określający zmiany częstotliwości w czasie
SNR	- współczynnik określający w [dB] stosunek sygnału do szumu
SOI	- filtr o skończonej odpowiedzi impulsowej
T_p	- okres próbkowania
$v(t), v(k)$	- zakłócenie pomiarowe rzeczywiste ciągłe, dyskretne
$w_x(n)$	- n -ty współczynnik filtru x
X	- amplituda sygnału
X_c, X_s	- składowe ortogonalne amplitudy zespolonej
$\underline{x}_1$	- wektor składowej zgodnej sygnału trójfazowego
$\underline{x}_f$	- wektor przestrzenny sygnału trójfazowego
x_c, x_s	- składowe ortogonalne sygnału zespolonego
$y(t), y(k)$	- sygnał rzeczywisty ciągły, dyskretny
$\underline{y}(t), \underline{y}(k)$	- sygnał zespolony ciągły, dyskretny
$\hat{y}, \tilde{y}$	- wartość estymowana, ekstrapolowana sygnału y
δ	- błąd względny pomiaru
φ	- faza początkowa sygnału
ω	- pulsacja sygnału

1. WSTĘP

1.1. Częstotliwość jako parametr sygnału mierzonego przez układy automatyki elektroenergetycznej

Częstotliwość jest bardzo ważnym parametrem charakteryzującym stan systemu elektroenergetycznego. W stanach normalnej pracy systemu elektroenergetycznego nie obserwuje się dużych odchyśleń częstotliwości, a utrzymanie zmian w bardzo małym zakresie nie stanowi problemu w systemie zrównoważonym. Problemy z utrzymaniem znamionowej wartości częstotliwości występują natomiast w stanach awaryjnych, zwłaszcza gdy część systemu przechodzi do pracy wyspowej. We współczesnych systemach zdarzenia takie występują w związku z wprowadzaniem układów generacji rozproszonej o stosunkowo małych zainstalowanych mocach. Problem bilansu mocy w takich lokalnych systemach jest szczególnie krytyczny.

Dokładna znajomość zmian częstotliwości systemu elektroenergetycznego niesie informacje o stanie jego pracy, pozwalając w odpowiednim czasie na interwencje. Odchyłka częstotliwości napięcia od wartości znamionowej wpływa bezpośrednio na obniżenie jakości dostarczanej energii elektrycznej. Przykładem może tu być wykorzystanie pomiaru częstotliwości dla potrzeb automatyki samoczynnego częstotliwościowego odciążenia (SCO). Jednak daleko większe skutki zmian częstotliwości występują w związku z oddziaływaniem na układy automatyki elektroenergetycznej. Zmiana częstotliwości sygnałów prądu i napięcia prowadzi do błędów pomiaru wielkości kryterialnych, co może zakłócać pracę zabezpieczeń oraz układów regulacyjnych. Wiele funkcji realizowanych podczas sterowania systemem elektroenergetycznym, takich jak np. kontrola stabilności, regulacja prędkości obrotowej turbin, synchronizacja generatorów, niektóre zabezpieczenia generatorów i transformatorów i inne, za ważny aspekt swojego działania mają pomiar częstotliwości. W związku z tym pomiar częstotliwości oraz prędkości jej zmian jest w dalszym ciągu istotnym zagadnieniem w automatyce elektroenergetycznej.

Trudność pomiaru częstotliwości w przedstawionym zakresie zastosowania wynika z faktu, że właśnie podczas awarii mierzone sygnały prądu i napięcia są zakłócone. Ponadto, wymagany jest stosunkowo krótki czas pomiaru, a zatem możliwość wygładzania danych pomiarowych i wyników pomiaru jest ograniczona.

Z punktu widzenia automatyki elektroenergetycznej pomiar częstotliwości powinien być dokonywany w maksymalnie krótkim czasie, z minimalnym błędem i w stosunkowo szerokim zakresie zmian częstotliwości. Założenia te są niestety sprzeczne z sobą i z metrologicznego punktu widzenia niemożliwe równocześnie do praktycznej realizacji. Konieczny jest pewien kompromis, uwzględniający potrzeby aktualnego pomiaru [38], np. szybki pomiar z dużą dokładnością, ale w wąskim zakresie zmian wykorzystywany w normalnej (bez większych zakłóceń) pracy systemu lub wolniejszy pomiar z mniejszą dokładnością, ale za to w szerokim zakresie zmian częstotliwości, wykorzystywany np. podczas rozruchu maszyn synchronicznych.

1.2. Cel i teza pracy

W ostatnim czasie powstało wiele metod cyfrowego pomiaru częstotliwości. Z uwagi na szeroki zakres zastosowań, wykorzystywane są różne modele sygnałowe obserwowanego procesu oraz sposoby przetwarzania sygnałów. Trudności, opisane w podrozdziale 1.1, z jakimi borykają się autorzy, skłaniają do poszukiwania coraz to lepszych rozwiązań. Przedstawiony w pracy algorytm pomiaru częstotliwości jest próbą rozwiązania niektórych problemów.

Zaproponowany algorytm, w oparciu o sygnałowy model Prony'ego, zakłada aproksymację sygnału wielomianem p -tego rzędu. Model sygnałowy Prony'ego został zaprezentowany m. in. w [25] dla sygnałów pierwszego rzędu, z wykorzystaniem algorytmu nierekursywnego metody najmniejszych kwadratów. W niniejszej pracy proponuje się rozwinięcie tego podejścia przez zastosowanie algorytmu rekursywnego oraz modeli sygnałowych wyższych rzędów. W celu praktycznej weryfikacji przeprowadzonych symulacji opracowane zostało specjalne stanowisko badawczo-laboratoryjne.

CEL PRACY

Celem pracy jest:

- *przegląd znanych metod cyfrowego pomiaru częstotliwości,*
- *opracowanie nowej, dokładniejszej i szybszej metody,*
- *przeprowadzenie kompleksowych badań symulacyjnych zaproponowanej metody,*
- *opracowanie i wykonanie stanowiska laboratoryjnego do badania wybranych algorytmów automatyki elektroenergetycznej (w tym częstotliwości) w czasie rzeczywistym.*

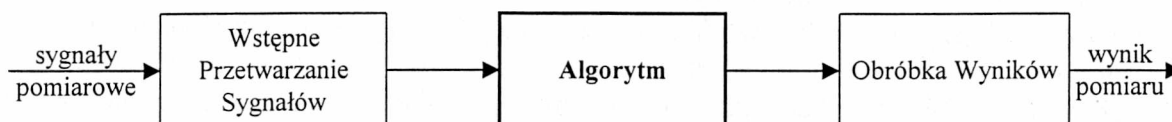
Teza pracy dotyczy oceny metod cyfrowego pomiaru częstotliwości składowej podstawowej w systemie elektroenergetycznym. Na podstawie przeprowadzonych badań można sformułować następujące tezy:

TEZY PRACY

- *Opracowana nowa metoda pomiaru częstotliwości składowej podstawowej sygnałów występujących w systemie elektroenergetycznym, wykorzystująca sygnałowy model Prony'ego oraz algorytm rekursywny metody najmniejszych kwadratów, zapewnia większą dokładność i krótszy czas reakcji na zmiany częstotliwości niż znane dotychczas metody.*
- *Opracowane i wykonane stanowisko laboratoryjne zapewnia możliwość praktycznej weryfikacji większości algorytmów pomiarowych (w tym częstotliwości) automatyki elektroenergetycznej w rzeczywistym układzie pomiarowym.*

1.3. Podział metod pomiaru częstotliwości

Ogólna struktura procesu pomiarowego wielkości elektrycznych przedstawiony jest na rys. 1.1. Ponieważ najczęściej jeden algorytm łączy w sobie cechy kilku kryteriów podziału, zatem można przeprowadzić wiele podziałów biorąc pod uwagę kolejno wszystkie kryteria. Jednym z nich może być rodzaj sygnału wejściowego. W przypadku pomiaru częstotliwości w systemie elektroenergetycznym, najczęściej wykorzystywany jest sygnał napięciowy jedno- lub trójfazowy, rzadziej jest to sygnał prądowy, wykorzystywany np. w sytuacji wystąpienia zwarcia doziemnego, gdy sygnał napięciowy niekiedy całkowicie zanika.



Rys. 1.1. Proces pomiarowy

Zadaniem bloku *Wstępnego Przetwarzania Sygnałów* jest dopasowanie wielkości napięcia do poziomu przetworników pomiarowych oraz wstępne przetwarzanie w analogowym filtrze odcinającym (ang. antialiasing) w celu pozbycia się składowych sygnału o częstotliwości większej od połowy częstotliwości próbkowania (konieczne ze względu na twierdzenie Shannona). Niekiedy zadaniem tego bloku jest dopasowanie sygnału nie tylko do odpowiedniego poziomu napięcia, ale również do założonego w algorytmie modelu sygnału (np. występowanie określonej liczby wyższych harmonicznych oraz występowanie - lub brak - składowej stałej). Dokonywane jest to poprzez stosowanie wstępnej filtracji sygnału odpowiednimi oknami filtracyjnymi, w celu pozbycia się wyższych harmonicznych występujących w mierzonym sygnale, czy też w celu wyeliminowania składowej stałej.

Najważniejszy etap procesu pomiarowego realizowany jest w bloku *Algorytm*. Pomiar częstotliwości w systemie elektroenergetycznym dotyczy częstotliwości podstawowej harmonicznej mierzonego sygnału. Algorytmy pomiarowe definiowane są dla określonego modelu sygnału wejściowego, co może być kolejnym kryterium podziału metod pomiaru częstotliwości. Najbardziej ogólny podział modeli sygnałowych dokonywany jest ze względu na występującą liczbę wyższych składowych. Dodatkowo, model sygnału cechuje występowanie zakłóceń w postaci podharmonicznych, międzyharmonicznych oraz składowej stałej, najczęściej reprezentowanych w postaci szumu białego. Najprostsze modele zakładają istnienie tylko składowej podstawowej sygnału i zakłóceń. Bardziej skomplikowane są modele typu zespolonego. Wśród nich szczególnie godny uwagi jest model aproksymacyjny Prony'ego [15], [25], [27]. Inny typ modelu zespolonego bazuje na pojęciu wektora przestrzennego wywodzącego się z systemu trójfazowego [1], [5], [7].

Kolejną cechą charakteryzującą model sygnału są występujące szukane niewiadome. Niekoniecznie musi być to częstotliwość (lub pulsacja). Może to być faza sygnału [11], [22], [31], [33] lub powiązane razem amplituda i częstotliwość. Niektóre algorytmy zakładają w pierwszym kroku wyznaczenie składowych ortogonalnych sygnału [8], [17], [26], [30], [33], [36], [41], a niekiedy rozwinięcie modelu sygnału w szereg Taylora [8], [30] lub poddanie działaniu dyskretnej transformaty Fouriera DFT w wersji podstawowej [3], [11], [22] oraz zmodyfikowanej (SDFT) [46]. Ułatwia to późniejszą analizę tak zmodyfikowanego sygnału.

Podstawą kolejnego kryterium podziału metod pomiaru częstotliwości mogą być różne metody estymacji wielkości szukanych. Wyróżniamy tu dwie najważniejsze grupy. Pierwsza stosuje metodę najmniejszych kwadratów zarówno w wersji liniowej [8], [26], [30], [31], nieliniowej [36] oraz rekursywnej, druga teorię filtru Kalmana w wersji liniowej [9], [13]

i rozszerzonej [5]. Algorytmy mogą być stacjonarne, tzn. niezależne od zmian częstotliwości oraz adaptacyjne, tzn. dopasowujące się w czasie do zmieniającej się częstotliwości [3], [7], [11], [17].

Różna jest rola bloku *Obróbki Wyników*, ponieważ jest ona pochodną jakości pomiaru oraz wcześniej sprecyzowanego rodzaju wyniku (częstotliwość, faza, czy tylko śledzenie zmian częstotliwości w czasie, co może być podstawą kolejnego kryterium). Przy niestabilnym wyniku końcowym, często stosowany jest filtr uśredniający bądź też medianowy. Jeżeli algorytm wyznacza fazę sygnału to konieczne jest przeliczenie częstotliwości na podstawie znajomości dwóch kolejnych w czasie kątów fazowych [11], [22], [31], [33].

Niekiedy nieistotna jest znajomość dokładnej wartości częstotliwości lecz tylko informacja o jej zmianie. Dzieje się tak szczególnie w przypadku, gdy do systemu elektroenergetycznego dołączone są źródła energii o małej mocy, np. elektrownie wiatrowe, małe elektrownie wodne itp. Wielkość zmian wartości częstotliwości stanowi kryterium ich odłączenia od systemu. Śledzenie zmian częstotliwości w czasie (tzw. współczynnik ROCOF- ang.: **R**ate **O**f **C**hange **O**f **F**requency) niesie informację o takiej sytuacji [2], [12], [21], [24], [34].

W pracy zdecydowano się na podział prezentowanych metod pomiaru częstotliwości stosując jako wyjściowe kryterium model sygnału wejściowego, poczynając od ogólnego, sinusoidalnego modelu sygnałów jednofazowych, poprzez prosty model liniowy sygnału pierwszego rzędu i wyższych rzędów, następnie model nieliniowy, aż do modelu sygnału trójfazowego pierwszego rzędu.

2. METODY STOSOWANE W ALGORYTMACH POMIARU CZĘSTOTLIWOŚCI

2.1. Wstępne przetwarzanie sygnałów

Rzeczywiste sygnały napięciowe, czy też prądowe, występujące w systemie elektroenergetycznym najczęściej znacznie odbiegają od idealnych sygnałów sinusoidalnych. Algorytmy pomiarowe zakładają jednak konkretny model sygnału, najczęściej pierwszego rzędu, a tylko dla sygnałów bliskich założonemu modelowi poziom błędu przy pomiarach jest minimalny. Aby algorytm uwzględniał niedopasowanie rzędu modelu i sygnału mierzonego, model powinien być zdefiniowany zgodnie z równaniem:

$$y(t) = X \sin(2\pi ft + \varphi) + v(t), \quad (2.1)$$

gdzie $v(t)$ reprezentuje ogólnie zakłócenia, np. występowanie wyższych harmonicznnych, czy też składowej stałej.

W celu ograniczenia wpływu zakłóceń na pomiar dokonywany metodami cyfrowymi, w bloku *Wstępnego Przetwarzania* (rys. 1.1) sygnał poddawany jest filtracji. Proces ten powinien zapewnić jak najlepsze odfiltrowanie zakłóceń, (np. składowej stałej, czy też wyższych składowych), pozostawiając nietłumioną (lub z minimalnym tłumieniem) składową podstawową mierzonego sygnału. Nie jest to zadanie łatwe, szczególnie w przypadku zakładanego szerokiego zakresu zmian częstotliwości. Kolejnym ograniczeniem dotyczącym filtracji jest maksymalny czas opóźnienia jakie wprowadza filtr, istotny szczególnie w przypadku wymogu szybkiego pomiaru dla celów zabezpieczeniowej automatyki elektroenergetycznej.

W pracy założono maksymalny zakres zmian częstotliwości badanego sygnału od 10 do 90 Hz. Uzyskanie takiego szerokiego pasma przepuszczania przy ograniczeniach opisanych powyżej, zadecydowało w pierwszym kroku o wyborze dolnoprzepustowych, nierekursywnych filtrów cyfrowych o skończonej odpowiedzi impulsowej (SOI). Filtry takie wytwarzają kolejną próbkę sygnału wyjściowego jako sumę ważoną N_f - poprzednich próbek sygnału wejściowego zgodnie ze wzorem:

$$x_f(k) = \sum_{n=0}^{N_f-1} w(n)y(k-n), \quad (2.2)$$

gdzie: $w(n)$ - n -ty współczynnik filtru,

N_f - długość okna filtracyjnego,

$y(k)$, $x_f(k)$ - k -ta próbka sygnału odpowiednio wejściowego i wyjściowego (po filtracji).

W pracy użyto klasycznych okien filtracyjnych (rys. 2.1a):

- okno filtracyjne Blackmana o współczynnikach określonych zależnością:

$$w_B(n) = 0,42 - 0,5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N_f - 1}\right) + 0,08 \cos\left(\frac{4\pi n}{N_f - 1}\right), \quad (2.3)$$

- okno filtracyjne Hamminga o współczynnikach określonych zależnością:

$$w_m(n) = 0,54 - 0,46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N_f - 1}\right), \quad (2.4)$$

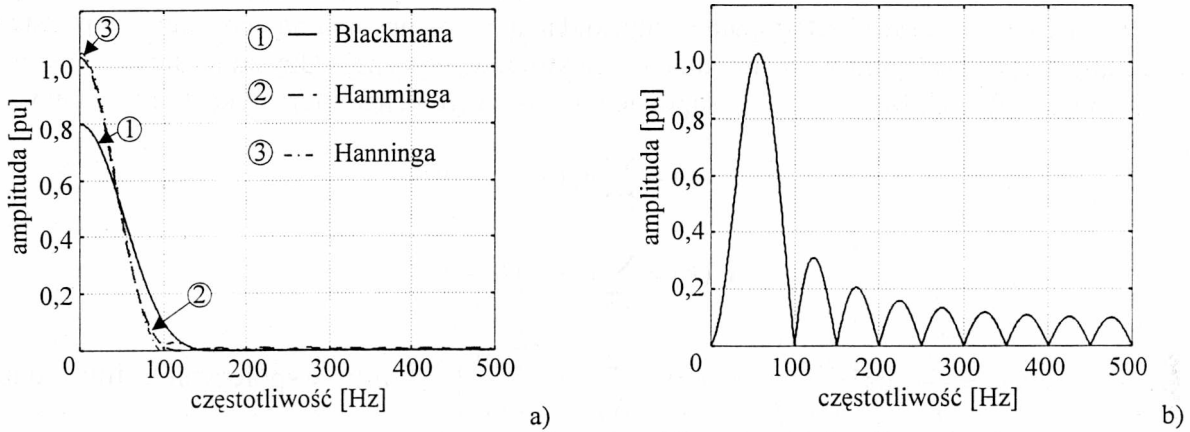
- okno filtracyjne Hanninga o współczynnikach określonych zależnością:

$$w_n(n) = 0,5 \left(1 - \cos\frac{2\pi n}{N_f - 1}\right), \quad (2.5)$$

gdzie $n = 0, 1, \dots, N_f - 1$.

Filtry te spełniają wymagania opisane powyżej, a jednocześnie odznaczają się prostotą realizacji. Jednakże filtry Blackmana, Hamminga i Hanninga jako klasyczne filtry dolnoprzepustowe nie odfiltrowują składowej stałej. Dlatego w przypadku jej występowania, konieczne jest stosowanie dodatkowego filtra „odcinającego” tę składową, np. prostego filtra typu „kosinus” (rys. 2.1b), o współczynnikach określonych zależnością:

$$w_c(n) = \frac{2}{N_f} \cos\left(\frac{2\pi n}{N_f}\right). \quad (2.6)$$



Rys. 2.1. Charakterystyka częstotliwościowa ($f_p = 1$ kHz) okien filtracyjnych: Blackmana, Hamminga, Hanninga (a) oraz typu „kosinus” (b)

Charakterystyki częstotliwościowe powyżej zdefiniowanych filtrów przedstawione na rys. 2.1, wykonane zostały dla częstotliwości próbkowania $f_p = 1$ kHz i długości okna filtracyjnego równej pełnemu okresowi podstawowej harmonicznnej sygnału o częstotliwości znamionowej 50 Hz, czyli $N_f = 20$. Przyjęcie takiej długości filtrów zapewnia stosunkowo dobre odfiltrowanie wyższych harmonicznnych przez filtry Blackmana, Hamminga i Hanninga oraz bardzo dobre odfiltrowanie składowej stałej przez filtr kosinusowy. Należy zwrócić uwagę na fakt, że filtr typu „kosinus” stanowi uzupełnienie filtrów Blackmana, Hamminga i Hanninga, tłumiąc bardzo dobrze wyższe harmonicznne sygnału o częstotliwości bliskiej 50 Hz, co pozwala na uzyskanie większej dokładności pomiaru w tym zakresie. Sumaryczne pasmo przepustowe obydwu filtrów pozwala na pomiary częstotliwości sygnałów w założonym zakresie zmian od 10 do 90 Hz. Nie przeszkadza temu niewielkie tłumienie podstawowej harmonicznnej sygnału, tym większe, im dalej częstotliwość badanego sygnału odbiega od wartości 50 Hz. Uzyskanie takiego pasma przy stosunkowo dobrych parametrach filtru byłoby trudniejsze w przypadku stosowania filtru pasmowego - wymagałoby przyjęcia wysokiego rzędu filtru, co pomijając większy stopień skomplikowania obliczeń, spowodowałoby wzrost opóźnienia wprowadzanego przez filtr.

2.2. Estymacja parametrów sygnału

Zadaniem algorytmu pomiarowego jest minimalizacja błędów powstałych w trakcie pomiaru i wynikających z niedopasowania modelu sygnału do rzeczywistych danych pomiarowych. Algorytm określa wzajemne relacje pomiędzy pomiarami a modelem. W tym celu stosowany jest cały szereg narzędzi opisanych poniżej.

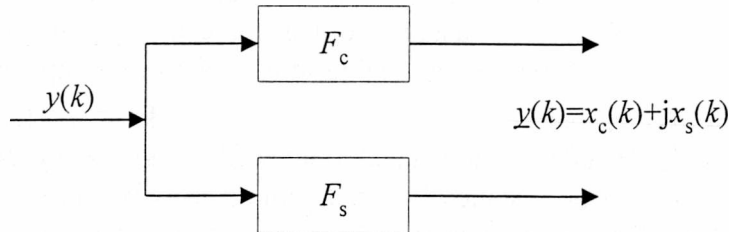
2.2.1. Ortogonalizacja sygnałów - algorytm filtracyjny

Algorytm filtracji cyfrowej [27], [44] może być użyteczny nie tylko w przypadku eliminowania zbędnych składowych sygnału. Może posłużyć również do rozkładu rzeczywistego sygnału na dwie składowe ortogonalne: sinusoidalną i kosinusoidalną, co stanowi podstawę działania wielu algorytmów w automatyce elektroenergetycznej. Uzyskuje się to w wyniku zastosowania dwóch filtrów (2.2) o odpowiednio dobranych charakterystykach impulsowych:

$$\begin{aligned} x_c(k) &= \sum_{n=0}^{N_f-1} w_c(n)y(k-n), \\ x_s(k) &= \sum_{n=0}^{N_f-1} w_s(n)y(k-n), \end{aligned} \quad (2.7)$$

gdzie: $w_c(n) = \frac{2}{N_f} \cos\left(\frac{2\pi n}{N_f}\right)$, $w_s(n) = \frac{2}{N_f} \sin\left(\frac{2\pi n}{N_f}\right)$ - n -ty współczynnik filtru odpowiednio kosinusoidalnego (F_c) i sinusoidalnego (F_s) o długości N_f .

Układ do estymacji składowych ortogonalnych sygnału $y(k)$ za pomocą filtracji cyfrowej przedstawia rys. 2.2. W rezultacie otrzymuje się estymatę sygnału zespolonego.



Rys. 2.2. Układ do estymacji składowych ortogonalnych sygnału

2.2.2. Ortogonalizacja sygnałów - algorytm korelacyjny

Korelacja cyfrowa, podobnie jak filtracja polega na zastąpieniu rzeczywistego sygnału dwoma funkcjami wzajemnie ortogonalnymi [27], [44]:

$$\begin{aligned} x_{kc}(k) &= \sum_{n=0}^{N_f-1} w_c(k-n)y(k-n), \\ x_{ks}(k) &= \sum_{n=0}^{N_f-1} w_s(k-n)y(k-n), \end{aligned} \quad (2.8)$$

gdzie: N_f - długość okna korelacyjnego, x_{ks} , x_{kc} - składowe ortogonalne sygnały y .

Układ do estymacji składowych ortogonalnych za pomocą algorytmu korelacyjnego jest identyczny jak w przypadku algorytmu filtracyjnego. Podobnie jak przy filtracji składowe (2.8) są ortogonalne, również harmoniczne są tłumione do zera ze względu na ich ortogonal-

ność do funkcji korelujących w równaniach (2.8). W odróżnieniu od filtracji, estymatory korelacyjne (2.8) są w ogólnym przypadku niestacjonarne, gdyż funkcje korelujące w_c i w_s , zmieniają się wraz z przesuwaniem okna pomiarowego. Rezultatem korelacji jest ciąg współczynników liczbowych, określających stopień podobieństwa sygnału i funkcji korelującej, podczas gdy na wyjściu filtru uzyskuje się odpowiednio zmodyfikowany sygnał pomiarowy. Zaletą korelacji jest możliwość realizacji prostych algorytmów rekursywnych. Wynika to ze struktury równań (2.8) oraz okresowości funkcji korelujących.

2.2.3. Dyskretna transformata Fouriera

Podstawą analizy fourierowskiej jest reprezentacja sygnału o dowolnym kształcie za pomocą zbioru funkcji sinusoidalnych [27], [44]. Analiza, nawet wielu, prostych składowych sinusoidalnych może niejednokrotnie okazać się zdecydowanie łatwiejsza od analizy złożonego sygnału oryginalnego. Przekształcenie Fouriera wiąże funkcję czasu z jej reprezentacją w dziedzinie częstotliwości i w ogólnym przypadku dane jest wzorem:

$$\underline{X}(j\omega) = X_r(\omega) + jX_i(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{y}(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (2.9)$$

gdzie: $X_r(\omega)$, $X_i(\omega)$ - widmo rzeczywiste i urojone sygnału $\underline{y}(t)$.

Przekształcenie odnoszące się do dyskretnych okresowych funkcji czasu, które występują w ograniczonym przedziale czasowym jest nazywane dyskretną transformatą Fouriera (DFT) i dane jest wzorem:

$$\underline{DFT}(n) = X_r(n) + jX_i(n) = \sum_{k=0}^{N_f-1} \underline{y}(k) e^{-j\frac{2\pi}{N_f}nk}, \quad (2.10)$$

gdzie: $X_r(n) = \sum_{k=0}^{N_f-1} y(k) \cos\left(\frac{2\pi}{N_f}nk\right),$

$$X_i(n) = \sum_{k=0}^{N_f-1} y(k) \sin\left(\frac{2\pi}{N_f}nk\right),$$

N_f - liczba próbek w oknie przetwarzania,

n - numer kolejnego „prążka” na charakterystyce częstotliwościowej; jeśli $N_f = N$ czyli liczbie próbek w okresie podstawowej harmonicznej sygnału, to dla $n = 1$ wartość $\underline{DFT}(1)$ odpowiada częstotliwości podstawowej harmonicznej 50 Hz.

Dyskretna Transformata Fouriera przekształca skończone ciągi dyskretnie w dziedzinie czasu w ciągi w dziedzinie częstotliwości. Pozwala ona na charakteryzowanie własności sygnałów poprzez ich rozkład na wiele harmonicznych. Jest bardzo użytecznym narzędziem zarówno analizy jak i syntezy sygnału. Znalazła ona zastosowanie m. in. przy projektowaniu filtrów cyfrowych oraz w metodzie korelacji (poprzez ograniczenie DFT do obliczania tylko składowej podstawowej sygnału, z pominięciem wyższych harmonicznych).

2.2.4. Metoda najmniejszych kwadratów

Nierekursywna metoda najmniejszych kwadratów

Metoda najmniejszych kwadratów (MNK) [27], [44] jest jedną z najczęściej stosowanych metod do określenia parametrów funkcji, która ma aproksymować dane uzyskane z pomiarów. Jej istota sprowadza się m. in. do tego, aby estymować nieznane parametry z minimalnym błędem średniokwadratowym. W przypadku sygnału, który może być przedstawiony w postaci przebiegu sinusoidalnego, zakłada się, że w stanie ustalonym przebiegi napięć (lub prądów) przedstawiają idealne sinusoidy o znanej częstotliwości. Jednakże, z uwagi na fakt, że rzeczywisty sygnał jest zakłócony, pomiar obarczony jest błędem, który sprawia, że zakładana funkcja aproksymuje dany proces w sposób przybliżony.

Sinusoidalny model sygnału może być reprezentowany dwiema ortogonalnymi składowymi zgodnie z równaniem (w postaci dyskretnej):

$$y(k) = X \cos(ak + \varphi) = X \cos(ak) \cos \varphi - X \sin(ak) \sin \varphi = X_c \cos(ak) - X_s \sin(ak), \quad (2.11)$$

gdzie: $X_c = X \cos \varphi$, $X_s = X \sin \varphi$.

W przypadku, gdy dostępny jest zbiór M kolejnych pomiarów, to relacje pomiędzy pomiarami a modelem można zapisać ciągiem następujących równań:

$$\begin{aligned} y(0) &= X_c + v(0), \\ y(1) &= X_c \cos a - X_s \sin a + v(1), \\ &\vdots \\ y(M-1) &= X_c \cos((M-1)a) - X_s \sin((M-1)a) + v(M-1) \end{aligned} \quad (2.12)$$

lub w zapisie macierzowym:

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{d} + \mathbf{v}, \quad (2.13)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= [y(0) \ y(1) \ \dots \ y(M-1)]^T - \text{wektor pomiarów,} \\ \mathbf{H} &= [\mathbf{h}(0) \ \mathbf{h}(1) \ \dots \ \mathbf{h}(M-1)]^T - \text{macierz modelu sygnałowego:} \\ \mathbf{h}(i) &= [\cos(ai) \ \sin(ai)], \ i = 0, 1, \dots, (M-1), \\ \mathbf{v} &= [v(0) \ v(1) \ \dots \ v(M-1)]^T - \text{wektor błędów pomiarowych,} \\ \mathbf{d} &= [X_c \ X_s]^T - \text{wektor szukanych parametrów modelu.} \end{aligned}$$

W ogólnym przypadku dla L wielkości estymowanych wektor $\mathbf{d}$ przyjmie postać:

$$\mathbf{d} = [X_0 \ X_1 \ \dots \ X_{L-1}]. \quad (2.14)$$

Estymata wektora parametrów $\hat{\mathbf{d}} \approx \mathbf{d}$ określa model wielkości mierzonych zgodnie z (2.13):

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{H}\hat{\mathbf{d}}. \quad (2.15)$$

Zgodnie z ideą MNK, celem estymacji jest uzyskanie takiego wektora $\hat{\mathbf{y}}$, który zapewnia minimalną wartość wektora błędów:

$$\mathbf{e} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}} = \{e_i\}, \ i = 0, \dots, (M-1) \quad (2.16)$$

w sensie przyjętego kryterium. Stąd po przekształceniach otrzymamy [49]:

$$\hat{\mathbf{d}} = \mathbf{H}^\# \mathbf{y}, \quad (2.17)$$

gdzie macierz:

$$\mathbf{H}^\# = \mathbf{P}\mathbf{H}^T, \ \mathbf{P} = (\mathbf{H}^T\mathbf{H})^{-1}, \quad (2.18)$$

zwana macierzą pseudoodwrotną określa model pomiarowy algorytmu MNK.

Ponieważ w zastosowaniach do automatyki elektroenergetycznej wektor mierzonych wartości y najczęściej reprezentuje tylko jedną wielkość pomiarową (napięcie lub prąd) ($y = y$), zatem macierz $\mathbf{H}$ jest macierzą jednowierszową, czyli wektorem ($\mathbf{H} = \mathbf{h}$).

Rekursywna metoda najmniejszych kwadratów

W efekcie rozwiązania równania (2.17) otrzymamy wynik będący odzwierciedleniem jednego konkretnego pomiaru. Jeśli zapiszemy to równanie dla różnych, następujących po sobie chwil dyskretnych k , to dla układów jednoweściowych ($\mathbf{H} = \mathbf{h}$), otrzymamy algorytm korelacyjny (2.8) o długości okna $N_f = M$. Nierekursywna MNK, jako algorytm z przesuwającym się oknem pomiarowym, jest optymalny dla stałej długości tego okna [27]. Największą jego wadą - złożoność obliczeniowa - uwidacznia się w przypadku przetwarzania dużej liczby danych. Dodatkowo, ponieważ zakłada się w nim stałą wartość estymowanego wektora, nie możliwe jest śledzenie dynamiki zachodzącego procesu.

Rekursywny algorytm metody najmniejszych kwadratów (RMNK lub ang. **Recursive Least Squares** - RLS) [27], [28], [35], [49] pozwala uzyskać stosunkowo dobrą dokładność estymacji przy zachowaniu krótkiego okna pomiarowego. Klasyczny algorytm rekursywny ma cechę określaną „nieskończenie długą pamięcią wstecz” co oznacza, że wynik estymacji w kroku k zależy od wszystkich poprzednich wartości sygnału wejściowego. Jest to szczególnie uciążliwe w przypadku wystąpienia krótkotrwałych zakłóceń w sygnale, gdyż „pamiętane” są one w nieskończenie długim czasie. Cecha ta może być ograniczona przez wprowadzenie współczynnika zapominania.

Kolejne kroki algorytmu RLS z zapominaniem dla układów jednoweściowych ($\mathbf{H} = \mathbf{h}$) przedstawiają się następująco:

1° określenie wartości początkowej macierzy kowariancji $\mathbf{P}(0)$ oraz estymowanego wektora $\hat{\mathbf{d}}(0)$,

2° pobranie próbki sygnału wejściowego $y(k)$,

3° określenie wektora wzmocnienia $\mathbf{k}$ zgodnie ze wzorem:

$$\mathbf{k}(k) = \frac{\mathbf{P}(k-1) \mathbf{h}^T(k)}{\lambda + \mathbf{h}(k) \mathbf{P}(k-1) \mathbf{h}^T(k)}, \quad (2.19)$$

4° obliczenie nowej wartości estymowanego wektora $\hat{\mathbf{d}}$ zgodnie ze wzorem:

$$\hat{\mathbf{d}}(k) = \hat{\mathbf{d}}(k-1) + \mathbf{k}(k) [y(k) - \mathbf{h}(k) \hat{\mathbf{d}}(k-1)], \quad (2.20)$$

5° obliczenie nowej wartości macierzy kowariancji błędów $\mathbf{P}$ zgodnie ze wzorem:

$$\mathbf{P}(k) = \frac{1}{\lambda} [\mathbf{P}(k-1) - \mathbf{k}(k) \mathbf{h}(k) \mathbf{P}(k-1)], \quad (2.21)$$

6° powrót do punktu 2°.

Wartość początkowa macierzy kowariancji $\mathbf{P}(0)$ może być określona na podstawie (2.18):

$$\mathbf{P}(0) = [\mathbf{Y}^T(0) \mathbf{Y}(0)]^{-1}.$$

Wymaga to jednak znajomości początkowego okna pomiarowego. Ponieważ w praktyce nie dysponujemy na ogół takimi danymi, zatem można przyjąć:

$$\mathbf{P}(0) = \delta \mathbf{1},$$

gdzie: $\mathbf{1}$ - macierz jednostkowa, $\delta \gg 0$.

Podobnie na podstawie (2.17) można przyjąć początkową wartość estymowanego wektora $\hat{\mathbf{d}}(0)$:

$$\hat{\mathbf{d}}(0) = \mathbf{P}(0) \mathbf{h}^T(0) \mathbf{y}(0)$$

lub założyć $\hat{\mathbf{d}}(0) = 0$.

Ponadto można zauważyć, że wektor wzmocnienia $\mathbf{k}$ nie zależy od pomiarów, zatem może być określony przed rozpoczęciem obliczeń. Długość okna pomiarowego nie wpływa na sposób obliczeń i może być przyjęta $M = 1$.

Nieliniowa metoda najmniejszych kwadratów

Stosunkowo często stosowanym uproszczeniem, które przyjmuje się w liniowej estymacji parametrów jest założenie liniowości niektórych parametrów. Każda zatem ich zmiana jest traktowana jako zakłócenie i prowadzi do błędów pomiaru. Źródłem takich uproszczeń jest najczęściej obawa przed nadmiernym skomplikowaniem algorytmów nieliniowych. Szybki postęp w rozwoju techniki mikroprocesorowej i metod numerycznych pozwala pominąć te uproszczenia.

Nieliniowy model pomiarowy można zapisać analogicznie do wzoru (2.13) w postaci [27]:

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{d}) + \mathbf{v}, \quad (2.22)$$

gdzie:

- $\mathbf{y}$ - wektor pomiarów,
- $\mathbf{h}(\mathbf{d})$ - wektor modelu sygnałowego,
- $\mathbf{v}$ - wektor błędów pomiarowych,
- $\mathbf{d}$ - wektor szukanych parametrów modelu.

Podobnie jak w (2.16) zdefiniowana jest funkcja błędów:

$$\mathbf{e}(\hat{\mathbf{d}}) = \mathbf{y} - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{d}}), \quad (2.23)$$

gdzie: $\hat{\mathbf{d}}$ - estymata wektora parametrów,

$$\mathbf{h}(\hat{\mathbf{d}}) = [h_0(\hat{\mathbf{d}}) \quad h_1(\hat{\mathbf{d}}) \quad \dots \quad h_{M-1}(\hat{\mathbf{d}})]^T.$$

Funkcja kryterialna $\mathbf{e}(\hat{\mathbf{d}})$ jest nieliniowa względem poszukiwanych parametrów $\hat{\mathbf{d}}$. W celu określenia odpowiedniej procedury minimalizacji można dokonać jej liniowej aproksymacji zastępując ją dwoma pierwszymi wyrazami szeregu Taylora w pobliżu danego punktu $\hat{\mathbf{d}}_p$:

$$\mathbf{e}(\hat{\mathbf{d}}) \approx \mathbf{e}(\hat{\mathbf{d}}_p) - \mathbf{J}(\hat{\mathbf{d}}_p)(\hat{\mathbf{d}} - \hat{\mathbf{d}}_p), \quad (2.24)$$

gdzie $\mathbf{J}(\hat{\mathbf{d}}_p)$ jest Jacobianem:

$$\mathbf{J}(\hat{\mathbf{d}}_p) = \{j_{ij}(\hat{\mathbf{d}}_p)\}, \quad (2.25)$$

z elementami $j_{ij}(\hat{\mathbf{d}}_p) = -\frac{\partial e_i(\hat{\mathbf{d}})}{\partial \hat{X}_j} \Big|_{\hat{\mathbf{d}}=\hat{\mathbf{d}}_p}$,

$\hat{X}_j$ - j -ty wyraz wektora estymat $\hat{\mathbf{d}}$, $j = 0, 1, \dots, (L-1)$,

$e_i(\hat{\mathbf{d}})$ - i -ty element wektora $\mathbf{e}(\hat{\mathbf{d}})$, $i = 0, 1, 2, \dots, (M-1)$.

Przy założeniu, że wektor pomiarowy $\mathbf{y}$ nie zależy od szukanych wartości $\hat{\mathbf{d}}$, elementy Jacobianu będą postaci:

$$j_{ij}(\hat{\mathbf{d}}_p) = - \frac{\partial h_i(\hat{\mathbf{d}})}{\partial \hat{X}_j} \bigg|_{\hat{\mathbf{d}}=\hat{\mathbf{d}}_p}. \quad (2.26)$$

Ostatecznie nieliniowy algorytm metody najmniejszych kwadratów (NMNK) dany jest wyrażeniem:

$$\hat{\mathbf{d}}_n(k) = \hat{\mathbf{d}}_{n-1}(k) + \left[\mathbf{J}^T(\hat{\mathbf{d}}_{n-1}(k)) \mathbf{J}(\hat{\mathbf{d}}_{n-1}(k)) \right]^{-1} \mathbf{J}^T(\hat{\mathbf{d}}_{n-1}(k)) (\mathbf{y}(k) - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{d}}_{n-1}(k))), \quad (2.27)$$

gdzie n oznacza numer kolejnej iteracji.

Warunek szybkiej zbieżności algorytmu zależy od liniowego błędu przybliżenia funkcji $\mathbf{e}(\hat{\mathbf{d}})$. W wielu zastosowaniach jedna iteracja daje już zadowalające rezultaty.

2.2.5. Filtracja Kalmana

Liniowy filtr Kalmana

W klasycznej metodzie najmniejszych kwadratów przedmiotem minimalizacji jest suma kwadratów różnic pomiędzy przyjętym modelem i rzeczywistymi próbkami sygnału. W przypadku, gdy obserwowany proces można przedstawić modelem stochastycznym, rozsądnie jest formułować kryterium najmniejszych kwadratów w odniesieniu do wartości oczekiwanej błędu estymacji. Użytecznym narzędziem w takiej sytuacji jest liniowy filtr Kalmana [27], [44].

Niech model sygnału będzie dany następującymi równaniami stanu:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}(k+1) &= \mathbf{A}(k)\mathbf{d}(k) + \mathbf{w}(k), \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{H}(k)\mathbf{d}(k) + \mathbf{v}(k), \end{aligned} \quad (2.28)$$

gdzie:

- $\mathbf{d}(k)$ - wektor stanu,
- $\mathbf{y}(k)$ - wektor próbek sygnałów wejściowych,
- $\mathbf{A}(k)$ - macierz przejścia,
- $\mathbf{H}(k)$ - macierz odzwierciedlająca idealny związek między wektorem stanu, a wektorem próbek sygnałów wejściowych,
- $\mathbf{w}(k)$ - losowy wektor zakłóceń stanu,
- $\mathbf{v}(k)$ - losowy wektor zakłóceń pomiarowych.

Celem estymacji jest określenie wektora estymat $\hat{\mathbf{d}}(k)$, który jest przybliżeniem wektora stanu $\mathbf{d}(k)$. Kryterium minimalnej wariancji błędów estymacji jest określone jako minimum następującej funkcji:

$$\mathbf{P}(k) = E \left(\left[\mathbf{d}(k) - \hat{\mathbf{d}}(k) \right] \left[\mathbf{d}(k) - \hat{\mathbf{d}}(k) \right]^T \right), \quad (2.29)$$

gdzie E jest operatorem wartości oczekiwanej (średniej), a $\mathbf{P}(k)$ macierzą kowariancji błędów estymacji. Kolejne kroki algorytmu przedstawiają się następująco:

- zakładając, że znana jest estymata $\hat{\mathbf{d}}(k-1)$ w kroku $k-1$, dokonujemy jej ekstrapolacji w kroku bieżącym k :

$$\tilde{\mathbf{d}}(k) = \mathbf{A}(k-1) \hat{\mathbf{d}}(k-1), \quad (2.30)$$

- obliczamy macierz kowariancji błędów ekstrapolatora:

$$\tilde{\mathbf{P}}(k) = \mathbf{A}(k-1) \mathbf{P}(k-1) \mathbf{A}^T(k-1) + \mathbf{Q}(k-1), \quad (2.31)$$

- określamy macierz wzmocnień Kalmana:

$$\mathbf{K}(k) = \tilde{\mathbf{P}}(k) \mathbf{H}^T(k) [\mathbf{H}(k) \tilde{\mathbf{P}}(k) \mathbf{H}^T(k) + \mathbf{R}(k)]^{-1}, \quad (2.32)$$

- oraz macierz kowariancji błędów estymacji:

$$\mathbf{P}(k) = \tilde{\mathbf{P}}(k) - \mathbf{K}(k) \mathbf{H}(k) \tilde{\mathbf{P}}(k), \quad (2.33)$$

- następnie określamy estymatę:

$$\hat{\mathbf{d}}(k) = \tilde{\mathbf{d}}(k) + \mathbf{K}(k) [\mathbf{y}(k) - \mathbf{H}(k) \mathbf{A}(k) \tilde{\mathbf{d}}(k)], \quad (2.34)$$

gdzie:

$\mathbf{Q}(k)$ - macierz kowariancji zakłóceń stanu,

$\mathbf{R}(k)$ - macierz kowariancji zakłóceń pomiarowych (odpowiada za błędy pomiaru).

Ponieważ macierz $\mathbf{P}(k)$ jest macierzą kowariancji estymatora $\hat{\mathbf{d}}(k)$, zatem jeśli przyjmiemy określoną wartość $\hat{\mathbf{d}}(0)$, wówczas $\mathbf{P}(0)$ jest miarą zaufania co do przyjętej wartości $\hat{\mathbf{d}}(0)$. Przy braku informacji o śledzonym procesie najczęściej przyjmuje się:

$\hat{\mathbf{d}}(0) = 0$, $\mathbf{P}(0) = \delta \mathbf{1}$, ($\mathbf{1}$ - macierz jednostkowa),

gdzie wartość δ dobiera się według zasady: im większe δ tym szybciej $\hat{\mathbf{d}}(k)$ zmienia się w odniesieniu do $\hat{\mathbf{d}}(0)$ (co w praktyce objawia się dużym przeregulowaniem na początku estymacji) i odwrotnie: mała wartość δ , to niewielkie różnice między $\hat{\mathbf{d}}(k)$ w kolejnych krokach.

Wartość początkową macierzy $\mathbf{A}(0)$ najczęściej przyjmuje się jako macierz jednostkową. Im spodziewamy się większych zmian estymowanych wartości, tym przyjęta wartość $\mathbf{Q}(k)$ powinna być większa. W znacznej mierze przyjmuje się wartość stałą dla wszystkich k , czyli $\mathbf{Q}(k) = \mathbf{Q}$. Analogicznie przyjmuje się $\mathbf{R}(k) = \mathbf{R} = \rho$ gdzie ρ - odpowiednio „mała” liczba.

Rozszerzony filtr Kalmana

Wygoda i efektywność w stosowaniu liniowego filtra Kalmana spowodowały poszukiwanie podobnego narzędzia w odniesieniu do systemów nieliniowych. Niech model sygnału zapisany będzie następującymi równaniami nieliniowymi [27]:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}(k+1) &= \mathbf{f}(\mathbf{d}(k)) + \mathbf{w}(k), \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{h}(\mathbf{d}(k)) + \mathbf{v}(k), \end{aligned} \quad (2.35)$$

gdzie: wektory $\mathbf{d}(k)$, $\mathbf{y}(k)$, $\mathbf{w}(k)$, $\mathbf{v}(k)$ zdefiniowane są identycznie jak w przypadku liniowego filtra Kalmana.

W ogólnym przypadku nie można zagwarantować stabilności procesu estymacji dla nieliniowego systemu. Istnieje wiele sposobów linearyzacji równań (2.35), które dają możliwość estymacji wektora $\mathbf{d}(k)$ przy pomocy algorytmu nazywanego rozszerzonym filtrem Kalmana. Prezentowane niżej podejście należy do najczęściej wykorzystywanych.

Analogicznie jak w przypadku liniowego filtra Kalmana, kolejne kroki algorytmu przedstawiają się następująco:

- zakładając, że znana jest estymata $\hat{\mathbf{d}}(k-1)$ w kroku $k-1$, dokonujemy jej ekstrapolacji w kroku bieżącym k :

$$\tilde{\mathbf{d}}(k) = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{d}}(k-1)), \quad (2.36)$$

- obliczamy macierz kowariancji błędów ekstrapolatora:

$$\tilde{\mathbf{P}}(k) = \mathbf{F}(k-1) \mathbf{P}(k-1) \mathbf{F}^T(k-1) + \mathbf{Q}(k-1), \quad (2.37)$$

gdzie:

$$\mathbf{F}(k) = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{d}(t))}{\partial \mathbf{d}(t)} \right|_{\mathbf{d}(t)=\hat{\mathbf{d}}(t_k)}, \quad (2.38)$$

- określamy macierz wzmocnień Kalmana:

$$\mathbf{K}(k) = \tilde{\mathbf{P}}(k) \mathbf{H}^T(k) [\mathbf{H}(k) \tilde{\mathbf{P}}(k) \mathbf{H}^T(k) + \mathbf{R}(k)]^{-1}, \quad (2.39)$$

gdzie:

$$\mathbf{H}(k) = \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{d}(t))}{\partial \mathbf{d}(t)} \right|_{\mathbf{d}(t)=\tilde{\mathbf{d}}(t_k)}, \quad (2.40)$$

- oraz macierz kowariancji błędów estymacji:

$$\mathbf{P}(k) = \tilde{\mathbf{P}}(k) - \mathbf{K}(k) \mathbf{H}(k) \tilde{\mathbf{P}}(k), \quad (2.41)$$

- następnie określamy estymatę:

$$\hat{\mathbf{d}}(k) = \tilde{\mathbf{d}}(k) + \mathbf{K}(k) [\mathbf{y}(k) - \mathbf{h}(\tilde{\mathbf{d}}(k))]. \quad (2.42)$$

Wartości $\mathbf{P}(0)$, $\hat{\mathbf{d}}(0)$, $\mathbf{Q}(k)$, $\mathbf{R}(k)$ przyjmuje się analogicznie jak w przypadku liniowego filtru Kalmana.

2.3. Obróbka wyników pomiaru

Obliczone wartości estymowanych parametrów, szczególnie przy realizacji w układach rzeczywistych, najczęściej występują z pewnym błędem, będącym efektem występowania tzw. „szumów pomiarowych” oraz niedokładności obliczeń numerycznych. Wyniki pomiarów są wtedy w miarę równomiernie rozłożone wokół wartości zadanej. Podobnie, w przypadku niewielkiego niedopasowania rzędu modelu do rzędu sygnału, wyniki pomiarów niekiedy wyrażnie oscylują wokół wartości rzeczywistej. Aby zapobiec sytuacji odczytu wyniku pomiaru w najbardziej niekorzystnym momencie, czyli przy największej odchyłce od wartości rzeczywistej, konieczna jest odpowiednia obróbka wyników pomiaru. W takiej sytuacji bardzo dobre rezultaty daje stosowanie filtru uśredniającego. Praktyczna realizacja filtru uśredniającego odbywa się zgodnie ze wzorem (2.2) przy współczynnikach filtru $w(n) = 1$ i najczęściej $N_f = N$ (czyli liczbie próbek w okresie podstawowej harmonicznej sygnału - filtr pełnookresowy):

$$x_f(k) = \frac{1}{N_f} \sum_{n=0}^{N_f-1} y(k-n) \quad (2.43)$$

Stosowanie filtru uśredniającego staje się problematyczne, jeżeli sporadycznie (nieokresowo) pojawiają się zakłócenia wyniku w postaci tzw. „szpilek”, szczególnie o dużej amplitudzie. Charakterystyka tego filtru powoduje, że wpływ tych „szpilek” będzie widoczny jeszcze długo po ich zaniku, do momentu, aż będą znajdowały się w oknie filtru. W takiej sytuacji lepszy rezultat daje stosowanie filtru medianowego. Filtr medianowy realizowany jest w postaci algorytmu numerycznego znajdującego środkową wartość z N_f elementów posor-

townych rosnąco lub malejąco. Jego działanie skutecznie eliminuje występowanie zakłóceń o charakterze „szpilek”.

2.4. Metody testowania i weryfikacji algorytmów pomiaru częstotliwości

W pracy dokonano przeglądu i porównania kilkunastu metod pomiaru częstotliwości w systemie elektroenergetycznym oraz zaproponowano nową metodę. W celu zapewnienia wiarygodnego porównania wszystkie algorytmy sprawdzono w jednakowy sposób.

Obliczeń dokonano z wykorzystaniem pakietu matematycznego MATLAB. Przy symulacji założono częstotliwość próbkowania $f_p = 1$ kHz ($N = 20$ próbek przypadających na okres podstawowej harmonicznej).

Do oceny dokładności pomiaru stosuje się miarę względnego błędu pomiarowego określoną następująco:

$$\delta = \frac{f_{sr} - f}{f} 100 [\%], \quad (2.44)$$

gdzie:

f_{sr} - wartość częstotliwości po ustaleniu pomiaru (jeżeli pomiar nie ustala się, to jest to wartość średnia za N pomiarów),

f - zadana wartość częstotliwości.

Wykorzystano szereg utworzonych w MATLAB-ie sygnałów testowych różniących się zawartością harmonicznymi, zarówno jednofazowych, jak i trójfazowych oraz rzeczywistych sygnałów będących wynikiem symulacji w pakiecie ATP/EMTP (**E**lectro-**M**agnetic **T**ransients **P**rogram) [6], będącym światowym standardem do symulacji procesów zachodzących w systemach energetycznych. Sygnały te zostały opisane w Dodatku A. Przedstawione w pracy charakterystyki błędów pomiarowych są wykonane dla tychże sygnałów i należy mieć na względzie, że mogą się one w niewielkim stopniu zmieniać w przypadku stosowania innych sygnałów, zwłaszcza tych utworzonych w MATLAB-ie. Dotyczy to m. in. zakładanej fazy sygnałów, szczególnie w przypadku algorytmów „czułych” na zmiany fazy. Nie zmienia to jednak ogólnej oceny prezentowanych algorytmów, ponieważ sygnały testowe są jednakowe dla nich wszystkich.

W celu praktycznej weryfikacji zaproponowanego algorytmu pomiaru częstotliwości zbudowane zostało stanowisko badawczo-laboratoryjne, w maksymalnym stopniu zbliżone do rzeczywistych układów pomiarowych stosowanych we współczesnych urządzeniach automatyki elektroenergetycznej. Stanowisko to zostało opisane w rozdziale 6.

3. POMIAR CZĘSTOTLIWOŚCI W UKŁADZIE JEDNOFAZOWYM

3.1. Metody wykorzystujące liniowy model sygnałowy

Niech sygnał wejściowy dany będzie równaniem pierwszego rzędu:

$$y(t) = X \sin(2\pi ft + \varphi). \quad (3.1)$$

Po próbkowaniu, równanie (3.1) można przedstawić w postaci dyskretnej:

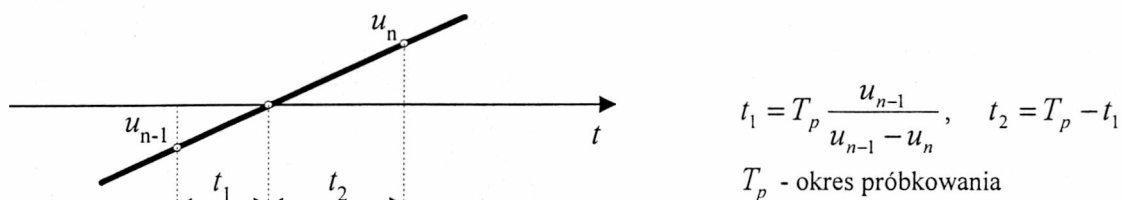
$$y(k) = X \sin(2\pi f k T_p + \varphi_k), \quad (3.2)$$

gdzie: T_p - okres próbkowania.

Zadanie pomiaru częstotliwości sprowadza się do określenia parametru f na podstawie ciągu wartości $y(k)$.

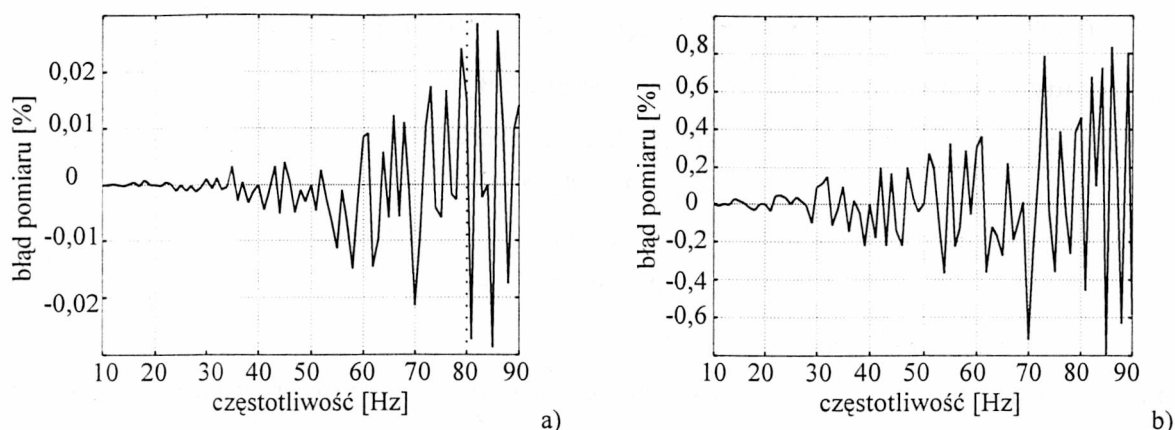
W algorytmach tej grupy zakłada się wstępnie, że częstotliwość f jest znana, co pozwala na nazwanie tak zdefiniowanego modelu liniowym. Wartość początkowa może być równa wartości znamionowej. Umożliwia to dokonywania różnych operacji na sygnale (na przykład estymacja sygnału zespolonego). Uzyskane w ten sposób zależności umożliwiają następnie korekcję założonej częstotliwości początkowej.

W najprostszym przypadku częstotliwość można określić poprzez pomiar wielokrotności połowy okresu mierzonego sygnału. Pomiar polega na zliczaniu impulsów próbek, które przypadają na okres (półokres) badanego sygnału. Aby zminimalizować błąd pomiaru, a jednocześnie nie stosować dużych częstotliwości próbkowania, zwiększa się dokładność wyznaczenia chwil przechodzenia krzywej napięcia przez zero. Dokonuje się tego poprzez aproksymację przebiegu napięcia między dwoma próbkami o różnych znakach odcinkiem linii prostej (rys. 3.1) [45]. Ten sposób pomiaru wymaga, aby sinusoidalny sygnał pozbawiony był składowej stałej i wyższych harmonicznnych, o amplitudach zbliżonych do wartości 1 j.w. (szczególnie zgodnych w fazie z sygnałem podstawowej harmonicznnej). W przeciwnym razie konieczne jest poddanie sygnału wstępnej filtracji.



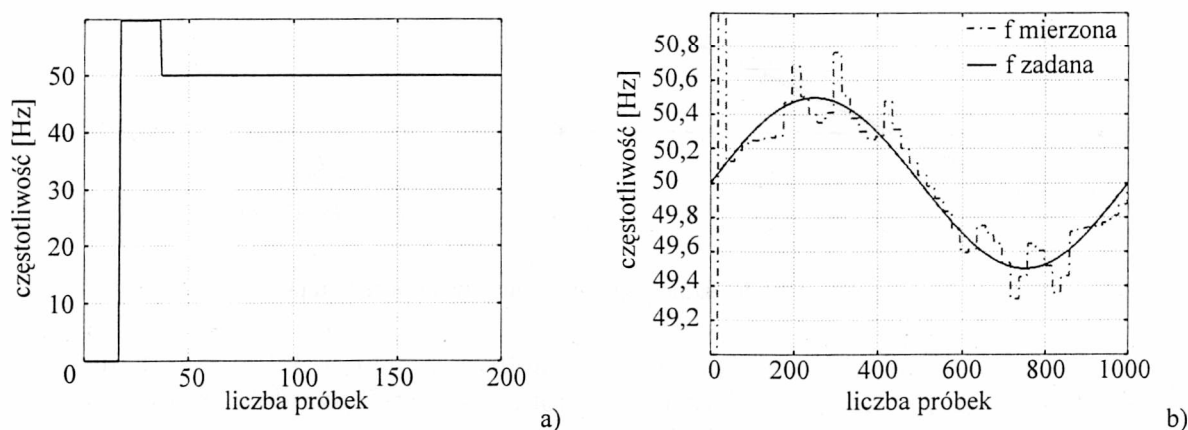
Rys. 3.1. Szkic do dokładnego wyznaczania chwili przejścia przez zero

Jak widać z zależności błędu pomiaru od częstotliwości na rys. 3.2, maksymalny błąd pomiaru rośnie wraz ze wzrostem mierzonej częstotliwości (mniejsza dokładność wyznaczenia chwil przechodzenia krzywej napięcia przez zero), jednakże w zakresie pomiarowym 10...90 Hz i tak nie przekracza $\pm 0,03\%$ dla sygnału o zawartości tylko podstawowej harmonicznnej (typu A - patrz Dodatek A.1) i $\pm 0,9\%$ dla sygnału o zawartości pięciu harmonicznnych (typu D - patrz Dodatek A.1). Poziom błędów ulega zmniejszeniu wraz ze wzrostem częstotliwości próbkowania (przy stałym okresie mierzonego sygnału), czyli ze wzrostem liczby próbek w okresie.



Rys. 3.2. Zależność błędu pomiaru od częstotliwości dla sygnału typu A (a) i dla sygnału typu D (b)

Czas ustalenia się pomiaru częstotliwości po uruchomieniu algorytmu jest zmienny i maleje wraz ze wzrostem częstotliwości. Dla 50 Hz wynosi on 37 próbek dla przykładowego sygnału typu D i $f_p = 1$ kHz (rys. 3.3a). Maksymalny błąd pomiarowy po ustaleniu sygnału nie przekracza $\pm 0,6\%$ (dla częstotliwości różnych od 50 Hz). Algorytm zachowuje się również poprawnie dla sygnału o częstotliwości zmiennej liniowo, czy też np. zgodnie z przebiegiem funkcji sinus. Jak widać na rys. 3.3b, dla sygnału typu D największy błąd, nie przekraczający jednak $\pm 0,6\%$, występuje w momencie zmiany znaku pochodnej funkcji według której zmienia się częstotliwość (w rozpatrywanym przykładzie funkcja sinus). Wraz ze spadkiem liczby harmonicznych sygnału błędy zmniejszają się przyjmując wartości bliskie zero dla sygnałów o zawartości tylko podstawowej harmonicznej. W przypadku sygnału charakteryzującego się skokową zmianą amplitudy z wartości 1,0 j.w. na 0,8 j.w. przy stałej częstotliwości odpowiedź układu ustala się po ok. 28 próbkach dla sygnału typu D. Dla sygnału typu A zmiana amplitudy nie ma żadnego wpływu na pomiar częstotliwości.



Rys. 3.3. Odpowiedź algorytmu na sygnał typu D: o częstotliwości 50 Hz (uruchomienie algorytmu) (a), o częstotliwości zmiennej zgodnie z przebiegiem funkcji sinus (b)

3.1.1. Pomiar częstotliwości poprzez określanie fazy sygnału

Przedstawiając równanie (3.2) dla próbek $k-m$ i $k+m$ otrzymamy [31]:

$$\begin{aligned} y(k-m) &= X \sin(2\pi f(k-m)T_p + \varphi_k), \\ y(k+m) &= X \sin(2\pi f(k+m)T_p + \varphi_k), \end{aligned} \quad (3.3)$$

gdzie m oznacza przesunięcie.

Po odpowiednich przekształceniach:

$$\begin{aligned} X \sin \varphi_k &= \frac{y(k+m) + y(k-m)}{2 \cos(2\pi f m T_p)}, \\ X \cos \varphi_k &= \frac{y(k+m) - y(k-m)}{2 \sin(2\pi f m T_p)}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

W powyższym układzie równań występują dwie niewiadome X i φ_k . Obustronne podzielenie górnego równania przez dolne, eliminuje niewiadomą X . Kąt fazowy φ_k wyznaczamy zatem ze wzoru:

$$\varphi_k = \arctg \left(\frac{X \sin \varphi_k}{X \cos \varphi_k} \right). \quad (3.5)$$

Numeryczny problem określenia powyższej zależności pojawia się, gdy przy obliczaniu prawej strony równań (3.4) mianownik jest bliski zera. W celu zminimalizowania tego błędu, proponowane jest użycie ważonych kombinacji estymat $X \sin \varphi_k$ i $X \cos \varphi_k$ obliczonych przy użyciu różnych okien pomiarowych [31]. W efekcie otrzymamy:

$$\begin{aligned} X \sin \varphi_k &= 0,6x(k) + 0,3 \frac{y(k+1) + y(k-1)}{2 \cos(2\pi f_k m T_p)} + 0,1 \frac{y(k+2) + y(k-2)}{2 \cos(4\pi f_k m T_p)}, \\ X \cos \varphi_k &= 0,1 \frac{y(k+1) - y(k-1)}{2 \sin(2\pi f_k m T_p)} + 0,2 \frac{y(k+2) - y(k-2)}{2 \sin(4\pi f_k m T_p)} + 0,7 \frac{y(k+3) - y(k-3)}{2 \sin(6\pi f_k m T_p)}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Aby obliczyć niewiadomą częstotliwość potrzebna jest znajomość jeszcze jednej wartości φ dla innej chwili czasowej. Kąt fazowy dla próbki $k+i$ będzie wynosił:

$$\varphi_{k+i} = \varphi_k + (2\pi i T_p) f_k. \quad (3.7)$$

We wzorze (3.7) występują dwie niewiadome: φ_k i f_k . Zapisując wzór (3.7) dla różnych wartości i z przedziału $\langle -L, L \rangle$ i wykorzystując metodę najmniejszych kwadratów ostatecznie otrzymamy:

$$f_k = \frac{1}{D} \sum_{i=-L}^L i \varphi_{k+i}, \quad (3.8)$$

gdzie:

$$D = 2\pi T_p \sum_{i=-L}^L i^2.$$

Ponieważ równania (3.6) są funkcją nieznaną częstotliwości, zatem w kolejnym kroku obliczeniowym przyjmujemy wartość f z poprzedniego kroku (w pierwszym kroku zakładamy wartość znamionową 50 Hz), następnie liczymy częstotliwość metodą kolejnych przybliżeń podstawiając obliczoną wartość f_k ze wzoru (3.8) do wzorów (3.6).

Aby zminimalizować wpływ szumów występujących w sygnale mierzonym można zastosować do obliczonej częstotliwości filtr Kalmana, wg wzoru:

$$\hat{f}_k = \hat{f}_{k-1} + K(f_k - \hat{f}_{k-1}), \quad (3.9)$$

gdzie:

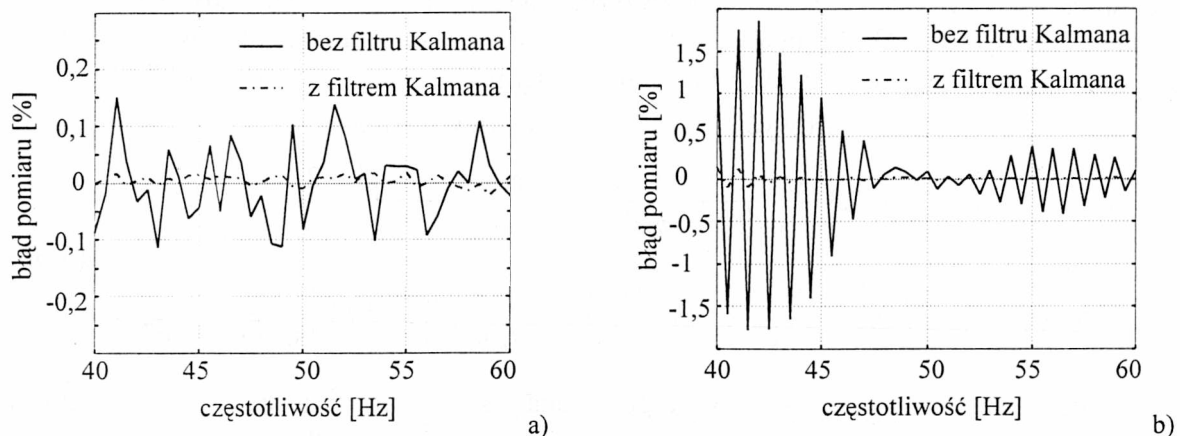
f_k - częstotliwość obliczona zgodnie z wzorem (3.8),

$\hat{f}_k, \hat{f}_{k-1}$ bieżąca i poprzednia estymata filtru,

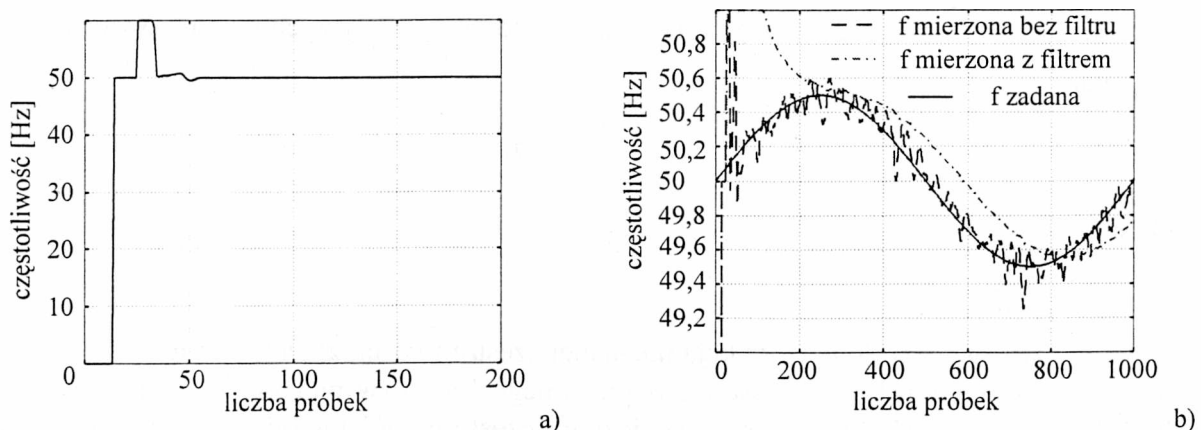
K - zmienne wzmocnienie filtru.

Wartość K dobiera się w zależności od spodziewanych szumów (ich wariancji) na wyjściu algorytmu metody najmniejszych kwadratów. Decyduje ona o właściwościach filtru i jest określana na podstawie charakterystyk probabilistycznych sygnału [49]. Algorytm (3.9) przedstawia w istocie filtr nierekursywny o zmiennym współczynniku wzmocnienia. Powinien to być filtr dolnoprzepustowy.

Zależność błędu pomiaru od częstotliwości dla sygnałów typu A i B (patrz Dodatek A) przedstawia rys. 3.4. Widać wyraźnie efekt działania filtru w odniesieniu do sygnałów z nałożonym dodatkowo szumem o współczynniku $\text{SNR} = 40 \text{ dB}$. Do obliczeń przyjęto $L = 10$ (co daje długość okna pomiarowego 20 próbek) oraz wzmocnienie filtru Kalmana $K = 0,012$. Niestety, algorytm nie nadaje się do zastosowania gdy liczba harmoniczných zawartych w sygnale jest większa od dwóch.



Rys. 3.4. Zależność błędu pomiaru od częstotliwości dla sygnałów z nałożonym szumem: typu A (a) i typu B (b)



Rys. 3.5. Odpowiedź algorytmu na sygnał typu A: o częstotliwości 50 Hz (uruchomienie algorytmu) (a), o częstotliwości zmiennej zgodnie z przebiegiem funkcji sinus (sygnał z dodatkowo nałożonym szumem) (b)

Czas ustalenia się pomiaru częstotliwości sygnału typu A po uruchomieniu algorytmu wynosi 53 próbki dla $f_p = 1$ kHz (rys. 3.5a). Rys. 3.5b przedstawia reakcję na zmiany częstotliwości w trakcie pomiaru. Do sygnału typu A dodatkowo dołożony został szum biały o współczynniku $\text{SNR} = 40$ dB. Widoczny jest efekt wygładzający filtru oraz opóźnienie które filtr wprowadza (bez filtru - opóźnienie ok. 12 próbek, z filtrem - ok. 100 próbek dla częstotliwości próbkowania $f_p = 1$ kHz). Im większa wartość wzmocnienia K filtru, tym krótszy czas reakcji algorytmu na zmiany, ale niestety tym gorsze tłumienie zakłóceń.

3.1.2. Wykorzystanie rozkładu sygnału na składowe ortogonalne

Podajmy sygnał $y(k)$ ze wzoru (3.2) działaniu ortogonalnych filtrów cyfrowych zgodnie z rys. 2.2. Efektem działania ortogonalizacji jest zastąpienie rzeczywistego sygnału $y(k)$, sygnałem zespolonym $\underline{y}(k)$. Sygnał po filtracji $\underline{y}(k)$ jest zależny od użytych filtrów F_c , F_s zgodnie z równaniem [26]:

$$\underline{y}(k) = e^{j\vartheta(q)} X \{ A(q) \cos[qak + \varphi + \xi(q)] + jB(q) \sin[qak + \varphi + \xi(q)] \}, \quad (3.10)$$

gdzie:

$$A(q) = \frac{|H(jq)| + |H(-jq)|}{2}, \quad B(q) = \frac{|H(jq)| - |H(-jq)|}{2},$$

$$\vartheta(q) = \frac{\gamma(q) + \gamma(-q)}{2}, \quad \xi(q) = \frac{\gamma(q) - \gamma(-q)}{2},$$

$$H(jq) = H_c(jq) + jH_s(jq) = |H(jq)|e^{j\gamma(q)},$$

przy czym:

$$a = \frac{2\pi}{N},$$

N - liczba próbek w okresie podstawowej harmoniczej.

$$q = \frac{f}{f_0} \text{ - względna częstotliwość mierzonego sygnału,}$$

f - częstotliwość sygnału mierzonego,

$f_0 = 50$ Hz - częstotliwość znamionowa podstawowej harmoniczej,

$H_c(jq), H_s(jq)$ - charakterystyki częstotliwościowe filtrów ortogonalizujących F_c, F_s z uwzględnieniem fazy,

$A(q), B(q)$ - obwiednie charakterystyki częstotliwościowej amplitudy,

$\gamma(q)$ - charakterystyka fazowa filtru $H(jq)$,

φ - faza początkowa sygnału,

Dla filtrów nierekursywnych o liniowej charakterystyce fazowej zachodzi:

$$\vartheta(q) = 0 \quad \text{i} \quad \xi(q) = dq,$$

gdzie:

$$d \text{ - stała, np. dla pełnookresowego filtru Fouriera } d = -\frac{N-1}{2}qa,$$

zatem równanie (3.10) przyjmuje postać:

$$\underline{y}(k) = X[A(q) \cos(qak + \alpha) + jB(q) \sin(qak + \alpha)] = x_c(k) + jx_s(k), \quad (3.11)$$

gdzie:

$$\alpha = \varphi + \xi(q) = \varphi + dq.$$

Równanie (3.11) dla kroku $k+1$:

$$\underline{y}(k+1) = X\{A(q)\cos[qa(k+1)+\alpha] + jB(q)\sin[qa(k+1)+\alpha]\}. \quad (3.12)$$

Równania (3.11) i (3.12) możemy zapisać następująco:

$$\begin{aligned} x_c(k) &= XA(q)\cos(qak+\alpha), \\ x_s(k) &= XB(q)\sin(qak+\alpha), \\ x_c(k+1) &= XA(q)\cos(qa(k+1)+\alpha), \\ x_s(k+1) &= XB(q)\sin(qa(k+1)+\alpha). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Wynikają stąd następujące zależności rekurencyjne (po uporządkowaniu indeksów):

$$\begin{aligned} x_c(k) &= x_c(k-1)\cos\varphi - \frac{A(q)}{B(q)}x_s(k-1)\sin\varphi, \\ x_s(k) &= x_s(k-1)\cos\varphi + \frac{B(q)}{A(q)}x_c(k-1)\sin\varphi, \end{aligned} \quad (3.14)$$

ale ponieważ $\varphi = a\frac{f}{f_0}$, zatem obliczając φ z układu równań (3.14) znajdujemy szukaną częstotliwość:

$$f = \frac{f_0}{a} \arccos \frac{x_c(k)x_s(k) + x_c(k-1)x_s(k-1)}{x_c(k)x_s(k-1) + x_c(k-1)x_s(k)}. \quad (3.15)$$

Aby zminimalizować błąd pomiaru dla sygnałów o zawartości wyższych harmonicznych, przeprowadzono analizę dla sygnału typu D, dla następujących przypadków:

- 1° wartość φ obliczona na podstawie próbek w chwili k i $k-1$, wartość f liczona jak wyżej, ze wzoru (3.15),
- 2° wartość φ obliczona na podstawie próbek w chwili k i $k-m$ (m - opóźnienie),

We wzorach (3.14) w miejsce $k+1$ podstawiamy $k+m$ i analogicznie jak wyżej obliczamy:

$$f = \frac{f_0}{am} \arccos \frac{x_c(k)x_s(k) + x_c(k-m)x_s(k-m)}{x_c(k)x_s(k-m) + x_c(k-m)x_s(k)}, \quad (3.16)$$

- 3° wartość φ obliczona na podstawie próbek w chwili k , $k-m_1$ i $k-m_2-m_1$ ($m_2 > m_1$).

Wzory (3.14) zapisujemy dwukrotnie: raz dla chwili $k-m_1$ i drugi raz dla chwili $k-m_2$ ($m_2 > m_1$). Tak powstały układ czterech równań zapisujemy w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} x_c(k-m_2) \\ x_s(k-m_2) \\ x_c(k) \\ x_s(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_c(k-m_2-m_1) & -x_s(k-m_2-m_1) & 0 \\ x_s(k-m_2-m_1) & 0 & x_c(k-m_2-m_1) \\ x_c(k-m_1) & -x_s(k-m_1) & 0 \\ x_s(k-m_1) & 0 & x_c(k-m_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ p\sin\varphi \\ p^{-1}\sin\varphi \end{bmatrix}, \quad (3.17)$$

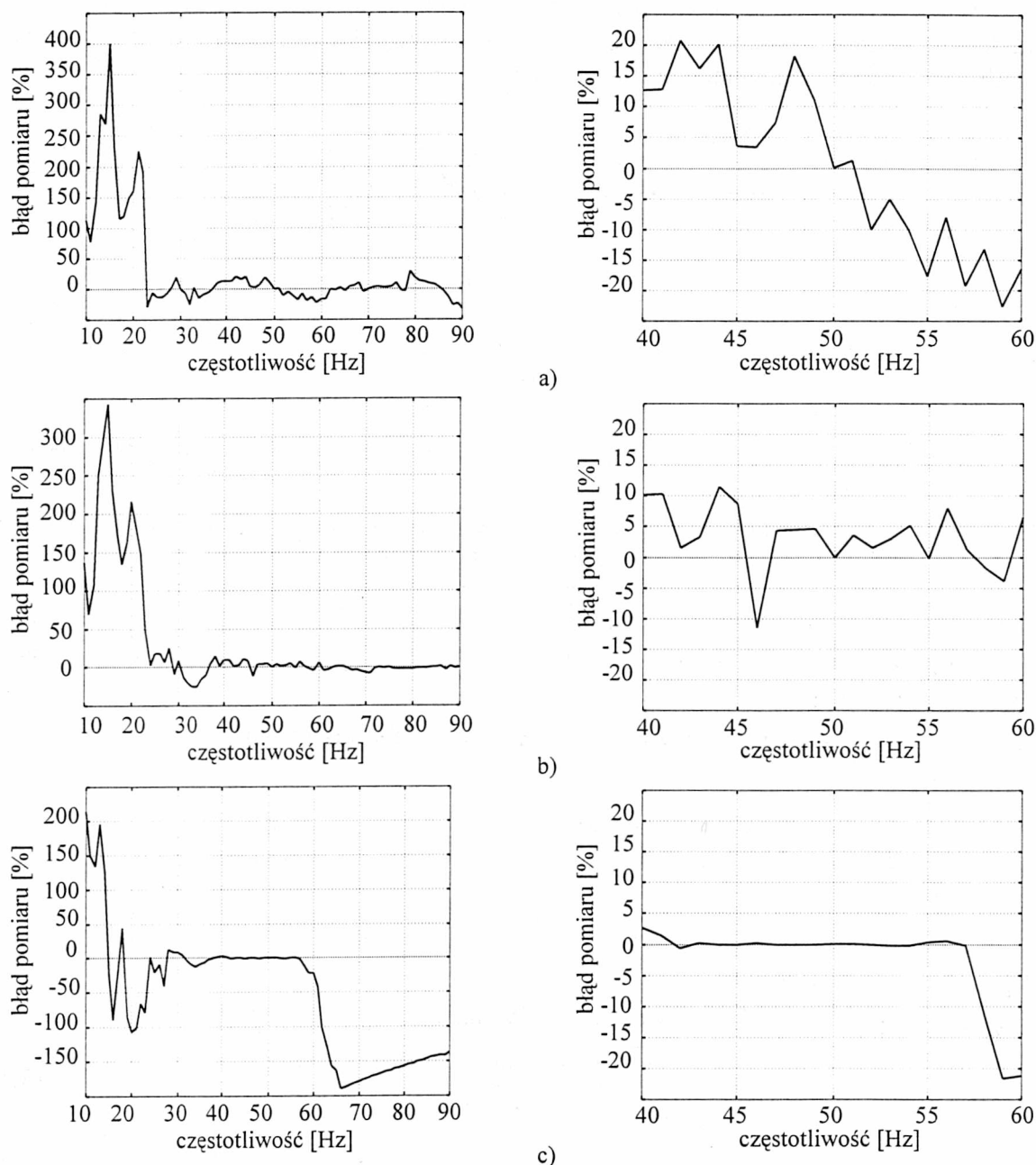
gdzie: $p = \frac{A(q)}{B(q)}$.

Równanie (3.17) (niewiadome p i φ) można rozwiązać względem wektora niewiadomych $[\cos\varphi \quad p\sin\varphi \quad p^{-1}\sin\varphi]^T$ stosując metodę najmniejszych kwadratów.

Najkorzystniejsze wyniki uzyskano dobierając doświadczalnie:

- w przypadku 2° - wartość $m = N/4$,

- w przypadku 3° - wartość $m_1 = N/4 - 1$ i $m_2 = N/4$ oraz obliczając φ z powiązania $p \sin \varphi$ i $p^{-1} \sin \varphi$ lub obliczając φ z powiązania $\cos \varphi$, $p \sin \varphi$ i $p^{-1} \sin \varphi$ otrzymanych w wyniku rozwiązania równania (3.17).

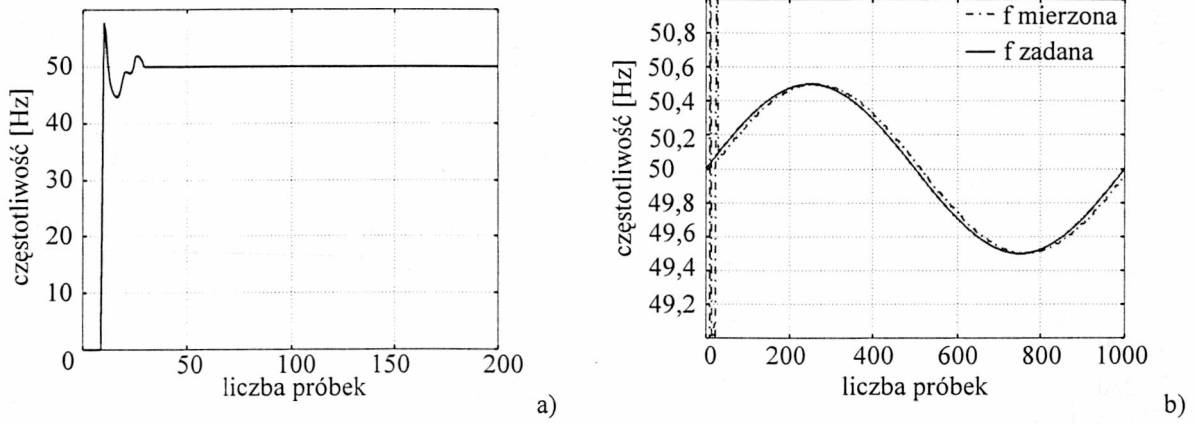


Rys. 3.6. Zależność błędu pomiaru od częstotliwości dla sygnału typu D (opis w tekście):
przypadek 1° (a), przypadek 2° (b), przypadek 3° (c)

Wartości m , m_1 i m_2 dobrano na drodze kompromisu: im większe m (lub m_1 i m_2), tym mniejszy błąd pomiaru, ale niestety węższy zakres pomiarowy (przede wszystkim górna granica) oraz dłuższy czas reakcji algorytmu na zmianę częstotliwości.

Zależności błędu pomiaru od częstotliwości dla przypadków 1° , 2° , 3° w zakresie 10...90 Hz i 40...60 Hz zostały zamieszczone na rys. 3.6. Jak widać z rysunku, najmniejszy błąd pomiaru jest w przypadku 3° . Jednakże należy pamiętać, że w tych przypadkach obliczenia są dużo bardziej czasochłonne niż w przypadkach 1° i 2° .

Czas ustalenia się pomiaru częstotliwości sygnału typu A po uruchomieniu algorytmu wynosi $(N+m_1+m_2)$ próbek dla przypadku 3° (rys. 3.7a). Algorytm zachowuje się poprawnie również dla sygnału o częstotliwości zmiennej w czasie, np. zgodnie z przebiegiem funkcji sinus (rys. 3.7b). Czas odpowiedzi jest wtedy mniejszy niż przy skokowej zmianie częstotliwości i wynosi około 15 próbek (dla $N = 20$, $m_1 = N/4 - 1$ i $m_2 = N/4$). W przypadku sygnału charakteryzującego się skokową zmianą amplitudy z wartości 1,0 j.w. na 0,8 j.w. przy stałej częstotliwości, odpowiedź układu ustala się po 25 $(N+m_1+m_2)$ próbkach.



Rys. 3.7. Odpowiedź algorytmu 3° na sygnał typu A: o częstotliwości 50 Hz (uruchomienie algorytmu) (a), o częstotliwości zmiennej zgodnie z przebiegiem funkcji sinus (b)

Inny sposób pomiaru częstotliwości przy użyciu składowych ortogonalnych można uzyskać posługując się wektorowym przedstawieniem sygnału [26], [44]. Dla sygnału (3.2) można zapisać następującą ogólną zależność:

$$\underline{y}(k)\underline{y}^*(k-m) = X^2(k)\cos(qam) + jX^2(k)\sin(qam), \quad (3.18)$$

gdzie:

m - przesunięcie sygnału (liczba próbek),

qam - kąt odpowiadający przesunięciu m ,

$q = \frac{f}{f_0}$ - częstotliwość względna mierzonego sygnału,

$(\cdot)^*$ - oznacza operację sprzężenia.

Po podstawieniu wzoru (3.2) do lewej strony równania (3.18) otrzymamy:

$$X(k) = \sqrt{\frac{x_s(k)x_c(k-m) - x_c(k)x_s(k-m)}{\sin(qam)}}, \quad (3.19)$$

gdzie:

$x_c(k)$, $x_s(k)$ - składowe sinusowa i kosinusowa otrzymane z ortogonalnych filtrów,

Widmowa postać zależności (3.19):

$$X(q) = X \sqrt{\frac{A(q)B(q)\sin(qam)}{\sin(am)}}, \quad (3.20)$$

gdzie: $A(q)$, $B(q)$ - obwiednie charakterystyki częstotliwościowej amplitudy.

Dla pełnookresowego filtru Fouriera mamy:

$$\begin{aligned} A(q) &= \frac{\sin(\pi q)}{N} \left| \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \right|, \\ B(q) &= \frac{\sin(\pi q)}{N} \left| \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} \right|, \end{aligned} \quad (3.21)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} p_1 &= |\sin(0,5a(q-1))|, \\ p_2 &= |\sin(0,5a(q+1))|. \end{aligned}$$

Składowe ortogonalne sygnału (3.1) można zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} x_c(k) &= A(\omega) X \cos(qak + \varphi), \\ x_s(k) &= B(\omega) X \sin(qak + \varphi), \end{aligned} \quad (3.22)$$

Po zapisaniu równań (3.22) dla próbki $(k-m)$ i odpowiednim przekształceniu łącznie z równaniami (3.22) otrzymamy następującą zależność rekurencyjną:

$$\begin{aligned} x_c(k) &= x_c(k-m) \cos(qam) - \frac{A(q)}{B(q)} x_s(k-m) \sin(qam), \\ x_s(k) &= x_s(k-m) \cos(qam) + \frac{B(q)}{A(q)} x_c(k-m) \sin(qam). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Uwzględniając, że: $\frac{A(q)}{B(q)} = \frac{\operatorname{tg}(0,5aq)}{\operatorname{tg}(0,5a)}$, dla $0 \leq q \leq \frac{N}{2}$,

oraz dla $m = 1$, po odpowiednich przekształceniach otrzymamy:

$$\begin{aligned} x_c(k) + x_c(k-1) + \frac{2}{\operatorname{tg}(0,5a)} x_s(k-1) &= 2 \left[x_c(k-1) + \frac{1}{\operatorname{tg}(0,5a)} x_s(k-1) \right] \cos^2(0,5aq), \\ x_s(k) + x_s(k-1) &= 2 [x_s(k-1) + \operatorname{tg}(0,5a) x_c(k-1)] \cos^2(0,5aq). \end{aligned} \quad (3.24)$$

W układzie równań (3.24) występują dwa równania, a tylko jedna niewiadoma (równania nadokreślone). Można je rozwiązać względem $\cos^2(0,5aq)$ stosując metodę najmniejszych kwadratów. Układ równań (3.24) można zapisać w postaci macierzowej:

$$\mathbf{B} = 2\mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (3.25)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} x_c(k-1) + \frac{1}{\operatorname{tg}(0,5a)} x_s(k-1) \\ x_s(k-1) + \operatorname{tg}(0,5a) x_c(k-1) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} x_c(k) + x_c(k-1) + \frac{2}{\operatorname{tg}(0,5a)} x_s(k-1) \\ x_s(k) + x_s(k-1) \end{bmatrix}, \\ x &= \cos^2(0,5aq). \end{aligned}$$

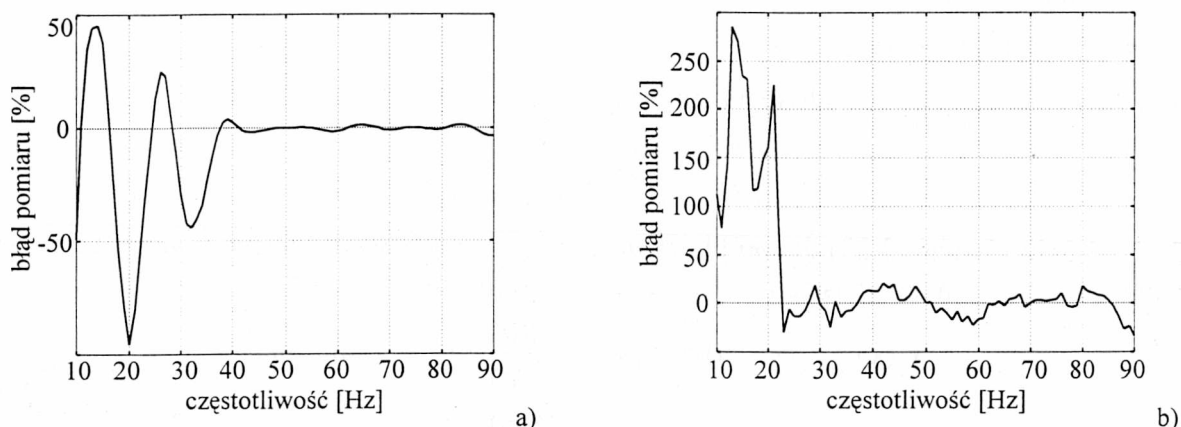
Zatem zgodnie z kryterium MNK:

$$x = 0,5(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{B}. \quad (3.26)$$

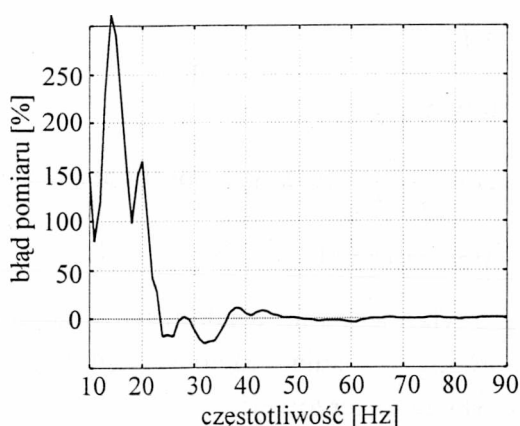
Stąd już bezpośrednio wyznaczamy częstotliwość f :

$$f = \frac{2f_0}{a} \arccos(\sqrt{x}). \quad (3.27)$$

Stosunkowo małe błędy występują dla sygnałów o zawartości pierwszej i drugiej harmonicznej (sygnał typu B). W zakresie 41...87 Hz maksymalne błędy wynoszą ok. $\pm 2\%$ (rys. 3.8a). Dla sygnałów o zawartości większej liczby harmonicznych błędy są duże i rosną wraz ze wzrostem liczby harmonicznych oraz ich amplitud (rys. 3.8b).



Rys. 3.8. Zależność błędu pomiaru od częstotliwości dla sygnału typu B (a) i dla sygnału typu D (b)

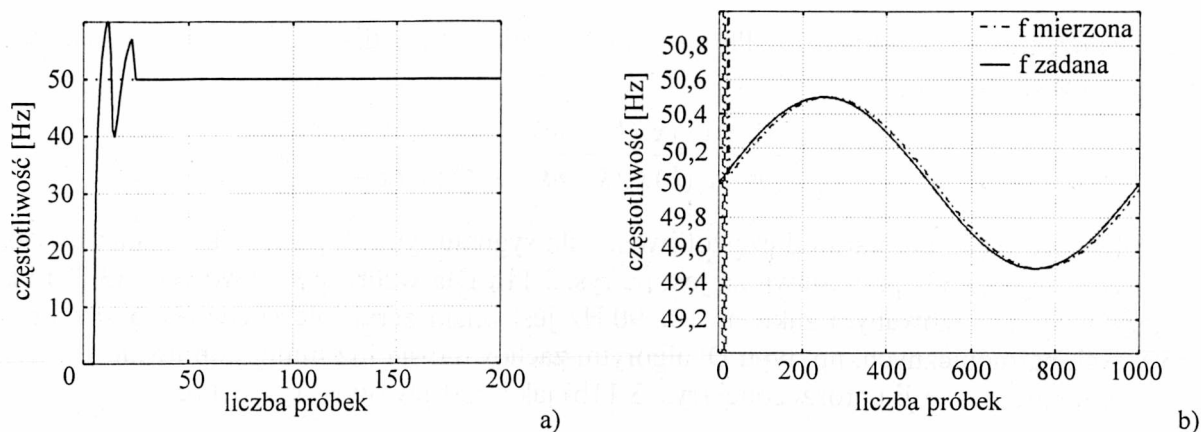


Rys. 3.9. Zależność błędu pomiaru od częstotliwości po korekcji dla sygnału typu D ($n = 5$)

Rozwiązanie równania (3.25) względem $\cos^2(0,5aq)$ ma postać ilorazu. Analiza licznika i mianownika tego ilorazu wykazuje, że główną przyczyną błędów w jego rozwiązaniu jest fakt częstego dzielenia liczb bliskich zero, czyli zasadniczy błąd leży po stronie numerycznej.

Aby zmniejszyć błędy skorygowano algorytm biorąc do obliczeń sumę n liczników i n mianowników. Własności algorytmu poprawiają się wraz ze wzrostem n (rys. 3.9), jednakże należy pamiętać, że im większe n , tym układ z większym opóźnieniem reaguje na zmiany częstotliwości. Przed korekcją maksymalne opóźnienie wynosiło N , a po korekcji $N+n$. Czas ustalenia się pomiaru częstotliwości sygnału typu A po uruchomieniu algorytmu wynosi 25 próbek dla $N = 20$, $n = 5$ i dla $f_p = 1$ kHz (rys. 3.10a).

Algorytm prawidłowo nadąża za zmianami częstotliwości np. zgodnie z przebiegiem funkcji sinus (rys. 3.10b). Czas odpowiedzi jest wtedy mniejszy i wynosi około 12 próbek (dla $N = 20$, $n = 5$ i $f_p = 1$ kHz). W przypadku sygnału charakteryzującego się skokową zmianą amplitudy z wartości 1,0 j.w. na 0,8 j.w. przy stałej częstotliwości odpowiedź układu ustala się po 25 ($N+n$) próbkach.



Rys. 3.10. Odpowiedź algorytmu po korekcji ($n = 5$) na sygnał typu A:
o częstotliwości 50 Hz (uruchomienie algorytmu) (a),
o częstotliwości zmiennej zgodnie z przebiegiem funkcji sinus (b)

Jeszcze inne wykorzystanie składowych ortogonalnych prezentowane jest w pracy [41]. Proponowana jest tam metoda bazująca na skończonych różnicach dyskretnych sygnałów napięcia lub prądu. Niech sygnał w chwili dyskretnej k będzie dany równaniem (3.2). Sygnał ten należy przetworzyć tak, aby uzyskać wielkość niezależną od jego chwilowej wartości, a będącą funkcją częstotliwości. W tym celu poddano sygnał mierzonej filtracji zgodnie z rys. 2.2 za pomocą pary nierekursywnych filtrów cyfrowych. Sygnały wyjściowe takich filtrów będą dane wzorami:

$$\begin{aligned} x_c(k) &= A(\omega)X \cos(k\omega T_p + \varphi), \\ x_s(k) &= B(\omega)X \sin(k\omega T_p + \varphi), \end{aligned} \quad (3.28)$$

gdzie: $A(\omega)$, $B(\omega)$ - obwiednie charakterystyki częstotliwościowej amplitudy.

Problemem jest znalezienie takiego algorytmu pomiaru częstotliwości, aby był niezależny od amplitudy sygnału pomiarowego i od wzmocnienia filtrów. W tym celu proponowane jest wyjście od prostego algorytmu pomiaru amplitudy przy użyciu ortogonalnych składowych sygnału [44]. Jeśli do funkcji:

$$g_m(\omega) = x_s(k)x_c(k-m) - x_c(k)x_s(k-m), \quad (3.29)$$

gdzie m - opóźnienie próbki względem chwili k ,
wprowadzimy składowe ortogonalne to otrzymamy:

$$g_m(\omega) = X^2 A(\omega)B(\omega) \sin(m\omega T_p). \quad (3.30)$$

Uzyskanie algorytmu niezależnego od amplitudy i wzmocnienia filtrów jest możliwe poprzez zastosowanie równania (3.29) dla innej wartości opóźnienia np. dwa razy większej niż poprzednio.

Po przekształceniach uzyskamy:

$$\frac{g_{2m}(\omega)}{g_m(\omega)} = 2 \cos(m\omega T_p), \quad (3.31)$$

a stąd:

$$f = \frac{Nf_0}{2\pi m} \arccos \frac{x_s(k)x_c(k-2m) - x_c(k)x_s(k-2m)}{x_s(k)x_c(k-m) - x_c(k)x_s(k-m)}, \quad (3.32)$$

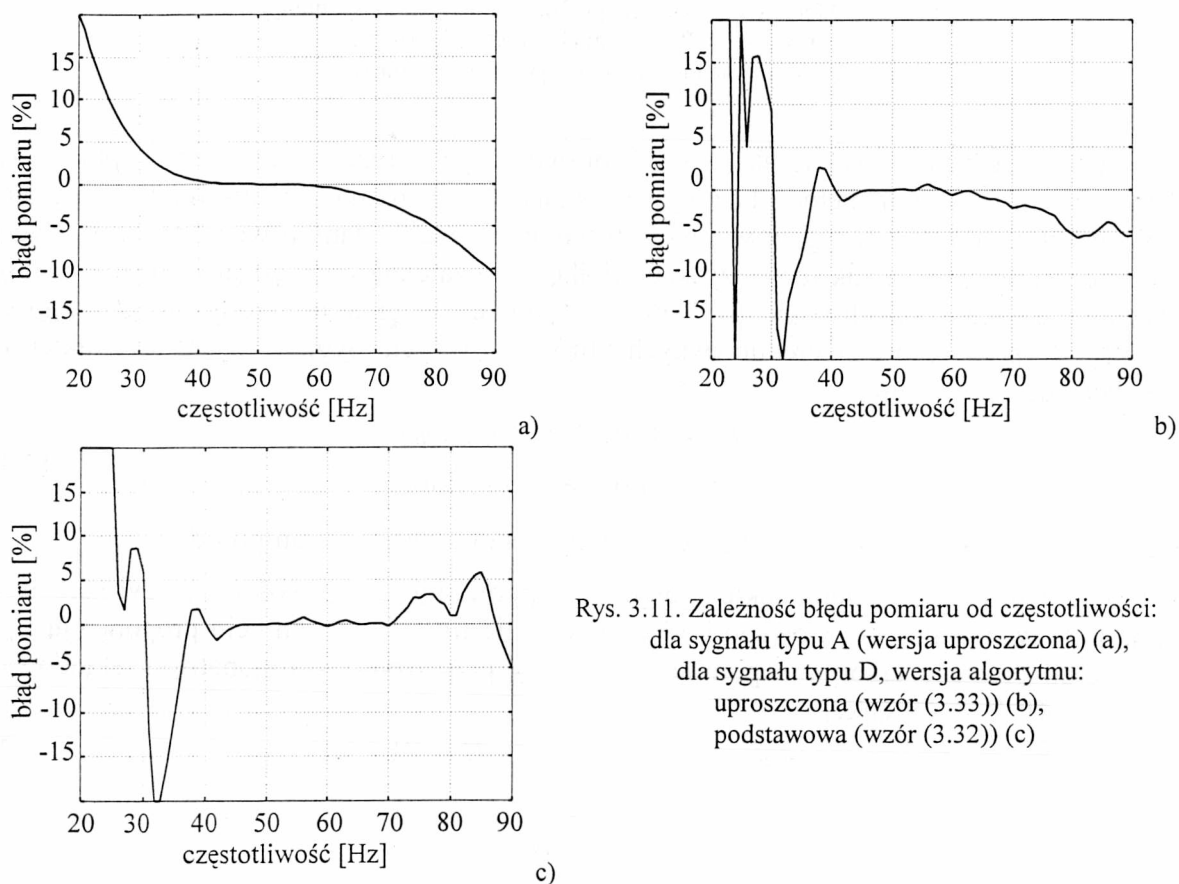
gdzie:

N - liczba próbek przypadająca na okres podstawowej harmonicznej.

Przy założeniu, że $m = N/4$ oraz dla niewielkich zmian częstotliwości ($\sin \alpha \approx \alpha$) można uzyskać uproszczoną wersję równania (3.32):

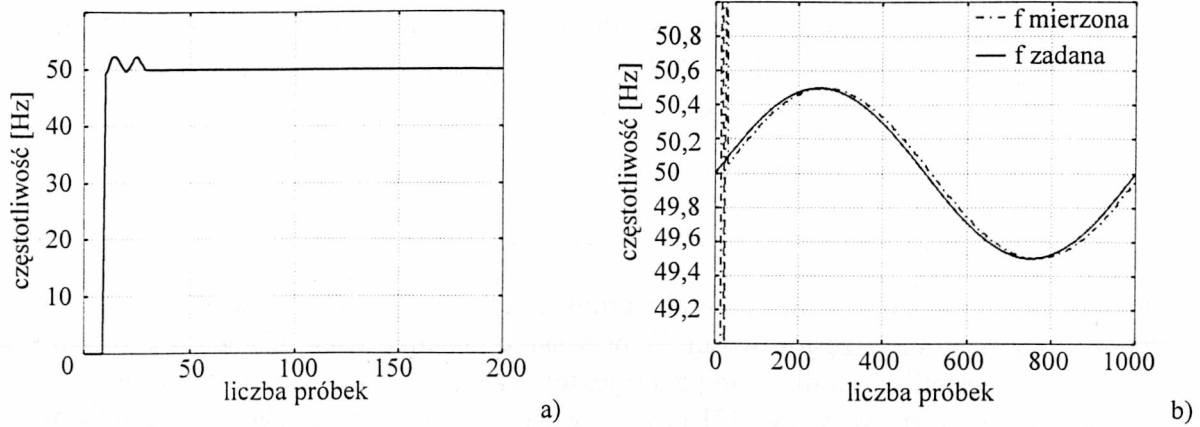
$$f \cong f_0 \left[1 - \frac{1}{\pi} \frac{x_s(k)x_c(k-2m) - x_c(k)x_s(k-2m)}{x_s(k)x_c(k-m) - x_c(k)x_s(k-m)} \right]. \quad (3.33)$$

Zależność błędu pomiaru od częstotliwości dla sygnału typu A przy wykorzystaniu wzoru uproszczonego (3.33) przedstawiona jest na rys. 3.11a. Dla wzoru podstawowego (3.32) błąd algorytmu w analizowanym zakresie 10...90 Hz jest bliski zeru. Dla sygnałów o zawartości wyższych harmonicznych, np. typu D, algorytm zachowuje się już mniej poprawnie i w zasadzie podobnie w wersji uproszczonej (rys. 3.11b) jak i podstawowej (rys. 3.11c).



Rys. 3.11. Zależność błędu pomiaru od częstotliwości:
 dla sygnału typu A (wersja uproszczona) (a),
 dla sygnału typu D, wersja algorytmu:
 uproszczona (wzór (3.33)) (b),
 podstawowa (wzór (3.32)) (c)

Czas ustalenia się pomiaru częstotliwości sygnału typu A po uruchomieniu algorytmu wynosi 30 próbek dla $m = N/4$ i $f_p = 1$ kHz (rys. 3.12a). Przy korzystaniu ze wzoru podstawowego (3.32), można przyjąć minimalne $m = 1$. Wtedy czas ustalenia wynosi 21 próbek. Algorytm prawidłowo nadąża za zmianami częstotliwości zgodnie z przebiegiem funkcji sinus (rys. 3.12b). Czas odpowiedzi jest wtedy mniejszy niż przy skokowej zmianie częstotliwości i wynosi około 15 próbek (dla $N = 20$, $m = 5$). W przypadku sygnału charakteryzującego się skokową zmianą amplitudy z wartości 1,0 j.w. na 0,8 j.w. przy stałej częstotliwości odpowiedź układu ustala się po 30 próbkach.



Rys. 3.12. Odpowiedź algorytmu na sygnał typu A: o częstotliwości 50 Hz (uruchomienie algorytmu) (a), o częstotliwości zmiennej zgodnie z przebiegiem funkcji sinus (b)

Algorytm adaptacyjny bazujący na nadążnej modyfikacji ortogonalnych filtrów w zależności od częstotliwości

Adaptacyjna wersja powyższej metody prezentowana jest w [42] i [43]. Algorytm dotyczy w zasadzie pomiarów amplitudy sygnału i wykorzystuje zgrubny pomiar częstotliwości w celu modyfikacji długości ortogonalnych filtrów. Załóżmy wstępnie, że opóźnienie próbki względem chwili k , $m = N/4$ oraz, że okna filtrów ortogonalnych mają długość $N_f = 4m$. Można udowodnić, że:

$$\cos(m\omega T_p) = \frac{x(k-2m)x(k-m) - x(k)x(k-3m)}{2(x(k-m)x(k-m) - x(k)x(k-2m))} \quad (3.34)$$

oraz że funkcja (3.34) jest proporcjonalna do zmian częstotliwości $\cos(m\omega T_p) \cong -mT_p(\omega - \omega_m)$.

W sytuacji gdy wartość funkcji (3.34) jest większa od założonego progu, wartość m (a co za tym idzie także długość okna filtracyjnego) zwiększana lub zmniejszana jest o 1, w zależności od znaku zmiany funkcji (3.34). Następny pomiar dokonywany jest przy użyciu nowej długości okna filtru ortogonalnego.

Częstotliwość wyznaczana jest na podstawie uproszczonego wzoru:

$$f = \frac{N}{N_f} f_0, \quad (3.35)$$

gdzie: N - liczba próbek przypadająca na okres podstawowej harmonicznej,
 $f_0 = 50\text{Hz}$ - częstotliwość znamionowa podstawowej harmonicznej.

Wadą powyższego rozwiązania jest stosunkowo mała dokładność pomiaru częstotliwości i konieczność stosowania dużych częstotliwości próbkowania (przynajmniej 4 kHz), co pozwala na dokładniejszą filtrację.

Niedogodności tej pozbawiony jest algorytm opisany w [33] zakładający dwuetapowe dochodzenie do wyniku pomiaru: w pierwszym kroku pomiar zgrubny, również poprzez zmianę długości ortogonalnych filtrów, następnie aproksymacja współczynników tychże filtrów. Kąt fazowy φ dla k -tej próbki wyniesie:

$$\varphi(k) = \arctg\left(\frac{x_s(k)}{x_c(k)}\right), \quad (3.36)$$

gdzie: $x_c(k)$, $x_s(k)$ - składowe sinusowa i kosinusowa otrzymane z ortogonalnych filtrów. Przedstawiając równanie (3.36) dla próbki $k-1$ możemy policzyć różnicę kątów fazowych:

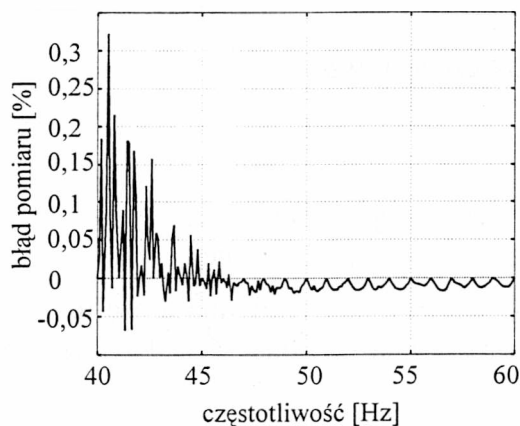
$$\Delta\varphi = \varphi(k) - \varphi(k-1), \quad (3.37)$$

a na jej podstawie szukaną częstotliwość:

$$f = \Delta\varphi \frac{f_0}{a}. \quad (3.38)$$

Powyższe rozważania są słuszne pod warunkiem, że filtry ortogonalne są zaprojektowane dokładnie dla mierzonej częstotliwości. W przypadku jakichkolwiek odstępstw częstotliwości mierzonej od częstotliwości dla której zaprojektowane zostały filtry algorytm wnosi duże błędy. Aby temu zaradzić w pracy [33] proponowane jest ciągłe w czasie przeliczanie współczynników filtrów. Jednakże obliczanie tych współczynników jest czynnością bardzo czasochłonna, zatem czynność tę należy przeprowadzić dwuetapowo:

- obliczenie „off-line” współczynników filtrów dla częstotliwości z zakresu przypuszczalnych zmian np. 40...60 Hz z rozdzielczością 1 Hz i umieszczenie ich na stałe w pamięci,
- aproksymacja współczynników w zależności od wyników obliczeń cząstkowych przeprowadzona w następujący sposób:
 1. założenie całkowitej wartości częstotliwości, w pierwszej iteracji najczęściej 50 Hz,
 2. pobranie kolejnej próbki pomiaru i przejście do następnego punktu jeżeli liczba próbek wynosi minimum $N+1$, jeśli nie - to powtarzanie punktu 2,
 3. pobranie współczynników filtrów odpowiednio dla założonej częstotliwości. Jeżeli jest to liczba całkowita to pobranie wprost z tabeli, jeśli nie - to pobranie współczynników filtrów dla dwóch najbliższych częstotliwości i dokonanie aproksymacji liniowej,
 4. przeprowadzenie obliczeń częstotliwości,
 5. w przypadku jeśli różnica częstotliwości założonej i obliczonej jest mniejsza od założonego błędu to zaprzestanie obliczeń i przejście do punktu 2. Jeśli natomiast różnica ta jest większa od założonego błędu to przyjęcie częstotliwości obliczonej jako nowej założonej i przejście do punktu 3. Ponieważ proces ten nie może trwać w nieskończoność zatem dodatkowo zakładana jest maksymalna liczba możliwych do wykonania iteracji.



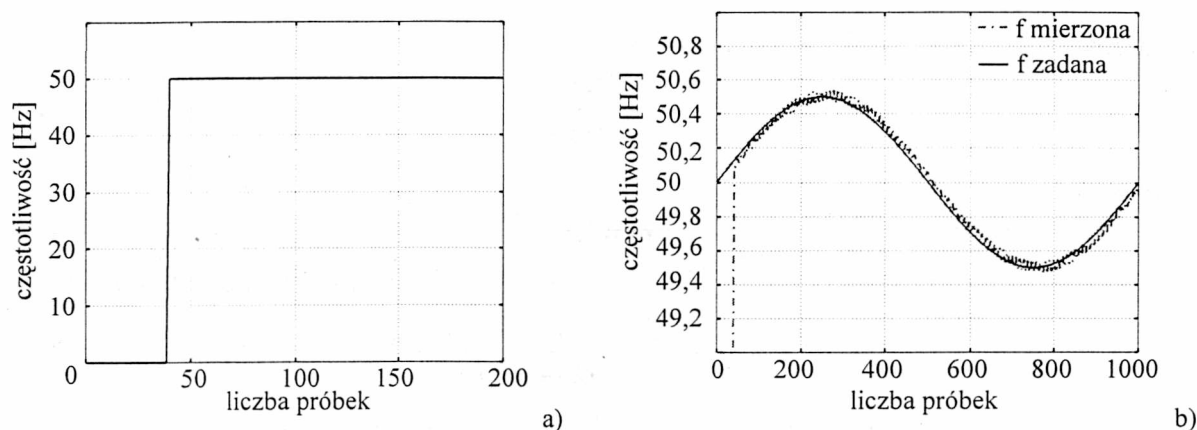
Rys. 3.13. Zależność błęd pomiaru od częstotliwości dla sygnału typu D

Stosunkowo małe błędy występują dla sygnałów o zawartości pięciu harmonicznych (sygnał typu D). W analizowanym zakresie 40...60 Hz maksymalne błędy nie przekraczają ok. $\pm 0,35\%$ (rys. 3.13). Jak widać na rysunku błędy bliskie zera występują dla całkowitych wartości częstotliwości. Większy poziom błędów dla częstotliwości poniżej 50 Hz wynika z faktu policzenia filtrów dla liczby współczynników równej N , co oznacza, że charakterystyka filtru sinusoidalnego nie obejmuje pełnej sinusoidy dla częstotliwości poniżej 50 Hz.

Czas ustalenia się pomiaru częstotliwości po uruchomieniu algorytmu wynosi ok. 40 próbek dla sygnału typu A, dla $f_p = 1$ kHz (rys. 3.14a).

W przypadku częstotliwości zmieniającej się zgodnie z przebiegiem funkcji sinus (rys. 3.14b), algorytm nadąża za zmianami częstotliwości z opóźnieniem ok. 10 - 15 próbek, jednak z niewielkimi oscylacjami wokół wartości zadanej. Dla sygnału charakteryzującego się skokową

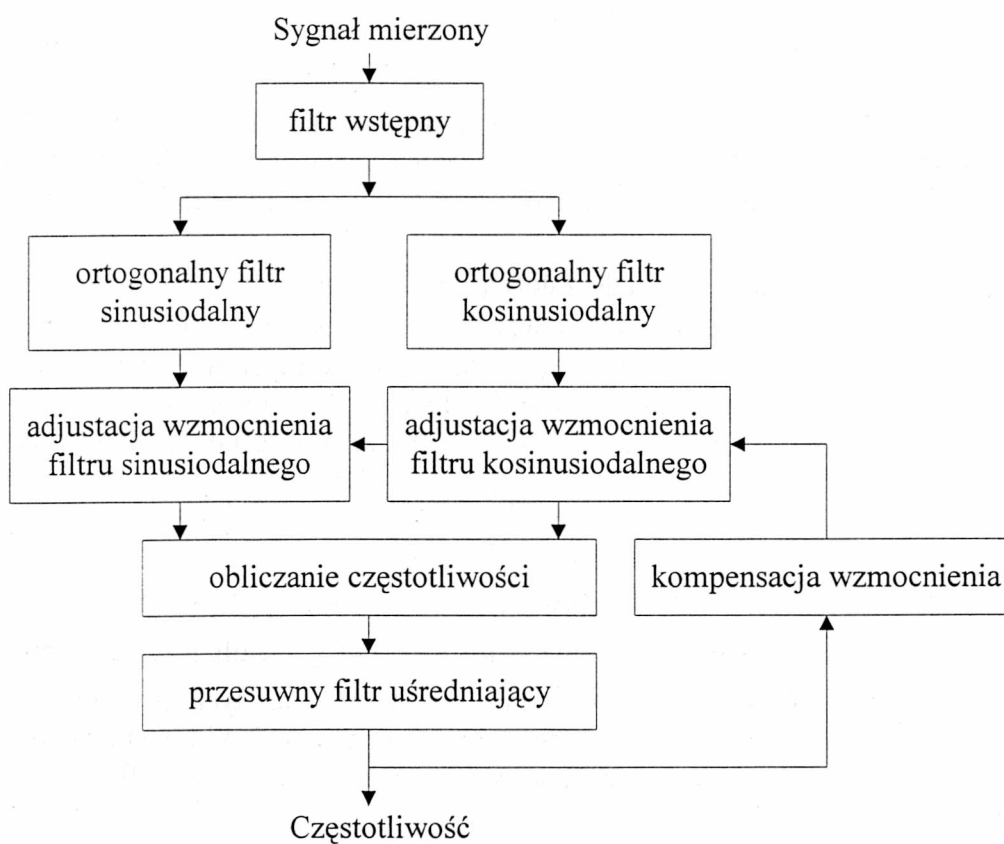
zmianą amplitudy z wartości 1,0 j.w. na 0,8 j.w. przy stałej częstotliwości odpowiedź układu ustala się po 24 próbkach.



Rys. 3.14. Odpowiedź algorytmu adaptacyjnego na sygnał typu A:
o częstotliwości 50 Hz (uruchomienie algorytmu) (a),
o częstotliwości zmiennej zgodnie z przebiegiem funkcji sinus (b)

Algorytm adaptacyjny z zależną od częstotliwości modyfikacją wzmocnienia ortogonalnych filtrów

W publikacjach [17], [18], [19] i [20] proponowane jest, aby częstotliwość sygnału wyznaczyć zgodnie z algorytmem prezentowanym na rys. 3.15.



Rys. 3.15. Przebieg procesu pomiaru częstotliwości

Częstotliwość jest wyznaczana na drodze różniczkowania kąta fazowego φ :

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega. \quad (3.39)$$

Po określeniu pochodnej ze wzoru (3.36) otrzymamy:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{x_c(t)x'_s(t) - x_s(t)x'_c(t)}{x_s^2(t) + x_c^2(t)}. \quad (3.40)$$

Ponieważ:

$$\omega = 2\pi f, \quad (3.41)$$

zatem ostatecznie z równań (3.40) i (3.41) po przedstawieniu w postaci dyskretniej mamy:

$$f = \frac{1}{2\pi} \frac{x_c(k)x'_s(k) - x_s(k)x'_c(k)}{x_s^2(k) + x_c^2(k)}, \quad (3.42)$$

przy czym pochodną wyznaczamy na podstawie uproszczonej zależności:

$$x'_s(k) = \frac{x_s(k-1) - x_s(k-2)}{2T_p}, \quad (3.43)$$

gdzie T_p - okres próbkowania.

Analogicznie liczymy x'_c .

Powyższa metoda obarczona jest dwoma błędami w sytuacji, gdy częstotliwość sygnału mierzonego będzie różna od częstotliwości znamionowej podstawowej harmonicznej 50 Hz. Błąd pierwszy wynika z przybliżonego obliczania pochodnej. Jak wykazano w dodatku 7.2 publikacji [18] popełniany wówczas błąd wynosi:

$$f_{err} = \frac{2\pi^2 f^3 T_p^2}{3}, \quad (3.44)$$

gdzie f - wartość częstotliwości otrzymana na podstawie równania (3.42). Po dodaniu wartości obliczonej w równaniu (3.42) do poprawki obliczonej w równaniu (3.44) otrzymamy prawidłową wartość częstotliwości z wyeliminowanym wpływem przybliżonego obliczania pochodnej.

Sygnały x_c oraz x_s mają amplitudę zależną od częstotliwości. Co prawda amplituda sygnału nie występuje w równaniu (3.42), jednakże nieuwzględnienie jej zmian wprowadza dodatkowy błąd. W celu eliminacji tego błędu stosuje się kompensację wzmocnienia filtrów w zależności od częstotliwości. Jak pokazano w dodatku 7.3 publikacji [18] optymalna estymata częstotliwości sygnału mającego zmienną amplitudę $X(t)$ jest określona równaniem:

$$\hat{f}(t) = \frac{A[X^2(t)f(t)]}{A[X^2(t)]}, \quad (3.45)$$

gdzie $f(t)$ oznacza sumę $f + f_{err}$, a operacja $A[\cdot]$ oznacza operację uśredniania (średnia arytmetyczna) realizowaną przez przesuwany filtr uśredniający o długości $N/4$ próbek. Przyglądając się wzorom (3.42) i (3.45) widzimy, że mianowniki tych równań są identyczne (kwadrat amplitudy sygnału). Obliczona zgodnie z równaniem (3.45) estymata częstotliwości może posłużyć do obliczenia współczynników korekcyjnych wzmocnień filtrów (dodatek 7.1 w [18]):

$$W_{F_s} = \frac{2 \sin\left(\pi \frac{f_0}{f_p}\right) \sin\left(\pi N \frac{f}{f_p}\right) \cos\left(\pi \frac{f}{f_p}\right)}{\cos\left(2\pi \frac{f}{f_p}\right) - \cos\left(2\pi \frac{f_0}{f_p}\right)}, \quad (3.46)$$

$$W_{F_c} = \frac{2 \cos\left(\pi \frac{f_0}{f_p}\right) \sin\left(\pi N \frac{f}{f_p}\right) \sin\left(\pi \frac{f}{f_p}\right)}{\cos\left(2\pi \frac{f}{f_p}\right) - \cos\left(2\pi \frac{f_0}{f_p}\right)}, \quad (3.47)$$

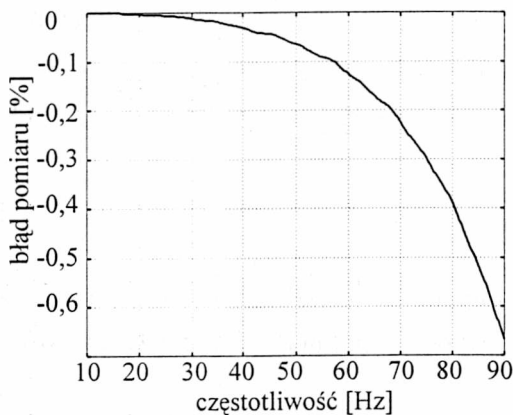
gdzie:

f - częstotliwość obliczona ze wzoru (3.45),

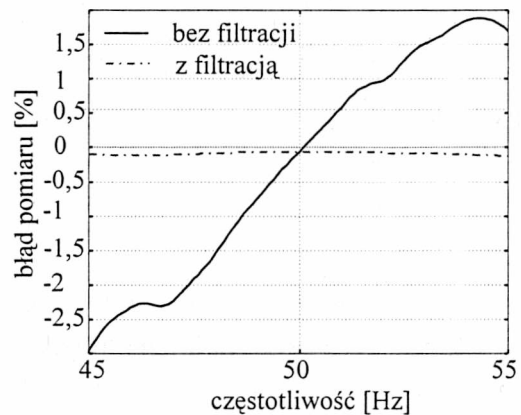
f_p - częstotliwość próbkowania.

Z uwagi na stosunkowo duży stopień skomplikowania wzorów (3.46) i (3.47) możliwe jest uprzednie policzenie tych współczynników dla spodziewanego zakresu zmian częstotliwości (np. 40...60 Hz, z rozdzielczością np. 0,001 Hz) i zapisanie ich w pamięci w postaci tablicy. W trakcie pomiarów pobierane są tylko współczynniki odpowiadające danej częstotliwości, bez konieczności ich żmudnego liczenia. Właściwe, niezależne od częstotliwości wzmocnienie filtrów, otrzymujemy poprzez podzielenie wzmocnienia filtrów przez wyżej obliczone współczynniki korekcyjne.

W testowanym zakresie od 10 do 90 Hz, dla sygnałów typu A, maksymalny błąd nie przekraczał -0,7% i jak widać na rys. 3.16a rósł wraz ze wzrostem częstotliwości. Dla sygnałów typu D o zawartości pięciu harmonicznych w zakresie od 45 do 55 Hz błąd osiągał już wartość ok. $\pm 3\%$ (rys. 3.16b), a dla szerszego zakresu zmian częstotliwości był już znacznie większy. W takiej sytuacji koniecznym stało się zastosowanie filtracji wstępnej sygnału. Praktycznie zrealizowano to poprzez standardowe okno Hanninga o długości $N_f = 20$ próbek. Na rys. 3.16b widoczne jest porównanie charakterystyk częstotliwościowych dla sygnału typu D, bez filtracji wstępnej i z filtracją wstępną. Jak widać zastosowanie filtracji obniża poziom błędów w analizowanym zakresie zmian częstotliwości do poziomu ok. -0,2%.



a)

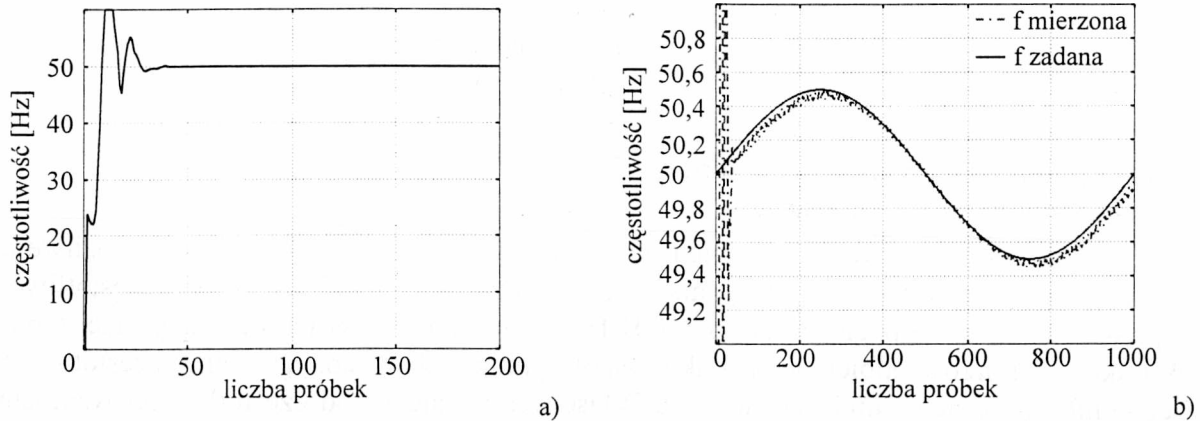


b)

Rys. 3.16. Zależność błędu pomiaru od częstotliwości dla sygnału typu A (a) oraz dla sygnału typu D bez filtracji wstępnej i z filtracją wstępną oknem Hanninga o długości $N_f = 20$ (b)

Czas ustalenia się pomiaru częstotliwości sygnału typu A po uruchomieniu algorytmu wynosi ok. 45 próbek dla $f_p = 1$ kHz (rys. 3.17a). Czas ten ulega zwiększeniu do ok. 65 próbek

przy zastosowaniu dodatkowego okna filtracyjnego. W przypadku częstotliwości zmieniającej się zgodnie z przebiegiem funkcji sinus, algorytm nadąża za zmianami częstotliwości jednak z niewielkimi oscylacjami. Dla sygnału typu A, bez filtracji wstępnej (rys. 3.17b), w przypadku gdy częstotliwość rośnie, maksymalne opóźnienie wynosi ok. 25 próbek, a w przypadku gdy częstotliwość maleje, algorytm bez opóźnień reaguje na zmianę częstotliwości, jednak z niewielkimi oscylacjami wokół wartości zadanej. Dla sygnałów charakteryzujących się skokową zmianą amplitudy z wartości 1,0 j.w. na 0,8 j.w. przy stałej częstotliwości czas reakcji wynosi ok. 25 próbek (sygnał typu A).



Rys. 3.17. Odpowiedź algorytmu na sygnał typu A: o częstotliwości 50 Hz (uruchomienie algorytmu) (a), o częstotliwości zmiennej zgodnie z przebiegiem funkcji sinus (b)

3.1.3. Zastosowanie dyskretnej transformaty Fouriera DFT

Transformata Fouriera o stałej częstotliwości próbkowania

Korzystając z prostych zależności trygonometrycznych oraz ze wzoru (2.10) na dyskretną transformatę Fouriera DFT dla podstawowej harmonicznej ($N_f = N$ czyli liczbie próbek w okresie podstawowej harmonicznej sygnału) otrzymamy [3], [22]:

$$\underline{x}_r = \frac{X}{\sqrt{2}} e^{j\varphi} e^{j\frac{2\pi}{N}r}, \quad (3.48)$$

gdzie $\underline{x}_r$ - wektor poruszający się ze stałą prędkością po płaszczyźnie zespolonej, przyjmujący kolejne położenia dla $r = 1, \dots, N$, gdzie N - liczba próbek przypadająca na okres podstawowej harmonicznej. Wektor ten można uczynić stacjonarnym poprzez kompensację wyprzedzenia kąтового:

$$\underline{v}_r = \underline{x}_r e^{-j\frac{2\pi}{N}r} = \frac{X}{\sqrt{2}} e^{j\varphi}. \quad (3.49)$$

Przy odchyłce częstotliwości od wartości znamionowej 50 Hz, wektor $\underline{v}_r$ zaczyna się poruszać po płaszczyźnie zespolonej z prędkością wprost proporcjonalną do zmian częstotliwości:

$$\Delta f = \frac{\Psi_m}{2\pi t_m}, \quad (3.50)$$

gdzie Ψ_m - kąt o jaki przesuwa się wektor $\underline{v}_r$ w czasie t_m przy zmianie częstotliwości o Δf . Ponieważ czas t_m jest czasem dyskretnym powiązany z częstotliwością próbkowania f_p , zatem:

$$\Delta f = \frac{\Psi_0 + \Delta \Psi}{2\pi M T_p}, \quad (3.51)$$

gdzie:

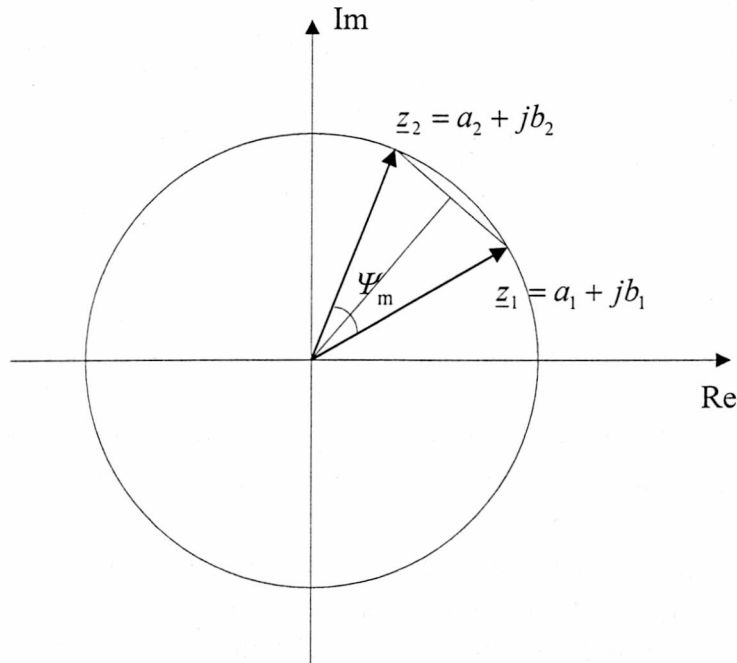
$$T_p = \frac{1}{f_p} = \frac{1}{N f_0} \text{ - okres próbkowania,}$$

$f_0 = 50 \text{ Hz}$ - częstotliwość znamionowa podstawowej harmonicznej,

M - liczba próbek, która pomnożona przez T_p , daje zdyskretyzowany czas t_m .

Jeżeli wektor $\underline{z}_2 = a_2 + j b_2$ przesunął się względem wektora $\underline{z}_1 = a_1 + j b_1$ o kąt Ψ_m przy zmianie częstotliwości o Δf (rys. 3.18) to z prostych zależności trygonometrycznych wynika, że:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\Psi_m}{2}\right) = \frac{|0,5(\underline{z}_2 - \underline{z}_1)|}{|0,5(\underline{z}_2 + \underline{z}_1)|} = \frac{|0,5((a_2 - a_1) + j(b_2 - b_1))|}{|0,5((a_2 + a_1) + j(b_2 + b_1))|}. \quad (3.52)$$



Rys. 3.18. Zmiana położenia stacjonarnego wektora przy zmianie częstotliwości

Można zauważyć, że wektory $\underline{z}_2 - \underline{z}_1$ oraz $\underline{z}_2 + \underline{z}_1$ są wzajemnie prostopadłe, zatem równanie (3.52) można uprościć do postaci prostszej numerycznie [22]:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\Psi_m}{2}\right) = \frac{|a_2 - a_1| + |b_2 - b_1|}{|a_2 + a_1| + |b_2 + b_1|}. \quad (3.53)$$

Ponieważ:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\Psi_0 + \Delta \Psi}{2}\right) = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\Psi_0}{2}\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\Delta \Psi}{2}\right)}{1 - \operatorname{tg}\left(\frac{\Psi_0}{2}\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\Delta \Psi}{2}\right)}, \quad (3.54)$$

zatem oznaczając:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\Psi_0 + \Delta\Psi}{2}\right) = A, \quad (3.55)$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\Psi_0}{2}\right) = B \quad (3.56)$$

oraz przyjmując, że dla małych kątów zachodzi

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\Delta\Psi}{2}\right) \cong \frac{\Delta\Psi}{2}, \quad (3.57)$$

możemy ostatecznie na podstawie wzorów (3.51), (3.54) - (3.57) zapisać:

$$\Delta f = \frac{1}{2\pi MT_p} \left(\Psi_0 + \frac{2(A-B)}{1+AB} \right). \quad (3.58)$$

Znak wartości Δf określamy na podstawie kierunku obrotu wektora $\underline{v}_r$.

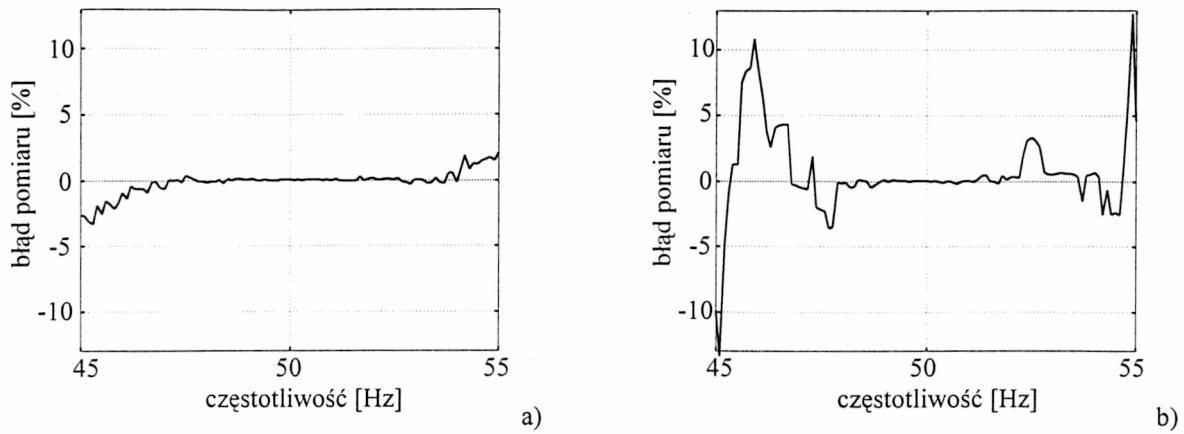
Aby obliczyć wartość M musimy założyć stały kąt obrotu Ψ_0 i tak długo pobierać kolejne próbki sygnału (zliczając je jednocześnie - będzie to wartość M) zgodnie ze stałą częstotliwością próbkowania f_p , aż wyliczony ze wzoru (3.52) lub (3.53) kąt Ψ_m będzie w przybliżeniu równy założonemu kątowi Ψ_0 . Wtedy na podstawie równania (3.58) obliczamy zmianę częstotliwości.

Bardzo ważną rzeczą jest dobór odpowiedniego kąta Ψ_0 . Nie może on być za mały, gdyż w przypadku dużych zmian częstotliwości wyliczona wartość M byłaby bardzo małą wartością, np. równą 1 (co znacznie pogarszałoby dokładność), ani też za duży, gdyż w przypadku małych zmian częstotliwości wyliczone M osiągałoby bardzo duże wartości, co z jednej strony zwiększałoby dokładność, ale z drugiej znacznie pogarszało parametry czasowe metody. W analizowanym przykładzie założono $\Psi_0 = 10^0$ oraz przyjęto maksymalną wartość $M = 1000$. Powyżej tej wartości zakłada się, że częstotliwość nie uległa zmianie. Można również założyć dwie różne wartości kąta Ψ_0 , inną dla małych, a inną dla dużych zmian częstotliwości. Ma to jednak wpływ na wzrost czasu reakcji algorytmu na zmiany częstotliwości.

Przeprowadzone symulacje potwierdziły teoretyczne rozważania i wykazały, że im większe odstępstwo od częstotliwości podstawowej 50 Hz, tym obliczona zmiana częstotliwości ma charakter bardziej oscylacyjny. Konieczne staje się stosowanie filtra uśredniającego. Analiza wykazała, że najkorzystniejsze rezultaty otrzymuje się, po zastosowaniu filtra dwuokresowego. Niestety wydłuża to czas działania algorytmu.

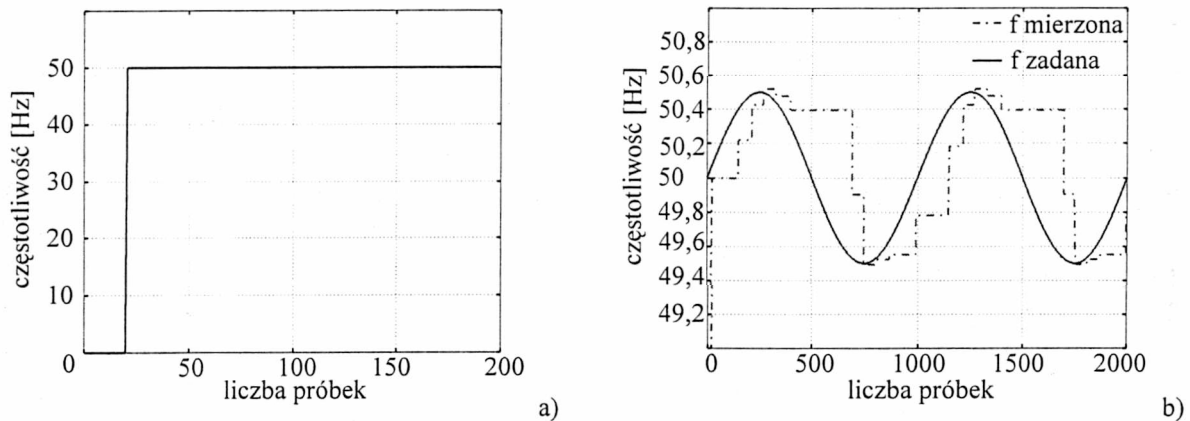
Algorytm wykazuje dobre właściwości tylko dla niewielkich zmian częstotliwości (rys. 3.19) i działa prawidłowo również dla sygnałów o zawartości większej liczby harmonicznnych. Oczywiście poziom błędu jest wtedy większy.

Czas ustalenia się pomiaru częstotliwości sygnału typu A po uruchomieniu algorytmu wynosi 21 próbek dla $f_p = 1$ kHz (rys. 3.20a). Wadą algorytmu jest stosunkowo długi czas reakcji na sygnał o zmiennej częstotliwości. Dla sygnału zmieniającego się w czasie w sposób ciągły, np. zgodnie z przebiegiem funkcji sinus (rys. 3.20b), zmierzona częstotliwość nadąża za zmianami, ale przy mocno zniekształconej odpowiedzi. Opóźnienie wynosi w tym przypadku od ok. 60 próbek do ok. 300 próbek. Przy stałej częstotliwości, ale skokowo zmieniającej się amplitudzie z wartości 1,0 j.w. na 0,8 j.w. opóźnienie jest największe i wynosi (w próbkach) maksymalną wartość M założoną w algorytmie.



Rys. 3.19. Zależność błędu pomiaru od częstotliwości dla sygnałów typu A (a) i typu D (b)

Po chwilowym zakłóceniu sygnału spowodowanym zmianą amplitudy, niezmienna jego częstotliwość powoduje niemożność osiągnięcia założonego kąta Ψ_0 , zatem sprawdzany jest warunek maksymalnej wartości M . Dla większej przejrzystości wykresy z rys. 3.20. uzyskane zostały bez filtra uśredniającego. W przypadku zastosowania np. filtra dwukresowego do podanych wyżej czasów należałoby dodać wartość $2N$ (czyli 40 próbek przy $f_p = 1$ kHz). W sytuacji jak na rys. 3.20b nawet filtr dwukresowy niewiele poprawia kształt odpowiedzi.



Rys. 3.20. Odpowiedź algorytmu na sygnał typu A: o częstotliwości 50 Hz (uruchomienie algorytmu) (a), o częstotliwości zmiennej zgodnie z przebiegiem funkcji sinus (b)

Transformata Fouriera o zmiennej częstotliwości próbkowania

Znaczne polepszenie algorytmu opisanego powyżej można uzyskać modyfikując w trakcie pomiarów częstotliwość próbkowania. W [3] i [4] proponowane jest aby wyliczona zgodnie ze wzorem (3.58) wartość Δf była podstawą do zmiany częstotliwości próbkowania zgodnie ze wzorem:

$$f'_p = f_p + N \Delta f, \quad (3.59)$$

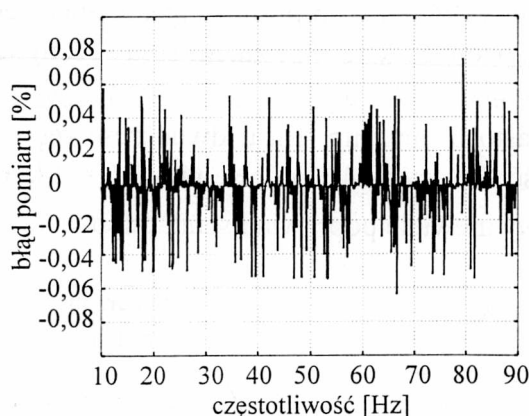
gdzie f'_p i f_p odpowiednia nowa (zmodyfikowana) i bieżąca częstotliwość próbkowania.

W przypadku gdy $\Delta f = 0$ szukana częstotliwość sygnału wynosi wprost:

$$f = \frac{f_p}{N}. \quad (3.60)$$

Ponieważ przy zmianie częstotliwości wartość Δf może przyjmować różne, czasami bardzo duże wartości, powodowałyby to niekiedy trudny do praktycznego osiągnięcia wzrost częstotliwości próbkowania. Założono zatem, że maksymalna wartość Δf może wynosić 5 Hz, czyli przy $N = 20$, maksymalne zmiany f_p wynoszą 100 Hz.

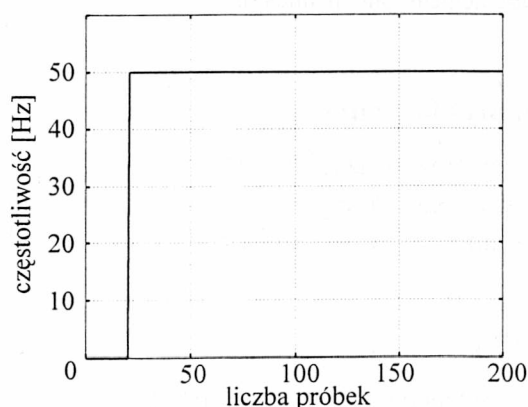
Kolejne wartości próbek sygnału ładowane są w sposób ciągły do N -elementowego bufora skąd pobierane są do obliczeń. Sprawdzono doświadczalnie, że w przypadku zmiany częstotliwości próbkowania korzystne jest zaniechanie wykonywania obliczeń na czas całkowitego zapelnienia bufora „nowym” sygnałem. Okres przejściowy, gdy w buforze znajduje się część sygnału próbkowana z jedną wartością f_p , a część próbkowana z inną wartością f_p , powodował znaczne zmiany obliczonej nowej wartości częstotliwości próbkowania co w konsekwencji znacznie wydłużało czas reakcji algorytmu.



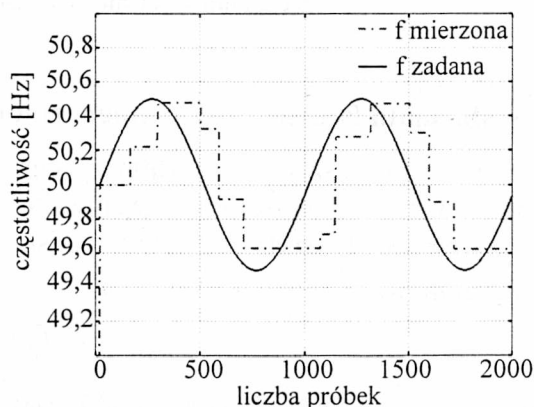
Rys. 3.21. Zależność błędu pomiaru od częstotliwości dla sygnałów typu A

Wprowadzenie zmiennej częstotliwości próbkowania znacznie polepszyło właściwości algorytmu. Jak widać na rys. 3.21 występuje bardzo mały błąd pomiaru, dodatkowo w znacznie szerszym zakresie zmian częstotliwości. Charakter odpowiedzi algorytmu nie jest oscylacyjny, wobec tego nie ma potrzeby stosowania filtra uśredniającego. Dla sygnałów typu D, podobnie mały błąd pomiaru występuje dla zakresu od 20 do 80 Hz. Poza tym zakresem poziom błędu osiąga większe wartości.

Wadą algorytmu jest złożony układ próbkujący oraz stosunkowo długi czas reakcji algorytmu na zmiany częstotliwości w trakcie pomiaru. Czas ustalenia się pomiaru częstotliwości po uruchomieniu algorytmu wynosi 20 próbek dla sygnałów typu A i dla $f_p = 1$ kHz (rys. 3.22a). Dla sygnału zmieniającego się w czasie w sposób ciągły, np. zgodnie z przebiegiem funkcji sinus (rys. 3.22b), zmierzona częstotliwość nadąża za zmianami, ale również jak to było poprzednio, przy mocno zniekształconej odpowiedzi. Opóźnienie wynosi w tym przypadku średnio ok. 125 próbek.



a)



b)

Rys. 3.22. Odpowiedź algorytmu na sygnał typu A: o częstotliwości 50 Hz (uruchomienie algorytmu) (a), o częstotliwości zmiennej zgodnie z przebiegiem funkcji sinus (b)

Reakcja algorytmu na skokową zmianę amplitudy z wartości 1,0 j.w. na 0,8 j.w. przy stałej częstotliwości wynosi od 60 do 750 próbek dla sygnałów typu A i od 125 do 750 próbek dla

sygnałów typu D. Decyduje o tym moment wystąpienia zmiany amplitudy, a dokładniej ile wynosi aktualnie zliczana wartość M .

Transformata Fouriera o zmiennej długości okna pomiarowego

Poddając sygnał (3.1) działaniu dyskretnej transformaty Fouriera (DFT) dla pierwszej harmonicznej ($N_f = N$ czyli liczbie próbek w okresie podstawowej harmonicznej sygnału) oraz po uwzględnieniu zależności trygonometrycznej:

$$\sum_{k=0}^{N-1} (e^{j\varphi})^k = \frac{\sin \frac{N\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}} e^{j(N-1)\frac{\varphi}{2}}, \quad (3.61)$$

po przekształceniach otrzymamy:

$$\begin{aligned} \underline{DFT}(1) &= \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y(k) e^{-j\frac{2\pi}{N}k} = \\ &= X e^{j\varphi} \frac{\sin\left(\frac{\pi \Delta f}{f_0}\right)}{N \sin\left(\frac{\pi \Delta f}{f_0 N}\right)} e^{j\left(\frac{\pi \Delta f}{f_0} - \frac{\pi \Delta f}{f_0 N}\right)} + X e^{-j\varphi} \frac{\sin\left(\frac{-\pi \Delta f}{f_0}\right)}{N \sin\left(-\frac{\pi \Delta f}{f_0 N} - \frac{2\pi}{N}\right)} e^{j\left(-\frac{\pi \Delta f}{f_0} + \frac{\pi \Delta f}{f_0 N} + \frac{2\pi}{N}\right)}, \end{aligned} \quad (3.62)$$

gdzie $2/N$ - współczynnik skalujący.

Korzystając z zależności, że dla niewielkich α prawdziwa jest zależność $\sin \alpha \approx \alpha$, w przypadku niewielkich zmian częstotliwości równanie (3.62) można uprościć do postaci:

$$\underline{DFT}(1) = X e^{j\varphi} e^{j\left(\frac{\pi \Delta f}{f_0} - \frac{\pi \Delta f}{f_0 N}\right)}. \quad (3.63)$$

gdzie:

$\Delta f = f - f_0$ - odchyłka częstotliwości od wartości znamionowej f_0 .

Kolejne próbki sygnału, przy założeniu stałej częstotliwości próbkowania, przesunięte są o kąt:

$$\beta = e^{j\frac{2\pi(f_0 + \Delta f)}{f_0 N}}. \quad (3.64)$$

Zatem stosunek dwóch następujących po sobie estymat DFT wynosi:

$$\frac{\underline{DFT}(t_{k+1})}{\underline{DFT}(t_k)} = \frac{X e^{j\varphi} e^{j\left(\frac{\pi \Delta f}{f_0} - \frac{\pi \Delta f}{f_0 N}\right)} e^{j\frac{2\pi(f_0 + \Delta f)}{f_0 N}}}{X e^{j\varphi} e^{j\left(\frac{\pi \Delta f}{f_0} - \frac{\pi \Delta f}{f_0 N}\right)}}. \quad (3.65)$$

Argument równania (3.65) dany jest równaniem:

$$\Theta = \arg\left(\frac{\underline{DFT}(t_{k+1})}{\underline{DFT}(t_k)}\right) = \frac{2\pi(f_0 + \Delta f)}{f_0 N} \quad (3.66)$$

gdzie $\arg(\cdot)$ - oznacza operację obliczania argumentu funkcji w nawiasach.

Stąd już bezpośrednio można policzyć szukaną częstotliwość:

$$f_0 + \Delta f = \frac{\Theta f_0 N}{2\pi}. \quad (3.67)$$

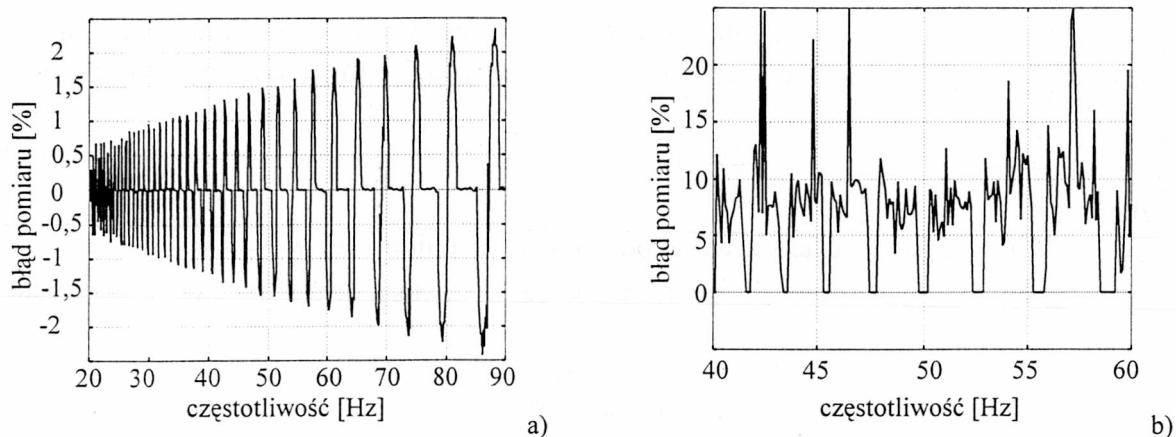
Ponieważ dla $\Delta f \neq 0$, obliczony dla kolejnych chwil czasowych kąt Θ nie będzie miał wartości stałej, zatem policzona na podstawie równania (3.67) estymata częstotliwości $\hat{f} = f_0 + \Delta f$ posłuży do wyliczenia nowej wartości $N_f = \hat{N}$ zgodnie z równaniem:

$$\hat{N} = \frac{f_0 N}{\hat{f}}. \quad (3.68)$$

Oczywiście wynik równania (3.68) musi być zaokrąglony do najbliższej liczby całkowitej. Powtórne obliczenie wartości kąta Θ dla nowej wartości $\hat{N}$ będzie teraz podstawą do wyliczenia zgodnie z równaniem (3.67) szukanej wartości częstotliwości.

Ponieważ liczba $\hat{N}$ musi przyjmować wartości całkowite, zatem metoda obarczona jest minimalnym błędem tylko dla tych częstotliwości których iloczyn z wartością $\hat{N}$ jest w przybliżeniu równy częstotliwości próbkowania. Dla innych częstotliwości wymagane jest stosowanie pełnokresowego filtra uśredniającego, co niestety ma wpływ na wydłużenie czasu odpowiedzi algorytmu na zmiany częstotliwości.

Na rys. 3.23 przedstawiono zależność błędu pomiaru od częstotliwości dla sygnałów o zawartości podstawowej harmonicznej (rys. 3.23a) oraz trzech harmonicznych (sygnał typu C) (rys. 3.23b). Widać wyraźnie, że błąd przyjmuje minimalne wartości zgodnie z tym co opisano powyżej, tylko dla niektórych wartości częstotliwości. Pomiedzy tymi wartościami, pomimo stosowania filtra uśredniającego wartość błędu znacznie rośnie szczególnie dla sygnałów o zawartości wyższych harmonicznych.

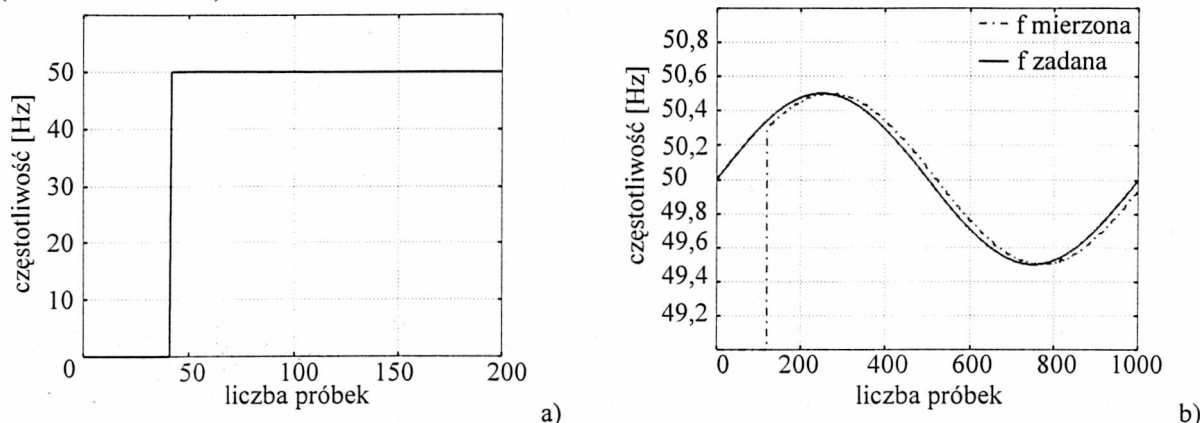


Rys. 3.23. Zależność błędu pomiaru od częstotliwości dla sygnałów typu A (a) i typu C (b)

Czas ustalenia się pomiaru częstotliwości sygnału typu A po uruchomieniu algorytmu wynosi 40 próbek dla $f_p = 1$ kHz (rys. 3.24a). Przy częstotliwości zmieniającej się w sposób ciągły, zgodnie z przebiegiem funkcji sinus (rys. 3.24b), czas ten jest dwukrotnie mniejszy i wynosi ok. 20 próbek. Dla sygnału charakteryzującego się skokową zmianą amplitudy z wartości 1,0 j.w. na 0,8 j.w. przy stałej częstotliwości odpowiedź układu ustala się po 40 próbkach.

W opisywanym algorytmie przy liczeniu transformaty DFT wartości współczynników sinus i kosinus można uprzednio stabelizować. Skróci to znacznie czas obliczeń. Niestety wymagane jest umieszczenie w pamięci tych współczynników dla różnych wartości N_f , co znacznie zwiększa objętość tabel, np. dla częstotliwości próbkowania 1 kHz i częstotliwości zadanej rzędu 20 Hz wartość N_f wynosi 50, zatem tylko dla tej jednej wartości N_f tablica musi liczyć $2 \cdot 50$ elementów. Problem ten można częściowo zminimalizować pomijając niektóre próbki w oknie DFT, zgodnie z kryterium Nyquista, przede wszystkim dla mniejszych częstotliwości

(duża wartość N_f).



Rys. 3.24. Odpowiedź algorytmu na sygnał typu A: o częstotliwości 50 Hz (uruchomienie algorytmu) (a), o częstotliwości zmiennej zgodnie z przebiegiem funkcji sinus (b)

Zmodyfikowana dyskretna transformata Fouriera (SDFT)

W publikacjach [46], [47] i [48] proponowane jest użycie zmodyfikowanego algorytmu dyskretnej transformaty Fouriera DFT (ang. Smart DFT - SDFT).

Zapiszmy analizowany sygnał opisany równaniem (3.1) przy użyciu wektora zespolonego $\underline{y}$:

$$\underline{y}(t) = \frac{\underline{y}e^{j\omega t} + \underline{y}^*e^{-j\omega t}}{2}, \quad (3.69)$$

gdzie: $\underline{y} = Xe^{j\varphi}$ (* - oznacza funkcję sprzężoną).

Zgodnie z definicją standardowego algorytmu DFT dla podstawowej harmonicznej ($N_f = N$, czyli liczbie próbek w okresie podstawowej harmonicznej sygnału), wartość próbki w chwili k dana jest wzorem:

$$\underline{DFT}_k = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \underline{y}(k+n) e^{-j\frac{2\pi n}{N}}, \quad (3.70)$$

gdzie: $2/N$ - współczynnik skalujący.

Podstawiając równanie (3.69) do równania (3.70), po wykorzystaniu zależności:

$$\omega = 2\pi(f_0 + \Delta f) \quad (3.71)$$

i zależności trygonometrycznej (3.61) po odpowiednich przekształceniach otrzymamy:

$$\underline{DFT}_k = A_k + B_k, \quad (3.72)$$

gdzie:

$$A_k = \frac{\underline{y}}{N} \frac{\sin \frac{N\theta_1}{2}}{\sin \frac{\theta_1}{2}} e^{j\frac{\pi}{f_0 N}(\Delta f(2k+N-1)+2f_0 k)}, \quad (3.73)$$

$$B_k = \frac{\underline{y}^*}{N} \frac{\sin \frac{N\theta_2}{2}}{\sin \frac{\theta_2}{2}} e^{j\frac{\pi}{f_0 N}(\Delta f(2k+N-1)+2f_0(k+N-1))},$$

$$\theta_1 = \frac{2\pi\Delta f}{f_0 N}, \quad \theta_2 = -\frac{2\pi\left(2 + \frac{\Delta f}{f_0}\right)}{N},$$

Δf - odchyłka częstotliwości.

W standardowym algorytmie DFT dla niewielkich odchyłek częstotliwości Δf zachodzi przybliżona równość $\hat{y}_k \approx A_k$. W celu dokładnego określenia odchyłki Δf , proponowane jest uwzględnienie członu B_k . W tym celu zdefiniowana jest zmienna:

$$b = e^{j\frac{2\pi}{f_0 N}(\Delta f + f_0)} \quad (3.74)$$

Wykorzystując równanie (3.74), można zapisać równania (3.73) dla chwili czasowej $k+1$:

$$\begin{aligned} A_{k+1} &= A_k b, \\ B_{k+1} &= B_k b^{-1}. \end{aligned}$$

Zatem dla chwil czasowych $k+1$ i $k+2$ równanie (3.72) przyjmie postać:

$$\underline{DFT}_{k+1} = A_{k+1} + B_{k+1} = A_k b + B_k b^{-1}, \quad (3.75)$$

$$\underline{DFT}_{k+2} = A_{k+2} + B_{k+2} = A_{k+1} b + B_{k+1} b^{-1}. \quad (3.76)$$

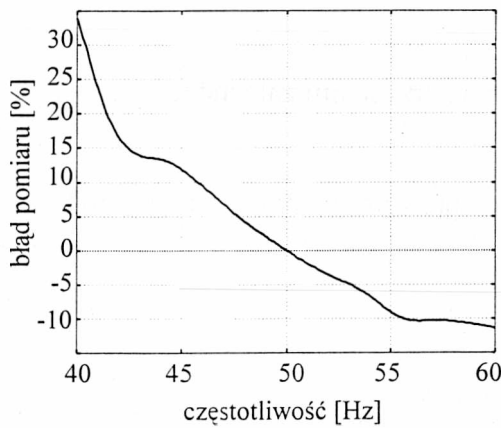
Po przemnożeniu obustronnie przez b układu równań (3.75) i (3.76), odjęciu stronami równania (3.72) od (3.75) i (3.75) od (3.76), po odpowiednich przekształceniach ostatecznie otrzymamy równanie kwadratowe:

$$\underline{DFT}_{k+1} b^2 - (\underline{DFT}_k + \underline{DFT}_{k+2})b + \underline{DFT}_{k+1} = 0. \quad (3.77)$$

Obliczając z powyższego równania b , można następnie, po przekształceniu wzoru (3.74), wprost policzyć szukaną częstotliwość:

$$f = f_0 + \Delta f = \arccos(\text{Re}(b)) \frac{f_0 N}{2\pi}, \quad (3.78)$$

gdzie $\text{Re}(\cdot)$ oznacza operację wyznaczania części rzeczywistej wyrażenia w nawiasach.

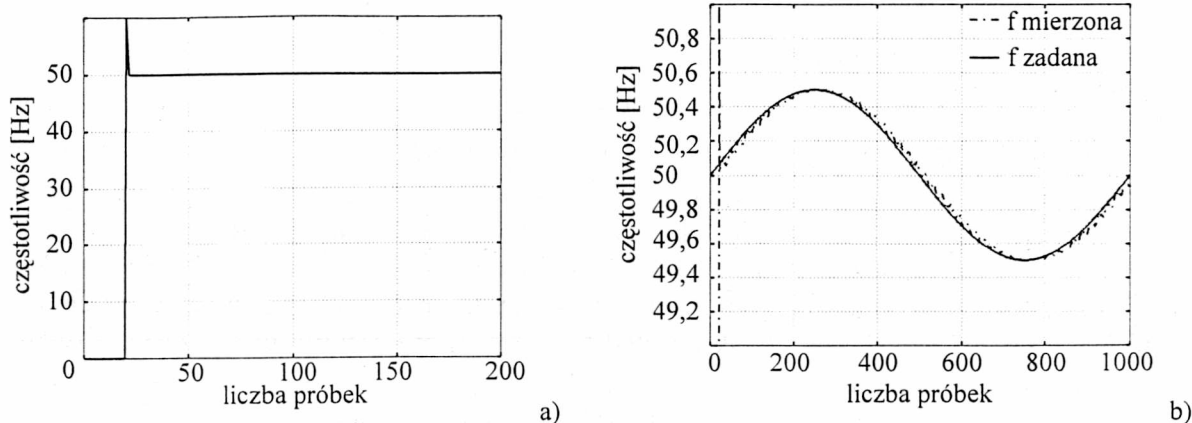


Rys. 3.25. Zależność błędu pomiaru od częstotliwości dla sygnału typu B

Jak widać na rys. 3.25, dla sygnału o wartości dwóch harmonicznych błąd jest bardzo duży i w zakresie 40...60 Hz dochodzi do $\pm 30\%$ (rys. 3.25). Aby w tym przypadku otrzymać prawidłowe wyniki należałoby dopasować algorytm, co jednak bardzo komplikuje obliczenia. Pokazano to w pracy [48] tworząc algorytm dla podstawowej i dowolnej innej harmonicznej.

Czas ustalenia się pomiaru częstotliwości sygnału typu A po uruchomieniu algorytmu wynosi 22 próbki dla $f_p = 1$ kHz (rys. 3.26a). Dla sygnałów o częstotliwości zmieniającej się zgodnie z przebiegiem funkcji sinus (rys. 3.26b), algorytm w sposób prawidłowy

nadąża za zmianami częstotliwości z niewielkim opóźnieniem oscylującym w zakresie 0... $N/2$ próbek. W przypadku sygnału charakteryzującego się skokową zmianą amplitudy z wartości 1,0 j.w. na 0,8 j.w. przy stałej częstotliwości odpowiedź układu ustala się po ok. 22 próbkach dla sygnału typu A.



Rys. 3.26. Odpowiedź algorytmu SDFT na sygnał A: o częstotliwości 50 Hz (uruchomienie algorytmu) (a), o częstotliwości zmiennej zgodnie z przebiegiem funkcji sinus (b)

3.1.4. Wykorzystanie filtru Kalmana

Niech model sygnału będzie dany równaniami stanu [9]:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}(k+1) &= \mathbf{A}(k)\mathbf{d}(k) + \mathbf{w}(k), \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{h}(k)\mathbf{d}(k) + \mathbf{v}(k), \end{aligned} \quad (3.79)$$

gdzie: $\mathbf{d}(k) = \begin{bmatrix} x_c(k) \\ x_s(k) \end{bmatrix},$

$$\mathbf{h}(k) = [\cos(ak) \quad -\sin(ak)],$$

$$a = \frac{2\pi}{N}, \quad N - \text{liczba próbek przypadająca na okres podstawowej harmonicznej.}$$

Postępując zgodnie z algorytmem liniowego filtru Kalmana opisanym w punkcie 2.2.5 (wzory (2.30)-(2.34)) obliczamy wartość wektora $\mathbf{d}(k)$. Jako wartości początkowe przyjmujemy:

$$\hat{\mathbf{d}}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \text{wartość początkowa estymowanego wektora } \mathbf{d}(k),$$

$$\mathbf{P}(0) = \begin{bmatrix} 0,1 & 0 \\ 0 & 0,1 \end{bmatrix} - \text{wartość początkowa macierzy kowariancji błędów estymacji,}$$

$$\mathbf{A}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \text{wartość początkowa macierzy przejścia,}$$

$$\mathbf{Q}(k) = \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0,001 & 0 \\ 0 & 0,001 \end{bmatrix} - \text{macierz kowariancji zakłóceń stanu. Ponieważ liniowy algo-}$$

rytm, filtru Kalmana zakłada stałą częstotliwość, zatem nie możemy przyjąć $\mathbf{Q} = 0$. Im spodziewamy się większych zmian częstotliwości tym wartość $\mathbf{Q}$ powinna być większa,

$\mathbf{R}(k) = \mathbf{R} = 0,001$ - macierz kowariancji zakłóceń pomiarowych - odpowiada za błędy pomiaru.

Ponieważ wektor $\mathbf{d}(k)$ nie przedstawia wprost częstotliwości, zatem liczymy ją ze wzoru:

$$f = \arg(\mathbf{d}(k)) \frac{f_0}{a} = \arctg\left(\frac{x_s(k)}{x_c(k)}\right) \frac{f_0}{a}, \quad (3.80)$$

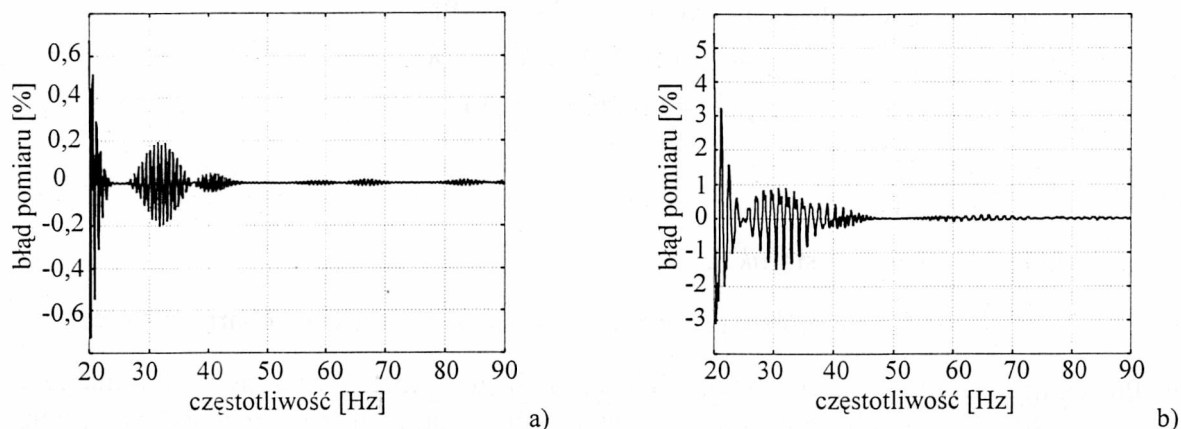
gdzie:

$f_0 = 50 \text{ Hz}$ - częstotliwość znamionowa podstawowej harmonicznej,

$\arg(\cdot)$ - oznacza operację obliczania argumentu funkcji w nawiasach.

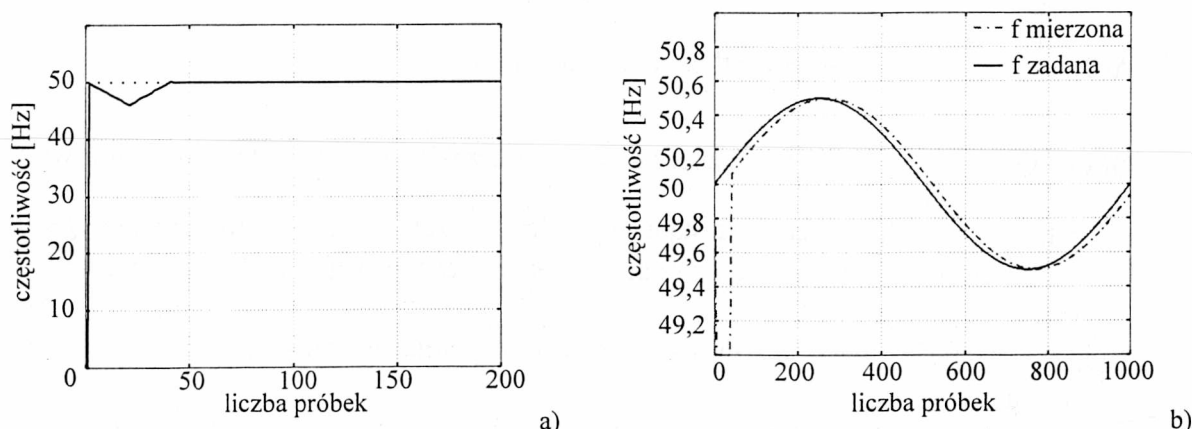
Ponieważ wektor zmiennych stanu $\mathbf{d}(k)$ nie zawiera wprost kąta fazowego, ani też częstotliwości, zakładając że są one stałe, dlatego w celu prawidłowego pomiaru częstotliwości różnych od znamionowej, konieczne jest stosowanie dwóch pełnookresowych filtrów uśredniających: jednego przy obliczaniu kąta fazowego, a drugiego przy liczeniu częstotliwości. Wady tej pozbawiony byłby algorytm zakładający, że częstotliwość jest jedną ze zmiennych stanu. Taki algorytm nie nadaje się jednak do śledzenia zmian częstotliwości w czasie, a tylko do jednopunktowego pomiaru.

Zależność błędu pomiaru od częstotliwości dla sygnałów typu A i D widoczna jest na rys. 3.27. W przypadku sygnałów o zawartości większej liczby harmonicznych, typu D (rys. 3.27b), poziom błędów jest na tyle mały (około dziesięciokrotnie większy w porównaniu z sygnałami typu A), że algorytm ten jak najbardziej może być użyteczny także dla tych sygnałów.



Rys. 3.27. Zależność błędu pomiaru od częstotliwości dla sygnałów typu A (a) i D (b)

Prawidłowe jest zachowanie algorytmu dla sygnałów o częstotliwości zmiennej w czasie. Czas ustalenia się pomiaru częstotliwości sygnału typu A po uruchomieniu algorytmu wynosi około 52 próbek dla $f_p = 1 \text{ kHz}$ (rys. 3.28a).



Rys. 3.28. Odpowiedź algorytmu na sygnał typu A: o częstotliwości 50 Hz (uruchomienie algorytmu) (a), o częstotliwości zmiennej zgodnie z przebiegiem funkcji sinus (b)

Algorytm wykazuje również dobrą nadążność za sygnałami o częstotliwości zmieniającej się w czasie w sposób ciągły, np. zgodnie z przebiegiem funkcji sinus. Opóźnienie wynosi w takim przypadku około 20 próbek (rys. 3.28b). W przypadku sygnałów o stałej częstotliwości, ale o skokowo zmiennej amplitudzie z wartości 1,0 j.w. na 0,8 j.w., opóźnienie wynosi ok. 52 próbki.

3.2. Metody wykorzystujące nieliniowy model sygnałowy

W modelu sygnałowym określonym zależnością (3.1), wartość pulsacji ω , a zatem i częstotliwości, jest w danej chwili czasowej stała. Załóżmy, że mierzony sygnał jest określony następującą zależnością:

$$y(t) = X(t) \cos(\omega(t)t - \varphi(t)). \quad (3.81)$$

W powyższym modelu, występują trzy nieznane parametry: amplituda, faza oraz pulsacja (częstotliwość). Jak widać równanie to przedstawia nieliniową zależność względem poszukiwanej wartości częstotliwości.

3.2.1. Wykorzystanie rozkładu sygnału w szereg Taylora

Niech sygnał wejściowy dany jest nieliniowym równaniem (3.81). Po wykorzystaniu prostych zależności trygonometrycznych można zapisać:

$$y(t) = X(t) \cos(2\pi f(t)t - \varphi(t)) = x_c \cos(2\pi f(t)t) + x_s \sin(2\pi f(t)t), \quad (3.82)$$

gdzie: $x_c = X(t) \cos \varphi(t)$, $x_s = X(t) \sin \varphi(t)$.

Pozwala to dokonać linearyzacji równania (3.82) poprzez rozwinięcie funkcji $\cos(2\pi f(t)t)$ i $\sin(2\pi f(t)t)$, w trzy pierwsze wyrazy szeregu Taylora [8], [29] i [30]. W rezultacie czego dla chwili k w postaci dyskretnej otrzymamy:

$$y(k) = h_{11}x_1 + h_{12}x_2 + h_{13}x_3 + h_{14}x_4 + h_{15}x_5 + h_{16}x_6, \quad (3.83)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} h_{11} &= \cos(ak), & x_1 &= x_c, \\ h_{12} &= -\frac{ak}{f_0} \sin(ak), & x_2 &= x_c \Delta f, \\ h_{13} &= \sin(ak), & x_3 &= x_s, \\ h_{14} &= \frac{ak}{f_0} \cos(ak), & x_4 &= x_s \Delta f, \\ h_{15} &= -0,5 \left(\frac{ak}{f_0} \right)^2 \cos(ak), & x_5 &= x_c (\Delta f)^2, \\ h_{16} &= -0,5 \left(\frac{ak}{f_0} \right)^2 \sin(ak), & x_6 &= x_s (\Delta f)^2, \end{aligned}$$

przy czym:

$$a = \frac{2\pi}{N}, \quad N - \text{liczba próbek przypadająca na okres podstawowej harmonicznej},$$

$$\Delta f = f - f_0,$$

f - częstotliwość sygnału mierzonego,

$f_0 = 50\text{Hz}$ - częstotliwość znamionowa podstawowej harmonicznej.

Powtarzając zależność (3.83) dla M ($M > 6$) kolejnych próbek otrzymamy:

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{d}, \quad (3.84)$$

gdzie:

$\mathbf{H}$ - macierz współczynników h_{lj} ($l = 1, 2, \dots, M$, $j = 1, 2, \dots, 6$) o wymiarach $M \times 6$,

$\mathbf{y} = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_M]^T$ - wektor pomiarów,

$\mathbf{d} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_6]^T$ - wektor niewiadomych.

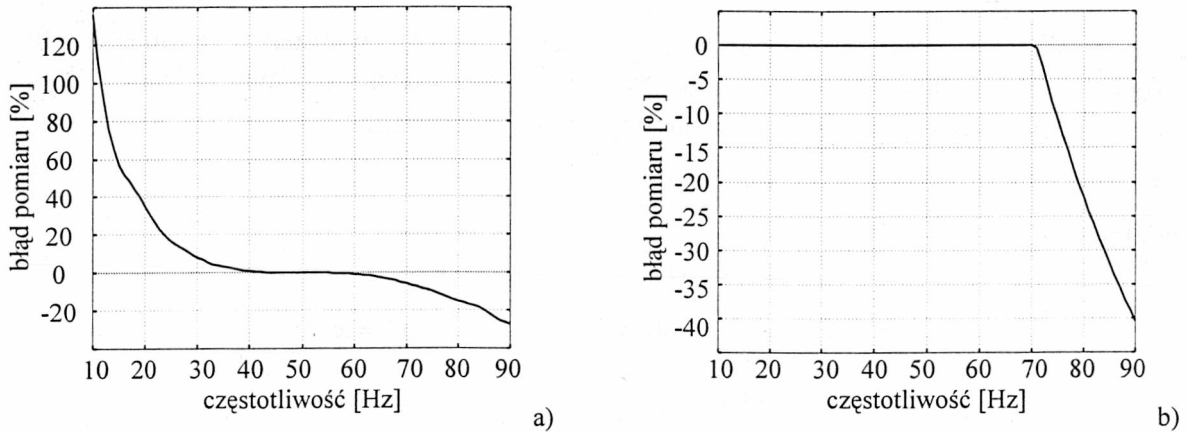
Równanie (3.84) można rozwiązać względem wektora $\mathbf{d}$ stosując metodę najmniejszych kwadratów. Zgodnie z ideą MNK obliczamy wektor $\mathbf{d}$:

$$\mathbf{d} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{y}, \quad (3.85)$$

a znając współczynniki $x_1 \dots x_6$ łatwo obliczymy Δf , a stąd szukane f , np.:

$$f = \frac{x_2}{x_1} + f_0 \quad \text{lub} \quad f = \frac{x_4}{x_3} + f_0. \quad (3.86)$$

W równaniach (3.86) występuje problem numeryczny w sytuacji gdy x_1 lub x_3 osiągają wartości bliskie zera. Ponieważ, na szczęście, nie zerują się one jednocześnie, zatem można wybrać lepszą (z większą wartością x_1 lub x_3) zależność. Dodatkowym źródłem błędu, jak wynika z analizy przeprowadzonej w artykule [30], jest to, że funkcje sinus i kosinus w równaniu (3.82) są rozłożone w szereg Taylora w skończoną liczbę wyrazów. Wobec tego prawidłowe wyniki pomiaru otrzymujemy tylko w otoczeniu punktu f_0 , czyli 50 Hz (rys. 3.29a).



Rys. 3.29. Zależność błędu pomiaru od częstotliwości dla sygnału typu A przed korekcją (a) i po korekcji (b)

Aby rozszerzyć zakres pomiarowy proponowane jest inne spojrzenie na równanie (3.84) [30]. Jedną z opcji obliczania częstotliwości jest użycie próbek napięcia i nierekursywnego filtra cyfrowego o współczynnikach określonych przez macierz $(\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T$ będącą macierzą pseudoodwrotną macierzy $\mathbf{H}$. Estymata odchyłki częstotliwości $|\hat{\Delta f}|$ może być wtedy określona równaniem:

$$|\hat{\Delta f}| = \left| \frac{H_2(f)}{H_1(f)} \right|, \quad (3.87)$$

gdzie: $H_1(f) = X \sin \varphi$ i $H_2(f) = \Delta f X \sin \varphi$
lub $H_1(f) = X \cos \varphi$ i $H_2(f) = \Delta f X \cos \varphi$.

Po rozłożeniu $H_1(f)$ i $H_2(f)$ w zespolony szereg Fouriera, po ciągu przekształceń otrzymamy:

$$|\Delta \hat{f}| = \frac{\left| \sum_{i=1}^M d_i \cos(2\pi f(i-0,5)T_p) \right|}{\left| \sum_{i=1}^M c_i \cos(2\pi f(i-0,5)T_p) \right|}, \quad (3.88)$$

gdzie:

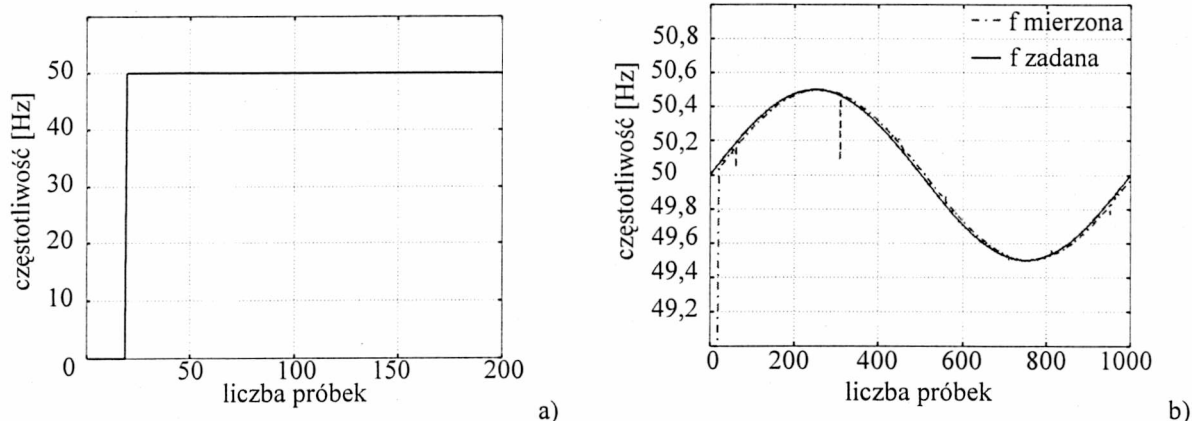
d_i, c_i - współczynniki filtru który estymuje odpowiednio $X \sin \varphi$ i $\Delta f X \sin \varphi$,

T_p - okres próbkowania,

M - szerokość okna pomiarowego.

Ze wzoru (3.88) można wprost policzyć szukaną częstotliwość. Na podstawie rys. 3.29b widać, jak zdecydowanie poprawiły się właściwości algorytmu po korekcji. W zakresie 10...70 Hz błąd pomiaru jest bliski zeru.

Algorytm ten, zgodnie z założonym modelem sygnału pierwszego rzędu, daje prawidłowe rezultaty tylko dla sygnału o podstawowej harmonicznej. Czas ustalenia się pomiaru częstotliwości po uruchomieniu algorytmu jest stały i wynosi N próbek dla przykładowego sygnału typu A (rys. 3.30a). Algorytm zachowuje się również poprawnie dla sygnału o częstotliwości zmiennej zgodnie z przebiegiem funkcji sinus (rys. 3.30b). Błąd pomiaru nie przekracza $\pm 0,1\%$, a czas odpowiedzi wynosi około 10 próbek dla $f_p = 1$ kHz. W przypadku sygnału charakteryzującego się skokową zmianą amplitudy z wartości 1,0 j.w. na 0,8 j.w. przy stałej częstotliwości, odpowiedź układu ustala się po N próbkach.



Rys. 3.30. Odpowiedź algorytmu na sygnał typu A: o częstotliwości 50 Hz (uruchomienie algorytmu) (a), o częstotliwości zmiennej zgodnie z przebiegiem funkcji sinus (b)

Rozwinięcie funkcji $\cos(2\pi f(t)t)$ i $\sin(2\pi f(t)t)$ występujących w wzorze (3.82), w trzy pierwsze wyrazy szeregu Taylora proponowane jest również w [32]. Różnica polega na tym, że najpierw liczona jest wartość zgrubna częstotliwości $\hat{f}$ metodą poszukiwania miejsc przejścia sygnału przez zero z aproksymacją liniową (patrz rozdział 3.1), a następnie odchyłka od uprzednio policzonej zgrubnie wartości częstotliwości w sposób opisany powyżej. Na tej podstawie obliczona jest nowa wartość $N=N_s$, zgodnie ze wzorem:

$$N_s = \text{int} \left(\frac{1}{\hat{f} T_p} \right), \quad (3.89)$$

gdzie: T_p - okres próbkowania,

$\text{int}(\cdot)$ - oznacza operację wydzielenia części całkowitej wyrażenia w nawiasach.

Wartość N_s podstawiona w miejsce N służy do obliczenia nowej wartości macierzy $\mathbf{H}$. Dalej zgodnie ze wzorem (3.85) obliczana jest wartość wektora $\mathbf{d}$, a znając współczynniki $x_1 \dots x_6$ łatwo obliczymy Δf . W celu skrócenia obliczeń możliwe jest uprzednie obliczenie wartości macierzy $\mathbf{H}$, albo jeszcze lepiej $(\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T$, dla różnych wartości spodziewanych zmian N_s i wykorzystanie we wzorze (3.85), w trakcie pomiaru, tylko wartości odpowiadających policzonej zgodnie z (3.89) wartości N_s .

3.2.2. Wykorzystanie nieliniowej metody najmniejszych kwadratów

Po zapisaniu równania (3.82) w postaci dyskretnej, otrzymamy [36]:

$$y(k) = X(k) \cos(a(k)k - \varphi(k)) = x_c(k) \cos(a(k)k) + x_s(k) \sin(a(k)k), \quad (3.90)$$

gdzie:

$$a(k) = q \frac{2\pi}{N}, \quad (3.91)$$

$$x_c(k) = X(k) \cos \varphi(k),$$

$$x_s(k) = X(k) \sin \varphi(k),$$

$$q = \frac{f}{f_0} \text{ - częstotliwość względna,}$$

f - częstotliwość podstawowej harmonicznej sygnału mierzonego,

N - liczba próbek w okresie podstawowej harmonicznej.

Zakładając, że przez M próbek parametry sygnału nie zmieniają się, możemy dla chwili k zapisać:

$$\begin{aligned} y(k-M+1) &= x_c(k) \cos(a(k)(1-M)) + x_s(k) \sin(a(k)(1-M)) \\ y(k-M+2) &= x_c(k) \cos(a(k)(2-M)) + x_s(k) \sin(a(k)(2-M)) \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ y(k-1) &= x_c(k) \cos(-a(k)) + x_s(k) \sin(-a(k)) \\ y(k) &= x_c(k) \end{aligned} \quad (3.92)$$

lub w zapisie macierzowym:

$$\mathbf{x} = \mathbf{h}(\mathbf{d}), \quad (3.93)$$

gdzie:

$$\mathbf{x} = [y(k-M+1) \quad y(k-M+2) \quad \dots \quad y(k)]^T \text{ - wektor pomiarów,}$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{d}) = [h_{1-M}(\mathbf{d}) \quad h_{2-M}(\mathbf{d}) \quad \dots \quad h_0(\mathbf{d})]^T \text{ - macierz modelu sygnału,}$$

$$h_i(\mathbf{d}) = h_i(\mathbf{d}(k)) = x_c(k) \cos(ia(k)) + x_s(k) \sin(ia(k)),$$

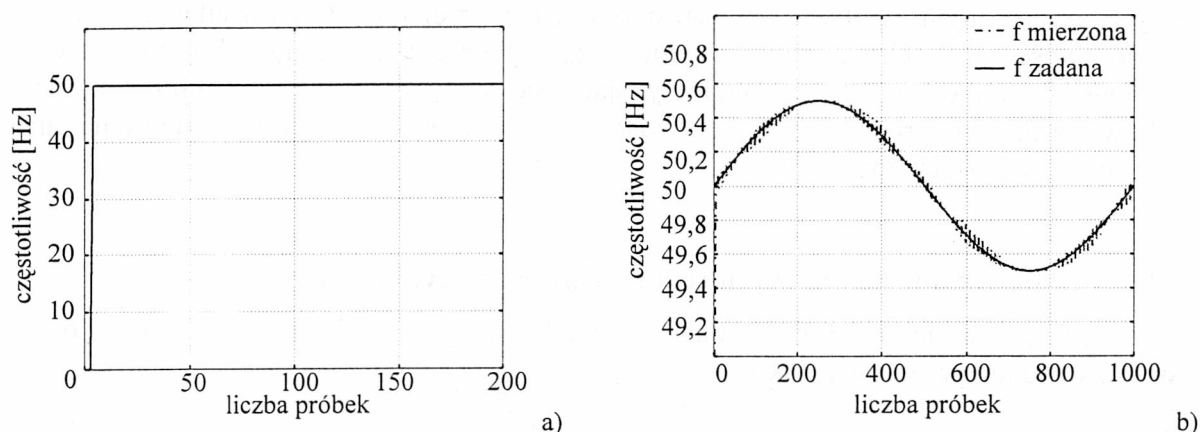
$$\mathbf{d} = \mathbf{d}(k) = [x_c(k) \quad x_s(k) \quad a(k)]^T \text{ - wektor estymowanych parametrów.}$$

Aby zminimalizować błędy zakładamy, że $M > 3$ (liczba niewiadomych wynosi trzy) i stosujemy kryterium nieliniowej metody najmniejszych kwadratów. Estymata wektora $\mathbf{d}$ dana jest wzorem (2.27). We wzorze tym występuje $\mathbf{J}(\mathbf{d})$ - Jacobian o M wierszach z których i -ty jest postaci:

$$\mathbf{J}_i(\mathbf{d}) = [\cos(ia) \quad \sin(ia) \quad -i(x_c \sin(ia) - x_s \cos(ia))]. \quad (3.94)$$

Po obliczeniu $\mathbf{d}(k)$, częstotliwość jest określana ze wzoru (3.91).

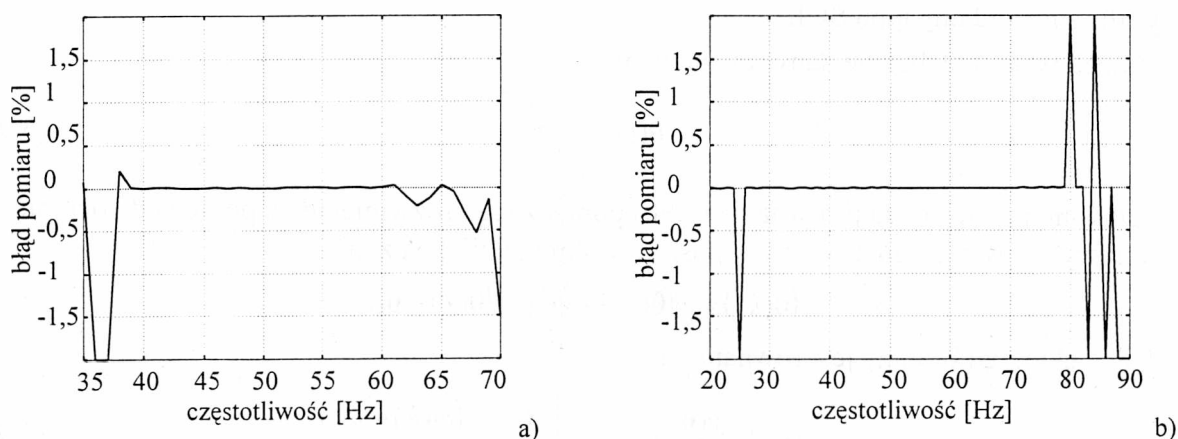
Algorytm nie nadaje się do pomiaru częstotliwości sygnału o zawartości wyższych harmonicznych. Nawet dla sygnału typu B poziom błędów jest na tyle wysoki, że uniemożliwia prawidłowe pomiary. Czas ustalenia się pomiaru częstotliwości po uruchomieniu algorytmu wynosi 4 próbki dla $f_p = 1$ kHz (rys. 3.31a), dla sygnału typu A i minimalnej wartości $M = 4$. Dla sygnału o częstotliwości zmiennej zgodnie z przebiegiem funkcji sinus (rys. 3.31b), algorytm wykazuje pełną poprawność, nadążając za zmianami częstotliwości i oscylując w niewielkich granicach (błąd mniejszy od $\pm 0,05\%$) wokół wartości zadanej. W przypadku sygnału charakteryzującego się skokową zmianą amplitudy z wartości 1,0 j.w. na 0,8 j.w. przy stałej częstotliwości, odpowiedź układu ustala się po 13 próbkach.



Rys. 3.31. Odpowiedź algorytmu na sygnał typu A: o częstotliwości 50 Hz (uruchomienie algorytmu) (a), o częstotliwości zmiennej zgodnie z przebiegiem funkcji sinus (b)

W dalszych symulacjach zmieniono algorytm dostosowując go dla sygnału o zawartości pięciu harmonicznych. Skomplikowało to zdecydowanie obliczenia numeryczne oraz wydłużyło czas reakcji na zmianę częstotliwości, ponieważ liczba niewiadomych równania (3.93) wynosi teraz jedenaście, zatem minimalna wartość $M = 12$. Do obliczeń przyjęto $M = 20$, czyli tyle ile liczba próbek przypadająca na okres podstawowej harmonicznej (N).

Zależność błędu pomiaru od częstotliwości dla sygnału typu D zamieszczona jest na rys. 3.32a. Prawidłowe wyniki (błędy poniżej 2%) uzyskano dla zakresu częstotliwości 38...70 Hz. Czas ustalenia się pomiaru częstotliwości po uruchomieniu algorytmu zwiększył się i wynosi teraz 20 próbek ($M = 20$) dla $f_p = 1$ kHz.



Rys. 3.32. Zależność błędu pomiaru od częstotliwości dla sygnału typu D (algorytm dla 5 harmonicznych): przed korekcją (a) i po korekcji (b)

W przypadku zmiany częstotliwości zgodnie z przebiegiem funkcji sinus opóźnienie wynosi ok. 10 próbek. Odpowiedź także charakteryzuje się niewielkimi oscylacjami wokół wartości zadanej. Niestety w przypadku sygnału charakteryzującego się skokową zmianą amplitudy z wartości 1,0 j.w. na 0,8 j.w. przy stałej częstotliwości odpowiedź układu jest błędna od momentu wystąpienia zmiany amplitudy.

Aby zwiększyć zakres mierzonych częstotliwości dokonano korekcji algorytmu polegającej na wykonaniu n iteracji obliczeń macierzy $\mathbf{d}$ dla jednej chwili czasowej k . Do obliczeń przyjęto $n = 3$ (większa wartość zdecydowanie wydłuża czas obliczeń numerycznych). Zależność błędu pomiaru od częstotliwości dla algorytmu po korekcji znajduje się na rys. 3.30b. Prawidłowe wyniki uzyskano w zakresie 26...79 Hz, czyli niewiele większym niż przed korekcją, przy zdecydowanym wydłużeniu czasu obliczeń numerycznych. Czas ustalenia się pomiaru częstotliwości po uruchomieniu algorytmu w zasadzie nie uległ zmianie. Poprawiła się za to odpowiedź układu na sygnał charakteryzujący się skokową zmianą amplitudy z wartości 1,0 j.w. na 0,8 j.w. przy stałej częstotliwości. Algorytm teraz prawidłowo reaguje na zmianę amplitudy z opóźnieniem 19 próbek.

3.2.3. Wykorzystanie nieliniowych rekursywnych algorytmów MNK

Zgodnie z równaniem (3.90), zmianę częstotliwości sygnału można korzystając z operacji różniczkowania, przedstawić jako:

$$\Delta f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi(t)}{dt} \quad (3.95)$$

lub w postaci dyskretniej:

$$\Delta f_k = \frac{1}{2\pi} \frac{\varphi_k - \varphi_{k-1}}{T_p}, \quad (3.96)$$

gdzie: T_p - okres próbkowania.

Jak wykazano w [13], w praktyce użycie powyższej prostej formuły prowadzi niestety do dużych oscylacji mierzonej odchyłki częstotliwości, zatem konieczne staje się użycie dwóch filtrów uśredniających, jednego przy obliczeniach φ_k , a drugiego - na skutek podstawienia estymaty $\hat{\varphi}_k$ zamiast φ_k do wzoru (3.96) - przy obliczeniach odchyłki częstotliwości. W celu uniezależnienia pomiarów od składowej stałej i wyższych harmonicznych stosowany jest prosty filtr sinusoidalny typu SOI.

Niech wektor $\boldsymbol{\theta}$ będzie dany równaniem:

$$\boldsymbol{\theta}(t) = \begin{bmatrix} \varphi(t) \\ X(t) \end{bmatrix}. \quad (3.97)$$

Dokonując linearyzacji równania (3.90) poprzez jego rozwinięcie za pomocą dwóch pierwszych wyrazów szeregu Taylora, w postaci dyskretniej można zapisać:

$$\hat{y}(\boldsymbol{\theta}(k)) = y(\boldsymbol{\theta}(k)) + \boldsymbol{\psi}^T(k) (\boldsymbol{\theta}(k) - \hat{\boldsymbol{\theta}}(k)), \quad (3.98)$$

gdzie wektor $\boldsymbol{\psi}(k)$ dany jest równaniem:

$$\boldsymbol{\psi}(k) = \left[\frac{\partial y(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right]_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}(k)} = \begin{bmatrix} \hat{X}_k \sin(\omega(k) + \hat{\varphi}_k) \\ \cos(\omega(k) + \hat{\varphi}_k) \end{bmatrix}. \quad (3.99)$$

Do obliczenia wektora θ_k mogą służyć dwie metody:

- rekursywna metoda najmniejszych kwadratów RLS (ang. **R**ecursive **L**east **S**quares) [27], [28], [35], [49],
- algorytm gradientu stochastycznego LMS (ang. **L**east **M**eans **S**quares) [28].

Wychodząc z teorii filtru Kalmana [44] oraz algorytmu rekursywnej identyfikacji systemów liniowych (dodatek w [13] po zmodyfikowaniu na układy nieliniowe) po niewielkich przekształceniach otrzymamy wzór na estymatę wektora $\hat{\theta}_k$:

$$\hat{\theta}_k = \hat{\theta}_{k-1} + \mathbf{L}(k)\nu(k), \quad (3.100)$$

gdzie $\nu(k)$ oznacza błąd będący różnicą między wartością kolejnej próbki pomiarowej $y(k)$, a wartością estymaty modelu sygnału (3.89):

$$\nu(k) = y(k) - \hat{y}(\hat{\theta}_k, k) \quad (3.101)$$

oraz

$$\mathbf{L}(k) = \mathbf{P}(k)\boldsymbol{\psi}(k), \quad (3.102)$$

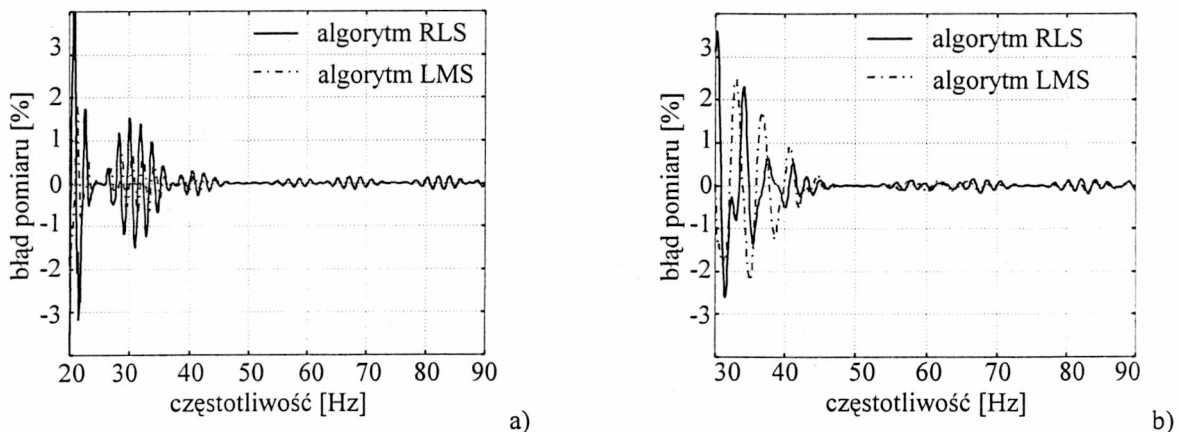
$$\mathbf{P}(k) = \frac{1}{\lambda(k)} \left(\mathbf{P}(k-1) - \frac{\mathbf{P}(k-1)\boldsymbol{\psi}(k)\boldsymbol{\psi}^T(k)\mathbf{P}(k-1)}{\lambda(k) + \boldsymbol{\psi}^T(k)\mathbf{P}(k-1)\boldsymbol{\psi}(k)} \right), \quad (3.103)$$

dla metody RLS ($\lambda(k)$ - tzw. współczynnik zapominania) lub

$$\mathbf{L}(k) = \mu(k) \frac{\boldsymbol{\psi}(k)}{1 + \mu(k) |\boldsymbol{\psi}(k)|^2}, \quad (3.104)$$

dla metody LMS ($\mu(k) = 1 - \lambda(k)$ - tzw. tempo zapominania).

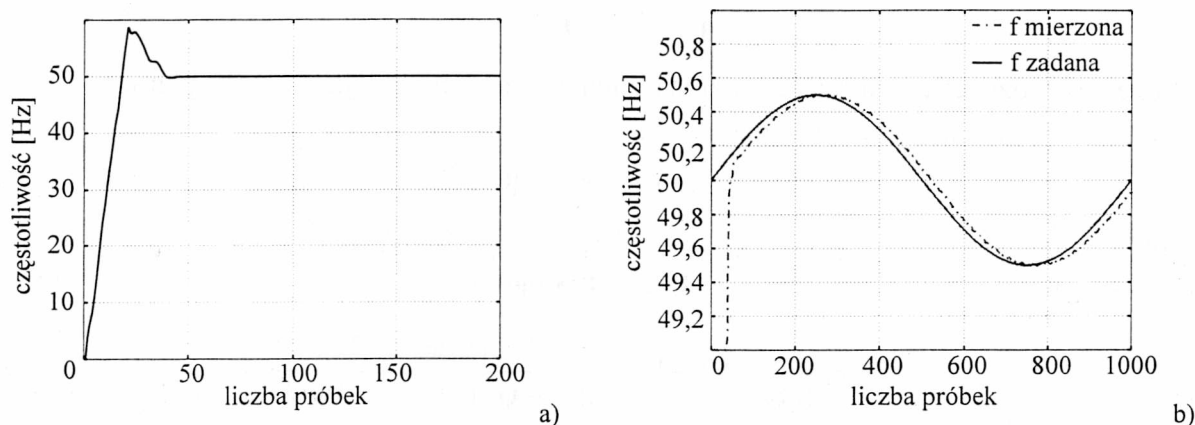
Podczas symulacji założono stałe wartości współczynników $\lambda = 0,8$ i $\mu = 0,8$ oraz zastosowano N - próbkowy filtr uśredniający (tylko na estymowane wartości dewiacji częstotliwości) i N -próbkowy filtr sinusoidalny typu SOI. Na rys. 3.33 przedstawione są porównawcze zależności błędu pomiaru od częstotliwości dla sygnałów typu A (rys. 3.33a) oraz typu D (rys. 3.33b). Widoczne jest podobne działanie algorytmów oraz zwiększony poziom błędów dla częstotliwości poniżej 40 Hz. Dla sygnałów typu D o częstotliwości poniżej 30 Hz poziom błędów jest już tak duży, że uniemożliwia prawidłowy pomiar.



Rys. 3.33. Zależność błędu pomiaru od częstotliwości dla sygnałów typu A (a) i D (b)

Algorytmy zachowują się prawidłowo w przypadku sygnałów o częstotliwości zmiennej w czasie. Czas ustalenia się pomiaru częstotliwości sygnału typu A po uruchomieniu algorytmu wynosi około 55 próbek dla obydwu algorytmów i $f_p = 1$ kHz (rys. 3.34a). Prawidłowo

wygląda nadążność algorytmów za sygnałami o częstotliwości zmieniającej się w czasie w sposób ciągły, np. zgodnie z przebiegiem funkcji sinus. Algorytm LMS wykazuje opóźnienie około 20 próbek (rys. 3.34b), a algorytm RLS - opóźnienie ok. 22 próbki. Wartości te rosną przy zwiększonym zakresie zmian częstotliwości. W przypadku sygnałów o stałej częstotliwości, ale o skokowo zmiennej amplitudzie z wartości 1,0 j.w. na 0,8 j.w., opóźnienie wynosi ok. 50 próbek dla obydwu algorytmów. Wymienione powyżej czasy ulegną zwiększeniu przy zastosowaniu drugiego filtra uśredniającego przy obliczeniach φ_k .



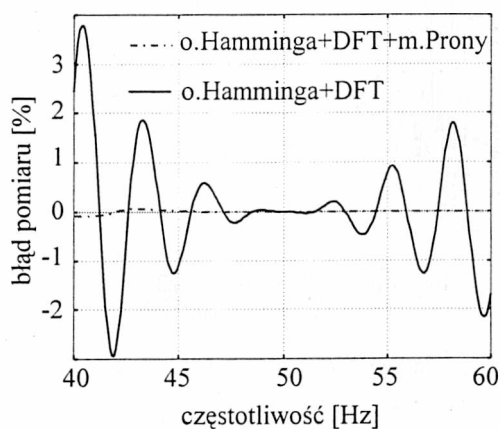
Rys. 3.34. Odpowiedź algorytmu LMS na sygnał A: o częstotliwości 50 Hz (uruchomienie algorytmu) (a), o częstotliwości zmiennej zgodnie z przebiegiem funkcji sinus (b)

3.2.5. Metoda wykorzystująca model estymacyjny Prony'ego

Zgodnie z definicją standardowego algorytmu DFT dla podstawowej harmonicznej ($N_f = N$ czyli liczbie próbek w okresie podstawowej harmonicznej sygnału) wartość próbki w chwili k dana jest wzorem (3.70). Mając do dyspozycji wartości próbki w chwili k i $k-1$ można obliczyć częstotliwość zgodnie ze wzorem:

$$f = (\arg(\underline{DFT}_{k-1}) - \arg(\underline{DFT}_k)) \frac{f_0 N}{2\pi}, \quad (3.105)$$

gdzie: $\arg(\underline{DFT}_k) = \arctg\left(\frac{\text{Im}(\underline{DFT}_k)}{\text{Re}(\underline{DFT}_k)}\right)$.



Rys. 3.35. Zależność błędu pomiaru od częstotliwości dla sygnału typu D

Jednakże im większe odstępstwo częstotliwości od częstotliwości podstawowej 50 Hz, tym większy błąd pomiaru. Przykładowo dla sygnałów typu D, dla częstotliwości 40 Hz błąd dochodzi do 10%. W celu minimalizacji błędów i uniezależnienia się od wyższych harmonicznych możliwa jest wstępna filtracja sygnału z zastosowaniem filtra okienkowego Blackmana lub Hamminga. Pozwala to zredukować średni błąd w analizowanym przykładzie do niecałych 4% (rys. 3.35 - krzywa rysowana linią ciągłą).

Dalsza redukcja błędów pomiaru dokonywana jest poprzez zastosowanie modelu estymacyjnego Prony'ego [15], [16], [25], [27]. Model ten zostanie dokładniej opisany w punkcie 5.1.

Tu zostanie przedstawione tylko to co niezbędne do zaprezentowania algorytmu.

Po wstępnej filtracji z zastosowaniem filtru Blackmana lub Hamminga, sygnał poddawany jest filtracji właściwej przy użyciu tylko kosinusowego filtru Fouriera. Po filtracji, sygnał ten może być aproksymowany funkcją harmoniczną:

$$\hat{y}(k) = X \cos(n\omega T_p + \varphi) \quad (3.106)$$

lub w zapisie zespolonym:

$$\hat{y}(k) = bz_1 + b^* z_1^*, \quad (3.107)$$

gdzie:

$$z_1 = e^{j\omega T_p},$$

$$b = 0,5 X e^{j\varphi}.$$

Równanie (3.106) jest częścią rzeczywistą równania (5.1) przy założeniu, że $p = 1$. Załóżmy, że liczba punktów pomiarowych M jest większa od $2p$. Problem estymacji polega na obliczeniu takich wartości z_1 oraz b , aby błąd:

$$v(k) = y(k) - \hat{y}(k) \quad (3.108)$$

był minimalny. W tym celu zgodnie ze wzorem (5.7) dla $p = 2$ definiujemy w dziedzinie z wielomian:

$$B(z) = b_0(z - z_1)(z - z_1^*) = \sum_{i=0}^2 z^{2-i} b_i, \quad (3.109)$$

którego pierwiastkami są oczywiście z_1 i z_1^* (są to również pierwiastki równania (3.107)), a współczynniki b_k są powiązane z częstotliwością przebiegu. Analogicznie w dziedzinie czasu, równanie (5.9) dla $p = 2$ będzie postaci:

$$c(k) = \sum_{i=0}^2 b_i y(k-i) = 0, \quad (3.110)$$

gdzie: $k = 0, 1, \dots, (M+1)$.

Powtarzając równanie (3.110) dla poszczególnych k możemy w celu wyliczenia współczynników b_k zastosować metodę najmniejszych kwadratów. Dodatkowo dla uproszczenia przyjmując $b_1 = 1$ oraz $b_0 = b_2$, jako ostateczne rozwiązanie otrzymamy:

$$b_0 = - \frac{\sum_{k=2}^{M-1} y(k)(y(k-1) + y(k+1))}{\sum_{k=2}^{M-1} (y(k-1) + y(k+1))^2}. \quad (3.111)$$

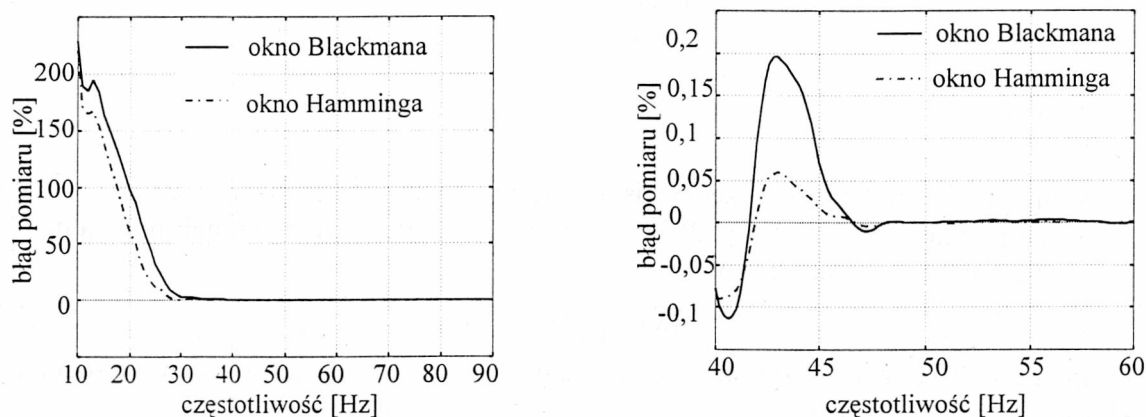
Ponieważ wielomian (3.109) można zapisać w postaci:

$$z^2 + \frac{1}{b_0} z + 1 = 0, \quad (3.112)$$

zatem przyrównując część rzeczywistą pierwiastka równania (3.112) z częścią rzeczywistą równania na z_1 we wzorze (3.107) ostatecznie otrzymamy:

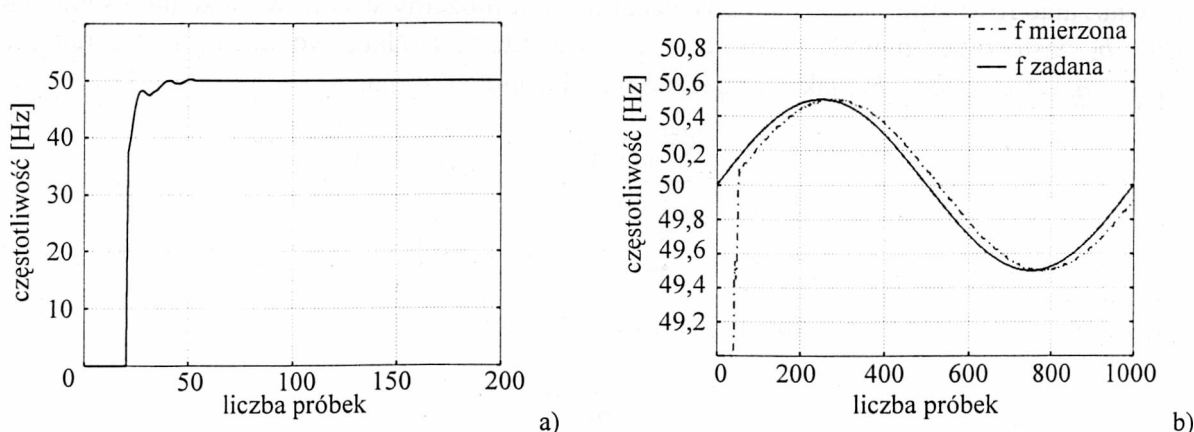
$$f = \frac{f_0 N}{2\pi} \arccos \left\{ \frac{\sum_{k=2}^{M-1} y(k)(y(k-1) + y(k+1))}{2 \sum_{k=2}^{M-1} (y(k-1) + y(k+1))^2} \right\}. \quad (3.113)$$

Na rys. 3.36 przedstawiona jest zależność błędu pomiaru od częstotliwości dla okien filtracyjnych Blackmana i Hamminga, dla sygnału typu D. Przyjęto $N = 20$ oraz szerokość okien filtracyjnych - $N_f = 20$. Dla częstotliwości poniżej 30 Hz, widoczny jest zdecydowany wzrost poziomowi błędowi. Minimalnie lepsze wyniki daje stosowanie okna filtracyjnego Hamminga. Analiza wpływu długości okna filtracyjnego wykazuje, że im większa długość okna tym mniejszy błąd pomiaru. Należy jednak pamiętać, że zwiększanie długości okna powoduje wzrost czasu obliczeń.



Rys. 3.36. Zależność błędu pomiaru od częstotliwości dla sygnału typu D przy zastosowaniu filtru okienkowego Blackmana i Hamminga

Czas ustalenia się pomiaru częstotliwości sygnału typu D po uruchomieniu algorytmu wynosi 58 próbek przy zastosowaniu okna Hamminga o długości $N_f = 20$ i dla $f_p = 1$ kHz (rys. 3.37a). Przy braku okna filtracyjnego (dla sygnału typu A), czas ten ulega skróceniu do 39 próbek. W przypadku częstotliwości zmieniającej się zgodnie z przebiegiem funkcji sinus (rys. 3.37b), algorytm prawidłowo nadąża za zmianami częstotliwości z opóźnieniem ok. 27 próbek. Dla sygnału charakteryzującego się skokową zmianą amplitudy z wartości 1,0 j.w. na 0,8 j.w. przy stałej częstotliwości, odpowiedź układu ustala się po 49 próbkach.



Rys. 3.37. Odpowiedź algorytmu na sygnał typu D (okno Hamminga, $N_f = 20$):
o częstotliwości 50 Hz (uruchomienie algorytmu) (a),
o częstotliwości zmiennej zgodnie z przebiegiem funkcji sinus (b)

4. POMIAR CZĘSTOTLIWOŚCI W UKŁADZIE TRÓJFAZOWYM

W poprzednim rozdziale zaprezentowano przegląd metod pomiaru częstotliwości w układzie jednofazowym. W systemie trójfazowym pomiary mogą być dokonywane przy wykorzystaniu jednej fazy napięcia lub prądu. Taka sytuacja jest jednak niekorzystna w przypadku zaniku napięcia w badanej fazie, np. w przypadku wystąpienia zwarcia, co praktycznie może niekiedy uniemożliwić pomiar. Dużo bardziej wiarygodne jest wykorzystywanie składowych symetrycznych układów trójfazowych, ponieważ stanowią one swoistą „kombinację” napięć lub prądów wszystkich trzech faz. W celu pomiaru częstotliwości w układzie trójfazowym wykorzystuje się zazwyczaj składową zgodną określoną zależnością:

$$\underline{x}_1 = \frac{1}{3}(\underline{x}_a + \alpha \underline{x}_b + \alpha^2 \underline{x}_c), \quad (4.1)$$

gdzie $\underline{x}_a$, $\underline{x}_b$, $\underline{x}_c$ oznaczają wektory napięcia (lub prądu) poszczególnych faz, natomiast α i α^2 - przesunięcie fazowe odpowiednio 120° i 240° w dodatnim kierunku trygonometrycznym, tzn. w przód.

Dla odpowiednio dobranej częstotliwości próbkowania, tak, aby liczba N (liczba punktów przypadająca na okres podstawowej harmonicznej) dała się podzielić bez reszty przez liczbę 3 (bo $360^\circ/3=120^\circ$) możliwa jest bardzo prosta implementacja składowej zgodnej do pomiaru częstotliwości [22]. Wzór (4.1) można wtedy uprościć z postaci wektorowej do rzeczywistej. Ponieważ przesunięciu fazowemu 120° w dodatnim kierunku trygonometrycznym odpowiada przesunięcie 240° w ujemnym kierunku trygonometrycznym, a przesunięciu fazowemu 240° w dodatnim kierunku trygonometrycznym odpowiada przesunięcie 120° w ujemnym kierunku trygonometrycznym, zatem w postaci dyskretnej przyjmie on postać:

$$x_1(k) = \frac{1}{3} \left(x_a(k) + \alpha x_b \left(k - \frac{2N}{3} \right) + \alpha^2 x_c \left(k - \frac{N}{3} \right) \right). \quad (4.2)$$

Ponieważ składowa zgodna układu trójfazowego jest pojedynczym sygnałem, zatem po jej wyliczeniu możliwe jest zastosowanie do pomiaru częstotliwości każdej z metod opisanych w rozdziale poprzednim.

Korzystanie ze składowej zgodnej przy pomiarach częstotliwości, w sposób opisany powyżej możliwe jest tylko w stosunkowo wąskim zakresie zmian częstotliwości. Spowodowane jest to faktem, że dla częstotliwości sygnału równej 50 Hz, przesunięcie sygnału dyskretnego o $N/3$ próbek, odpowiada dokładnie przesunięciu sygnału o kąt 120° (czyli zgodnie z definicją składowej zgodnej), natomiast dla innych częstotliwości sygnału kąt ten różni się od 120° , tym więcej, im występuje większa różnica w stosunku do 50 Hz.

Oprócz metody wykorzystującej składowe symetryczne, znane są także inne metody pozwalające na pomiar częstotliwości w układzie trójfazowym. Zostaną one zaprezentowane poniżej.

4.1. Metody wykorzystujące model sygnału trójfazowego oparty na wektorze przestrzennym

Założmy, że sygnał trójfazowy jest następującej postaci:

$$\begin{aligned}x_a(k) &= X_a \cos((a + \Delta a)k + \varphi), \\x_b(k) &= X_b \cos\left((a + \Delta a)k + \varphi - \frac{2}{3}\pi\right), \\x_c(k) &= X_c \cos\left((a + \Delta a)k + \varphi + \frac{2}{3}\pi\right),\end{aligned}\tag{4.3}$$

gdzie:

$$\Delta a = a \frac{\Delta f}{f_0},$$

$$a = \frac{2\pi}{N},$$

$$\Delta f = f - f_0,$$

N - liczba próbek przypadająca na okres podstawowej harmonicznej.

W przypadku, gdy zachodzi potrzeba policzenia tylko składowych zgodnych i przeciwnych (a nie zerowych) sygnału trójfazowego, bardzo wygodna jest metoda bazująca na wektorze przestrzennym [7] określonym zależnością:

$$\underline{x}_f(k) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(x_a(k) + x_b(k)e^{j\frac{2}{3}\pi} + x_c(k)e^{j\frac{4}{3}\pi} \right).\tag{4.4}$$

Wektor ten jest wektorem zespolonym:

$$\underline{x}_f = u_\alpha + ju_\beta,\tag{4.5}$$

o części rzeczywistej i urojonej danych równaniem w zapisie macierzowym:

$$\mathbf{u} = \mathbf{T}_1 \mathbf{x},\tag{4.6}$$

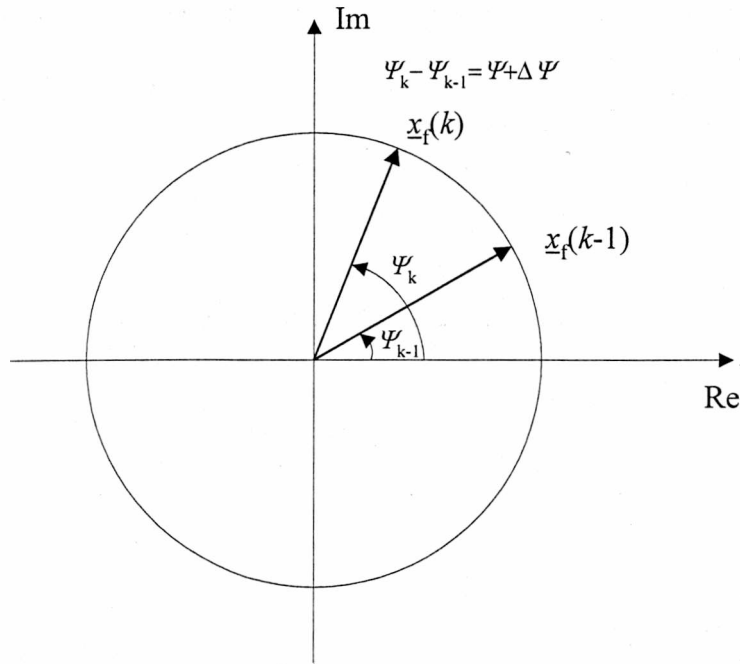
gdzie:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_\alpha & u_\beta \end{bmatrix}^T,$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_a & x_b & x_c \end{bmatrix}^T,$$

$$\mathbf{T}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & \sqrt{3} & \sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

W sytuacji braku jakichkolwiek zakłóceń wektor przestrzenny porusza się po płaszczyźnie zespolonej ze stałą prędkością, przesuając się dla poszczególnych dyskretnych chwil czasowych $k-1$ i k o stały kąt Ψ (rys. 4.1). Zmiana tego kąta (o wartość $\Delta\Psi$) jest miarą zmian częstotliwości sygnału trójfazowego.



Rys. 4.1. Kąt przesunięcia położenia wektora $\underline{x}_f$ na płaszczyźnie zespolonej dla dwóch następujących po sobie chwil czasowych w przypadku zmiany częstotliwości

Ponieważ:

$$\Psi_k - \Psi_{k-1} = \Psi + \Delta\Psi, \quad (4.7)$$

a z prostej zależności trygonometrycznej wynika, że:

$$\begin{aligned} \Psi_{k-1} &= \arctg \left(\frac{\operatorname{Im}(\underline{x}_f(k-1))}{\operatorname{Re}(\underline{x}_f(k-1))} \right), \\ \Psi_k &= \arctg \left(\frac{\operatorname{Im}(\underline{x}_f(k))}{\operatorname{Re}(\underline{x}_f(k))} \right), \end{aligned} \quad (4.8)$$

zatem ostatecznie częstotliwość określona jest jako pochodna po czasie kąta $\Psi_1(t) = \Psi + \Delta\Psi$:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \Psi_1(t). \quad (4.9)$$

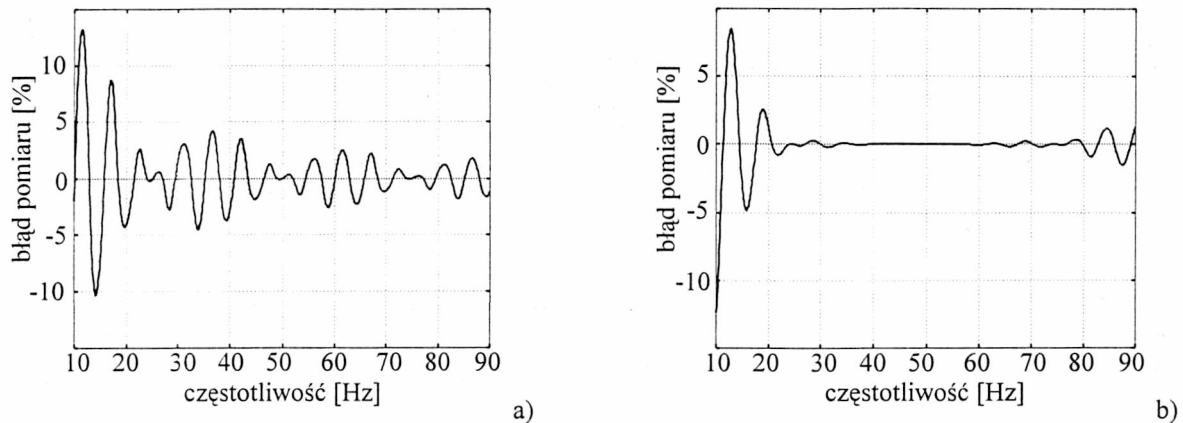
Równanie (4.9) przedstawione w postaci dyskretnej przyjmie postać:

$$f_k = \frac{f_0}{a} (\Psi_k - \Psi_{k-1}). \quad (4.10)$$

Rys. 4.2 przedstawia zależność błędu pomiaru od częstotliwości dla sygnału typu B3 (patrz Dodatek A.2). W większej części analizowanego zakresu zmian częstotliwości (rys. 4.2a) wartość błędu wynosi poniżej $\pm 5\%$, a dla częstotliwości poniżej 20 Hz przekracza wartość $\pm 10\%$. Przy zawartości większej liczby harmoniczných w sygnale, poziom błędów jest już znaczny.

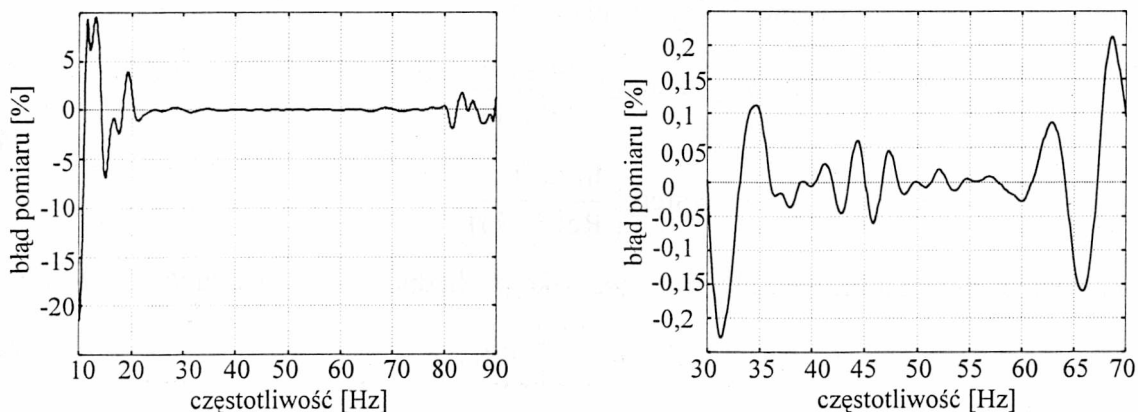
Aby uniezależnić się od zakłóceń w postaci wyższych harmoniczných możliwe jest zastosowanie półokresowego filtru typu SOI o współczynnikach równych 1. Ponieważ tak zaprojektowany filtr tłumi bardzo dobrze tylko harmoniczných o częstotliwościach 100, 200, 300 Hz, itd., dla sygnału 50 Hz, zatem aby filtracja była skuteczna również przy odchyłkach częstotliwości od wartości znamionowej, proponowane jest użycie czterech szeregowo połączonych

filtrów o różnej długości okna filtracyjnego. I tak np. dla $f_p = 1$ kHz, czyli dla $N = 20$ próbek przypadających na okres podstawowej harmoniczej, filtry mają okna o długościach odpowiednio 9, 10, 11, 12 próbek. Efekt działania tak skonstruowanego filtra widoczny jest na rys. 4.2b. Poziom błędów znacznie spada w porównaniu z pomiarem bez filtracji i szczególnie w zakresie 30...70 Hz nie przekracza wartości $\pm 0,25\%$.



Rys. 4.2. Zależność błędu pomiaru od częstotliwości dla sygnału typu B3: bez filtracji (a), z zastosowaniem poczwórnego filtra typu SOI (b)

Na rys. 4.3. przedstawiono zależność błędu pomiaru od częstotliwości dla sygnałów typu D3 (patrz Dodatek A.2) o zawartości pięciu harmoniczych przy zastosowaniu filtracji. Jak widać poziom błędów dla zakresu 30 - 70 Hz również nie przekracza wartości $\pm 0,25\%$.

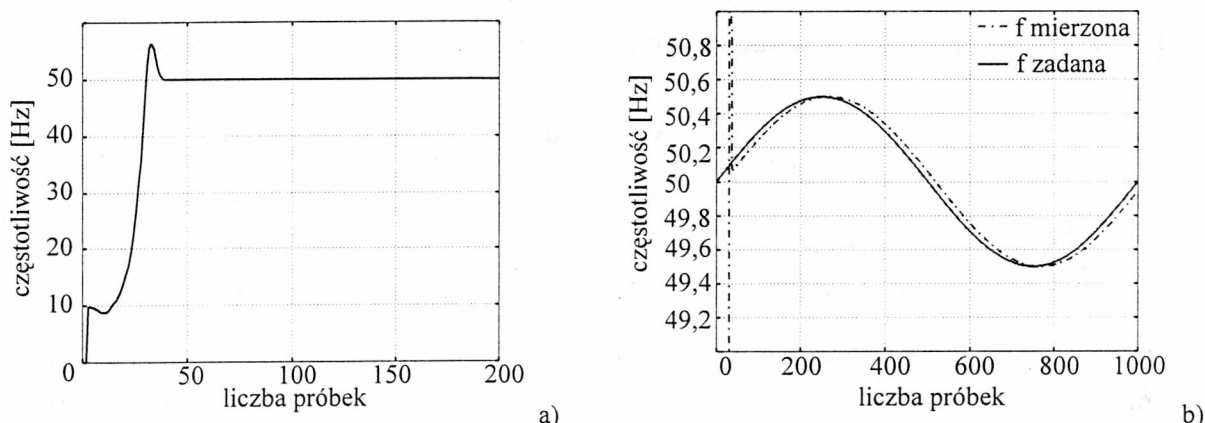


Rys. 4.3. Zależność błędu pomiaru od częstotliwości dla sygnału typu D3 z zastosowaniem poczwórnego filtra typu SOI

W algorytmie opisanym powyżej występuje problem natury numerycznej. Wartość kąta Ψ_k rośnie w czasie do nieskończoności, wobec tego pomiar możliwy jest tylko w ograniczonym czasie. Aby usunąć tę niedogodność proponowana jest realizacja w pętli sprzężenia zwrotnego z mnożeniem wektora przestrzennego przez wartość $e^{-j\xi}$, tak, aby uczynić go stacjonarnym dla częstotliwości znamionowej. Wartość kąta ξ jest tak dobierana w pętli sprzężenia, tak, aby kąt Ψ był równy 0. Wtedy różnica $\Psi_k - \Psi_{k-1} = \Delta\Psi$ obrazuje pośrednio zmiany częstotliwości, a nie jej wartość jak to było poprzednio.

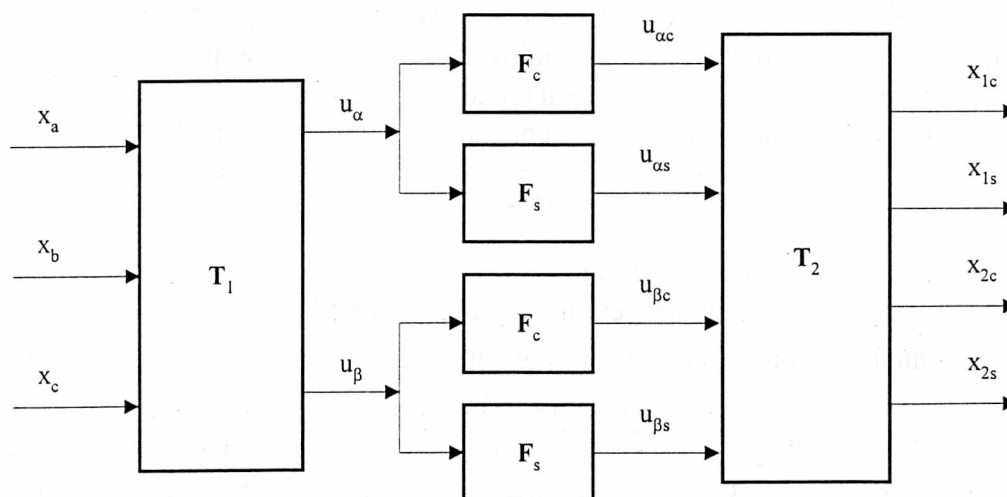
Konsekwencją wprowadzenia filtracji jest znaczne zwiększenie czasu reakcji algorytmu na zmianę częstotliwości. O ile w przypadku sygnałów o zawartości tylko jednej harmoniczej i braku filtracji, czas ustalenia się pomiaru częstotliwości sygnału typu A3 po uruchomieniu

algorytmu wynosi 3 próbki, o tyle w przypadku sygnałów zakłóconych wyższymi harmonicznymi i przy zastosowaniu poczwórnego filtra opóźnienie rośnie do ok. 40 próbek (rys.4.4a). Analogiczne opóźnienie występuje w przypadku skokowej zmiany amplitudy sygnału z wartości 1,0 j.w. na 0,8 j.w. przy stałej częstotliwości. Dla sygnałów o częstotliwości zmieniającej się ciągle w czasie, np. zgodnie z przebiegiem funkcji sinus, opóźnienie jest mniejsze (rys. 4.4b) i wynosi ok. 18 próbek przy zastosowaniu filtracji (jest zależne od szybkości zmian częstotliwości). W przypadku sygnału o zawartości wyższych harmonicznych występują oscylacje częstotliwości mierzonej wokół zadanej. W celu ostatecznego „wygładzenia” pomiaru konieczne byłoby zastosowanie dodatkowego filtra uśredniającego, który jednakże wprowadzi dodatkowe opóźnienie.



Rys. 4.4. Odpowiedź algorytmu na sygnał typu A3: o częstotliwości 50 Hz (uruchomienie algorytmu) (a), o częstotliwości zmiennej zgodnie z przebiegiem funkcji sinus (b)

Istnieje wiele możliwości modyfikacji algorytmu opisanego powyżej. Obliczmy składową zgodną sygnału trójfazowego. W tym celu sygnały u_α i u_β otrzymane z równania (4.5) poddamy działaniu ortogonalizacji w celu uzyskania $\underline{u}_\alpha$ i $\underline{u}_\beta$ (rys. 4.5). Wybierzmy metodę korelacyjną.



Rys. 4.5. Struktura estymacji składowych zgodnych i przeciwnych sygnału trójfazowego

Zgodnie z definicją korelacji (patrz rozdział 2.2.2):

$$\begin{aligned} u_{\alpha c} &= \frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N-1} u_{\alpha}(k-i) \cos(a(k-i)), \\ u_{\alpha s} &= \frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N-1} u_{\alpha}(k-i) \sin(a(k-i)). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Analogicznie dla $u_{\beta c}$ i $u_{\beta s}$.

Ponieważ:

$$\underline{x}_f = \sqrt{\frac{2}{3}} (\underline{x}_1 + \underline{x}_2^*), \quad (4.12)$$

gdzie $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$ - odpowiednio składowa zgodna i przeciwna (* oznacza liczbę sprzężoną),
zatem:

$$\mathbf{x}_{12} = \mathbf{T}_2 \mathbf{u}_{\alpha\beta}, \quad (4.13)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{12} &= [x_{1c} \quad x_{1s} \quad x_{2c} \quad x_{2s}]^T, \\ \mathbf{u}_{\alpha\beta} &= [u_{\alpha c} \quad u_{\alpha s} \quad u_{\beta c} \quad u_{\beta s}]^T, \\ \mathbf{T}_2 &= \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Po przekształceniach składowa zgodna wyrazi się następującym równaniem:

$$x_1(k) = \frac{X}{N} \frac{X \sin\left(\frac{\Delta a}{2} N\right)}{\sin\left(\frac{\Delta a}{2}\right)} e^{-j\varphi} e^{-j\frac{\Delta a}{2}(N-1)} e^{j\Delta a k}. \quad (4.14)$$

W przypadku metody korelacyjnej położenie wektora $\underline{x}_1$ na płaszczyźnie zespolonej jest stałe i nie ulega zmianie pod warunkiem stałości częstotliwości. W przypadku zmiany częstotliwości wektor ten przesuwa się po okręgu o kąt Δa (rys. 4.6).

Zatem określenie Δa pozwala na obliczenie zmiany częstotliwości zgodnie ze wzorem:

$$\Delta f = f_0 \frac{\Delta a}{a}. \quad (4.15)$$

Możliwe są dwie metody określenia Δa :

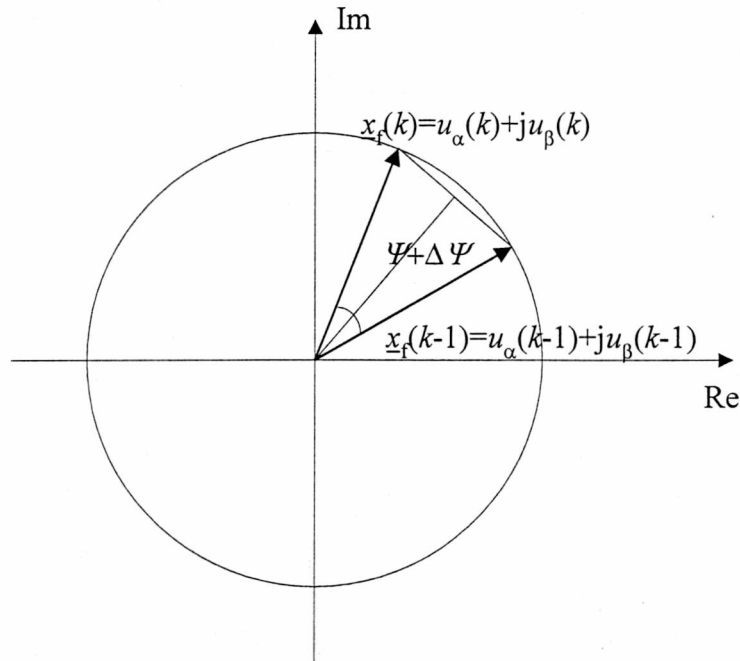
- poprzez policzenie różnicy faz wektorów $\underline{x}_1(k)$ i $\underline{x}_1(k-1)$,
- z prostej analizy geometrycznej rys. 4.6 wynika że:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\Delta a}{2} &= \frac{|x_{1c}(k) - x_{1c}(k-1) + j(x_{1s}(k) - x_{1s}(k-1))|}{|x_{1c}(k) + x_{1c}(k-1) + j(x_{1s}(k) + x_{1s}(k-1))|} = \\ &= \frac{|x_{1c}(k) - x_{1c}(k-1)| + |(x_{1s}(k) - x_{1s}(k-1))|}{|x_{1c}(k) + x_{1c}(k-1)| + |(x_{1s}(k) + x_{1s}(k-1))|}, \end{aligned} \quad (4.16)$$

ale ponieważ odchyłki częstotliwości zazwyczaj są niewielkie, czyli również Δa jest niewielkie, zatem:

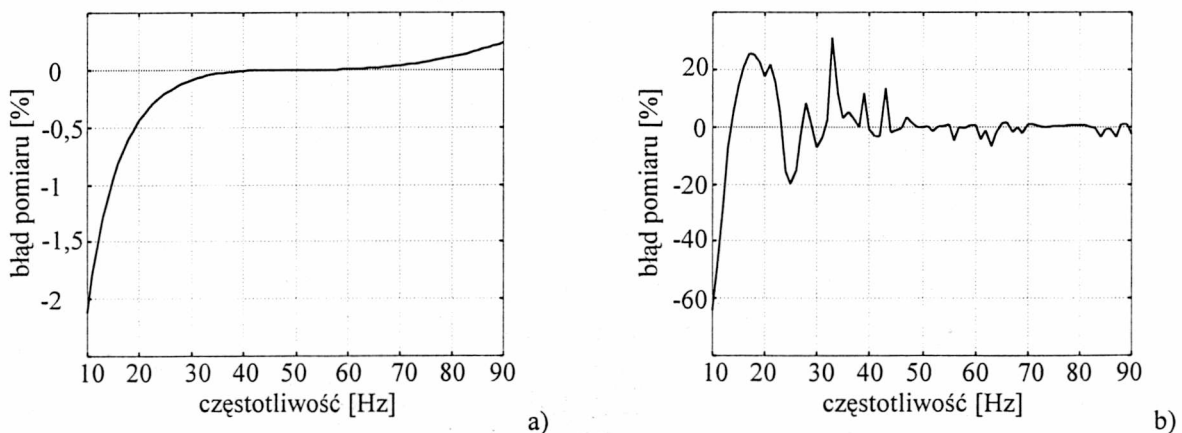
$$\operatorname{tg} \frac{\Delta a}{2} \approx \frac{\Delta a}{2}. \quad (4.17)$$

Znak Δa określamy na podstawie analizy zmian x_{lc} i x_{ls} w krokach $k-1$ i k .



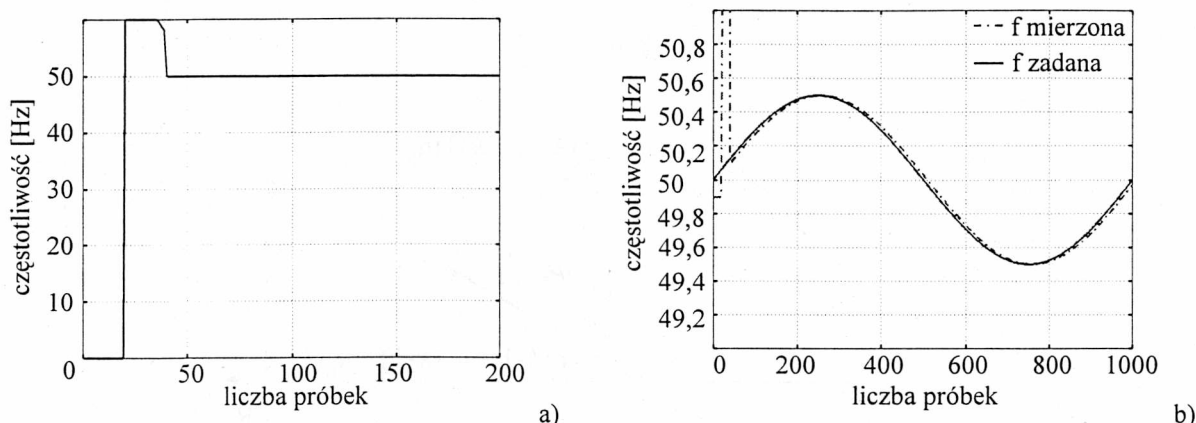
Rys. 4.6. Kąt przesunięcia położenia wektora $\underline{x}_1$ na płaszczyźnie zespolonej dla dwóch następujących po sobie chwil czasowych w przypadku zmiany częstotliwości

Jak widać z charakterystyki na rys. 4.7, zgodnie z założonym modelem sygnału pierwszego rzędu, algorytm wykazuje minimalny błąd (mniejszy od $\pm 2\%$ w analizowanym zakresie 10...90 Hz) dla sygnałów o zawartości tylko podstawowej harmonicznej. Błąd ten rośnie wraz ze wzrostem liczby harmonicznych zawartych w sygnale i tak np. dla sygnału o zawartości podstawowej i drugiej harmonicznej (rys. 4.7b) nie przekracza $\pm 4\%$, ale w bardzo wąskim zakresie pomiarowym 45...55 Hz. Aby zmniejszyć poziom błędów w przypadku występowania wyższych harmonicznych w sygnale mierzonym konieczne jest stosowanie dodatkowych filtrów.



Rys. 4.7. Zależność błędu pomiaru od częstotliwości (algorytm korelacyjny) dla sygnału typu A3 (a) oraz dla sygnału typu B3 (b)

Wprowadzenie pełnookresowej korelacji wprowadza dodatkowe opóźnienie w działaniu algorytmu. Czas ustalenia się pomiaru częstotliwości sygnału typu A3 po uruchomieniu algorytmu wynosi 40 próbek (rys. 4.8a).



Rys. 4.8. Odpowiedź algorytmu (metoda korelacyjna) na sygnał typu A3:
o częstotliwości 50 Hz (uruchomienie algorytmu) (a),
o częstotliwości zmiennej zgodnie z przebiegiem funkcji sinus (b)

Jeżeli częstotliwość zmienia się w czasie np. zgodnie z przebiegiem funkcji sinus (rys. 4.8b), algorytm wykazuje dobrą nadążność za zmianami częstotliwości zachowując stałe opóźnienie wynoszące 10 próbek. W przypadku sygnału charakteryzującego się skokową zmianą amplitudy z wartości 1,0 j.w. na 0,8 j.w. przy stałej częstotliwości, odpowiedź układu ustala się po 20 próbkach dla sygnału typu A3.

Jeżeli w celu określenia $\underline{f}_\alpha$ i $\underline{f}_\beta$ zamiast metody korelacyjnej zastosujemy filtry cyfrowe, to wektor $\underline{x}_1$ nie będzie miał ustalonej pozycji na płaszczyźnie zespolonej, tylko będzie zmieniał fazę o wartość a dla kolejnych chwil czasowych. Przy zmianie częstotliwości, zmiana fazy wektora będzie wynosiła $a + \Delta a$.

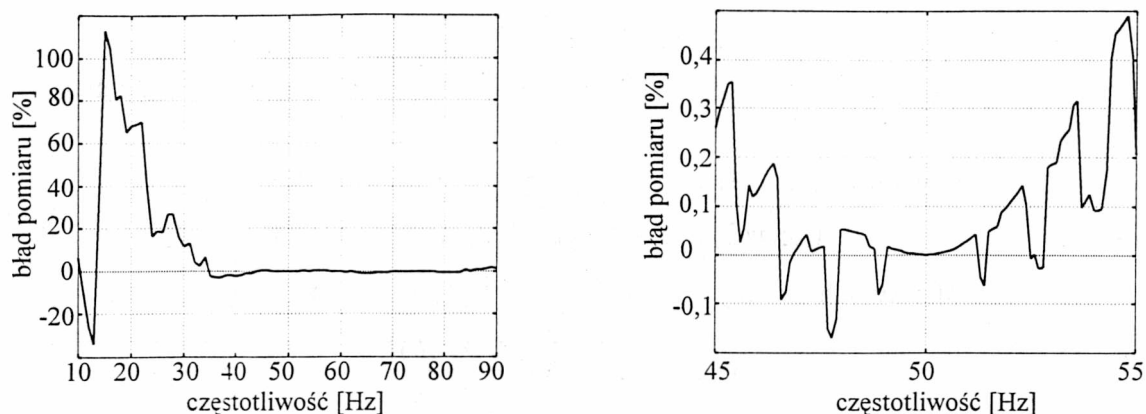
Również i tu możliwe są dwie metody określenia Δa :

- poprzez policzenie fazy każdego z dwóch wektorów $\underline{x}_1(k)$ i $\underline{x}_1(k-1)$, a następnie znalezienie różnicy faz i odjęcie od niej wartości a ,
- z prostej analizy geometrycznej rys. 4.6 (teraz kąt wynosi $\Delta a + a$) wynika że:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{a + \Delta a}{2} &= \frac{|x_{1c}(k) - x_{1c}(k-1) + j(x_{1s}(k) - x_{1s}(k-1))|}{|x_{1c}(k) + x_{1c}(k-1) + j(x_{1s}(k) + x_{1s}(k-1))|} = \\ &= \frac{|x_{1c}(k) - x_{1c}(k-1)| + |(x_{1s}(k) - x_{1s}(k-1))|}{|x_{1c}(k) + x_{1c}(k-1)| + |(x_{1s}(k) + x_{1s}(k-1))|}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Z powyższego wzoru obliczamy Δa , a stąd Δf . Nie można jednak analogicznie jak w metodzie korelacyjnej uprościć powyższy wzoru ponieważ $\Delta a + a$ nie jest bliskie zeru. Znak Δa określamy na podstawie analizy zmian x_{1c} i x_{1s} w krokach $k-1$ i k .

Jak widać na rys. 4.9, dla sygnału o zawartości podstawowej i drugiej harmonicznej, błąd jest stosunkowo duży (momentami przekracza 100%) dla niskich częstotliwości (10...30 Hz). W wąskim zakresie pomiarowym w okolicach częstotliwości podstawowej (45...55 Hz), błąd nie przekracza $\pm 0,5\%$. Dla sygnałów o zawartości więcej niż dwóch harmonicznych stosowanie algorytmu traci sens ze względu na bardzo duże błędy. Konieczna jest wtedy wstępna filtracja sygnału.



Rys. 4.9. Zależność błędu pomiaru od częstotliwości (algorytm filtracyjny) dla sygnału typu B3

W przypadku zmiany częstotliwości w trakcie pomiaru algorytm z zastosowaniem filtracji daje bardzo podobne rezultaty jak algorytm stosujący metodę korelacyjną.

4.2. Pomiar częstotliwości poprzez demodulację dwóch sygnałów zespolonych

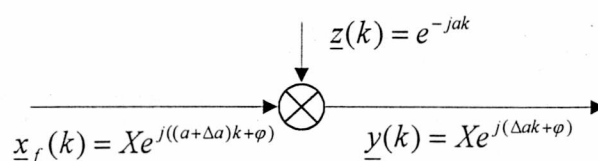
Tradycyjna demodulacja polega na przemnożeniu sygnału mierzonego przez funkcję sinusoidalną i kosinusoidalną o znanej częstotliwości. W efekcie powstają dwa sygnały, z których każdy zawiera dwa składniki o częstotliwościach będących sumą i różnicą częstotliwości mierzonej i znamionowej (50 Hz). Sygnał musi być następnie poddany filtracji, aby pozbyć się składników o podwójnej częstotliwości.

W [1] proponowana jest metoda demodulacji z sygnałem, który od razu redukuje składniki o podwójnej częstotliwości, bez potrzeby stosowania filtrów. Niech sygnał trójfazowy będzie określony zależnością (4.1), a wektor przestrzenny zależnościami (4.5) i (4.6). Podstawiając do równania (4.5), wartości u_α i u_β obliczone z równania (4.6), po przekształceniach otrzymamy:

$$\underline{x}_f(k) = X e^{j((a+\Delta a)k+\varphi)}. \quad (4.19)$$

Demodulacja jest dokonana z sygnałem zespolonym $\underline{z}(k)$ o postaci (rys. 4.10):

$$\underline{z}(k) = e^{-jak}. \quad (4.20)$$



Rys. 4.10. Demodulacja dwóch sygnałów zespolonych

Po demodulacji, wypadkowy sygnał będzie wyrażony wzorem:

$$\underline{y}(k) = X e^{j(\Delta a k + \varphi)}. \quad (4.21)$$

Jak widać wzór (4.21) pozbawiony jest składnika o podwójnej częstotliwości.

Aby znaleźć różnicę faz sygnału $\underline{y}(k)$ dla dwóch kolejnych chwil czasowych, zdefiniujemy zmienną zespoloną $\underline{w}(k)$ wyrażoną wzorem:

$$\underline{w}(k) = \underline{y}(k)\underline{y}^*(k-1), \quad (4.22)$$

gdzie * oznacza liczbę sprzężoną. Rozdzielając część rzeczywistą i urojoną zmiennej $\underline{w}(k)$ otrzymamy:

$$\begin{aligned} \underline{w}(k) = & \operatorname{Re}(\underline{y}(k))\operatorname{Re}(\underline{y}(k-1)) + \operatorname{Im}(\underline{y}(k))\operatorname{Im}(\underline{y}(k-1)) + \\ & + j(\operatorname{Im}(\underline{y}(k))\operatorname{Re}(\underline{y}(k-1)) - \operatorname{Re}(\underline{y}(k))\operatorname{Im}(\underline{y}(k-1))). \end{aligned} \quad (4.23)$$

Zatem różnica faz dla dwóch kolejnych próbek sygnału $\underline{y}(k)$ wynosi:

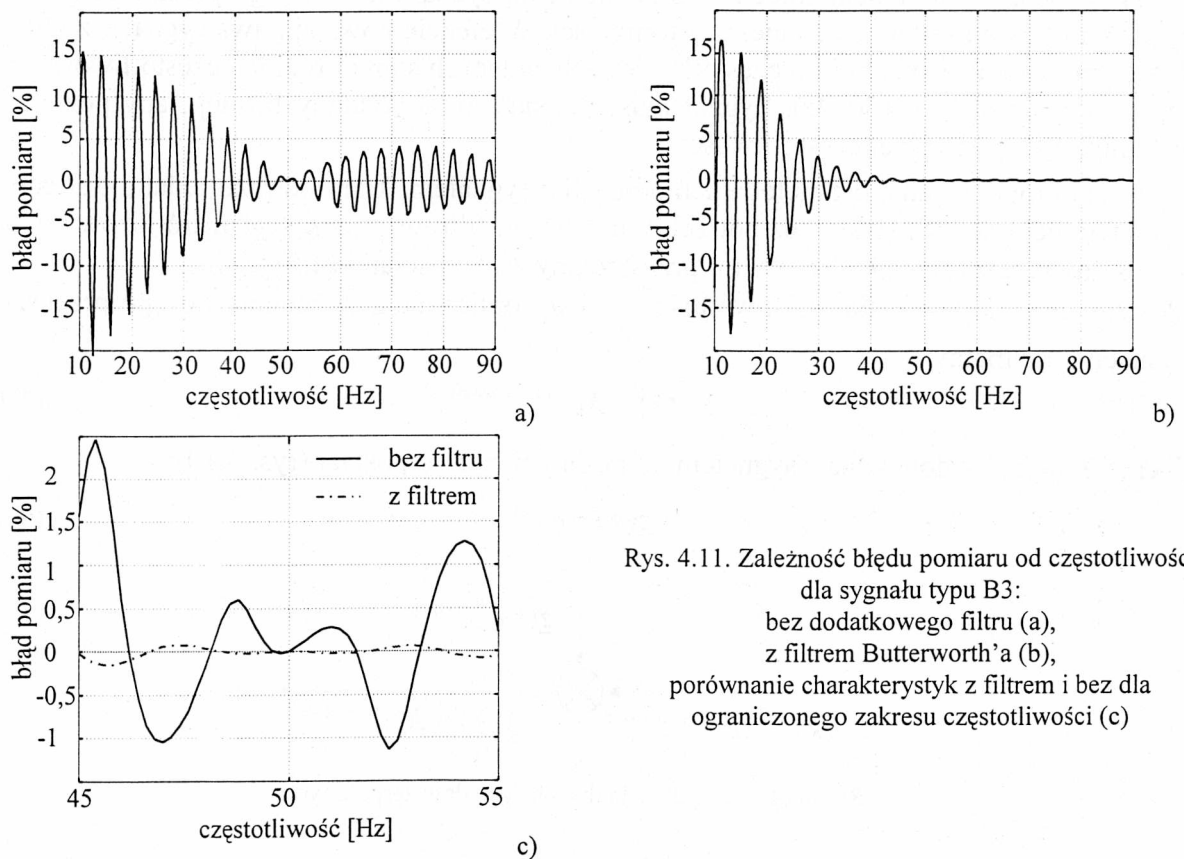
$$\varphi(k) - \varphi(k-1) = \arctg \frac{\operatorname{Im}(\underline{w}(k))}{\operatorname{Re}(\underline{w}(k))}. \quad (4.24)$$

Ostatecznie szukana częstotliwość będzie wyrażona równaniem:

$$f(k) = f_0 + \frac{f_p}{2\pi} \arctg \frac{\operatorname{Im}(\underline{w}(k))}{\operatorname{Re}(\underline{w}(k))}, \quad (4.25)$$

gdzie $f_p = \frac{1}{T_p}$ - częstotliwość próbkowania.

Rys. 4.11 przedstawia zależność błędu pomiaru od częstotliwości dla sygnałów typu B3.

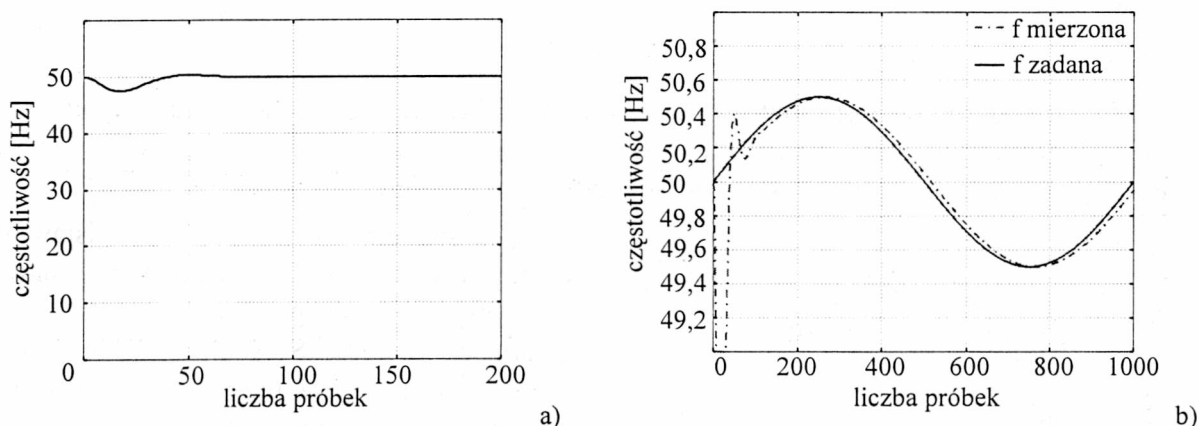


Rys. 4.11. Zależność błędu pomiaru od częstotliwości dla sygnału typu B3:
bez dodatkowego filtru (a),
z filtrem Butterworth'a (b),
porównanie charakterystyk z filtrem i bez dla ograniczonego zakresu częstotliwości (c)

W analizowanym zakresie 10...90 Hz (rys. 4.11a), błąd jest stosunkowo duży (maksymalnie $\pm 20\%$), tym większy im bardziej częstotliwość odbiega od częstotliwości znamionowej 50 Hz, szczególnie dla wartości mniejszych od 50 Hz. W celu zminimalizowania tego błędu proponowane jest zastosowanie dolnoprzepustowego filtru Butterworth'a trzeciego rzędu o częstotliwości odcięcia równej 20 Hz. Filtracji poddany zostaje jednak nie mierzony

sygnał, ale końcowy wynik pomiaru częstotliwości. Efekt działania tegoż filtru przedstawiony jest na rys. 4.11b i rys. 4.11c. Widać znaczną poprawę własności algorytmu, szczególnie dla częstotliwości powyżej 40 Hz, jednakże kosztem wydłużenia czasu uzyskania wyniku. Dla sygnałów o zawartości większej niż dwie liczby harmoniczných algorytm wymaga obowiązkowo stosowania filtru.

Czas ustalenia się pomiaru częstotliwości po uruchomieniu algorytmu wynosi 2 próbki dla $f_p = 1$ kHz, ale tylko dla sygnałów o zawartości podstawowej harmoniczných. W przypadku konieczności stosowania filtru Butterworth'a, dla sygnałów o zawartości wyższych harmoniczných, czas ten wzrasta do 90 próbek (rys. 4.12a). Dla sygnału o częstotliwości zmiennej zgodnie z przebiegiem funkcji sinus (rys. 4.12b) algorytm wykazuje pełną poprawność, nadążając bez opóźnienia (algorytm bez filtracji) za zmianami częstotliwości. Wprowadzenie filtracji opóźnia odpowiedź algorytmu o 16 próbek oraz powoduje powstanie niewielkich oscylacji wartości mierzonej wokół wartości zadanej. Algorytm jest niewrażliwy na skokową zmianę amplitudy przy stałej częstotliwości.



Rys. 4.12. Odpowiedź algorytmu (z dodatkową filtracją) na sygnał typu A3: o częstotliwości 50 Hz (uruchomienie algorytmu) (a), o częstotliwości zmiennej zgodnie z przebiegiem funkcji sinus (b)

4.3. Wykorzystanie rozszerzonego filtru Kalmana

Algorytm pomiaru częstotliwości stosujący filtr Kalmana w wersji nieliniowej prezentowany jest w [5].

Niech sygnał będzie opisany następującym modelem zespolonym:

$$\underline{y}(k) = X e^{jqak} + \underline{v}(k), \quad (4.26)$$

gdzie:

$q = \frac{f}{f_0}$ - względna częstotliwość mierzonego sygnału,

$\underline{v}(k)$ - zakłócenia zespolone.

Równanie (4.26) możemy zastąpić modelem stanowym danym równaniami nieliniowym (2.35) (patrz rozdział 2.2.5). W równaniach tych występują:

$\underline{d}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$ - wektor zmiennych stanu,

$x_1(k) = e^{jqak}$ - reprezentuje przesunięcie wektorowe pomiędzy dwiema kolejnymi próbkami sygnału $\underline{y}(k)$,

$\underline{x}_2(k) = e^{jqak} \underline{x}_2(k-1)$ - estymata sygnału $\underline{y}(k)$,

$\mathbf{f}(\mathbf{d}(k)) = [x_1(k) \quad x_1(k)x_2(k)]^T$,

$\mathbf{h} = [0 \quad 1]$.

Jako wartości początkowe przyjmujemy:

$\mathbf{d}(0) = \begin{bmatrix} e^{ja} \\ 0 \end{bmatrix}$,

$\mathbf{P}(0) = \begin{bmatrix} 1000 & 0 \\ 0 & 1000 \end{bmatrix}$ - wartość początkowa macierzy kowariancji błędów estymacji,

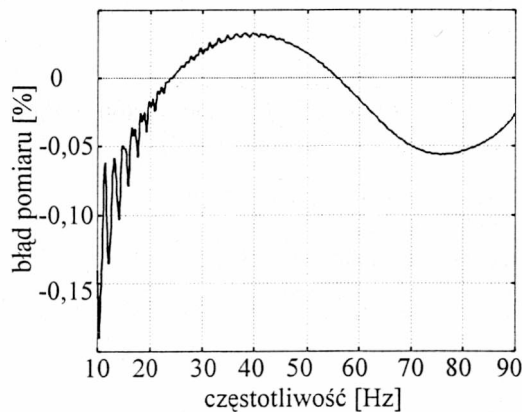
$\mathbf{Q}(k) = \mathbf{Q} = 0$ - macierz kowariancji zakłóceń stanu,

$\mathbf{R}(k) = \mathbf{R} = 0,001$ - macierz kowariancji zakłóceń pomiarowych.

Postępując zgodnie z algorytmem opisanym w punkcie 2.2.5 (wzory (2.36) - (2.42)) obliczamy wektor $\mathbf{d}$, a następnie częstotliwość ze wzoru:

$$f = \arg(\underline{x}_1(k)) \frac{f_0}{a}. \quad (4.27)$$

Powyższy algorytm jest możliwy do stosowania tylko wówczas, gdy dostępny pomiarowo jest sygnał zespolony. W przypadku systemu trójfazowego, sygnał taki łatwo jest uzyskać tworząc, zgodnie ze wzorami (4.5) i (4.6), wektor przestrzenny $\underline{x}_f$.



Rys. 4.13. Zależność błędu pomiaru od częstotliwości dla sygnałów typu C3

Dla sygnałów o zawartości podstawowej harmonicznej, w analizowanym zakresie 10...90 Hz, błąd pomiaru nie przekracza wartości $\pm 0,02\%$. Stosunkowo dobre rezultaty osiągane są też przy pomiarze częstotliwości sygnałów o zawartości do trzech harmonicznych włącznie. Przykładowa zależność błędu pomiaru od częstotliwości dla sygnału typu C3 znajduje się na rys. 4.13.

Algorytm nie nadaje się do śledzenia zmian częstotliwości. Mierzy tylko częstotliwość zaraz po uruchomieniu. Kolejny pomiar wymaga powtórnego uruchomienia algorytmu. Czas ustalenia się pomiaru częstotliwości po uruchomieniu algorytmu wynosi 1 próbkę dla $f_p = 1$ kHz, jeżeli mierzona częstotliwość wynosi 50 Hz. Przy odchyłkach od częstotliwości podstawowej czas ten rośnie i tak np. dla 51 Hz wynosi 13 próbek.

5. POMIAR CZĘSTOTLIWOŚCI W OPARCIU O APROKSYMACJĘ SYGNAŁU WIELOMIANEM p -TEGO RZĘDU

5.1. Model sygnałowy Prony'ego

Francuski matematyk de Prony zaproponował, aby sygnał $y(t)$ obserwowany w wybranych chwilach czasowych, aproksymować za pomocą sumy funkcji sinusoidalnych o określonych amplitudach i częstotliwościach. W ogólnym przypadku model $\hat{y}(k)$ obserwowany w oknie o szerokości M dyskretnego sygnału zespolonego $y(k)$ dany jest równaniem:

$$\hat{y}(k) = \sum_{i=1}^p \underline{A}_i e^{s_i k}, \quad (5.1)$$

gdzie: $k = 0, 1, 2, \dots, M-1$,

p - liczba składowych sygnału (rzęd modelu),

$\underline{A}_i, s_i$ - amplituda i częstotliwość i -tej składowej sygnału (wartości zespolone).

Należy zauważyć, że częstotliwość s_i poszczególnych składowych w (5.1) jest, w ogólnym przypadku, reprezentowana wielkością zespoloną:

$$s_i = \sigma_i + j\omega_i, \quad (5.2)$$

gdzie σ_i odpowiada tłumieniu, natomiast ω_i jest pulsacją i -tej składowej.

Model (5.1) jest nieliniowy względem niewiadomych, amplitudy i częstotliwości. W tradycyjnych metodach aproksymacyjnych wszystkie niewiadome obliczane są jednocześnie. Zaproponowana przez Prony'ego metoda polega na rozdzieleniu parametrów tak, aby kolejno (nie jednocześnie) obliczać wszystkie niewiadome. Jest to szczególnie ważne w przypadku, gdy mierzona jest tylko częstotliwość, pozostałe parametry są zatem mniej istotne.

Założmy w pierwszym kroku, że sygnał $y(k)$ jest pozbawiony zakłóceń. Problem polega na znalezieniu takich parametrów modelu (5.1), aby zachodziła równość $\hat{y}(k) = y(k)$. Przy założeniu, że sygnał jest równy zero poza okresem obserwacji o szerokości M próbek i po dokonaniu obustronnego przekształcenia Z równania (5.1) otrzymamy:

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{i=1}^p \underline{A}_i e^{s_i k} z^{-k} \quad (5.3)$$

lub po zmianie kolejności sumowania:

$$Y(z) = \sum_{i=1}^p \underline{A}_i \sum_{k=0}^{M-1} e^{s_i k} z^{-k}. \quad (5.4)$$

Jak widać z powyższego, wewnętrzna suma przedstawia sumę szeregu geometrycznego malejącego, zatem po podstawieniu wzoru na sumę szeregu otrzymamy:

$$Y(z) = \sum_{i=1}^p \underline{A}_i \frac{1 - e^{s_i M} z^{-M}}{1 - e^{s_i} z^{-1}}. \quad (5.5)$$

Po wykonaniu sumowania i sprowadzeniu do wspólnego mianownika, równanie (5.5) przyjmie postać:

$$Y(z) = \frac{C(z)}{B(z)} = \frac{\sum_{i=1}^p \left(\underline{A}_i (1 - e^{s_i M} z^{-M}) \prod_{j=1, j \neq i}^p (1 - e^{s_j} z^{-1}) \right)}{\prod_{i=1}^p (1 - e^{s_i} z^{-1})}. \quad (5.6)$$

Powyższe równanie można traktować jako równanie opisujące filtr cyfrowy SOI o transmitancji $B(z)$, gdzie $Y(z)$, $C(z)$ - transformaty sygnału odpowiednio wejściowego i wyjściowego. Mianownik równania (5.6) przedstawia zatem bezpośrednio równanie filtru, które po wykonaniu mnożenia i uporządkowaniu względem z^{-j} przyjmie postać:

$$B(z) = \prod_{i=1}^p (1 - e^{s_i} z^{-1}) = \sum_{j=0}^p b_j z^{-j}, \quad (5.7)$$

gdzie: $b_0 = 1$.

Stosując podobne operacje można przedstawić równanie transformaty sygnału wyjściowego:

$$C(z) = \sum_{i=1}^p \left(\underline{A}_i (1 - e^{s_i M} z^{-M}) \prod_{j=1, j \neq i}^p (1 - e^{s_j} z^{-1}) \right) = \sum_{i=0}^{p-1} c_i z^{-i} + \sum_{i=0}^{p-1} c_{M+i} z^{-(M+i)}, \quad (5.8)$$

gdzie: $c_p = c_{p+1} = \dots = c_{M-1} = 0$.

Równanie filtru SOI można zapisać w dziedzinie czasu w następującej postaci:

$$c_k = \sum_{i=0}^p y(k-i) b_i, \quad (5.9)$$

gdzie: $k = 0, 1, \dots, M+p-1$.

Zapisując równanie (5.9) dla próbek sygnału wyjściowego równych zero otrzymamy w zapisie macierzowym:

$$\begin{bmatrix} y(p) & y(p-1) & \cdots & y(0) \\ y(p+1) & y(p) & \cdots & y(1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y(M-1) & y(M-2) & \cdots & y(M-p-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.10)$$

Wykorzystując, że $b_0 = 1$, możemy pierwszą kolumnę macierzy utworzonej z próbek sygnału $y(k)$ przenieść na drugą stronę powyższego równania. Wtedy otrzymamy:

$$\mathbf{H}_1 \mathbf{d} = \mathbf{y}_1, \quad (5.11)$$

gdzie:

$$\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} y(p-1) & y(p-2) & \cdots & y(0) \\ y(p) & y(p-1) & \cdots & y(1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y(M-2) & y(M-3) & \cdots & y(M-p-1) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b_1 \\ -b_2 \\ \vdots \\ -b_p \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} y(p) \\ y(p+1) \\ \vdots \\ y(M-1) \end{bmatrix}.$$

Jeżeli, zgodnie z założeniem, sygnał $\underline{y}(k)$ jest pozbawiony zakłóceń, to macierz $\mathbf{H}$ powinna być kwadratowa (liczba niewiadomych jest równa liczbie danych równań), zatem do określenia wektora $\mathbf{d}$ należy wykonać $M = 2p$ pomiarów obserwowanego sygnału.

W przypadku występowania zakłóceń, w modelu (5.1) należy uwzględnić model błędów $\underline{v}(k)$. Wówczas $\underline{y}(k) = \hat{\underline{y}}(k) + \underline{v}(k)$. Zatem do rozwiązania równania (5.11), konieczne jest wykonanie $M > 2p$ pomiarów. Poszukiwane parametry mogą być określone za pomocą metody najmniejszych kwadratów. Jeżeli estymacja jest prowadzona na podstawie ostatnich M próbek sygnału $\underline{y}_i$, $i = k, (k-1), \dots, (k-M+1)$, to w takiej sytuacji równanie (5.11) przyjmie postać:

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{d}, \quad (5.12)$$

gdzie: j -ty wiersz macierzy $\mathbf{H}(k)$, $j = 1, 2, \dots, L$, ($L \geq p$ - liczba równań w oknie pomiarowym):

$$\mathbf{h}_j(k) = [y(k-j) \quad y(k-j-1) \quad \dots \quad y(k-p-j+2) \quad y(k-p-j+1)],$$

natomiast wektor:

$$\mathbf{y}(k) = [y(k) \quad y(k-1) \quad \dots \quad y(k-L+1)]^T.$$

Ponieważ macierz $\mathbf{H}$ nie jest kwadratowa, zatem zgodnie z ideą MNK, aby z równania (5.12) wyznaczyć wektor $\mathbf{d}$ konieczne jest policzenie tzw. macierzy pseudoodwrotnej $[\mathbf{H}^T \mathbf{H}]^{-1} \mathbf{H}^T$. Ostatecznie dla chwili k wartość wektora $\mathbf{d}$ dana jest równaniem:

$$\mathbf{d}(k) = [\mathbf{H}^T(k) \mathbf{H}(k)]^{-1} \mathbf{H}^T(k) \mathbf{y}(k). \quad (5.13)$$

Poszukiwane częstotliwości mogą być wyznaczone na podstawie miejsc zerowych transmitancji $B(z)$ (5.7). Zgodnie z (5.11), równanie (5.7) można zapisać następująco:

$$B(z) = \prod_{i=1}^p (1 - e^{s_i} z^{-1}) = \sum_{j=0}^p b_j z^{-j} = 1 - \sum_{j=1}^p d_j z^{-j}, \quad (5.14)$$

skąd:

$$\prod_{i=1}^p (1 - e^{s_i} z^{-1}) = 1 - \sum_{j=1}^p d_j z^{-j}. \quad (5.15)$$

Mnożąc tak powstałe równanie (5.15) obustronnie przez z^p otrzymamy:

$$\prod_{i=1}^p (z - e^{s_i}) = z^p - d_1 z^{p-1} - \dots - d_{p-1} z - d_p. \quad (5.16)$$

Miejsca zerowe powyższego wielomianu są związane z częstotliwościami poszczególnych składowych harmonicznych sygnału $\underline{y}(k)$ następującą zależnością:

$$z_i = e^{s_i}, \quad (5.17)$$

gdzie $i = 1, 2, \dots, p$.

5.2. Zasada pomiaru częstotliwości w oparciu o model Prony'ego - - algorytm nierekursywny

W zależności od rodzaju mierzonej częstotliwości możliwe jest wiele szczegółowych metod jej określania za pomocą algorytmu opisanego powyżej. W przypadku pomiaru częstotliwości systemu elektroenergetycznego dostępna dla pomiarów jest zazwyczaj składowa rzeczywista modelu (5.1). Zakładając, że sygnał zawiera tylko składowe oscylacyjne nietłumione (część rzeczywista częstotliwości s_i jest równa zero) otrzymamy:

$$\begin{aligned} y(k) = \operatorname{Re}\{y(k)\} = & A_1 \cos(\omega_1 T_p k) - B_1 \sin(\omega_1 T_p k) + \\ & + A_2 \cos(\omega_2 T_p k) - B_2 \sin(\omega_2 T_p k) + \\ & + \dots + A_p \cos(\omega_p T_p k) - B_p \sin(\omega_p T_p k), \end{aligned} \quad (5.18)$$

gdzie: T_p - okres próbkowania.

Model (5.18) odnosi się do idealnego sygnału bez zniekształceń. W rzeczywistości, mierzony sygnał jest zakłócony, co można przedstawić następującym związkiem:

$$y(k) = \hat{y}(k) + v(k), \quad (5.19)$$

gdzie: $v(k)$ - model zakłócenia.

Przedstawmy sygnał (5.18) w postaci sumy dwóch sygnałów zespolonych wzajemnie sprzężonych:

$$y(k) = \frac{1}{2} (\underline{y}(k) + \underline{y}^*(k)) = \underline{y}_1(k) + \underline{y}_2(k), \quad (5.20)$$

gdzie:

$$\underline{y}(k) = \sum_{i=1}^p \underline{A}_i e^{jqia k},$$

$$\underline{y}^*(k) = \sum_{i=1}^p \underline{A}_i e^{-jqia k} \quad (* \text{ oznacza operację sprzężenia}),$$

$$\underline{A}_i = A_i + jB_i, \quad i = 1, 2, \dots, p,$$

$$q = \frac{\omega}{\omega_0} \text{ - pulsacja względna sygnału mierzonego,}$$

ω - pulsacja składowej podstawowej sygnału mierzonego,

$\omega_0 = 2\pi f_0$ - pulsacja znamionowa (dla $f_0 = 50$ Hz),

$$a = \frac{2\pi}{N},$$

N - liczba próbek w okresie podstawowej harmonicznej o pulsacji ω_0 .

Pozwoli to wykorzystać wyniki uzyskane dla modelu zespolonego. Transformata Z równania (5.20) jest postaci:

$$Y(z) = Y_1(z) + Y_2(z) = \frac{C(z)}{B(z)}, \quad (5.21)$$

gdzie korzystając z (5.6):

$$Y_1(z) = \frac{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^p \left(\underline{A}_i (1 - e^{jqiaM} z^{-M}) \prod_{l=1, l \neq i}^p (1 - e^{jqal} z^{-1}) \right)}{\prod_{i=1}^p (1 - e^{jqai} z^{-1})}, \quad (5.22)$$

$$Y_2(z) = \frac{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^p \left(\underline{A}_i^* (1 - e^{-jqai} z^{-M}) \prod_{l=1, l \neq i}^p (1 - e^{-jqal} z^{-1}) \right)}{\prod_{i=1}^p (1 - e^{-jqai} z^{-1})}. \quad (5.23)$$

Zatem:

$$B(z) = \prod_{i=1}^p (1 - e^{jqai} z^{-1}) (1 - e^{-jqai} z^{-1}) = \sum_{i=0}^{2p} b_i z^{-i}, \quad (5.24)$$

przy czym: $b_0 = b_{2p} = 1$.

Można zauważyć, że wszystkie pierwiastki równania (5.24) są rozmieszczone na okręgu jednostkowym, a dodatkowo, jeśli z_i jest pierwiastkiem, to są nimi także $1/z_i$, $-z_i$ oraz $-1/z_i$. Można także udowodnić, że dzięki tej właściwości współczynniki b_i są symetryczne względem wartości b_p :

$$b_{p-m} = b_{p+m}, \text{ dla } m = 1, 2, \dots, p.$$

Pozwala to zapisać równanie (5.24) w innej formie:

$$B(z) = \sum_{i=0}^p b_i (z^{-i} + z^{-(2p-i)}). \quad (5.25)$$

Postępując analogicznie jak to było dla modelu zespolonego (równania od (5.7) do (5.10)) równanie (5.10) przyjmie teraz postać:

$$\begin{bmatrix} y(0) + y(2p) & y(1) + y(2p-1) & \cdots & 2y(p+1) \\ y(1) + y(2p+1) & y(2) + y(2p) & \cdots & 2y(p+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y(M-1) + y(2p+M-1) & y(M-2) + y(2p+M-2) & \cdots & 2y(p+M-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.26)$$

Zatem dla obserwowanego sygnału zakłóconego, do estymacji wektora $\mathbf{d}$ (5.11) należy wykonać $M > 2p$ pomiarów. Szukany wektor $\mathbf{d}$ dany jest równaniem (5.13) (algorytm nierekursywny), gdzie: j -ty wiersz macierzy $\mathbf{H}(k)$, ($j = 1, 2, \dots, L$, $L \geq p$), jest postaci:

$$\mathbf{h}_j(k) = \begin{bmatrix} y(k-j) + y(k-2p-j+2) \\ y(k-j-1) + y(k-2p-j+3) \\ \vdots \\ y(k-p-j+2) + y(k-2p-j+p) \\ 2y(k-p-j+1) \end{bmatrix}^T, \quad (5.27)$$

natomiast wektor:

$$\mathbf{y}(k) = \begin{bmatrix} y(k) + y(k-2p) \\ y(k-1) + y(k-2p-1) \\ \vdots \\ y(k-M+1) + y(k-2p-M+1) \end{bmatrix}. \quad (5.28)$$

Zapiszmy równanie (5.25) w postaci częstotliwościowej podstawiając $z = e^{jq\omega}$:

$$B(jq) = e^{-jqap} \sum_{i=0}^p b_i (e^{-jq a(i-p)} + e^{jq a(i-p)}) = 2e^{-jqap} \sum_{i=0}^p b_i \cos(qa(p-i)). \quad (5.29)$$

Po zmianie współczynników b_i na d_i otrzymujemy równanie wiążące współczynniki wektora $\mathbf{d}$ z szukanymi częstotliwościami [14], [16]:

$$\cos(\omega_p T_p) - d_1 \cos(\omega_{p-1} T_p) - \dots - d_{p-1} \cos(\omega_1 T_p) - d_p = 0. \quad (5.30)$$

W drugiej części algorytmu wyznaczane są częstotliwości $\omega_1, \dots, \omega_p$ składowych sygnału, które określają miejsca zerowe funkcji (5.30). W przypadku sygnału dyskretnego zazwyczaj można ograniczyć rozważania do harmonicznych składowej podstawowej obserwowanego sygnału. Można wówczas w (5.30) zastosować następujące podstawienie:

$$\omega_i T_p = iqa, \quad (5.31)$$

gdzie: $i = 1, 2, \dots, p$,

W takim przypadku przez podstawienie:

$$w = \cos(qa), \quad (5.32)$$

funkcja (5.30) może być sprowadzona do wielomianu p -tego stopnia względem nowej zmiennej w . Poszczególne pierwiastki uzyskanego w ten sposób wielomianu związane są zgodnie z (5.32) z częstotliwościami odpowiednich składowych sygnału. Przy założeniu, że w sygnale nie występują podharmoniczne, pierwiastek o największej wartości odpowiada częstotliwości podstawowej harmonicznej. Po przekształceniu równania (5.32) szukana częstotliwość podstawowej harmonicznej będzie określona wyrażeniem:

$$f = \frac{f_0}{a} \arccos(w). \quad (5.33)$$

Pierwiastki w w kolejności malejącej określają częstotliwości kolejnych składowych do p -tej włącznie.

Warunkiem uzyskania rozwiązania w postaci (5.13) jest istnienie macierzy pseudoodwrotnej $[\mathbf{H}^T(k)\mathbf{H}(k)]^{-1}\mathbf{H}^T(k)$. Niezbędne jest, aby liczba wierszy macierzy $\mathbf{H}(k)$ była większa od p . Wymaganie to jest spełnione, jeśli odpowiednia jest liczba pomiarów w (5.12) ($L \geq p$), a ponadto, jeśli przetwarzany jest sygnał zakłócony (5.19) [23]. Należy jednak zauważyć, że rząd modelu p musi być przyjęty przed rozpoczęciem pomiarów, co rodzi dwojakiego rodzaju skutki. Po pierwsze, przyjęty model może być przeszacowany co do liczby składowych występujących w mierzonym sygnale. Wiąże się to z niepotrzebnie dużą złożonością obliczeniową algorytmu. Ponadto te parametry wektora $\mathbf{d}$ (5.13), które nie mają odpowiedników w sygnale wejściowym, są estymowane na podstawie zawartego w nim szumu, co utrudnia uzyskanie numerycznego rozwiązania (5.13). Problemy te skłaniają do dalszego poszukiwania lepszych rozwiązań.

Dla uproszczenia analizy założmy, że liczba harmonicznych w modelu (5.1) wynosi $p = 2$. Wówczas wielomian (5.30) po podstawieniu (5.32) będzie postaci:

$$2w^2 - d_1 w - (1 + d_2) = 0. \quad (5.34)$$

Równanie (5.34) ma dwa rozwiązania:

$$\begin{aligned} w_1 &= \cos(q_1 a) = \frac{d_1 + \Delta}{4}, \\ w_2 &= \cos(q_2 a) = \frac{d_1 - \Delta}{4}, \end{aligned} \quad (5.35)$$

gdzie:

$$\Delta = \sqrt{d_1^2 + 8(1 + d_2)}.$$

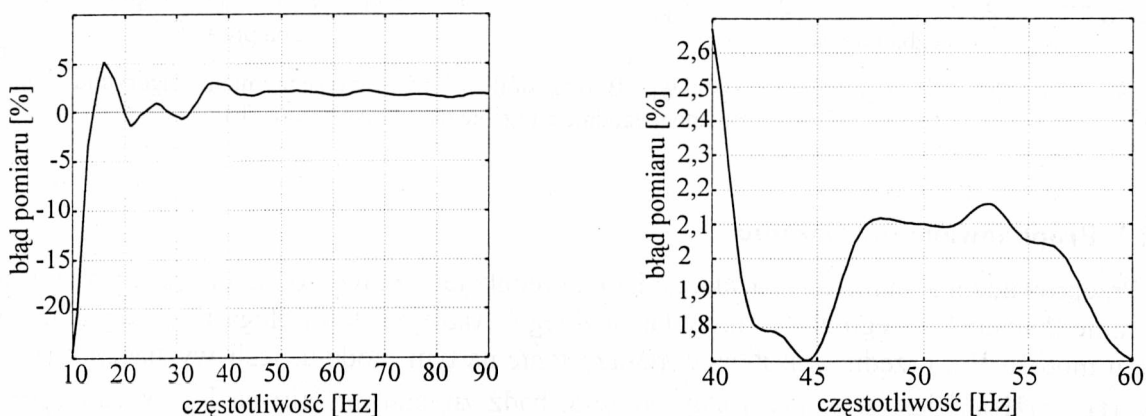
Oba rozwiązania charakteryzują się tym, że $q_2 = 2q_1$ (lub odwrotnie). Rozwiązanie z większą wartością w odpowiada częstotliwości podstawowej harmonicznej. Drugi z pierwiastków określa częstotliwość drugiej składowej.

5.2.1. Analiza algorytmu

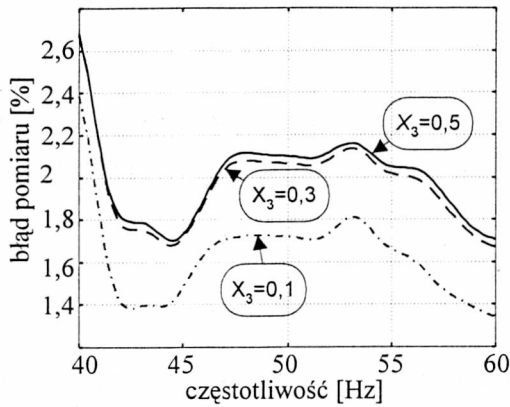
Dla sygnałów o zawartości liczby składowych mniejszych niż rząd modelu, wyznacznik macierzy $(\mathbf{H}^T(k)\mathbf{H}(k))$ w równaniu (5.13) jest bliski zeru, co rodzi problemy z wyznaczeniem macierzy odwrotnej. Dla sygnałów o zawartości liczby składowych wyższej niż zakładany rząd modelu, algorytm charakteryzuje się stosunkowo dużym błędem, tym większym, im większa liczba harmonicznych występuje w sygnale. Warto zauważyć, że rozwiązanie nie zależy od dokładnego dopasowania modelu do obserwowanego sygnału, ważne jest jedynie, aby liczba składowych w modelu nie była mniejsza od liczby tych składowych w sygnale.

Zwiększanie rzędu modelu prowadzi do konieczności stosowania metody iteracyjnej przy rozwiązywaniu równania (5.30). Zwiększa to liczbę wykonywanych operacji matematycznych. Podobnie wzrasta wtedy rząd równania (5.12) co także komplikuje jego rozwiązanie. Występowanie składowych stałych w sygnale mierzonym może doprowadzić do niestabilności algorytmu. Rozsądnym rozwiązaniem jest przyjęcie algorytmu stosunkowo niskiego rzędu z wstępną filtracją sygnału, co niestety wpływa na zwiększenie czasu reakcji algorytmu na zmiany częstotliwości.

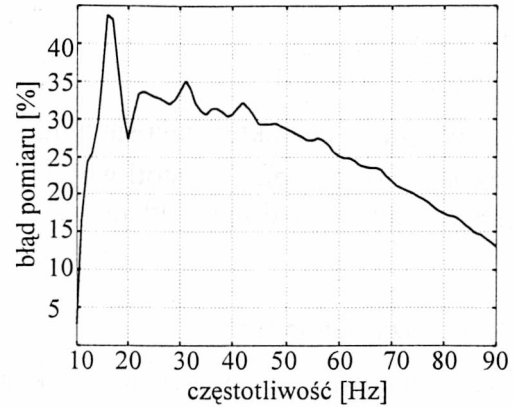
Dokonano symulacji dla modelu II-go rzędu. Dla sygnałów o zawartości harmonicznych wyższej niż dwie algorytm charakteryzuje się stosunkowo dużym błędem. Na rys. 5.1 i rys. 5.2 przedstawiono zależność błędu pomiaru od częstotliwości dla sygnałów testowych typu C. Jak widać, (rys. 5.2) błąd pomiaru rośnie ze wzrostem amplitudy trzeciej harmonicznej. Dla sygnałów typu D (rys. 5.3) błąd pomiaru jest już znaczny i nawet dla zakresu pomiarowego 40...60 Hz przekracza 30%. Algorytm jest także wrażliwy na składową stałą zawartą w mierzonym sygnale.



Rys. 5.1. Zależność błędu pomiaru od częstotliwości dla sygnału typu C

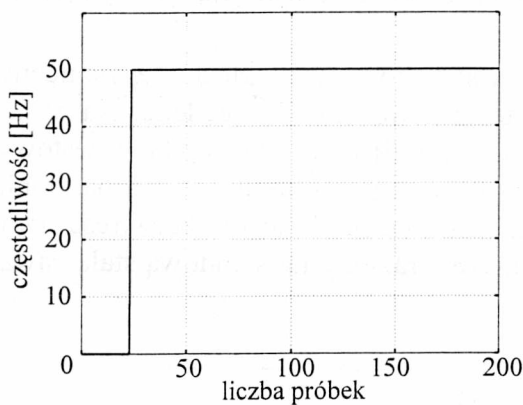


Rys. 5.2. Zależność błędu pomiaru od częstotliwości dla sygnału typu C dla różnych wielkości amplitud trzeciej harmonicznej

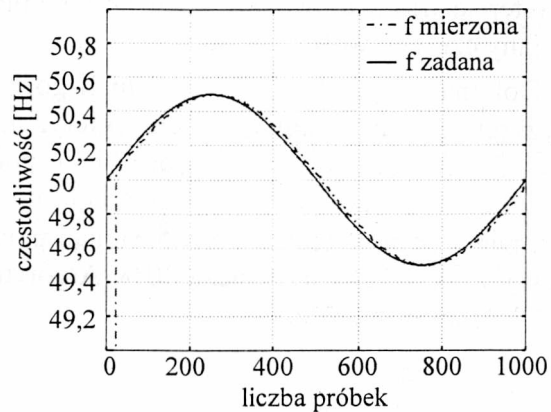


Rys. 5.3. Zależność błędu pomiaru od częstotliwości dla sygnału typu D

Czas ustalenia się pomiaru po uruchomieniu algorytmu wynosi 23 próbki dla okna pomiarowego wynoszącego $N = 20$ (rys. 5.4a). Oczywiście wraz ze wzrostem długości okna rośnie czas reakcji. W przypadku ciągłych w czasie zmian częstotliwości, np. zgodnie z przebiegiem funkcji sinus (rys. 5.4b), algorytm prawidłowo nadąża za zmianami częstotliwości. Czas odpowiedzi jest wtedy mniejszy i wynosi około 12 próbek. W przypadku sygnału charakteryzującego się skokową zmianą amplitudy z wartości 1,0 j.w. na 0,8 j.w. przy stałej częstotliwości, odpowiedź układu ustala się po 23 próbkach.



a)



b)

Rys. 5.4. Odpowiedź algorytmu na sygnał typu B: o częstotliwości 50 Hz (uruchomienie algorytmu) (a), o częstotliwości zmiennej zgodnie z przebiegiem funkcji sinus (b)

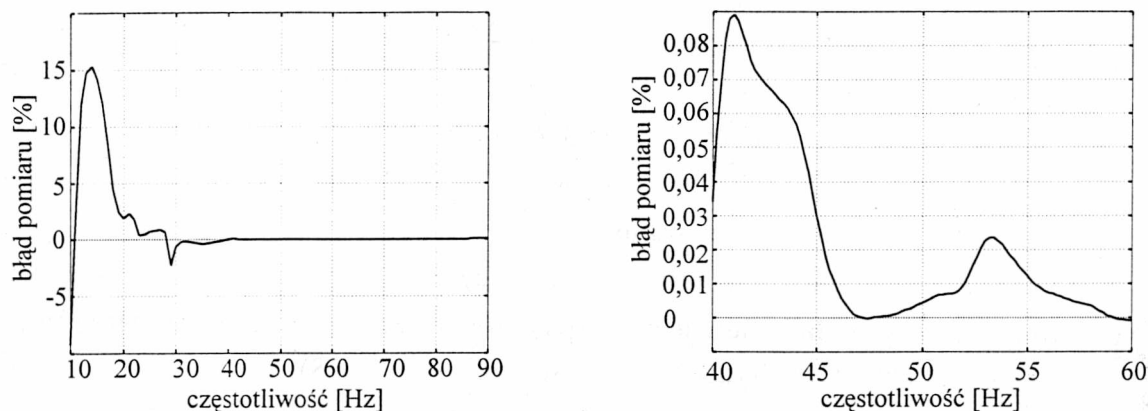
5.2.2. Proponowane rozwiązanie

Przeprowadzona analiza wykazała, że istotną redukcję błędów można uzyskać przez zastosowanie dwustopniowego algorytmu adaptacyjnego. Algorytm ten polega na wstępnym założeniu modelu II-go rzędu, a następnie, porzuceniu na tym modelu, jeśli wyznacznik macierzy $(\mathbf{H}^T(k)\mathbf{H}(k))$ jest znacząco różny od zera, bądź zmiana modelu na I-go rzędu ($p=1$), jeżeli wyznacznik będzie bliski zera. Wtedy równanie (5.30) po uwzględnieniu podstawienia (5.32) upraszcza się do postaci równania liniowego:

$$w - d_1 = 0. \quad (5.36)$$

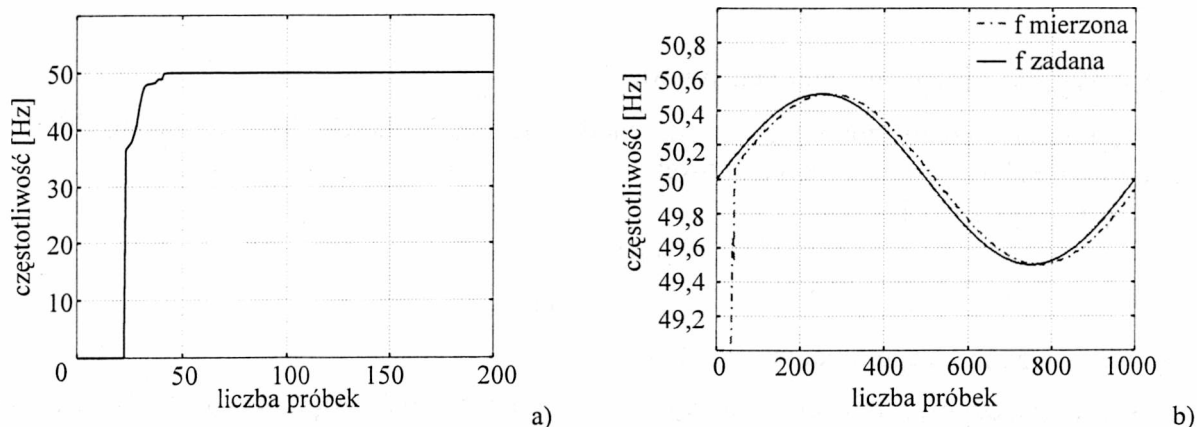
Takie podejście zapewnia minimalny (bliski zera) błąd pomiaru, zarówno dla sygnałów typu A jak i typu B. Dla sygnałów o zawartości wyższych harmonicznych błąd pomiaru będzie

taki jak to przedstawiono na rys. 5.1, rys. 5.2 i rys. 5.3. W celu minimalizacji tego błędu i uniezależnienia się od wyższych harmonicznych można dokonać wstępnej filtracji sygnału z zastosowaniem filtru okienkowego Blackmana (2.3), Hamminga (2.4) lub Hanninga (2.5) [40]. Zależność błędu pomiaru od częstotliwości po zastosowaniu filtru Hanninga dla sygnału typu D jest przedstawiona na rys. 5.5. Widać zdecydowaną poprawę własności algorytmu (porównując z rys. 5.3). Błąd pomiaru w zakresie 10...90 Hz osiąga maksymalnie 15%, a w zakresie 40...60 Hz nie przekracza 0,09%. W przypadku występowania składowej stałej, konieczne jest stosowanie filtru „odcinającego” tę składową, np. prostego filtru typu „kosinus” (2.6). Zatem dopiero połączenie filtrów Blackmana (Hamminga lub Hanninga) z filtrem typu „kosinus” daje prawidłowe rezultaty.



Rys. 5.5. Zależność błędu pomiaru od częstotliwości dla sygnału typu D po zastosowaniu wstępnej filtracji oknem Hanninga o długości $N_f = 20$

Stosowanie dodatkowych okien filtracyjnych wydłuża czas ustalenia się pomiaru po uruchomieniu algorytmu. Dla długości okna pomiarowego wynoszącego $N = 20$ i okna filtracyjnego Hanninga o długości $N_f = N = 20$, częstotliwość ustala się po 42 próbkach (rys. 5.6a).



Rys. 5.6. Odpowiedź algorytmu (wstępna filtracja oknem Hanninga o długości $N_f = 20$) na sygnał typu B: o częstotliwości 50 Hz (uruchomienie algorytmu) (a), o częstotliwości zmiennej zgodnie z przebiegiem funkcji sinus (b)

W przypadku sygnałów o częstotliwości zmiennej w czasie zgodnie z przebiegiem funkcji sinus (rys. 5.6b), opóźnienie przy stosowaniu filtru Hanninga wynosi 21 próbek. W przypadku sygnału charakteryzującego się skokową zmianą amplitudy z wartości 1,0 j.w. na 0,8 j.w. przy stałej częstotliwości, odpowiedź układu ustala się po 42 próbkach. Czasy te oczywiście rosną

przy dodatkowym zastosowaniu pełnookresowego filtra typu „kosinus”, np. do 55 próbek przy skokowej zmianie amplitudy.

5.3. Pomiar częstotliwości w oparciu o model Prony’ego - algorytm rekursywny

Łatwiejszą kontrolę prezentowanych powyżej ograniczeń można uzyskać przez stosowanie rekursywnej metody najmniejszych kwadratów (RMNK lub ang. RLS) [27], [28], [49]. W metodzie tej obliczenie wektora $\mathbf{d}$ prowadzi się zgodnie z algorytmem opisanym w rozdziale 2.2.4 (równania (2.19) - (2.21)). We wzorach tych wektor $\mathbf{h}(k)$ dany jest wzorem:

$$\mathbf{h}(k) = \begin{bmatrix} y(k-1) + y(k-2p+1) \\ y(k-2) + y(k-2p+2) \\ \vdots \\ y(k-(p-1)) + y(k-2p+(p-1)) \\ 2y(k-p) \end{bmatrix}^T, \quad (5.37)$$

natomiast w miejsce $y(k)$ podstawiamy wartość:

$$y(k) = y(k) + y(k-2p). \quad (5.38)$$

Można zwrócić uwagę, że $\mathbf{h}(k)$ jest jednym (pierwszym) wierszem macierzy $\mathbf{H}(k)$ (5.27), natomiast $y(k)$ - jednym (pierwszym) wierszem wektora $\mathbf{y}(k)$ (5.28).

Ponieważ w praktyce nie dysponujemy danymi określającymi początkowe okno pomiarowe, zatem jako wartość początkowa macierzy kowariancji $\mathbf{P}(0)$ można przyjąć:

$$\mathbf{P}(0) = \delta \mathbf{1},$$

gdzie $\mathbf{1}$ - macierz jednostkowa, $\delta \gg 0$.

Podobnie, jako początkową wartość estymowanego wektora $\mathbf{d}(0)$ można założyć:

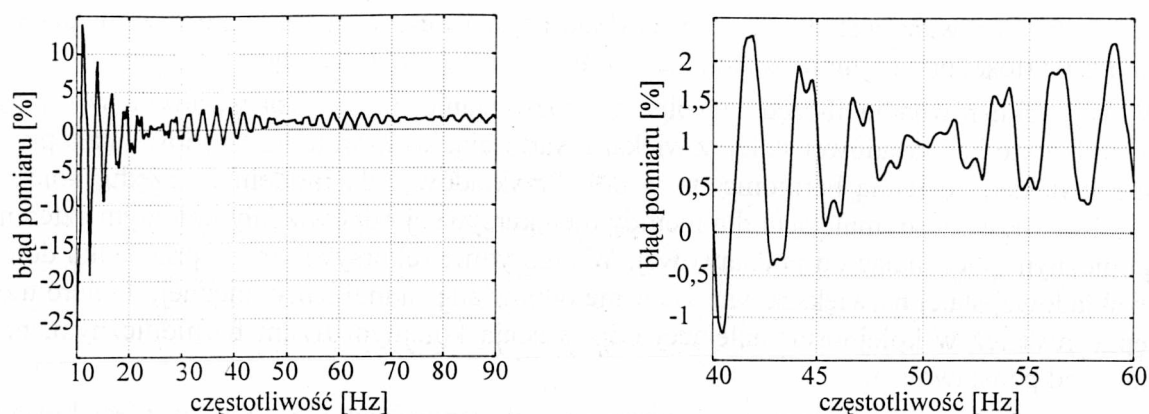
$$\mathbf{d}(0) = 0.$$

5.3.1. Wyniki przeprowadzonych symulacji

Na początek sprawdzono algorytm dla modelu II rzędu (dla dwóch harmoniczych). Założono następujące parametry początkowe:

- wektor $\mathbf{d} = [0 \ 0]^T$,
- macierz kowariancji błędów: $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1000 & 0 \\ 0 & 1000 \end{bmatrix}$,
- współczynnik zapominania $\lambda = 0,8$.

Przeprowadzone symulacje potwierdziły, zgodnie z założonym rzędem modelu sygnału, błąd bliski zera dla testowych sygnałów typu A i B w analizowanym zakresie 10...90 Hz. Analogicznie jak w algorytmie nierekursywnym nie jest istotne jakie składowe modelu występują w układzie, ważna jest tylko ich liczba. Poziom błąd pomiaru wzrasta wraz ze wzrostem liczby składowych ponad założony rząd modelu. Dla sygnału typu C, o zawartości trzech harmoniczych zależność błędu pomiaru od częstotliwości przedstawiona jest na rys. 5.7. Jak widać w zakresie 40...60 Hz błąd nie przekracza $\pm 2,3\%$. Dla większej liczby harmoniczych zawartych w sygnale poziom błędów jest bardzo znaczny, co dyskredytuje algorytm.



Rys. 5.7. Zależność błędu pomiaru od częstotliwości dla sygnału typu C

W przypadku przeszacowania modelu co do liczby składowych występujących w sygnale, wartości elementów macierzy kowariancji błędów $\mathbf{P}$ nie stabilizują się na skończonej niskiej wartości (niższej niż początkowo zakładana wartość $\delta \gg 0$) lecz będą rosnąć w czasie do nieskończoności, co wynika z niedopasowania rzędu modelu i sygnału. Idealnym rozwiązaniem jest dopasowanie rzędu modelu do rzędu sygnału, poprzez zmianę rzędu modelu w dół do modelu I-go rzędu. Wtedy elementy macierzy $\mathbf{P}$ przestaną rosnać. Ponieważ praktycznie niemożliwe do ustalenia jest kryterium zmiany rzędu modelu w górę, zatem każdorazowo pomiar zaczynałby się od modelu II-go rzędu z dopasowaniem tylko w dół, co ma dwie zasadnicze wady: po pierwsze wydłuża czas pomiaru, po drugie: istnieje wtedy pewien okres niestabilności obliczeń przy zmianie modelu.

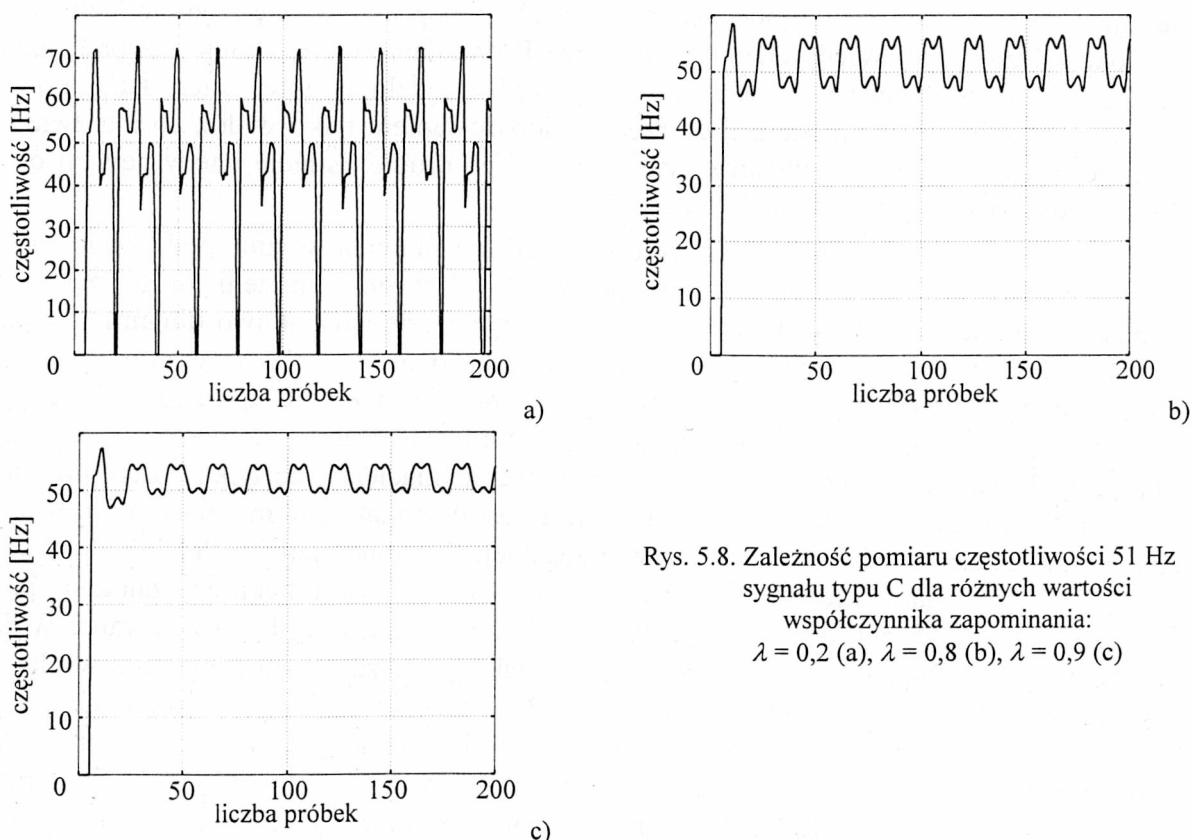
Problem ten rozwiązano inaczej. W celu lepszego zrozumienia, weźmy pod uwagę ogólny model p -tego rzędu. Rozwiązanie opisane powyżej, w przypadku modelu p -tego rzędu, jest bardzo skomplikowane, czasochłonne oraz charakteryzuje się stosunkowo długimi okresami niestabilności obliczeń, szczególnie w przypadku dużej różnicy między rzędem modelu i sygnału. Aby wyeliminować powyższe błędy założono rozwiązanie polegające na analizie tylko modelu p -tego rzędu, ale z zerowanymi odpowiednimi wierszami i kolumnami wektora $\mathbf{d}$ i macierzy $\mathbf{P}$, bez zmiany pozostałych elementów tychże macierzy, co tylko pośrednio odpowiada zmianie rzędu modelu. Ponieważ macierz $\mathbf{P}$ jest diagonalnie dominującą, więc wystarczające jest śledzenie jednego z elementów przekątnej. Wybrano element $\mathbf{P}(1,1)$, odpowiadający podstawowej harmonicznej. W przypadku gdy jego wartość przekroczy założony próg, ostatni element wektora $\mathbf{d}$ oraz ostatnie, wiersz i kolumna macierzy $\mathbf{P}$, są zerowane. Wyjątkiem jest element $\mathbf{P}(p,p)$, który przyjmuje wartość taką jak w założeniach początkowych. Ponieważ pozostałe elementy wektora $\mathbf{d}$ i macierzy $\mathbf{P}$ nie ulegają zmianie, zatem nie ma potrzeby powtórznego przeliczania algorytmu. Przeliczenie to będzie dokonywane przy pobraniu kolejnej, nowej próbki pomiarowej. Jeżeli pomimo to dalej wartość elementu $\mathbf{P}(1,1)$, przekracza założony próg, zerowaniu ulegają teraz przedostatni i ostatni element wektora $\mathbf{d}$ oraz przedostatnie i ostatnie wiersze oraz kolumny macierzy $\mathbf{P}$ (wyjątek $\mathbf{P}(p,p)$ oraz $\mathbf{P}(p-1,p-1)$ równe wartości przyjętej w założeniach początkowych), itd. Operacja ta powtarzana jest (maksymalnie $(p-1)$ -krotnie) do momentu, aż wartość elementów macierzy $\mathbf{P}$ ustabilizuje się na skończonej, odpowiednio małej wartości. Oznacza to prawidłowe dobranie „modelu”. Zaletą opisanego powyżej rozwiązania jest jego prostota oraz, z uwagi na fakt pozostawiania bez zmiany części elementów wektora $\mathbf{d}$ i macierzy $\mathbf{P}$, brak niestabilności algorytmu przy zmianie rzędu tak powstałego nowego „modelu”.

Godne uwagi jest zachowanie algorytmu przy sygnale z dodatkowo nałożoną składową stałą. Otóż algorytm „widzi” składową stałą jak harmoniczną. W praktyce objawia się to tym,

że doskonale filtrowana jest składowa stała (błąd pomiaru częstotliwości bliski zero) dla sygnału o zawartości przynajmniej o jedną harmoniczną mniej niż rząd algorytmu.

W przypadku równania II-rzędu wybieramy rozwiązanie z mniejszą wartością w (5.35), a nie jak było to bez składowej stałej, z większą wartością, bowiem teraz składowa stała przesuwająca rozwiązania o jedną harmoniczną w dół. Przykładowo dla modelu IV-rzędu, kolejne wartości w w kolejności malejącej dla metody nierekursywnej odpowiadały kolejnym czterem harmonicznym poczynając od podstawowej. W algorytmie rekursywnym, w przypadku dołożonej składowej stałej największa wartość w nie odpowiada żadnej harmonicznym, dopiero trzy następne również w kolejności malejącej odpowiadają kolejnym trzem harmonicznym, poczynając od podstawowej.

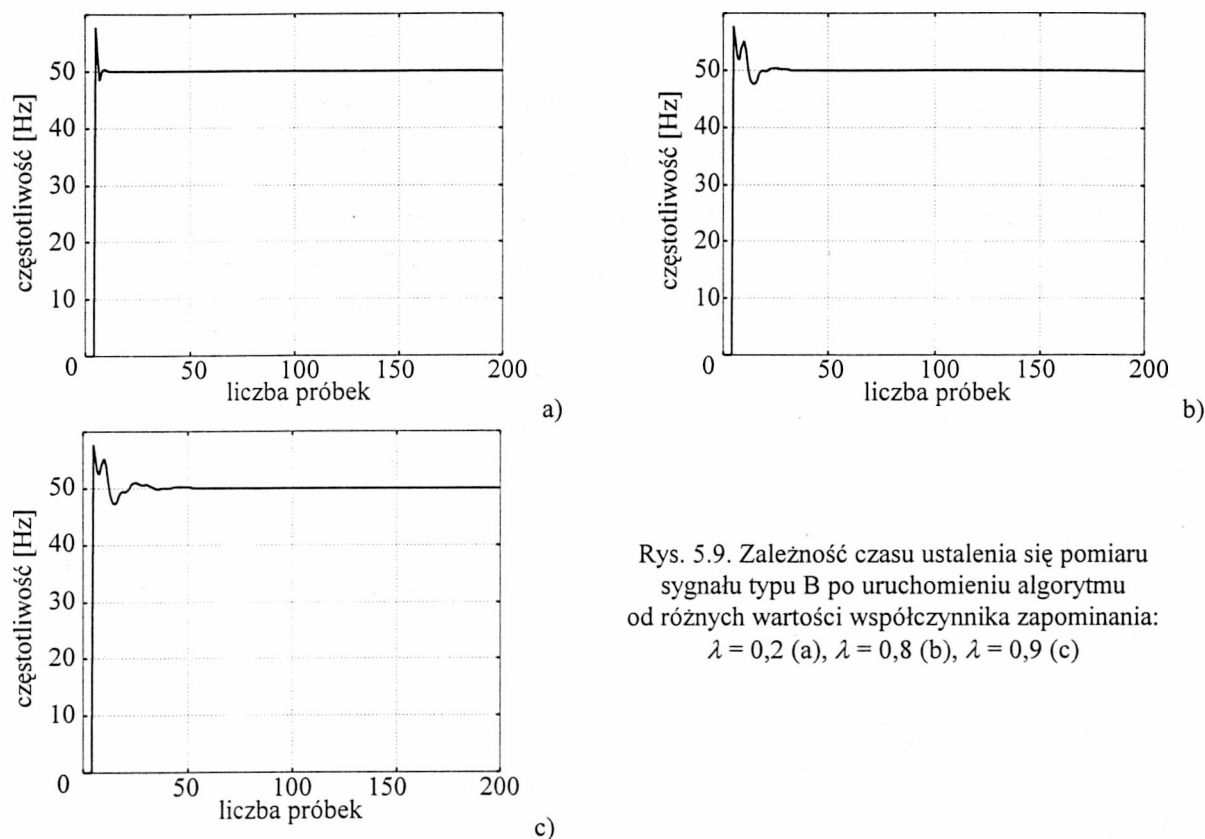
Istotnym parametrem algorytmu jest współczynnik zapominania λ . Ma on zdecydowany wpływ z jednej strony na jakość pomiaru, z drugiej na czas reakcji algorytmu na zmiany częstotliwości. W przypadku sygnałów o zawartości harmonicznym nie większym niż rząd modelu, współczynnik ten nie ma praktycznie wpływu na jakość pomiaru. Jego wpływ jest widoczny dopiero, gdy liczba harmonicznym w sygnale przekracza stopień algorytmu. Jak widać na rys. 5.8, najlepszą jakość pomiaru uzyskujemy dla największych wartości λ .



Rys. 5.8. Zależność pomiaru częstotliwości 51 Hz sygnału typu C dla różnych wartości współczynnika zapominania:
 $\lambda = 0,2$ (a), $\lambda = 0,8$ (b), $\lambda = 0,9$ (c)

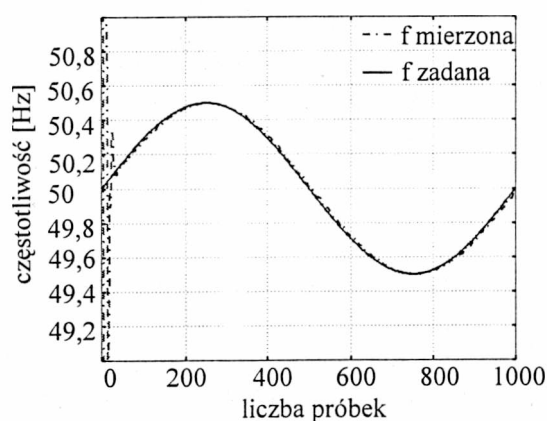
Jednakże, co pokazuje rys. 5.9, im większa wartość λ tym dłuższy czas ustalenia się pomiaru po uruchomieniu algorytmu i to niezależnie od liczby składowych w stosunku do stopnia algorytmu. Dla $\lambda = 0,2$ jest on najmniejszy i wynosi 11 próbek sygnału (przy $f_p = 1$ kHz), dla $\lambda = 0,8$ - 32 próbki, a dla $\lambda = 0,9$ jest największy i wynosi 53 próbki. W przypadku częstotliwości zmiennej zgodnie z przebiegiem funkcji sinus, dla wartości $\lambda = 0,2$, sygnał mierzony praktycznie nie ma opóźnienia w stosunku do sygnału zadanego, jednak oscyluje w niewielkich granicach wokół wartości zadanej. Dla $\lambda = 0,8$ (rys. 5.10) opóźnienie wynosi

kilka próbek, a dla $\lambda = 0,9$ wzrasta do ok. 10 próbek.



Rys. 5.9. Zależność czasu ustalenia się pomiaru sygnału typu B po uruchomieniu algorytmu od różnych wartości współczynnika zapominania: $\lambda = 0,2$ (a), $\lambda = 0,8$ (b), $\lambda = 0,9$ (c)

Dla sygnałów o stałej częstotliwości, ale o skokowo zmiennej amplitudzie z wartości 1,0 j.w. na 0,8 j.w., opóźnienia dla wartości $\lambda = 0,2$, $\lambda = 0,5$, $\lambda = 0,9$ wynoszą odpowiednio 10, 50, 100 próbek. Podsumowując, dobór współczynnika zapominania λ dokonywany jest na drodze kompromisu między jakością pomiaru i czasem reakcji algorytmu na zmiany częstotliwości.



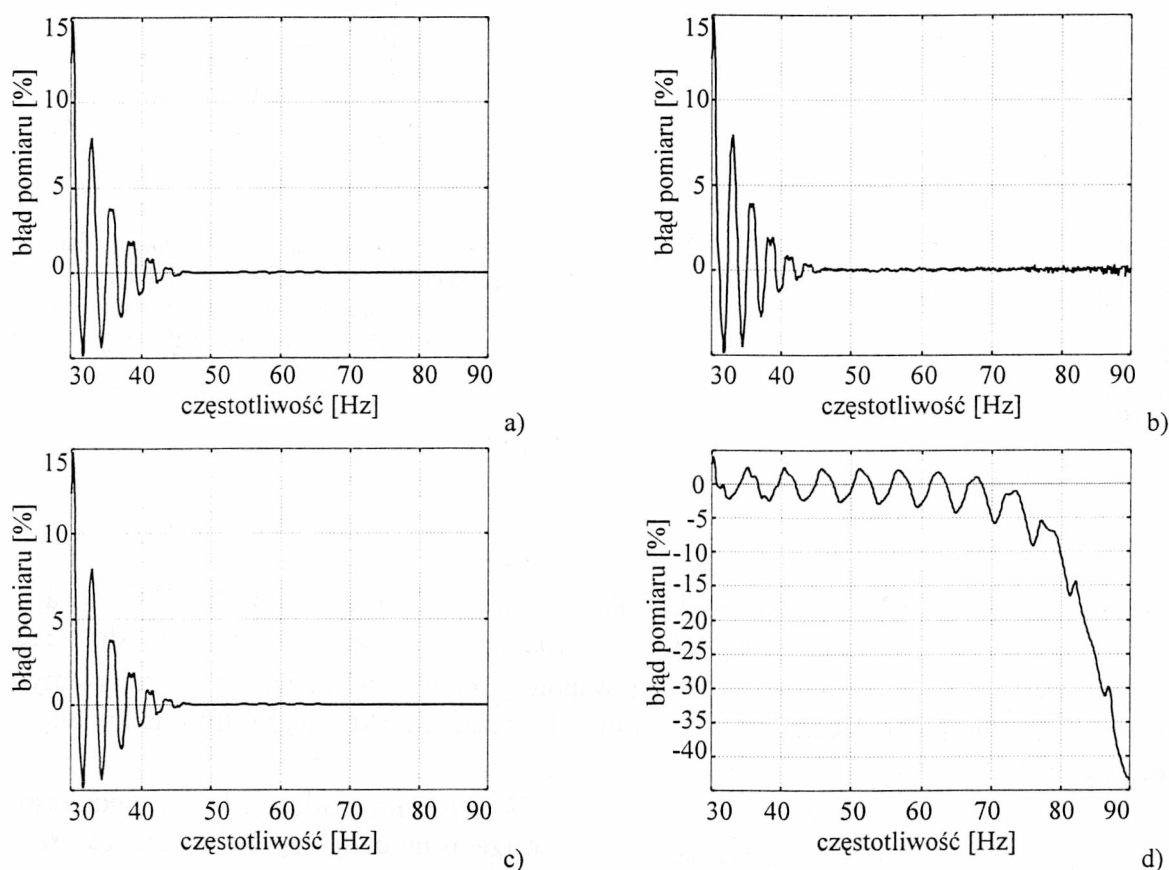
Rys. 5.10. Odpowiedź algorytmu na sygnał typu B ($\lambda = 0,8$) o częstotliwości zmiennej zgodnie z przebiegiem funkcji sinus

W celu minimalizacji błędów niedopasowania rzędu modelu i sygnału i uniezależnienia się od wyższych składowych można dokonać wstępnej filtracji sygnału z zastosowaniem filtru okienkowego Blackmana (2.3), Hamminga (2.4) lub Hanninga (2.5) [40]. Gdyby okna filtracyjne miały idealne parametry tzn. „odcinały” wszystkie składowe z wyjątkiem składowej podstawowej, algorytm II-go rzędu byłby bardzo dobrym rozwiązaniem, zapewniając także filtrację składowej stałej, co opisano powyżej. W praktyce jednak, ponieważ taki przypadek nie występuje, wystarczy przyjęcie modelu I-go rzędu. Wtedy równania macierzowe od (2.19) do (2.21) będą prostymi równaniami algebraicznymi. W przypadku

występowania składowej stałej, konieczne jest stosowanie filtru „odcinającego” tę składową, np. prostego filtru typu „kosinus” (2.6). Uzupełnieniem działania filtrów oddziałujących na

wejściowy sygnał mierzony, jest dodanie filtru uśredniającego na wyjściu układu pomiarowego. Jego działanie polegałoby na niwelowaniu błędów od niedoskonałości filtrów oraz od tzw. szumów pomiarowych (skończona liczba bitów przetwornika A/C, zakłócenia pomiarowe itp.)

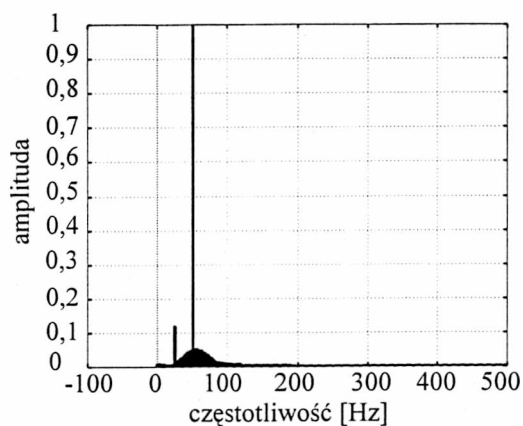
Zależność błędów pomiaru od częstotliwości dla modelu I-go rzędu z zastosowaniem okna filtracyjnego Blackmana (o długości $N_f = N = 20$) i okna typu „kosinus” (o długości $N_f = N = 20$) na sygnale wejściowym oraz filtru uśredniającego (o długości $N_f = N = 20$) na wyniku końcowym, dla różnych sygnałów testowych o zawartości wyższych harmonicznym przedstawiona jest na rys. 5.11.



Rys. 5.11. Zależność błędu pomiaru od częstotliwości algorytmu I-go rzędu z trzema oknami filtracyjnymi dla sygnału: typu H (a), typu D z nałożonym dodatkowo szumem białym o SNR = 40dB (b), typu D z nałożoną dodatkowo składową stałą o wartości 0,5 j.w. (c), typu DP2 z nałożoną dodatkowo składową stałą o wartości 0,5 j.w. (d)

Większy poziom błędów dla częstotliwości poniżej 40 Hz wynika z niedopasowania długości okna pomiarowego i okien filtracyjnych do okresu sygnału mierzonego (okna obejmują tylko część okresu sygnału - tym mniejszą, im mniejsza częstotliwość). W przypadku występowania podharmonicznych w mierzonym sygnale (sygnał typu DP2, rys. 5.11d) zwiększony poziom błędów wynika z niedostatecznego odfiltrowania tej składowej przez filtry (rys. 5.12).

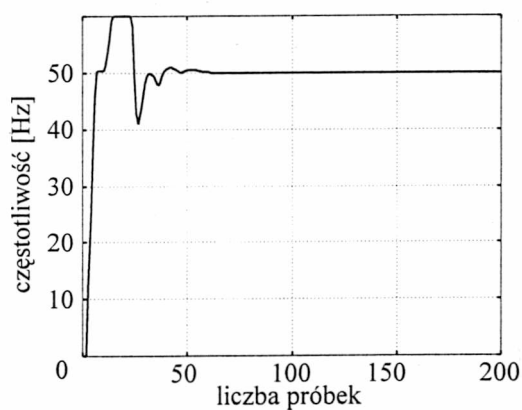
Stosowanie dodatkowych okien filtracyjnych wydłuża czas ustalenia się pomiaru po uruchomieniu algorytmu. W przypadku algorytmu I-go rzędu, bez okien filtracyjnych, opóźnienie to wynosi tylko 3 próbki (przy $f_p = 1$ kHz). Zastosowanie okien filtrów opisanych powyżej zwiększa ten czas do ok. 62 próbek dla sygnału typu D (rys. 5.13a), a gdy sygnał zawiera dodatkowo składową stałą o wartości 0,5 j.w., do około 68 próbek.



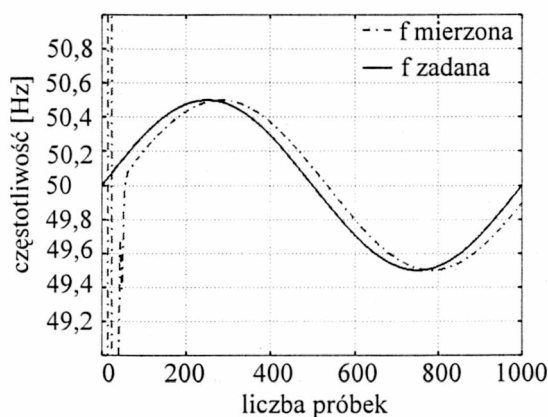
Rys. 5.12. Charakterystyka częstotliwościowa sygnału typu DP2 z nałożoną dodatkową składową stałą o wartości 0,5 j.w., po filtracji pełnookresowymi filtrami Blackmana i „kosinus”

Jeśli do sygnału mierzonego typu D dodany jest dodatkowy szum biały o $SNR = 40\text{dB}$, pomiar przedstawia się analogicznie jak na rys. 5.13a, czyli dla sygnału bez szumu. Po ustabilizowaniu się pomiaru następują jedynie niewielkie oscylacje wokół częstotliwości 50 Hz (błąd mniejszy od 0,05%). W przypadku częstotliwości zmieniającej się w czasie np. zgodnie z przebiegiem funkcji sinus, czas opóźnienia jest mniejszy i wynosi ok. 32 próbki (rys. 5.13b). Model I-go rzędu z zastosowaniem trzech filtrów daje zadowalające rezultaty również w przypadku sygnałów otrzymanych jako wynik symulacji w pakiecie ATP/EMTP (patrz Dodatek A.3). Algorytm potrzebuje ok. 55 próbek, aby

ustabilizować pomiar częstotliwości po skokowej zmianie amplitudy (rys. 5.14a) oraz ma ok. 30 próbek opóźnienia przy zmianach częstotliwości jak na rys. 5.14b, c, d, e.

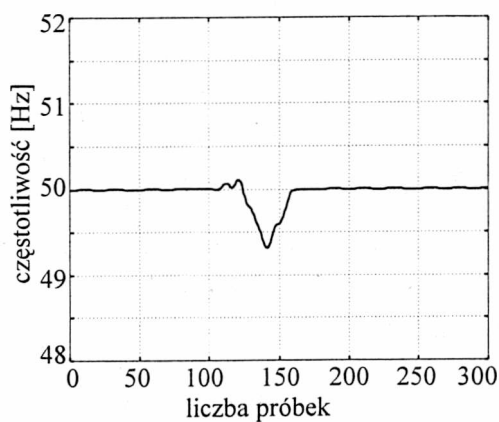


a)

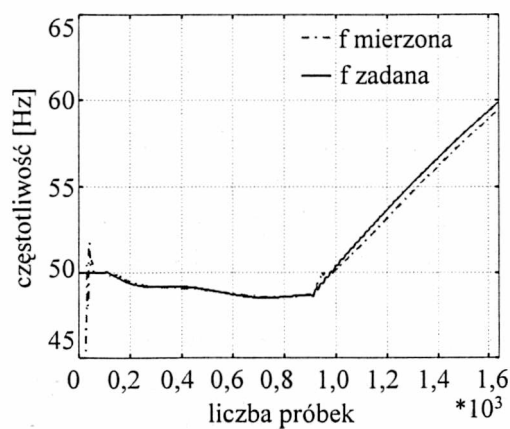


b)

Rys. 5.13. Odpowiedź algorytmu I-go rzędu, przy zastosowaniu trzech filtrów, na sygnał typu D: o częstotliwości 50 Hz (uruchomienie algorytmu) (a), o częstotliwości zmiennej zgodnie z przebiegiem funkcji sinus (b)

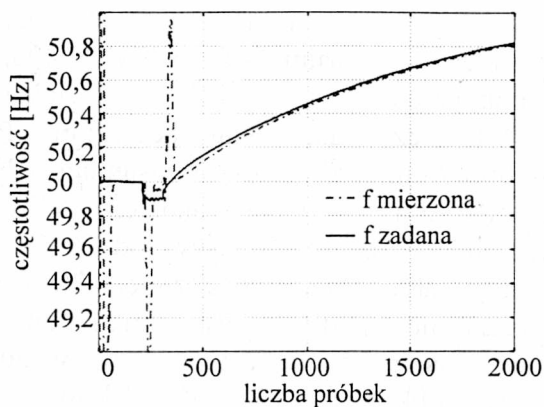


a)

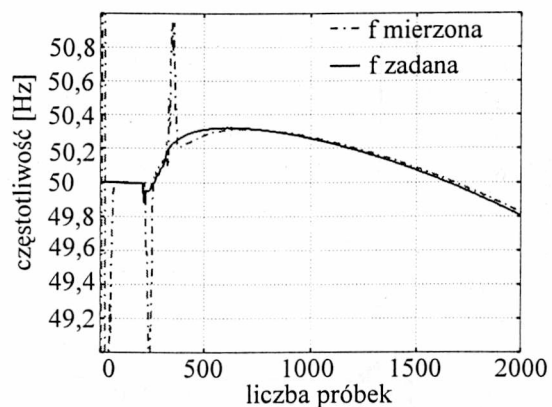


b)

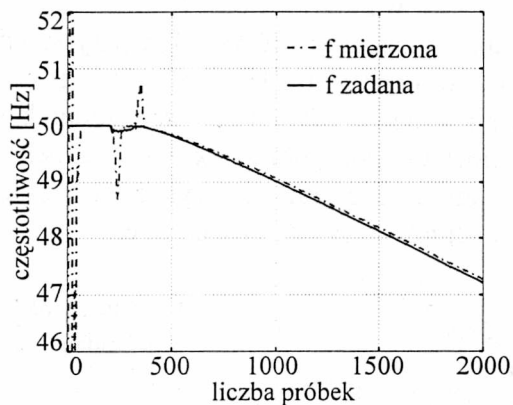
Rys. 5.14. Pomiar częstotliwości sygnałów otrzymanych z pakietu ATP/EMTP: typu ATP1 (a), ATP2 (b) (ciąg dalszy na następnej stronie)



c)



d)



e)

Rys. 5.14.(cd.) Pomiar częstotliwości sygnałów
otrzymanych z pakietu ATP/EMTP:
ATP3 (c), ATP3a (d), ATP3b (e)

5.3.2. Algorytm rekursywny dla modelu VI rzędu

Jakkolwiek opisany powyżej algorytm I rzędu charakteryzuje się prostotą i prawidłowym działaniem dla różnego typu sygnałów, to jednak ze względu na stosunkowo duże opóźnienia w pomiarze wynikające ze stosowania filtrów, nadaje się do stosowania w przypadkach, gdzie bardziej istotna jest dokładność pomiaru, a mniej czas reakcji na zmiany częstotliwości. Ponieważ w zabezpieczeniowej automatyce elektroenergetycznej czas odgrywa decydującą rolę, zdecydowano się na poszukiwanie mniej czasochłonnych rozwiązań. Stosunkowa prostota metody rekursywnej pod względem numerycznym zachęciła do opracowania algorytmu wyższego rzędu. Ponieważ w sieciach wysokich napięć nie występują w zasadzie harmoniczne o wysokich numerach, użyteczny będzie algorytm VI rzędu.

Znalezienie pierwiastków równania VI-rzędu ($p = 6$ w (5.30)) wymaga stosowania metod iteracyjnych. Ponieważ z punktu widzenia zastosowania w automatyce elektroenergetycznej istotna jest częstotliwość tylko jednej (podstawowej) harmonicznej, w celu jej znalezienia wybrano metodę Newtona. Jako wartość początkową w po uruchomieniu algorytmu (zerowe przybliżenie - w_0) przyjęto wartość odpowiadającą (patrz wzór (5.33)) częstotliwości 50 Hz. Sprawdzono doświadczalnie, że w celu poprawnego wyliczenia wartości w wystarczą w sytuacji ustalonej trzy iteracje, a w przypadku zmian częstotliwości pięć iteracji i taką wartość przyjęto do symulacji. Po pobraniu kolejnej próbki sygnału, jako wartość początkową w przyjmowano wartość obliczoną w poprzednim kroku algorytmu.

Założono następujące parametry początkowe:

- współczynnik zapominania $\lambda = 0,8$,
- wektor $\mathbf{d} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$,
- macierz kowariancji błędów: $\mathbf{P} = 1000 \mathbf{I}_{6 \times 6}$.

W wyniku przeprowadzonych prób stwierdzono poprawność algorytmu (błąd bliski zeru) dla sygnałów o zawartości do 6 harmonicznym włącznie w zakresie 30...90 Hz. Dla wartości poniżej 30 Hz poziom błędów wzrastał wraz ze zmniejszaniem się częstotliwości. Przyczyną tego stanu rzeczy jest fakt, że np. dla $f = 10$ Hz przy częstotliwości próbkowania $f_p = 1$ kHz wartość $N = 20$ próbek obejmuje tylko 1/5 okresu sygnału. Możliwe jest stosunkowo niewielkie zmniejszenie poziomu błędów dobierając odpowiednio warunki początkowe. Analogicznie jak w przypadku algorytmu II-rzędu, także dobrze odfiltrowywana jest składowa stała dla sygnałów o zawartości do piątej harmonicznym włącznie.

Analiza algorytmu

Dokładna analiza algorytmu wykazała pewien problem związany z rozwiązaniem równania metodą iteracyjną Newtona. Ponieważ rozwiązaniem równania 6-go rzędu jest sześć pierwiastków, zatem w niektórych sytuacjach, szczególnie w procesach przejściowych, kolejne wartości w mogą przyjmować wartości mniejsze od zera (ujemna częstotliwość) lub większe od jeden (częstotliwość jest wtedy liczbą zespoloną) oraz wartości odpowiadające wyższym składowym, co w konsekwencji powoduje pomiar częstotliwości innej składowej, zamiast harmonicznym podstawowej. W pierwszych dwóch przypadkach łatwo temu zaradzić pomijając te obliczenia i jako wynik przyjmując wartość w z poprzedniego kroku. Aby zapobiec trzeciemu przypadkowi należałoby obliczyć wszystkie sześć pierwiastków i wybrać ten o największej wartości - jeżeli w sygnale nie występują podharmoniczne i składowa stała - lub drugi z kolei przy występowaniu tejże składowej. Jest to jednak bardzo czasochłonne. Analiza wartości w pod kątem nagłych zmian jest również utrudniona, ponieważ w zależności od częstotliwości wartość ta zmienia się w sposób nieliniowy (jest to funkcja kosinus). Dopiero analiza obliczonej zgodnie z równaniem (5.33) częstotliwości pozwala na korektę. W przypadku nagłego skoku obliczanej częstotliwości można by podzielić wynik przez 2 w przypadku drugiej harmonicznym (przy braku między- i podharmonicznym) lub przez 3 w przypadku trzeciej itd. Jednakże w praktyce nie jest to takie proste, bowiem, rzadko kiedy bieżący pomiar różni się od poprzedniego dwu-, trzykrotnie. Najczęściej dynamika zmian jest wolniejsza (trwająca kilka próbek pomiarowych), zdarzały się również przypadki dochodzenia do wyższej harmonicznym w wielu kilkupróbkowych skokach (w sposób schodkowy). Utrudnia to ustalenie kryterium, kiedy pomiar jest nieprawidłowy, a kiedy częstotliwość po prostu uległa zmianie.

Zaproponowano zatem następujące rozwiązanie: na bieżąco sprawdzana jest bezwzględna wartość różnicy wartości aktualnej i poprzedniej częstotliwości. Jeżeli różnica ta jest większa od 1%, w stosunku do wartości poprzedniej, to następne sprawdzanie wartości tej różnicy dokonywane jest dopiero po upływie okresu podstawowej harmonicznym (20 ms przy $f_p = 1$ kHz). Odmierzanie czasu realizowane jest przez specjalny licznik programowy zliczający do 20 (przy $f_p = 1$ kHz). Czas ten dobrano doświadczalnie i jest on dłuższy od maksymalnego czasu „dochodzenia schodkowego” do wyższej harmonicznym. W takim przypadku sprawdzane jest, czy różnica ta większa jest od 5% - jeśli tak, to jako bieżący wynik przyjmowana jest wartość sprzed 20 ms. W czasie zliczania licznika „20 ms”, jako wartość początkową w dla metody Newtona przyjmowano nie wartość obliczoną w poprzednim kroku algorytmu, lecz wartość sprzed uruchomienia licznika (wystąpienia nieprawidłowości).

Na rys. 5.15, rys. 5.16 i rys. 5.17 zobrazowano pomiar sygnału o częstotliwości 50 Hz sygnału typu D. Porównując rys. 5.15a i rys. 5.15b, widoczne jest powolniejsze ustalanie pomiaru w przypadku dodatkowej składowej stałej występującej w sygnale (rys. 5.15b).

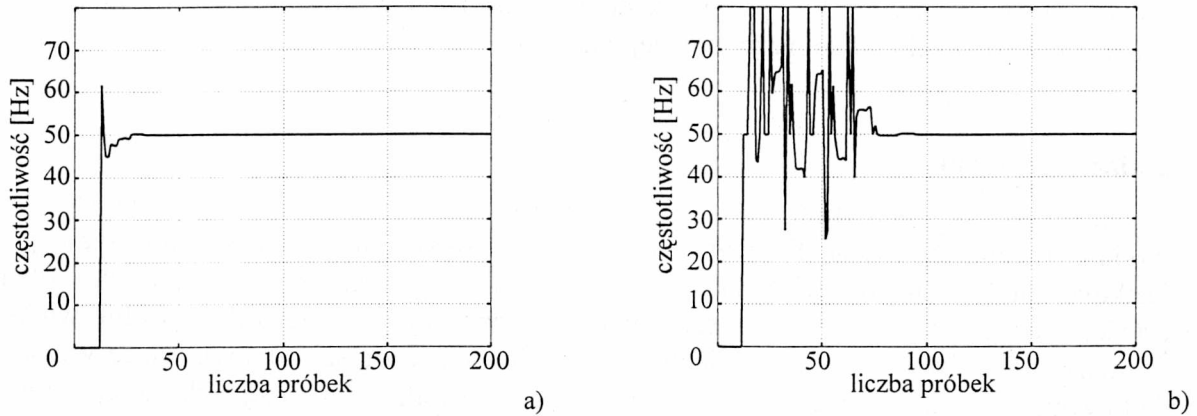
Ponieważ składowa stała w sygnałach występujących w systemie elektroenergetycznym ma znacznie częściej charakter eksponentalnie malejący, zatem do sygnału typu D dodano skła-

dową stałą daną równaniem:

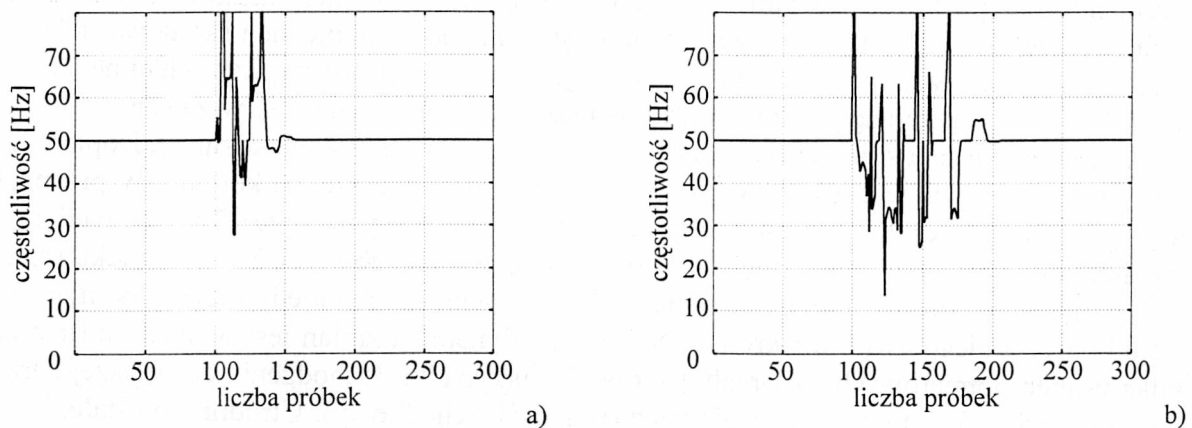
$$y(t) = y(t) + 0,5e^{-t \frac{T_p}{T_a}}, \quad (5.39)$$

gdzie: $T_p = 0,001$ sek. - okres próbkowania,

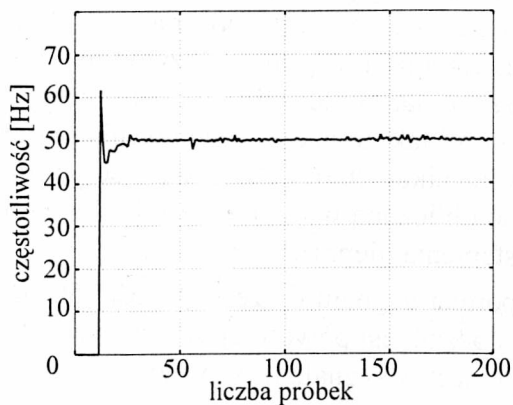
$T_a = 0,1$ sek. - stała czasowa odpowiadająca za prędkość zanikania składowej stałej.



Rys. 5.15. Pomiar częstotliwości sygnału typu D (uruchomienie algorytmu, $\lambda = 0,8$): bez składowej stałej (a) oraz z dodatkowo dołożoną składową stałą o wartości 0,5 j.w. (b)



Rys. 5.16. Pomiar częstotliwości sygnału typu D ($\lambda = 0,8$): z dodatkowo dołożoną składową stałą o wartości 0,5 j.w. malejącą eksponentalnie od 100-nej próbki (a), bez składowej stałej, od 100-nej próbki z dodatkowo dołożoną składową stałą o wartości 0,5 j.w. malejącą eksponentalnie (b)



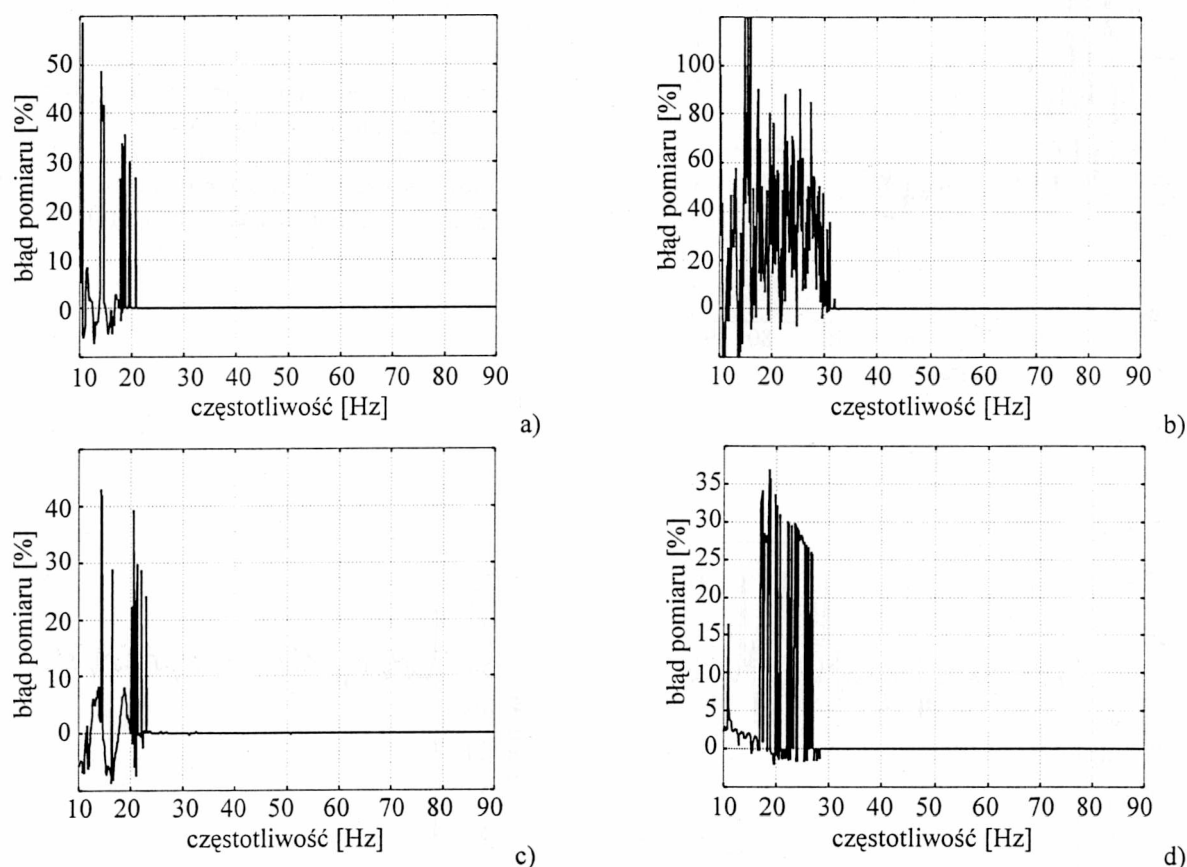
Rys. 5.17. Pomiar częstotliwości sygnału typu D ($\lambda = 0,8$) z dodatkowym szumem białym o współczynniku $SNR = 60$ dB

Wartość pomiaru częstotliwości ustala się w granicach od $0,5T_a$ w sytuacji gdy w sygnale występowała już składowa stała i zaczyna w pewnym momencie czasowym (w 100-nej próbce) eksponentalnie zanikać (rys. 5.16a), do $1,0T_a$ w sytuacji gdy w sygnale nie występowała składowa stała i nagle (w 100-nej próbce) pojawia się eksponentalnie malejąca (rys. 5.16b). Sprawdzone również prawidłowość pomiaru sygnału zakłóconego szumem białym o współczynniku $SNR = 60$ dB (rys. 5.17).

Rys. 5.18 przedstawia zależność błędu pomiaru od częstotliwości dla sygnału typu D. W przypadku sygnału bez dodatkowo nałożonych zakłóceń (rys. 5.18a) błąd pomiaru bliski zeru występuje dla częstotliwości z zakresu 22...90 Hz.

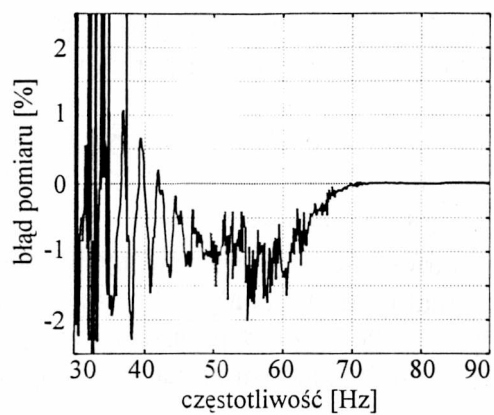
Jeżeli w sygnale występuje dodatkowo składowa stała o wartości 0,5 j.w. (rys. 5.18b), praktycznie nie wpływa to na dokładność pomiaru przesuwając tylko nieznacznie dopuszczalną (z minimalnym błędem) dolną granicę zakresu zmian częstotliwości do 32 Hz.

Przebadano również zachowanie się algorytmu na zawartość międzyharmonicznych i podharmonicznych. W przypadku międzyharmonicznych (sygnał typu DM1) algorytm zachowuje się dokładnie tak samo jak dla standardowego sygnału typu D. Podobnie z podharmonicznymi (sygnały typu DP1 i DP2) algorytm wykazuje błąd bliski zeru dla zakresu zmian częstotliwości podobnie jak dla sygnału typu D.

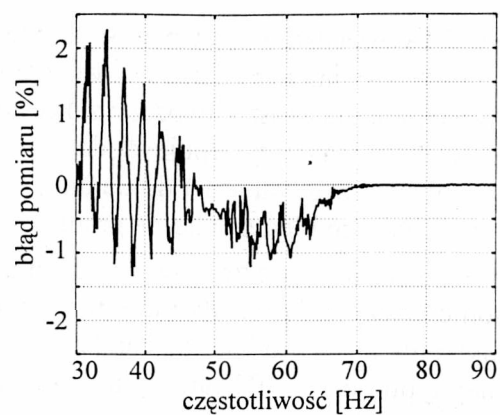


Rys. 5.18. Zależność błędu pomiaru od częstotliwości dla sygnału typu D:
 bez dodatkowo nałożonych zakłóceń (a),
 z dodatkowo nałożoną składową stałą o amplitudzie 0,5 j.w. (b),
 z występującą podharmoniczną 0,5 (sygnał typu DP1) (c),
 z występującą podharmoniczną 0,9 (sygnał typu DP2) (d)

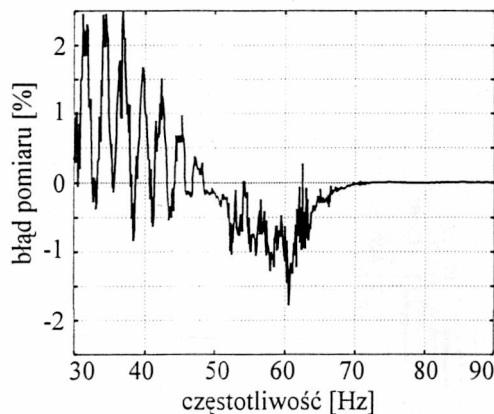
Rys. 5.19 przedstawia zależność błędu pomiaru od częstotliwości dla sygnałów o zawartości siedmiu (sygnał typu F) (rys. 5.19a), ośmiu (sygnał typu G) (rys. 5.19b) i dziewięciu (sygnał typu H) (rys. 5.19c) harmonicznych. Jak widać, w zakresie 30...90 Hz, błąd nie przekracza wartości $\pm 2,5\%$ i maleje wraz ze wzrostem częstotliwości. Dotyczy to przypadków gdy współczynnik zapominania $\lambda = 0,8$, bowiem jego wartość ma wpływ na jakość i czas ustalania się pomiaru (rys. 5.20).



a)

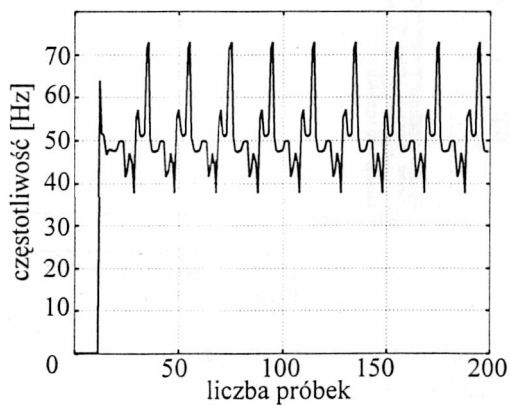


b)

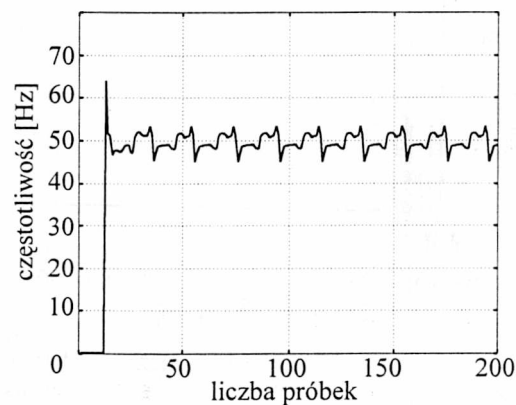


c)

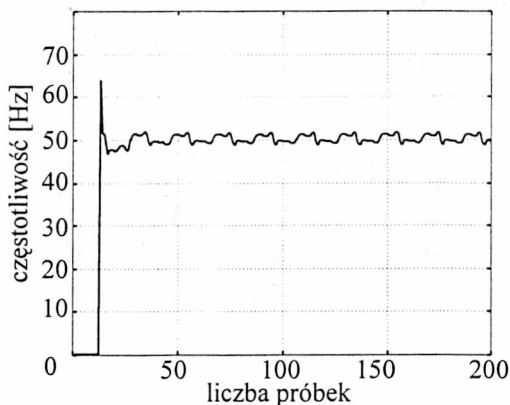
Rys. 5.19. Zależność błędu pomiaru od częstotliwości dla sygnałów o zawartości:
siedmiu harmonicznych (typu F) (a),
ośmiu harmonicznych (typu G) (b),
dziewięciu harmonicznych (typu H) (c)



a)



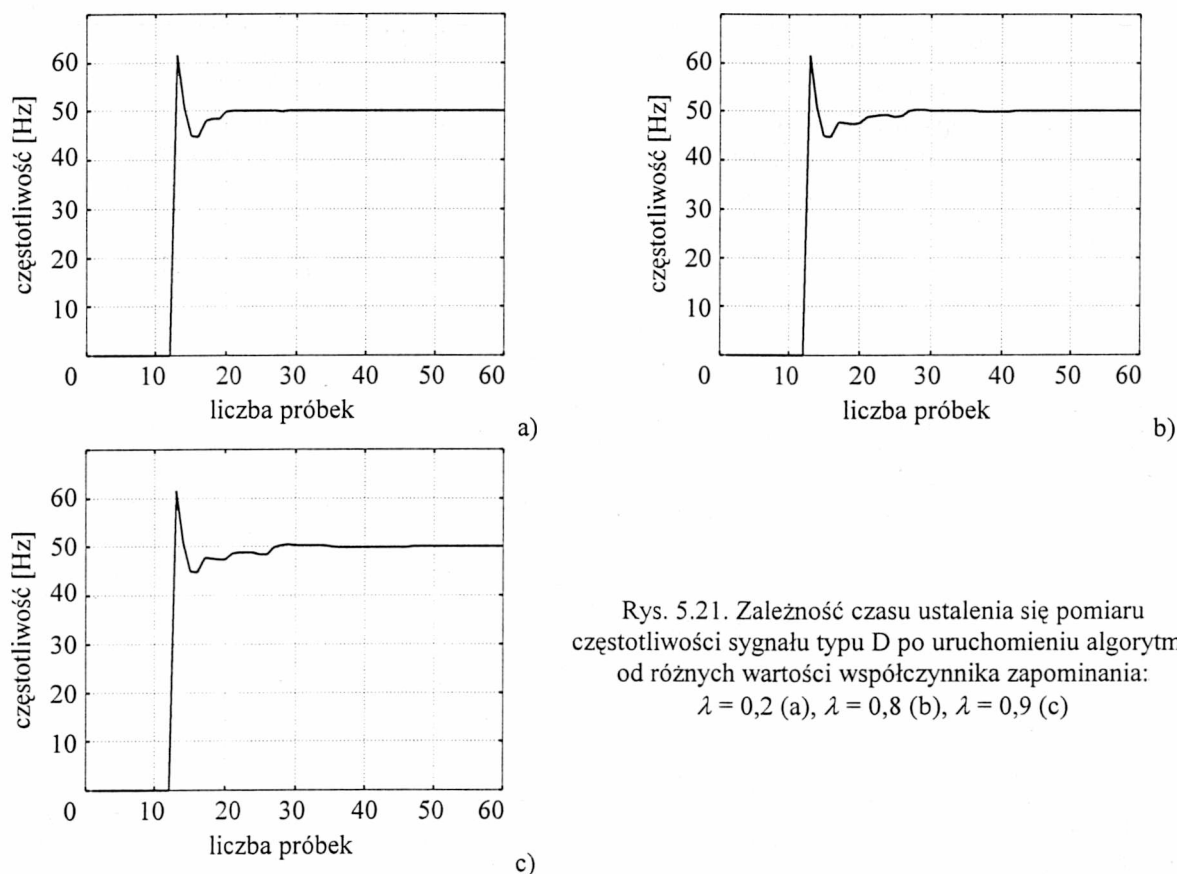
b)



c)

Rys. 5.20. Zależność pomiaru częstotliwości sygnału typu F dla różnych wartości współczynnika zapominania:
 $\lambda = 0,2$ (a), $\lambda = 0,8$ (b), $\lambda = 0,9$ (c)

Czas ustalenia się pomiaru częstotliwości sygnału typu D, po uruchomieniu algorytmu, w zależności od współczynnika zapominania λ , przedstawia rys. 5.21. Dla $\lambda = 0,2$, $\lambda = 0,8$, $\lambda = 0,9$ opóźnienie to wynosi odpowiednio 20, 35, i 55 próbek (przy $f_p = 1$ kHz). W przypadku częstotliwości zmiennej zgodnie z przebiegiem funkcji sinus, dla $\lambda = 0,8$ i $\lambda = 0,9$ opóźnienie algorytmu wynosi odpowiednio 10 i 15 próbek (rys. 5.22). Dla $\lambda = 0,2$, podobnie jak przy dodaniu składowej stałej do sygnału zmiennego w czasie, występują stosunkowo duże oscylacje wokół wartości zadanej co czyni pomiar mało dokładnym.

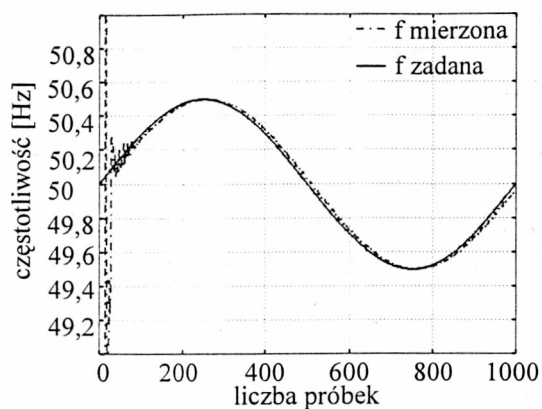


Rys. 5.21. Zależność czasu ustalenia się pomiaru częstotliwości sygnału typu D po uruchomieniu algorytmu od różnych wartości współczynnika zapominania: $\lambda = 0,2$ (a), $\lambda = 0,8$ (b), $\lambda = 0,9$ (c)

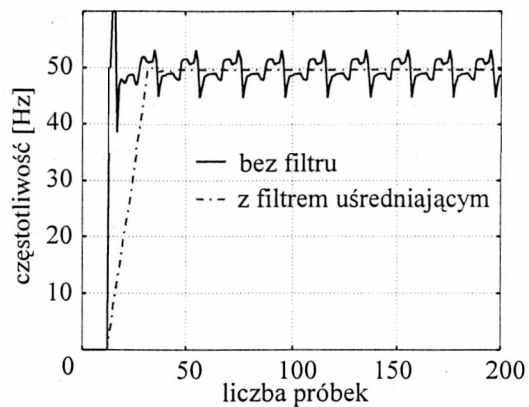
Dla sygnałów o stałej częstotliwości, ale o skokowo zmiennej amplitudzie z wartości 1,0 j.w. na 0,8 j.w. opóźnienia dla wartości $\lambda = 0,2$, $\lambda = 0,8$, $\lambda = 0,9$ wynoszą odpowiednio 25, 45, 85 próbek. Wartości te rosną znacząco w przypadku składowej stałej dołożonej do sygnału (z 45 próbek do 105 próbek dla $\lambda = 0,8$).

W przypadku niedoszacowania rzędu modelu w stosunku do rzędu sygnału, wynik pomiaru częstotliwości oscyluje wokół częstotliwości zadanej. Okres tych oscylacji jest równy częstotliwości mierzonej, a ich charakter jest taki, że dodanie pełnookresowego filtra uśredniającego na wynik pomiaru skutecznie je niweluje (rys. 5.23).

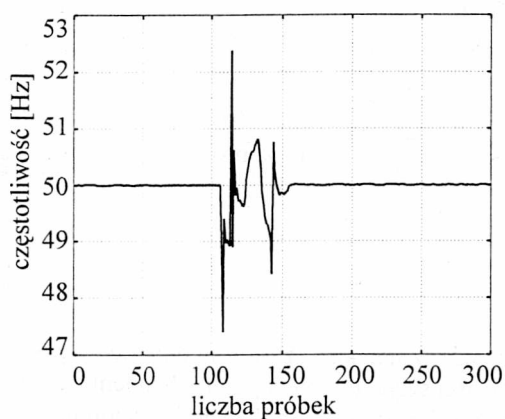
Aby zwiększyć wiarygodność testowania wykorzystano sygnały typu ATP1 (Dodatek A, rys. A.3), ATP2 (rys. A.5a) i ATP3 (rys. A.6a) uzyskane z programu do symulacji procesów energetycznych ATP/EMPT. Wyniki symulacji przedstawiono na rys. 5.24. Dla sygnału typu ATP3, w trakcie pomiaru często występują „szpilki” o stosunkowo dużej bezwzględnej wartości częstotliwości, co obarcza pomiar dużym błędem.



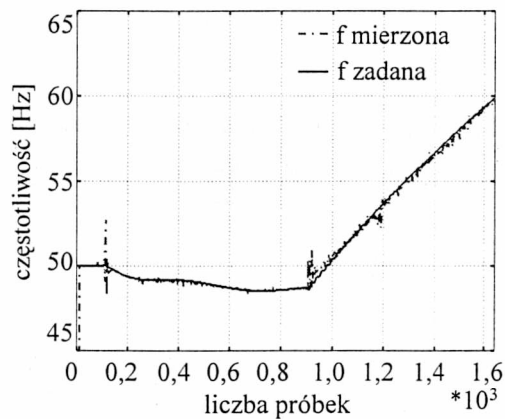
Rys. 5.22. Odpowiedź algorytmu na sygnał typu D ($\lambda = 0,8$) o częstotliwości zmiennej zgodnie z przebiegiem funkcji sinus



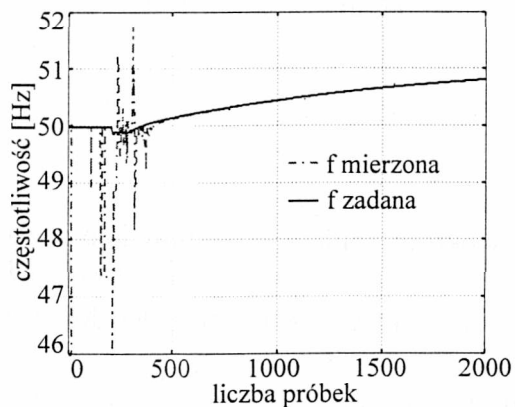
Rys. 5.23. Pomiar częstotliwości sygnału typu F bez filtru i z pełnookresowym filtrem uśredniającym



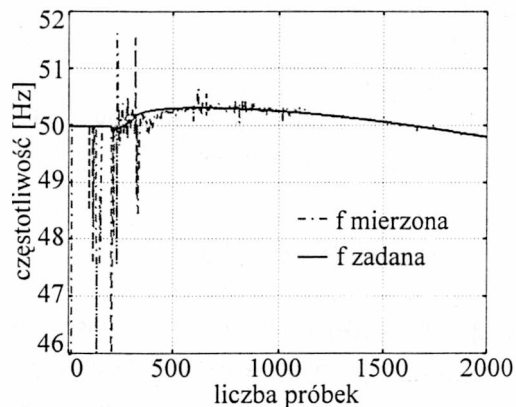
a)



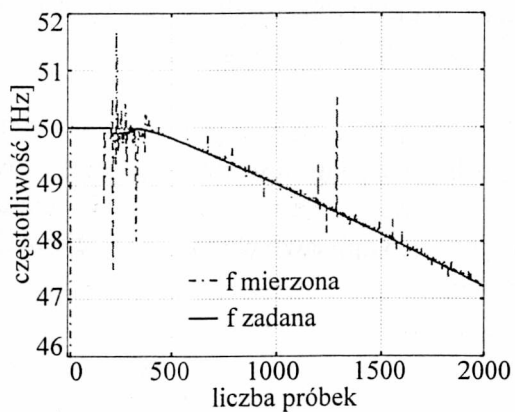
b)



c)



d)



e)

Rys. 5.24. Pomiar częstotliwości sygnałów otrzymanych z pakietu ATP/EMTP: typu ATP1 (a), ATP2 (b), ATP3 (c), ATP3a (d), ATP3b (e)

5.3.3. Algorytm rekursywny - wersja zmodyfikowana

Analizując algorytm opisany w punkcie poprzednim pod kątem pomiaru właściwej (podstawowej) harmoniczej, zdecydowano się, jak to opisano wcześniej, na specyficzne porównanie wartości bieżącej mierzonej częstotliwości z wartością poprzednią (progi jednocentowy i pięcioprocentowy). Takie rozwiązanie wymaga jednak najpierw policzenia częstotliwości. Właściwszym byłoby takie porównanie o krok wcześniej, czyli na etapie liczenia wartości w . Analiza wartości w pod kątem zmian jest jednak utrudniona, ponieważ w zależności od częstotliwości wartość ta zmienia się w sposób nieliniowy (funkcja kosinus we wzorze (5.32)).

Jako wartość początkową w po uruchomieniu algorytmu (zerowe przybliżenie rozwiązania równania - w_0) przyjmuje się wartość odpowiadającą (p. wzór (5.33)) częstotliwości 50 Hz. Wadą takiego rozwiązania jest konieczność uruchomienia algorytmu w momencie, gdy wartość częstotliwości wynosi z dużym przybliżeniem 50 Hz i sygnał napięciowy wolny jest od zakłóceń w postaci składowych podharmonicznych. Kolejny problem widoczny jest przy zastosowaniu algorytmu w czasie rzeczywistym. W sytuacji oprogramowania w języku assemblera, realizacja funkcji odwrotnej do funkcji kosinus we wzorze (5.33) wymaga zastosowania metod numerycznych.

Zdecydowano się zatem na pewną modyfikację algorytmu będącą pośrednim rozwiązaniem powyższych problemów. Postanowiono w miejsce funkcji $\cos(qa)$ we wzorze (5.30) podstawić jej rozwinięcie w n wyrazów szeregu Taylora zgodnie z zależnością:

$$\cos(qa) = 1 - \frac{(qa)^2}{2!} + \frac{(qa)^4}{4!} - \frac{(qa)^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{(qa)^{2n}}{(2n)!}. \quad (5.40)$$

Zawężono również zakres zmian częstotliwości jakie ma mierzyć algorytm z przedziału 10...90 Hz, na wartości z przedziału 40...60 Hz.

Ponieważ dla algorytmu zakładającego 6 harmoniczych w równaniu (5.30) wystąpi także wartość $\cos(6qa)$, zatem, aby zachować odpowiednią dokładność przybliżenia funkcji kosinus szeregiem Taylora zdecydowano się na 6 pierwszych wyrazów tego szeregu ($n = 6$). Po dodatkowym podstawieniu $v = qa$ i prostych przekształceniach równanie (5.30) przyjmie wtedy postać:

$$b_1 + b_2 v^2 + b_3 v^4 + b_4 v^6 + b_5 v^8 + b_6 v^{10} = 0, \quad (5.41)$$

gdzie:

$$b_1 = 1 - d_1 - d_2 - d_3 - d_4 - d_5 - d_6, \\ b_k = -\frac{1}{(2k-2)!} (6^{2k-2} - 5^{2k-2} d_1 - 4^{2k-2} d_2 - 3^{2k-2} d_3 - 2^{2k-2} d_4 - d_5), \quad k = 2, 3, 4, 5, 6.$$

W równaniu (5.41) występują tylko parzyste potęgi zmiennej v , zatem, po podstawieniu $w_1 = v^2$ otrzymamy:

$$b_1 + b_2 w_1 + b_3 w_1^2 + b_4 w_1^3 + b_5 w_1^4 + b_6 w_1^5 = 0. \quad (5.42)$$

Spośród pięciu pierwiastków będących rozwiązaniem tego równania wybieramy tylko te, które są liczbami rzeczywistymi dodatnimi. W przypadku sygnału o zawartości harmoniczych do sześciu włącznie, ale bez nałożonych dodatkowo zakłóceń taki pierwiastek jest tylko jeden. Jeżeli w sygnale występują międzyharmoniczne, podharmoniczne, lub dołożona jest dodatkowa składowa stała, może być takich pierwiastków kilka. Wybieramy spośród nich ten, który wynika z założonego zakresu zmian częstotliwości. Ponieważ taki pierwiastek jest tylko jeden, zatem równanie (5.42) rozwiązujemy metodą Newtona. Ponieważ teraz wartość w_1

zmienia się w sposób liniowy, zatem już w tym momencie możliwa jest analiza jego zmian pod kątem liczenia wyższych harmonicznych.

Aby algorytm mógł startować w dowolnym momencie (nawet przy $f \neq 50\text{Hz}$), zaproponowano, aby jako wartość początkową przyjąć rozwiązanie jednego z liniowych równań powstałych przy wyzerowaniu odpowiednich współczynników w równaniu (5.42):

$$w_0 b_2 + b_1 = 0, \quad (5.43)$$

$$w_0 b_3 + b_2 = 0, \quad (5.44)$$

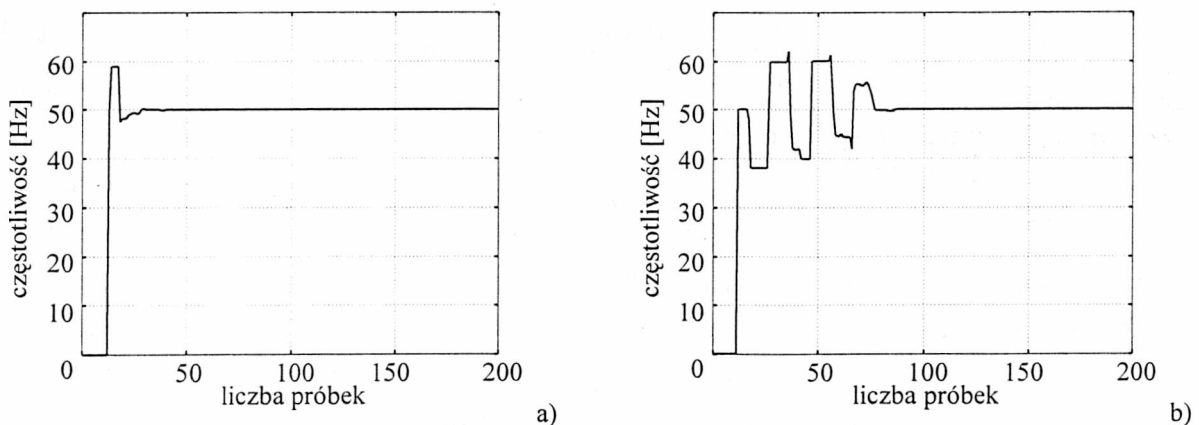
$$w_0 b_4 + b_3 = 0. \quad (5.45)$$

Wybierana jest ta wartość, która będzie znajdowała się między progowymi wartościami ustalonymi dla minimalnej i maksymalnej częstotliwości w zakresie których algorytm będzie działał prawidłowo (czyli przyjętego zakresu 40...60 Hz). Jeżeli żadne rozwiązanie nie spełnia tego warunku, to wybierana jest ta wartość, będąca średnią arytmetyczną rozwiązań równań (5.43) i (5.44) lub (5.44) i (5.45), która mieści się między wartościami progowymi. Maksymalną liczbę iteracji metody Newtona ograniczono do 10, z tym, że na bieżąco sprawdzana jest różnica pomiędzy iteracjami aktualną oraz poprzednią i w przypadku osiągnięcia minimalnego założonego progu przez tę różnicę, kolejne iteracje są pomijane. Jeżeli obliczona wartość w_1 będzie liczbą ujemną, zespoloną lub spoza ustalonego zakresu, pomijamy to rozwiązanie, jako wynik przyjmując wartość otrzymaną z poprzedniego kroku algorytmu. Po wyliczeniu wartości w_1 częstotliwość obliczamy ze wzoru:

$$f = \frac{f_0}{a} \sqrt{w_1}. \quad (5.46)$$

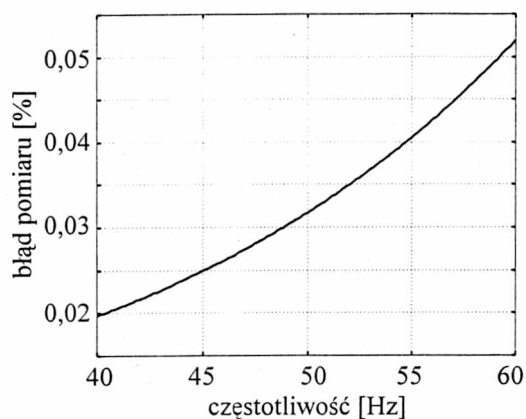
Po pobraniu kolejnej próbki sygnału, jako wartość początkową w_1 przyjmowano wartość obliczoną w poprzednim kroku algorytmu.

Sposób w jaki algorytm reaguje na uruchomienie i zmiany częstotliwości dla sygnału typu D przedstawia rys. 5.25. Dla wartości $\lambda = 0,8$ opóźnienie w przypadku uruchomienia algorytmu (rys. 5.25a) wynosi ok. 25 próbek. Opóźnienie to rośnie do wartości ok. 95 próbek, jeśli sygnał będzie dodatkowo zakłócony składową stałą o wartości 0,5 j.w. (rys. 5.25b).

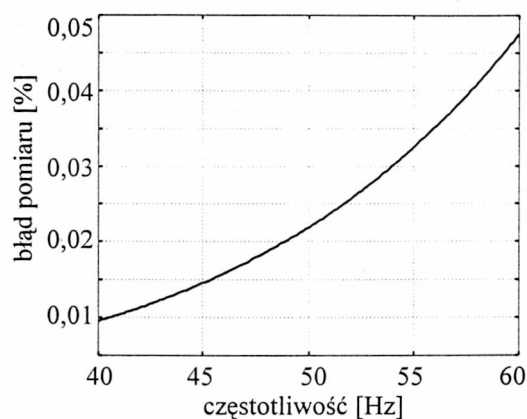


Rys. 5.25. Odpowiedź algorytmu na sygnał typu D ($\lambda = 0,8$):
o częstotliwości 50 Hz (uruchomienie algorytmu) (a),
o częstotliwości 50 Hz z dodatkowo nałożoną składową stałą o amplitudzie 0,5 j.w. (b)

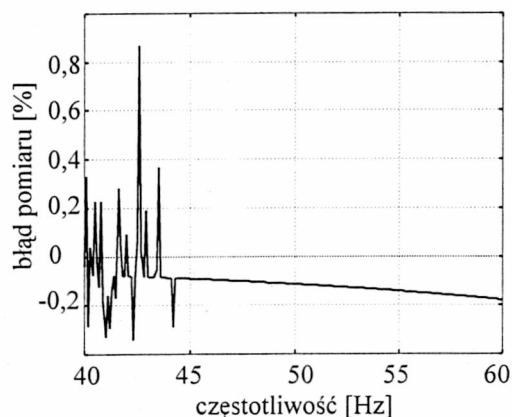
Dla sygnałów typu A, B, C, D, E, F, przy częstotliwościach z zakresu od 40 do 60 Hz błąd pomiaru jest poniżej $\pm 0,005\%$. Dla sygnału typu D z nałożoną dodatkowo składową stałą o wartości 0,5 j.w. błąd pomiaru jest również niewielki - nie przekracza wartości 0,06% (rys. 5.26a), podobnie jak w przypadku występowania podharmonicznej 0,9 w sygnale (sygnał typu DP2) (rys. 5.26b). Nieco większe błędy, ale i tak nie przekraczające wartości 1% występują w przypadku połączonych zakłóceń, tzn. podharmoniczna 0,5 (sygnał DP1) oraz składowa stała o wartości 0,5 j.w. (rys. 5.26c).



a)



b)



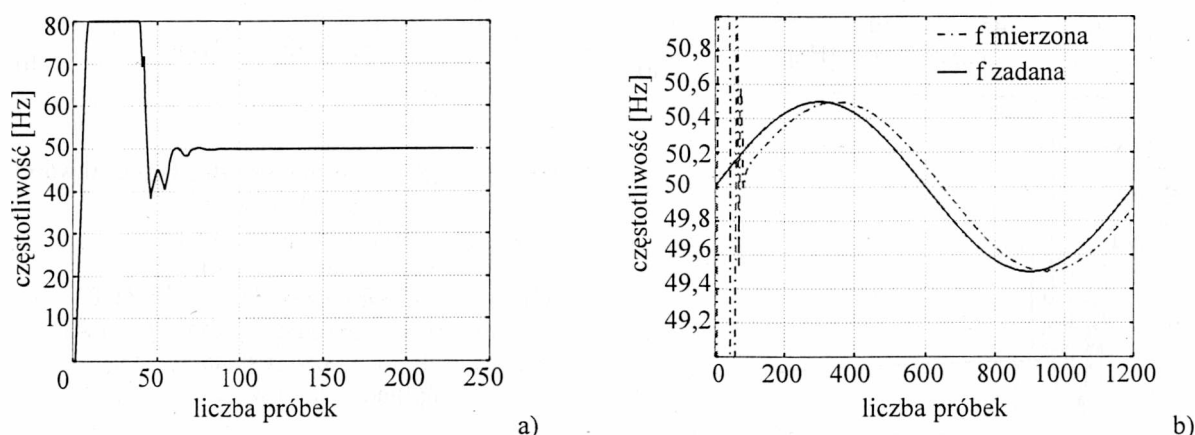
c)

Rys. 5.26. Zależność błędu pomiaru od częstotliwości dla sygnału typu D:
z dodatkowo nałożoną składową stałą o amplitudzie 0.5 j.w. (a),
z występującą podharmoniczną 0,9 (sygnał DP2)(b),
z występującą podharmoniczną 0,5 (sygnał DP1) oraz z dodatkowo nałożoną składową stałą o amplitudzie 0,5 j.w. (c)

Przy częstotliwości zmieniającej się ciągle w czasie np. zgodnie z przebiegiem funkcji sinus, opóźnienie wynosi ok. 10 próbek - pomiar jest identyczny jak na rys. 5.22. Podobnie dla sygnałów zamodelowanych w programie ATP/EMTP, pomiar częstotliwości przedstawia się jak przed modyfikacją algorytmu (rys. 5.24).

5.4. Pomiar częstotliwości w układzie trójfazowym

W systemie trójfazowym, dużo bardziej wiarygodne jest wykorzystywanie składowych symetrycznych, ponieważ stanowią one swoistą „kombinację” napięć lub prądów wszystkich trzech faz. W tym celu wykorzystuje się zazwyczaj składową zgodną określoną zależnością (4.2). Wymaga to zmiany N (liczba próbek przypadająca na okres podstawowej harmonicznej) z wartości 20 na np. 24 (wartość podzielna przez 3). Odpowiada to częstotliwości próbkowania $f_p = 1,2$ kHz. Sprawdzono algorytm I-rzędu z trzema filtrami: Blackmana, typu „kosinus” i uśredniającym. Długości wszystkich filtrów ustalono na $N_f = N = 24$. Wynik pomiaru częstotliwości sygnału typu D3, w takim układzie widoczny jest na rys. 5.27. Porównując z rys. 5.13 (pomiar z wykorzystaniem tylko jednej fazy) widoczny jest wzrost opóźnienia z wartości 62 ms (62 próbki przy $f_p = 1$ kHz) do ok. 75 ms (90 próbek przy $f_p = 1,2$ kHz), w przypadku czasu ustalenia się pomiaru po uruchomieniu algorytmu (rys. 5.27a) oraz z wartości 32 ms (32 próbki przy $f_p = 1$ kHz) do ok. 47 ms (56 próbek przy $f_p = 1,2$ kHz), w przypadku częstotliwości zmieniającej się zgodnie z przebiegiem funkcji sinus (rys. 5.27b). Wzrost opóźnienia wynika wprost ze stosowania wzoru (4.2), gdzie jak widać konieczne jest sięganie do „historii” sygnałów x_b i x_c .



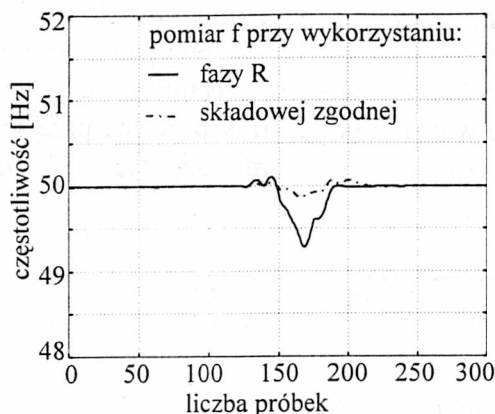
Rys. 5.27. Odpowiedź algorytmu I-go rzędu ($f_p = 1,2$ kHz), przy zastosowaniu trzech filtrów, na sygnał typu D3 o częstotliwości: 50 Hz (uruchomienie algorytmu) (a), zmiennej zgodnie z przebiegiem funkcji sinus (b)

Aby uwolnić się od dodatkowego opóźnienia możliwe jest skorzystanie z modelu sygnałowego opartego na tzw. wektorze przestrzennym (wzory (4.4), (4.5), (4.6) w rozdziale 4.1), a dokładniej na jego składowej rzeczywistej. Wtedy otrzymamy sygnał wiążący napięcia (lub prądy) wszystkich trzech faz zgodnie ze wzorem:

$$u_a(k) = \frac{1}{\sqrt{6}} (2x_a(k) - x_b(k) - x_c(k)). \quad (5.47)$$

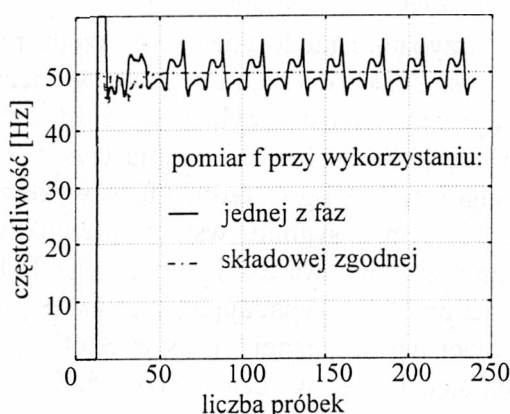
Sygnał ten wolny jest od dodatkowych opóźnień. W przeciwieństwie do wykorzystania składowej zgodnej, w tym przypadku nie trzeba filtrować (ortogonalizować) wielkości fazowych. Odpowiedź algorytmu I-go rzędu, przy zastosowaniu trzech filtrów: Blackmana, typu „kosinus” i uśredniającego, na sygnał typu D3 o częstotliwości 50 Hz (uruchomienie algorytmu) oraz o częstotliwości zmiennej zgodnie z przebiegiem funkcji sinus przedstawia się dla $N = 20$ analogicznie jak na rys. 5.13 (pomiar z wykorzystaniem tylko jednej fazy).

Wykorzystywanie sygnałów z trzech faz daje dobre rezultaty szczególnie w sytuacji wystąpienia zwarcia jedno- lub dwufazowego, takiego jak np. w sygnale typu ATP1. Ponieważ w praktyce niewiadomym jest, która (lub które) z faz w takim przypadku będą niezakłócone, zatem wygodne jest korzystanie z sygnału będącego „kombinacją” wszystkich trzech faz, czyli



Rys. 5.28. Porównanie pomiaru częstotliwości (algorytm I-go rzędu z trzema filtrami, zwarcie dwufazowe w 0,1 sek. (120 próbek przy $f_p = 1,2$ kHz)) sygnału typu ATP1 przy wykorzystaniu napięcia jednej z faz oraz składowej zgodnej

w przypadku algorytmu VI rzędu (bez filtrów) po modyfikacji (funkcja kosinus rozłożona w szereg Taylora) odpowiedź algorytmu na pomiar częstotliwości typu F3 wyraźnie poprawia się przy zastosowaniu składowej zgodnej w odróżnieniu od korzystania z sygnału tylko jednej z faz. Stosowanie składowej rzeczywistej wektora przestrzennego w tym przypadku nie daje żadnych korzyści.



Rys. 5.29. Porównanie pomiaru częstotliwości (algorytm VI-go rzędu, $f_p = 1,2$ kHz) sygnału typu F3 przy wykorzystaniu napięcia jednej z faz oraz składowej zgodnej

np. składowej zgodnej.

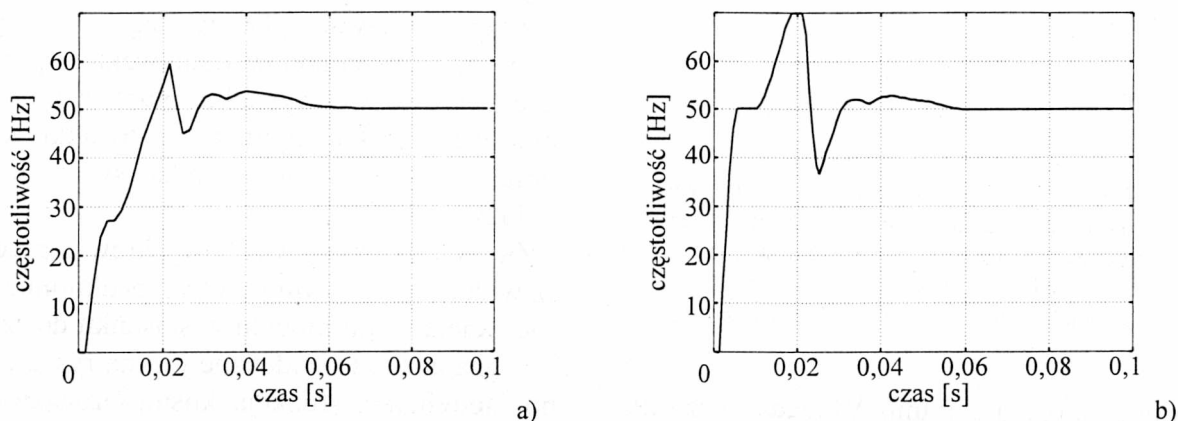
Rys. 5.28 przedstawia porównanie pomiaru częstotliwości sygnału typu ATP1 przy wykorzystaniu „zakłóconej” fazy R oraz składowej zgodnej. Widoczny jest zdecydowanie mniejszy poziom zakłóceń oraz krótszy czas ustalenia pomiaru (o ok. 30 próbek przy $f_p = 1,2$ kHz) po wystąpieniu zwarcia w przypadku użycia składowej zgodnej. Wykorzystanie części rzeczywistej wektora przestrzennego, w tym wypadku, praktycznie nie poprawia wyniku pomiaru w stosunku do pomiaru wykorzystującego tylko sygnał jednej fazy.

Zalety wykorzystywania sygnałów z trzech faz widoczne są również w przypadku niedoszacowania rzędu modelu w stosunku do rzędu sygnału. Jak to widoczne jest na rys. 5.29,

Korzystanie ze składowej zgodnej przy pomiarach częstotliwości, w sposób opisany powyżej możliwe jest tylko w stosunkowo wąskim zakresie zmian częstotliwości. Doświadczalnie sprawdzono, że wyraźna poprawa działania algorytmu następuje w zakresie od 45 do 55 Hz. Spowodowane jest to faktem, że np. dla $N = 24$ i częstotliwości sygnału równej 50 Hz, przesunięcie sygnału dyskretnego o $N/3$ próbek, odpowiada dokładnie przesunięciu sygnału o kąt 120° (czyli zgodnie z definicją składowej zgodnej), natomiast dla innych częstotliwości sygnału kąt ten różni się od 120° , tym więcej, im występuje większa różnica w stosunku do 50 Hz.

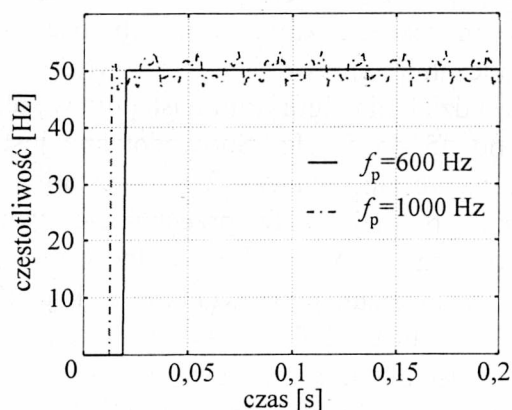
5.5. Wpływ częstotliwości próbkowania na wynik pomiaru

Przeprowadzono analizę wpływu częstotliwości próbkowania na dokładność i szybkość pomiaru. Wyniki przedstawione są na rys. 5.30, rys. 5.31 i rys. 5.32. W przypadku uruchomienia algorytmu I-go rzędu z trzema filtrami (rys. 5.30), im większa częstotliwość próbkowania, tym dłuższy okres niestabilności oraz większe wahania pomiaru w procesie przejściowym. Dla $f_p = 0,6$ kHz (rys. 5.30a), pomiar stabilizuje się o 16 ms szybciej niż przy $f_p = 1,2$ kHz (rys. 5.30b).



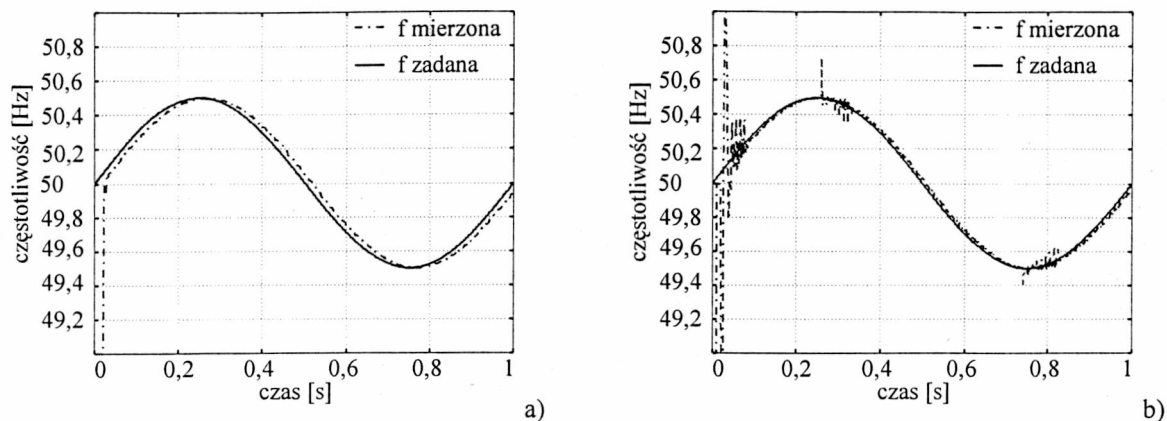
Rys. 5.30. Porównanie pomiaru częstotliwości 50 Hz (uruchomienie algorytmu I-go rzędu z trzema filtrami) dla różnych częstotliwości próbkowania: $f_p = 0,6$ kHz (a), $f_p = 1,2$ kHz (b)

Algorytm dla różnych sygnałów, przy różnych częstotliwościach próbkowania, w jednaki sposób reaguje na zmiany częstotliwości. Ponieważ występują w nim trzy pełnookresowe filtry, zatem im mniejsza wartość f_p , tym krótszy czas reakcji na zmiany.



Rys. 5.31. Porównanie pomiaru częstotliwości 50 Hz sygnału typu F (uruchomienie algorytmu VI-go rzędu) dla różnych częstotliwości próbkowania

W przypadku niedoszacowania rzędu modelu w stosunku do rzędu sygnału widoczny jest wyraźny wzrost oscylacji wraz ze wzrostem częstotliwości próbkowania (rys. 5.31). Dla algorytmu VI-go rzędu, który wykorzystuje 12 próbek sygnału wstecz, niemożliwe jest zmniejszenie wartości f_p poniżej 600 Hz ($N = 12$ próbek przypadających na okres podstawowej harmonicznej). Przy częstotliwości zmieniającej się w czasie (rys. 5.32), im większa częstotliwość próbkowania, tym bardziej zakłócony wynik pomiaru, ale tym krótszy czas reakcji algorytmu na zmiany częstotliwości sygnału mierzonego. Wynika to z faktu, że opóźnienie algorytmu mierzone liczbą próbek jest niezależne od częstotliwości próbkowania, ale ponieważ dla większych wartości f_p , czas między kolejnymi próbkami maleje, zatem maleje też sumaryczne opóźnienie.



Rys. 5.32. Porównanie pomiaru częstotliwości zmiennej w czasie zgodnie z przebiegiem funkcji sinus (algorytm VI-go rzędu - sygnał typu D) dla różnych częstotliwości próbkowania: $f_p = 0,6$ kHz (a), $f_p = 1,2$ kHz (b)

Czym można wytłumaczyć zatem pogorszenie wyniku pomiarów wraz ze wzrostem częstotliwości próbkowania? W przypadku algorytmów pomiaru częstotliwości idea pomiaru sprowadza się w ogólności do wyciągania współczynnika stojącego przy czasie ($\cos(\omega t + \varphi)$), a więc de facto jest związane z różniczkowaniem po czasie, choćby był to algorytm z różniczkowaniem niejawnym. Błędy operacji różniczkowania dyskretnego są natomiast tym mniejsze im czas różniczkowania jest większy, czyli częstotliwość próbkowania mniejsza. Oczywiście istnieje dolna granica tejże częstotliwości. Wynika ona ze struktury samego algorytmu (niezbędna liczba próbek „historii” sygnału) oraz faktu, że przy zbyt małej częstotliwości próbkowania niektóre ważne informacje, jak np. o wyższych harmonicznym, mogą być niewidoczne.

5.5. Śledzenie zmian częstotliwości w czasie

W systemie elektroenergetycznym często zachodzi potrzeba nie tyle znajomości dokładnej wartości częstotliwości lecz tylko informacja o jej nagłych zmianach. Dzieje się tak szczególnie w przypadku, gdy do systemu elektroenergetycznego dołączone są źródła energii o małej mocy (źródła generacji rozproszonej), np. elektrownie wiatrowe, małe elektrownie wodne itp. Jeżeli z jakiegokolwiek przyczyny nastąpi ich odłączenie od systemu, konieczne jest ich natychmiastowe wyłączenie. Takiej sytuacji odpowiada np. fragment systemu elektroenergetycznego przedstawiony na rys. A.6 (sygnał typu ATP3). Śledzenie zmian częstotliwości w czasie (tzw. współczynnik ROCOF - ang.: **R**ate **O**f **C**hange **O**f **F**requency) pozwala zidentyfikować moment wyłączenia [2], [12], [21], [24], [34].

Praktyczna realizacja śledzenia zmian częstotliwości w czasie, dokonywana jest na drodze operacji różniczkowania. Ponieważ operacja ta jest bardzo czuła na wszelkie, nawet niewielkie zmiany sygnału który jest jej poddany, zatem jedynie algorytm rekursywny I-go rzędu z trzema filtrami, Blackmana i typu „kosinus” na sygnale mierzonym oraz uśredniającym wynik pomiaru, spełnia ten wymóg.

Dyskretna realizacja operacji różniczkowania w najprostszej wersji przebiega według wzoru:

$$\text{ROCOF}_k = \frac{f_k - f_{k-1}}{T_p}, \quad (5.48)$$

gdzie f_k i f_{k-1} oznaczają wynik pomiaru częstotliwości odpowiednio w chwili bieżącej i poprzedniej, a T_p - okres próbkowania sygnału. Ponieważ najczęściej współczynnik ROCOF

podaje zmianę częstotliwości w odniesieniu na okres sygnału podstawowej harmonicznej zatem praktycznie przyjęto 9-cio punktowy filtr o współczynnikach:

$$w_r = [-1118 \ 1846 \ 2509 \ 1638 \ 0 \ -1638 \ -2509 \ -1846 \ 1118] / (15444T_p). \quad (5.49)$$

Tak powstały filtr wydłuża czas różniczkowania z dwóch próbek (wzór (548)), do dziewięciu, dodatkowo nadając każdej próbce odpowiedni współczynnik wagowy. Aby uzyskać wartość przyrostu częstotliwości na okres sygnału wynik filtracji mnożony jest przez $N = 20$. Ostateczny wzór na operację różniczkowania przedstawia się następująco:

$$\text{ROCOF}_k = N \sum_{i=0}^8 f(k-i) w_r(i+1), \quad (5.50)$$

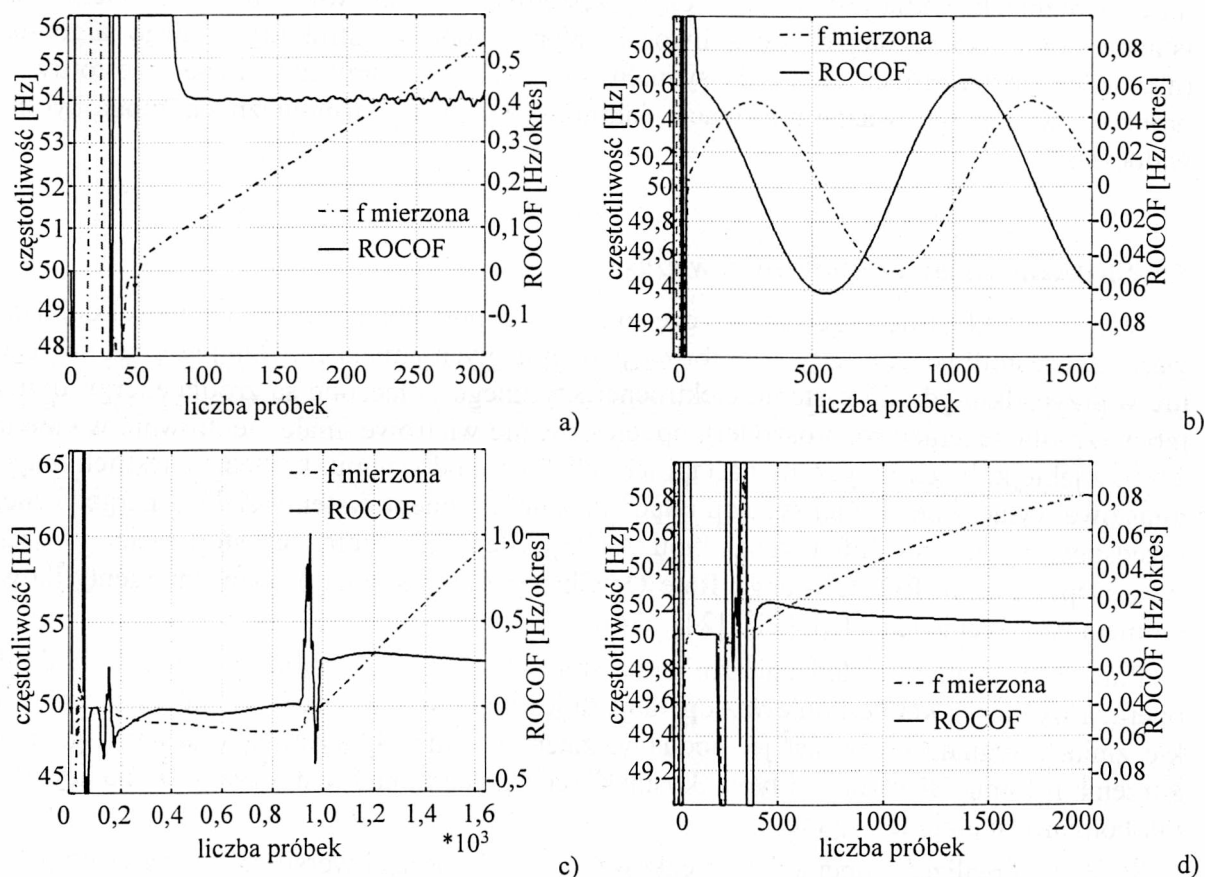
gdzie:

$N = 20$ - liczba punktów przypadająca na okres podstawowej harmonicznej,

$f(k-i)$ - $i = 0, 1, \dots, 8$, - kolejne (wstecz) wyniki pomiaru częstotliwości,

$w_r(i+1)$, $i = 0, 1, \dots, 8$ - kolejne współczynniki filtru.

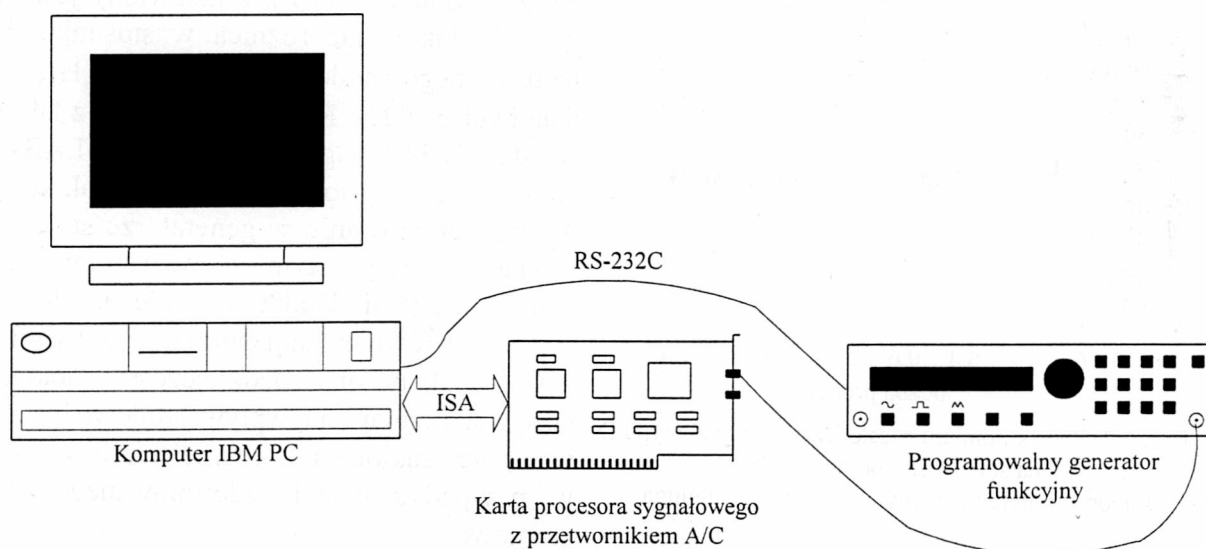
Zaletą takiego rozwiązania jest mniejsza czułość na przypadkowe błędy pomiarowe. Dodatkowo wynik obliczeń współczynnika ROCOF poddano działaniu pełnookresowego filtru uśredniającego. Wyniki symulacji sygnału typu D o częstotliwości zmiennej w czasie i ATP2 oraz ATP3 widoczne są na rys. 5.33.



Rys. 5.33. Wynik pomiaru zmian częstotliwości (współczynnik ROCOF) (algorytm rekursywny I rzędu, filtry Blackmana, typu „kosinus” i uśredniający):
 sygnału typu D o częstotliwości zmiennej liniowo (a),
 sygnału typu D o częstotliwości zmiennej zgodnie z przebiegiem funkcji sinus (b),
 sygnału typu ATP2 (c), sygnału typu ATP3 (d)

6. PRAKTYCZNA WERYFIKACJA ALGORYTMÓW POMIARU CZĘSTOTLIWOŚCI

W poszukiwaniu doskonalszych algorytmów pomiarowych stosowany jest coraz bardziej wyrafinowany aparat matematyczny. Niestety, z praktycznego punktu widzenia, biorąc pod uwagę faktyczny stan rozwoju techniki mikroprocesorowej, na dzień dzisiejszy wiele teoretycznych algorytmów niemożliwych jest do realizacji w czasie rzeczywistym. Konieczne byłoby bowiem stosowanie bardzo drogich systemów wieloprocessorowych, co nie ma uzasadnienia z ekonomicznego punktu widzenia. Większość opisywanych w literaturze algorytmów weryfikowana jest przy użyciu programów symulacyjnych takich jak np. pakiet matematyczny MATLAB. Nie daje to niestety poglądu na zastosowanie ich w czasie rzeczywistym. W programach symulacyjnych sygnały prądu, czy też napięcia są wcześniej zdefiniowane i wszystkie obliczenia dokonywane są „off-line”. Zupełnie inaczej sytuacja przedstawia się w czasie rzeczywistym, gdzie kolejne próbki np. napięcia „dostarczane” są bez przerwy ze stałą częstotliwością próbkowania. Wymaga to innego spojrzenia na algorytm pomiarowy. Dodatkowo, assembler lub język C, najczęściej stosowane w układach rzeczywistych języki programowania, dają dużo mniejszą elastyczność programową niż język bardzo wysokiego poziomu jakim operuje MATLAB, gdzie dużo prostsze jest wykonanie wszelkiego typu zmian i poprawek.



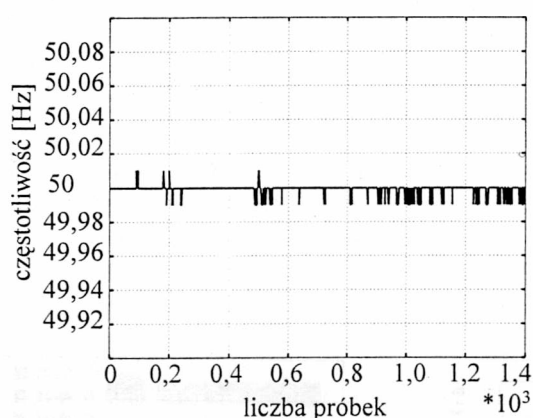
Rys. 6.1. Stanowisko do praktycznej weryfikacji algorytmów pomiarowych

Powyższe fakty zadecydowały o wykonaniu prostego stanowiska do praktycznej weryfikacji algorytmów pomiarowych [39]. Stanowisko (rys. 6.1) składa się z komputera osobistego klasy IBM PC, programowalnego generatora funkcyjnego firmy HAMEG 8131.2 [10] (patrz Dodatek B) oraz „serca” systemu czyli karty mikroprocesora z przetwornikiem pomiarowym A/C. Wybrano zmiennoprzecinkowy, 32-bitowy procesor sygnałowy (z zegarem 30 MHz) TMS320C30 firmy Texas Instruments [37] z uwagi na fakt, że jest on najczęściej stosowanym procesorem w rzeczywistych urządzeniach automatyki elektroenergetycznej. Na karcie procesora znajduje się 14-bitowy przetwornik A/C z dwoma filtrami wejściowymi: dolnoprzepustowym i pasmowym. Parametry filtrów są programowalne, ale tylko w wąskim zakresie, bowiem są powiązane z częstotliwością próbkowania.

Wśród narzędzi do oprogramowania mikroprocesora sygnałowego dostępny jest także kompilator języka C. Wszystko co dotyczy oprogramowania tzw. „hardware’u”, czyli programowanie przetwornika A/C, transmisji do i z komputera IBM PC, systemu przerwań procesora itp., programowane jest przy użyciu asemblera, natomiast algorytmy pomiarowe pisane są w języku C. Takie rozwiązanie jest optymalne, łączy bowiem maksymalnie zwarte oprogramowanie i szybkie działanie części sprzętowej procesora, z jednoczesną prostotą tworzenia różnych nowych algorytmów pomiarowych. Jest to szczególnie ważne w przypadku konieczności szybkiego wprowadzenia różnych algorytmów pomiarowych lub ich modyfikacji, zmienia się wtedy tylko część programu napisana w języku C.

Przykładowa struktura programu pokazana została w Dodatku C. Praktycznej weryfikacji poddano algorytm nierekursywny dla modelu sygnału I rzędu z zastosowaniem okna filtracyjnego Hamminga (patrz Dodatek C.1). Częstotliwość próbkowania sygnału została ustalona na wartość $f_p = 1$ kHz, co jest standardem we współczesnych algorytmach pomiarowych. Daje to czas jednej milisekundy na wszelkie operacje algebraiczne. W przykładowym programie przedstawionym w Dodatku C.1 czas trwania obliczeń nie przekraczał 0,2 ms.

Aby była możliwość obserwacji na bieżąco wyników pomiarów, w języku C++ został napisany prosty program wyświetlający w sposób ciągły na ekranie monitora komputera IBM PC wartość mierzonego parametru zarówno w postaci cyfrowej, jak i graficznej.

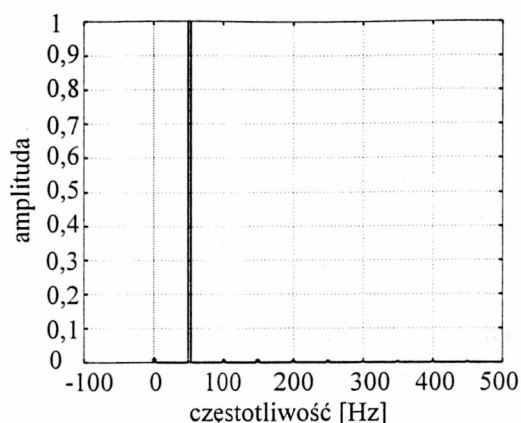


Rys. 6.2. Wynik pomiaru częstotliwości sygnału typu D na stanowisku pomiarowym (algorytm nierekursywny I rzędu, filtr Hanninga)

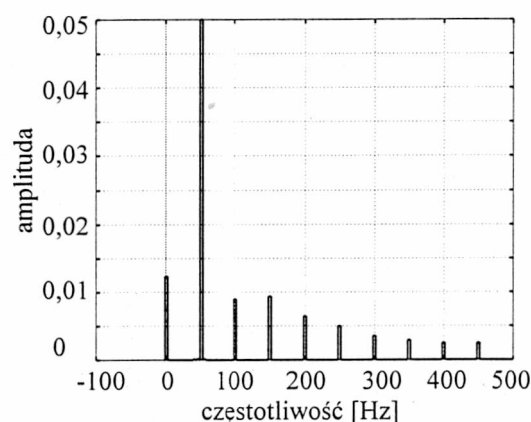
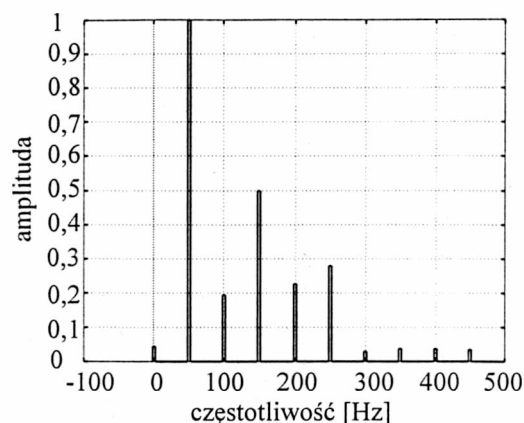
Generator zaprogramowano sygnałem typu D. Wynik pomiaru przedstawiony jest na rys. 6.2. Jak widać różnica w stosunku do teoretycznego modelu wynosi $\pm 0,01$ Hz, co daje błąd $\pm 0,02\%$. Różnica ta wynika z faktu, że do analizy algorytmu w MATLAB-ie używany jest czysto teoretyczny sygnał, który po zaprogramowaniu w generatorze staje się sygnałem rzeczywistym, ze wszystkimi tego konsekwencjami. Dodatkowo błędami obciążony jest również sam pomiar. Przetwornik A/C ma skończoną rozdzielczość i dokładność, na pomiar ma wpływ środowisko zewnętrzne (zakłócenia), co nie miało miejsca w przypadku sygnału zdefiniowanego programowo.

Weźmy dla przykładu analizę widmową „czystego” (w granicach dokładności deklarowanych przez producenta) sygnału sinusoidalnego z generatora, po próbkowaniu 14-bitowym przetwornikiem A/C i zarejestrowaniu w pamięci układu procesora sygnałowego. Jak widać na rys. 6.3, charakterystyka częstotliwościowa odbiega od charakterystyki idealnej (tzn. tylko jednego „prążka” o wartości 1 dla $f = 50$ Hz).

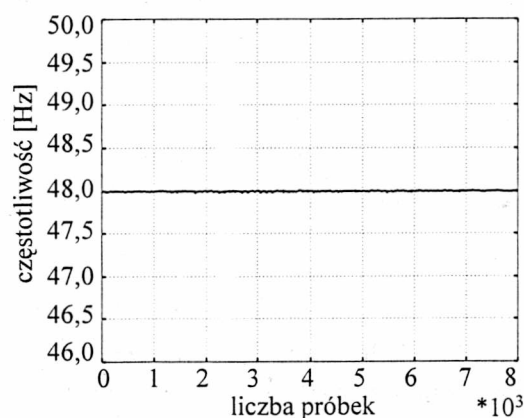
Podobnie po zaprogramowaniu generatora sygnałem typu D i próbkowaniu 14-bitowym przetwornikiem A/C, na charakterystyce widmowej tak zarejestrowanego sygnału (rys. 6.4) widoczne są „prążki” nie tylko dla częstotliwości 50, 100, 150, 200, 250 Hz ale także dla innych (łącznie ze składową stałą). Świadczy to o fakcie wprowadzania błędów już przez sam układ generator - przetwornik.



Rys. 6.3. Charakterystyka częstotliwościowa sygnału typu A po pomiarze przez 14-bitowy przetwornik A/C



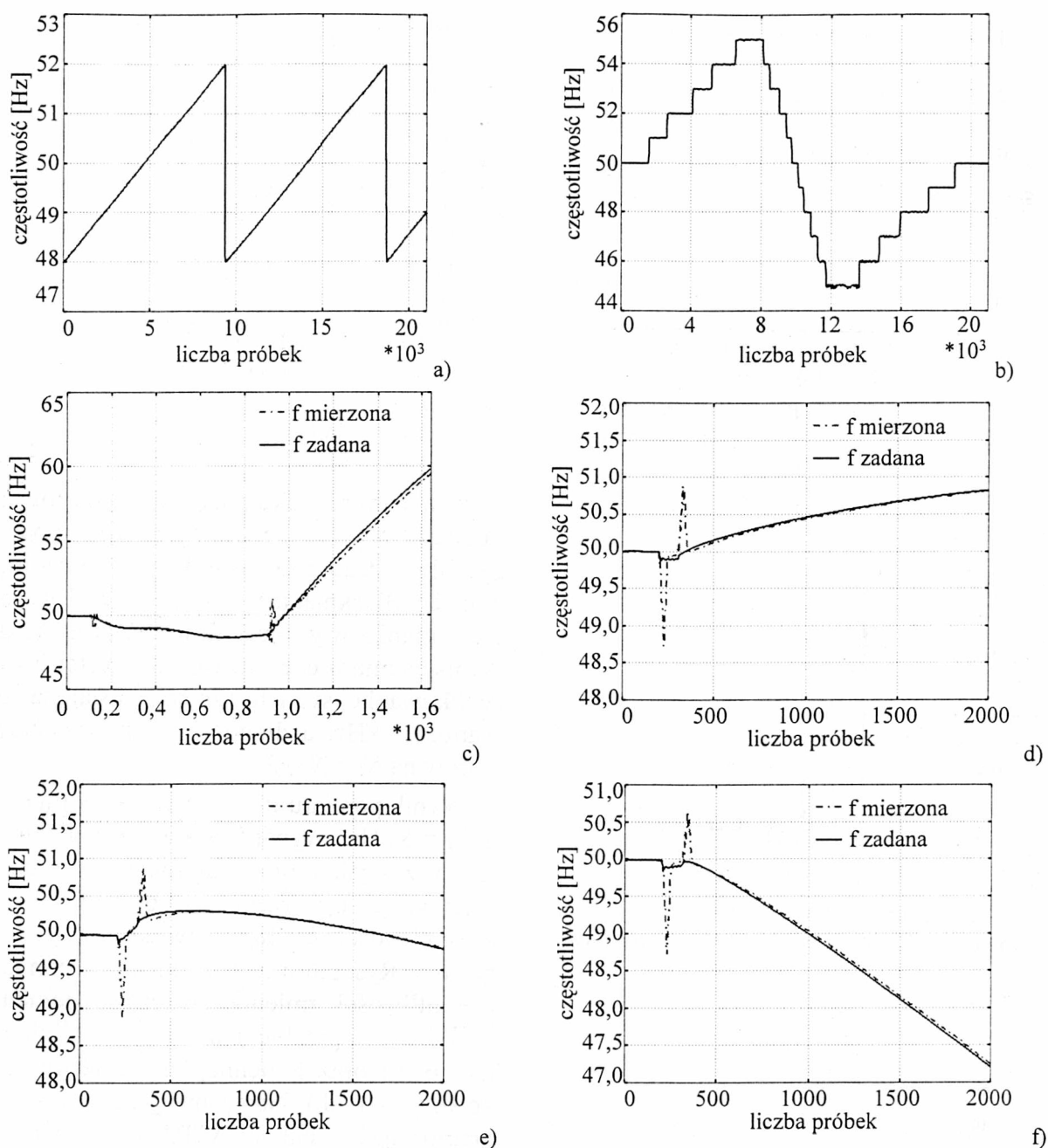
Rys. 6.4. Charakterystyka częstotliwościowa sygnału typu D po pomiarze przez 14-bitowy przetwornik A/C



Rys. 6.5. Wynik pomiaru częstotliwości sygnału typu D na stanowisku pomiarowym (algorytm rekursywny I rzędu, filtry Blackmana, typu „kosinus” i uśredniający)

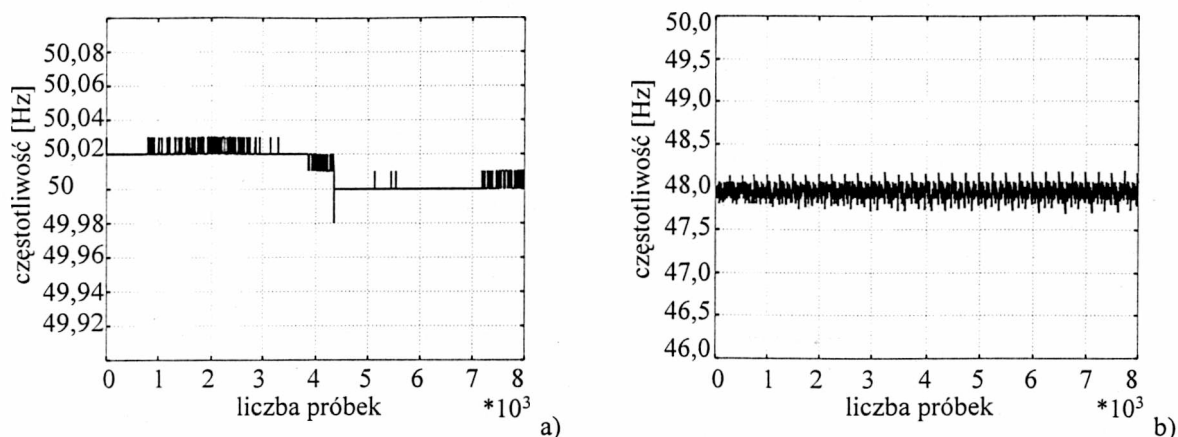
W kolejnym kroku praktycznej weryfikacji poddano algorytm rekursywny dla modelu sygnału I rzędu z zastosowaniem okien filtracyjnych Blackmana i typu „kosinus” na sygnał pomiarowy oraz filtru uśredniającego wynik pomiaru częstotliwości. Częstotliwość próbkowania sygnału została ustalona na wartość 1 kHz, a długości okien wszystkich filtrów na $N_f = N = 20$.

Wynik pomiaru dla częstotliwości mierzonej $f = 50$ Hz, sygnału typu D, jest niemalże identyczny jak w przypadku algorytmu nierekursywnego I-go rzędu (rys. 6.2), wynik dla częstotliwości $f = 48$ Hz, widoczny jest na rys. 6.5. Rys. 6.6 przedstawia wynik pomiaru częstotliwości zmiennej w czasie pomiaru: zgodnie z przebiegiem funkcji liniowej (rys. 6.6a) oraz zmiennej przedziałami skokowo (rys. 6.6b). Następnie generator zaprogramowano sygnałami ATP2 (wynik pomiaru na rys. 6.6c) i ATP3 (wynik pomiaru na rys. 6.6d, rys. 6.6e, rys. 6.6f), czyli najbardziej zbliżonymi do rzeczywistych sygnałów pochodzących z systemu elektroenergetycznego. Opóźnienie pomiaru w stosunku do zmian częstotliwości wynosi ok. 30 próbek.



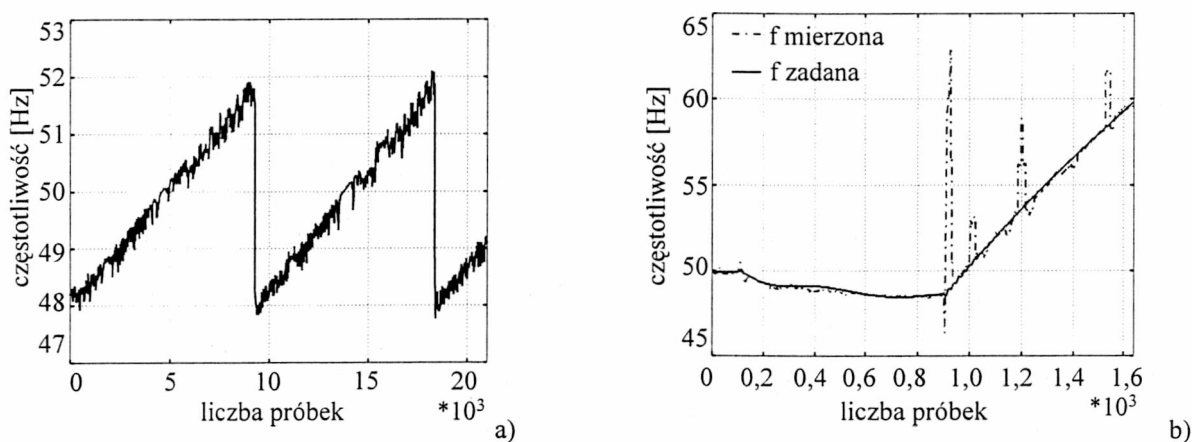
Rys. 6.6. Wynik pomiaru częstotliwości na stanowisku pomiarowym (algorytm rekursywny I rzędu, filtry Blackmana, typu „kosinus” i uśredniający): sygnału typu D o częstotliwości zmiennej liniowo (a) i zmiennej skokowo (b), sygnału typu ATP2 (c), ATP3 (d), ATP3a (e), ATP3b (f)

Kolejnym weryfikowanym algorytmem był algorytm rekursywny VI-go rzędu (patrz Dodatek C.2). Ponieważ sygnał mierzony nie jest poddany żadnej filtracji, zatem dla rzeczywistych sygnałów często będzie zachodziło niedoszacowanie rzędu modelu w stosunku do rzędu sygnału. Jak widoczne jest to na rys. 5.23, dobrym rozwiązaniem w takiej sytuacji jest dodanie pełnookresowego okna filtra uśredniającego wynik pomiaru. Miałby on także za zadanie niwelowanie tzw. szumów pomiarowych (skończona liczba bitów przetwornika A/C, zakłócenia pomiarowe itp.)



Rys. 6.7. Wynik pomiaru częstotliwości sygnału typu D na stanowisku pomiarowym (algorytm rekursywny VI rzędu, filtr uśredniający)

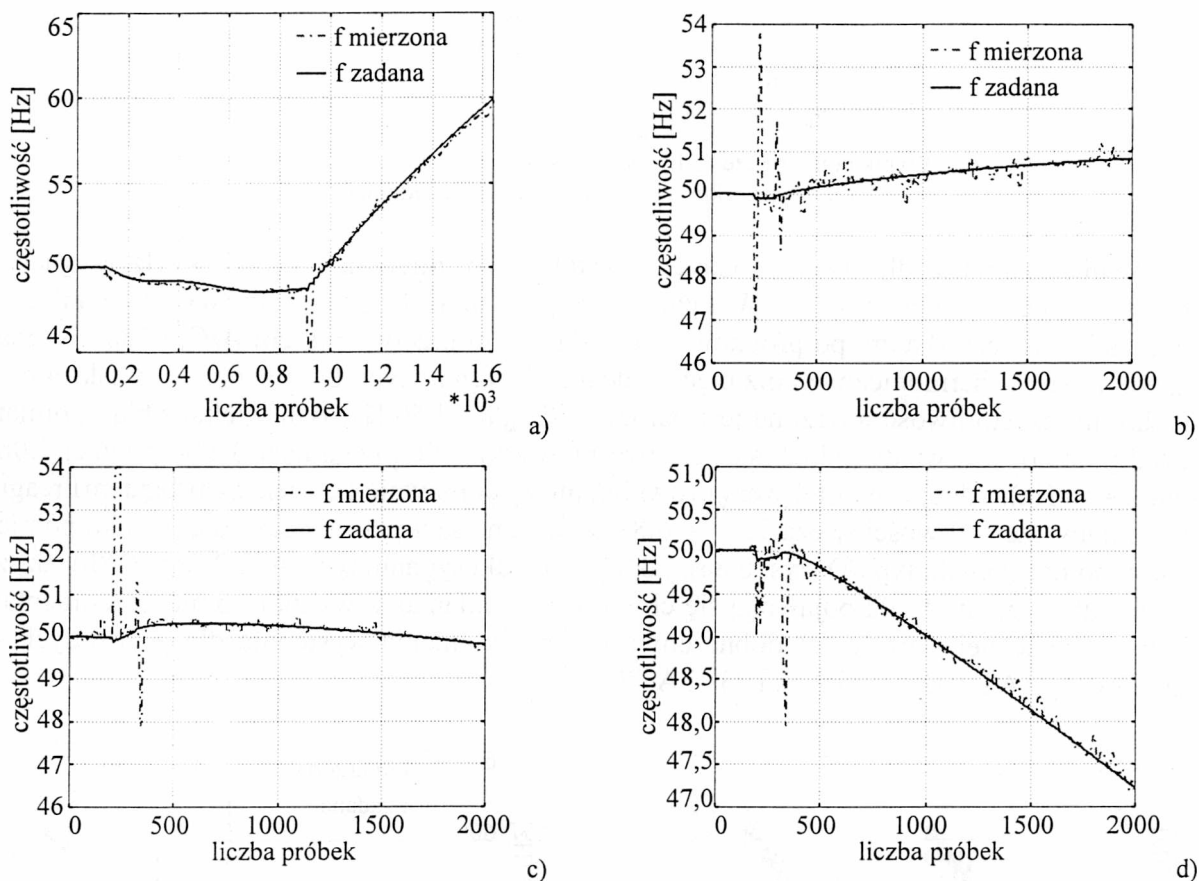
Wyniki pomiaru, dla dwóch różnych częstotliwości mierzonych 50 i 48 Hz (sygnał typu D), widoczne są na rys. 6.7. Wyraźnie gorszy rezultat dla $f = 48$ Hz, wynika z faktu, że w układzie rzeczywistym, po próbkowaniu 14-bitowym przetwornikiem A/C, widmo sygnału zawiera więcej harmoniczných niż pięć w idealnym sygnale typu D (rys. 6.4), a w takim przypadku im częstotliwość mierzona jest bardziej oddalona od 50 Hz, tym większy błąd pomiaru. Błąd pomiaru jest wtedy jednak stosunkowo niewielki i nie przekracza 0,5% (poniżej 0,06% dla $f = 50$ Hz). Algorytm w tej wersji również mniej poprawnie (z większym błędem) reaguje na zmiany częstotliwości w czasie (rys. 6.8). Widoczne są wyraźne oscylacje wyniku pomiaru zarówno dla sygnału typu D (rys. 6.8a), jak również dla sygnału typu ATP2 (rys. 6.8b). Szczególnie dla sygnału ATP2 pojawiają się chwilowe przekłamania wyniku pomiaru, momentami nawet o znacznej wartości. Podobne chwilowe przekłamania występują dla pozostałych sygnałów typu ATP, tzn. ATP3, ATP3a i ATP3b.



Rys. 6.8. Wynik pomiaru częstotliwości na stanowisku pomiarowym (algorytm rekursywny VI rzędu, pełnookresowy filtr uśredniający): sygnału typu D o częstotliwości zmiennej liniowo (a), sygnału typu ATP2 (b)

Ostatnim weryfikowanym w czasie rzeczywistym algorytmem był model rekursywny VI-go rzędu z pełnookresowym filtrem uśredniającym opisany w rozdziale 5.3.3. Funkcja kosinus występująca we wzorze (5.30) została zastąpiona szeregiem Taylora oraz ograniczono zakres spodziewanych zmian częstotliwości do przedziału 40...60 Hz. Wyniki pomiarów w czasie rzeczywistym sygnału typu D, zarówno częstotliwości stacjonarnej jak i zmiennej liniowo w czasie, przedstawiają się porównywalnie do poprzedniego algorytmu. Widoczna

różnica występuje dla sygnałów typu ATP (rys. 6.9). W porównaniu z rys. 6.8b, nie występują tu znaczne skoki - przekłamanie pomiaru. Spowodowane jest to łatwiejszą analizą rozwiązania równania (5.42) w stosunku do rozwiązania równania (5.30) oraz zawężeniem zakresu spodziewanych zmian częstotliwości, co pozwala precyzyjniej wyznaczyć wartość początkową rozwiązania równania (5.42). Zaletą tego algorytmu jest stosunkowo niewielkie opóźnienie pomiaru w stosunku do zmian częstotliwości, wynoszące tylko ok. 10 próbek (ze względu na brak filtrów na wejściu algorytmu).



Rys. 6.9. Wynik pomiaru częstotliwości na stanowisku pomiarowym (algorytm rekursywny VI rzędu (Taylor), filtr uśredniający wynik pomiaru): sygnału typu ATP2 (a), ATP3 (b), ATP3a (c), ATP3b (d)

Wykonano także próby załączania algorytmu w momencie gdy częstotliwość sygnału generatora wynosiła wartość znacznie różną od 50 Hz (jednakże z przedziału 40...60 Hz). Dzięki odpowiedniemu doborowi początkowego rozwiązania równania (5.42) (wzory (5.43) - (5.45)) algorytm poprawnie mierzył częstotliwość zadanych sygnałów.

Istotną sprawą w realizacji algorytmów w czasie rzeczywistym jest łączny czas trwania obliczeń arytmetycznych. Ma on bezpośredni wpływ na maksymalną częstotliwość próbkowania, która może być zastosowana. W prezentowanych powyżej algorytmach rekursywnych pomiaru częstotliwości czas ten nie przekraczał 500 μ s, co pozwala zwiększyć częstotliwość próbkowania do wartości 2 kHz. Należy jednak zauważyć, że ze względu na weryfikację różnych algorytmów, zostały one napisane w języku programowania C, optymalnym pod względem prostoty i szybkości zmian programowych, ale zdecydowanie nieoptymalnym pod względem czasu wykonywania. Przykładem tu może być fakt, że przy realizacji funkcji filtracji, rezygnacja z pętli „for” na rzecz wielokrotnego powtarzania podobnych instrukcji skróciła czas wykonania prawie 3-krotnie. Docelowo, po wybraniu najkorzystniejszego algorytmu,

zalecana jest jego realizacja w języku asemblera. W przypadku procesora sygnałowego, ukierunkowanego z definicji na cyfrowe przetwarzanie sygnałów, realizacja niektórych algorytmów na poziomie asemblera nie ustępuje prostocie poziomu języka C, a jest zdecydowanie szybsza. Taką możliwość daje np. równoległe (w czasie jednego cyklu maszynowego procesora) wykonanie dwóch instrukcji np. mnożenia i dodawania zmiennoprzecinkowego, co w połączeniu z instrukcją pętli powtarzającej stanowi kompletną procedurę filtracji. W praktyce daje to możliwość znacznego skrócenia czasu działania algorytmu, a co za tym idzie realizacji algorytmu bardziej złożonego. Nie zawsze bowiem zwiększenie częstotliwości próbkowania daje pożądane efekty (patrz rozdział 5.5).

7. PODSUMOWANIE

Częstotliwość jest bardzo ważnym parametrem charakteryzującym stan systemu elektroenergetycznego. W pracy dokonano szerokiego przeglądu znanych metod pomiaru częstotliwości w układach elektroenergetycznych, poddając je analizie dokonanej na drodze symulacji przy użyciu pakietu matematycznego MATLAB. Zaproponowano również nowy algorytm pomiaru częstotliwości w oparciu o aproksymację sygnału mierzonego wielomianem p -tego rzędu, wywodzącą się z modelu sygnałowego Prony'ego. W sposób gruntowny przebadano ten algorytm, zarówno na drodze symulacji, jak i na specjalnie do tego celu skonstruowanym stanowisku laboratoryjno-badawczym, w warunkach zbliżonych do rzeczywistych.

Charakteryzuje się on stosunkowo dobrą dokładnością, przy jednocześnie dużej odporności na zakłócenia. Jego elastyczność pozwala, po niewielkich modyfikacjach, na różnorodne zastosowania w zależności od potrzeb oferując bardzo szybki pomiar z mniejszą dokładnością, w węższym zakresie zmian częstotliwości (od 40 do 60 Hz) wykorzystywany w normalnej (bez większych zakłóceń) pracy systemu (algorytm VI-rzędu bez filtrów) lub wolniejszy pomiar z większą dokładnością, w szerokim zakresie zmian częstotliwości, wykorzystywany np. podczas rozruchu maszyn synchronicznych lub przy sygnałach bardzo silnie zakłóconych (algorytm I-rzędu z filtracją).

W przedstawionej metodzie pomiaru częstotliwości w wersji nierekursywnej przyjęcie modelu sygnału rzędu wyższego niż drugi prowadzi do znacznego skomplikowania obliczeń. Wady tej pozbawiony jest algorytm rekursywny. Prostsza postać tego algorytmu umożliwia jego stosowanie w odniesieniu do modelu sygnału nawet wysokiego rzędu. W pracy zaproponowano model VI rzędu. Dodatkową jego zaletą jest fakt odporności na składową stałą zawartą w sygnale mierzonym. W przypadku gdy sygnał zawiera zakłócenia w postaci większej liczby składowych niż założono w modelu, błędy są mniejsze niż przy zastosowaniu algorytmu nierekursywnego. Zmieniając wartości współczynnika zapominania λ , można również kontrolować szybkość reakcji algorytmu na zmiany częstotliwości zgodnie z zasadą: krótki czas reakcji - mała dokładność pomiaru, długi czas reakcji - duża dokładność pomiaru.

Algorytmy te mają jeszcze jedną interesującą cechę. Ważne jest, aby w sygnale mierzonym liczba składowych była zgodna ze stopniem algorytmu. Nieistotne jest natomiast które są to składowe, mogą to być również międzyharmoniczne lub podharmoniczne. Ma to znaczenie w sytuacji, gdy wpływ niektórych składowych jest znaczny, a innych śladowy.

Nie zawsze możliwe jest dopasowanie rzędu modelu do liczby składowych występujących w mierzonym sygnale. W przypadku sygnałów o charakterze zakłóceń trudnym do określenia, dobrym i prostym rozwiązaniem jest przyjęcie najprostszego modelu (I-rzędu) algorytmu rekursywnego oraz poddanie sygnału mierzonego wstępnej filtracji. Takie rozwiązanie daje bardzo dobre rezultaty dla szerokiej gamy sygnałów, nawet bardzo silnie zakłóconych. Jedyną jego wadą jest, spowodowane działaniem filtrów, zwiększenie czasu reakcji algorytmu na zmiany częstotliwości.

Proponowany algorytm może być z powodzeniem stosowany do pomiaru częstotliwości w systemie elektroenergetycznym. Jest on kolejnym krokiem na drodze coraz to lepszego działania automatyki elektroenergetycznej.

Zaprojektowane i wykonane stanowisko do pomiaru różnych wielkości elektrycznych w systemie elektroenergetycznym, pozwala na weryfikację teoretycznych algorytmów pomiarowych w czasie rzeczywistym, określając ich przydatność w praktycznym zastosowaniu. Dodatkowo, jako stanowisko dydaktyczne, daje możliwość zapoznania się z różnymi algorytmami pomiarowymi i problemami występującymi w praktyce, a nie tylko w wersji modelowej.

7.1. Wkład własny autora

Elementy niniejszej rozprawy, które zdaniem autora, można uznać za wkład własny zostały zawarte w rozdziałach 5 i 6.

W podrozdziale 5.2.2 autor zaproponował adaptacyjną wersję znanego [15], [25] nierekursywnego algorytmu pomiaru częstotliwości w oparciu o model sygnałowy Prony'ego. Model sygnału, a ściślej mówiąc jego rząd, jest automatycznie dopasowywany do liczby składowych występujących w mierzonym sygnale. Z uwagi na duży stopień skomplikowania obliczeń (rachunek macierzowy - przede wszystkim odwracanie macierzy) dla modeli wyższych rzędów autor zaprezentował przykładowo tylko wersję dla modelu II-go i I-go rzędu.

W podrozdziale 5.3 znajduje się dokładny opis rekursywnego algorytmu MNK w oparciu o model sygnałowy Prony'ego. Algorytm ten nie ma zasadniczo swojego odpowiednika w dostępnej literaturze technicznej. W podrozdziale 5.3.1 autor zaprezentował analizę tego algorytmu dla modelu I-go rzędu, wskazując na jego zalety, takie jak: szybki czas reakcji algorytmu na zmiany częstotliwości oraz możliwość wpływania na stosunek jakości odpowiedzi do czasu jej ustalania poprzez zmianę współczynnika zapominania λ , jak również i wady, głównie brak odporności na zakłócenia w postaci wyższych składowych znajdujących się w badanym sygnale. Aby wyeliminować tę wadę autor zaproponował wstępną filtrację sygnału. W efekcie tego otrzymano bardzo dobry i dokładny algorytm, ale ze stosunkowo długim czasem reakcji na zmiany częstotliwości, wynikającym z użycia filtrów. Niepodważalną zaletą algorytmu I-go rzędu jest jego bardzo duża prostota numeryczna. Nie występują w nim żadne równania macierzowe, wszystkie równania (za wyjątkiem jednego, gdzie występuje funkcja kosinus) są prostymi równaniami liniowymi.

Z uwagi na dużą numeryczną prostotę algorytmu rekursywnego (brak operacji odwracania macierzy) w porównaniu z nierekursywnym, w podrozdziale 5.3 autor przedstawił algorytm dla modeli wyższego rzędu. Ponieważ w sieciach wysokich napięć nie występują w zasadzie harmoniczne o wysokich numerach, został przyjęty algorytm VI rzędu. Autor w nowatorski sposób rozwiązał problem przeszacowania rzędu modelu w stosunku do rzędu sygnału. Tak opracowany algorytm ma następujące zalety:

- brak jakichkolwiek filtrów na wejściu algorytmu,
- stosunkowo krótki czas odpowiedzi na zmiany częstotliwości (brak filtrów),
- odporność na składową stałą występującą w mierzonym sygnale,
- odporność na wyższe składowe, podharmoniczne lub międzyharmoniczne występujące w mierzonym sygnale (ich sumaryczna liczba, łącznie z ewentualnie występującą składową stałą, ograniczona jest do sześciu)
- jeżeli model sygnału jest niedoszacowany w stosunku do rzędu sygnału, to w pierwszej kolejności eliminowane są składowe o wyższej amplitudzie,
- możliwość wpływania na stosunek jakości odpowiedzi do czasu jej ustalania poprzez zmianę współczynnika zapominania λ (szczególnie ważne dla przypadku opisanego powyżej),
- szeroki zakres zmian mierzonej częstotliwości.

Wadą algorytmu jest mała dokładność pomiaru w przypadku występowania w mierzonym sygnale silnych zakłóceń w postaci dużej liczby wyższych składowych, szczególnie o wysokiej amplitudzie (brak filtracji). W takiej sytuacji wynik pomiaru częstotliwości ma charakter oscylacyjny. Rozkład wyników pomiaru jest taki, że zastosowanie pełnookresowego filtra uśredniającego niweluje te oscylacje.

Problemem jest również, co prawda zdarzający się sporadycznie, pomiar innej niż podstawowa składowej mierzonego sygnału. Występuje to szczególnie, jeżeli w badanym sygnale podharmoniczne lub międzyharmoniczne są bardzo bliskie składowej podstawowej. Utrud-

nione jest wtedy poszukiwanie właściwego (odpowiadającego podstawowej harmonicznej) pierwiastka wielomianu 6-go rzędu (5.30).

Opis rozwiązania tego problemu zamieszczony jest w podrozdziale 5.3.3. Autor zaproponował, aby funkcję kosinus występującą w algorytmie w równaniu (5.32) zastąpić szeregiem Taylora. Aby nie stracić informacji o wyższych harmonicznych zostało wybrane sześć pierwszych wyrazów tegoż szeregu. Takie rozwiązanie co prawda zwiększa stopień równania z szóstego na dziesiąty (5.41), ale ma za to pewne zalety. W przypadku braku międzyharmonicznych, podharmonicznych i składowej stałej, istnieje tylko jeden pierwiastek będący liczbą rzeczywistą odpowiadający podstawowej harmonicznej. Jeżeli powyższe warunki nie są spełnione, dużo prostsza jest analiza rozwiązania równania (5.41) pod kątem niewłaściwego wyniku (nie odpowiadającego podstawowej harmonicznej), ponieważ rozwiązanie to jest funkcją liniową w odróżnieniu od rozwiązania równania (5.30) które jest funkcją nieliniową (kosinus). Dodatkowo, aby uprościć tę analizę autor zawęził zakres zmian częstotliwości do przedziału 40...60 Hz.

Inną zaletą zaproponowanego przez autora rozwiązania jest możliwość wyboru pierwszej iteracji rozwiązania (5.42) metodą Newtona przy starcie algorytmu w sytuacji, gdy mierzona częstotliwość jest nieznana i różna od wartości znamionowej 50 Hz. Zastąpienie funkcji kosinus szeregiem Taylora ma jeszcze jedną poważną zaletę: przy praktycznej realizacji algorytmu na procesorze sygnałowym upraszcza pisanie programu. W języku asemblera i tak konieczne byłoby zastosowanie jednej z metod numerycznych w celu rozwiązania funkcji kosinus. W ten sposób nieznacznie tylko zmieniając algorytm, autor uzyskał polepszenie jego działania.

Jako uzupełnienie opisu nowego algorytmu pomiaru częstotliwości autor dokonał analizy pomiarów w układach trójfazowych (rozdział 5.3.4), wpływu częstotliwości próbkowania na wynik pomiaru (rozdział 5.3.5) oraz analizy pod kątem przydatności algorytmu do śledzenia w czasie zmian częstotliwości (rozdział 5.3.6).

Bardzo duży wkład własny pracy stanowi zaprojektowanie, wykonanie, pełne oprogramowanie i uruchomienie stanowiska badawczo-laboratoryjnego (rozdział 6) umożliwiającego praktyczną weryfikację przedstawionego algorytmu pomiaru częstotliwości w rzeczywistym układzie pomiarowym. Badania przeprowadzone na tym stanowisku potwierdziły wszystkie zalety nowego algorytmu pomiaru częstotliwości. Były one impulsem do ulepszenia (opisanego w podrozdziale 5.3.3) algorytmu, bowiem symulacje przeprowadzone w programie MATLAB nie uwiaryściły niektórych jego mankamentów.

Stanowisko badawcze zostało zaprojektowane w sposób umożliwiający praktyczną weryfikację większości algorytmów występujących w automatyce elektroenergetycznej. Autor ma nadzieję, że będzie ono dobrym narzędziem w procesie dydaktycznym studentów.

DODATEK

A. Opis sygnałów testowych

A.1. Sygnały jednofazowe

Wszystkie sygnały jednofazowe można zapisać jednym ogólnym równaniem:

$$u(k) = \sum_n A_n \cos(q_n a k + \varphi_n), \quad (\text{A.1})$$

gdzie:

$$a = \frac{2\pi}{N} \text{ - kąt pomiędzy sąsiednimi próbkami sygnału,}$$

N - liczba próbek w okresie podstawowej harmonicznego sygnału.

$$q_n = n \frac{f}{f_0} \text{ - częstotliwość względna, } n \text{ - numer składowej,}$$

f - częstotliwość mierzona podstawowej składowej,

$f_0 = 50 \text{ Hz}$ - częstotliwość znamionowa podstawowej harmonicznego,

A_n, φ_n - amplituda i faza n -tej składowej.

Zdefiniowano jedenastkę różnych sygnałów jednofazowych. W celu uproszczenia zapisu poszczególne sygnały oznaczono jako A, B, C, D, DM1, DP1, DP2, E, F, G, H:

A - sygnał o zawartości tylko podstawowej harmonicznego (rys. A.1a), gdzie:

$$n=1,$$

$$A_1=1,$$

$$\varphi_1=-0,5.$$

B - sygnał o zawartości dwóch harmonicznego (rys. A.1b), gdzie:

$$n=1, 2,$$

$$A_1=1, A_2=0,2,$$

$$\varphi_1=-0,5, \varphi_2=-1,0.$$

C - sygnał o zawartości trzech harmonicznego (rys. A.1c), gdzie:

$$n=1, 2, 3,$$

$$A_1=1, A_2=0,2, A_3=0,5,$$

$$\varphi_1=-0,5, \varphi_2=-1,0, \varphi_3=1,0.$$

D - sygnał o zawartości pięciu harmonicznego (rys. A.1d), gdzie:

$$n=1, 2, 3, 4, 5,$$

$$A_1=1, A_2=0,2, A_3=0,5, A_4=0,25, A_5=0,3,$$

$$\varphi_1=-0,5, \varphi_2=-1,0, \varphi_3=1,0, \varphi_4=0, \varphi_5=0,2.$$

DM1 - sygnał o zawartości pięciu składowych (w tym jedna międzyharmoniczna), gdzie:

$$n=1, 2,5, 3, 4, 5,$$

$$A_1=1, A_{2,5}=0,2, A_3=0,5, A_4=0,25, A_5=0,3,$$

$$\varphi_1=-0,5, \varphi_{2,5}=-1,0, \varphi_3=1,0, \varphi_4=0, \varphi_5=0,2.$$

DP1 - sygnał o zawartości pięciu składowych (w tym jedna podharmoniczna), gdzie:

$$n=1, 0,5, 3, 4, 5,$$

$$A_1=1, A_{0,5}=0,2, A_3=0,5, A_4=0,25, A_5=0,3,$$

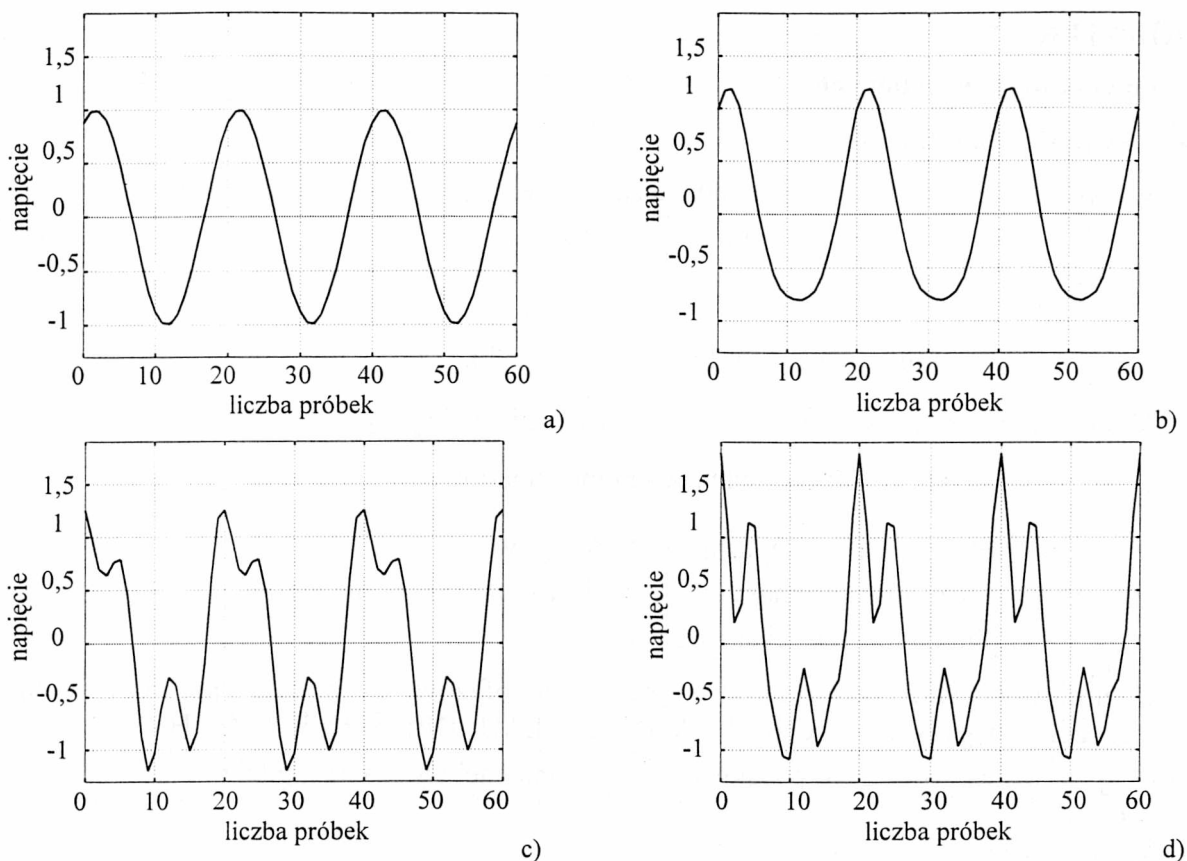
$$\varphi_1=-0,5, \varphi_{0,5}=-1,0, \varphi_3=1,0, \varphi_4=0, \varphi_5=0,2.$$

DP2 - sygnał o zawartości pięciu składowych (w tym jedna podharmoniczna), gdzie:

$$n=1, 0,9, 3, 4, 5,$$

$$A_1=1, A_{0,9}=0,2, A_3=0,5, A_4=0,25, A_5=0,3,$$

$$\varphi_1=-0,5, \varphi_{0,9}=-1,0, \varphi_3=1,0, \varphi_4=0, \varphi_5=0,2.$$



Rys. A.1. Sygnał testowy o zawartości: podstawowej harmoniczej (a), dwóch harmoniczych (b), trzech harmoniczych (c), pięciu harmoniczych (d)

E - sygnał o zawartości sześciu harmoniczych, gdzie:

$$n=1, 2, 3, 4, 5, 6,$$

$$A_1=1, A_2=0,2, A_3=0,5, A_4=0,25, A_5=0,3, A_6=0,1,$$

$$\varphi_1=-0,5, \varphi_2=-1,0, \varphi_3=1,0, \varphi_4=0, \varphi_5=0,2, \varphi_6=-0,1.$$

F - sygnał o zawartości siedmiu harmoniczych, gdzie:

$$n=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,$$

$$A_1=1, A_2=0,2, A_3=0,5, A_4=0,25, A_5=0,3, A_6=0,1, A_7=0,02,$$

$$\varphi_1=-0,5, \varphi_2=-1,0, \varphi_3=1,0, \varphi_4=0, \varphi_5=0,2, \varphi_6=-0,1, \varphi_7=-0,1.$$

G - sygnał o zawartości ośmiu harmoniczych, gdzie:

$$n=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,$$

$$A_1=1, A_2=0,2, A_3=0,5, A_4=0,25, A_5=0,3, A_6=0,1, A_7=0,02, A_8=0,01,$$

$$\varphi_1=-0,5, \varphi_2=-1,0, \varphi_3=1,0, \varphi_4=0, \varphi_5=0,2, \varphi_6=-0,1, \varphi_7=-0,1, \varphi_8=-0,2.$$

H - sygnał o zawartości dziewięciu harmoniczych, gdzie:

$$n=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,$$

$$A_1=1, A_2=0,2, A_3=0,5, A_4=0,25, A_5=0,3, A_6=0,1, A_7=0,02, A_8=0,01, A_9=0,03,$$

$$\varphi_1=-0,5, \varphi_2=-1,0, \varphi_3=1,0, \varphi_4=0, \varphi_5=0,2, \varphi_6=-0,1, \varphi_7=-0,1, \varphi_8=-0,2, \varphi_9=-0,3.$$

A.2. Sygnały trójfazowe

Wszystkie sygnały trójfazowe można zapisać za pomocą układu trzech ogólnych równań:

$$\begin{aligned}u_a(k) &= \sum_n A_n \cos(q_n ak + \varphi_n), \\u_b(k) &= \sum_n A_n \cos\left(q_n ak + \varphi_n - \frac{2}{3}\pi\right), \\u_c(k) &= \sum_n A_n \cos\left(q_n ak + \varphi_n + \frac{2}{3}\pi\right),\end{aligned}\tag{A.2}$$

gdzie:

u_a, u_b, u_c - napięcie fazy a, b, c,

$a = \frac{2\pi}{N}$ - kąt pomiędzy sąsiednimi próbkami sygnału,

N - liczba próbek w okresie podstawowej harmoniczej sygnału.

$q_n = n \frac{f}{f_0}$ - częstotliwość względna, n - numer składowej,

f - częstotliwość mierzona podstawowej składowej,

$f_0 = 50\text{Hz}$ - częstotliwość znamionowa podstawowej harmoniczej,

A_n, φ_n - amplituda i faza n -tej składowej.

Zdefiniowano pięć różnych sygnałów trójfazowych. W celu uproszczenia poszczególne sygnały oznaczono jako A3, B3, C3, D3, F3:

A3 - sygnał o zawartości tylko podstawowej harmoniczej (rys. A.2a), gdzie:

$n=1$,

$A_1=1$,

$\varphi_1=-0,5$.

B3 - sygnał o zawartości dwóch harmoniczych (rys. A.2b), gdzie:

$n=1, 2$,

$A_1=1, A_2=0,2$,

$\varphi_1=-0,5, \varphi_2=-1,0$.

C3 - sygnał o zawartości trzech harmoniczych (rys. A.2c), gdzie:

$n=1, 2, 3$,

$A_1=1, A_2=0,2, A_3=0,5$,

$\varphi_1=-0,5, \varphi_2=-1,0, \varphi_3=1,0$.

D3 - sygnał o zawartości pięciu harmoniczych (rys. A.2d), gdzie:

$n=1, 2, 3, 4, 5$,

$A_1=1, A_2=0,2, A_3=0,5, A_4=0,25, A_5=0,3$,

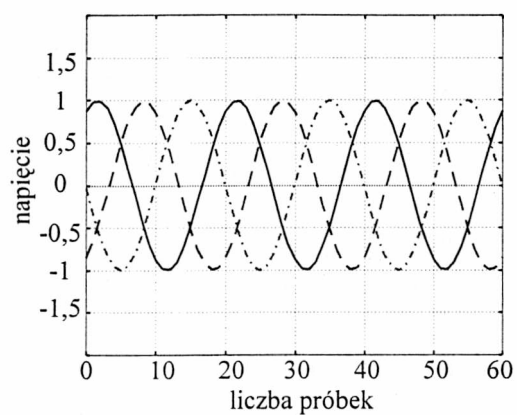
$\varphi_1=-0,5, \varphi_2=-1,0, \varphi_3=1,0, \varphi_4=0, \varphi_5=0,2$.

F3 - sygnał o zawartości siedmiu harmoniczych, gdzie:

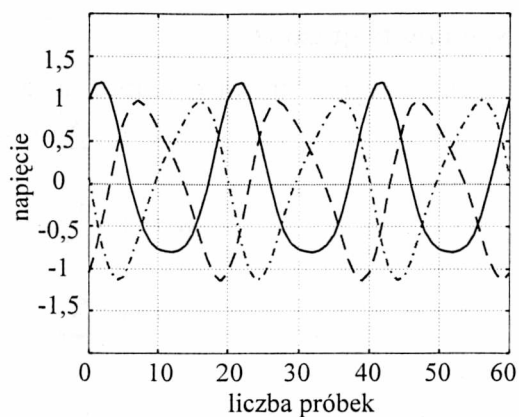
$n=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$,

$A_1=1, A_2=0,2, A_3=0,5, A_4=0,25, A_5=0,3, A_6=0,1, A_7=0,02$,

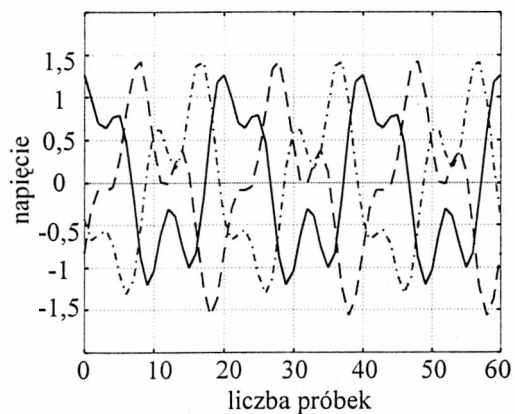
$\varphi_1=-0,5, \varphi_2=-1,0, \varphi_3=1,0, \varphi_4=0, \varphi_5=0,2, \varphi_6=-0,1, \varphi_7=-0,1$.



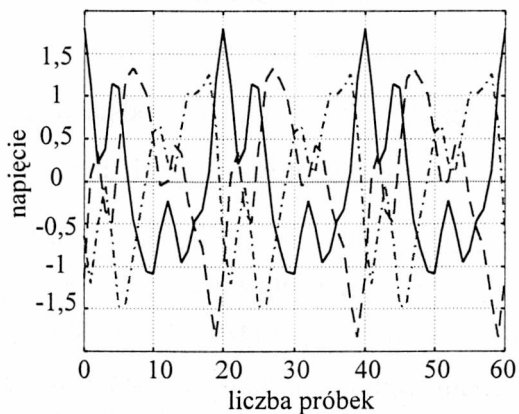
a)



b)



c)

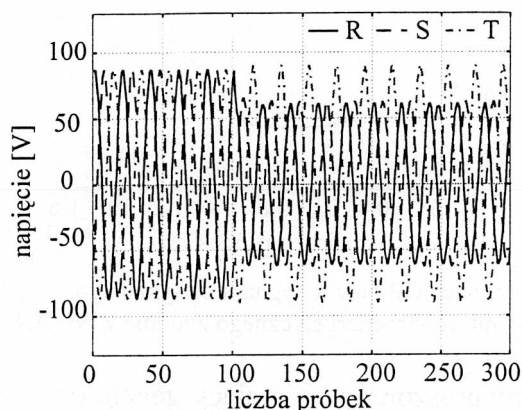


d)

Rys. A.2. Sygnał testowy trójfazowy o zawartości: podstawowej harmonicznej (a), dwóch harmonicznych (b), trzech harmonicznych (c), pięciu harmonicznych (d)

A.3. Sygnały symulacyjne

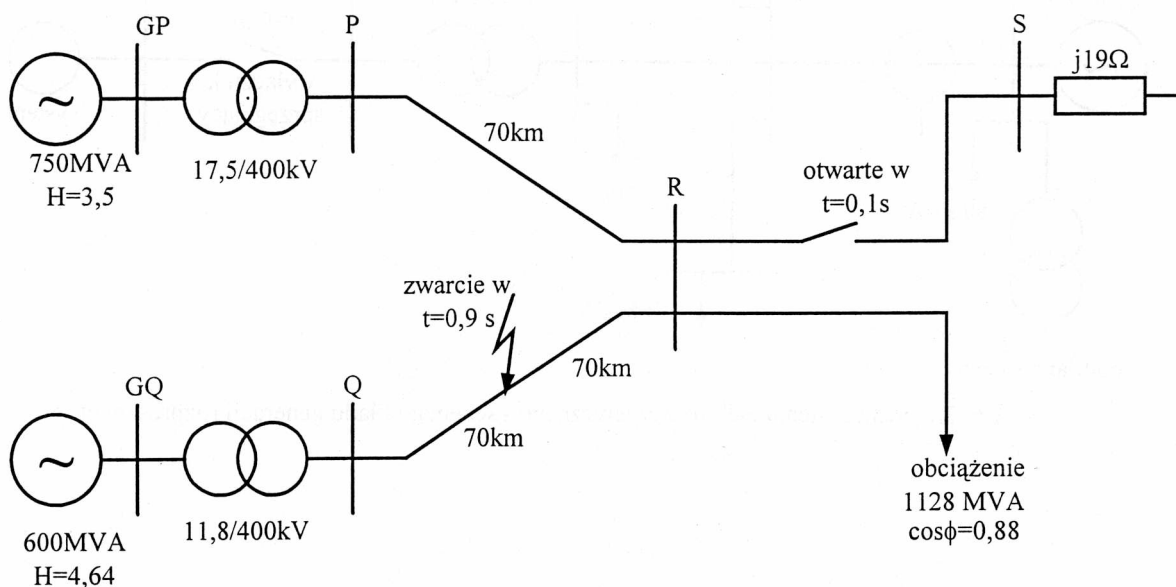
Aby zwiększyć wiarygodność testowania wykorzystano sygnały uzyskane z programu do symulacji procesów energetycznych ATP/EMPT (Electro-Magnetic Transients Program) [6].



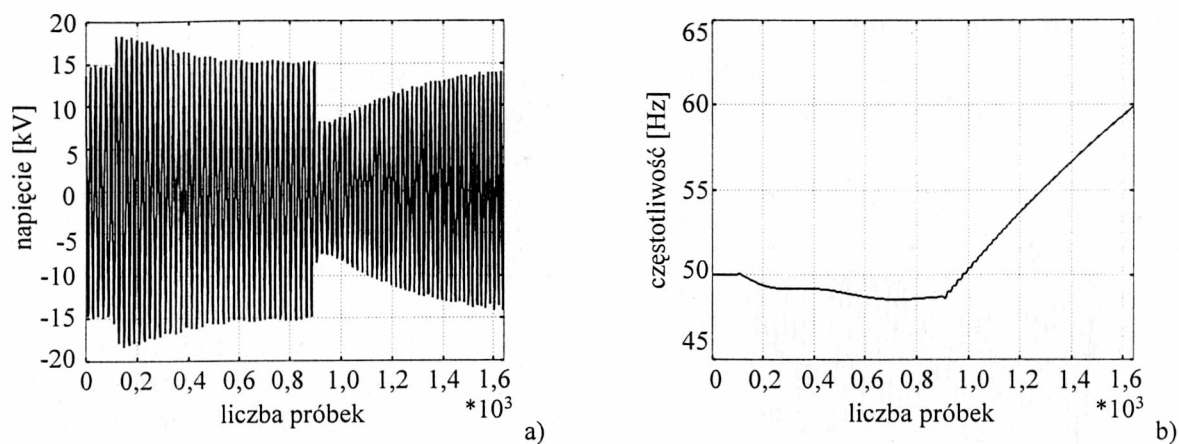
Rys. A.3. Przebieg napięć faz R, S, T sygnału otrzymanego z pakietu ATP/EMTP reprezentującego dwufazowe zwarcie w 100-nej próbce sieci wysokich napięć 400 kV

W pierwszym przypadku zasymulowano zwarcie dwufazowe z udziałem ziemi w linii elektroenergetycznej 400 kV o długości 140 km. Zwarcie miało miejsce na 60 km w momencie odpowiadającym 0,1 sek. (100-na próbka przy częstotliwości próbkowania $f_p = 1$ kHz) licząc od początku symulacji (rys. A.3). W uzyskanej symulacji częstotliwość w zasadzie nie ulega zmianie. Zmienia się amplituda sygnałów, co w procesie przejściowym, ma wpływ na pomiar częstotliwości. Do analizy brane jest napięcie fazy R. W pracy sygnał ten nazywany jest sygnałem typu ATP1.

W celu uzyskania następnego przebiegu zasymulowano fragment systemu elektroenergetycznego zgodnie z rys. A.4. Układ przedstawia dwa generatory GP i GQ o mocy odpowiednio 750 MVA i 600 MVA oraz symbolicznie pozostałą część systemu elektroenergetycznego (S) i obciążenie. W czasie 0,1 sek. (odpowiadającym 100-nej próbce, przy $f_p = 1$ kHz) następuje odłączenie tychże generatorów od systemu, natomiast w czasie 0,9 sek. (odpowiadającym 900-nej próbce, przy $f_p = 1$ kHz), następuje zwarcie trójfazowe w odległości 70 km od transformatora wysokiego napięcia Q. Do analizy brane jest napięcie fazy R w punkcie GP. Przedstawione jest ono na rys. A.5a. W pracy sygnał ten nazywany jest sygnałem typu ATP2. Zmiany częstotliwości zachodzące podczas prezentowanej symulacji przedstawia rys. A.5b.

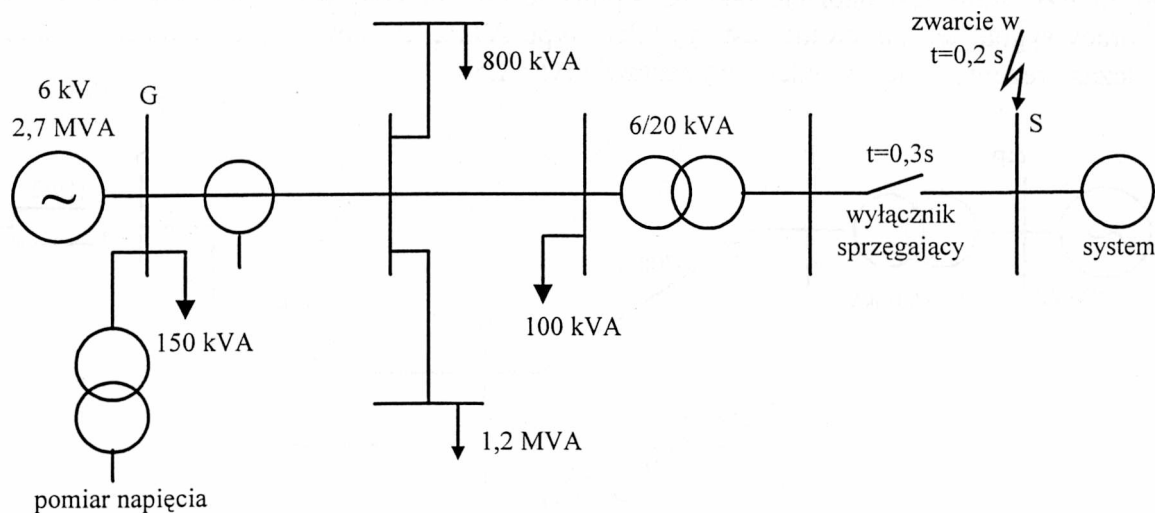


Rys. A.4. Fragment systemu elektroenergetycznego

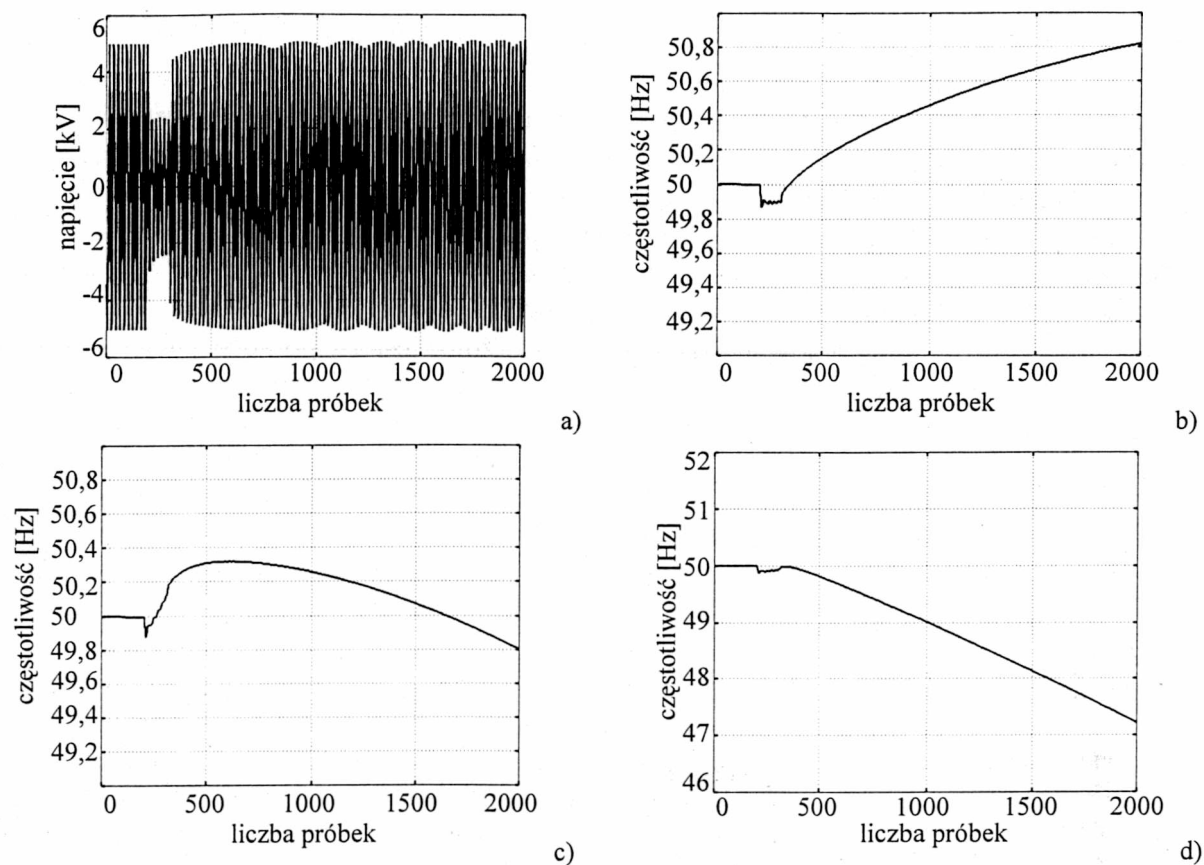


Rys. A.5. Przebieg napięcia (a) i częstotliwości (b) na szynach GP fazy R sygnału otrzymanego z pakietu ATP/EMTP reprezentującego fragment systemu elektroenergetycznego zgodnie z rys. A.4

Rys. A.6 przedstawia schemat układu generacji rozproszonej zawierający generator małej mocy podłączony do systemu elektroenergetycznego. W czasie 0,2 sek. (odpowiadającym 200-nej próbce, przy $f_p = 1$ kHz) następuje zwarcie trójfazowe na szynach S. Skutkiem tego zwarcia automatyka zabezpieczeniowa powoduje odłączenie generatora od systemu w czasie 0,3 sek. (odpowiadającym 300-nej próbce, przy $f_p = 1$ kHz). Do analizy brane jest napięcie fazy R w punkcie G. Przedstawione jest ono na rys. A.7a. W pracy sygnał ten nazywany jest sygnałem typu ATP3. Zmiany częstotliwości zachodzące podczas prezentowanej symulacji przedstawia rys. A.7b. Na rys. A.7c i rys. A.7d widoczne są zmiany częstotliwości napięcia fazy R w punkcie G, w układzie podobnym jak na rys. A.6, z tą różnicą, że suma obciążeń wstępnych generatora jest w tym przypadku większa od mocy generatora. Sygnały te nazywane są w pracy ATP3a i ATP3b.



Rys. A.6. Fragment systemu elektroenergetycznego - schemat układu generacji rozproszonej



Rys. A.7. Przebieg napięcia (a) i częstotliwości (ATP3 (b), ATP3a (c), ATP3b (d),) fazy R sygnału otrzymanego z pakietu ATP/EMTP reprezentującego fragment systemu elektroenergetycznego zgodnie z rys. A.6

B. Opis parametrów technicznych i sposobu programowania generatora HAMEG 8131.2

Generator HAMEG 8131.2 [10] ma możliwość zaprogramowania sygnałów o dowolnym kształcie - amplitudzie od 20 mV do 20 V z rozdzielczością 12 bitów i częstotliwości od 0,0001 Hz do 15 MHz. W pamięci generatora można przechowywać dwa zaprogramowane sygnały: jeden w pamięci 4kB co daje możliwość zaprogramowania do 4096 (12 bitów) próbek okresu sygnału, drugi w pamięci 16kB co daje możliwość zaprogramowania do 16384 (14 bitów) próbek okresu sygnału. Generator wyposażony jest także w czytnik RAM-card oraz łącze RS-232C (opcjonalnie IEC-625), co dodatkowo zwiększa jego możliwości.

Zestaw instrukcji programowania generatora tworzony jest za pomocą pakietu matematycznego MATLAB jako plik typu ASCII. Zdecydowano się na ten program, bowiem ze względu na prostotę obsługi, umożliwia zdefiniowanie przez użytkownika szerokiej gamy sygnałów, z dowolną zawartością harmoniczną oraz z nałożonymi dowolnymi sygnałami zakłóceniowymi. Dodatkowo w pakiecie MATLAB może być odczytany i dowolnie modyfikowany sygnał pochodzący z programu ATP/EMTP.

Tab. B.1. Przykładowy zestaw instrukcji do programowania generatora HAMEG 8131.2.

```
FRQ: 50.00
AMP: 2.00
ARC4
ARP4: 0=2043
ARP4: 8=2037
ARP4: 16=2028
ARP4: 24=2017
ARP4: 32=2004
.
.
.
ARP4: 1264=69
ARP4: 1272=32
ARP4: 1280=-5
ARP4: 1288=-41
ARP4: 1296=-76
.
.
ARP4: 4048=2024
ARP4: 4056=2034
ARP4: 4064=2041
ARP4: 4072=2045
ARP4: 4080=2047
ARP4: 4088=2046
ARE
ARB4
```

Przykładowy zestaw instrukcji do programowania generatora przedstawiony jest w tab. B.1.

Pierwsza instrukcja określa (w Hz) częstotliwość generowanego sygnału, druga amplitudę (w V). Trzecia instrukcja powoduje wyzerowanie zapisanego uprzednio w pamięci generatora sygnału. Następne instrukcje podają kolejny numer próbki (po dwukropku) oraz wartość próbek napięcia (po znaku „=”). Numer próbki może zmieniać się w zakresie od 0 do 4095 przy wykorzystaniu pamięci 4kB lub w zakresie od 0 do 16383 przy wykorzystaniu pamięci 16kB. W powyższym przykładzie użyto pamięci 4kB, o czym świadczy cyfra „4” pojawiająca się przy każdej instrukcji. Wartości próbek napięcia mogą zmieniać się w przedziale od -2047 do +2047, co daje 12 bitową rozdzielczość w zakresie uprzednio zdefiniowanej amplitudy sygnału. Tak zdefiniowany sygnał powtarzany będzie z częstotliwością podaną w pierwszej instrukcji. Nie ma konieczności definiowania wszystkich wartości próbek. Jak widać w tab. B.1 zdefiniowano co 8 próbkę, co przy pamięci 4kB daje rozdzielczość 9 bitów (512 próbek na okres). Niezdefiniowane wartości próbek są automatycznie aproksymowane przez układ arytmetyczny generatora. Przedostatnia instrukcja informuje o zakończeniu procesu wprowadzania danych, ostatnia wyprowadza zaprogramowany sygnał na wyjście generatora. Programowanie sygnału w pamięci 16 kilobajtów odbywa się analogicznie jak w tab.1. W miejsce cyfry „4”

w instrukcjach **ARC4**, **ARP4**, **ARB4** należy wstawić liczbę „16”.

Bezpośrednio do operacji programowania generatora poprzez łącze RS-232C służy prosty program typu .exe napisany w języku programowania C++. Jako parametr tego programu należy przy wywołaniu podać nazwę programu z zestawem instrukcji (jak w tab. B.1) programujących generator.

C. Przykładowa realizacja algorytmu pomiaru częstotliwości w języku C na procesorze sygnałowym

C.1. Algorytm nierekursywny, dla modelu sygnału I rzędu, z zastosowaniem okna filtracyjnego Hamminga

```
// pomiar częstotliwości - algorytm uproszczony dla jednej harmonicznej
// z wstępną filtracją sygnału oknem Hamminga o długości M
#include <math.h>
#pragma DATA_SECTION(bufor, ".dane")
extern int pomiar;
int Nb=20;          // długość bufora pomiarowego
int N=20;           // długość okna pomiarowego
int M=20;           // długość okna filtracyjnego
float bufor1[20], bufor[20]; // bufory odpowiednio sygnału z przetwornika
// i po filtracji

float sygf;
int wsk=0;          // indeks bufora pomiarowego (0...19)
int i, ind1, ind2, ind3; // wartości indeksów pośrednich
int send;           // wartość częstotliwości zmierzona i wysłana do komputera
float h[20], y[20];
extern int pomiar; // wartość odczytana wprost z przetwornika A/C
float d1, d11, d12, d2[20], d;
float f;            // obliczona wartość częstotliwości
float pi=3.14159265;
void main()
{
    c30init();       // podprogram napisany w assemblerze
                    // - inicjalizacja procesora,
                    // programowanie przetwornika A/C, inicjalizacja układu
                    // przerwań i transmisji szeregowej z przetwornika
    for(;;);         // oczekiwanie na pomiar
}
void receive0()      // podprogram obsługi przerwania od transmisji danych
                    // z przetwornika A/C + algorytm pomiarowy
{
    rec01();          // podprogram napisany w assemblerze - obsługa
                    //przerwania od transmisji danych z przetwornika A/C
// ALGORYTM POMIAROWY
if(pomiar>0x2000)
    pomiar=0x0ffffc000|pomiar;
bufor1[wsk]=pomiar;
//wstępna filtracja oknem Hamminga o długości M
sygf=0;
for(i=0;i<M;i++)
{
    ind1=((wsk-i)+Nb)%Nb;
    ind2=2*pi*i/(M-1);
    sygf+=bufor1[ind1]*(0.54-0.46*cos(ind2)); // okna Hamminga
}
bufor[wsk]=sygf;
// tworzenie wektora h i y
for(i=0;i<N;i++)
{
    ind1=((wsk-i-1)+Nb)%Nb;
    h[i]=2*bufor[ind1];
    ind2=((wsk-i)+Nb)%Nb;
    ind3=((wsk-i-2)+Nb)%Nb;
    y[i]=bufor[ind2]+bufor[ind3];
}
// obliczenie współczynników wektora d Metodą Najmniejszych Kwadratów
d11=0;
for(i=0;i<N;i++)
{
```

```

    d12=h[i]*h[i];    // h'*h
    d11=d11+d12;
}
d1=1/d11;            // inv(h'*h)
for(i=0;i<N;i++)
{
    d2[i]=d1*h[i];
}
d=0;
for(i=0;i<N;i++)
{
    d12=d2[i]*y[i]; ;    // inv(h'*h)*y
    d=d+d12;
}
f=159.1549*acos(d);    // wynik pomiaru częstotliwości,
                        // 159,1549=50*N/(2*pi)
send=100*f;           // wynik ostateczny przedstawiony jako liczba całkowita
                        // (zaokrąglenie do 2 miejsc po przecinku) - wysłany do
                        // komputera

wsk++;
wsk=wsk%Nb;
//KONIEC ALGORYTMU POMIAROWEGO
rec02();              // podprogram napisany w assemblerze - zakończenie obsługi
                        // przzerwania od transmisji danych z przetwornika A/C
}

```

C.2. Algorytm rekursywny, dla modelu sygnału VI rzędu

```

// pomiar częstotliwości - algorytm rekursywny dla sześciu harmoniczych
// z filtrem uśredniającym na wyniku pomiaru
#include <math.h>
#pragma DATA_SECTION(bufor,".dane")
extern int pomiar;
int Nb=13;            // długość bufora pomiarowego
int N=20;             // długość okna pomiarowego
int M=20;            // długość okna filtracyjnego
float bufor[13];      // bufor sygnału - wartości z przetwornika A/C
float tabf[20];       // tablica dla filtru uśredniającego
int wsk=0, wskf=0;    // indeks bufora pomiarowego i bufora do uśredniania
int i, j, k, ind1, ind2;
int send;             // wartość częstotliwości zmierzona i wysłana do komputera
float h[6], y;
float d[6], P[6][6];
float k1[6], k2, k[6], d1, d2[6], P1[6][6], P2[6][6], P3[6][6];
float xp, x, x2, x3, x4, x5, x6, r, rprim;
float f;
float pi=3.14159265;
float lam=0.8;        // współczynnik zapominania
void main()
{
    x=0.951; // zerowe przybliżenie x (dobrane dla f=50 Hz)
    for(i=0;i<6;i++)
    {
        d[i]=0;    // wartość początkowa
    }
    for(i=0;i<6;i++)
    {
        for(j=0;j<6;j++)
        {
            if(i==j)
                P[i][j]=1000.;    // wartość początkowa
            else
                P[i][j]=0.;        // wartość początkowa
        }
    }
}

```

```

    }
}

// for(i=0;i<40;i++)
c30init();          // podprogram napisany w asemblerze
                    // - inicjalizacja procesora,
                    // programowanie przetwornika A/C, inicjalizacja układu
                    // przerwań i transmisji szeregowej z przetwornika
    for(;;);         // oczekiwanie na pomiar
}

void receive0()      // podprogram obsługi przerwania od transmisji danych
                    // z przetwornika A/C + algorytm pomiarowy
{
    rec01();         // podprogram napisany w asemblerze - obsługa
                    //przerwania od transmisji danych z przetwornika A/C
// ALGORYTM POMIAROWY
if(pomiar>0x2000)
    pomiar=0x0ffffc000|pomiar;
bufor[wsk]=pomiar/8192.;
// obliczanie wektora h i wartości y
for(i=0;i<6;i++)
{
    ind1=((wsk- 1-i)+Nb)%Nb;
    ind2=((wsk-11+i)+Nb)%Nb;
    h[i]=bufor[ind1]+bufor[ind2];
}
ind1=((wsk    )+Nb)%Nb;
ind2=((wsk-12)+Nb)%Nb;
y=bufor[ind1]+bufor[ind2];
// obliczenie współczynników wektora d rekursywną MNKM
for(i=0;i<6;i++)
{
    K1[i]=0;
    for(j=0;j<6;j++)
    {
        K1[i]=K1[i]+h[j]*P[j][i];          // K1=h*P
    }
}
K2=0;
for(i=0;i<6;i++)
{
    K2=K2+K1[i]*h[i];                      // K2=K1*h'=h*P*h'
}
K2=K2+lam;          // lam+h*P*h'
K2=1/K2;             // inv(lam+h*P*h')
for(i=0;i<6;i++)
{
    K[i]=0;
    for(j=0;j<6;j++)
    {
        K[i]=K[i]+P[i][j]*h[j];          // K=P*h'
    }
}
for(i=0;i<6;i++)
{
    K[i]=K[i]*K2;          // K=P*h'*inv(lam+h*P*h')
}
d1=0;
for(i=0;i<6;i++)
{
    d1=d1+h[i]*d[i];          // d1=h*d
}
d1=y-d1;              // d1=y-h*d
for(i=0;i<6;i++)
{
    d2[i]=K[i]*d1;          // d2=K*d1=K*(y-h*d)
}

```

```

}
for(i=0;i<6;i++)
{
    d[i]=d[i]+d2[i];
}
for(i=0;i<6;i++)
{
    for(j=0;j<6;j++)
    {
        P1[i][j]=K[i]*h[j];    // P1=K*h
    }
}
for(k=0;k<6;k++)
{
    for(i=0;i<6;i++)
    {
        P2[k][i]=0;
        for(j=0;j<6;j++)
        {
            P2[k][i]=P2[k][i]+P1[k][j]*P[j][i];    // P2=P1*P=K*h*P
        }
    }
}
for(i=0;i<6;i++)
{
    for(j=0;j<6;j++)
    {
        P3[i][j]=P[i][j]-P2[i][j];    // P3=P-P2=P-K*h*P
    }
}
for(i=0;i<6;i++)
{
    for(j=0;j<6;j++)
    {
        P[i][j]=P3[i][j]/lam;    // P=P3/lam=(P-K*h*P)/lam
    }
}
// dopasowywanie macierzy P tak, aby była symetryczna
// (procedura tu pominięta, aby nie zaciemniać algorytmu)
// procedura zerowania odpowiednich wierszy i kolumn macierzy P oraz
// wektora d, tak aby wartość P[0][0] nie przekraczała założonego progu
// (procedura tu pominięta, aby nie zaciemniać algorytmu)
// obliczanie pierwiastków równania 6-go stopnia (metoda Newtona)
xp=x;
suc=0;
for(i=0;i<10;i++)
{
    x2=x*x;
    x3=x2*x;
    x4=x3*x;
    x5=x4*x;
    x6=x5*x;
    // równanie:
    r=32*x6-16*d[0]*x5-8*(6+d[1])*x4+4*(5*d[0]-d[2])*x3+2*(9+4*d[1]-
        d[3])*x2+(3*d[2]-5*d[0]-d[4])*x+d[3]-d[1]-d[5]-1;
    // pochodna:
    rprim=192*x5-80*d[0]*x4-32*(6+d[1])*x3+12*(5*d[0]-d[2])*x2+4*(9+4*d[1]-
        d[3])*x+3*d[2]-5*d[0]-d[4];
    x=x-r/rprim;
    if(fabs(x-xp)<0.000001)
    {
        suc=1;
        break;
    }
}
if(suc==0 || x>1 || x<0)

```



```

    x=xp;          // wartość z poprzedniego kroku
    f=159.154943*acos(x);          // 159.154943=N/2/pi*50
    tabf[wskf]=f;  // tablica dla uśredniania
    wskf++;
    wskf=wskf%M;
    fsum=0;
    for(i=0;i<M;i++)
    {
        fsum+=tabf[i]; // sumowanie elementów tablicy
    }
    fsr=fsum/Mu;      // średnia
    send=100*fsr;     // wynik ostateczny przedstawiony jako liczba całkowita
                    // (zaokrąglenie do 2 miejsc po przecinku) - wysłany do
                    // komputera

    wsk++;
    wsk=wsk%Nb;
    rec02();          // podprogram napisany w assemblerze - zakończenie obsługi
                    // przerywania od transmisji danych z przetwornika A/C
}

```

LITERATURA

- [1] M. Akke, *Frequency estimation by demodulation of two complex signals*, IEEE Transactions on Power Delivery, Vol. 12, No. 1, January 1997, pp. 157-163
- [2] M. Bartlett, M. Redfern, *A novel approach to the detection of loss of grid for protecting embedded generation*, Proceedings of the International Symposium Modern Electric Power Systems, Wrocław, Poland, September 2002, pp. 357-361
- [3] G. Benmouyal, *An adaptive sampling- interval generator for digital relaying*, IEEE Transactions on Power Delivery, Vol: 4, No. 3, July 1989, pp. 1602-1609
- [4] G. Benmouyal, *Design of a combined digital global differential and Volt/Hertz Relay for step-up transformers*, IEEE Transactions on Power Delivery, Vol: 6, No. 3, July 1991, pp. 1000 -1007
- [5] P.K. Dash, A.K. Predhan, G. Panda, *Frequency estimation of distorted power system signals using extended complex Kalman filter*, IEEE Transactions on Power Delivery, Vol: 14, No. 3, July 1999, pp. 761-766
- [6] H. Dommel, *Electro-Magnetic Transients Program*, BPA, Portland, USA, 1986
- [7] V. Eckhardt, P. Hippe, G. Hosemann, *Dynamic measuring of frequency oscillations in multiphase power systems*, IEEE Transactions on Power Delivery, Vol. 4, No. 1, January 1989, pp. 95-102
- [8] M.M. Giray, M.S. Sachdev, *Off-nominal frequency measurements in electric power systems*, IEEE Transactions on Power Delivery, Vol. 4, No. 3, July 1989, pp. 1573-1578
- [9] A.A. Girgis, D.T.L. Hwang, *Optimal estimation of voltage phasors and frequency deviation using linear and non-linear Kalman filtering: theory and limitations*, IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol: 103, No. 10, October 1984, pp. 2943-2949
- [10] Hameg Instruments, *Programmable Function Generator 8131.2 - Operating Manual*, Hameg GmbH 1997
- [11] D. Hart, D. Novosel, Yi Hu, B. Smith, M. Egolf, *A new frequency tracking and phasor estimation algorithm for generator protection*, IEEE Transactions on Power Delivery, Vol. 12, No. 3, July 1997, pp. 1064 -1073
- [12] Shyh-Jier Huang, Fu-Sheng Pai, *A new approach to islanding detection of dispersed generators with self-commutated static power converters*, IEEE Transactions on Power Delivery, Vol. 15, No. 2, April 2000, pp. 500-507
- [13] I. Kamwa, R. Grondin, *Fast adaptive schemes for tracking voltage phasor and local frequency in power transmission and distribution systems*, IEEE Transactions on Power Delivery, Vol: 7, No. 2, April 1992, pp. 789-795
- [14] G.A. Korn, T.M. Korn, *Mathematical Handbook for scientists and engineers*, McGraw-Hill Book Company, New York, San Francisco, Toronto, London, Sydney, 1968, pp. 692-693
- [15] T. Lobos, J. Rezmer, *Real-time determination of power system frequency*, IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, Vol. 46, No. 4, August 1997, pp. 877-881
- [16] S.K. Mitra, J.F. Kaiser, *Handbook for digital signal processing*, John Wiley & Sons, New York 1993, pp. 1193-1209

- [17] P.J. Moore, D. Carranza, A.T. Johns, *Performance of a new high speed digital technique for measuring power system frequency*, IEEE Conference Publications No. 368, 1993, pp 73-76
- [18] P.J. Moore, R.D. Carranza, A.T. Johns, *A new numeric technique for high-speed evaluation of power system frequency*, IEE Proceedings Generation, Transmission and Distribution, Vol. 141, No 5, September 1994, pp. 529-536
- [19] P.J. Moore, R.D. Carranza, A.T. Johns, *Model system tests on a new numeric method of power system frequency measurement*, IEEE Transactions on Power Delivery, Vol. 11, No. 2, April 1996, pp. 696-701
- [20] P.J. Moore, R.D. Carranza, *Power system measurement under dynamic condition*, Power System Protection conference, Bled, Slovenia, 1998, pp. 47-52
- [21] P. Petrovic, S. Marjanovic, M.R. Stevanovic, *New algorithm for measuring 50/60 Hz AC values based on the usage of slow A/D converters*, IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, Vol. 49, No. 1, February 2000, pp. 166-171
- [22] A.G. Phadke, J.S. Thorp, M.G. Adamiak, *A new measurement technique for tracking voltage phasors, local system frequency, and rate of change of frequency*, IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol: PAS-102, No. 5, May 1983, pp. 1025-1038
- [23] B.D. Rao, K.S. Arun, *Model based processing of signals: a state space approach*, Proceedings of the IEEE, Vol. 80, No. 2, February 1992, pp. 283-309
- [24] M.A. Redfern, O. Usta, G. Fielding, *Protection against loss of utility grid supply for a dispersed storage and generation unit*, IEEE Transactions on Power Delivery, Vol. 8, No. 3, July 1993, pp. 948-954
- [25] J. Rezmer, *Cyfrowe wyznaczanie częstotliwości podstawowej składowej sygnałów w czasie rzeczywistym*, praca doktorska Instytut Podstaw Elektrotechniki i Elektrotechnologii Politechniki Wrocławskiej, Wrocław, 1995
- [26] E. Rosołowski, *Analiza algorytmów cyfrowych zabezpieczeń elektroenergetycznych*, Prace Naukowe Instytutu Energoelektryki Politechniki Wrocławskiej. Seria: Monografie. Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej. Wrocław 1992
- [27] E. Rosołowski, *Cyfrowe przetwarzanie sygnałów w automatyce elektroenergetycznej*, Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT, Warszawa 2002
- [28] L. Rutkowski, *Filtry adaptacyjne i adaptacyjne przetwarzanie sygnałów*, WNT, Warszawa 1994, ss. 131-148
- [29] M.S. Sachdev, M.A. Baribeau, *A new algorithm for digital impedance relays*, IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-98, No. 6, November/December 1979, pp. 2232-2240
- [30] M.S. Sachdev, M.M. Giray, *A least error squares technique for determining power system frequency*, IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-104, No. 2, February 1985, pp. 437-443
- [31] M.S. Sachdev, Janping Shen, *A new digital technique for measuring frequency at a power system bus*, Developments in Power Protection, 1989, Fourth International Conference on, 1988, pp. 102-106
- [32] M. Sanayene-Pasand, R. Aghazadeh, *A new technique for frequency estimation of distorted power system signals*, Proceedings of the 13th International Conference on Power System Protection, Bled, Slovenia, September 2002

- [33] T.S. Sidhu, M.S. Sachdev, *An iterative technique for fast and accuracy measurement of power system frequency*, IEEE Transactions on Power Delivery, Vol. 13, No. 1, 1998, pp 109-115
- [34] G.A. Smith, P.A. Onions, D.G. Infield, *Predicting islanding operation of grid connected PV inverters*, IEE Proceedings Electric Power Applications, Vol. 147, No. 1, January 2000
- [35] T. Söderström, P. Stoica, *Identyfikacja systemów*, Wydawnictwa Naukowe PWN, Warszawa 1997, ss. 368-375
- [36] V. Terzija, M. Djurič, B. Kovačević, *Voltage phasor and local system frequency estimation using Newton type algorithm*, IEEE Transactions on Power Delivery, Vol. 9, No. 3, July 1994, pp 1368-1374
- [37] Texas Instruments, *TMS320C3x - User's Guide*, Texas Instrument Incorporated, 1997
- [38] J. Staszewski, *Analiza porównawcza szybkich algorytmów pomiaru częstotliwości w systemie elektroenergetycznym*, Sieci elektroenergetyczne w przemyśle i energetyce, IV Konferencja naukowo-techniczna, Wrocław, lipiec 2000, ss. 453-460
- [39] J. Staszewski, *Stanowisko badawcze do weryfikacji algorytmów pomiarowych w automatyce elektroenergetycznej*, VII Konferencja Systemy Czasu Rzeczywistego, Kraków, wrzesień 2000, ss. 455-462
- [40] J. Staszewski, E. Rosołowski, *Wpływ wstępnego przetwarzania sygnałów na pomiar częstotliwości w systemie elektroenergetycznym*, X Międzynarodowa Konferencja Aktualne Problemy w Elektroenergetyce, Gdańsk - Jurata, czerwiec 2001, ss. 225-232
- [41] J. Szafran, W. Rebizant, *Nowa metoda pomiaru częstotliwości w systemie energoelektrycznym*, Przegląd Elektrotechniczny R. LXXIII, 11/97, ss. 290-294
- [42] J. Szafran, W. Rebizant, M. Michalik, *Simulative analysis of a new type wide range estimator of protection criterion values*, Proceedings of 11th International Conference on Power System Protection PSP'98, Bled, Slovenia, 30 Sept.-2 Oct. 1998, pp. 53-58
- [43] J. Szafran, W. Rebizant, M. Michalik, *Adaptive estimation of wide range frequency changes for power generator protection and control purposes*, IEE Proceedings Generation, Transmission and Distribution, Vol. 146, No 1, January 1999, pp. 31-36
- [44] J. Szafran, A. Wiszniewski, *Algorytmy pomiarowe i decyzyjne cyfrowej automatyki elektroenergetycznej*, WNT, Warszawa 2001
- [45] A. Wiszniewski, *Algorytmy pomiarów cyfrowych w automatyce elektroenergetycznej*, WNT Warszawa 1990
- [46] Jun-Zhe Yang, Chih-Wen Liu, *A Smart method makes DFT more precise for power system frequency estimation*, Power Engineering Society, Winter Meeting, IEEE Vol. 2, 1999, pp 909-913
- [47] Jun-Zhe Yang, Chih-Wen Liu, *A precise calculation of power system frequency and phasor*, IEEE Transactions on Power Delivery, Vol. 15, No. 2, April 2000, pp. 494-499
- [48] Jun-Zhe Yang, Chih-Wen Liu, *A precise calculation of power system frequency*, IEEE Transactions on Power Delivery, Vol. 16, No. 3, July 2001, pp 361-366
- [49] P. Young, *Recursive estimation and time-series analysis*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1984

