

Rafał Siedlecki

Akademia Ekonomiczna we Wrocławiu

WYKORZYSTANIE FUNKCJI LOGISTYCZNEJ I LOGLOGISTYCZNEJ DO MODELOWANIA CYKLU ŻYCIA PRZEDSIĘBIORSTWA

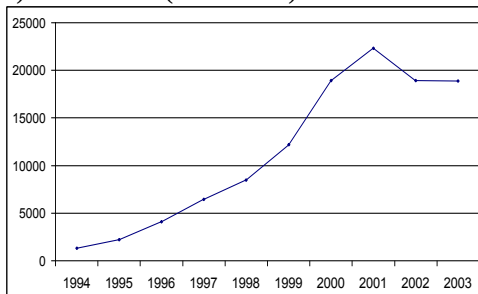
1. Logistyczne prawo wzrostu

W teorii ekonomii można spotkać się z poglądem, że każda działalność wytwórcza podlega logistycznemu prawu wzrostu, którego odmianami są np. prawo malejących przychodów z ziemi lub prawo relatywnie malejących efektywności nakładów. Powyższe prawa oparte są na doświadczeniu i badaniach empirycznych, a sprawdzają się do stwierdzenia, że każda działalność wytwórcza zależy od wielkości nakładów i zastosowanego procesu technologicznego. Można powiedzieć, że przy danym procesie technologicznym, po początku charakteryzującym się wolnym wzrostem, zwiększenie nakładów powoduje dynamiczne zwiększenie efektów do maksimum. Od tego momentu wzrost efektów jest coraz mniejszy aż do jego zaniknięcia. Po tym okresie w niektórych przypadkach może nastąpić gwałtowny spadek. Podobne zależności można znaleźć w naukach dotyczących przedsiębiorstw, w których mówimy o ograniczonym wzroście zainteresowania i sprzedaży danego produktu (cykl życia produktu) czy ograniczonym wzroście udziału w rynku. W każdym przypadku mamy do czynienia z fazami wzrostu, które można zidentyfikować.

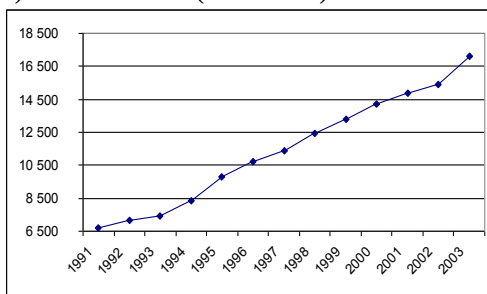
W wypadku firm można powiedzieć, że ich rozwój jest identyfikowany z intensyfikacją sprzedaży. Poszczególne fazy cykli są również zauważalne w przychodach ze sprzedaży, a co za tym idzie – i w zyskach. Wielkość przychodów ze sprzedaży firmy jest nierozzerwalnie związana ze zmianą zaangażowanego przez firmę kapitału, cyklami koniunkturalnymi w sektorze i gospodarce oraz cyklem życia produktu. Według np. J. Grodinsky'ego [1953], kiedy branża się rodzi, w okresie początkowego i szybkiego rozwoju wiele przedsiębiorstw stara się wejść do niej. Następnie ma miejsce okres dominacji najsilniejszych przedsiębiorstw i eliminacja słabszych. W tym czasie nadal następuje silny wzrost, chociaż tempo staje się wolniejsze niż w okresie początkowym. Pierwszy etap zgodnie z propozycją Grodinsky'ego to etap

pionierski, a drugi to etap ekspansji. W etapie końcowym oczekuje się, że branża przestanie rosnać i będzie funkcjonować stabilnie przez dłuższy okres albo ulegnie likwidacji.

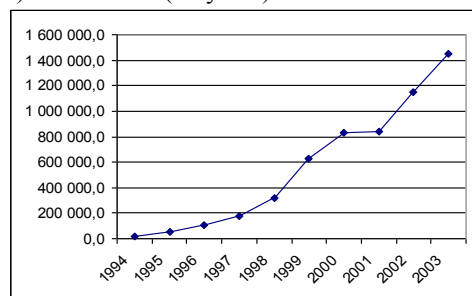
a) CISCO Inc. (w mln dol.)



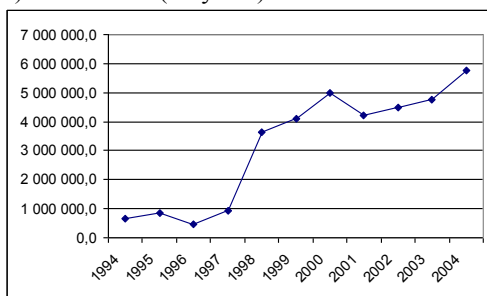
b) McDonald Co. (w mln dol.)



c) Prokom SA (w tys. zł)



d) KGHM SA (w tys. zł)



Rys. 1. Kształtowanie się w czasie przychodów ze sprzedaży wybranych firm

Źródło: opracowanie własne.

Do identyfikacji faz rozwoju firmy, obok przychodów ze sprzedaży, służą takie dane, dzięki którym możemy stwierdzić, czy firma zwiększa swoją wartość. Są to przede wszystkim: wartość aktywów i kapitału własnego (szczególnie wartość rynkowa), wielkość zysku operacyjnego i wielkości mierników *EVA* oraz *CFROI*¹. Można przy tym stwierdzić, że wielkości powyższych parametrów finansowych są powiązane z przychodami ze sprzedaży. W zależności od fazy cyklu rozwoju przyrost tych danych jest różny. W okresie początkowym wyżej wymienione dane mają niewielkie wartości, a ich tempo wzrostu jest nieduże. Po pewnym czasie spółka albo bankrutuje², albo rozpoczyna się dla niej okres intensywnego rozwoju. Na tym etapie występuje wykładniczy wzrost danych finansowych, takich jak właśnie przychody ze sprzedaży, aktywa, wartość firmy. Wzrost z upływem czasu jest coraz

¹ Istnieje wiele wskaźników zarządzania wartością, które nadają się do identyfikacji faz cyklu życia firmy, jednak *EVA* i *CFROI* są najpopularniejsze.

² Najwięcej spółek bankrutuje w pierwszym roku istnienia (zob. np. [Altman 1983]).

mniej i firma wchodzi w okres stabilności. W tej fazie cyklu firma powinna pozostać do momentu, w którym trzeba będzie ją restrukturyzować tak, aby jej wartość i wielkość aktywów i przychodów nie spadły. Można zauważyć, że jeżeli firma jest stabilna i dobrze zarządzana, krzywa przychodów ze sprzedaży przybiera na ogół postać krzywej logistycznej. Na rys. 1 przedstawiono kształtowanie się przychodów wybranych firm (Cisco Sys. Inc. McDonaldCo., Prokom SA, KGHM SA).

Dla wszystkich tych firm można wyodrębnić fazy cyklu rozwoju firmy. Wszystkie one mają za sobą okresy początkowe i intensywnego wzrostu. Oprócz firmy McDonald wszystkie przeszły drobne zahamowanie rozwoju. W przypadku firm polskich (Prokom i KGHM) kryzys wywołany był głównie załamaniem gospodarczym w 2000 r. W przypadku firmy CISCO kryzys spowodował zastój w branży. Należy dodać, że firma ta w pierwszych kwartałach 2004 r. osiągnęła znaczny wzrost przychodów ze sprzedaży.

Wzrost czy spadek przychodów uwidacznia się oczywiście w zyskach, wielkości gotówki i osiągniętej rentowności. Kształtowanie się tych parametrów w odróżnieniu od przychodów, gdzie mamy w większości zachowany długoterminowy trend wzrostowy, ma kształt sinusoidy.

2. Funkcja logistyczna i loglogistyczna

Matematycznym wyrazem logistycznego prawa wzrostu jest funkcja logistyczna. Funkcja ta jest jedną z najczęściej używanych do opisywania zjawisk ekonomicznych czy przyrodniczych. Jest ona jedynym rozwiązaniem równania różniczkowego noszącego w ekonomii nazwę prawa Robertsona:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-c}{a} y (1 - y), \quad (1)$$

przy warunku początkowym:

$$y(0) = \frac{a}{1 + e^b}. \quad (2)$$

Wyraża się wzorem:

$$f(t) = \frac{a}{1 + e^{b - ct}}, \quad (3)$$

gdzie: $a > 0, b > 0, c > 0$.

Krzywa logistyczna jest prostym, dość uniwersalnym, powszechnie stosowanym na świecie i w miarę wiarygodnym narzędziem konstruowania prognoz gospodarczych o odległym horyzoncie. Jest jednocześnie sposobem mierzenia, obserwacji i

analizy sprawności funkcjonowania oraz efektywności działania urządzeń technicznych o wielkiej złożoności lub systemów gospodarczych dużej skali.

Funkcja ta ma dwie asymptoty $y = 0$ i $y = a$, wyznaczające przedział zmienności danego procesu. Górna określa poziom nasycenia. Funkcja ta ma jeden punkt przegięcia, oddzielający fazę przyspieszonego wzrostu od fazy wzrostu malejącego. Inną ważną cechą funkcji logistycznej to jej duża elastyczność, pozwalająca na bardzo dobre przybliżanie danych empirycznych. Funkcja ta nadaje się doskonale do identyfikacji początkowych faz rozwoju firmy, czyli od fazy powstania poprzez fazę intensywnego rozwoju aż do fazy stagnacji. Ma ona jedną poważną wadę, którą jest asymptota pozioma ograniczająca wzrost. Wiadomo, że po intensywnym wzroście wartości wyżej wymienionych danych finansowych albo następuje załamanie, albo powolny wzrost.

W wielu przypadkach w ekonomii i finansach okazuje się, że funkcja logistyczna nie zdaje egzaminu. Dotyczy to głównie zjawisk „nieograniczonego wzrostu”. Jak wiadomo, nie można ograniczać takich wielkości jak np. PKB, płace czy w przedsiębiorstwach przychody ze sprzedaży oraz wartość firmy (oczywiste jest, że celem firmy jest maksymalizacja wartości w długim terminie). Jeżeli nie dojdzie do gwałtownego spadku ich wartości po fazie intensywnego wzrostu, to następuje powolny wzrost (którego tempo powinno spadać do zera). Sposobem na wyeliminowanie wady ograniczonego wzrostu funkcji logistycznej jest zmodyfikowanie tej funkcji przez wprowadzenie do niej np. czynnika $\ln(t)$. Tak zmodyfikowana funkcja nosi nazwę funkcji loglogistycznej (logarytmiczno-logistyczna), zaproponowanej przez Z. Hellwiga [Hellwig, Siedlecki 1989]. Funkcja ta wyraża się wzorem:

$$f(t) = \frac{a \ln t}{1 + e^{b-ct}}, \quad (4)$$

gdzie: $a > 0, b > 0, c > 0$.

Badając przebieg zmienności tej funkcji, możemy przedstawić podstawowe jej własności

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{a \ln t}{1 + e^{b-ct}} = \infty, \quad (5)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{a \ln t}{1 + e^{b-ct}} = -\infty \quad (6)$$

oraz dla $t_1 < t_2$

$$\frac{a \ln t_2}{1 + e^{b-ct_2}} > \frac{a \ln t_1}{1 + e^{b-ct_1}}, \quad (7)$$

Funkcja loglogistyczna, jak widać, jest funkcją stale rosnącą w całej dziedzinie, nie ma punktów ekstremalnych i jest zawsze nieujemna:

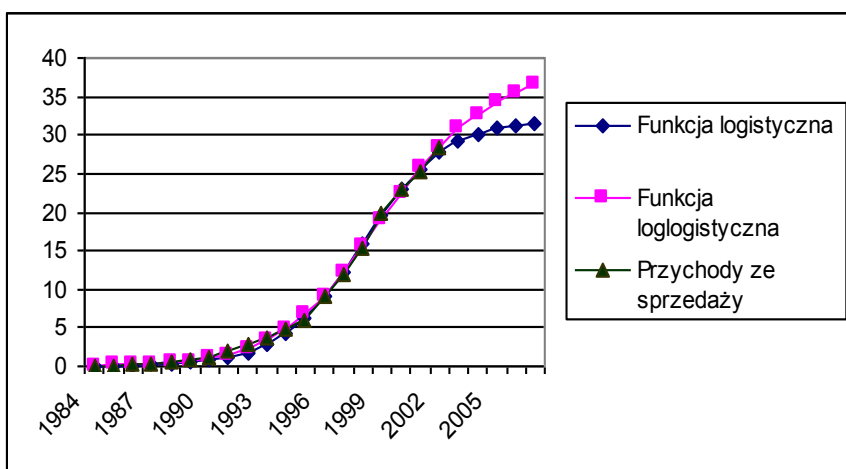
$$\frac{dy}{dt} > 0, \text{ dla } t \geq 1. \quad (8)$$

Funkcje logistyczna i loglogistyczna pozwalają na daleką ekstrapolację szeregów czasowych. Ma to istotne znaczenie przy prognozowaniu faz rozwoju firmy wykorzystującym logistyczne prawo wzrostu, np. przychodów ze sprzedaży czy wielkości aktywów.

Zastosowanie funkcji logistycznej i loglogistycznej do wyznaczenia i prognozowania rozwoju firmy Microsoft na podstawie przychodów ze sprzedaży przedstawia rys. 2. Przedstawiono na nim wygładzenie i prognozy na lata 2003-2008 przychodów ze sprzedaży, sporządzone za pomocą omawianej funkcji loglogistycznej zadanej wzorem:

$$f(t) = \frac{11,86881 \ln t}{1 + e^{5,866949 - 0,3858203 t}} + 0,097,$$

dla której współczynnik determinacji wynosi $R^2 = 0,99879$.



Rys. 2. Przychody ze sprzedaży i ich prognoza dla spółki Microsoft Co.

Źródło: opracowanie własne.

Firma Microsoft w latach 2002-2003 weszła w fazę stabilnego „malejącego” wzrostu sprzedaży. Faza intensywnego wzrostu dla tej firmy rozpoczęła się w latach 1993-1994.

3. Wyznaczanie faz cyklu życia przedsiębiorstwa

Przy prognozowaniu i określaniu faz cyklu rozwoju firmy za pomocą funkcji loglogistycznej i funkcji logistycznej należy zwrócić uwagę na określenie charakterystycznych punktów. Najważniejsze z nich to punkty przegięcia i punkty, które będą wskazywały na zmiany: fazy początkowej na fazę intensywnego wzrostu oraz z fazy intensywnego wzrostu na fazę stagnacji.

Funkcja logistyczna ma jeden punkt przegięcia, który często jest blisko środka fazy intensywnego wzrostu. Funkcja loglogistyczna ma na ogół dwa punkty przegięcia, przy czym pierwszy punkt w modelowaniu cyklu rozwoju ma mniejsze znaczenie, drugi zaś, podobnie jak w przypadku funkcji logistycznej, wskazuje na ogół na środek fazy intensywnego wzrostu. Punkty przegięcia w obu funkcjach wskazują przede wszystkim na zmianę wypukłości funkcji (z wypukłej do dołu na wypukłą do góry), a więc zmianę tempa wzrostu. Aby wyznaczyć punkty przegięcia, należy określić miejsca zerowe drugiej pochodnej, rozwiązując równania:

- dla funkcji logistycznej

$$\frac{3ac^2e^{2b}}{(e^{ct} + e^b)^2} - \frac{2ac^2e^{3b}}{(e^{ct} + e^b)^3} - \frac{ac^2e^b}{(e^{ct} + e^b)^2} = 0, \quad (9)$$

- dla funkcji loglogistycznej

$$a \frac{c^2 t^2 e^{b-ct} (e^{b-ct} - 1) \ln t - 2cte^{b-ct} (e^{b-ct} + e^{b-ct}) - (e^{b-ct})^2}{t^2 (e^{b-ct})^3} = 0. \quad (10)$$

Jak widać, postacie tych pochodnych nie pozwalają na łatwe wyznaczenie miejsc zerowych w zależności od parametrów b i c . Parametr a nie ma wpływu na miejsce zerowe.

Ustalenia momentów zmiany faz cyklu dokonuje się, wykorzystując metody analityczną i ekspercką (którą wyznacza się punkt przejścia do fazy intensywnego wzrostu).

Kiedy zarządzający firmą wyznaczają moment przejścia do fazy intensywnego wzrostu, mogą spróbować dopasować do posiadanych danych funkcje loglogistyczne lub logistyczne. Moment ten jest istotny, ponieważ zła ocena sytuacji spowoduje duże błędy. Dopasowanie funkcji jest niezmiernie trudne, nie wiadomo, jak dana firma może zachować się w przyszłości. Do ewentualnej pomocy można wykorzystać dane historyczne, które, jak się okazuje, w wielu przypadkach są bardzo przydatne. Znając postać analityczną jednej lub kilku funkcji (metoda scenariuszy) oraz (wyznaczając metodą ekspercką) moment przejścia firmy w fazę intensywnego wzrostu, można również wyznaczyć moment przejścia w okres stagnacji.

W tym celu zakłada się, że I pochodna w obu tych momentach jest identyczna. Wyznaczenie momentu przejścia z fazy intensywnego wzrostu oraz punktu przegięcia ilustruje przykład 1.

Pierwsze pochodne funkcji logistycznej i loglogistycznej są następujące:

- funkcja logistyczna

$$\frac{d}{dt} = \frac{ace^{b+ct}}{b + e^{ct}}, \quad (11)$$

- funkcja loglogistyczna

$$\frac{d}{dt} = a \frac{1 + e^{b-ct} + cte^{b-ct} \ln t}{t(b + e^{b-ct})}. \quad (12)$$

Przykład 1

Założmy, że dana jest następująca funkcja loglogistyczna, obrazująca fazy wzrostu pewnej firmy:

$$f(t) = \frac{0,2 \ln t}{1 + e^{5-0,06t}}.$$

Jej pochodna przybiera następującą postać:

$$f'(t) = 0,02 \frac{1 + e^{5-0,06t} + 0,06te^{5-0,06t} \ln t}{t(b + e^{b-ct})}.$$

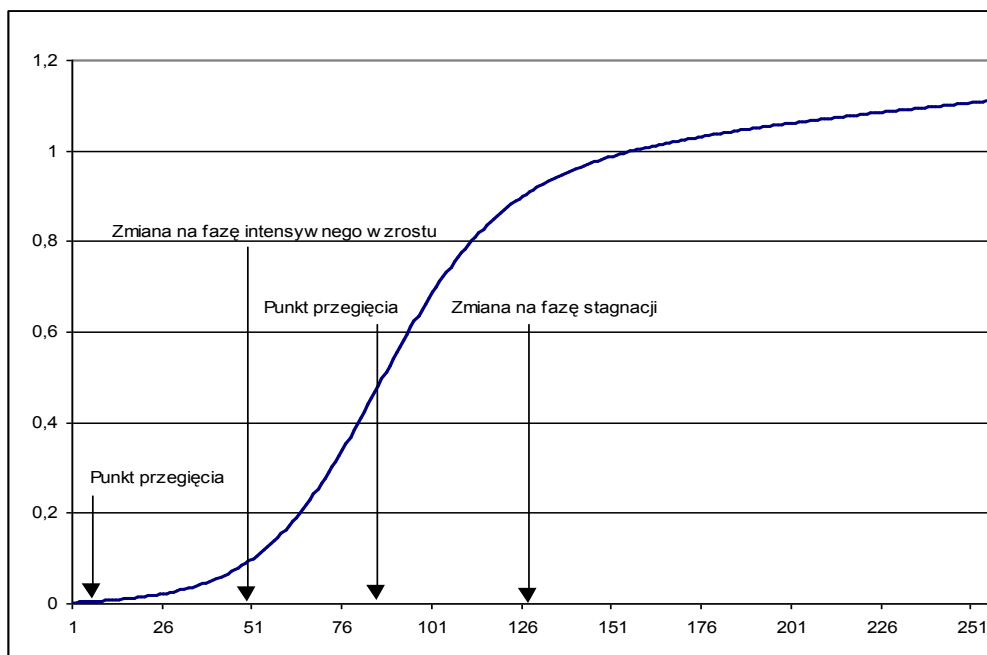
Wyznaczony metodą ekspercką moment przejścia do fazy intensywnego wzrostu wynosi $t = 48$. Jeżeli prawdziwe jest założenie, że I pochodna w tym momencie jest taka sama jak w momencie przejścia do fazy stagnacji, to wyznaczamy drugi punkt przejścia, rozwiązując równanie:

$$\frac{df(48)}{dt} = \frac{df(t)}{dt},$$

gdzie:

$$\frac{df(48)}{dt} = 0,004891.$$

Otrzymujemy dwa rozwiązania, przy czym pierwsze to punkt wyznaczony metodą ekspercką, czyli $t_1 = 48$, a drugie to $t_2 = 128,37$.



Rys. 3. Punkty przegięcia i punkty zmiany faz cyklu rozwoju firmy funkcji loglogistycznej

$$f(t) = \frac{0,2 \ln t}{1 + e^{5-0,06t}}$$

Źródło: opracowanie własne.

W celu wyznaczenia punktu przegięcia należy rozwiązać równanie

$$\frac{df'}{dt} = 0,$$

gdzie:

$$f'' = 0,2 \frac{0,06^2 t^2 e^{5-0,06t} (e^{5-0,06t} - 1) \ln t - 20,06 t e^{5-0,06t} (e^{5-0,06t} + e^{5-0,06t})}{t^2 (e^{5-0,06t})^3}.$$

Otrzymujemy tu dwa rozwiązania $t_1 = 6,282$ oraz $t_2 = 85,6428$, dla których wartości funkcji wynoszą odpowiednio 0,003575 oraz 0,4758. W punktach t_1 i t_2 następuje zmiana tempa wzrostu, przy czym t_1 dla analizy firmy jest nieistotny.

Na rys. 3 przedstawiono wykres omawianej funkcji wraz z zaznaczonymi punktami przegięcia i zmiany faz.

4. Wykorzystanie trendu uzupełniającego (protezy) do modelowania faz kryzysu i ponownego ożywienia

Funkcje logistyczna i loglogistyczna są przydatne do opisu firm o prawidłowym rozwoju, nie przechodzących żadnych kryzysów. Wiadomo, że w dłuższym okresie wiele firm musi liczyć się z kryzysem, który może być związany z kłopotami organizacyjnymi, recesją w branży czy gospodarce. Dochodzi wtedy do załamania logistycznego prawa wzrostu, a więc dana funkcja loglogistyczna nie daje już odpowiedniego dopasowania. W firmach przechodzących kryzys możemy wyróżnić następujące okresy:

- przedkryzysowy,
- kryzysowy,
- pokryzysowy.

Do analizy i modelowania sytuacji przedkryzysowej można wykorzystać funkcję loglogistyczną (trend). Sytuacja kryzysowa w każdej firmie wpływa destrukcyjnie na wartość firmy, jej przychody ze sprzedaży czy inne parametry finansowe.

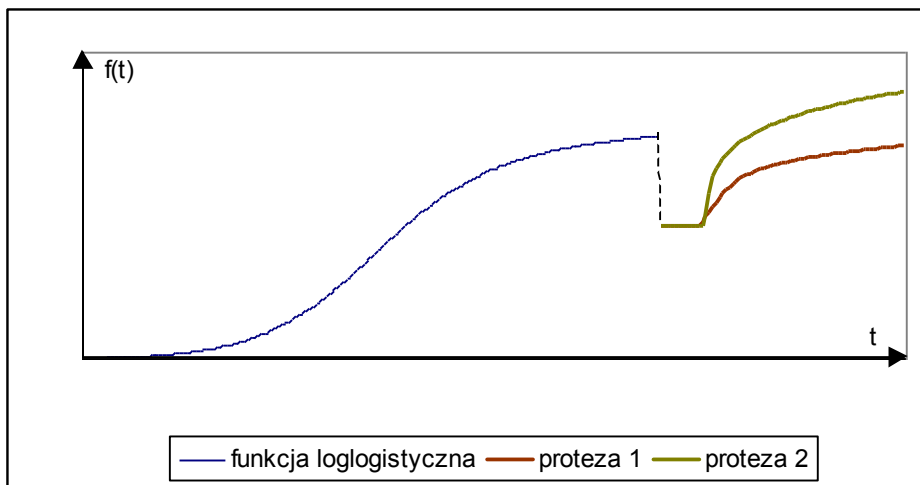
Po kryzysie w większości przypadków do modelowania dalszej trajektorii nie można używać tej samej krzywej. Jeżeli firma nie jest w stanie odrodzić się po załamaniu, to bankrutuje.

Po wyjściu firmy z kryzysu następuje wzrost (zob. rys. 3). W zależności od głębokości kryzysu oraz skuteczności działań antykryzysowych i restrukturyzacji okres „rekonwalescencji” może trwać dłużej lub krócej. Krzywą (funkcję), którą wykorzystujemy do modelowania sytuacji pokryzysowej, a więc uzupełniającą zniszczoną krzywą loglogistyczną lub, inaczej mówiąc, funkcję zastępującą już istniejącą funkcję loglogistyczną, można nazwać trendem uzupełniającym lub protezą³. Proteza ta powinna:

- liniowo zależeć od trzech parametrów,
- być funkcją monotoniczną,
- przy nieograniczonym wzroście mieć malejącą pochodną.

Na rys. 4 przedstawiono przykładowe trendy uzupełniające dla danej funkcji loglogistycznej.

³ Protezę można rozumieć bardzo szeroko. Pojęcie to dotyczy najczęściej organizmów żywych, np. proteza ręki lub nogi. Ogólnie można jednak powiedzieć, że jest to zastępstwo uszkodzonej części substancji stałej lub rekonstrukcji zależności matematycznej.



Rys. 4. Funkcja loglogistyczna z trendem uzupełniającym

Źródło: opracowanie własne.

Jak widać na rys. 4 trend uzupełniający może stanowić nowa funkcja loglogistyczna, dla której należy oszacować ponownie parametry.

Ciekawą propozycją protezy może być zmodyfikowana funkcja hiperboliczna (loghiperboliczna) postaci:

$$f(t) = a \ln t + \frac{b}{t} + \frac{c}{t^2}. \quad (13)$$

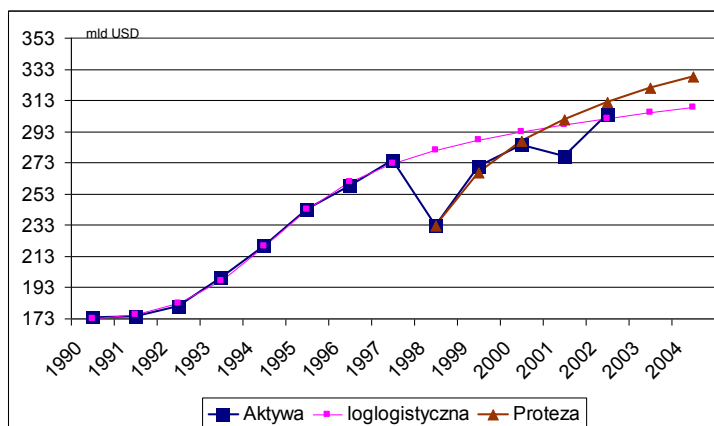
Dzięki tej modyfikacji funkcja ta spełnia wszystkie podane wyżej założenia. Podobnie jak funkcja loglogistyczna jest monotoniczna i odpowiednio elastyczna, przy czym nie ma ona punktu przegięcia, a więc charakteryzuje się malejącym nieograniczonym wzrostem.

Zastosowanie trendu uzupełniającego przedstawiono na przykładzie zmian wielkości aktywów firmy Ford (zob. rys. 5). W roku 1998 w firmie tej nastąpiła sytuacja kryzysowa, co wpłynęło zarówno na spadek wartości aktywów, jak i na inne parametry finansowe. Do 1997 r. bardzo dobrym dopasowaniem w wypadku Forda była funkcja loglogistyczna:

$$f(t) = \frac{50,06101 \ln t}{1 + e^{4,37059 - 0,937762 t}} + 173.$$

Jako protezę po załamaniu zastosowano nową funkcję loglogistyczną o postaci:

$$f(t) = \frac{49,048564 \ln t}{1 + e^{-7,33733 - 3,895159 t}} + 232,712.$$



Rys. 5. Aktywa firmy Ford oraz wygładzenie funkcją loglogistyczną i jej trendem uzupełniającym

Źródło: opracowanie własne.

Funkcję loglogistyczną i protezę tej funkcji wyznaczono na podstawie danych z okresu 1990-2001. Jak widać na rys. 5, po sytuacji kryzysowej aktywa firmy weszły na nową trajektorię. W tym przypadku sytuacja kryzysowa była tylko przejściowa i po niej firma przeszła dalej w fazę stabilnego wzrostu.

Literatura

- Altman E., *Corporate Financial Distress*, John Wiley & Sons, New York 1983.
- Hellwig Z., Siedlecki J., *Krzywa loglogistyczna, jej własności i wykorzystanie w prognozowaniu rozwoju procesów społeczno-gospodarczych*, „Prace Naukowe i Progностyczne” 1989, 4.
- Grodinsky J., *Investments*, The Roland Press, New York 1953.
- Pluta W., *Planowanie finansowe*, PWE, Warszawa 2000.
- Stanisz T., *Funkcje jednej zmiennej w badaniach ekonomicznych*, PWN, Warszawa 1986.
- Siedlecki R., *Metoda wyznaczania finansowych sygnałów ostrzegawczych w cyklu życia przedsiębiorstwa*, praca doktorska, AE, Wrocław 2005.

LOGISTIC AND LOGLOGISTIC FUNCTION IN MODELING CORPORATE LIFE CYCLE

Summary

In this article firm's cycle of life is identified. During the firm's cycle of life changes in revenue, assets and value are observed. It seems that logistic and loglogistic function are very important for modeling business cycle in corporate base on revenue, assets and value.