

Danuta Strahl

DYNAMICZNO-STRUKTURALNA MIARA ROZWOJU OBIEKTÓW HIERARCHICZNYCH

1. Wstęp

W pracy [5] zaproponowałam miarę rozwoju obiektów hierarchicznych uwzględniającą ich wewnętrzne zróżnicowanie ze względu na obiekty niższego rzędu. Obiektami hierarchicznymi nazywać będziemy takie obiekty, w których można określić obiekty niższego rzędu. Obiekty niższego rzędu tworzą zaś organizacyjną sumę wypełniającą obiekt wyższego rzędu. Zatem obiektami hierarchicznymi są:

- kraje, w których wyróżnimy regiony administracyjne,
- regiony, w których wyróżnimy np. powiaty,
- powiaty, w których wyróżnimy gminy,
- sektory gospodarki, w których wyróżnimy przedsiębiorstwa, np. sektor farmaceutyczny i jego przedsiębiorstwa.

W badaniach ekonomicznych bardzo istotne znaczenie ma możliwość stosowania takich miar, które są zorientowane na przyszłość – a więc nie tylko rejestrują tendencje i zjawiska w okresie przeszłym, ale uwzględniają zmienną czasową w taki sposób, by określać przyszłe tendencje do rozwoju, preferując informacje o najwyższym stopniu aktualności. W związku z tym pojawiła się propozycja modyfikacji miary podanej w pracy [5] o aspekty dynamiczne.

2. Koncepcja strukturalnej miary rozwoju obiektów hierarchicznych

W pracy [5] przedstawiona została miara rozwoju obiektów hierarchicznych. Procedura jej budowy jest następująca:

Dany jest zbiór obiektów hierarchicznych $P = \{P_1, P_2, \dots, P_k, \dots, P_K\}$ opisany zbiorem m zmiennych, oznaczonych symbolami $X = \{X_1, X_2, \dots, X_m\}$.

Definicja 1

Obiektami hierarchicznymi nazywać będziemy obiekty P_k , które spełniają zależności ujęte relacjami: (1) i (2).

$$SMROH_k^1 = \sum_{g=1}^G w_g \cdot \frac{n_g^k}{N_k} \cdot 100, \quad (1)$$

gdzie: p_k^r – obiekt niższego rzędu należący do k -tego obiektu hierarchicznego,
 P_k – obiekt hierarchiczny,

$$x_{kj} = \sum_{r=1}^R x_{rj}^k, \quad (2)$$

gdzie: x_{kj} – wartość j -tej zmiennej w k -tym obiekcie hierarchicznym,

x_{rj}^k – wartość j -tej zmiennej w r -tym obiekcie niższego rzędu należącym do obiektu hierarchicznego,

stąd opis liczbowy obiektów hierarchicznych i niższego rzędu ma postać macierzy:

$$\mathbf{X}_k = \begin{bmatrix} x_{11} & & x_{1m} \\ \vdots & x_{kj} & \vdots \\ x_{K1} & & x_{Km} \end{bmatrix}_{K \times m}, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad (3)$$

gdzie: x_{kj} – wartość j -tej zmiennej w k -tym obiekcie hierarchicznym,

$$\mathbf{X}_r^k = \begin{bmatrix} x_{11}^k & \dots & x_{1m}^k \\ \vdots & x_{rj}^k & \vdots \\ x_{R1}^k & \dots & x_{Rm}^k \end{bmatrix}_{R \times m}, \quad r = 1, 2, \dots, R, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad (4)$$

gdzie: x_{rj}^k – wartość j -tej zmiennej w r -tym obiekcie niższego rzędu należącym do obiektu hierarchicznego.

Strukturalną miarę rozwoju obiektów hierarchicznych budujemy w następujących etapach:

Etap I. Normalizacja danych

Elementy macierzy $\mathbf{X}$ poddajemy procedurze normalizacji bądź standaryzacji, bądź unitaryzacji (por. [4; 5; 12; 13; 14]). W tym celu cechy: $X = \{X_1, X_2, \dots, X_m\}$ klasyfikujemy na: stymulanty, destymulanty i nominanty, np. według wzorów następujących:

1° Otrzymujemy znormalizowaną macierz:

$$\mathbf{X}' = \begin{bmatrix} x'_{11} & \dots & x'_{1m} \\ \vdots & x'_{kj} & \vdots \\ x'_{K1} & \dots & x'_{Km} \end{bmatrix}_{K \times m}, \quad (5)$$

gdzie: $x'_{kj} = f(x_{kj})$ – znormalizowana za pomocą funkcji f wartość j -tej zmiennej w k -tym obiekcie.

2° Wyznaczamy dla każdej zmiennej medianę według jednego ze wzorów (por. [2]):

$$Me X_j = \frac{x_{kj}^{i=(K:2)} + x_k^{i=(K:2)+1}}{2} \text{ dla parzystej liczby badanych obiektów,} \quad (6)$$

$$Me X_j = \frac{x_{kj}^{i=(K \cdot m):2} + x_k^{i=(K \cdot m):2+1}}{2} \text{ dla nieparzystej liczby badanych obiektów.} \quad (7)$$

Etap II. Klasyfikacja obiektów niższego rzędu

Proponowana procedura klasyfikacji uwzględnia dwa przypadki. W przypadku pierwszym algorytm klasyfikacji prowadzi do budowy $m+1$ klas oznaczonych symbolem S_g , gdzie $g = 1, 2, \dots, G$ ($G = m+1$), gdy zbiory opisane są za pomocą m zmiennych. W przypadku drugim algorytm klasyfikacji prowadzi do budowy 2^m (czyli $G = 2^m$) klas możliwych kombinacji z m zmiennych.

Rozważmy zatem przypadek pierwszy:

1° Do klasy S_1 wchodziłyby obiekty ze zbioru P_k niższego rzędu, których wartości wszystkich zmiennych X_j , czyli m zmiennych, są wyższe od zadanej statystyki pozycyjnej lub są jej równe. Do ustalenia uwagi przyjmujemy, że statystyką tą będzie mediana (Me), stąd:

$$\bigwedge_j x_{kj} \geq Me x_j, \quad (8)$$

gdzie: $k = 1, 2, \dots, K$, $j = 1, 2, \dots, m$.

2° Do klasy S_2 wchodziłyby obiekty ze zbioru P niższego rzędu (oprócz obiektów wyłonięnych w pkt 1°), których wartości tylko $m-1$ zmiennych spełniają warunek:

$$x_{kj}^1 \geq Me x_j \text{ dla } P_k \notin S_1. \quad (9)$$

m° Do klasy S_g ($g = m$) wchodziłyby obiekty ze zbioru P niższego rzędu, których tylko wartość jednej zmiennej X_j ze zbioru X spełnia warunek (8).

$(m+1)^\circ$ Do klasy S_{g+1} ($g = m+1$) wchodziłyby obiekty P niższego rzędu, których wartość x_{kj} żadnej zmiennej X_j nie spełniają warunku (8).

W przypadku drugim:

1° Klasę S_1 tworzą te obiekty niższego rzędu, których wartości wszystkich m zmiennych X_j spełniają warunek:

$$x_{kj} \geq Me x_j, \quad (10)$$

gdzie: $j = 1, 2, \dots, m$.

2° Klasę S_2 tworzą te obiekty niższego rzędu, których wartości jedynie $m - 1$ zmiennych tworzących jedną z kombinacji $\binom{m}{m-1}$ zmiennych spełniają warunek (9).

3° Klasę trzecią S_3 tworzą te obiekty niższego rzędu, których wartości zmiennych kolejnej kombinacji $(m - 1)$ -elementowej spełniają warunek (9).

Po wyczerpaniu kombinacji $(m - 1)$ -elementowych tworzymy klasy dla kombinacji $(m - 2)$ -elementowych i stawiamy warunek (9).

2^m° Klasę S_g ($g = 2^m$) tworzymy z obiektów niższego rzędu, dla których wartości x_{kj} wszystkich zmiennych X_j nie spełniają warunku (9).

Jak widać, oba przypadki mają wyraźnie odmienne założenia klasyfikacyjne. W przypadku pierwszym przypisujemy identyczne znaczenie wszystkim cechom, rozróżniając jedynie klasy obiektów poprzez liczbę cech spełniających zadane warunki. Natomiast w drugim przypadku rozróżniamy grupy obiektów poprzez identyfikację specyfikacji cech spełniających zadane warunki klasyfikacji.

Etap III. Budowa strukturalnej miary rozwoju obiektów hierarchicznych

Idea strukturalnej miary rozwoju obiektu hierarchicznego zasadza się na uwzględnieniu jego zróżnicowania ze względu na obiekty niższego rzędu określone w procedurze klasyfikacji etapu II.

Propozycja konstrukcji strukturalnej miary rozwoju obiektu hierarchicznego obejmuje dwa warianty. Wariant pierwszy bazuje na liczbie obiektów niższego rzędu w danej klasie rozwoju, wariant drugi uwzględnia zaś dodatkową zmienną ilustrującą potencjał obiektów niższego rzędu w każdej wyróżnionej klasie.

Strukturalna miara rozwoju obiektów hierarchicznych ma postać:

Wariant I

$$SMROH_k^1 = \sum_{g=1}^G w_g \cdot \frac{n_g^k}{N_k} \cdot 100, \quad (11)$$

gdzie: n_g^k – liczba obiektów niższego rzędu w g -tej klasie z k -tego obiektu hierarchicznego ($g = 1, 2, \dots, G$; $G = m + 1$),

N_k – liczba obiektów niższego rzędu ogółem k -tego obiektu hierarchicznego,

w_g – waga dla klasy g ($g = 1, 2, \dots, G$; $G = m + 1$) określona według wzoru:

$$w_g = \frac{l_g^*}{\sum_{g=1}^G l_g}, \quad (12)$$

gdzie: l_g – liczba zmiennych w klasach S_g ($g = 1, 2, \dots, G$) utworzonych według zasad ujętych w II etapie procedury klasyfikacyjnej,

l_g^* – liczba zmiennych X_j (cech) w S_g -tej klasie (gdzie $g = 1, 2, \dots, G$) spełniających warunek:

$$x_{kj} > Me X_j, \quad (13)$$

gdzie: $Me X_j$ – mediana cechy X_j .

Wariant II

$$SMROH_k^2 = \sum_{g=1}^G w_g \cdot \frac{\sum d_{rk}^g}{D_k}, \quad (14)$$

gdzie: d_{rk}^g – wartość cechy ilustrującej potencjał obiektów niższego rzędu zaklasyfikowanych do klasy S_g -tej ($g = 1, 2, \dots, G$; $G = m + 1$) i należących do k -tego obiektu hierarchicznego,

D_k – wartość cechy ilustrującej potencjał k -tego regionu hierarchicznego,

w_g – wagi obliczone według wzoru

$$w_g = \frac{l_g^*}{\sum_{g=1}^G l_g}, \quad (15)$$

gdzie: l_g^* – liczba zmiennych X_j (cech) w S_g -tej klasie (gdzie $g = 1, 2, \dots, G$) spełniających warunek (13),

l_g – liczba zmiennych w klasach S_g ($g = 1, 2, \dots, G$) utworzonych według zasad ujętych w II etapie procedury klasyfikacyjnej.

Wartości strukturalnej miary rozwoju obiektów hierarchicznych (SMROH) zarówno w wariancie I, jak i w II należą do przedziału:

- dla wariantu I:

$$\left[0, \frac{l_g^*}{\sum_{g=1}^G l_g} \cdot \frac{n_g^k}{N_k} \cdot 100 \right], \quad (16)$$

- dla wariantu II:

$$\left[0, \frac{l_g^*}{\sum_{g=1}^G l_g} \cdot \frac{\sum r d_{rk}^*}{D_k} \cdot 100 \right]. \quad (17)$$

Wyższe wartości strukturalnej miary rozwoju oznaczają wyższy poziom rozwoju obiektu hierarchicznego.

3. Ujęcie dynamiczne strukturalnej miary rozwoju obiektów hierarchicznych

Miara strukturalno-dynamiczna uwzględnia rozwój obiektów hierarchicznych w badanych momentach czasowych z przyjęciem zasady postarzania informacji oraz uwzględnia wewnętrzne zróżnicowanie obiektu hierarchicznego w przekroju obiektów niższego rzędu¹.

Obserwacja obiektów hierarchicznych oraz obiektów niższego rzędu w kolejnych momentach czasowych $t = 1, 2, \dots, P$ przynosi następujący ich opis liczbowy:

$$\mathbf{X}_k^t = \begin{bmatrix} x_{11}^t & \dots & x_{1m}^t \\ \vdots & x_{kj}^t & \vdots \\ x_{K1}^t & \dots & x_{Km}^t \end{bmatrix}_{K \times m}, \quad t = 1, 2, \dots, T, \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (18)$$

gdzie: x_{kj}^t – wartość j -tej cechy w k -tym obiekcie hierarchicznym w t -tym momencie obserwacji.

$$\mathbf{X}_k^t = \begin{bmatrix} x_{11}^{kt} & \dots & x_{1m}^{kt} \\ \vdots & x_{rj}^{kt} & \vdots \\ x_{R1}^{kt} & \dots & x_{Rm}^{kt} \end{bmatrix}_{R \times m}, \quad t = 1, 2, \dots, T, \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad r = 1, 2, \dots, R, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (19)$$

¹ Przegląd wielu podejść w budowie miar rozwoju obiektów można znaleźć w [1; 3; 6; 7].

gdzie: x_{rj}^{kt} – wartość j -tej cechy w r -tym obiekcie niższego rzędu należącym do k -tego obiektu hierarchicznego w t -tym momencie obserwacji, przy czym

$$x_{kj}^t = \sum_{r=1}^R x_{rj}^{kt}, t = 1, 2, \dots, T, k = 1, 2, \dots, K, r = 1, 2, \dots, R, j = 1, 2, \dots, m. \quad (20)$$

Macierze (18) i (19) można ująć w postaci macierzy blokowych:

$$\mathbf{X}_k^t = \begin{bmatrix} x_{11} & \dots & x_{1m} \\ \vdots & x_{kj} & \vdots \\ x_{K1} & \dots & x_{Km} \\ \hline x_{11}^t & \dots & x_{1m}^t \\ \vdots & x_{kj}^t & \vdots \\ x_{K1}^t & \dots & x_{Km}^t \\ \hline x_{11}^T & \dots & x_{1m}^T \\ \vdots & x_{kj}^T & \vdots \\ x_{K1}^T & \dots & x_{Km}^T \end{bmatrix}_{K \times T \times m} \quad (21)$$

oraz

$$\mathbf{X}_r^{kt} = \begin{bmatrix} x_{11}^{k1} & \dots & x_{1m}^{k1} \\ \vdots & x_{rj}^{k1} & \vdots \\ x_{R1}^{k1} & \dots & x_{Rm}^{k1} \\ \hline x_{11}^{kt} & \dots & x_{1m}^{kt} \\ \vdots & x_{rj}^{kt} & \vdots \\ x_{R1}^{kt} & \dots & x_{Rm}^{kt} \\ \hline x_{11}^{kT} & \dots & x_{1m}^{kT} \\ \vdots & x_{rj}^{kT} & \vdots \\ x_{R1}^{kT} & \dots & x_{Rm}^{kT} \end{bmatrix}_{T \times R \times m} \quad (22)$$

Strukturalno-dynamiczną miarę rozwoju obiektów hierarchicznych określają wzory:

• wariant I:

$$\text{SDMROH}_k^1 = \frac{2}{T(T+1)} \cdot \sum_{t=1}^T t \cdot \text{SMROH}_k^1, \quad (23)$$

gdzie: $SMROH_k^1$ – zadane przez (11),
 $t = 1, 2, \dots, T$ – momenty obserwacji obiektów hierarchicznych oraz obiektów niższego rzędu,

oraz

- wariant II:

$$SDMROH_k^2 = \frac{2}{T(T+1)} \cdot \sum_{t=1}^T t \cdot SMROH_k^2, \quad (24)$$

gdzie: $SMROH_k^2$ – zadane przez (14).

Wartości strukturalnej miary rozwoju obiektów hierarchicznych (SMROH) zarówno w wariancie I, jak i w II należą do przedziału:

- dla wariantu I:

$$\left[0, \frac{l_g^*}{\sum_{g=1}^G l_g} \cdot \frac{n_g^k}{N_k} \cdot 100 \right], \quad (25)$$

- dla wariantu II:

$$\left[0, \frac{l_g^*}{\sum_{g=1}^G l_g} \cdot \frac{\sum d_{rk}^*}{D_k} \cdot 100 \right]. \quad (26)$$

Wyższe wartości strukturalno-dynamicznej miary rozwoju oznaczają wyższy poziom rozwoju obiektu hierarchicznego.

4. Przykład

Obiektami hierarchicznymi będą kraje UE, w których jako obiekty niższego rzędu zostały wyróżnione regiony na poziomie NUTS 2. Klasyfikację regionów przeprowadzono zgodnie z procedurą podaną w punkcie drugim artykułu na podstawie trzech zmiennych (por. [4]):

- X_1 – stopa bezrobocia w latach 2002 i 2001,
- X_2 – PKB na mieszkańca według PPS (*purchasing power standard*) w latach 2002 i 2001,
- X_3 – wskaźnik dynamiki PKB na mieszkańca w latach 2001-2002 oraz 1998-2001.

Wyniki klasyfikacji regionów podano w tab. 1.

Wartości miar $SMROH_k^1$ obliczono według wzoru (11) i podano w tab. 2.

Tabela 1. Klasyfikacja regionów UE według trzech cech w roku 2000 i 2001

Kraj		Klasyfikacja strukturalna				
		klasa I	klasa II	klasa III	klasa IV	ogółem
Belgia	a	4	2	3	2	11
	b	2	4	2	3	11
Dania	a	1				1
	b		1			1
Niemcy	a	15	12	7	6	40
	b		16	14	10	40
Grecja	a		1	6	6	13
	b		3	6	4	13
Hiszpania	a	3	4	10	1	18
	b	2	4	10	2	18
Francja	a	1	12	12	1	26
	b	4	11	7	4	26
Irlandia	a	1	1			2
	b	1	1			2
Włochy	a	2	8	5	5	20
	b	1	10	2	7	20
Luksemburg	a	1				1
	b		1			1
Holandia	a		11	1		12
	b	10	2			12
Austria	a	8	1			9
	b		9			9
Portugalia	a		1	6		7
	b	1	4	2		7
Finlandia	a	2	2	2		6
	b	1	2	2	1	6
Szwecja	a	4	1	3		8
	b	1	6	1		8
Wielka Brytania	a		19	13	5	37
	b	14	9	12	2	37
Czechy	a		1	3	4	8
	b	1	3	4		8
Cypr	a			1		1
	b		1			1
Estonia	a			1		1
	b				1	1
Litwa	a			1		1
	b			1		1

Tab. 1 cd.

Łotwa	a			1		1
	b			1		1
Malta	a			1		1
	b			1		1
Polska	a			11	5	16
	b			16		16
Słowacja	a		1		3	4
	b		1		3	4
Słowenia	a		1			1
	b		1			1
Węgry	a		1	1	5	7
	b		2	5		7

a – rok 2000, b – rok 2001.

Źródło: obliczenia własne na podstawie danych Eurostatu.

Tabela 2. Wartości miary strukturalnej i strukturalno-dynamicznej

Kraj	SMROH		SDMROH ₁
	H_1	H_2	
Belgia	28,5	24	25,5
Dania	50	33	38,7
Niemcy	31,5	18	22,5
Grecja	10	15	13,3
Hiszpania	24,4	22	22,8
Francja	24,5	26	25,5
Irlandia	42	44	43,3
Włochy	22,6	20,8	21,4
Luksemburg	50	33	38,7
Holandia	31,6	50	43,9
Austria	48,2	33	38
Portugalia	18,6	32,9	28,1
Finlandia	33	25	27,7
Szwecja	35,2	33,6	34,1
Wielka Brytania	23	34	30,3
Czechy	10,2	27	21,4
Cypr	16	33	27,3
Estonia	16	0	5,3
Litwa	16	16	16
Łotwa	16	16	16
Malta	16	16	16
Polska	11	16	14,3
Słowacja	8,5	8,5	8,5
Słowenia	34	33	33,3
Węgry	7,1	20,8	16,2

Źródło: obliczenia własne na podstawie danych Eurostatu.

Literatura

- [1] Jajuga K., *Statystyczna analiza wielowymiarowa*, PWN, Warszawa 1993.
- [2] Luszniiewicz A., Słaby T., *Statystyka stosowana*, PWE, Warszawa 1998.
- [3] *Poziom życia w Polsce i krajach UE*, red. A. Zeliaś, PWE, Warszawa 2004.
- [4] Strahl D., *Miejsce Polski w regionalnej przestrzeni UE*, [w:] *Przestrzenno-czasowe modelowanie i prognozowanie zjawisk gospodarczych*, red. A. Zeliaś, AE, Kraków 2005, s. 49-66.
- [5] Strahl D., *Strukturalna miara rozwoju obiektów hierarchicznych*, Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu nr 1100, *Ekonometria* 16, Wrocław 2006.
- [6] *Taksonomiczna analiza przestrzennego zróżnicowania poziomu życia w Polsce w ujęciu dynamicznym*, red. A. Zeliaś, AE, Kraków 2000.
- [7] Walesiak M., *Uogólniona miara odległości w statystycznej analizie wielowymiarowej*, AE, Wrocław 2002.

DYNAMIC-STRUCTURAL MEASURE OF HIERARCHICAL OBJECTS DEVELOPMENT

Summary

The article presents the proposal of extending structural formula of hierarchical objects development measure by dynamic aspects. There were presented hierarchical objects definitions as well as the scope of information necessary for the construction of development measure which takes into consideration internal diversification of hierarchical objects with reference to lower level units in defined time units. The extended formula covers two variants: the first is based on the number of lower level objects included in the given class of a defined level of development, the second considers (instead of the number of objects) the potential of lower level objects included in a given class of a defined level of development. The article also includes an example which illustrate the suggested procedure of hierarchical objects development evaluation. All countries of the European Union constitute hierarchical objects, while the objects of lower level become territorial units of NUTS 2 level – 254 regions. The dynamic-structural development measure was calculated for the years 2001 and 2002, based on the following variables describing regional development:

X_1 – unemployment rate in 2002 and 2001,

X_2 – GDP/m in PPS (*Purchasing Power Standard*) in the years 2002 and 2001,

X_3 – dynamic indicator of GDP/m in the years 2001-2002 and 1998-2001.

Prof. dr hab. Danuta Strahl jest pracownikiem Katedry Gospodarki Regionalnej w Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu.