

Marcin Hernes, Jadwiga Sobieska-Karpińska

METODY CONSENSUSU W ODNIESIENIU DO HIERARCHICZNYCH I WAŻONYCH NIEPEŁNYCH PODZIAŁÓW UPORZĄDKOWANYCH

1. Wstęp

Metody consensusu mają swoje zastosowanie w sytuacji konfliktu w systemie rozproszonym. Taki konflikt może wystąpić np. w systemie multiagenckim pomagającym podejmowanie decyzji finansowych. Przyjmijmy, że system taki pomaga podjąć decyzję, jaki portfel akcji należy zbudować, aby osiągnąć zamierzony zysk, inwestując na Giełdzie Papierów Wartościowych. W takim przypadku jeden agent może dokonywać analizy fundamentalnej, inny – analizy technicznej itd. Rozwiązania poszczególnych agentów na pewno będą się różnić. Użytkownik systemu natomiast chce otrzymać tylko jedno rozwiązanie problemu (optymalny portfel akcji). W takim przypadku możemy wykorzystać metody consensusu do uzgodnienia jednego, wspólnego rozwiązania.

W niniejszym artykule przedstawiono metody consensusu w odniesieniu do hierarchicznych i ważonych niepełnych podziałów uporządkowanych. Dotychczas określono metody consensusu dla wielu struktur wiedzy agenta, np. odnośnie do podziałów uporządkowanych, pokryć uporządkowanych, pokryć i podziałów hierarchicznych, niepełnych podziałów uporządkowanych, natomiast nie zostały opracowane metody consensusu w odniesieniu do hierarchicznych i ważonych niepełnych podziałów uporządkowanych, które w wielu przypadkach stanowią strukturę wiedzy agenta.

2. Hierarchiczny niepełny podział uporządkowany

W pracy [2] niepełny podział uporządkowany został zdefiniowany jako struktura informacji, z którą mamy do czynienia wtedy, gdy ekspert sklasyfikuje elementy

zbioru tak, że dany element należy tylko do jednej klasy lub nie należy do żadnej z klas. Uogólnieniem niepełnego podziału uporządkowanego jest hierarchiczny niepełny podział uporządkowany. Jeżeli np. zbiór wszystkich zwierząt chcemy podzielić na typy, każdy typ na podtypy, każdy podtyp na gromady itd., to może się zdarzyć, że ekspert dokonujący klasyfikacji nie wie, do jakiego podtypu czy do jakiej gromady zaliczyć dane zwierzę (nic o nim nie wie). Do formalnego opisu takiej sytuacji wykorzystujemy hierarchiczny niepełny podział uporządkowany.

2.1. Definicja hierarchicznego niepełnego podziału uporządkowanego

Definicja 1

Hierarchicznym niepełnym podziałem uporządkowanym skończonego zbioru X , którego dendrytem jest drzewo T , nazywamy funkcję:

$$P: W \cup \{r\} \rightarrow 2^X$$

spełniającą następujące warunki:

- a) $P(r) = X$,
- b) $P(b) \subset P(a)$, jeśli wierzchołek b jest synem wierzchołka a ,
- c) $P(b) \cap P(c) = \emptyset$, jeśli wierzchołki b i c są synami wierzchołka a ,
- d) $\bigcup_{a \in L} P(a) \subseteq X$,

gdzie: T – drzewo zorientowane,

r – korzeń,

W – zbiór wierzchołków nie będących korzeniem,

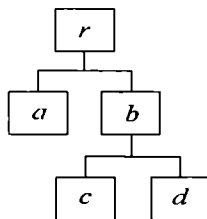
L – zbiór liści tego drzewa.

Zbiór wszystkich hierarchicznych niepełnych podziałów uporządkowanych zbioru X o dendrycie T oznaczamy $NU_T(X)$.

Przykład 1

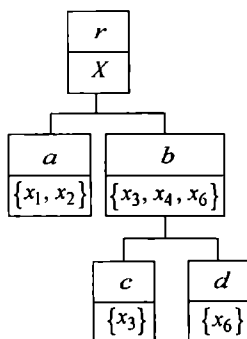
Przykład hierarchicznego niepełnego podziału uporządkowanego:

Przyjmijmy, że zbiór $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ oraz drzewo T ma postać:



Rys. 1. Drzewo zorientowane T

Oto przykładowy hierarchiczny niepełny podział uporządkowany dla tego drzewa:



Rys. 2. Przykładowy hierarchiczny niepełny podział uporządkowany dla drzewa T

Źródło: opracowanie własne.

2.2. Kryteria równomierności consensusu

Kryteria równomierności consensusu mówią, w jakim stopniu consensus jest podobny do danych opinii. Jeżeli consensus jest w dużym stopniu podobny do opinii jednego eksperta, a w małym stopniu podobny do opinii innych ekspertów, to jest on mało równomierny. Jeżeli natomiast consensus jest w takim samym stopniu podobny do opinii wszystkich ekspertów, to jest on bardzo równomierny.

W niniejszym opracowaniu za kryteria równomierności w odniesieniu do consensusu przyjmujemy przedstawioną w pracy [2] funkcję C_n , gdzie $n = 1, 2, \dots$, o sygnaturze:

$$C_n: 2^{NU_T(X)} \rightarrow NU_T(X).$$

Niech dany będzie profil $Z \in 2^{NU_T(X)}$. Funkcja $\omega_n(x, Z) = \sum_{i=1}^M \left[\omega(x, Z^i) \right]^n$ dla

$n = 1, 2, \dots$, $x \in X$, M – liczebność zbioru Z .

Definicja funkcji C_n :

$$x \in C_n(Z) \leftrightarrow \omega_n(x, Z) = \min_{y \in NU_K(X)} \omega_n(y, Z).$$

Własności funkcji C_n zostały przedstawione w pracach [1; 4] i nie będziemy ich rozpatrywać. Ważne jest natomiast to, dla jakich wartości n będziemy stosować metody consensusu. Ponieważ w [1] udowodniono, że od pewnej wartości n consensus będzie miał taką samą postać, w niniejszej pracy zajmujemy się consensusem odnośnie do $n = 1$ oraz $n = 2$. Dla większych wartości n algorytmy wyboru consensusu mają bardzo dużą złożoność obliczeniową, więc w praktyce są trudne w zasto-

sowaniu, ponieważ w procesie przetwarzania danych potrzebna jest duża wydajność. Chcemy bowiem, aby odpowiedź systemu była szybka.

Wiadomo, że dla $n = 1$ consensus jest bardzo podobny do jednego z elementów profilu (profil jest to zbiór odpowiedzi wszystkich ekspertów), natomiast dla $n = 2$ odległości pomiędzy consensusem a elementami profilu mogą być większe, lecz bardziej równomierne. Decyzję, który consensus jest lepszy, podejmujemy na podstawie charakteru konkretnego zadania, które chcemy rozwiązać metodą consensusu.

2.3. Wybór consensusu w odniesieniu do hierarchicznych niepełnych podziałów uporządkowanych

Definicja 2

Jeśli $P, P' \in NU_T(X)$, to mówimy, że podział P' powstał z podziału P w wyniku przesunięcia elementu $x \in X$ z liścia a do liścia b , jeśli $x \in P(a)$ oraz $x \in P'(b)$, a położenie pozostałych elementów w tych podziałach jest takie same.

Możemy określić wagę takich przesunięć: przez Z oznaczamy zbiór wierzchołków drzewa T znajdujących się na najkrótszej drodze łączącej liście a i b . Jeżeli waga wierzchołka jest równa odwrotności jego głębokości, to waga przesunięcia jest równa sumie wag wierzchołków należących do Z .

Definicja 3

Odległością $\chi(P, Q)$ między hierarchicznymi niepełnymi podziałami uporządkowanymi $P, Q \in NU_T(X)$ nazywamy minimalną sumę wag przesunięć potrzebnych do przekształcenia podziału P w podział Q .

Niech A będzie profilem, którego elementami są hierarchiczne niepełne podziały uporządkowane. Przyjmujemy następujące oznaczenie: $\alpha(a, x)$ – oznacza liczbę wystąpień elementu x w liściu a drzewa T w podziałach należących do A .

Twierdzenie 1

Dla danego profilu A dowolny element $x \in X$ należy umieścić w liściu a w consensucie $C(A)$, dla którego zachodzi nierówność:

$$\alpha(a, x) \geq M/2,$$

gdzie M jest liczebnością zbioru A .

Dowód 1

Jeżeli mówimy o odległości, to zachodzi warunek: $\gamma(P, Q) = \chi(Q, P)$. Dla każdego elementu $x \in X$, gdzie $\alpha(a, x) \geq M/2$, odległość consensusu od $M/2 + 1$ elementów profilu jest równa 0, natomiast odległość $M/2 - 1$ elementów profilu jest

równa $\sum_{i=1}^{M/2-1} o_i$, gdzie o_i jest odległością do każdego elementu profilu, dla którego

$o_i > 0$. Jeżeli element umieścilibyśmy w innym liściu drzewa, to co najwyżej odległość $M/2 - 1$ elementów profilu będzie równa zeru, natomiast odległość pozo-

stałych elementów będzie wynosić $\sum_{i=1}^{M/2+1} o_i$ gdzie o_i jest odległością do każdego elementu profilu, dla którego $o_i > 0$. Wiadomo, że $\sum_{i=1}^{M/2-1} o_i < \sum_{i=1}^{M/2+1} o_i$, a więc twierdzenie jest prawdziwe.

3. Ważony niepełny podział uporządkowany

W pewnych przypadkach ekspert nie może jednoznacznie stwierdzić, czy rozpatrywany element należy do danej klasy. Może np. powiedzieć, że w 70% element należy do jednej klasy, a w 30% do drugiej. Do opisu takiej sytuacji możemy wykorzystać ważony niepełny podział uporządkowany.

3.1. Definicja ważonego niepełnego podziału uporządkowanego

Definicja 4

K -klasowym ważonym niepełnym podziałem uporządkowanym skończonego zbioru X , nazywamy macierz $\mathbf{P} = [p_{ij}]_{N \times K}$,

gdzie: $p_{ij} \in [0, 1]$ dla $i = 1, 2, \dots, N$; $j = 1, 2, \dots, K$ oraz $\sum_{j=1}^K p_{ij} \leq 1$ dla $i = 1, 2, \dots, N$.

Zbiór wszystkich K -klasowych podziałów ważonych zbioru X oznaczamy $WNU_K(X)$.

Przykład 2

Przykład ważonego podziału uporządkowanego:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,2 & 0,1 \\ 0,1 & 0,3 & 0,1 & 0,1 \\ 0,4 & 0,5 & 0,6 & 0,8 \end{bmatrix}.$$

3.2. Kryteria dla consensusu

Kryteria dla consensusu przyjmujemy takie same jak dla hierarchicznych niepełnych podziałów uporządkowanych, z tym że profilem jest: $Z \in 2^{WNU_K(X)}$.

3.3. Wybór consensusu w odniesieniu do ważonych niepełnych podziałów uporządkowanych

Funkcja odległości pomiędzy ważonymi niepełnymi podziałami uporządkowanymi jest określona w identyczny sposób jak odległość pomiędzy dwoma punktami w przestrzeni $N \times K$ -wymiarowej.

Definicja 5

Odległością $\kappa(P, Q)$, gdzie $P, Q \in WNU_K$, nazywamy liczbę:

$$\kappa(P, Q) = \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^K (p_{ij} - q_{ij})^2}.$$

Zauważmy, że łatwiej jest tutaj wyznaczyć consensus według kryterium C_2 , ponieważ wyznaczanie consensusu według kryterium C_1 jest problemem złożonym z tego względu, że polega na wyznaczaniu najbliższego punktu do danych punktów w $N \times K$ -wymiarowej przestrzeni euklidesowej. Wyznamy zatem consensus na podstawie kryterium C_2 .

Twierdzenie 2

Macierz $\mathbf{R}$ należy do consensusu $C(A)$ wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi równość:

$$r_{ij} = \frac{1}{M} \sum_{P \in A} p_{ij},$$

gdzie $i=1,2,\dots,N$, $j=1,2,\dots,K$, A jest profilem i ma postać: $A = \{\mathbf{P}^{(i)} | i=1,2,\dots,M\}$,

gdzie $\mathbf{P}^{(i)}$ jest macierzą o rozmiarach $N \times K$ i $\mathbf{P}^{(i)} \in WNU_K$.

Dowód 2

Wyznaczając consensus według kryterium C_2 , bierzemy pod uwagę kwadraty odległości, a więc odległość consensusu od profilu:

$$\kappa(C(A), A) = \sum_{k=1}^M \left(\sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^K (c(A)_{ij} - p_{ij}^{(k)})^2} \right)^2 = \sum_{k=1}^M \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^K (c(A)_{ij} - p_{ij}^{(k)})^2.$$

Suma ta jest najmniejsza wtedy, gdy kwadrat różnicy $(c(A)_{ij} - p_{ij}^{(k)})^2$ jest najmniejszy. Ponieważ $p_{ij}^{(k)}$ jest stałe dla każdego elementu profilu, należy tak wyliczyć $c(A)_{ij}$, aby różnice $c(A)_{ij} - p_{ij}^{(k)}$ były jak najbardziej zbliżone do siebie. Jeżeli np. profil składa się z czterech elementów, dla których $p_{ij}^{(1)} = 7$, $p_{ij}^{(2)} = 3$, $p_{ij}^{(3)} = 3$, $p_{ij}^{(4)} = 3$, to wydawać się może, że w consensusie $c(A)_{ij} = 3$. Będzie tak w przypadku kryterium C_1 , jednak dla kryterium C_2 odległość wynosić będzie $4^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 = 16$. Jeżeli natomiast obliczymy średnią z $p_{ij}^{(k)}$, która wynosi 4, to otrzymamy $3^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 12$. Jest to oczywiście odległość mniejsza, zatem twierdzenie jest prawdziwe.

4. Podsumowanie

W artykule przedstawiono metody consensusu w odniesieniu do hierarchicznych i ważonych niepełnych podziałów uporządkowanych, które są jedną ze struktur informacji eksperckiej. Zdefiniowano hierarchiczny niepełny podział uporządkowany i jego przekształcenia w inny hierarchiczny niepełny podział uporządkowany oraz określono funkcję odległości, kryteria równomierności consensusu i przedstawiono metodę consensusu. Te same działania przeprowadzono odnośnie do ważonego niepełnego podziału uporządkowanego.

Jeżeli stosujemy metody consensusu do rozwiązywania konfliktu, to consensus jest takim rozwiązaniem, które daje stronom konfliktu następujące korzyści [3]:

- każda ze stron jest brana pod uwagę w consensusie,
- każda ze stron konfliktu „traci” najmniej jak tylko to jest możliwe,
- każda ze stron wnosi swój wkład w consensus,
- wszystkie strony akceptują consensus,
- consensus jest reprezentacją wszystkich stron konfliktu.

Przedstawione zagadnienia można wykorzystać w rozproszonych systemach multiagenckich wspomagających podejmowanie decyzji finansowych.

Literatura

- [1] Danilowicz C., Nguyen N.T., *Metody wyboru reprezentacji podziałów i pokryć uporządkowanych*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1992.
- [2] Hernes M., *Uzgadnianie niespójności wiedzy w systemach rozproszonych metodą consensusu*, [w:] *Multimedialne i sieciowe systemy informacyjne*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2004.
- [3] Hernes M., Nguyen N.T., *Deriving Consensus for Incomplete Ordered Partitions*, [w:] *Intelligent Technologies for Inconsistent Knowledge Processing*, red. N.T. Nguyen, Advanced Knowledge International, Australia 2004.
- [4] Nguyen N.T., *Metody wyboru consensusu i ich zastosowanie w rozwiązywaniu konfliktów w systemach rozproszonych*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2002.

CONSENSUS METHODS FOR SOLVING CONFLICTS IN HIERARCHICAL AND WEIGHT INCOMPLETE ORDERED PARTITIONS

Summary

The article presents consensus methods for solving conflicts in hierarchical and weight incomplete ordered partitions. The hierarchical and weight incomplete ordered partitions are an agent know-

ledge structure in many cases. The consensus methods are one of the methods for solving knowledge conflicts in distributed systems. The article presents a definition of the hierarchical and weight incomplete ordered partitions, transformation of the hierarchical and weight incomplete ordered partition in the other hierarchical and weight incomplete ordered partitions, definition of distance among incomplete ordered partitions and the algorithms of consensus methods for two different criteria.

Mgr Marcin Hernes jest doktorantem w Katedrze Komunikacji Gospodarczej w Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu.

Dr hab. Jadwiga Sobieska-Karpińska, prof. AE, jest pracownikiem Katedry Komunikacji Gospodarczej w Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu.