

Magdalena Homa

MOMENTY PROCESU SKUMULOWANYCH ŚWIADCZEŃ W INDYWIDUALNYM UBEZPIECZENIU WIELOOPCYJNYM*

1. Wstęp

W literaturze są szeroko opisywane metody analizy i oceny tradycyjnych ubezpieczeń na życie, których istotą jest określenie podstaw do prowadzenia działalności umożliwiającej ubezpieczycielowi zapewnienie wypłacalności i uniknięcie ruiny. Podstawą oceny określonego przedsięwzięcia, jakim jest ubezpieczenie, jest analiza procesów losowych związanych z ubezpieczeniem. Procesami losowymi badanymi w ubezpieczeniach tradycyjnych są m.in. wielkość roszczeń, łączne przepływy pieniężne czy strata ubezpieczyciela (por. [2; 7; 10]). W praktyce zaś każdy prawie produkt ubezpieczeniowy jedynie oparty jest na modelowym kształcie ubezpieczenia, a w rzeczywistości jest bardziej złożony. Stanowiło to przesłankę do przeprowadzenia analizy procesu skumulowanych świadczeń dla tego typu ubezpieczeń, nazywanych ubezpieczeniami wieloopcyjnymi. Do analizy tej wykorzystana została głównie metodyka analizy przepływów pieniężnych i ich wartości aktuarialnych zaproponowana m.in. przez Norberga (por. [8; 9]), podstawę której stanowią procesy Markowa. Istotą proponowanej w pracy analizy jest określenie momentów procesu skumulowanej wypłaty (skumulowanych roszczeń) w indywidualnym ubezpieczeniu wieloopcyjnym. Ich znajomość umożliwi ubezpieczycielowi dokonanie poprawnej wyceny ubezpieczenia i ocenę jego „ryzykowności”.

2. Model Markowa ubezpieczeń wieloopcyjnych

Umowa ubezpieczenia obejmująca różne przypadki życiowe nazywana jest ubezpieczeniem wieloopcyjnym. Warunki ogólne ubezpieczenia specyfikują przy-

* Praca naukowa finansowana ze środków KBN w latach 2004-2005 jako projekt badawczy nr 1H02B00926.

padki życiowe, których dotyczy umowa ubezpieczenia podstawowego (opcje podstawowe) i ubezpieczeń dodatkowych (opcje dodatkowe). Każdemu z tych przypadków życiowych odpowiada odpowiednia opcja polisy ubezpieczeniowej. Innymi słowy każdemu przypadkowi życiowemu osoby ubezpieczonej odpowiada określony stan ze zbioru $S = \{H, S_1, S_2, \dots, S_k, D\}$ oznaczającego przestrzeń możliwych stanów. Zmiana sytuacji życiowej ubezpieczonego powoduje zmianę stanu (statusu) polisy ubezpieczeniowej. Model opisujący dynamikę zmian sytuacji życiowych osoby ubezpieczonej jest więc jednocześnie modelem opisującym dynamiczny charakter aktywizacji możliwych opcji polisy.

Do opisu zmian stanów od momentu zawarcia umowy ubezpieczenia wykorzystywana będzie funkcja $X(t)$, gdzie t ($t \in T$) oznacza czas, jaki upłynął od rozpoczęcia umowy ubezpieczenia. Zauważmy, że każdy przypadek życiowy jest zdarzeniem losowym, więc dla każdej chwili t $X(t)$ jest zmienną losową i $\{X(t)\}_{t \in T}$ jest procesem stochastycznym przyjmującym wartości ze skończonej przestrzeni stanów S . Przy modelowaniu ubezpieczeń wieloopcyjnych należy więc uwzględnić uwarunkowania losowe, co związane jest z rezygnacją z modeli deterministycznych na rzecz probabilistycznych opartych na wykorzystaniu procesów stochastycznych. Wśród modeli probabilistycznych stosowanych w ubezpieczeniach na życie i dożycie szczególne miejsce zajmują modele Markowa, czyli modele zbudowane z wykorzystaniem procesów Markowa (por. [4; 6; 8]). Są to również procesy, które umożliwiają opisanie procesu towarzyszącego ubezpieczeniu wieloopcyjnemu.

Podstawowymi wielkościami określającymi ewolucję procesu $\{X(t)\}_{t \in T}$ są prawdopodobieństwa przejścia między poszczególnymi stanami z przestrzeni S w dowolnych momentach trwania ubezpieczenia. Należy więc określić prawdopodobieństwa warunkowe, pod warunkiem wszystkich możliwych zdarzeń losowych, które zaszły w przeszłości. Zbiór wszystkich możliwych zdarzeń losowych, które zaszły do chwili t , oznacza się jako F_t i nazywa historią procesu $\{X(t)\}_{t \in T}$. Prawdopodobieństwo przejścia wyraża się wówczas następująco: $P(X(u) = j | F_t)$. Dla procesów Markowa prawdopodobieństwo warunkowe $P(X(u) = j | F_t)$ nie zależy od całej historii procesu $\{X(t)\}$, a jedynie od aktualnego stanu tego procesu (czyli aktywnej opcji polisy) w chwili t . Wobec tego prawdopodobieństwo przejścia ze stanu j w momencie t do stanu k w momencie u (dla $0 \leq u < t$) zdefiniowane jest następująco:

$$P_{jk}(u, t) = P(X(t) = k | X(u) = j). \quad (1)$$

Jeśli $u = t$, to prawdopodobieństwo przejścia jest następujące:

$$P_{jk}(t, t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } j \neq k, \\ 1 & \text{dla } j = k. \end{cases} \quad (2)$$

Określenie prawdopodobieństwa przejść dla $u = t$ wynika z faktu, że proces $\{X(t)\}$ w momencie t może znajdować się tylko w jednym ze stanów.

Prawdopodobieństwo pozostania w stanie j od momentu t do u zdefiniowane jest następująco:

$$P_{jj}(u, t) = P(X(z) = j \text{ dla } u \leq z \leq t | X(u) = j). \quad (3)$$

Interesująca jest zależność między matematyczną notacją stosowaną do opisu procesów Markowa a tradycyjną notacją aktuarialną stosowaną w ubezpieczeniach życiowych. Zauważmy, że w notacji matematycznej wiek wstępu osoby ubezpieczanej nie jest uwzględniony. Aby móc zastosować notację aktuarialną stosowaną w ubezpieczeniach na życie, należy w sposób jawny uwzględnić wiek wstępu ubezpieczonego, który oznaczamy przez x . Zauważmy, że w momencie t trwania umowy ubezpieczenia, ubezpieczony jest w wieku $x + t$. W tym celu wykorzystuje się równoważny proces Markowa określony jako $\{X(x+t)\}_{t \in T}$. Proces ten jest odpowiednikiem procesu Markowa $\{X(t)\}_{t \in T}$, który uwzględnia w sposób jawny wiek wstępu ubezpieczonego. Wówczas, zgodnie z notacją aktuarialną, prawdopodobieństwa warunkowe dla modelu Markowa oznaczone są następująco:

$${}_t p_x^{jk} = P(X(x+t) = k | X(x) = j) \quad (4)$$

oraz

$${}_t p_x^{jj} = P(X(x+z) = j \text{ dla } 0 \leq z \leq t | X(x) = j). \quad (5)$$

Zmiany stanów mogą zachodzić w dowolnym momencie trwania ubezpieczenia. Wówczas zamiast prawdopodobieństw przejścia stosowane są intensywności przejścia ze stanu i do stanu j oznaczane przez $\mu_{ij}(t)$ i zdefiniowane są następująco (por. [8; 10]):

$$\mu_{ij}(t) = \lim_{u \rightarrow t} \frac{P_{ij}(t, u)}{u - t} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{P_{ij}(t, t + dt)}{dt}. \quad (6)$$

Ponieważ wiek wstępu ma wpływ na indywidualną zachorowalność, rekonwalescencję i umieralność, matematyczna notacja intensywności $\mu_{ij}(t)$ musi być interpretowana w następujący sposób: $\mu_{ij}(t) = \mu_{ij}(x+t)$ dla $t \geq 0$.

3. Proces skumulowanych świadczeń

Procesami reprezentującymi wielkości wypłaconych świadczeń w ubezpieczeniu wieloopcyjnym są procesy oznaczone: $\{C_j(t)\}$, $\{D_j(t)\}$ oraz $\{C_{jk}(t)\}$. Są to odpowiednio: $C_j(T)$ to wypłacane w okresie T renty, $D_j(T)$ to jednorazowe świadczenia wypłacane z tytułu dożycia określonego wieku oraz $C_{jk}(t)$ to jednorazowe świadczenia wypłacane przez ubezpieczyciela z tytułu zajścia określonego zdarzenia losowego w okresie T . Świadczenia te możemy podzielić na dwa rodzaje: związane z określonym stanem j procesu $\{X(t)\}_{t \in T}$, obejmujące renty i świadczenia wypłacane z tytułu dożycia określonego wieku, oraz świadczenia związane z przejściem procesu ze stanu j do stanu k , obejmujące wszystkie pozostałe świadczenia jednorazowe. Rozpatrując płatności związane ze zmianą stanu, należy zauważyć, że w dowolnym odcinku czasu T proces $\{X(t)\}_{t \in T}$ może kilkakrotnie zmienić stan. Niech $N_{jk}(t)$ oznacza liczbę przejść procesu $\{X(t)\}$ ze stanu j do k w czasie $[0, t]$, co zapisuje się następująco:

$$N_{jk}(t) = \#\{\tau \in (0, t]: X(\tau - 0) = j, X(\tau) = k\}.$$

Odpowiednie złożenie procesów wielkości wypłaconych świadczeń prowadzi m.in. do ogólnego procesu skumulowanych świadczeń nazywanego również procesem skumulowanych roszczeń (por. [1; 10]) oznaczonego w pracy $\{W(t)\}$.

Definicja [9]

Wycena strumienia finansowego $B(T)$, czyli funkcja zaktualizowanych (na moment t) wartości strumienia płatności dokonanych w okresie T , określona jest następującym wzorem:

$$ZB_t(T) = \frac{1}{v(t)} \int_T v(\tau) dB(\tau), \quad (7)$$

gdzie $v(t)$ – funkcja dyskontująca.

Gdy rozpatrywany jest model kapitalizacji ciągłej, stopy procentowe zastępowane są intensywnością oprocentowania. W tym przypadku funkcja dyskontująca dana jest wzorem:

$$v(t) = e^{-\delta \cdot t}. \quad (8)$$

Według wzoru (7) wycenia się poszczególne strumienie finansowe związane z ubezpieczeniem wieloopcyjnym. Innymi słowy, wyznacza się zaktualizowaną wartość wypłacanych rent $\{C_j(t)\}$, jak również jednorazowych świadczeń wypłacanych z tytułu dożycia określonego wieku – $D_j(T)$ i z tytułu zajścia określonego

zdarzenia losowego – $C_{jk}(T)$. Stanowią one podstawę wyceny strumienia finansowego skumulowanych świadczeń $W(t)$. Po uwzględnieniu strumieni płatności charakterystycznych dla ubezpieczenia wieloopcyjnego zaktualizowana wartość skumulowanych świadczeń zgodnie ze wzorami (7)-(8) jest procesem losowym o następującej postaci:

$$ZW_t(T) = \int_T e^{-\delta(\tau-t)} dW(\tau) = \underbrace{\sum_j \int_T e^{-\delta(\tau-t)} I_j(\tau) dC_j(\tau) + \sum_j \int_T e^{-\delta(\tau-t)} I_j(\tau) dD_j(\tau)}_{\text{świadczenia związane ze stanem } j} + \underbrace{\sum_j \sum_{k \neq j} \int_T e^{-\delta(\tau-t)} c_{jk}(\tau) dN_{jk}(\tau)}_{\text{świadczenia związane z przejściem procesu ze stanu } j \text{ do } k}, \quad (9)$$

gdzie $I_j(t) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } X(t) = j, \\ 0 & \text{gdy } X(t) \neq j. \end{cases}$

Równoważna postać wzoru (9) jest następująca:

$$ZW_t(T) = \sum_j \int_T e^{-\delta(\tau-t)} I_j(\tau) dW_j(\tau) + \sum_j \sum_{k \neq j} \int_T e^{-\delta(\tau-t)} c_{jk}(\tau) dN_{jk}(\tau), \quad (10)$$

gdzie $\{W_j(t)\}_{t \in T}$ jest procesem uwzględniającym wszystkie świadczenia związane ze stanem j .

4. Momenty procesu skumulowanych świadczeń

Podstawą wyznaczenia charakterystyk funkcyjnych badanego procesu są momenty zwykłe i mieszane poszczególnych zaktualizowanych strumieni płatności. Wartość oczekiwaną zaktualizowanych strumieni płatności (świadczenia lub składki) oblicza się jako warunkową wartość oczekiwaną płatności, pod warunkiem historii procesu $\{X(t)\}_{t \in T}$. Do wyznaczenia wariancji, odchylenia standardowego i innych charakterystyk funkcyjnych potrzebna jest również znajomość momentów wyższych rzędów, dlatego wyprowadzone zostały wzory na momenty zwykłe i mieszane poszczególnych strumieni płatności.

Wartość oczekiwana składek płaconych przez ubezpieczonego w okresie T dana jest wzorem:

$$E(Z\Pi(T)|X(t) = i) = \sum_j \int_T e^{-\delta(\tau-t)} \tau_{-t} p_{x+t}^{ij} d\Pi_j(\tau). \quad (11)$$

Analogicznie wartość oczekiwaną świadczeń związanych z określonym stanem (rent oraz jednorazowych świadczeń z tytułu dożycia określonego wieku) wypłacanych przez ubezpieczyciela w okresie T oblicza się ze wzoru:

$$E\left(ZW_j(T)|X(t)=i\right)=\sum_j\int_T e^{-\delta(\tau-t)}\tau_{-t}p_{x+t}^{ij}dW_j(\tau). \quad (12)$$

W ubezpieczeniu wieloopcyjnym wyróżnia się dwa rodzaje świadczeń związanych z określonym stanem: renty oraz jednorazowe świadczenia z tytułu dożycia określonego wieku przez ubezpieczonego. Przyjmując więc $W_j(t) \equiv C_j(t)$, we wzorze (12) otrzymuje się wartość oczekiwaną renty wypłacanej przez ubezpieczyciela, gdy proces $\{X(t)\}_{t \in T}$ jest w stanie j , natomiast jeśli przyjmie się $W_j(t) \equiv D_j(t)$, to wzór ten określa wartość oczekiwaną jednorazowych świadczeń wypłacanych z tytułu dożycia określonego wieku.

W przypadku sumy ubezpieczenia wypłacanej przez ubezpieczyciela w momencie przejścia procesu $\{X(t)\}_{t \in T}$ ze stanu j do stanu k wartość oczekiwaną wyznacza się w następujący sposób:

$$E\left(ZC_t^{jk}(T)|X(t)=i\right)=\sum_j\sum_{k \neq j}\int_T e^{-\delta(\tau-t)}c_{jk}(\tau)\tau_{-t}p_{x+t}^{ij}\mu_{jk}(x+\tau)d\tau. \quad (13)$$

Momenty mieszane wyznacza się, wykorzystując twierdzenie Fubniego o całce podwójnej z funkcji o rozdzielonych zmiennych (por. [3]). Moment mieszany składników płaconych przez ubezpieczonego wyznacza się następująco:

$$\begin{aligned} & E\left(Z\Pi_t^g(\mathfrak{K}) \cdot Z\Pi_t^j(T_2)|X(t)=i\right)= \\ & = E\left(\sum_g \frac{1}{v(t)} \int_{T_1} v(\tau) I_{\{X(\tau)=g\}} d\Pi_g(\tau) \sum_j \frac{1}{v(t)} \int_{T_2} v(s) I_{\{X(s)=j\}} d\Pi_j(s) | X(t)=i\right)= \\ & = \left(\frac{1}{v(t)}\right)^2 \sum_g \sum_j \int_{T_1} \int_{T_2} v(t) v(s) E\left(I_{\{X(\tau)=g\}} d\Pi_g(\tau) I_{\{X(s)=j\}} d\Pi_j(s) | X(t)=i\right)= \\ & = e^{2\delta t} \sum_g \sum_j \int_{T_1} \int_{T_2} e^{-\delta\tau} e^{-\delta s} P(X(\tau)=g, X(s)=j | X(t)=i) d\Pi_g(\tau) d\Pi_j(s). \end{aligned}$$

Ponieważ proces $\{X(t)\}_{t \in T}$ jest procesem Markowa, stosując notację aktuarialną otrzymuje się:

$$\begin{aligned}
E\left(Z\Pi_t^g(T_1) \cdot Z\Pi_t^j(T_2) \middle| X(t) = i\right) &= e^{2\delta t} \sum_g \sum_j \left[\int_{T_1} \int_{T_2} e^{-\delta\tau} e^{-\delta s} \cdot \right. \\
&\cdot \left(I_{\{\tau < s\}} \tau - t P_{x+t}^{ig} s - \tau P_{x+\tau}^{gj} + I_{\{s < \tau\}} s - t P_{x+t}^{ij} \tau - s P_{x+s}^{jg} \right) d\Pi_g(\tau) d\Pi_j(s) + \\
&\left. + \delta_{gj} \int_{T_1 \cap T_2} e^{-2\delta\tau} \tau - t P_{x+t}^{ig} s - \tau d\Pi_g(\tau) \right]. \quad (14)
\end{aligned}$$

Analogicznie wyznacza się moment mieszany renty lub świadczeń wypłacanych przez ubezpieczyciela z tytułu dożycia określonego wieku:

$$\begin{aligned}
E\left(ZS_t^g(T_1) \cdot ZS_t^j(T_2) \middle| X(t) = i\right) &= e^{2\delta t} \sum_g \sum_j \left[\int_{T_1} \int_{T_2} e^{-\delta\tau} e^{-\delta s} \cdot \right. \\
&\cdot \left(I_{\{\tau < s\}} \tau - t P_{x+t}^{ig} s - \tau P_{x+\tau}^{gj} + I_{\{s < \tau\}} s - t P_{x+t}^{ij} \tau - s P_{x+s}^{jg} \right) dS_g(\tau) dS_j(s) + \\
&\left. + \delta_{gj} \int_{T_1 \cap T_2} e^{-2\delta\tau} \tau - t P_{x+t}^{ig} s - \tau dS_g(\tau) \right]. \quad (15)
\end{aligned}$$

W przypadku sumy ubezpieczenia wypłacanej przez ubezpieczyciela moment mieszany procesu losowego wyznacza się następująco:

$$\begin{aligned}
E_{X(t)=i} \left(ZC_t^{gh}(T_1) \cdot ZC_t^{jk}(T_2) \right) &= \\
&= E_{X(t)=i} \left(\sum_g \sum_{h \neq g} \frac{1}{\nu(t)} \int_{T_1} \nu(t) c_{gh}(\tau) dN_{gh}(\tau) \sum_j \sum_{k \neq j} \frac{1}{\nu(t)} \int_{T_2} \nu(s) c_{jk}(s) dN_{jk}(s) \right) = \\
&= \left(\frac{1}{\nu(t)} \right)^2 \sum_g \sum_{h \neq g} \sum_j \sum_{k \neq j} \int_{T_1} \int_{T_2} \nu(t) \nu(s) c_{gh}(\tau) c_{jk}(s) \cdot E\left(dN_{gh}(\tau) dN_{jk}(s) \middle| X(t) = i\right) = \\
&= \frac{1}{\nu^2(t)} \sum_g \sum_{h \neq g} \sum_j \sum_{k \neq j} \int_{T_1} \int_{T_2} \nu(t) \nu(s) c_{gh}(\tau) c_{jk}(s) \cdot \\
&\cdot E\left(I_{\{X(\tau)=g\}} \mu_{gh}(\tau) I_{\{X(s)=j\}} \mu_{jk}(s) \middle| X(t) = i\right) = \\
&= e^{2\delta t} \sum_g \sum_{h \neq g} \sum_j \sum_{k \neq j} \int_{T_1} \int_{T_2} e^{-\delta\tau} e^{-\delta s} c_{gh}(\tau) c_{jk}(s) \cdot \\
&\cdot P\left(X(\tau) = g, X(s) = j \middle| X(t) = i\right) \mu_{gh}(\tau) \mu_{jk}(s) d\tau ds.
\end{aligned}$$

Ponieważ proces $\{X(t)\}$ jest procesem Markowa, stosując notację aktuariálną otrzymuje się:

$$E_{X(t)=i} \left(ZC_i^{gh}(T_1) \cdot ZC_i^{jk}(T_2) \right) = e^{2\delta\tau} \sum_g \sum_{h \neq g} \sum_j \sum_{k \neq j} \left[\int_{T_1} \int_{T_2} e^{-\delta\tau} e^{-\delta s} c_{gh}(\tau) c_{jk}(s) \cdot \right. \\ \left. \cdot \left[I_{\{\tau < s\}} \tau - t p_{x+t}^{ig} s - \tau p_{x+\tau}^{gj} + I_{\{s < \tau\}} s - t p_{x+t}^{ij} \tau - s p_{x+s}^{jg} \right] \mu_{gh}(\tau) \mu_{jk}(s) d\tau ds + \right. \\ \left. + \delta_{gh} \delta_{jk} \int_{T_1 \cap T_2} e^{-2\delta\tau} c_{gh}(\tau) \tau - t p_{x+t}^{ig} \mu_{gh}(\tau) d\tau \right]. \quad (16)$$

Momenty mieszane zaktualizowanej wartości wszystkich rodzajów świadczeń wyznacza się odpowiednio ze wzoru:

$$E_{X(t)=i} \left(ZS_i^g(T_1) \cdot ZC_i^{jk}(T_2) \right) = \\ = E_{X(t)=i} \left(\sum_g \frac{1}{v(t)} \int_{T_1} v(\tau) dS_g(\tau) \cdot \sum_j \sum_{k \neq j} \frac{1}{v(t)} \int_{T_2} v(s) c_{jk}(s) dN_{jk}(s) \right) = \\ = \left(\frac{1}{v(t)} \right)^2 \sum_g \sum_j \sum_{k \neq j} \int_{T_1} \int_{T_2} v(\tau) v(s) E \left(I_{\{X(\tau)=g\}} dS_g(\tau) c_{jk}(s) dN_{jk}(s) | X(t)=i \right) = \\ = \frac{1}{v^2(t)} \sum_g \sum_j \sum_{k \neq j} \int_{T_1} \int_{T_2} v(\tau) v(s) c_{jk}(s) P(X(\tau)=g, X(s)=j | X(t)=i) dS_g(\tau) \mu_{jk}(s) ds = \\ = e^{2\delta t} \sum_g \sum_j \sum_{k \neq j} \int_{T_1} \int_{T_2} e^{-\delta\tau} e^{-\delta s} c_{jk}(s) \cdot \\ \cdot \left\{ I_{\{\tau < s\}} p_{ig}(t, \tau) p_{gj}(\tau, s) + I_{\{s < \tau\}} p_{ij}(t, s) p_{jg}(s, \tau) \right\} dB_g(\tau) \mu_{jk}(s) ds.$$

Po wprowadzeniu notacji aktuariálnej powyższy wzór przyjmuje postać:

$$E_{X(t)=1} \left(ZS_i^g(T_1) \cdot ZC_i^{jk}(T_2) \right) = e^{2\delta t} \sum_g \sum_j \sum_{k \neq j} \int_{T_1} \int_{T_2} e^{-\delta\tau} e^{-\delta s} c_{jk}(s) \cdot \\ \cdot \left\{ I_{\{\tau < s\}} \tau - t p_{x+t}^{ig} s - \tau p_{x+\tau}^{gj} + I_{\{s < \tau\}} s - t p_{x+t}^{ij} \tau - s p_{x+s}^{jg} \right\} dS_g(\tau) \mu_{jk}(s) ds. \quad (17)$$

Z punktu widzenia ubezpieczeń interesujące są następujące charakterystyki funkcyjne procesu: wartość oczekiwana, wariancja, odchylenie standardowe, pozwalające oszacować wartość skumulowanych świadczeń i określić precyzję tego oszacowania. Do wyznaczenia wartości oczekiwanej i wariancji skumulowanych świadczeń wystarczy znajomość odpowiednich momentów poszczególnych strumieni płatności $C^j(t)$, $D^j(t)$ i $D^{jk}(t)$.

Po podstawieniu ich do wzorów na wartość oczekiwaną i wariancję sumy zależnych zmiennych losowych (por. [3]) otrzymuje się wartość oczekiwaną i wariancję skumulowanych świadczeń w ubezpieczeniu wieloopcyjnym. Określenie wielkości podstawowych charakterystyk tego procesu przeprowadza się w dwóch etapach. Pierwszy etap to zbadanie własności i rozkładu całkowitych skumulowanych świadczeń (nazywanych również całkowitą wypłatą) zanim jeszcze umowa zostanie podpisana, z uwzględnieniem wieku osób ubezpieczanych i długości okresu ubezpieczenia. Analiza ta jest dla ubezpieczyciela podstawą wyceny ubezpieczenia. Drugi etap wiąże się z analizą własności procesu przyszłych skumulowanych świadczeń już w okresie trwania ubezpieczenia z uwzględnieniem ewentualnych niedoszacowań w przyszłych płatnościach, w związku ze zmieniającymi się w okresie trwania ubezpieczenia aktywnymi opcjami tego ubezpieczenia. W tym etapie analizy uwzględnia się więc proces aktywizacji opcji w okresie trwania ubezpieczenia i dotyczy on umów ubezpieczenia tradycyjnego z wykupionymi opcjami dodatkowymi.

5. Podstawowe charakterystyki funkcyjne procesu skumulowanych świadczeń dla przykładowych polis wieloopcyjnych

Indywidualne ubezpieczenie na życie

Najprostszym przykładem ubezpieczeń wieloopcyjnych są tradycyjne ubezpieczenia na życie. Ubezpieczenia te obejmują ubezpieczenie na życie (UŻ), czyste ubezpieczenie na dożycie (UD) oraz ubezpieczenie na życie i dożycie (UŻD). Przedmiotem takich ubezpieczeń jest życie ubezpieczonego. W wymienionych ubezpieczeniach wyodrębnione są dwa przypadki życiowe: życie i śmierć, które oznaczone są następująco: H – ubezpieczony żyje, D – ubezpieczony zmarł.

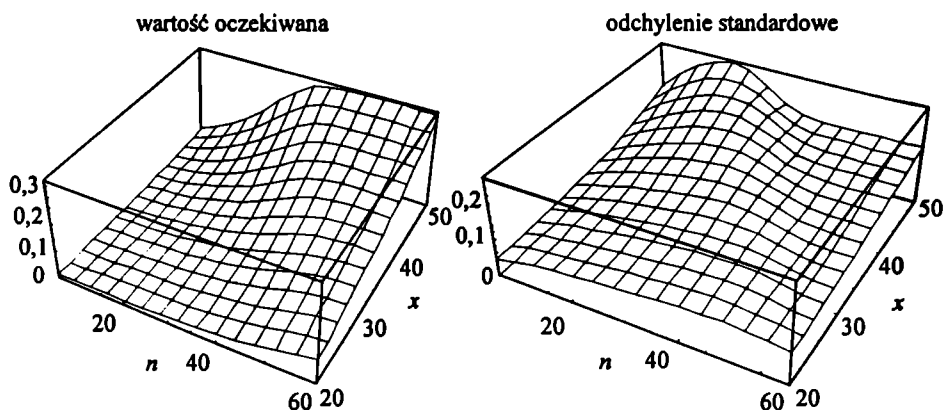
Procesami reprezentującymi wielkości roszczeń w tego typu ubezpieczeniu wieloopcyjnym są $\{C_{jk}(t)\}$ oraz $\{D_j(t)\}$. Dla tych ubezpieczeń występują następujące strumienie płatności:

$$c_{HD}(t) = \begin{cases} c & \text{dla } 0 < t \leq n, \\ 0 & \text{dla } t > n, \end{cases}, d_H(t) = \begin{cases} d & \text{dla } t = n, \\ 0 & \text{poza tym.} \end{cases}$$

Po uwzględnieniu strumieni płatności charakterystycznych dla ubezpieczenia UŻ, UD i UŻD proces skumulowanych świadczeń zgodnie ze wzorem (10) ma następującą postać:

$$\underbrace{d \cdot e^{-\delta(n-t)} I_H(n)}_{\text{świadczenia z tytułu dożycia}} + \underbrace{c \int_0^n e^{-\delta(s-t)} dN_{HD}(s)}_{\text{świadczenia z tytułu śmierci}} \quad .$$

W analizowanym przykładzie dotyczącym tradycyjnego ubezpieczenia UŻ, UD i UŻD (bez opcji dodatkowych) przeprowadzono analizę własności procesu całkowitych skumulowanych świadczeń. W ubezpieczeniach najczęściej używanymi charakterystykami funkcyjnymi są wartość oczekiwana i odchylenie standardowe. Charakterystyki te dla ubezpieczenia wieloopcyjnego wyznacza się na podstawie momentów poszczególnych przepływów pieniężnych określonych wzorami (11)-(17). Wykresy przeciętnej całkowitych skumulowanych świadczeń i odchylenia standardowego dla ubezpieczenia UŻ przedstawiono na rys. 1. Do obliczeń numerycznych przyjęto sumę ubezpieczenia równą 1 j.p., stopę oprocentowania 5% i intensywność zgonu stosowaną przez duńskie towarzystwa ubezpieczeniowe¹ postaci (por. [4; 8]): $\mu_{HD}(t) = \mu(x+t) = 0,0004 + 0,0000034674 \cdot 10^{0,06(x+t)}$.



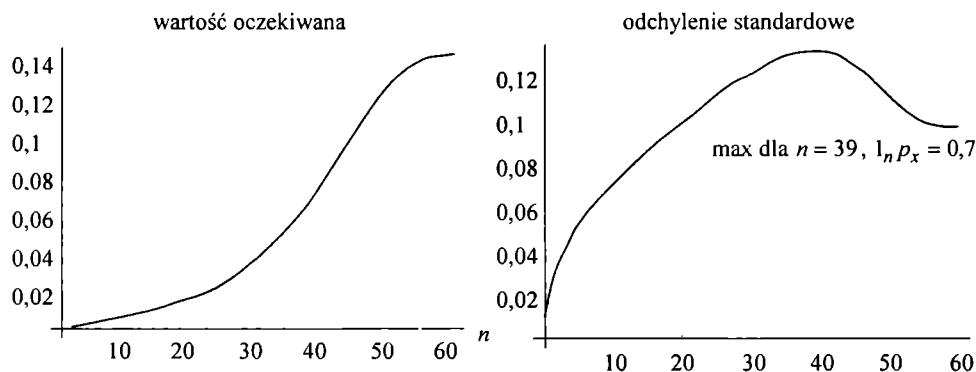
Rys. 1. Wybrane charakterystyki całkowitych skumulowanych świadczeń w ubezpieczeniu UŻ

Źródło: opracowanie własne.

Wartość oczekiwana całkowitych skumulowanych świadczeń, jak można się było spodziewać, jest rosnącą funkcją okresu trwania ubezpieczenia n dla każdego wieku wstępu. Natomiast jeżeli rozpatrujemy ją jako funkcję wieku osoby ubezpieczanej, to możemy zaobserwować, że dla wieloletnich kontraktów ubezpieczeniowych są to funkcje rosnące, natomiast dla małych wartości n jest to funkcja prawie stała. Dokładność oszacowania przeciętnych skumulowanych świadczeń mierzy się za pomocą wielkości odchylenia standardowego. Jego wykres wskazuje, że dla ustalonego wieku osoby ubezpieczanej odchylenie standardowe rośnie od $n = 1$ do maksimum, które osiąga dla n , takiego że ${}_n p_x = {}_n p_x^{HH} = 0,7$ i następnie maleje, aż do $n = 60$. Analogicznie, dla ustalonego n odchylenie standardowe jest funkcją rosnąco-malejącą zmiennej x , która osiąga maksimum dla x , spełniającego warunek:

¹ Polskie firmy ubezpieczeniowe nie udostępniają informacji dotyczących stosowanych funkcji intensywności nie udostępniają również danych umożliwiających ich aproksymację.

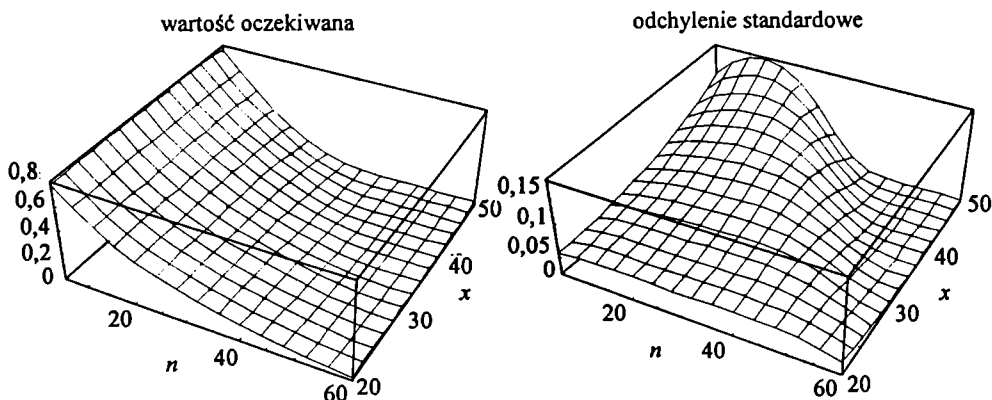
${}_n p_x = {}_n p_x^{HH} = 0,7$, za wyjątkiem dużych wartości n , dla których $\forall x {}_n p_x^{HH} > 0,7$ i wówczas mamy funkcję rosnącą. Przedstawione własności funkcji można dokładniej przeanalizować, rozpatrując umowę zawartą z ubezpieczonym w określonym wieku. Wybrane charakterystyki funkcyjne całkowitych skumulowanych świadczeń dla ubezpieczenia UŻ zawartego z osobą 30-letnią przedstawione są na rys. 2.



Rys. 2. Wybrane charakterystyki całkowitych skumulowanych świadczeń w ubezpieczeniu UŻ zawartym z 30-latką

Źródło: opracowanie własne.

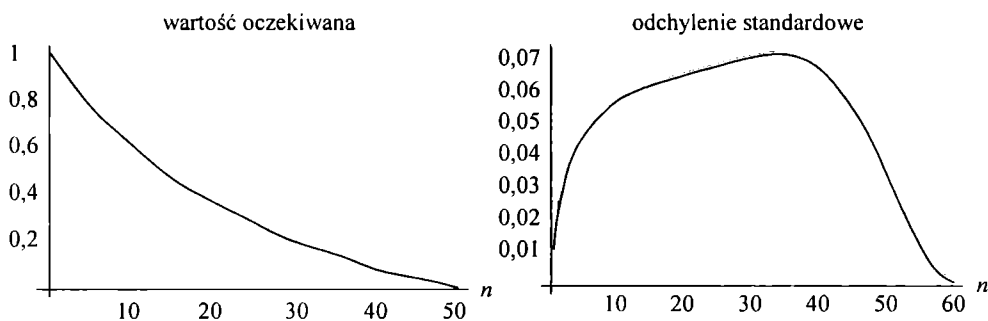
Drugim rodzajem najprostszego ubezpieczenia wieloopcyjnego jest ubezpieczenie na dożycie UD. Wykresy przeciętnej całkowitych skumulowanych świadczeń, ich drugiego momentu, wariancji i odchylenia standardowego dla ubezpieczenia UD przedstawiono na rys. 3.



Rys. 3. Wybrane charakterystyki całkowitych skumulowanych świadczeń w ubezpieczeniu UD

Źródło: opracowanie własne.

W przypadku ubezpieczenia na dożycie UD wartość oczekiwana całkowitych skumulowanych świadczeń jest malejącą funkcją okresu trwania ubezpieczenia n dla każdego wieku wstępu i jest to związane z malejącym prawdopodobieństwem, że nastąpi wypłata świadczenia. Wielkość ta, jako funkcja wieku ubezpieczonego dla dowolnych wartości n , jest funkcją stałą. O dokładności oszacowania przeciętnych skumulowanych świadczeń świadczy wielkość odchylenia standardowego. Jego wykres wskazuje, że w ubezpieczeniu UD dla ustalonego wieku osoby ubezpieczanej odchylenie standardowe rośnie, osiągając maksimum w $n_{\max}$, a następnie maleje aż do $n = 60$. Analogicznie dla ustalonego n odchylenie standardowe jest funkcją rosnąco-malejącą z wyjątkiem dużych wartości n , dla których jest funkcją malejącą. Przedstawione własności funkcji można przeanalizować dokładniej, rozpatrując umowę UD zawartą z mężczyzną w wieku 30 lat. Wybrane charakterystyki funkcyjne (wartość oczekiwana i odchylenie standardowe) całkowitych skumulowanych świadczeń dla ubezpieczenia UD mężczyzny 30-letniego, przedstawione są na rys. 4.



Rys. 4 Wybrane charakterystyki całkowitych skumulowanych świadczeń w ubezpieczeniu UD 30-letniego mężczyzny

Źródło: opracowanie własne

Indywidualne ubezpieczenie na życie z opcją NW

W przypadku ubezpieczenia UŻ, UD, UŻD z opcją dodatkową nieszczęśliwy wypadek NW przedmiotem ubezpieczenia umowy podstawowej jest życie ubezpieczonego w czasie trwania umowy lub dożycie ubezpieczonego do końca okresu ubezpieczenia. Natomiast przedmiotem ubezpieczenia umowy dodatkowej jest zdrowie ubezpieczonego, a ochroną objęte jest całkowite lub częściowe trwałe inwalidztwo spowodowane nieszczęśliwym wypadkiem. Zgodnie z umową podstawową, firma ubezpieczeniowa wypłaca jednorazowe świadczenie w wysokości c j.p. w przypadku śmierci ubezpieczonego lub w wysokości d j.p. w przypadku dożycia końca okresu ubezpieczenia (w zależności od przyjętego wariantu UŻ, UD lub UŻD). W przypadku doznania przez ubezpieczonego trwałego uszczerbku na

zdrowiu w wyniku nieszczęśliwego wypadku firma ubezpieczeniowa, zgodnie z umową dodatkową, wypłaca jednorazowo świadczenie w wysokości $2c$ j.p. w momencie uznania inwalidztwa. Strumienie płatności wynikające z umowy podstawowej i dodatkowej są następujące:

$$d_H(t) = d_S(t) = \begin{cases} d & \text{dla } t = n, \\ 0 & \text{poza tym,} \end{cases}$$

$$c_{HS}(t) = \begin{cases} 2c & \text{dla } 0 \leq t \leq n, \\ 0 & \text{dla } t > n, \end{cases}, \quad c_{HD}(t) = c_{SD}(t) = \begin{cases} c & \text{dla } 0 < t \leq n, \\ 0 & \text{dla } t > n. \end{cases}$$

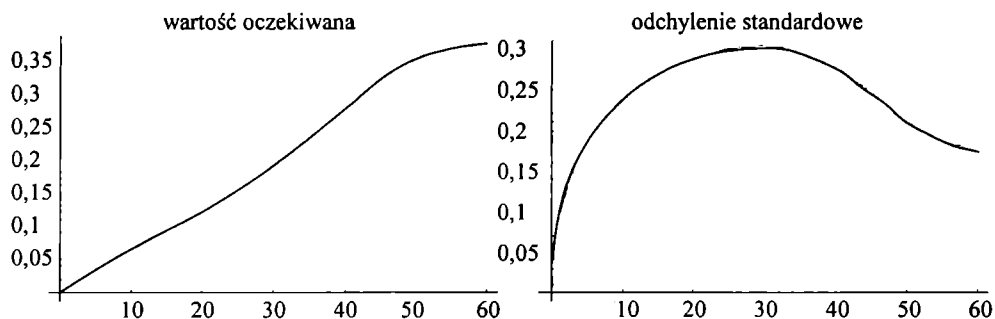
Procesami reprezentującymi wielkości roszczeń w tego typu ubezpieczeniu wieloopcynym są odpowiednio $\{D_j(t)\}$ oraz $\{C_{jk}(t)\}$. Po uwzględnieniu we wzorze (9) strumieni płatności charakterystycznych dla ubezpieczenia UŻ, UD i UŻD z opcją NW otrzymujemy proces skumulowanych świadczeń następującej postaci:

$$ZW_t(t, n) = \underbrace{d \cdot e^{-\delta(n-t)} (I_H(n) + I_S(n))}_{\text{świadczenie z tytułu dożycia}} + \underbrace{c \int_t^n e^{-\delta(n-t)} (dN_{SD}(\tau) + dN_{HD}(\tau))}_{\text{świadczenie z tytułu śmierci}} +$$

$$+ \underbrace{b \int_t^n e^{-\delta(n-t)} I_S(\tau) d\tau + 2c \int_t^n e^{-\delta(n-t)} dN_{HS}(\tau)}_{\text{świadczenie z tytułu śmierci}}.$$

Analizę własności rozkładu procesu skumulowanych świadczeń w przypadku ubezpieczenia z opcjami dodatkowymi można przeprowadzić w dwóch etapach. Pierwszy etap to zbadanie rozkładu całkowitych skumulowanych świadczeń stanowiących dla ubezpieczyciela podstawę wyceny ubezpieczenia. Korzystając ze wzorów (11)-(17), wyznaczono momenty poszczególnych strumieni płatności stanowiących podstawę wyznaczenia wybranych charakterystyk (wartości oczekiwanej i odchylenia standardowego) procesu skumulowanych świadczeń. Wykresy tych charakterystyk w ubezpieczeniu UŻ z opcją NW zawartego z osobą 30-letnią przedstawiono na rys. 5.

W przypadku ubezpieczenia na życie z opcją dodatkową NW zarówno wartość oczekiwana, jak i odchylenie standardowe wykazują takie same własności jak w przypadku tradycyjnego ubezpieczenia UŻ bez opcji dodatkowych. Wartość oczekiwana całkowitych skumulowanych świadczeń jest rosnącą funkcją okresu trwania ubezpieczenia n dla każdego wieku wstępu. O dokładności oszacowania przeciętnych skumulowanych świadczeń świadczy wielkość odchylenia standardowego, którego wykres wskazuje, że dla ustalonego wieku osoby ubezpieczanej



Rys. 5. Wartość oczekiwana i odchylenie standardowe całkowitych skumulowanych świadczeń w ubezpieczeniu UŻ z opcją NW dla 30-latk jako funkcje n

Źródło: opracowanie własne.

odchylenie standardowe rośnie do pewnego punktu $n_{\max}$ spełniającego warunek: $n_{\max} p_x = 0,7$ i dalej maleje aż do $n = 60$.

W umowach ubezpieczenia z opcjami dodatkowymi aktywne opcje zmieniają się w okresie trwania ubezpieczenia. Ubezpieczyciel, dokonując wyceny ubezpieczenia w momencie jego zawierania, nie uwzględnia tych zmian i w ten sposób mogą powstać ewentualne niedoszacowania przyszłych przepływów pieniężnych. W związku z tym ubezpieczyciel powinien dokonać analizy procesu skumulowanych świadczeń dla dowolnego momentu $t \in [0, n]$ trwania ubezpieczenia, z uwzględnieniem procesu aktywizacji opcji ubezpieczenia. Analizę tę można przeprowadzić dla ustalonego momentu, w taki sam sposób, jak w przypadku całkowitych skumulowanych świadczeń.

Literatura

- [1] Błaszczyszyn B., Rolski T., *Podstawy matematyki ubezpieczeń na życie*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 2004.
- [2] Bowers N.L., Gerber H.U., Hickman J.C., Jones D.A., Nesbitt C.J., *Actuarial Mathematics*, Society of Actuaries, Schamburg 1986.
- [3] Feller W., *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1980.
- [4] Habermann S., Pitaco E., *Actuarial Models for Disability Insurance*, Chapman&Hall/CRC London 1999.
- [5] Hoem J.M., *Markov Chain Models in Life Insurance*, „Blätter der deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik” 1972, 9, s. 91-107.
- [6] Hoem J.M., Aalen O.O., *Actuarial Values of Payment Streams*, „Scandinavian Actuarial Journal” 1978, s. 38-47.
- [7] Matłoka M.: *Matematyka w ubezpieczeniach na życie*, Wydawnictwo WSB, Poznań 1997.

-
- [8] Norberg R., *A Time-Continuous Markov Chain Interest Model with Applications to Insurance*, „Applied stochastic models and data analysis” 1995, 11, s. 245-256.
- [9] Norberg R., *Differential Equations for Moments of Present Values in Life Insurance*, „Insurance: Mathematics & Economics” 1995, 17, s.171-180.
- [10] Skalba M., *Ubezpieczenia na życie*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 1999.

THE MOMENTS OF ACCUMULATED PAYMENTS IN INDIVIDUAL MULTI-STATE INSURANCE

Summary

In the literature there are described the methods of analyzing and pricing in traditional life insurance, which permit to describe bases for insurer and estimate the “riskness” of individual contract. But in practice the traditional life insurance respects only the basic insurance products, which in reality are more complicated. This reason determined that in my article I consider a multi-state insurance policies, which are more attractive and better adopted to the needs of clients. With the life insurance and in particular with the multi-state insurance is connected the analysis of the risk processes: loss or income of the insurer, total payments stream and accumulated payments. Therefore the essence of my work is the discussion and analysis of accumulated payments in multi-state insurance. I used the analysis of financial stream and their actuarial value proposed by Norberg. I presented the moments of accumulated payments in individual insurance. Knowledge of these moments permits to correct calculate premiums and reserves as well as to describe and estimate the „riskness” of individual contract. This is also the basis for further analysis of the insurance portfolio.

Dr Magdalena Homa jest pracownikiem Zakładu Statystyki i Badań Operacyjnych Uniwersytetu Wrocławskiego.