

Agnieszka Marciniuk

Akademia Ekonomiczna we Wrocławiu

WARTOŚĆ PRZEPŁYWÓW PIENIĘŻNYCH W UBEZPIECZENIACH ŻYCIOWYCH

1. Wstęp

W tradycyjnej praktyce aktuarialnej składki za ubezpieczenia, wartości aktuarialne rent życiowych oraz rezerwy matematyczne obliczane są przy założeniu stałej stopy procentowej. Jednak występujące na rynku stopy procentowe zmieniają się w czasie. Dlatego też w nowoczesnym podejściu aktuarialnym w obliczaniu składek, rezerw oraz wartości aktuarialnych rent życiowych uwzględnia się zmiany stopy procentowej. Podejście to polega na wycenie odpowiednich strumieni płatności według zasad rynku finansowego, które przedstawiono w artykule. Omówiono przepływy pieniężne dla terminowego ubezpieczenia na dożycie, dożywotnich rent życiowych płatnych z góry, terminowych rent życiowych płatnych z góry oraz rezerw matematycznych dla terminowego ubezpieczenia na dożycie ze składką roczną płatną z góry. Dokonano wyceny wskazanych strumieni płatności, a wyprowadzone wzory matematyczne zastosowano do obliczeń numerycznych.

2. Przepływy pieniężne w ubezpieczeniach życiowych

W celu opracowania ujednoliconej terminologii wszystkie wypłaty świadczeń ubezpieczeniowych oraz finansowych są traktowane jako procesy. Procesy takie w chwili t , gdzie $t \geq 0$, są oznaczane symbolem C_t i nazywane przepływami pieniędzy (przepływami gotówki, strumieniami płatności). Czas t można rozumieć zarówno w sposób ciągły (każda chwila), jak i dyskretny (dni, miesiące, lata itp.), więc $t \in R_+$ lub $t \in N$.

Dalej przedstawiono przykłady strumieni płatności w ubezpieczeniach życiowych.

Terminowa renta pewna jest to taka renta, w której przez ustalony z góry okres (np. n lat) wypłacane jest świadczenie w wysokości ustalonej z góry, niezależnie od tego, czy ubezpieczony żyje, czy też nie. Świadczenie w wysokości np. 1 jed-

nostki pieniężnej (1 j.p.) wypłacane jest w określony sposób, np. na koniec (z dołu) lub początek (z góry) roku, miesiąca lub też w sposób ciągły. W przypadku renty pewnej płatnej z góry ostatnia wypłata następuje na początku n -tego roku. W związku z powyższym strumieniem płatności dla renty pewnej płatnej z góry w chwili t jest suma wypłat do tego momentu, czyli suma $\lceil t \rceil$ jednostek pieniężnych, gdzie $\lceil t \rceil$ oznacza górną część całkowitą liczby (sufit), czyli najmniejszą liczbę całkowitą, nie mniejszą od t . Jeżeli np. $t = 0$, to $\lceil t \rceil = 0$ i oznacza to, że wypłata nie nastąpiła. Jeżeli np. $t = 1,5$, to $\lceil t \rceil = 2$, czyli nastąpiły dwie wypłaty, tzn. pierwsza na początku pierwszego roku (w chwili $t = 0$) i druga na początku drugiego roku (w chwili $t = 1$). Strumień płatności jest więc w tym przypadku sumą rozpoczętych lat. Ogólnie całkowity strumień płatności w chwili $t \geq 0$ definiuje się następująco

$$C_t = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{(t \geq k)},$$

gdzie $\mathbf{1}_{(t \geq k)}$ oznacza funkcję zero-jedynkową, która przybiera wartość 1, gdy $t \geq k$, oraz 0, gdy $t < k$.

W przypadku, gdy wypłata świadczeń rentowych, uzależniona jest od czasu życia osoby ubezpieczonej, mówimy o rencie życiowej. Niech zmienna losowa T_x oznacza przyszły czas życia osoby w wieku x . Zmienna losowa T_x ma rozkład ciągły. Całkowitą przyszłą liczbę lat, które osoba w wieku x przeżyje do śmierci, określa zmienna losowa K_x . Proces przepływu gotówki w przypadku bezterminowej renty życiowej ze świadczeniem w wysokości 1 j.p. płatnym z góry w chwili $t \geq 0$ zdefiniowany jest następująco:

$$C_t = \sum_{k=0}^{K_x} \mathbf{1}_{(t \geq k)}, \quad (1)$$

przy czym ostatnia wypłata następuje na początku roku, w którym umiera ubezpieczony. Strumień płatności jest to zatem suma $K_x + 1$ jednostek pieniężnych. W chwili wyznaczania wartości strumienia pieniężnego wiadomo już, czy ubezpieczony jeszcze żyje czy też nie. W przypadku renty terminowej płatnej z góry ostatnia wypłata następuje na początku n -tego roku, jeżeli ubezpieczony przeżył n lat (tzn. $K_x = n, n+1, \dots$), lub na początku roku K_x , jeżeli ubezpieczony zmarł w ciągu pierwszych n lat od momentu zawarcia polisy (tzn. $K_x = 0, 1, \dots, n-1$). Strumień płatności w tym przypadku w chwili $t \geq 0$ jest więc zdefiniowany następująco:

$$C_t = \sum_{k=0}^{\min(K_x, n-1)} \mathbf{1}_{(t \geq k)}. \quad (2)$$

Określmy przepływ pieniężny w bezterminowym ubezpieczeniu na wypadek śmierci, gdy świadczenie w wysokości 1 j.p. wypłacane jest w chwili śmierci ubezpieczonego lub na koniec roku jego śmierci. W pierwszym przypadku przepływ pieniężny jest to 1 j.p., gdy ubezpieczony nie żyje już w chwili t , lub zero, gdy ubezpieczony w chwili t jeszcze żyje. Strumień pieniężny określony jest więc następująco:

$$C_t = \mathbf{1}_{(t \geq T_x)}. \quad (3)$$

W przypadku wypłaty świadczenia na koniec roku śmierci ubezpieczonego przepływ gotówki definiuje się w następujący sposób:

$$C_t = \mathbf{1}_{(t \geq K_x + 1)}. \quad (4)$$

W przypadku terminowego ubezpieczenia na dożycie świadczenie w wysokości 1 j. p. jest wypłacane, gdy osoba przeżyje z góry ustalony okres (np. n lat). Przepływ pieniężny definiuje się następująco:

$$C_t = \mathbf{1}_{(T_x \geq n)} \cdot \mathbf{1}_{(t \geq n)} = \mathbf{1}_{(K_x \geq n)} \cdot \mathbf{1}_{(t \geq n)}. \quad (5)$$

Nie ma znaczenia, czy w powyższym wzorze występuje zmienna losowa T_x czy K_x , gdyż świadczenie i tak jest wypłacane na koniec n -tego roku.

W celu zdefiniowania procesu rezerw w przypadku terminowego ubezpieczenia na dożycie ze składką roczną płatną z góry zostanie wprowadzone oznaczenie składki netto w takim ubezpieczeniu. Symbolem $A_{x:\overline{n}|}^1$ oznacza się jednorazową składkę netto w ubezpieczeniu na dożycie na n lat, zaś symbolem $P(A_{x:\overline{n}|}^1)$ lub $P_{x:\overline{n}|}^1$ składkę roczną płaconą z góry w takim ubezpieczeniu. Przepływ pieniężny w przypadku rezerw w chwili t jest to różnica wypłat i wpłat, które nastąpiły do chwili t . Strumień płatności w przypadku ubezpieczenia na życie ze składką roczną płatną z góry jest to różnica przepływów pieniężnych w terminowym ubezpieczeniu na dożycie, określonych wzorem (5) oraz przepływów dla renty życiowej na n lat płatnej z góry, określonej wzorem (2), ale płatnej w wysokości $P(A_{x:\overline{n}|}^1)$. Proces przepływu gotówki w tym przypadku jest określony następująco:

$$C_t = \mathbf{1}_{(K_x \geq n)} \cdot \mathbf{1}_{(t \geq n)} - \sum_{k=0}^{\min(K_x, n-1)} P(A_{x:\overline{n}|}^1) \cdot \mathbf{1}_{(t \geq k)}. \quad (6)$$

Powyżej zostały zdefiniowane przykładowe strumienie płatności w ubezpieczeniach życiowych. W kolejnym paragrafie zostanie przedstawiony sposób i cel określenia wartości tych przepływów gotówki.

3. Obliczanie wartości strumieni płatności

Określanie wartości strumieni płatności jest bardzo ważne. W celu obliczenia składek netto za ubezpieczenie, lub wartości aktuarialnej renty życiowej, należy określić wartość strumienia płatności w chwili $t = 0$. Zakład ubezpieczeń w każdym momencie trwania ubezpieczenia musi również prawidłowo ustalić wartość rezerw, niezbędnych do pokrycia przyszłych wypłat. Prawidłowa wycena strumienia płatności daje gwarancję zabezpieczenia wypłacalności ubezpieczyciela, a także pozwala na określenie wartości umowy w trakcie jej trwania. Określenie wartości polisy jest bardzo ważne z punktu widzenia klienta w przypadku np. wykupu polisy czy też zabezpieczenia majątkowego w przypadku wzięcia kredytu.

W celu obliczenia wartości aktuarialnej strumienia płatności w chwili $t \geq 0$ dyskontuje się wielkość tego strumienia w określonym momencie czasu. Zdyskontowany proces strumieni płatności z chwili t na moment zerowy oznaczany jest symbolem $D_{t,0}$, zaś z chwili t na moment s ($s \leq t$) symbolem $D_{t,s}$.

W przypadku tradycyjnych metod aktuarialnych [2] dyskontowania dokonuje się za pomocą nie zmieniającego się w czasie czynnika dyskontującego. Oznaczmy przez i_t stopę procentową w chwili t , gdzie $t = 0, 1, \dots$. Czynniki dyskontujący w roku t jest określony za pomocą stopy procentowej w następujący sposób:

$$v_t = (1 + i_t)^{-1}.$$

W przypadku, gdy stopa procentowa jest stała i taka sama w każdym roku, czyli $i_t = i$, czynnik dyskontujący oznacza się symbolem v .

Zdyskontowana z chwili t na moment zerowy wartość zgromadzonego kapitału K_t jest określona następująco

$$D_{t,0} = D_0 = K_t \cdot v^t.$$

Zdyskontowana z chwili t na chwilę s ($s \leq t$) wartość zgromadzonego kapitału K_t jest zdefiniowana następująco

$$D_{t,s} = K_t \cdot v^{t-s}.$$

Powyższą równość można zapisać następująco:

$$D_{t,s} = K_t \cdot \frac{v^t}{v^s} = K_s \cdot \frac{D_{t,0}}{D_{s,0}}.$$

Jeżeli dyskontowanie następuje w sposób ciągły, to czynnik dyskontujący v_t określony jest następująco

$$v_t = \exp\left(-\int_0^t \delta_s ds\right),$$

gdzie δ_t oznacza intensywność oprocentowania.

W przypadku stałej intensywności oprocentowania powyższy wzór przybiera postać

$$v_t = e^{-\delta t}.$$

Zdyskontowana z chwili t na moment zerowy wartość zgromadzonego kapitału K_t jest w tym przypadku określona następująco

$$D_{t,0} = K_t \cdot v_t.$$

Procesem odwrotnym do dyskontowania jest proces oprocentowujący, który oznaczany jest symbolem Λ_t .

W przypadku, gdy stopa procentowa zmienia się losowo w czasie, a więc jest procesem stochastycznym, proces oprocentowujący, nazywany w finansach rachunkiem oszczędnościowym, definiuje się następującą równością [12]:

$$\Lambda_t = \exp\left(\int_0^t r_u du\right) \quad (7)$$

lub równoważnie równaniem różniczkowym

$$d\Lambda_t = r_t \Lambda_t dt,$$

$$\Lambda_0 = 1.$$

Proces $\{\Lambda_t\}_{t=0}^{\infty}$ jest procesem rosnącym i ciągłym. Tak zdefiniowany proces można uważać za proces oprocentowujący, czyli proces reprezentujący kapitał zgromadzony do czasu t z inwestycji 1 j.p. przy inwestowaniu w sposób ciągły przy chwilowej stopie procentowej r_t . Przyjmuje się, że proces $\{r_t\}_{t=0}^{\infty}$ jest procesem nieujemnym oraz adaptowanym względem filtracji H_t .

Jak widać, chwilowa stopa procentowa jest w finansach odpowiednikiem intensywności oprocentowania.

W przypadku, gdy stopa procentowa jest stała, zdyskontowany strumień płatności i tak jest losowy, ze względu na losowość czasu trwania życia. W celu obliczenia wartości aktuarialnych poszczególnych zdyskontowanych przepływów pieniężnych, w tradycyjnej literaturze aktuarialnej oblicza się wartość oczekiwaną tych przepływów w określonej chwili [2]. W przypadku, gdy stopa procentowa jest zmienna w czasie, wartość aktuarialną przepływów pieniężnych można również

obliczyć jako ich wartość oczekiwaną [11]. Można wycenić strumienie płatności także według zasad rynku finansowego (konstrukcja cen przy braku arbitrażu), stosując cenę obligacji zerokuponowej jako czynnik dyskontujący, co przedstawione jest w następnym paragrafie [4].

4. Zasada wyceny przepływów pieniężnych na rynku finansowym

Skumulowany proces przepływów pieniężnych określa się za pomocą procesu różniczkowego $\{dC_t\}_{t=0}^{\infty}$ z warunkiem początkowym $C_0 \in R$. Wartość dC_t oznacza kwotę płaconą w chwili $t \geq 0$, czyli dC_t można uważać za chwilowy proces przepływów gotówkowych. Zdyskontowana wartość skumulowanych przepływów pieniężnych w chwili t jest definiowana następująco:

$$D_t = D_{\infty,t} = \int_{(t,\infty)} \frac{\Lambda_t}{\Lambda_s} dC_s. \quad (8)$$

Jak widać, proces zdyskontowanych przepływów pieniężnych jest zdefiniowany za pomocą procesu oprocentowującego z chwili s na chwilę t , gdzie $s = t + \Delta t$:

$$\frac{\Lambda_t}{\Lambda_s} = \frac{\exp\left(\int_0^t r_u du\right)}{\exp\left(\int_0^s r_u du\right)} = \exp\left(-\int_t^s r_u du\right).$$

Wzorem tym określony jest stochastyczny czynnik dyskontujący z chwili s na chwilę t .

Całka we wzorze (8) określa ciągłe przepływy pieniężne. Całkę można zastąpić sumą w przypadku dyskretnych strumieni płatności.

W celu wyceny strumieni płatności według zasad rynku finansowego określana jest przestrzeń probabilistyczna $(\Omega, H_t, \mathbf{P})$, gdzie $\mathbf{P}$ nazywa się miarą fizyczną. Wyznaczenie wartości strumienia pieniężnego polega na znalezieniu miary $\mathbf{Q}$ równoważnej mierze $\mathbf{P}$, względem której zdyskontowany proces wartości strumienia pieniężnego będzie martyngałem. Taką miarę $\mathbf{Q}$ nazywa się równoważną miarą martyngałową [9]. Miary $\mathbf{P}$ oraz $\mathbf{Q}$ są równoważne ($\mathbf{Q} \sim \mathbf{P}$) na przestrzeni $(\Omega, H_t, \mathbf{P})$, gdy $\mathbf{P}$ i $\mathbf{Q}$ mają te same zbiory miary zero, tzn. wtedy, gdy

$$\forall A \in H_t \quad P(A) = 0 \Leftrightarrow Q(A) = 0.$$

W przypadku wyceny względem miary $\mathbf{P}$ mogą zachodzić sytuacje, gdy zarabia się bez ponoszenia ryzyka, czyli sytuacje do arbitrażu. Dlatego też wyceny

dokonywane względem miary $\mathbf{Q}$. Gdy miara martyngałowa $\mathbf{Q}$ istnieje i jest wyznaczona jednoznacznie, to rynek jest zupełny. W przypadku rynku niezupełnego może istnieć nieskończenie wiele miar martyngałowych, wtedy wybierana jest ta miara, która ma największą względną entropię $H(X)$, gdzie $H(X) = -E(\ln f(X))$, X zaś jest zmienną losową o funkcji rozkładu prawdopodobieństwa $f(x)$ (por. [6]).

Wyznaczenia wartości dowolnego strumienia płatności dokonuje się według następującej zasady [12]). Niech na przestrzeni $(\Omega, H, \mathbf{P})$ zdefiniowany jest proces oprocentowujący Λ_t oraz miara $\mathbf{Q}$ równoważna mierze $\mathbf{P}$. Jeśli na rynku istnieje strumień płatności Y o terminie zapadalności T , to jego cena Π_t w chwili $t \in [0, T]$ jest dana wzorem

$$\Pi_t = E^{\mathbf{Q}} \left(\frac{\Lambda_t}{\Lambda_T} Y \middle| H_t \right),$$

gdzie powyższa wartość oczekiwana obliczana jest względem miary $\mathbf{Q}$.

Jak widać, aby obliczyć wartość dowolnego przepływu pieniężnego w chwili $t \geq 0$, oblicza się wartość oczekiwaną względem miary $\mathbf{Q}$ zdyskontowanych przyszłych przepływów pieniężnych. W przypadku zdyskontowanych przepływów pieniężnych, określonych wzorem (8), ich wartość oblicza się ze wzoru [4]:

$$V_t = E^{\mathbf{Q}}(D_t | H_t) = E^{\mathbf{Q}} \left(\int_{(t, \infty)} \frac{\Lambda_s}{\Lambda_t} dC_s \middle| H_t \right). \quad (9)$$

W celu obliczenia wartości oczekiwanej strumienia płatności należy dokonać zamiany miary $\mathbf{P}$ względem miary $\mathbf{Q}$. Do zamiany miar służy pochodna Radona–Nikodyma, która jest zdefiniowana poniżej.

Założmy, że $\mathbf{P}$ oraz $\mathbf{Q}$ są równoważnymi miarami probabilistycznymi na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, H, \mathbf{P})$, wtedy istnieje zmienna losowa $\rho = \rho(\omega)$, taka że

$$\forall A \in H \quad \mathbf{Q}(A) = \int_A \rho d\mathbf{P}$$

oraz ρ jest dodatnią H mierzalną zmienną losową [8]. Zmienna losowa ρ jest wyznaczona jednoznacznie, co do równoważności stochastycznej. Zmienną tę nazywa się pochodną Radona–Nikodyma lub gęstością jednej miary względem drugiej i oznacza się jako

$$\rho = \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}.$$

Gdy $\mathbf{P}$ oraz $\mathbf{Q}$ są równoważnymi miarami oraz istnieje gęstość ρ , wartości oczekiwane zmiennej losowej X względem odpowiednich miar spełniają następującą równość:

$$E^Q(X) = E^P(\rho X). \quad (10)$$

Gdy wartości oczekiwane względem odpowiednich miar są warunkowe względem σ – ciała $G \subset H$, to powyższy wzór przybiera inną postać [7]:

$$E^Q(X|G) = \frac{E^P(\rho X|G)}{E^P(\rho|G)}. \quad (11)$$

Zgodnie z przedstawioną zasadą poniżej wyznaczona jest wartość chwilowego strumienia pieniężnego dC_t .

$$E^Q\left(\frac{\Lambda_t}{\Lambda_s} dC_s \middle| H_t\right) = \frac{E^P\left(\rho \frac{\Lambda_t}{\Lambda_s} dC_s \middle| H_t\right)}{E^P(\rho|H_t)} \quad \text{dla } t < s,$$

przy czym powyższa równość wynika ze wzoru (11).

Założmy, że proces $\{C_t\}_{t=0}^\infty$ jest stochastycznie niezależny od $(\rho, \{\Lambda_t\}_{t=0}^\infty)$ względem miary P . Wtedy otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{E^P\left(\rho \frac{\Lambda_t}{\Lambda_s} dC_s \middle| H_t\right)}{E^P(\rho|H_t)} &= \frac{E^P\left(\rho \frac{\Lambda_t}{\Lambda_s} \middle| H_t\right) E^P(dC_s|H_t)}{E^P(\rho|H_t)} = \\ &\stackrel{(4.4)}{=} E^Q\left(\frac{\Lambda_t}{\Lambda_s} \middle| H_t\right) E^P(dC_s|H_t). \end{aligned} \quad (12)$$

W celu dalszego przekształcenia powyższego wzoru zdefiniujemy strumień płatności dla obligacji zerokuponowej z terminem wykupu T . Obligacja zerokuponowa jest sprzedawana z dyskontem, tzn. po cenie niższej niż jej wartość. W chwili T jest wypłacana posiadaczowi 1 j.p., a posiadacz zarabia na różnicy między 1 j.p. a ceną zapłaconą w chwili zerowej. Strumień płatności definiowany jest następująco:

$$C_t = \mathbf{1}_{(t \geq T)}. \quad (13)$$

Obligacje zerokuponowe są obligacjami wolnymi od ryzyka. Rynek obligacji jest wolny od arbitrażu, co powoduje, że dla każdej obligacji istnieje miara Q , równoważna mierze P , względem której proces zdyskontowanych cen obligacji jest Q -martyngałem.

Cena obligacji zerokuponowej w chwili t z terminem wykupu T jest oznaczana symbolem $P(t, T)$, przy czym $P(T, T) = 1$. Cenę obligacji wyznacza się ze wzoru (9). Zdyskontowana wartość procesu, określonego wzorem (13), jest zdefiniowana następująco:

$$D_t = \int_{(t,\infty)} \frac{\Lambda_t}{\Lambda_s} dC_s = \frac{\Lambda_t}{\Lambda_T} \cdot 1.$$

Ze wzoru (9) cena obligacji zerokuponowej w chwili $t \in [0, T]$ obliczana jest następująco:

$$P(t, T) = E^Q \left(\frac{\Lambda_t}{\Lambda_T} 1 \middle| H_t \right) = E^Q \left(\exp \left(- \int_t^T r_u du \right) \middle| H_t \right). \quad (14)$$

Wzór (12) można zapisać za pomocą ceny obligacji zerokuponowej, czyli

$$\frac{E^P \left(\rho \frac{\Lambda_t}{\Lambda_s} dC_t \middle| H_t \right)}{E^P(\rho | H_t)} \stackrel{(4.7)}{=} P(t, s) \cdot E^P(dC_t | H_t).$$

Jak widać, nie jest potrzebna wiedza o mierze Q , gdyż cenę obligacji zerokuponowej można odczytać z rynku. Ponadto przy przyjętym założeniu premia za ryzyko wynosi zero.

W następnym paragrafie przedstawiono wycenę przykładowych ubezpieczeniowych strumieni płatności. Cena obligacji zerokuponowej jest stosowana jako czynnik dyskontujący.

5. Wycena przepływów pieniężnych w ubezpieczeniach życiowych

5.1. Terminowe ubezpieczenie na dożycie

Rozważmy polisę na dożycie na n lat, z której w chwili $t = n$ wypłacane jest świadczenie w wysokości b j.p., jeżeli ubezpieczony w wieku x żyje w chwili $t = n$. Przepływ pieniężny w przypadku $b = 1$ jest określony wzorem (5). W przypadku wypłaty świadczenia w wysokości b j.p. przepływ pieniężny określony jest następująco:

$$C_s = b \cdot \mathbf{1}_{(K_x \geq n)} \cdot \mathbf{1}_{(s \geq n)}.$$

Wartość tych przepływów jest równa b w chwili n , więc zdyskontowane przepływy pieniężne w chwili $t \geq 0$ w tym przypadku określone są następująco:

$$D_t = \int_{(t,\infty)} \frac{\Lambda_t}{\Lambda_s} dC_s = b \frac{\Lambda_t}{\Lambda_n} \mathbf{1}_{(K_x \geq n)} \text{ dla } t \leq K_x \quad (15)$$

(tzn. gdy w chwili t ubezpieczony żyje)
oraz

$$D_t = 0 \text{ dla } t > K_x$$

(tzn. gdy w chwili t ubezpieczony już nie żyje).

Obliczenia wartości przepływów, określonych wzorem (15), w chwili $t \geq 0$, dokonuje się według zasady (9). Dla $t \leq K_x$ otrzymujemy

$$V_t = E^Q(D_t | H_t) = E^Q \left(b \frac{\Lambda_t}{\Lambda_n} \mathbf{1}_{(K_x \geq n)} \middle| H_t \right) = b \frac{E^P(\rho \Lambda_t \Lambda_n^{-1} \mathbf{1}_{(K_x \geq n)} | H_t)}{E^P(\rho | H_t)}.$$

Zakładając, że K_x jest stochastycznie niezależne od $(\rho, \{\Lambda_t\}_{t=0}^\infty)$ względem miary $\mathbf{P}$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} V_t &= b \frac{E^P(\rho \Lambda_t \Lambda_n^{-1} | H_t)}{E^P(\rho | H_t)} E^P(\mathbf{1}_{(K_x \geq n)} | H_t) \stackrel{(4.4)}{=} b E^Q(\Lambda_t \Lambda_n^{-1} | H_t) E^P(\mathbf{1}_{(K_x \geq n)} | H_t) = \\ &\stackrel{(4.7)}{=} b P(t, n) E^P(\mathbf{1}_{(K_x \geq n)} | H_t). \end{aligned}$$

Warunkową wartość oczekiwaną $E^P(\mathbf{1}_{(K_x \geq n)} | H_t)$ przy założeniu, że w chwili t ubezpieczony w wieku x żyje, tzn. w chwili t jest w wieku $x+t$, oblicza się następująco:

$$E^P(\mathbf{1}_{(K_x \geq n)} | H_t) = P(K_x \geq n | K_x \geq t) = {}_{n-t}P_{x+t}, \quad (16)$$

bo

$$P(K_x \geq n | K_x \geq t) = \frac{P(K_x \geq n)}{P(K_x \geq t)} = \frac{{}_n P_x}{{}_t P_x} = \frac{{}_{n-t+t} P_x}{{}_t P_x} = \frac{{}_t P_x \cdot {}_{n-t} P_{x+t}}{{}_t P_x} = {}_{n-t} P_{x+t},$$

przy czym przedostatnia równość zachodzi, gdyż [2]

$${}_{k+u} P_x = {}_k P_x \cdot {}_u P_{x+k}.$$

Korzystając z (16), wartość przepływów pieniężnych określa się ze wzoru [1]:

$$V_t = b \cdot P(t, n) \cdot {}_{n-t} P_{x+t} \text{ dla } t \leq K_x \quad (17)$$

oraz

$$V_t = 0 \text{ dla } t > K_x.$$

Zauważmy, że t nie musi oznaczać lat, może to być dowolny dzień w roku. W takim przypadku bezpośrednie odczytanie z tablic trwania życia wartości prawdopodobieństwa ${}_{n-t} P_{x+t}$ nie jest możliwe. W celu obliczenia ${}_{n-t} P_{x+t}$ korzysta się z założenia o rozkładzie śmierci w ciągu roku, np. jednostajnego rozkładu

śmierci w ciągu roku. Prawdopodobieństwo ${}_{n-t}p_{x+t}$ można obliczyć również za pomocą funkcji μ_x , określającej intensywność umieralności osoby w wieku x , jeżeli μ_x jest znana, w następujący sposób [2]:

$${}_{n-t}p_{x+t} = \exp\left(\int_{x+t}^{x+n} \mu_s ds\right) = \exp\left(\int_0^{n-t} \mu_{x+t+s} ds\right).$$

Dla $t=0$ wartość przepływów, określona wzorem (17), oznacza jednorazową składkę netto, jaką należy zapłacić za terminowe ubezpieczenie na dożycie ze świadczeniem płatnym w wysokości b j.p.

5.2. Renty życiowe płatne z góry

Rozważmy jednostkową dożywotnią rentę płatną z góry. Przepływ pieniężny zdefiniowany jest w tym przypadku wzorem (1). Wzór ten można również zapisać następująco [3]:

$$C_s = \sum_{k=0}^{K_x} \mathbf{1}_{(s \geq k)} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{1}_{(s \geq k)} \cdot \mathbf{1}_{(K_x \geq k)}.$$

Zdyskontowane przepływy pieniężne w chwili $t \geq 0$ określone są następująco:

$$D_t = \sum_{k=\lceil t \rceil}^{\infty} \frac{\Lambda_t}{\Lambda_k} \mathbf{1}_{(K_x \geq k)} \text{ dla } t \leq K_x$$

oraz

$$D_t = 0 \text{ dla } t > K_x.$$

Sumowanie następuje od $k = \lceil t \rceil$, gdyż renta płacona jest z góry. W przypadku renty płatnej z dołu, we wzorze na zdyskontowane przepływy pieniężne, sumowanie następuje od $k = \lfloor t \rfloor + 1$.

Wartość przepływów gotówkowych w chwili $t \geq 0$ określona jest następująco:

$$V_t = E^Q \left(\sum_{k=\lceil t \rceil}^{\infty} \frac{\Lambda_t}{\Lambda_k} \mathbf{1}_{(K_x \geq k)} \middle| H_t \right) = \sum_{k=\lceil t \rceil}^{\infty} E^Q \left(\frac{\Lambda_t}{\Lambda_k} \mathbf{1}_{(K_x \geq k)} \middle| H_t \right).$$

Zauważmy, że powyższa wartość oczekiwana jest określona jako wartość zdyskontowanych przepływów pieniężnych w chwili t dla ubezpieczenia na dożycie na k lat. Zakładając, że K_x jest stochastycznie niezależne od $(\rho, \{\Lambda_t\}_{t=0}^{\infty})$ względem miary $\mathbf{P}$ oraz korzystając ze wzoru (17) dla $b=1$, otrzymujemy

$$V_t = \sum_{k=\lceil t \rceil}^{\infty} E^Q \left(\frac{\Lambda_t}{\Lambda_k} \mathbf{1}_{(K_x \geq k)} \middle| H_t \right) = \sum_{k=\lceil t \rceil}^{\infty} P(t, k) \cdot {}_{k-t}p_{x+t} \quad \text{dla } t \leq K_x \quad (18)$$

oraz

$$V_t = 0 \text{ dla } t > K_x.$$

W chwili $t = 0$ wartość przepływów pieniężnych oznacza wartość aktuarialną renty.

Strumień płatności dla renty terminowej na n lat płatnej z góry jest określony wzorem (2). W celu określenia wartości przepływów pieniężnych skorzystamy ze wzoru (18), w którym symbol ∞ w sumowaniu jest zastąpiony wartością $n-1$, czyli rokiem ostatniej wypłaty 1 j.p. Wartość przepływów w przypadku terminowej renty płatnej z góry jest więc określona następująco

$$V_t = \sum_{k=\lceil t \rceil}^{n-1} E^Q \left(\frac{\Lambda_t}{\Lambda_k} \mathbf{1}_{(K_x \geq k)} \middle| H_t \right) = \sum_{k=\lceil t \rceil}^{n-1} P(t, k) \cdot {}_{k-t}p_{x+t} \text{ dla } t \leq K_x \quad (19)$$

oraz

$$V_t = 0 \text{ dla } t > K_x.$$

Znając wartość strumienia płatności dla renty terminowej, można określić wartość rezerw w przypadku ubezpieczenia na dożycie ze składką roczną płatną z góry.

5.3. Rezerwy w ubezpieczeniu na dożycie ze składką roczną płatną z góry

Proces przepływu gotówki w przypadku rezerw dla ubezpieczenia na dożycie ze składką roczną płatną z góry zdefiniowany jest za pomocą wzoru (6), czyli

$$C_t = \mathbf{1}_{(K_x \geq n)} \cdot \mathbf{1}_{(t \geq n)} - \sum_{k=0}^{\min(K_x, n-1)} P(A_{x:\overline{n}|}^1) \cdot \mathbf{1}_{(t \geq k)}.$$

Zauważmy, że C_t jest różnicą przepływów pieniężnych w ubezpieczeniu na dożycie na n lat oraz przepływów pieniężnych terminowej renty życiowej. Wartość oczekiwana względem miary Q tych przepływów zdyskontowanych na moment $t \geq 0$ jest określana rezerwami. Korzystając ze wzoru (9) i wyników (17) dla $b = 1$ oraz (19), otrzymujemy

$$V_t = P(t, n) \cdot {}_{n-t}p_{x+t} - P(A_{x:\overline{n}|}^1) \sum_{k=\lceil t \rceil}^{n-1} P(t, k) \cdot {}_{k-t}p_{x+t} \text{ dla } t \leq K_x \quad (20)$$

oraz

$$V_t = 0 \text{ dla } t > K_x.$$

Według zasady równoważności oczekiwanych przyszłych wpłat i wypłat, rezerwy w chwili $t = 0$ są równe zero, tzn. $V_0 = 0$, czyli

$$V_0 = P(0, n) \cdot {}_n p_x - P(A_{x:\overline{n}|}^1) \sum_{k=0}^{n-1} P(0, k) \cdot {}_k p_x = 0.$$

Z równości tej wyznacza się roczną składkę netto w następujący sposób:

$$P(A_{x:\overline{n}|}^1) = \frac{P(0, n) \cdot {}_n p_x}{\sum_{k=0}^{n-1} P(0, k) \cdot {}_k p_x}. \quad (21)$$

W następnym paragrafie przedstawione są przykłady obliczeniowe.

6. Przykłady numeryczne

Na polskim rynku finansowym istnieją jedynie 2-letnie obligacje zerokuponowe. W dniu 29.05.2006 na rynku notowano (<http://bossa.pl/notowania/o/cia-gle/obligacje>) 2-letnie obligacje zerokuponowe o następujących terminach wygaśnięcia: 12.04.07, 12.04.08, 12.08.06, 12.08.07, 12.08.08, 12.12.06, 12.12.07. Znane są ceny jedynie kilku obligacji, dlatego nie jest możliwe obliczenie składek netto czy wartości aktuarialnych rent życiowych dla dowolnych terminów. W związku z tym przykłady numeryczne wykonane są z użyciem wzoru na cenę obligacji zerokuponowej w przypadku, gdy chwilowa stopa procentowa jest określona za pomocą następującego stochastycznego równania różniczkowego:

$$dr(t) = k(\theta - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t). \quad (22)$$

Powyższy model stopy procentowej został zaproponowany w 1985 r. przez Coxa, Ingersolla i Rossa (model CIR).

Cena obligacji zerokuponowej w modelu CIR jest określona następującym wzorem (por. [13])

$$P(t, T) = A(t, T) \cdot \exp(-B(t, T) \cdot r_t), \quad (23)$$

gdzie

$$A(t, T) = \left[\frac{2\gamma \exp((k + \gamma)(T - t)/2)}{(k + \gamma)\{\exp(\gamma(T - t)) - 1\} + 2\gamma} \right]^{2k\theta/\sigma^2}$$

oraz

$$B(t, T) = \frac{2(\exp(\gamma(T - t)) - 1)}{(k + \gamma)(\exp(\gamma(T - t)) - 1) + 2\gamma},$$

$$\gamma = \sqrt{k^2 + 2\sigma^2}.$$

W celu ilustracji zostały wybrane następujące parametry: $k = 0,2339$, $\theta = 0,081$, $\sigma = 0,085$. Parametry te były estymowane na podstawie miesięcznych danych z lat

1964-1989 [5]. Na ich podstawie długoterminowa stopa terminowa określona wzorem

$$l = 2k\theta / \left(k + \sqrt{\sigma^2 + k^2} \right)$$

wynosi 7,8%.

We wzorze (23) występuje wielkość r_t , w związku z tym niezbędne jest założenie wartości początkowej stopy procentowej w chwili t . W tabeli 1 przedstawione są ceny obligacji zerokuponowej w chwili $t=0$, o terminie wykupu $T = \{1, 2, \dots, 20\}$ dla $r_0 \in \{5\%, 6\%, 7\%, 8\%, 9\%, 10\%\}$.

Rozważmy n -letnie ubezpieczenie na dożycie dla kobiety w wieku 28 lat wypłacające świadczenie w wysokości 1 j.p. Prawdopodobieństwa przeżycia dla $n = \{1, 2, \dots, 20\}$ lat są obliczane na podstawie tablic trwania życia z 2000 r. [10]. Jednorazowa składka netto obliczona przy stałej stopie procentowej $i \in \{5\%, 6\%, 7\%, 8\%, 9\%, 10\%\}$ przedstawiona została w tab. 2.

Tabela 1. Cena obligacji zerokuponowej $P(t, T)$ w chwili $t = 0$

$T \backslash r_0$	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,1
1	0,9481	0,9397	0,9313	0,9231	0,9149	0,9068
2	0,8939	0,8798	0,8659	0,8523	0,8388	0,8256
3	0,8394	0,8216	0,8042	0,7872	0,7705	0,7542
4	0,7857	0,7658	0,7464	0,7275	0,7090	0,6911
5	0,7337	0,7127	0,6923	0,6726	0,6533	0,6347
6	0,6838	0,6626	0,6420	0,6221	0,6027	0,5840
7	0,6365	0,6155	0,5952	0,5756	0,5566	0,5382
8	0,5918	0,5714	0,5517	0,5327	0,5143	0,4966
9	0,5498	0,5303	0,5114	0,4931	0,4756	0,4586
10	0,5105	0,4919	0,4739	0,4566	0,4399	0,4239
11	0,4738	0,4562	0,4392	0,4229	0,4071	0,3920
12	0,4395	0,4229	0,4070	0,3916	0,3769	0,3627
13	0,4076	0,3921	0,3771	0,3628	0,3489	0,3356
14	0,3780	0,3634	0,3495	0,3361	0,3231	0,3107
15	0,3504	0,3369	0,3238	0,3113	0,2993	0,2877
16	0,3248	0,3122	0,3001	0,2884	0,2772	0,2664
17	0,3011	0,2893	0,2780	0,2672	0,2568	0,2468
18	0,2790	0,2681	0,2576	0,2476	0,2379	0,2286
19	0,2586	0,2485	0,2387	0,2294	0,2204	0,2118
20	0,2396	0,2302	0,2212	0,2125	0,2042	0,1962

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 2. Jednorazowa składka netto dla stałej stopy procentowej i

$k \backslash i$	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,1
1	0,9520	0,9430	0,9342	0,9256	0,9171	0,9087
2	0,9063	0,8893	0,8727	0,8566	0,8410	0,8258
3	0,8627	0,8385	0,8153	0,7928	0,7712	0,7504
4	0,8212	0,7907	0,7615	0,7337	0,7072	0,6818
5	0,7817	0,7455	0,7113	0,6790	0,6484	0,6195
6	0,7441	0,7029	0,6644	0,6284	0,5946	0,5628
7	0,7082	0,6627	0,6206	0,5814	0,5451	0,5114
8	0,6740	0,6248	0,5795	0,5380	0,4997	0,4645
9	0,6414	0,5889	0,5412	0,4977	0,4581	0,4220
10	0,6103	0,5551	0,5053	0,4605	0,4199	0,3833
11	0,5806	0,5231	0,4718	0,4259	0,3848	0,3481
12	0,5523	0,4930	0,4404	0,3939	0,3527	0,3161
13	0,5254	0,4644	0,4111	0,3643	0,3231	0,2870
14	0,4996	0,4375	0,3836	0,3368	0,2960	0,2605
15	0,4750	0,4120	0,3579	0,3113	0,2711	0,2364
16	0,4515	0,3880	0,3339	0,2877	0,2482	0,2145
17	0,4291	0,3652	0,3113	0,2658	0,2273	0,1946
18	0,4077	0,3437	0,2903	0,2455	0,2080	0,1765
19	0,3873	0,3234	0,2706	0,2268	0,1903	0,1600
20	0,3679	0,3044	0,2523	0,2095	0,1742	0,1451

Źródło: opracowanie własne.

Jednorazowe składki netto obliczone ze wzoru (17) dla $t = 0$ z zastosowaniem stopy procentowej określonej równaniem (22) przedstawiono w tab. 3.

Składki w obu przypadkach przedstawione są na wspólnych wykresach (por. rys. 1). Składki obliczone przy stałej stopie procentowej przedstawione są linią kropkowaną, zaś przy zmiennej stopie procentowej – linią ciągłą. Składki te są niższe w przypadku zmiennej stopy procentowej dla $i = r_0 \in \{5\%, 6\%, 7\%\}$. W przypadku $i = r_0 = 8\%$ składki te są bardzo porównywalne, aczkolwiek przy stopie zmiennej są one nieco niższe. Dla $i = r_0 \in \{9\%, 10\%\}$ składki obliczone przy zmiennej stopie procentowej są niższe dla pierwszych 3 lat, później niższe są składki obliczone przy stałej stopie procentowej.

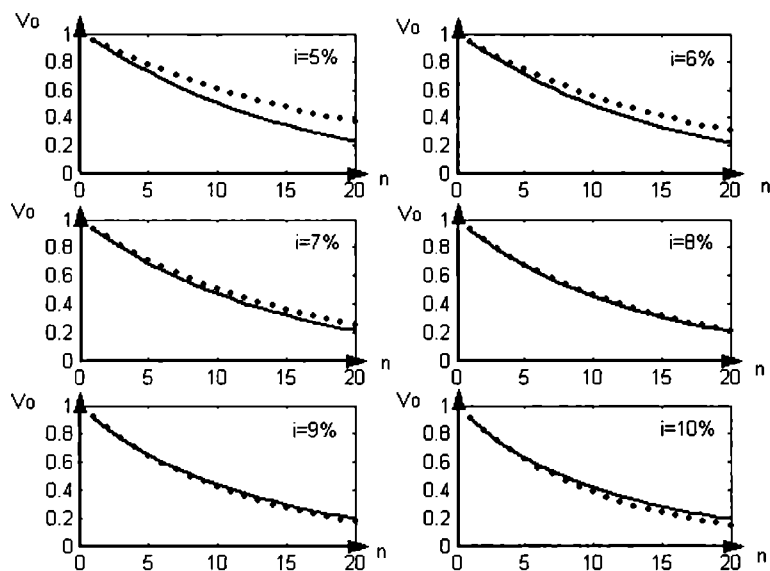
Wartości aktuarialne n -letniej renty życiowej obliczane przy takich samych warunkach jak składki jednorazowe, przedstawiono na rys. 2. Linią kropkowaną zaznaczone są wartości obliczone przy stałej stopie procentowej, zaś linią ciągłą – przy zmiennej stopie procentowej.

Wnioski są analogiczne jak w przypadku składki jednorazowej. Jedynie dla $i = r_0 \in \{9\%, 10\%\}$ wartości aktuarialne renty życiowej obliczone przy stałej stopie procentowej są niższe (poza pierwszymi 3 latami). W pozostałych przypadkach

Tabela 3. Jednorazowa składka netto dla chwilowej stochastycznej stopy procentowej

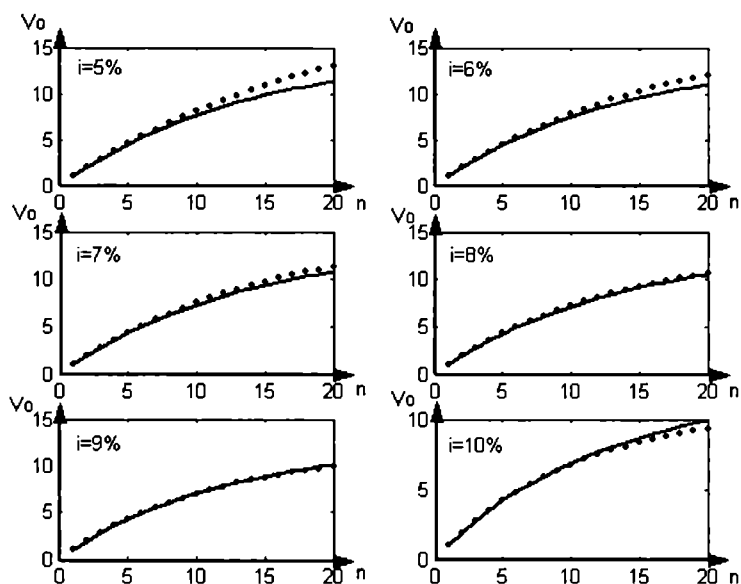
$k \backslash r_0$	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,1
1	0,9477	0,9393	0,9310	0,9227	0,9145	0,9064
2	0,8932	0,8791	0,8652	0,8516	0,8381	0,8249
3	0,8383	0,8206	0,8032	0,7862	0,7696	0,7533
4	0,7843	0,7644	0,7450	0,7262	0,7078	0,6898
5	0,7320	0,7111	0,6907	0,6710	0,6518	0,6332
6	0,6819	0,6607	0,6402	0,6203	0,6010	0,5823
7	0,6343	0,6133	0,5931	0,5735	0,5546	0,5363
8	0,5893	0,5690	0,5494	0,5304	0,5122	0,4945
9	0,5471	0,5276	0,5088	0,4907	0,4732	0,4563
10	0,5075	0,4890	0,4711	0,4539	0,4373	0,4214
11	0,4705	0,4530	0,4362	0,4199	0,4043	0,3893
12	0,4360	0,4195	0,4037	0,3885	0,3738	0,3597
13	0,4038	0,3884	0,3736	0,3594	0,3457	0,3325
14	0,3739	0,3595	0,3457	0,3324	0,3196	0,3074
15	0,3460	0,3326	0,3198	0,3074	0,2955	0,2841
16	0,3201	0,3077	0,2958	0,2843	0,2732	0,2626
17	0,2961	0,2846	0,2735	0,2628	0,2526	0,2427
18	0,2738	0,2631	0,2528	0,2429	0,2334	0,2243
19	0,2531	0,2431	0,2336	0,2245	0,2157	0,2072
20	0,2340	0,2248	0,2160	0,2075	0,1993	0,1915

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 1. Jednorazowe składki netto

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 2. Wartości aktuarialne terminowej renty życiowej

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 4. Roczna składka netto dla stałej stopy procentowej i

$k \backslash i$	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,1
1	0,9520	0,9430	0,9342	0,9256	0,9171	0,9087
2	0,4643	0,4577	0,4512	0,4449	0,4387	0,4326
3	0,3018	0,2961	0,2904	0,2850	0,2796	0,2744
4	0,2207	0,2154	0,2102	0,2052	0,2004	0,1956
5	0,1721	0,1671	0,1623	0,1576	0,1531	0,1487
6	0,1398	0,1350	0,1304	0,1260	0,1217	0,1176
7	0,1167	0,1121	0,1077	0,1035	0,0995	0,0956
8	0,0995	0,0951	0,0908	0,0868	0,0830	0,0793
9	0,0861	0,0818	0,0778	0,0739	0,0702	0,0667
10	0,0754	0,0713	0,0674	0,0637	0,0601	0,0568
11	0,0667	0,0627	0,0589	0,0554	0,0520	0,0488
12	0,0595	0,0556	0,0519	0,0485	0,0453	0,0423
13	0,0534	0,0496	0,0461	0,0428	0,0397	0,0368
14	0,0482	0,0445	0,0411	0,0379	0,0350	0,0322
15	0,0437	0,0402	0,0368	0,0338	0,0310	0,0283
16	0,0398	0,0364	0,0332	0,0302	0,0275	0,0250
17	0,0364	0,0330	0,0299	0,0271	0,0245	0,0221
18	0,0334	0,0301	0,0271	0,0244	0,0219	0,0196
19	0,0307	0,0275	0,0246	0,0220	0,0196	0,0175
20	0,0283	0,0252	0,0224	0,0199	0,0176	0,0156

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 5. Roczna składka netto dla chwilowej stochastycznej stopy procentowej

$k \backslash r_0$	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,1
1	0,9477	0,9393	0,9310	0,9227	0,9145	0,9064
2	0,4586	0,4533	0,4481	0,4429	0,4378	0,4327
3	0,2951	0,2911	0,2872	0,2834	0,2796	0,2758
4	0,2132	0,2101	0,2070	0,2040	0,2009	0,1980
5	0,1640	0,1615	0,1590	0,1565	0,1541	0,1517
6	0,1312	0,1292	0,1271	0,1251	0,1231	0,1211
7	0,1079	0,1062	0,1045	0,1028	0,1012	0,0995
8	0,0905	0,0891	0,0876	0,0862	0,0848	0,0834
9	0,0770	0,0758	0,0746	0,0734	0,0722	0,0711
10	0,0664	0,0653	0,0643	0,0633	0,0623	0,0613
11	0,0577	0,0568	0,0559	0,0551	0,0542	0,0533
12	0,0505	0,0498	0,0490	0,0483	0,0475	0,0468
13	0,0446	0,0439	0,0433	0,0426	0,0420	0,0413
14	0,0395	0,0389	0,0384	0,0378	0,0372	0,0367
15	0,0352	0,0347	0,0342	0,0337	0,0332	0,0327
16	0,0314	0,0310	0,0306	0,0301	0,0297	0,0293
17	0,0282	0,0278	0,0274	0,0270	0,0267	0,0263
18	0,0253	0,0250	0,0247	0,0243	0,0240	0,0237
19	0,0228	0,0225	0,0223	0,0220	0,0217	0,0214
20	0,0207	0,0204	0,0201	0,0199	0,0196	0,0193

Źródło: opracowanie własne.

wartości aktuarialne rent życiowych obliczone przy zmiennej stopie są niższe. Dla $i = r_0 = 8\%$ wartości te są porównywalne.

Składki roczne dla terminowego ubezpieczenia na dożycie dla 28-letniej kobiety zostały obliczone ze wzoru (21) z wykorzystaniem wcześniejszych obliczeń numerycznych. W tym przypadku wnioski są analogiczne. Jednakże składki roczne dla $i = r_0 = 8\%$ są praktycznie równej wielkości. Różnice, występujące na trzecim miejscu po przecinku, są niewielkie. Składki roczne obliczone przy stałej stopie procentowej przedstawione są w tab. 4, a przy zmiennej stopie procentowej – w tab. 5. Składek nie przedstawiono na wykresie ze względu na nieznaczne różnice między wartościami.

Z powyższych obliczeń i wniosków wynika, że wyznaczone wartości (składek i wartości aktuarialne rent życiowych) powinny być obliczane przez firmy ubezpieczeniowe przy stopie procentowej równej 8%, gdyż w obu przypadkach wielkości te są porównywalne. Stopa ta jest bliska długoterminowej stopie procentowej wyznaczonej w modelu CIR dla estymowanych parametrów.

7. Podsumowanie

W artykule został przedstawiony sposób wyceny strumieni płatności według zasad rynku finansowego. Sposób ten został zastosowany do wyceny strumieni płatności w ubezpieczeniach życiowych. Przedstawiony sposób sprowadza się do zastosowania ceny obligacji zerokuponowych jako czynnika dyskontującego w ubezpieczeniach. Wyprowadzone wzory matematyczne zostały zastosowane do przykładów numerycznych. Ze względu na to, że na polskim rynku finansowym istnieją jedynie 2-letnie obligacje zerokuponowe i krótkoterminowe (do roku) bony skarbowe (uznawane za odpowiednik obligacji zerokuponowych) i nie można wyliczyć odpowiednich wartości aktuarialnych dla dowolnych terminów, obliczenia zostały przedstawione na przykładzie ceny obligacji zerokuponowych, gdy chwilowa stopa procentowa określona jest równaniem Coxa–Ingersolla–Rossa. Przyjęte zostały parametry dla tego modelu estymowane na podstawie danych z lat 1964-1989 [5]. Dla przyjętych parametrów obliczona została długoterminowa stopa procentowa, która wynosiła 7,8%. Przedstawione obliczenia zostały wykonane dla stałej stopy procentowej $i \in \{5\%, 6\%, 7\%, 8\%, 9\%, 10\%\}$ oraz dla obligacji zerokuponowych, przy założeniu, że w chwili $t=0$ stopa procentowa $r_0 \in \{5\%, 6\%, 7\%, 8\%, 9\%, 10\%\}$. Wyniki zostały porównane dla odpowiednich wartości $i = r_0$. W przypadku, gdy $i = r_0 \in \{5\%, 6\%, 7\%\}$ wyznaczone wartości są wyższe przy stałej stopie procentowej. Dla $i = r_0 = 8\%$ wyniki są porównywalne, zaś dla $i = r_0 \in \{9\%, 10\%\}$ niższe są wartości obliczone przy stałej stopie procentowej. W związku z powyższym wydaje się, że aby wartości aktuarialne nie były za niskie (w tym przypadku firma traci lub nie może zapewnić sobie wypłacalności) ani za wysokie (wtedy poszkodowani są klienci, gdyż płacą za wysokie składki), powinny być one wyznaczone przy stopie procentowej 8%, co w przybliżeniu daje wartość długoterminowej stopy procentowej, uzyskaną dla estymowanych danych.

Literatura

- [1] Aase K.K., Persson S.A., *New Econ for Life Actuaries*, „Astin Bulletin” 2003, 2 (33), 117-122.
- [2] Bowers N.L., Gerber H.U., Hickman J.C., Jones D.A., Nesbit C.J., „Actuarial Mathematics”. The Society of Actuaries, Itasca, Ill., 1986.
- [3] Carrière J.F., *No Arbitrage Pricing for Life Insurance and Annuities*, „Economics Letters” 1999 64, 339-342.
- [4] Carrière J.F., *Martingale Valuation of Cash Flows for Insurance and Interest Models*, „North American Actuarial Journal” 2004, 3 (8), 1-16.
- [5] Chan K.C., Karolyi G.A., Longstaff F.A., Sanders A.B., *An Empirical of Alternative Models of the Short-term Interest Rate*, „The Journal of Finance” 1992, 3 (47), 1209-1227.
- [6] Gajek L., Kałużska M., *Wnioskowanie statystyczne. Modele i metody*, WNT, Warszawa 2000.

- [7] Jakubowski J., Palczewski A., Rutkowski M., Stettner Ł., *Matematyka finansowa. Instrumenty pochodne*, WNT, Warszawa 2003.
- [8] Lipcer R.S., Szirajew A.N., *Statystyka procesów stochastycznych*, PWN, Warszawa 1981.
- [9] Musiela M., Rutkowski M., *Martingale Methods in Financial Modelling*, Springer, Berlin 1998.
- [10] Ostasiewicz S., *Składki w wybranych typach ubezpieczeń życiowych*, AE, Wrocław 2003.
- [11] Ostasiewicz W. (red.), *Składki i ryzyko ubezpieczeniowe. Modelowanie stochastyczne*, AE, Wrocław 2004.
- [12] Palczewski A., *Modele stopy procentowej*, „Matematyka Stosowana”, 3, 2002, s. 52-70.
- [13] Yao Y., *Term Structure Models: A Perspective from the Long Rate*, „North American Actuarial Journal” 1999, 3 (3), 122-138.

VALUE OF LIFE INSURANCE CASH FLOWS

Summary

The traditional calculations of actuarial values are made under the assumption that the interest rate is fixed and constant for all years. However, the market interest rates are varying in time, so in the modern actuarial theory premiums and reserves are calculated with regard to these changes. First the cash flows are defined. Then the values of cash flows are discounted in a particular moment of time by the use of the instantaneous interest rate. Then their values are calculated according to the principles of financial markets. This procedure is presented in the paper. This valuation relies on finding such an equivalent measure that the discounted process of value of cash flow will be a martingale. Such a measure is called an equivalent martingale measure. In the article some life insurance cash flows are presented. Then valuation of these cash flows is performed. All the calculations are illustrated by examples.