

Helena Gaspars

Akademia Ekonomiczna w Poznaniu

OPTYMALNA LOKALIZACJA OBIEKTÓW

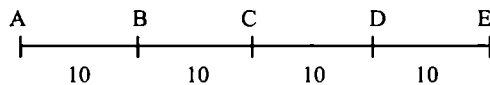
1. Wstęp

Rozpatrywane dotychczas w literaturze zagadnienia lokalizacji obiektów dotyczą zazwyczaj optymalnej lokalizacji (a) jednego obiektu [Samuelson, Marks 1998, s. 43-45], (b) dwóch lub więcej obiektów konkurencyjnych, czyli oferujących takie same usługi i walczących o udział w rynku [Domański 1993; Hotelling 1929; Lloyd, Dicken 1972; Sadahiro 2005, s. 61-84] bądź (c) zbioru różnych obiektów pozostających z sobą w relacji komplementarności. Przegląd teorii lokalizacji autorstwa Thünen, M. Webera, A. Lösch, W. Isarda i innych znaleźć można chociażby w pracy [Budner 2000, s. 48-59]. Za kryterium przyjmuje się przewidywany przychód, koszt lub zysk, realizowany przez pojedynczy obiekt, bądź inny czynnik, który bezpośrednio przekłada się na osiągnięte przez niego korzyści finansowe, np. liczbę potencjalnych klientów zamieszkujących w pobliżu obiektu. Ze względu na specyfikę formułowanych zadań optymalizacyjnych decydent nie przypisuje z góry danemu obiektowi konkretnej lokalizacji, lecz ustala dla każdego obiektu zbiór możliwych wariantów¹, na podstawie którego wybierze wariant najlepszy z punktu widzenia przyjętego kryterium.

Już w roku 1929 H. Hotelling [Domański 1993, s. 52-53; Hotelling 1929; Lloyd, Dicken 1972] rozważył przypadek dwóch sprzedawców (np. lodów) oferujących te same produkty po tej samej cenie i konkurujących o najlepszą lokalizację na rynku liniowym (np. na plaży) z popytem rozłożonym równomiernie wzdłuż odcinka AE (rys. 1). Hotelling założył, że każdy sprzedawca może się ulokować w jednym z pięciu punktów (A , B , C , D lub E) rozmieszczonych w jednakowych odstępach.

Jeżeli podmiotom zależy na maksymalizacji czystej korzyści, czyli różnicy w sprzedaży obu sprzedawców, zadanie można przeanalizować, korzystając z macierzy wypłat, z której jasno wynika, że powyższy problem lokalizacyjny ściśle się

¹ Zbiór ten może składać się kilku, kilkunastu, kilkudziesięciu, a nawet nieskończenie wielu wariantów.



Rys.1. Możliwe lokalizacje dwóch konkurencyjnych sprzedawców

Źródło: [Lloyd, Dicken 1972, s. 126].

wiąże z teorią gier². Rozpatrując omawianą grę konkurencyjną w ujęciu dynamicznym, gracze dojdą do wniosku, iż jedynym stabilnym rozwiązaniem (punktem równowagi) będzie lokalizacja obu sklepów w punkcie C. Wówczas dojdzie do podziału rynku na dwie równe części³.

Tabela 1. Względne wypłaty

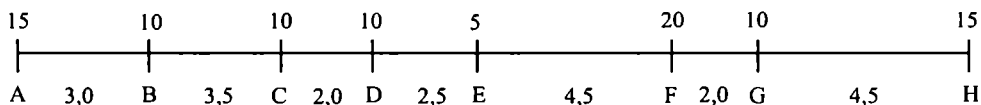
x	Sprzedawca 2					
	x	a	b	c	d	e
Sprzedawca 1	a	0	-30	-20	-10	0
	b	+30	0	-10	0	+10
	c	+20	+10	0	+10	+20
	d	+10	0	-10	0	+30
	e	0	-10	-20	-30	0

Punkt równowagi

Znak + oznacza wypłaty na rzecz sprzedawcy 1, znak – oznacza wypłaty na rzecz sprzedawcy 2.

Źródło: [Stevens 1961].

W pracy [Samuelson, Marks 1998] odnajdujemy z kolei przykład lokalizacji jednego centrum handlowego w regionie nadbrzeżnym (rys. 2).



Rys. 2. Lokalizacja centrum handlowego

Źródło: [Samuelson, Marks 1998, s. 43-45].

Centrum może być wybudowane nie tylko w jednym z ośrodków miejskich (A-H) rozmieszczonych wzdłuż wybrzeża, lecz także w dowolnym punkcie na tym wy-

² Jeżeli np. sprzedawca I wybierze punkt E, a sprzedawca II punkt C, to ten drugi opanuje rynek na odcinku AC (czyli 20 j.) i połowie odcinka CE (czyli dodatkowe 10 j.). Druga połowa tego odcinka przypadnie pierwszemu sprzedawcy (czyli tylko 10 j.). Jego korzyść jest zatem o 20 j. niższa od łącznych korzyści drugiego sprzedawcy. Stąd na przecięciu wiersza e i kolumny c pojawia się wynik ujemny (-20) oznaczający względną stratę dla pierwszego gracza, a zarazem względną korzyść dla jego konkurenta. Skoro wypłaty w tabeli są przedstawione w postaci względnych korzyści, możemy sprowadzić omawiany problem do gry o sumie zerowej.

³ Jeżeli popyt jest rozmieszczony nierównomiernie, stan równowagi można ustalić tylko wówczas, gdy liczba przedsiębiorstw nie przekroczy podwójnej modalności rozkładu ludności [Domański 1993, s.102].

brzeżu. Rysunek przedstawia odległości (w km) pomiędzy miastami oraz liczbę potencjalnych klientów (w tys.) dokonujących zakupów w ciągu tygodnia. Celem jest znalezienie miejsca położonego najbliżej możliwie największej liczby potencjalnych klientów, czyli minimalizującego całkowitą odległość pomiędzy centrum handlowym a wszystkimi potencjalnymi klientami (*TTK* – *total travel kilometres*). Punktem, dla którego wartość wskaźnika jest najmniejsza spośród wartości wyznaczonych dla ograniczonej liczby możliwych lokalizacji⁴, jest miasto E:

$$TTK_E = 15 \cdot 11 + 10 \cdot 8 + 10 \cdot 4,5 + 10 \cdot 2,5 + 5 \cdot 0 + 20 \cdot 4,5 + 10 \cdot 6,5 + 15 \cdot 11 = 635.$$

Z uwagi na czasochłonność powyższej metody oraz fakt, iż nie daje ona gwarancji znalezienia optymalnej lokalizacji, czyli takiej, która miałaby najniższą, ze wszystkich możliwych, wartość *TTK*, autorzy zalecają stosowanie analizy marginalnej, która nie wymaga obliczania wartości wskaźnika dla każdego punktu, lecz polega na znalezieniu minimum poprzez badanie zmian *TTK* pod wpływem zmiany lokalizacji obiektu. Na przykład przeniesienie się z punktu C do D, spowoduje spadek poziomu wskaźnika o 50:

$$\Delta TTK_{CID} = +2(15+10+10) - 2(10+5+20+10+15) = 70 - 120 = -50,$$

a więc punkty leżące na lewo od ośrodka D można od razu wykluczyć itd⁵.

W niniejszej pracy problem ustalenia optymalnego umiejscowienia obiektu/obiektów autorka sformułowała w zasadniczo odmienny sposób. Po pierwsze, cho-

⁴ Wyznaczenie *TTK* dla wszystkich punktów jest niemożliwe, dlatego autorzy proponują ograniczyć się do skończonego zbioru obejmującego np. wszystkie miasta oraz wybrane punkty pomiędzy nimi.

⁵ Autorzy (W.F. Samuelson i S.G. Marks) nie dostrzegli jednak kilku istotnych zależności, których uwzględnienie pozwala przyspieszyć dojście do rozwiązania. Po pierwsze, z uwagi na fakt, iż potencjalni klienci mieszkają tylko w ośrodkach miejskich, a nie na trasach łączących sąsiednie miasta, z góry można przyjąć, że punkt o minimalnym *TTK* na pewno nie znajdzie się pomiędzy dwoma miastami leżącymi obok siebie, co wynika chociażby z zaproponowanej przez autorów analizy marginalnej. Zauważmy, że tak naprawdę na wzrost bądź spadek *TTK* wpływu nie ma wcale zmiana lokalizacji mierzona odległością, lecz różnica pomiędzy liczbą ludności, od której obiekt się „oddala”, a liczbą ludności, do której obiekt się „zbliża”. Skoro ludność nie zamieszkuje terenów pomiędzy miastami, znak powyższej różnicy ustalonej dla dowolnej pary punktów leżących na odcinku łączącym dwa sąsiednie miasta jest stały. Nie ma zatem takiej możliwości, aby szukane ekstremum znalazło się w innym punkcie niż w którymś z miast. Przyjmowanie w treści zadania, że centrum handlowe można wybudować w dowolnym punkcie na wybrzeżu, jest pozbawione sensu i sztucznie opóźnia znalezienie rozwiązania. Po drugie, można dowiedzieć, że odległości pomiędzy miastami mają jedynie wpływ na poziom *TTK*, lecz nie na ostateczny wybór optymalnej lokalizacji. W związku z tym, szukając najlepszego punktu, należy kierować się tylko kolejnością miast leżących na odcinku AH oraz liczbą ludności w nich zamieszkującej. Z zaobserwowanych przez autorkę zależności wynika, iż wystarczy obliczyć dla każdego miasta skumulowaną liczbę ludności (dla miasta A: 15, dla B: 15+10=25, C: 35, D: 45, E: 50, F: 70, G: 80, H: 95), a optymalnym punktem będzie ośrodek miejski, którego skumulowana liczba ludności jest równa bądź nieco większa od połowy skumulowanej liczby ludności wyznaczonej dla ostatniego miasta. Warunek ten spełnia miasto E ($50 \geq 0,5 \cdot 95 = 47,5$).

dzi o lokalizację **sieci jednorodnych obiektów**⁶ (charakteryzujących się punktową formą przestrzenną⁷) będących własnością **jednego podmiotu**. Z tego założenia wynika, że **obiekty nie są konkurencyjne względem siebie**, a celem decydenta jest **maksymalizacja łącznego zysku**⁸. Po drugie, każdemu **potencjalnemu** (czyli jeszcze nie wybudowanemu i nie uruchomionemu) **obektowi jest z góry przypisana konkretna lokalizacja**, która stanowi wypadkową czynników komunikacyjnych i administracyjnych, zatem problem sprowadza się nie do tego, gdzie dany obiekt wybudować, ale czy jego budowa ma sens ekonomiczny. Decyzje lokalizacyjne podejmowane w aktualnej rzeczywistości gospodarczej dotyczą coraz częściej nie pojedynczego przedsiębiorstwa, lecz całej sieci jednorodnych obiektów. Dlatego zmiana dotychczas prezentowanego podejścia w literaturze wydaje się potrzebna.

Ze względu na fakt, iż zysk globalny zależy od zysku realizowanego przez poszczególne obiekty, a ten z kolei jest zależny od wielu czynników, autorka podejmie próbę sformułowania modeli uwzględniających zarówno możliwe relacje obiektów z otoczeniem, jak i zjawisko współzależności⁹ pomiędzy obiektami. Analiza opierać się będzie na przyjętym przez Christallera założeniu, które brzmi: „Układy lokalizacyjne są rezultatem działania dwóch sił: dążenia konsumentów do minimalizacji czasu i pieniędzy przeznaczonych na transport oraz dążenia producentów usług do maksymalizacji obrotów i zysków, czyli do możliwie największego obszaru obsługi” [Budner 2000, s. 96; Christaller 1933; McCarty, Lindberg 1969]. Rozpatrywane obiekty nie będą konkurować z sobą, gdyż maksymalizacja zysków częściowych może wcale nie doprowadzić do osiągnięcia maksymalnego zysku łącznego. Nie można jednak wykluczyć konkurencji pomiędzy nimi a innymi przedsiębiorstwami oferującymi podobne usługi bądź zaspokajającymi podobne potrzeby. Dlatego też w pracy zakłada się, że w szacowanych możliwych zyskach generowanych przez poszczególne obiekty będzie już zawarta korekta z tytułu istniejącej konkurencji¹⁰. Wielkość przewidywanego globalnego zysku właściciela

⁶ Autorka przyjmuje, że obiekty jednorodne to obiekty oferujące te same usługi po tej samej cenie.

⁷ J.C. Maradon [Budner 2000, s. 22; Maradon 1993], wśród form przestrzennych lokalizacji inwestycji, wyróżnia obok punktowego miejsca lokalizacji (np. porty morskie) formę liniową (np. granice państw) i strefową (np. uprawy rolne). Dodajmy, że z punktu widzenia swobody wyboru, określonej zależnością od stopnia powiązania zakładu z czynnikami lokalizacji, w pracy rozpatrywane będą obiekty, których cechuje lokalizacja zależna [Budner 2000, s. 25].

⁸ Zgodnie z teorią Isarda [Izard 1965; Budner 2000, s. 49-50] posługiwanie się kategorią zysku jest najbardziej wskazane, gdyż lokalizacja obiektu wpływa zarówno na generowane przychody, jak i ponoszone koszty.

⁹ Zjawisko współzależności dostrzegł już A. Lösch, lecz dotyczyło ono podmiotów konkurujących z sobą.

¹⁰ Czytelnik mógłby zadać następujące pytanie: „Skoro w pobliżu obiektów, których budowę rozważa inwestor, istnieją już obiekty oferujące podobne usługi lub zaspokajające podobne potrzeby, jaka jest szansa na to, że potencjalne nowe obiekty zrealizują dodatni wynik finansowy?”. Biorąc pod

sieci obiektów będzie się ściśle wiązała z różnicą pomiędzy poziomem nasycenia, w ramach rozpatrywanej kategorii usług, a aktualnym stopniem zaspokajania potrzeb konsumentów.

2. Zagadnienie lokalizacyjne jako problem optymalnego rozdziału zasobu

Z uwagi na przyjęte założenia okazuje się, że zadanie, polegające na ustaleniu zestawu obiektów maksymalizującego zysk ich właściciela, można w niektórych przypadkach rozwiązać metodami służącymi do wyznaczenia optymalnego rozdziału zasobu [*Ekonometria...* 1999, s. 66-73], tj. za pomocą programowania dynamicznego, czy też procedur uproszczonych, do których należą metoda dochodów (zysków) krańcowych oraz metoda ekstremów lokalnych. W tymże zagadnieniu zakłada się, że decydent dysponuje pewną ilością jednorodnego zasobu, który może być skierowany do n działalności, przy czym jego nakład w każdej działalności daje określone korzyści zależne nieliniowo od poniesionych nakładów¹¹. Celem decydenta jest ustalenie takiego rozdziału posiadanego zasobu, aby osiągnięty zysk był maksymalny. Zauważmy, że w rozpatrywanym problemie lokalizacyjnym jednostka zasobu jest odpowiednikiem jednego obiektu, działalność może oznaczać obszar o administracyjnie ustalonych granicach (np. dzielnica, miasto, region itd.), z kolei za nakład zasobu można przyjąć łączną liczbę obiektów wybudowanych na danym obszarze. Jedyna istotna różnica pomiędzy porównywanymi zagadnieniami polega na tym, że obiekty, chociażby świadczyły te same usługi po tej samej cenie, nie są tak do końca jednorodnym „zasobem”, gdyż odróżnia je właśnie czynnik lokalizacyjny, a ten z kolei decyduje o wielkości generowanego zysku¹². Dlatego też przy korzystaniu z metod stosowanych w zagadnieniu optymalnego rozdziału zasobu należy pamiętać o tym, że na zysk globalny wpływ nie tylko liczba, lecz także zestaw uruchomionych obiektów.

Rozważmy następującą sytuację. Załóżmy, że inwestor dysponuje kapitałem, który zamierza przeznaczyć na budowę jednorodnych obiektów handlowych w trzech różnych miastach tak, aby osiągnąć jak największy zysk. W każdym mieście może wybudować maksymalnie trzy obiekty: w miejscowości A – obiekty a_1, a_2, a_3 ,

uwagę chociażby czynnik jakościowy, cenowy i lokalizacyjny, okazuje się, że obiekty te mogą, przynajmniej w krótkim okresie, nie tylko „przechwycić” część rynku, lecz także dotrzeć do gospodarstw, które dotychczas nie korzystały z usług oferowanych przez funkcjonujące już przedsiębiorstwa.

¹¹ Dodatkowo można przyjąć, że nakład zasobu na j -tą działalność nie może spaść poniżej pewnego poziomu ani przekroczyć maksymalnego dopuszczalnego nakładu.

¹² Zróżnicowanie zysków osiąganych przez poszczególne obiekty może wynikać z różnych kosztów ich budowy, eksploatacji, z nierównomiernie rozmieszczonej ludności, z różnych rozwiązań komunikacyjnych itd.

w B – b_1, b_2, b_3 , w C – c_1, c_2, c_3 . Inwestor przypisał każdemu obiektowi dokładną lokalizację (która nie jest ograniczona ani barierą zasobową, ani instrumentalną) i po przeprowadzeniu wstępnej analizy rynku stwierdził, że wielkość skumulowanego zysku¹³ w danym mieście będzie zależała nie tylko od liczby obiektów w każdym z nich postawionych, lecz i od tego, w jakim składzie zostaną one wybudowane.

Tabela 2. Zyski (w mln zł) dla poszczególnych kombinacji

x_j	Miasto A		Miasto B		Miasto C	
	kombinacja	dochód	kombinacja	dochód	kombinacja	dochód
0	brak	0	brak	0	brak	0
1	a1	5	b1	4	c1	5
	a2	4	b2	3	c2	4
	a3	6	b3	3	c3	6
2	a1, a2	9	<u>b1, b2</u>	<u>6</u>	c1, c2	8
	<u>a1, a3</u>	<u>10</u>	<u>b1, b3</u>	<u>6</u>	c1, c3	11
	a2, a3	9	b2, b3	5	c2, c3	10
3	a1, a2, a3	9	<u>b1, b2, b3</u>	<u>6</u>	<u>c1, c2, c3</u>	<u>13</u>

Źródło: opracowanie własne (x_j oznacza liczbę obiektów w j -tym mieście).

W tabeli 2 przedstawiono wszystkie możliwe kombinacje budowy obiektów i odpowiadające im przewidywane zyski¹⁴. Gdy celem decydenta jest jedynie maksymalizacja zysku niezależnie od łącznej liczby obiektów (nie przekraczającej jednak dziewięciu), które trzeba będzie postawić, do wyznaczenia strategii optymalnej wystarczy najprostsza procedura – metoda ekstremów lokalnych. Dla każdej działalności zakłada ona wybór tej strategii, z którą wiąże się największe korzyści. Z analizy od razu można wykluczyć te kombinacje, które dla danej liczby obiektów wybudowanych w rozpatrywanym mieście (x_j) osiągają niższe dochody aniżeli warianty przedstawione wytłuszczonym drukiem. W mieście A należy zatem wybudować obiekt a_1 i a_3 , w mieście B: (b_1 i b_2) lub (b_1 i b_3) lub (b_1, b_2 i b_3), a w mieście C: c_1, c_2 i c_3 . Z punktu widzenia zagadnienia optymalnego rozdziału zasobu istnieją dwie strategie optymalne: (2,2,3) lub (2,3,3), natomiast biorąc pod uwagę zestaw obiektów, można wyróżnić 3 najlepsze rozwiązania lokalizacyjne: I) $a_1, a_3, b_1, b_2, c_1, c_2, c_3$; II) $a_1, a_3, b_1, b_3, c_1, c_2, c_3$; III) $a_1, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$. Gdy inwestor z góry zakłada budowę na przykład czterech obiektów handlowych ogółem, plan optymalny można ustalić na podstawie programowania dynamicznego.

¹³ Wybór horyzontu czasu (rok, pięć lat, itd.), dla którego mają być oszacowane spodziewane zyski, autorka pozostawia w gestii decydenta.

¹⁴ Ze względu na duże odległości pomiędzy miastami inwestor założył, że dochody osiągnięte w danym mieście nie zależą od obiektów zbudowanych w pozostałych miejscowościach. Gdyby jednak zależały, należałoby potraktować zbiór rozpatrywanych miast jako jeden obszar i wyznaczyć dochody dla $2^9 = 512$ kombinacji.

nego lub, jeżeli funkcja zysków krańcowych dla każdego miasta jest nierosnąca, za pomocą metody zysków krańcowych, do obliczenia których potrzebne są tylko wartości pogrubione. Druga z wymienionych procedur polega na przydzielaniu kolejnych jednostek (czyli budowaniu kolejnych obiektów) tam, gdzie dochody krańcowe są największe (tab. 3). Inwestor zrealizuje strategię $(a1, a3, c1, c3)$, czyli $(2, 0, 2)$ lub $(a3, b1, c1, c3)$, czyli $(1, 1, 2)$.

Tabela 3. Zyski krańcowe (w mln zł)

x_j	Miasto A		Miasto B		Miasto C	
	kombinacja	dochód	kombinacja	dochód	kombinacja	dochód
1	a3 (1)/(2)	6	b1 (4)	4	c3 (2)/(1)	6
2	a1, a3 (4)	4	b1, b2 lub b1, b3	2	c1, c3 (3)	5
3	a1, a2, a3	-1	b1, b2, b3	0	c1, c2, c3	2

Źródło: opracowanie własne.

Omówione zagadnienie można przedstawić w postaci ogólnego modelu (1)-(3).

$$\sum_{j=1}^n c(p_j) \rightarrow \max \quad (1)$$

$$p_j \leq m_j \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^n p_j = L \leq m \quad (3)$$

gdzie: n – liczba miast,

p_j – liczba obiektów wybudowanych w j -tym mieście,

$c(p_j)$ – przewidywany zysk z tytułu budowy p obiektów w j -tym mieście dla najkorzystniejszej (pogrubionej) kombinacji,

m_j – maksymalna liczba potencjalnych obiektów uruchomionych w j -tym mieście,

L – łączna liczba obiektów, które zamierza wybudować inwestor,

m – maksymalna łączna liczba potencjalnych uruchomionych obiektów.

Wzór (3) ma zastosowanie tylko wtedy, gdy łączna liczba wybudowanych obiektów jest określona. Funkcja celu dotyczy maksymalizacji łącznego zysku. Element p_j jest zmienną, a pozostałe składniki modelu to parametry¹⁵.

¹⁵ Stosowane do rozwiązywania zadań optymalizacyjnych narzędzie *Solver*, dołączone do pakietu *Excel*, w przypadku powyższego modelu jest niewystarczające. Dlatego też zaleca się korzystanie np. z systemu *SAS*. Powyższa uwaga dotyczy również modelu zaprezentowanego w części 4.

3. Zagadnienie lokalizacyjne jako problem wieloczynnikowy

Zauważmy, że gdy w każdym mieście można wybudować m_j obiektów, a rozpatrywanych jest n miast, inwestor, zgodnie z zaprezentowanym przykładem, powinien przed podjęciem decyzji ustalić przewidywane dochody dla

$$\sum_{j=1}^n 2^{m_j} \quad (4)$$

kombinacji, co przy np. $m_j = 6$ i $n = 4$ daje 256 wariantów. W tak rozbudowanych problemach decyzyjnych rozsądniej byłoby przedstawić wielkość zysku związanego z postawieniem obiektu jako funkcję jedno- bądź wieloargumentową, przy czym w krótkim okresie można by przyjąć stałość czynników lokalizacji, a w dłuższej perspektywie – ich zmienność. Takie podejście jeszcze nie uprawnia nas jednak do korzystania z metod optymalizujących rozdział zasobu.

Przypuśćmy, że nasz inwestor wyróżnił następujące czynniki mogące wpłynąć na osiągane dochody z tytułu uruchomienia konkretnego obiektu: a) wybudowanie innych obiektów w tym samym mieście; b) odległość między obiektem a pozostałymi uruchomionymi obiektami w danym mieście; c) obszar, z którego inwestor może czerpać zyski w wyniku budowy obiektu (tzw. obszar wpływu lub obszar obsługi). Niech w_{ij}^0 oznacza powierzchnię obszaru wpływu (np. w km^2) i -tego obiektu w j -tym mieście w sytuacji, w której poza nim nie ma innych uruchomionych w tym mieście (tzw. obszar pierwotny). Obszar ten kurczy się tym bardziej, im mniejsza jest odległość pomiędzy postawionym obiektem a nowymi obiektami. Dlatego rzeczywisty obszar obsługi autorka proponuje opisać wzorem:

$$w_{ij} = \max \{0, w_{ij}^0 x_{ij} - (-x_{ij} + \exp(\sum_{k=1}^{m_j} s_{ij}^{kj} x_{kj}))\} \quad i = 1, \dots, m_j, j = 1, \dots, n \quad (5)$$

gdzie: x_{ij} – zmienna binarna, która przyjmuje wartość 1, gdy i -ty obiekt powinien być wybudowany w j -tym mieście,

s_{ij}^{kj} – współczynnik (przyjmujący wartości nieujemne) wyrażający w przybliżeniu siłę zmniejszenia pierwotnego obszaru wpływu i -tego obiektu postawionego w j -tym mieście na skutek uruchomienia w nim k -tego obiektu¹⁶.

¹⁶ Współczynnik ten jest odwrotnie proporcjonalny do odległości pomiędzy obiektami i przyjmuje zerową wartość w dwóch przypadkach: gdy $k = i$ lub gdy ta odległość jest na tyle duża, że pierwotne obszary obsługi nie mają części wspólnej. Z wzoru (5) wynika, że jeżeli obiekt ij :

a) nie zostanie uruchomiony ($x_{ij}=0$), jego obszar wpływu będzie zerowy ($w_{ij}=0$) niezależnie od budowy i miejsca budowy innych potencjalnych obiektów w mieście j ,

b) zostanie uruchomiony ($x_{ij}=1$), a pozostałe obiekty w j -tym mieście nie ($x_{kj}=0$), jego obszar wpływu będzie równy pierwotnemu obszarowi obsługi ($w_{ij}=w_{ij}^0$),

Zysk (np. w mln zł) wynikający z uruchomienia i -tego obiektu w j -tym mieście (Z_{ij}) można przedstawić jako funkcję obszaru wpływu w_{ij} :

$$Z_{ij} = f(w_{ij}) \quad (6)$$

Wybór postaci analitycznej funkcji (6) leży w gestii decydenta. Warto jednak sobie uzmysłowić, że wzrost powierzchni obszaru obsługi z pewnością nie pociąga za sobą liniowego wzrostu zysku, gdyż usługi oferowane przez dany obiekt cieszą się największym zainteresowaniem klientów zamieszkujących tereny położone stosunkowo blisko. Zainteresowanie to spada wraz ze wzrostem odległości pomiędzy miejscem zamieszkania potencjalnego usługobiorcy a miejscem budowy obiektu. Funkcja (6) powinna zatem charakteryzować się taką postacią analityczną, która by uwzględniała opisaną zależność¹⁷. Model pozwalający wyznaczyć zestaw obiektów maksymalizujący zysk globalny można sformułować następująco¹⁸:

$$\sum_{i=1}^{m_j} \sum_{j=1}^n Z_{ij} x_{ij} \rightarrow \max \quad (7)$$

$$Z_{ij} = f(w_{ij}) \quad i=1,2,\dots, m_j, j=1, 2,\dots, n \quad (8)$$

$$w_{ij} = \max \{0, w_{ij}^0 x_{ij} - (-x_{ij} + \exp(\sum_{k=1}^{m_j} s_{ij}^{kj} x_{kj}))\} \quad i=1,\dots, m_j, j=1,\dots, n \quad (9)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad i=1,2,\dots, m_j, j=1,2,\dots, n \quad (10)$$

$$\sum_{i=1}^{m_j} \sum_{j=1}^n x_{ij} = L \leq m \quad (11)$$

W omówionym modelu przyjęto założenie, że na rentowność danego obiektu wpływ ma jedynie sytuacja panująca w mieście, w którym obiekt ten został wybudowany. Może się jednak zdarzyć, że odległość pomiędzy miejscowościami będzie na tyle mała, iż uruchomienie obiektu w jednym mieście wpłynie na zyski generowane przez obiekt postawiony w innym mieście. Jeżeli, obok współzależności we-

c) zostanie uruchomiony ($x_{ij}=1$) i pozostałe potencjalne obiekty (lub niektóre z nich) również ($x_{kj}=1$), to jego obszar wpływu będzie: równy w_{ij}^0 , gdy będą one istotnie oddalone od obiektu ij ($s_{ij}^{kj}=0$), lub mniejszy od w_{ij}^0 , gdy przynajmniej jeden obiekt kj będzie położony blisko obiektu ij ($s_{ij}^{kj}>0$).

W ustaleniu poziomu współczynnika s_{ij}^{kj} może pomóc znajomość części wspólnych pierwotnych obszarów obsługi (lub wspólnych fragmentów ich średnic) poszczególnych par i grup obiektów.

¹⁷ Autorka proponuje m.in. funkcje hiperboliczne (w tym funkcję Törnquista I rodzaju) i potęgowe.

¹⁸ Warunek (11) jest istotny, gdy łączna liczba obiektów jest z góry ustalona.

wewnętrznej, możliwa jest także współzależność zewnętrzna, wzór (9) w modelu (7)-(11) powinien zostać zastąpiony formułą (9a)¹⁹:

$$w_{ij} = \max \{0, W_{ij}^0 x_{ij} - (-x_{ij} + \exp(\sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^{m_l} s_{ij}^{kl} x_{kl}))\} \quad (9a)$$

gdzie: W_{ij}^0 – powierzchnia obszaru wpływu i -tego obiektu w j -tym mieście w sytuacji, w której poza nim nie ma innych uruchomionych w tym mieście i w pozostałych miastach blisko niego leżących,

s_{ij}^{kl} – współczynnik wyrażający w przybliżeniu siłę zmniejszenia pierwotnego obszaru wpływu i -tego obiektu postawionego w j -tym mieście na skutek uruchomienia k -tego obiektu w l -tym mieście.

Oczywiście decydent, próbując oszacować wpływ poszczególnych czynników na zyski realizowane przez obiekty, może pokusić się o sformułowanie funkcji przedstawiającej bezpośrednią zależność pomiędzy dochodem danego przedsiębiorstwa a budową innych obiektów. Wówczas wzory (8)-(9) lub (8)-(9a) można zastąpić np. wzorem (12) lub (12a):

$$Z_{ij} = \frac{z_{ij}^0 x_{ij}}{1 + (\sum_{k=1}^{m_j} r_{ij}^{kj} x_{kj})} \quad (12)$$

$$Z_{ij} = \frac{z_{ij}^0 x_{ij}}{1 + (\sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^{m_l} r_{ij}^{kl} x_{kl})} \quad (12a)$$

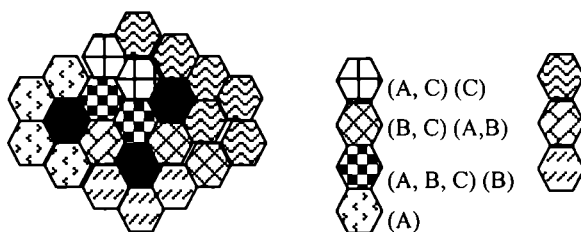
gdzie: z_{ij}^0 (Z_{ij}^0) – przewidywany zysk i -tego obiektu w j -tym mieście w sytuacji, w której poza nim nie ma innych uruchomionych w tym mieście (i w pozostałych miastach blisko niego leżących),

r_{ij}^{kj} (r_{ij}^{kl}) – współczynnik wyrażający w przybliżeniu siłę zmniejszenia pierwotnego zysku i -tego obiektu postawionego w j -tym mieście na skutek uruchomienia k -tego obiektu w tym mieście (w l -tym mieście).

¹⁹ Gdyby zamiast miejscowości rozpatrywane były np. państwa, zaleca się, by współczynnik s_{ij}^{kl} w przypadku pary obiektów postawionych w dwóch sąsiadujących krajach podlegał dodatkowo korekcie nawet wtedy, gdy te obiekty znajdują się dość blisko siebie. Potrzeba owej korekty wynika chociażby z istniejącej granicy pomiędzy państwami, której przekraczanie może być uznane przez potencjalnych klientów za uciążliwe. Mogłoby się okazać, że obywatelowi państwa X mieszkającemu przy granicy z państwem Y bardziej opłaca się przebyć dłuższą trasę, by skorzystać z usług obiektu wybudowanego w jego kraju aniżeli udać się do obiektu leżącego tuż po drugiej stronie granicy.

4. Zagadnienie lokalizacyjne jako problem maksymalizacji korzyści z obszaru rynkowego

Ustalenie postaci analitycznej i poziomu parametrów funkcji ukazujących w przybliżeniu wpływ wybranych czynników na elementy w_{ij} oraz Z_{ij} może okazać się dla decydenta zbyt trudnym zadaniem. Niech alternatywą dla przedstawionych modeli będzie następujące podejście. Zamiast formułować funkcje dla każdego potencjalnego obiektu, można (a) wyznaczyć jego obszar wpływu, (b) obszar ten podzielić na mniejsze działki (np. w kształcie sześciokąta foremnego²⁰, rys. 3), następnie (c) ustalić dla każdej działki (obszaru rynkowego) zbiór wszystkich tych obiektów, których pierwotne obszary obsługi znaleźć się mogą na jej terenie, (d) oszacować przewidywane zyski generowane przez dany obiekt z poszczególnych działek przy założeniu, że nie zostanie wybudowany żaden inny obiekt, którego obszar obsługi leżałby na ich terenie, (e) wyznaczyć udział w zyskach z danej działki w sytuacji, gdy więcej niż jeden obiekt będzie z niej czerpał korzyści²¹.



Rys. 3. Diagram Voronoi (czarne sześciokąty oznaczają działki, na których decydent rozważa budowę obiektu – od lewej: A, B, C; desenie wybrane dla pozostałych działek określają, które zbiory obiektów mogą z nich potencjalnie czerpać korzyści)

Źródło: opracowanie własne.

Przy szacowaniu zysków i udziału w zyskach w przypadku wspólnych działek istotne znaczenie mają m.in. ewentualne obiekty konkurencyjne dla mającej powstać sieci obiektów, infrastruktura komunikacyjna, rozmieszczenie ludności oraz lokalizacja danej działki w stosunku do miejsc budowy obiektów mogących z niej czerpać korzyści. Ze względu na dwa pierwsze wymienione czynniki nie można przyjąć, że potencjalny klient przy wyborze obiektu, z którego usług mógłby korzystać, będzie się kierować odległością pomiędzy jego miejscem zamieszkania a obiektem, mierzona w linii prostej. Model pozwalający ustalić zestaw obiektów maksymalizujący wielkość zysku globalnego może mieć postać:

²⁰ Już A. Lösch zauważył, że właśnie ta figura jest idealnym ekonomicznie kształtem obszaru rynkowego. Sześciokąt, w odróżnieniu od np. kwadratu, minimalizuje odległości od centrum do wszystkich punktów wewnątrz wieloboku. Poza tym, w przeciwieństwie do działek okrągłych, sieć heksagonów pokrywa bez reszty rozpatrywaną powierzchnię [Budner 2000, s. 62-63; Lösch 1961, s. 136].

²¹ Inwestor zdaje sobie sprawę z tego, że jeżeli w pobliżu jednego obiektu uruchomi inny, zyski ze wspólnych działek będą po części generowane przez jeden, a po części przez drugi obiekt.

$$\sum_{k=1}^K d_k \rightarrow \max \quad (13)$$

$$d_k = f(x_{ij}^k, d_{ij}^k, u_{ij}^k) \quad i = 1, 2, \dots, m_j, j = 1, 2, \dots, n \quad (14)$$

$$u_{ij}^k = f(x_{ij}^k) \quad i = 1, 2, \dots, m_j, j = 1, 2, \dots, n \quad (15)$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 0 & \sum_{k=1}^K x_{ij}^k = 0 \\ 1 & \sum_{k=1}^K x_{ij}^k > 0 \end{cases}, \text{ gdy } \quad i = 1, 2, \dots, m_j, j = 1, 2, \dots, n \quad (16)$$

$$\sum_{i=1}^{m_j} \sum_{j=1}^n x_{ij} = L \leq m \quad (17)$$

$$x_{ij}, x_{ij}^k \in \{0; 1\} \quad i = 1, 2, \dots, m_j, j = 1, 2, \dots, n, k = 1, 2, \dots, K \quad (18)$$

gdzie: d_k – łączny dochód z k -tej działki,

x_{ij}^k – zmienna ta przyjmuje wartość 1, gdy k -ta działka należy do pierwotnego obszaru wpływu wybudowanego obiektu ij ,

d_{ij}^k – dochód generowany przez obiekt ij na k -tej działce przy założeniu, że tylko ten obiekt czerpie z niej korzyści,

u_{ij}^k – udział obiektu ij w zyskach z k -tej działki,

x_{ij} – zmienna jest równa 1, gdy i -ty obiekt ma być wybudowany w j -tym mieście,

Ze względu na złożoność możliwych powiązań, we wzorach (14)-(15) wymieniono tylko czynniki determinujące parametry d_k i u_{ij}^k . Zastosowanie powyższych wzorów zilustruje prosty przykład. Załóżmy, że działka $k = 2$ może maksymalnie należeć do pierwotnego obszaru wpływu dwóch obiektów o współrzędnych ($i = 1, j = 1$) i ($i = 2, j = 1$). Przypuszcza się, że gdyby tylko jeden z nich został faktycznie wybudowany, dochód z tej działki wynosiłby odpowiednio $d_{11}^2 = 5$, $d_{21}^2 = 7$ mln zł. W przypadku uruchomienia obu obiektów udziały w zyskach byłyby równe $u_{11}^2 = 1/3$, $u_{21}^2 = 2/3$. W tej sytuacji wzory (14)-(15) przyjmują dla działki $k = 2$ postać:

$$d_2 = \begin{cases} 0 & x_{11}^2 = 0, x_{21}^2 = 0 \\ 5x_{11} & x_{11}^2 = 1, x_{21}^2 = 0 \\ 7x_{21} & x_{11}^2 = 0, x_{21}^2 = 1 \\ 1/3 \cdot 5x_{11} + 2/3 \cdot 7x_{21} & x_{11}^2 = 1, x_{21}^2 = 1 \end{cases}, \text{ gdy}$$

$$u_{11}^2 = \begin{cases} 0 & x_{11} = 0 \\ 1/3 & x_{11} = 1, x_{21} = 0 \\ 1/3 & x_{11} = 1, x_{21} = 1 \end{cases}, \text{ gdy} \quad u_{21}^2 = \begin{cases} 0 & x_{21} = 0 \\ 1/3 & x_{21} = 1, x_{11} = 0 \\ 2/3 & x_{21} = 1, x_{11} = 1 \end{cases}.$$

Model ujęty równaniami (13)-(18) może podlegać zmianom i rozszerzeniom. Gdyby inwestorowi zależało np. na tym, by łączny rzeczywisty obszar wpływu sieci uruchomionych obiektów rozciągał się na przynajmniej R działek, wystarczyłoby dodać:

$$x^k = \begin{cases} 0 & \sum_{i=1}^{m_j} \sum_{j=1}^n x_{ij}^k = 0 \\ 1 & \sum_{i=1}^{m_j} \sum_{j=1}^n x_{ij}^k > 0 \end{cases}, \text{ gdy } k=1, 2, \dots, K \quad (19)$$

$$\sum_{k=1}^K x^k \geq R \quad (20)$$

gdzie: x^k – zmienna przyjmuje wartość 1, gdy k -ta działka leży na obszarze wpływu przynajmniej jednego uruchomionego obiektu,

R – minimalna liczba działek składająca się na rzeczywisty łączny obszar obsługi.

5. Zakończenie

W pracy podjęto próbę konstruowania modeli pozwalających wyznaczyć optymalny zestaw obiektów, o z góry ustalonej lokalizacji, które powinny być uruchomione, aby zysk globalny ich właściciela był maksymalny. Problem jest na tyle złożony, iż powinien on być również przeanalizowany w ujęciu dynamicznym z uwzględnieniem wszystkich istotnych czynników i relacji pomiędzy nimi. Ze względu na niemożność precyzyjnego ustalenia poziomu parametrów omówionych modeli, dalsza analiza mogłaby iść w kierunku wersji stochastycznej. Parametry zastąpiono by zmienną losową o znanym rozkładzie prawdopodobieństwa, a przykładem celu inwestora mogłaby być maksymalizacja oczekiwanego zysku przy ryzyku, mierzonym semiodchyleniem, nie większym od zadanego poziomu, lub maksymalizacja oczekiwanego zysku przy założeniu, że prawdopodobieństwo tego, iż nie będzie on niższy, nie będzie mniejsze od z góry przyjętego.

Literatura

- Budner W., *Lokalizacja przedsiębiorstw*, MD 77, wydanie drugie, AE, Poznań 2000.
 Christaller W., *Die Zentralen Orte in Süddeutschland*, Jena 1933.
 Domański R., *Gospodarka przestrzenna*, wydanie drugie, PWN, Warszawa 1993.
Ekonometria i badania operacyjne, red. B. Guzik, MD 51, AE, Poznań 1999.
 Hotelling H., *Stability in Competition*, „Economic Journal” 1929 vol. 39.
 Isard W., *Metody analizy regionalnej*, PWN, Warszawa 1965.

- Lloyd P.E., Dicken P., *Location in Space: A Theoretical Approach to Economic Geography*, Harper and Row Publishers, New York–Evanston–San Francisco–London 1972.
- Lösch A., *Gospodarka przestrzenna*, PWE, Warszawa 1961.
- Maradon J.C., *Auslandsinvestitionen. Räumliche Verteilung und räumliche Auswirkung von ausländischen Industrieansiedlungen in Belgien, Frankreich, Süditalien und in der Bundesrepublik Deutschland*. Ferdinand Schöning, Paderborn 1983.
- McCarty H., Lindberg J.B., *Wprowadzenie do geografii ekonomicznej*, PWN, Warszawa 1969.
- Sadahiro Y., *Spatiotemporal Analysis of the Distribution of Urban Facilities in Terms of Accessibility*, „Papers in Regional Science” 2005 vol. 84, nr 1, s. 61-84.
- Samuelson W.F., Marks S. G., *Ekonomia menedżerska* (tłum. R. Rapacki), PWE, Warszawa 1998.
- Stevens B.H., *An Application of Game Theory to a Problem in Location Strategy*, Papers and Proceedings of the Regional Science Association, t. 7, 1961.

OPTIMAL FACILITIES' LOCATION

Summary

The paper presents several optimization models concerning the location of a chain of facilities which belong to one proprietor. Therefore, the models' goal consists in maximizing his total profit and not the gain of each facility separately. On one hand, the formulated models are partially based on Lösch's, Isard's and Christaller's theories. On the other hand, the author shows their connection with some operations research's areas.