

Piotr Peternek

Akademia Ekonomiczna we Wrocławiu

ZASTOSOWANIE WYBRANYCH METOD GRAFICZNYCH DO KONSTRUKCJI PLANÓW EKSPERYMENTU

1. Wstęp

Problematyka zagadnienia planowania eksperymentów w zasadniczej części sprowadza się do uzyskania najlepszego w sensie określonego kryterium (zob. np. [Wawrzynek 1993; Mańczak 1976]) planu eksperymentu. Wybór poziomów czynników nie polega jednak wyłącznie na rozwiązaniu zadania optymalizacyjnego skonstruowanego względem danego kryterium. Praktyczne zastosowanie metod planowania eksperymentów wymusiło koncentrację przede wszystkim na optymalizacji liczby przeprowadzanych doświadczeń. Jak najmniejsza liczba doświadczeń w eksperymencie musi umożliwić jednakże estymację parametrów modelu przy jednoczesnym zapewnieniu dobrych własności (w sensie określonych kryteriów) takiego planu eksperymentu. Klasyczna teoria planowania eksperymentów przedstawia algorytmy konstrukcji zarówno planów całkowitych eksperymentów czynnikowych, jak i planów ułamkowych eksperymentów czynnikowych. Nie wskazuje jednak jednoznacznego rozwiązania – prostego algorytmu umożliwiającego bezpośrednio skonstruowanie planu, który zawsze umożliwiałby estymację wybranych, istotnych z punktu widzenia eksperymentatora efektów interakcyjnych przy ograniczonej liczbie doświadczeń. Oczywiście zostały skonstruowane kryteria podziału ułamkowych planów eksperymentów, takie jak kryterium rozdzielczości planu, kryterium największego niewywikłania czy najmniejszej aberracji. Jednak w dalszym ciągu odnalezienie poszczególnych uwikłań możliwe jest po szczegółowej analizie kontrastu definiującego (zob. np. [Montgomery 1997]). Tu z pomocą przychodzą metody graficzne, a szczególnie zaproponowane przez G. Taguchiego [1987] grafy liniowe czy przedstawiona przez C.F.J. Wu i J. Chena [1992] metoda grafów wspomagających. Należy tu zauważyć, że obie te metody uwzględniają jedynie interakcje 2-czynnikowe, traktując pozostałe współzależności za nieistotne.

Zanim szczegółowo zostaną przedstawione metody graficzne konstrukcji planu eksperymentu, zauważmy, że rozważaniom zostanie poddany taki rodzaj ekspery-

mentu, w którym badana będzie cecha Y zwana cechą objaśnianą (wyjściową, wynikową lub odpowiedzią) w zależności od cech $X_1, \dots, X_k$ zwanych czynnikami (zmiennymi objaśniającymi, wejściowymi). Przeprowadzany eksperyment zawiera m doświadczeń zdefiniowanych jednoznacznie za pomocą macierzy planu eksperymentu

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & \dots & x_{k1} \\ x_{12} & x_{22} & \dots & x_{k2} \\ \dots & \dots & & \dots \\ x_{1m} & x_{2m} & \dots & x_{km} \end{bmatrix},$$

w której elementy $x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ki}$ definiują wartości (poziomy) cech objaśniających $X_1, \dots, X_k$ w doświadczeniu o numerze i ($i = 1, \dots, m$).

Z dużym stopniem ogólności można założyć, że zmienna objaśniana Y spełnia równanie

$$\mathbf{Y} = \beta_0 f_0(\mathbf{X}) + \beta_1 f_1(\mathbf{X}) + \beta_2 f_2(\mathbf{X}) + \dots + \beta_r f_r(\mathbf{X}) + \varepsilon,$$

gdzie: $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_k)$,

$f_k(\mathbf{X})$ dla $k = 0, 1, \dots, r$ są zadanymi funkcjami liniowo niezależnymi,

$f_0(\mathbf{X})$ jest przy tym funkcją stałą postaci $f_0(\mathbf{X}) = 1$,

ε jest zmienną losową, dla której $E(\varepsilon) = 0$ $V(\varepsilon) = \sigma^2$.

Jeśli wartości cechy Y są obserwowane w punktach $\mathbf{x}_i = (x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ki})$ ($i = 1, \dots, m$) określonych przez macierz $\mathbf{X}$, to realizacje $y_1, y_2, \dots, y_m$ cechy Y spełniają równanie wektorowo-macierzowe

$$\mathbf{Y} = \boldsymbol{\beta} \mathbf{F}_X^T + \varepsilon,$$

gdzie $\mathbf{Y} = [y_1, y_2, \dots, y_m]^T$, $\boldsymbol{\beta} = [\beta_0 \ \beta_1 \ \dots \ \beta_r]$, natomiast

$$\mathbf{F}_X = \begin{bmatrix} f_0(\mathbf{x}_1) & f_1(\mathbf{x}_1) & \dots & f_r(\mathbf{x}_1) \\ f_0(\mathbf{x}_2) & f_1(\mathbf{x}_2) & \dots & f_r(\mathbf{x}_2) \\ \dots & \dots & & \dots \\ f_0(\mathbf{x}_m) & f_1(\mathbf{x}_m) & \dots & f_r(\mathbf{x}_m) \end{bmatrix}.$$

W dalszym ciągu jako funkcje $f_i(x)$ będą rozpatrywane jedynie jednomiany pierwszego stopnia, co w konsekwencji prowadzi do równania

$$\mathbf{Y} = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_k X_k + \beta_{k+1} X_1 X_2 + \dots + \beta_r X_1 X_2 \dots X_k + \varepsilon.$$

Współczynniki regresji $\beta_1, \dots, \beta_k$ zwane są efektami głównymi, pozostałe współczynniki nazywa się interakcjami odpowiednio rzędu 2, 3, aż do rzędu k (w zależności od liczby czynników przy danym parametrze β_i).

2. Metoda Taguchiego – grafy liniowe

W praktyce zastosowanie metod Taguchiego polega na realizacji eksperymentu, którego plan odpowiada wybranej tablicy ortogonalnej. Tablice te są często zgodne ze znanymi planami Placketta-Burmana lub też ułamkowymi planami czynnikowymi wysokiego rzędu. G. Taguchi zaproponował szereg takich tablic oraz skonstruował metody wspomagające wybór odpowiedniego planu eksperymentu. Jako że liczba możliwych planów eksperymentów jest w zasadzie nieskończona,

Tabela 1. Kody standardowych tablic ortogonalnych

Tablica ortogonalna	Liczba wierszy (stopni swobody)	Liczba kolumn (czynników)	Maksymalna liczba czynników dla danej liczby poziomów			
			2	3	4	5
$L_4(2^3)$	4	3	3			
$L_8(2^7)$	8	7	7			
$L_9(3^4)$	9	4		4		
$L_{12}(2^{11})$	12	11	11			
$L_{16}(2^{15})$	16	15	15			
$L_{16}(4^5)$	16	5			5	
$L_{18}(2^1 3^7)$	18	8	1	7		
$L_{25}(5^6)$	25	6				6
$L_{27}(3^{13})$	27	13		13		
$L_{32}(2^{31})$	32	31	31			
$L_{32}(2^1 4^9)$	32	10	1		9	
$L_{36}(2^{11} 3^{12})$	36	23	11	12		
$L_{36}(2^3 3^{13})$	36	16	3	13		
$L_{50}(2^1 5^{11})$	50	12	1			11
$L_{54}(2^1 3^{25})$	54	26	1	25		
$L_{64}(2^{63})$	64	63	63			
$L_{64}(4^{21})$	64	21			21	
$L_{81}(3^{40})$	81	40		40		

Źródło: [Phadke 1989].

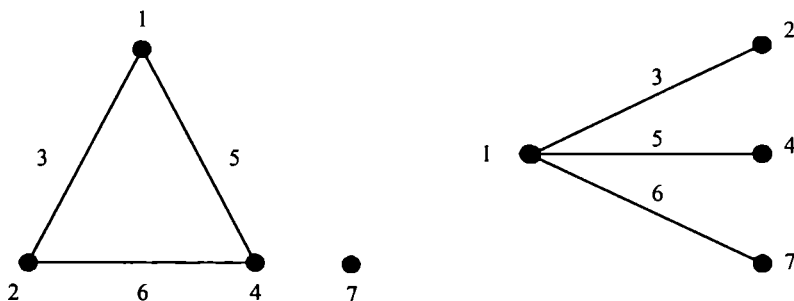
G. Taguchi zaproponował też kilka metod modyfikacji skonstruowanych przez siebie tablic ortogonalnych. Kody wybranych standardowych tablic ortogonalnych zaproponowanych przez G. Taguchiego zebrane są w tab. 1. Każdy kod jednoznacznie definiuje liczbę wierszy oraz czynników możliwych do oszacowania w danej tablicy ortogonalnej. Na przykład kod $L_{32}(2^1 4^9)$ oznacza tablicę składającą się z 32 wierszy oraz 10 kolumn, umożliwiającą estymację 1 czynnika znajdującego się na 2 poziomach oraz 9 czynników będących na 4 poziomach.

Zasadniczym wkładem Taguchiego jest dołączenie do tablic ortogonalnych tzw. macierzy interakcji oraz grafów liniowych. Przedstawiają one bowiem kolumny wraz z ich wzajemnymi uwikłaniami, przy czym, jeśli macierz interakcji przedstawia pełne wzajemne uwikłanie kolumn danego planu eksperymentu, to celem grafu liniowego jest przede wszystkim umożliwienie przypisania odpowiednich czynników do kolumn oraz ułatwienie modyfikacji planu.

Tabela 2. Tablica ortogonalna $L_8(2^7)$ wraz z odpowiadającą jej tablicą interakcji

Lp.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	Kolumny	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	1	1	1							
2	1	1	1	-1	-1	-1	-1	2		3	2	5	4	7	6
3	1	-1	-1	1	1	-1	-1	3			1	6	7	4	5
4	1	-1	-1	-1	-1	1	1	4				7	6	5	4
5	-1	1	-1	1	-1	1	-1	5					1	2	3
6	-1	1	-1	-1	1	-1	1	6						3	2
7	-1	-1	1	1	-1	-1	1	7							1
8	-1	-1	1	-1	1	1	-1								

W grafach liniowych tablica ortogonalna reprezentowana jest przez kropki i linie. W przypadku, gdy dwie kropki są połączone linią, oznacza to, że interakcja czynników reprezentowanych przez kropki zawarta jest w kolumnie prezentowanej przez linię. Każdemu elementowi grafu przypisany jest numer odpowiadający odpowiedniej kolumnie w tablicy ortogonalnej. Dla przedstawionej wyżej tablicy (tab. 2) $L_8(2^7)$ Taguchi podał dwa alternatywne grafy, które zamieszczono na rys. 1.



Rys. 1. Dwa grafy liniowe dla tablicy ortogonalnej $L_8(2^3)$

Przykład 1. W przypadku zastosowania tablicy $L_8(2^7)$ jako planu eksperymentu do estymacji parametrów modelu

$$EY = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4 + \beta_{12} x_1 x_2 + \beta_{13} x_1 x_3 + \beta_{14} x_1 x_4$$

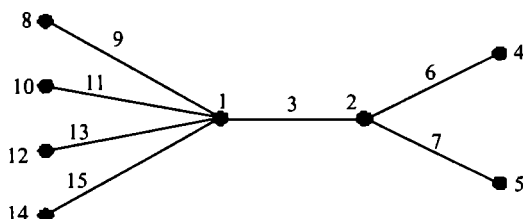
z drugiego grafu przedstawionego na rys. 1 wynika, że w tablicy $L_8(2^7)$ miejsce czynnika x_3 w trzeciej kolumnie tej macierzy zajmuje interakcja $x_1 x_2$, miejsce czynnika x_5 zajmuje interakcja $x_1 x_4$, natomiast w kolumnie 6 miejsce czynnika x_6 zajmuje interakcja $x_1 x_3$, ponieważ do kolumny 7 zostanie przypisany czynnik x_3 .

Taguchi przedstawił trzy sposoby modyfikacji grafów liniowych:

- usunięcie linii (*breaking a line*) – polegające na usunięciu linii łączącej dwa punkty i rezygnacji z estymacji interakcji odpowiadającej usuniętej linii;
- utworzenie linii (*forming a line*) – polegające na usunięciu jednej z kropek i wykorzystaniu jej do połączenia dwóch innych punktów w celu oszacowania odpowiadającej im interakcji; procedura ta musi uwzględnić konsekwencje wynikające z macierzy interakcji;
- przesunięcie linii (*moving a line*) – polegające na połączeniu dwóch poprzednich metod, tzn. w pierwszej fazie odbywa się usunięcie linii, w drugiej zaś połączenie dwóch odrębnych kropek przy wykorzystaniu jednej z kropek uzyskanych w wyniku usunięcia linii.

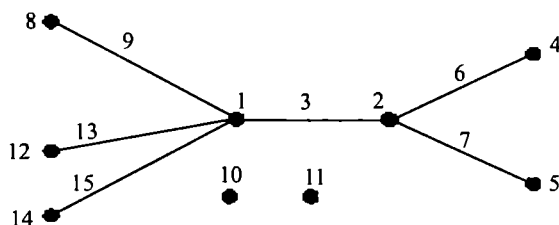
Przykład 2. Modyfikacja grafu liniowego dla tablicy ortogonalnej $L_{16}(2^{15})$.

Standardowy graf liniowy $L_{16}(2^{15})$ przedstawia się następująco:



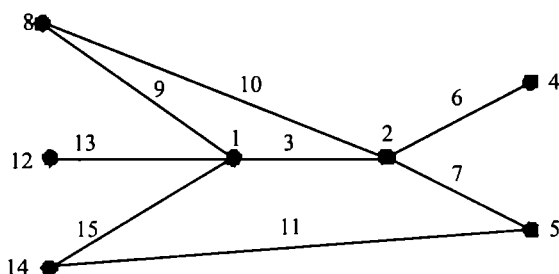
Z grafu wynika, że model eksperymentalny obejmuje osiem efektów głównych czynników przypisanych odpowiednio do kolumn 1, 2, 4, 5, 8, 10, 12, 14 oraz siedem interakcji czynników z kolumn 1 i 2; 2 i 4; 2 i 5; 1 i 8; 1 i 10; 1 i 12 oraz 1 i 14.

Usunięcie linii między kropkami 1 i 10 prowadzi do grafu:



W stosunku do poprzedniego grafu zrezygnowano tu z estymacji interakcji między czynnikami umieszczonymi w kolumnie 1 i 10. W zamian można wprowadzić do modelu dodatkowy – dziewiąty efekt główny czynnika przypisanego do kolumny 11.

Połączenie dwóch kropek 2 i 8, oraz 5 i 14 prowadzi do grafu:



Graf odpowiada modelowi eksperymentalnemu, w którym można estymować tym razem 7 efektów głównych i 8 interakcji. W stosunku do standardowego grafu liniowego rezygnuje się tu z oszacowania interakcji czynników przypisanych kolumnom 1 i 10, a także efektu głównego przypisanego do kolumny 10 w zamian za estymację interakcji pomiędzy czynnikami umieszczonymi w kolumnie 5 i 14 oraz 2 i 8.

Można zauważyć, że zmiany dokonywane w grafie liniowym nie mają wpływu na wygląd tablicy ortogonalnej (nie zmieniają wartości jej elementów). Modyfikacja grafu to jedynie formalna zmiana grafu standardowego do potencjalnego modelu badawczego w celu opisanego możliwości estymacji odpowiednich efektów głównych i wybranych interakcji.

Warto tu zauważyć, że niekiedy zmiana tablicy ortogonalnej może polegać na zmianie liczby poziomów, na jakich znajdują się poszczególne czynniki. Wśród technik modyfikujących wygląd tablicy ortogonalnej Taguchi szczególną uwagę zwraca na (por. [Phadke 1989]):

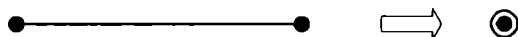
- technikę sztucznego poziomu (*dummy-level technique*),
- metodę czynnika podwójnego (dualnego) (*compound factor method, combining technique*),
- metodę łączenia kolumn (*column merging method, multi level formation*),
- metodę biernej kolumny (*idle-column technique*).

Na szczególną uwagę zasługuje metoda łączenia kolumny przedstawiona po raz pierwszy przez S. Addelmana [1962], pozwala ona bowiem zachować ortogonalność i całkowite zrównoważenie planu eksperymentu. W metodzie tej możliwe jest włączenie do tablicy ortogonalnej czynnika na dużej liczbie poziomów za pomocą kilku czynników o mniejszej liczbie poziomów. Jeżeli należy do tablicy włączyć czynnik 4-poziomowy, to można wykorzystać 3 inne kolumny tablicy ortogonalnej, a dokładniej mówiąc, 2 kolumny dotyczące czynników dwupoziomowych oraz kolumnę związaną z interakcją między wybranymi czynnikami. W celu uwzględ-

nienia czynnika 9-poziomowego należy wykorzystać 4 kolumny tablicy ortogonalnej, przy czym dwie z nich związane są z dwoma czynnikami 3-poziomowymi, oraz 2 inne kolumny identyfikujące interakcje między wybranymi czynnikami.

Liczba poziomów tworzonego czynnika jest równa liczbie możliwych kombinacji poziomów czynników pierwotnych, a dodatkowe wykorzystanie kolumn związanych z interakcjami jest niezbędne w celu uzyskania odpowiedniej liczby stopni swobody dla tworzonego czynnika.

Graficznie metodę łączenia kolumn dla czynników znajdujących się na dwóch poziomach można przedstawić za pomocą prostego schematu, w którym to dwie kropki prezentujące czynniki oraz linia je łącząca odpowiadająca za kolumnę, do której przypisana jest interakcja, zostają zamienione na jedną kropkę, która prezentować będzie poszukiwany czynnik czteropoziomowy.



Rys. 2. Schemat graficzny konstrukcji czynnika czteropoziomowego

Tabela 3. Modyfikacja tablicy ortogonalnej przy użyciu metody łączenia kolumn

Numer doświadczenia	Czynniki				Numer doświadczenia	Czynnik 4-poziomowy	
	A	B	AB				
1	1	1	1	→	1	1	(1,1)
2	1	1	1		2	1	(1,1)
3	1	-1	-1		3	2	(1,-1)
4	1	-1	-1		4	2	(1,-1)
5	-1	1	-1		5	3	(-1,1)
6	-1	1	-1		6	3	(-1,1)
7	-1	-1	1		7	4	(-1,-1)
8	-1	-1	1		8	4	(-1,-1)

3. Metoda grafów wspomagających

C.F.J. Wu i Y. Chen [1992] przedstawili alternatywną metodę konstrukcji 2-poziomowych planów eksperymentów, która stanowi połączenie technik zaproponowanych przez G. Taguchiego z dobrymi właściwościami planów dostarczanych przez metody klasyczne. W swej pracy Wu i Chen przedstawili algorytm konstrukcji i wyboru planów oparty na kryterium minimalnej aberracji, a więc na kryterium, które przy jak najwyższej rozdzielczości minimalizuje liczbę uwikłań krzyżowych (zob. np. [Fries, Hunter 1980]).

Proponowana metoda, którą nazywa się metodą grafów wspomagających (*graph-aided method*), składa się z dwóch faz. W pierwszej z tych faz konstruuje się dopasowane nieizomorficzne grafy (*nonisomorphic feasible graphs*) odpowiadające planom eksperymentów. Natomiast w fazie drugiej dokonuje się porównania tychże grafów z grafem skonstruowanym jako wymagany dla danego zadania (*requirements graphs*). Następnie po wyborze odpowiedniego grafu dokonuje się dopasowania.

Tabela 4. Wybrane plany wraz z generatorami i liczba grafów nieizomorficznych

Plan eksperymentu	Generator	Liczba grafów
8 doświadczeń		
2_{IV}^{4-1}	$I=1234$	2
2_{III}^{4-1}	$I=234$	1
2_{III}^{5-2}	$I=124=135$	1
16 doświadczeń		
2_{IV}^{6-2}	$I=1235=2346$	7
2_{III}^{6-2}	$I=125=2346$	4
2_{III}^{6-2}	$I=125=1246$	1
2_{III}^{6-2}	$I=125=346$	1
2_{IV}^{7-3}	$I=1235=2346=1347$	17
2_{III}^{7-3}	$I=1235=1246=347$	15
2_{III}^{7-3}	$I=12345=236=1237$	5
2_{III}^{9-5}	$I=1235=1246=127$	3
2_{III}^{7-3}	$I=125=1246=247$	1
2_{IV}^{8-4}	$I=1235=2346=1347=1248$	26
2_{III}^{8-4}	$I=125=2346=1347=1248$	23
2_{III}^{9-5}	$I=1235=2346=1347=1248=169$	35
2_{III}^{9-5}	$I=125=2346=1347=248=139$	14
2_{III}^{10-6}	$I=1235=2346=1347=1248=169=34t_0$	22
2_{III}^{11-7}	$I=1235=2346=1347=1248=169=34t_0=24t_1$	10
2_{III}^{12-8}	$I=1235=2346=1347=1248=169=34t_0=24t_1=14t_2$	4
2_{III}^{13-9}	$I=1235=2346=1347=1248=169=34t_0=24t_1=14t_2=23t_3$	2

Źródło: [Chen Wu 1992].

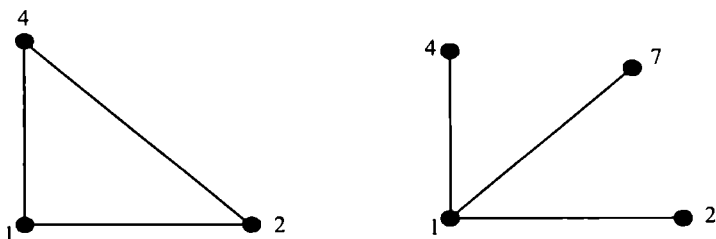
wania czynników i interakcji do odpowiednich kolumn. Konstrukcji dopasowanych grafów dokonuje się tylko raz. Dla kryterium najmniejszej aberracji wszystkie grafy dla planów typu 2^{n-k} zaprezentowane są w pracy [Wu, Chen 1991]. Należy tu zauważyć, że grafy (plany eksperymentu) dla zadanej liczby doświadczeń zostały przedstawione po kolei wraz z pogarszaniem się kryterium najmniejszej aberracji (por. tab. 5). Wybór odpowiedniego planu rozpoczyna się od uzyskania niezbędnej liczby doświadczeń, co związane jest bezpośrednio z liczbą czynników i ich poziomami. Następnie dokonuje się dopasowania odpowiedniego grafu, rozpoczy-

nając selekcję od najlepszego w sensie kryterium najmniejszej aberracji. W razie niedopasowania żadnego grafu należy bądź to zwiększyć liczbę doświadczeń w eksperymencie, bądź też rozważyć możliwość zmniejszenia wymagań w stosunku do planu.

Przykład 3. Zastosowanie metody Chena i Wu do konstrukcji planu eksperymentu dla przedstawionego w przykładzie 1 modelu

$$EY = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4 + \beta_{12} x_1 x_2 + \beta_{13} x_1 x_3 + \beta_{14} x_1 x_4$$

sprowadza się do odnalezienia takiego planu eksperymentu, w którym możliwa jest estymacja 4 czynników. Z tabeli 4 można zauważyć, że pierwszym takim planem jest plan 2_{IV}^{4-1} o kontraście definiującym $I=1234$. Dla takiego planu skonstruowano 2 nieizomorficzne grafy.



Rys. 3. Dopasowane nieizomorficzne grafy dla planu eksperymentu 2_{IV}^{4-1} o kontraście $I = 1234$

Nietrudno zauważyć (por. rys. 1 oraz rys. 3), że grafy te są identyczne z grafami zaproponowanymi przez Taguchiego, a więc plan eksperymentu będzie identyczny z tablicą ortogonalną L_8 postulowaną przez Taguchiego. Trzeba tu zauważyć, że tablica L_8 jest jednym z dwóch planów eksperymentu proponowanych przez Taguchiego, którego rozdzielczość jest większa od rozdzielczości III.

Plany proponowane przez C.F.J. Wu i Y. Chena są planami typu 2^{n-k} , a więc planami dla czynników będących na 2 poziomach, wydaje się jednak, że nic nie stoi na przeszkodzie, by i do tych planów zastosować postulowane przez Taguchiego techniki modyfikacji grafów, a konkretnie techniki zmiany ich poziomów (zwiększenia lub zmniejszenia).

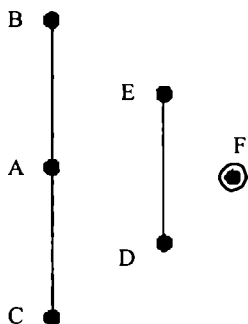
3. Porównanie podejścia Taguchiego i grafów liniowych z metodą grafów wspomagających

Alternatywne metody konstrukcji planu eksperymentu z czynnikami znajdującymi się na różnych poziomach zaproponowane przez G. Taguchiego oraz C.F.J. Wu i Y. Chena zaprezentowane zostaną na przykładzie eksperymentu, w którym roz-

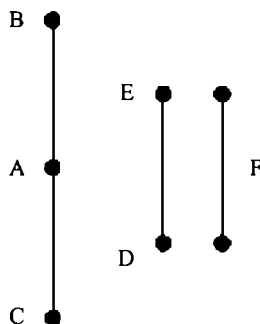
ważą się pięć 2-poziomowych czynników (A, B, C, D, E) oraz jeden 4-poziomowy czynnik (F). Przypuszcza się, że wszystkie efekty główne oraz trzy interakcje AB, AC i DE są istotne. Model przyjmuje więc postać

$$EY = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4 + \beta_5 x_5 + \beta_6 x_6 + \beta_{12} x_1 x_2 + \beta_{13} x_1 x_3 + \beta_{45} x_4 x_5,$$

natomiast graf niezbędny do oszacowania takiego modelu przedstawiono na rys. 4. Zauważmy przy tym, że czynnik czteropoziomowy można uzyskać za pomocą metody łączenia kolumn, wobec czego poszukiwany graf zaprezentowany jest na rys. 5.

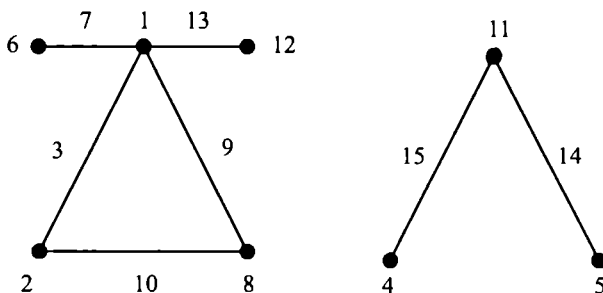


Rys. 4. Graf dla modelu 7



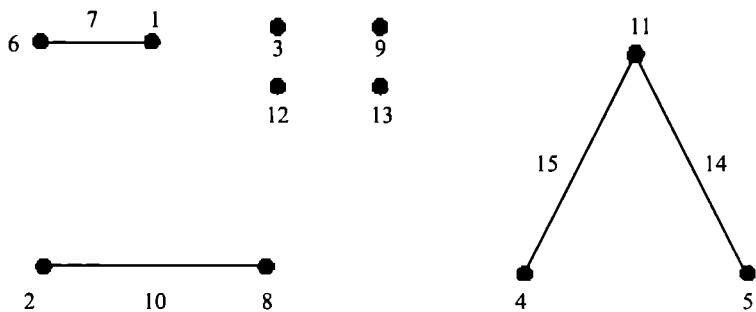
Rys. 5. Graf dla modelu 7 przed uzyskaniem czynnika 4-poziomowego

Metoda Taguchiego. W planie eksperymentu musi znajdować się co najmniej 13 doświadczeń, wybrana zostanie więc tablica $L_{16}(2^{15})$. Spośród 6 grafów przypisanych do tej tablicy wybrano graf liniowy zaprezentowany na rys. 6.



Rys. 6. Graf liniowy dla tablicy ortogonalnej $L_{16}(2^{15})$

W celu uzyskania odpowiedniego planu eksperymentu należy zmodyfikować powyższy graf. W kroku pierwszym zastosowana zostanie metoda usunięcia linii. Likwidacji ulegną linie 3, 9 i 13.



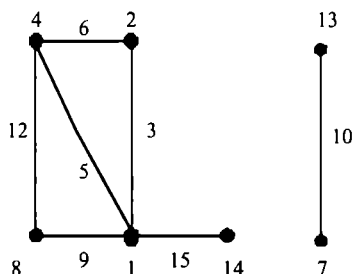
W kroku drugim odpowiednie czynniki przypisane zostaną do wybranych kolumn. Czynniki A, B, C, D oraz E przypisane zostaną odpowiednio do kolumn: 11, 4, 5, 2 i 8. Interakcja AB przypisana zostanie do kolumny 15, interakcje AC do kolumny 14 a interakcja DE do kolumn 10. Ostatnią fazą będzie stworzenie czynnika 4-poziomowego przy wykorzystaniu metody łączenia kolumn. Czynniki F zostanie przypisany do kolumny utworzonej z kolumn 1, 6 i 7. Pozostałe cztery kolumny (3, 9, 12 i 13) pozostaną wolne.

Tabela 5. Plan eksperymentu z jednym 4-poziomowym oraz pięcioma 2-poziomowymi czynnikami

Oryginalny numer kolumny	(11)	(4)	(5)	(2)	(8)	(1, 6, 7)	(10)	(14)	(15)
Numer doświadczenia	$x_1=A$	$x_2=B$	$x_3=C$	$x_4=D$	$x_5=E$	$x_6=F$	$x_4x_5=DE$	$x_1x_3=AC$	$x_1x_2=AB$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	1	1	1	2	1	2	2	2
3	1	2	2	1	1	2	1	2	2
4	2	2	2	1	2	2	2	1	1
5	2	1	1	2	1	2	2	2	2
6	1	1	1	2	2	2	1	1	1
7	2	2	2	2	1	1	2	1	1
8	1	2	2	2	2	1	1	2	2
9	2	1	2	1	1	3	1	1	2
10	1	1	2	1	2	3	2	2	1
11	2	2	1	1	1	4	1	2	1
12	1	2	1	1	2	4	2	1	2
13	1	1	2	2	1	4	2	2	1
14	2	1	2	2	2	4	1	1	2
15	1	2	1	2	1	3	2	1	2
16	2	2	1	2	2	3	1	2	1

Źródło: opracowanie własne.

Metoda grafów wspomagających. Wykorzystanie tej metody rozpoczyna się od określenia odpowiedniej liczby czynników. Zauważmy bowiem, że liczba czynników niezbędnych do poszukiwań dla modelu 7 wyniesie nie 6 czynników, a 7. Wynika to oczywiście z tego, że w metodzie Wu i Chena rozpatrywane są plany eksperymentu dla czynników znajdujących się jedynie na dwóch poziomach. Jeżeli bowiem dodatkowo wykorzystywany jest czynnik 4-poziomowy, musi to zostać uwzględnione czego wyrazem jest graf zaprezentowany na rys 5. Łatwo zauważyć, że liczba czynników na grafie wynosi 7.

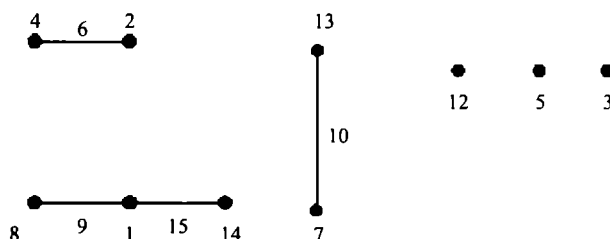


Rys. 7. Graf dla planu eksperymentu 2_{IV}^{7-3} o generatorze $I=1235=2346=1347$

Źródło: [Chen, Wu 1992].

Wobec tego z tab. 5 wybierany jest plan dla 7 czynników o jak największej rozdzielczości i jak najmniejszej aberracji. Takim planem jest plan 2_{IV}^{7-3} o generatorze $I = 1235 = 2346 = 1347$. Spośród 17 nieizomorficznych grafów przypisanych do tego planu został wybrany graf przedstawiony na rys. 7, który zostanie poddany modyfikacji.

W pierwszej fazie usunięte zostaną linie 3, 5, 12:



Źródło: opracowanie własne.

W kroku drugim czynniki A, B, C, D oraz E przypisane zostaną odpowiednio do kolumn: 1, 8, 14, 2 oraz 4. Interakcja AB przypisana zostanie do kolumny 9, interakcje AC do kolumny 15, natomiast interakcja DE do kolumny 6. W fazie ostatniej, tak jak i w metodzie Taguchiego, stworzony zostanie czynnik 4-poziomowy za pomocą metody łączenia kolumn. Czynnik F zostanie przypisany do kolumny utworzonej z kolumn 7, 13 i 10.

Cztery kolumny (3, 5, 11 i 12) pozostaną wolne.

Tabela 6. Plan eksperymentu z jednym 4-poziomowym oraz pięcioma 2-poziomowymi czynnikami

Oryginalny numer kolumny	(1)	(8)	(14)	(2)	(4)	(13,7,10)	(6)	(9)	(15)
Numer doświadczenia	$x_1=A$	$x_2=B$	$x_3=C$	$x_4=D$	$x_5=E$	$x_6=F$	$x_4x_5=DE$	$x_1x_3=AC$	$x_1x_2=AB$
1	2	2	2	2	2	4	1	1	1
2	2	1	1	2	2	2	1	2	2
3	2	2	1	2	1	1	2	1	2
4	2	1	2	2	1	3	2	2	1
5	2	2	1	1	2	3	2	1	2
6	2	1	2	1	2	1	2	2	1
7	2	2	2	1	1	2	1	1	1
8	2	1	1	1	1	4	1	2	2
9	1	2	2	2	2	1	1	2	2
10	1	1	1	2	2	3	1	1	1
11	1	2	1	2	1	4	2	2	1
12	1	1	2	2	1	2	2	1	2
13	1	2	1	1	2	2	2	2	1
14	1	1	2	1	2	4	2	1	2
15	1	2	2	1	1	3	1	2	2
16	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Źródło: opracowanie własne.

4. Podsumowanie

Obie przedstawione metody pozwalają w niektórych przypadkach na konstrukcję alternatywnych planów eksperymentów za pomocą grafów. Trzeba tu zauważyć, że o ile grafy proponowane przez C.F.J. Wu i Y. Chena zostały skonstruowane według określonego algorytmu, o tyle grafy liniowe przedstawione przez G. Taguchiego uzyskano metodami heurystycznymi. W obu przypadkach za pomocą grafów nie wskazuje się pełnego uwikłania efektów głównych oraz interakcji. W metodach Taguchiego takiej informacji dostarcza czytelna tablica interakcji, natomiast w metodzie Wu i Chena informacja taka jest dostępna jedynie po szczegółowej analizie kontrastu definiującego. Autorzy metody grafów wspomagających posługują się również pojęciem czystej interakcji (*clear*), a więc interakcji, która nie jest uwikłana z żadnym innym efektem głównym czy interakcją 2-czynnikową. Ta czysta interakcja przedstawiana jest w grafach za pomocą linii przerywanej. Taka realizacja jest nieuzasadniona w grafach proponowanych przez Taguchiego dlatego, że wszystkie one, z wyjątkiem 2 grafów, prezentują plany eksperymentu o rozdzielczości III, czyli plany, w których efekty główne mogą być uwikłane z interakcjami 2-czynnikowymi, wobec czego czyste interakcje dwuczynnikowe nie będą tam występować. Przewaga grafów liniowych wprowadzonych przez Taguchiego uwidacznia się w planach eksperymentów dla czynników znajdujących się na więcej niż 2 poziomach. Jest to wynik tego, że Taguchi skonstruował szereg planów i odpowia-

dających im grafów dla eksperymentów z czynnikami wielopoziomowymi, a także zaproponował metody ich modyfikacji. Metody modyfikacji proponowane przez Taguchiego mogą być, zdaniem autora, także zastosowane w metodzie grafów wspomagających. Wykorzystanie technik modyfikujących graf może być jednak uciążliwe ze względu na brak tablicy interakcji i potrzebę analizy kontrastu definiującego, a także, co ważniejsze, może spowodować utratę dotychczasowych właściwości planu.

Uwzględniając powyższe uwagi, wydaje się, że metoda grafów wspomagających jest bardzo dobrą alternatywą dla badaczy, dla których metody Taguchiego powstałe na gruncie praktyki wydają się niedostatecznie umocowane na klasycznej teorii planowania eksperymentów. Metoda Wu i Chena jest szczególnie interesująca w przypadku konstrukcji planów eksperymentów dla czynników znajdujących się wyłącznie na dwóch poziomach. W przypadku planów eksperymentów tworzonych dla czynników znajdujących się na różnej liczbie poziomów pozytywne własności metody grafów wspomagających ulegają znacznemu zmniejszeniu.

Literatura

- Addelman S., *Orthogonal Main-effect Plans for Asymmetrical Factorial Experiments*, „Technometrics” 1962 vol. 4, s. 21-46.
- Fries A., Hunter W.G., *Minimum Aberration 2k-p Designs*, „Technometrics” 1980 vol. 22, s. 601- 608.
- Hedayat A.S., Sloane N.J.A., Stufken J., *Orthogonal Array: Theory and Applications*, Springer-Verlag New York 1999.
- Logothesis N., Wynn H.P., *Quality through Design*, Clarendon Press, Oxford 1989.
- Mańczak K., *Technika planowania eksperymentu*, WNT, Warszawa 1976.
- Montgomery D.C., *Design and Analysis of Experiments*, J. Wiley, New York 1997.
- Phadke M.S., *Quality Engineering Using Robust Design*, Prentice Hall, Englewood Cliff 1989.
- Taguchi G., *System of Experimental Design*, UNIPUB, New York 1987.
- Wawrzyniak J., *Statystyczne planowanie eksperymentów w zagadnieniach regresji w warunkach małej próby*, Wyd. AE, Wrocław 1993.
- Wu C.F.J., Chen Y., *A Graph-aided Method for Planning 2-level Experiments when Certain Interactions are Important*, „Technometrics” 1992 vol. 34, s. 162-175.
- Zarządzanie przez jakość. Koncepcje, metody, studia przypadków, red. E. Konarzewska-Gubała, Wyd. AE, Wrocław 2003.

APPLICATION OF SOME GRAPHICAL METHODS FOR CONSTRUCTION OF EXPERIMENTAL PLANS

Summary

In construction of fractional factorial experimental plans prior knowledge or experience can suggest which effects should be estimated unconfounded with any main effect or interaction. Very useful to obtain such plans could be graphical techniques. The article presents two graphical methods of construction plans: linear graphs proposed by Taguchi and graph aided method suggested by Wu and Chen. Both methods were compared on example. The author indicated additional possibility of modification graph aided method to achieve plans with multilevel factors.