

Artur Prędko

Akademia Ekonomiczna w Krakowie

POMIAR I DEKOMPOZYCJA EFEKTYWNOŚCI ZYSKU ZA POMOCĄ METODY DEA

1. Wstęp

Zagadnienie pomiaru efektywności zysku¹ jednostki produkcyjnej jest bardzo ciekawym i trudnym problemem. W literaturze dotyczącej metody DEA (*data development analysis*) znajduje się bardzo niewiele pozycji dotyczących tego tematu (zob. [Färe, Grosskopf, Lee 1990, s. 574-581; 1994]), a i one nie zawierają odpowiedzi na wiele nurtujących autora niniejszego artykułu pytań i wątpliwości. W pracy zostaną poddane pod rozwałę pewne propozycje miar związanych z zyskiem, będące naturalnym rozszerzeniem mierników opisanych w poprzednich opracowaniach i wystąpieniach autora (zob. [Prędko 2003a; 2003b; 2004]). Jednocześnie wskazane zostaną wady i zalety tychże miar. Oprócz ich zdefiniowania zostaną wykazane pewne podstawowe właściwości mierników, a także dokonana zostanie ilustracja graficzna działania metody. Na koniec podano przykład empiryczny zastosowania tych miar, oparty na danych rzeczywistych z polskiego sektora energetycznego.

2. Podstawowe definicje

Dane są obiekty gospodarcze (w liczbie n), które, posługując się jednorođną technologią (opisaną za pomocą zbioru T), wytwarzają z m nakładów s produktów. Zakładamy znajomość wielkości nakładów i produktów wszystkich n obiektów, zatem jednostki te będziemy zapisywać w postaci par wektorów (X_j, Y_j) , gdzie $j=1, \dots, n$. Pierwszy z nich to dany wektor wielkości nakładów obiektu j -tego $X_j = [x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{mj}]$, natomiast drugi zawiera wielkości s produktów tej jednostki $Y_j = [y_{1j}, y_{2j}, \dots, y_{sj}]$. Dodatkowo zakładamy znajomość wszystkich cen (zarówno nakładów, jak i pro-

¹ Praca wykonana w ramach badań statutowych finansowanych przez Akademię Ekonomiczną w Krakowie w 2005 roku.

duktów) dla całej grupy rozważanych obiektów. Oznaczmy więc odpowiednio $W_j = [w_{1j}, w_{2j}, \dots, w_{mj}]$ oraz $P_j = [p_{1j}, p_{2j}, \dots, p_{sj}]$ - dane ceny nakładów i produktów dla jednostki j -tej.

Definicja 1. Zbiór możliwości produkcyjnych T :

$$T = \{(X, Y) : \exists \lambda_j \geq 0 : \sum_j \lambda_j = 1, X \geq \sum_j \lambda_j X_j, 0 \leq Y \leq \sum_j \lambda_j Y_j, \text{ dla } j = 1, \dots, n\}.$$

Definicje kolejnych miar efektywności zysku będą opierać się na tradycyjnej formule zysku, rozumianej jako różnica pomiędzy przychodem a kosztami jednostki.

Definicja 2. Zysk idealny obiektu $(X, Y)^2$:

$$ZI = \max \{P \circ Y^0 - W \circ X^0 : (X^0, Y^0) \in T\}.$$

W celu uzyskania wielkości miernika należy rozwiązać program linowy.

P.1

$$\text{Max}(\sum_r p_r y_r^0 - \sum_i w_i x_i^0),$$

$$X^0 \geq \sum_j \lambda_j X_j, Y^0 \leq \sum_j \lambda_j Y_j, \sum_j \lambda_j = 1,$$

$$X^0, Y^0 \geq 0, \lambda_j \geq 0, j = 1, \dots, n \text{ (zmienne decyzyjne)}.$$

W wyniku rozwiązania programu otrzymujemy nie tylko zysk idealny obiektu (wartość optymalna funkcji celu), lecz także tzw. wzorzec efektywności zysku dla badanej jednostki (X, Y) . Jest obiekt postaci $(\sum_j \lambda_j^* X_j, \sum_j \lambda_j^* Y_j)$ będący pewną kombinacją wypukłą danych n jednostek $(X_j, Y_j)^3$. Zwróćmy uwagę, iż zapis warunków ograniczających programu jest wektorowy. Oznacza to, że nierówności tam umieszczone należy odpowiednio rozumieć (po współrzędnych). Oczywiście, ponieważ dane są rzeczywiste wielkości nakładów i produktów dla badanego obiektu, możemy bez problemu obliczyć zysk rzeczywisty tej jednostki jako różnicę pomiędzy jej przychodami a kosztami rzeczywistymi. Tak więc:

$$ZR = P \circ Y - W \circ X.$$

Podajmy jeszcze trzy ważne właściwości powyższych wielkości:

Twierdzenie 1⁴ a) ZI niezmienniczy ze względu na przyjęte jednostki nakładów oraz produktów

b) $ZI \geq ZR$,

c) ZI istnieje i jest skończony.

² Maksima w definicjach zawartych w pracy są liczone po zbiorze wartości zmiennych decyzyjnych odpowiednich programów liniowych P.1 oraz P.2 (dotyczy definicji 2 i 4). Zwiększa to wg Autora czytelność zapisu, jednak wymaga komentarza.

³ Symbol λ_j^* oznacza wartość optymalną zmiennej λ_j . Zakłada się, że λ_j są wspólne dla X i Y . Dzięki temu wzorzec dla badanego obiektu jest kombinacją wypukłą danych jednostek (X_j, Y_j) .

⁴ Dowód twierdzenia w pracy [Prędko 2003b].

3. Problemy związane z konstrukcją miary efektywności zysku

Właściwości z twierdzenia 1 mają znaczenie przy definicji miary efektywności zysku. Konstrukcja poprzez analogię do definicji miar kosztu i przychodu sugeruje, by podzielić wielkość „idealną” przez wielkość rzeczywistą, czyli zysk idealny przez zysk rzeczywisty. Podobnie przecież, dzieląc minimalny koszt (maksymalny przychód) przez koszt rzeczywisty (przychód rzeczywisty), otrzymaliśmy miarę EK (efektywność przychodu – EP)⁵. W tym przypadku jednak ten sposób konstrukcji posiada zasadniczą wadę.

Problem polega na tym, iż nie zakładamy *a priori*, że wielkości ZI, ZR są nieujemne. Innymi słowy, nie wykluczamy możliwości, iż dana jednostka produkcyjna przynosi i będzie przynosić straty (nazwa zysk określa wtedy po prostu różnicę między przychodem a kosztem). Rozważmy pięć możliwych przypadków (zob. tw. 1b):

$$1^{\circ} ZI \geq ZR > 0 \Rightarrow ZI/ZR \in [1, \infty),$$

$$2^{\circ} ZR \leq ZI < 0 \Rightarrow ZI/ZR \in (0, 1],$$

$$3^{\circ} ZR < 0, ZI > 0 \Rightarrow ZI/ZR \in (-\infty, 0),$$

$$4^{\circ} ZI = 0, ZR < 0 \Rightarrow ZI/ZR = 0,$$

$$5^{\circ} ZR = 0, ZI \geq 0 \Rightarrow ZI/ZR \text{ nie da się obliczyć.}$$

Jeśli w grupie występują jedynie obiekty o zysku rzeczywistym dodatnim, do pomiaru efektywności najlepiej użyć ilorazu ZI/ZR (podgrupa 1°). Otrzymamy wtedy miarę podobną w własnościach do miernika EP (zob. [Prędko 2004]) określającego poziom efektywności przychodu. Jeśli nie chcemy poddać się konwencji panującej w literaturze metody DEA (dzielenie wielkości idealnej przez rzeczywistą, a nie na odwrót), możemy utworzyć miarę unormowaną w postaci ZR/ZI . Obie miary (a szczególnie druga) są praktycznie pozbawione wad.

W przypadku gdy w badanej grupie obiektów występują zarówno jednostki przynoszące zysk, jak i stratę, sytuacja znacząco się komplikuje. Oznacza to, iż pewnych przypadkach ilorazu ZI/ZR w ogóle nie da się obliczyć (5°), a w innych jest to możliwe, lecz może on przyjmować praktycznie dowolną wartość. Co więcej, obiekty są podzielone na cztery rozłączne grupy odpowiadające poszczególnym przypadkom. Jednostki w każdej z podgrup są porównywalne między sobą, tzn. można stwierdzić, który obiekt jest bardziej efektywny, a który mniej. Nie można jednak przeprowadzić (za pomocą takiej miary) globalnego rankingu jednostek gospodarczych w całej badanej grupie. Mamy bowiem jedynie dwa sposoby rangowania:

- założyć, że obiekt, dla którego wartość miary jest większa, jest bardziej efektywny;
- założyć, że obiekt, dla którego wartość miary jest większa, jest mniej efektywny.

Poniższy przykład ilustruje, że oba te sposoby rangowania nie są intuicyjnie poprawne w tej sytuacji.

⁵ Zob. [Prędko 2003a; 2004].

Przykład 1

Obiekt A: $ZR = -2$, $ZI = -1$, wtedy $ZI/ZR = 1/2$.

Obiekt B: $ZR = -2$, $ZI = 1$, wtedy $ZI/ZR = -1/2$.

Obiekt C: $ZR = 2$, $ZI = 3$, wtedy $ZI/ZR = 3/2$.

Obiekt D: $ZR = 2$, $ZI = 5$, wtedy $ZI/ZR = 5/2$.

Obiekt A jest bardziej efektywny niż B, ponieważ przy tym samym poziomie zysku rzeczywistego nie ma on możliwości podwyższenia tego zysku o tyle co jednostka B. A więc:

efektywność(A) > efektywność(B), przy czym $ZI/ZR(A) > ZI/ZR(B)$.

Na analogicznej zasadzie:

efektywność(C) > efektywność(D), ale $ZI/ZR(C) < ZI/ZR(D)$.

Oba sposoby rangowania są więc w pewnych przypadkach niepoprawne.

Wyjściem z sytuacji jest skonstruowanie innego miernika efektywności zysku. Zauważmy na początek, iż przy badaniu efektywności dużą rolę będzie na pewno odgrywała różnica pomiędzy zyskiem idealnym a rzeczywistym. Zgodnie z twierdzeniem 1b jest ona nieujemna i nie rozbija grupy obiektów w sposób jawny na rozłączne podgrupy. Popatrzmy jednak na poniższy przykład.

Przykład 2

Obiekt A: $ZR = 1$, $ZI = 2$, wtedy $ZI - ZR = 1$.

Obiekt B: $ZR = -2$, $ZI = -1$, wtedy $ZI - ZR = 1$.

Wspomniana różnica dla obu jednostek jest identyczna i wynosi 1. Czy jednak oznacza to, że oba obiekty są w tym samym stopniu efektywne? Przecież obiekt A ma możliwość podwojenia swojego zysku rzeczywistego, podczas gdy obiekt B może jedynie odrobić połowę swojej straty. Oznaczałoby to, iż B jest bardziej efektywny niż A, ponieważ względne zmiany, jakie mogą zajść w wielkości jego zysku, są znacznie mniejsze.

Dochodzimy więc do wniosku, iż miernik efektywności zysku mógłby porównywać z sobą dwie wielkości: różnicę $ZI - ZR$ oraz zysk rzeczywisty ZR . Jednak zysk rzeczywisty powinien być brany „na wartość bezwzględną”⁶, co ilustruje kolejny przykład.

Przykład 3

Obiekt A: $ZR = 1$, $ZI = 3$, wtedy $(ZI - ZR)/ZR = 2$,

Obiekt B: $ZR = -3$, $ZI = 3$, wtedy $(ZI - ZR)/ZR = -2$.

Oba obiekty są w tym samym stopniu efektywne w tym sensie, iż obiekt A jest w stanie odrobić dwukrotnie wielkość swojego obecnego zysku. Podobnie obiekt B ma potencjalną możliwość dwukrotnego odrobienia swojej obecnej straty. Jednak mierniki dla obu jednostek mają przeciwne wartości, ponieważ nie umieściliśmy w mianowniku wartości bezwzględnej zysku rzeczywistego.

⁶ Tzn. bez znaku minus, w jeśli obiekt wykazuje obecnie stratę (zysk ujemny).

4. Propozycja miernika efektywności zysku

Podsumowując poprzednią część rozważań, proponowana miara efektywności zysku będzie miała następującą postać:

Definicja 3. Miara efektywności zysku dla obiektu (X,Y) :

$$EB^7 = (ZI - ZR) / |ZR|.$$

Zestawimy teraz właściwości tej miary świadczące zarówno o jej wadach, jak i zaletach.

Twierdzenie 2:

- a) EB niezmiennicza ze względu na jednostki nakładów oraz produktów,
- b) $EB \geq 0$ oraz $EB = 0 \Leftrightarrow ZI = ZR$ (obiekt efektywny względem zysku),
- c) EB jest nieokreślona dla $ZR = 0$ (5^0),
- d) EB pozwala porównywać obiekty z grup 1^0-4^0 i posiada jasną interpretację ekonomiczną.

Dowód twierdzenia można znaleźć w pracy [Prędkie 2003b]. Skomentujmy jedynie najbardziej istotny podpunkt d. Miara mówi nam po prostu, jaką część wartości bezwzględnej zysku rzeczywistego stanowi nadwyżka w zysku, jaką obiekt byłby jeszcze w stanie teoretycznie wypracować. EB wprowadza jednoznaczny ranking wśród badanych jednostek. Wraz ze wzrostem tej miary maleje efektywność obiektu, ponieważ jednostka miała możliwość wypracowania większej potencjalnej nadwyżki, a nie zrobiła tego. Możliwość porównywania obiektów z grup 1^0-4^0 uzasadnia sama interpretacja miary oraz przykłady 1-3.

Podstawową wadą tego miernika jest niemożność jego zastosowania dla obiektów o zysku rzeczywistym równym zero. Jeśli jednostki takie występują w grupie, autor sugeruje zastosowanie jako miary efektywności zysku różnicy $ZI - ZR$, która posiada te same właściwości co wyżej omówiona miara, a jest określona dla $ZR=0$. Przypomnijmy jednak, że miara ta ma nieco inną interpretację ekonomiczną, która kłóci się z intuicyjnym pojęciem relacji „obektu efektywniejszego” (zob. przykład 2). Jako wadę miernika $ZI - ZR$ można także określić fakt, iż nie jest ona unormowana, co wyklucza procentowe określenie stopnia efektywności danego obiektu.

Oczywiście autor nie twierdzi bynajmniej, iż nie istnieje unormowana miara efektywności zysku, która miałaby nawet lepsze właściwości i interpretację niż ta prezentowana w tej pracy. Warto więc podkreślić raz jeszcze, iż jest to jedynie propozycja mierzenia efektywności zysku w sytuacji, gdy w badanej grupie występują jednostki przynoszące stratę⁸.

⁷ Z ang. *benefit efficiency*.

⁸ Inną propozycją mógłby być np. miernik postaci $(ZI - ZR) / |ZI|$.

5. Brak wiążących warunków ograniczających

Przy obliczaniu dowolnej długookresowej miary efektywności zysku pojawia się jeszcze jeden zasadniczy problem, który zostanie dokładnie omówiony przy interpretacji wyników w przykładzie empirycznym. Nieefektywność większości obiektów w grupie jest bardzo wysoka. Przyczyny takiego stanu rzeczy należy szukać m.in. w braku wiążących warunków ograniczających w programie P.1. W każdym warunku przy każdym stałym współczynniku występuje zmienna co oznacza, że brak jest ustalonych, niezależnych od zmiennych współczynników. W ogóle rozwiązanie tego programu istnieje tylko dzięki warunkowi wypukłości, w którym taki współczynnik występuje (jest to jedynka). Aby to zobaczyć, wystarczy spojrzeć na poniższą rozpisaną postać P1 (postać kanoniczna).

$$0\lambda_1 + \dots + 0\lambda_n + p_1y_1^0 + \dots + p_sy_s^0 - w_1x_1^0 - \dots - w_mx_m^0 \rightarrow \max,$$

$$x_{11}\lambda_1 + \dots + x_{1n}\lambda_n + 0y_1^0 + \dots + 0y_s^0 - 1x_1^0 + 0x_2^0 + \dots + 0x_m^0 \leq 0;$$

$$\dots\dots\dots$$

$$x_{m1}\lambda_1 + \dots + x_{mn}\lambda_n + 0y_1^0 + \dots + 0y_s^0 + 0x_1^0 + \dots + 0x_{m-1}^0 - 1x_m^0 \leq 0;$$

$$-y_{11}\lambda_1 + \dots - y_{1n}\lambda_n + 1y_1^0 + 0y_2^0 + \dots + 0y_s^0 + 0x_1^0 + \dots + 0x_m^0 \leq 0;$$

$$\dots\dots\dots$$

$$-y_{s1}\lambda_1 + \dots - y_{sn}\lambda_n + 0y_1^0 + \dots + 0y_{s-1}^0 + 1y_s^0 + 0x_1^0 + \dots + 0x_m^0 \leq 0;$$

$$1\lambda_1 + \dots + 1\lambda_n + 0y_1^0 + \dots + 0y_s^0 + 0x_1^0 + \dots + 0x_m^0 = 1;$$

$$\lambda_1, \dots, \lambda_n, y_1^0, \dots, y_s^0, x_1^0, \dots, x_m^0 \geq 0 \text{ (zmienne decyzyjne)}.$$

Wartość funkcji celu (ZI) ulega obniżeniu wraz z wprowadzaniem do programu kolejnych, wiążących warunków ograniczających. Tym samym otrzymane rezultaty coraz bardziej odpowiadają rzeczywistym warunkom gospodarowania, ponieważ ciąglej obniżce ulega różnica $ZI - ZR$ wyrażająca nieefektywność obiektu. Wspomniane warunki muszą oczywiście wynikać z własności badanego procesu produkcyjnego – muszą posiadać naturalną interpretację ekonomiczną. Przykładem takich warunków są te związane z występowaniem stałych nakładów w procesie produkcyjnym (zob. [Prędkie 2003b] oraz przykład empiryczny). Podsumowując, jeśli posiadamy jakiegokolwiek dodatkowe (wiązące) informacje o procesie produkcyjnym (stałe nakłady, ograniczenia na wielkości używanych nakładów lub produkowanych produktów, ograniczenia kosztowe lub przychodu), należy je koniecznie uwzględnić w programie w formie kolejnych (wiązących) warunków ograniczających. Dzięki temu automatycznie zwiększa się wiarygodność ekonomiczna otrzymanych rezultatów.

6. Miary efektywności technicznej i alokacyjnej zysku

Przejdziemy teraz do omówienia bardziej szczegółowych miar efektywności zysku utworzonych przez analogię do miar efektywności technicznej, alokacji i struktury produkcji (zob. [Färe, Grosskopf, Lovell 1994; Prędkie 2003a; Prędkie 2004]).

Definicja 4. Techniczny⁹ zysk idealny obiektu (X, Y) :

$$ZT = \max \{P^\circ(\theta_Y Y) - W^\circ(\theta_X X) : (\theta_X X, \theta_Y Y) \in T(VRS)\}$$

Definicja 5. Miara efektywności technicznej zysku:

$$EBT = (ZT - ZR) / |ZR|.$$

Konstrukcja i problemy z nią związane są analogiczne, jak dla poprzedniej miary efektywności zysku. Miernik ten jest bowiem tylko zastosowaniem miary EB do sytuacji, gdy zakładamy możliwość jedynie zmian proporcjonalnych w nakładach i produktach dla uzyskania potencjalnej nadwyżki w zysku w stosunku do obecnej jego wielkości. Jest to więc odpowiednik miar ET_N oraz ET_P w sferze zysków. Warto zwrócić uwagę, że nakłady mogą zmieniać się w innej proporcji niż produkty. Powoduje to brak możliwości rozważania jedynie maksymalizacji bądź minimalizacji współczynników proporcjonalności jak to miało miejsce dla miar ET_N i ET_P ¹⁰.

Przedstawmy teraz program liniowy równoważny definicji 5:

P.2

$$\begin{aligned} & \max [\sum_r p_r (\theta_Y y_r) - \sum_i w_i (\theta_X x_i)], \\ & \theta_X X \geq \sum_j \lambda_j X_j, \quad \theta_Y Y \leq \sum_j \lambda_j Y_j, \quad \sum_j \lambda_j = 1, \\ & \theta_X \geq 0, \quad \theta_Y \geq 0, \quad \lambda_j \geq 0, \quad j=1, \dots, n \text{ (zmienne decyzyjne)}. \end{aligned}$$

Mając do dyspozycji miary EB oraz EBT, można, w sposób analogiczny jak w pracy [Prędkie 2004], zdefiniować miarę alokacyjną. Jej celem będzie badanie możliwości dalszego zwiększania zysku na drodze zmian nieproporcjonalnych w nakładach i produktach, oczywiście już po dokonaniu niezbędnych zmian proporcjonalnych (rozważamy obiekt efektywny technicznie względem zysku).

Definicja 6. Addytywna miara efektywności alokacji dla zysku:

$$EBA = EB - EBT.$$

Podamy teraz twierdzenie zawierające podstawowe właściwości miar EBT oraz EBA.

Twierdzenie 3:

- a) EBT, EBA niezmiennicze względem jednostek nakładów i produktów,
- b) EBT, EBA nieujemne i równe zero gdy obiekt jest odpowiednio efektywny technicznie lub alokacyjnie w sferze zysku.
- c) EBT, EBA mają jasną interpretację ekonomiczną.

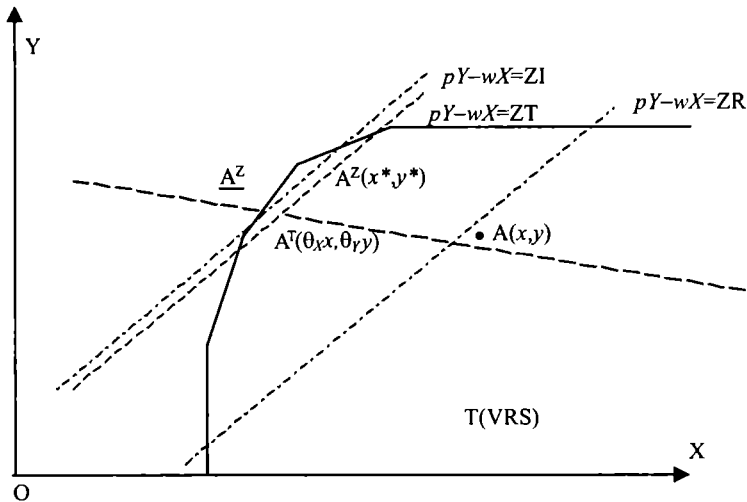
Dowód twierdzenia 3 znajduje się w pracy [Prędkie 2003a]. Skomentujemy jedynie krótko podpunkt c. Interpretacja EBT znajduje się bezpośrednio pod definicją 4. Miara EBA zaś porównuje zyski ze zmian nieproporcjonalnych z wartością bezwzględną zysku rzeczywistego.

⁹ Określenie „techniczny” oznacza możliwość jedynie proporcjonalnych zmian w ilości nakładów i produktów.

¹⁰ Miary ET_N oraz ET_P zob. [Prędkie 2003a; 2004].

7. Ilustracja graficzna

W punkcie tym przedstawiona zostanie interpretacja geometryczna pojęć i miar, które zostały w nim zdefiniowane i omówione. Z konieczności uczynimy to w dwuwymiarowym, kartezjańskim układzie współrzędnych, a więc założymy, iż badane obiekty używają jednego nakładu w celu otrzymania jednego produktu (rys. 1). Mamy dany nieefektywny obiekt $A(x,y)$ leżący we wnętrzu zbioru możliwości produkcyjnych $T(VRS)$. Niech A^T oznacza jego wzorzec efektywny technicznie względem zysku, natomiast A^Z wzorzec efektywny technicznie i alokacyjnie względem zysku. Punkt $\underline{A^Z}$ to rzut punktu A^Z na prostą AA^T wzdłuż prostej stałego zysku.



Rys. 1. Ilustracja miar efektywności zysku

Źródło: opracowanie własne.

Dodatkowo oznaczmy przez $[w, p]$ wektor cen obiektu A . Przy takich założeniach poszczególne miary można zdefiniować następująco:

$$EB = [w, p] \circ \overrightarrow{AA^Z} / [w, p] \circ \overrightarrow{OA}; \quad EBT = [w, p] \circ \overrightarrow{AA^T} / [w, p] \circ \overrightarrow{OA};$$

$$EBA = [w, p] \circ \overrightarrow{A^T A^Z} / [w, p] \circ \overrightarrow{OA}.$$

Należy jednak pamiętać, iż dla sytuacji jednego nakładu i jednego produktu $A^Z = A^T$. Tak więc na powyższym rysunku nastąpiło świadome przekłamanie (punkty te są różne). Celem wprowadzenia tej nieprawidłowości jest próba zilustrowania przypadku więcej niż dwuwymiarowego. Dla przykładu: w trzech wymiarach mielibyśmy do czynienia z płaszczyznami zamiast linii, a otoczką składałaby się ze ścian oraz krawędzi. W takiej sytuacji najczęściej $A^Z \neq A^T$, a równość występuje jedynie dla niektórych z wzorców, czyli obiektów tworzących ściany. Powyższy rysunek dwuwymiarowy należy więc traktować raczej jako próbę ilustracji przypadku ogólniejszego.

8. Przykład empiryczny

Dane dotyczą 32 polskich elektrowni i elektrociepłowni. Nakładami jednostek są:

- kapitał rzeczowy (wartość brutto środków trwałych liczona w tys. zł) (czynnik stały);
- praca (liczba pracowników);
- energia wsadu (liczona w TJ).

Tabela 1. Dane rzeczywiste i umowne dotyczące 32 obiektów z polskiego sektora energetycznego

Lp.	Energia wsadu	Cena 1 TJ wsadu	Liczba pracowników	Średnia cena pracy	Kapitał	Produkcja	Cena jednostkowa produktu
1	274 452	3,12	5 895	35,81	4 453 039,7	100749	10,60
2	158 639	4,06	4 364	31,88	769 796,6	54677	14,47
3	63 939	6,99	5 463	27,09	1 408 093,0	51499,5	19,23
4	86 343	4,51	1 553	38,21	950 768,6	34356,7	8,19
5	98 488	5,56	3 270	39,78	2 357 441,6	33991,7	17,44
6	79 329	5,02	3 242	34,82	1 152 842,6	33731,4	17,42
7	85 119	4,85	2 884	33,02	1 126 615,9	32164,4	16,25
8	33 305	6,94	3 307	28,91	954 553,0	29404,3	20,38
9	40 355	7,20	2 464	35,45	1 648 631,6	28615,7	15,61
10	78 037	4,92	2 556	35,99	1 270 206,3	28536,7	16,23
11	22 711	6,33	2 273	27,77	547 787,3	20160,4	20,43
12	51 163	4,62	1 640	26,28	6 666 579,9	19731,6	15,06
13	48 527	5,10	1 519	34,78	828 724,3	17874,2	15,40
14	22 219	5,74	1 249	33,12	589 864,9	16620,7	13,62
15	24 115	4,96	790	35,59	441 469,2	16428,7	8,72
16	32 506	4,91	1 399	31,79	378 370,8	15318,7	16,55
17	37 182	4,52	1 193	35,47	377 291,0	14641,1	14,77
18	14 444	6,25	1 254	27,82	225 282,5	12752,9	17,82
19	11 964	5,78	1 125	31,37	332 627,9	10185,1	20,02
20	23 748	5,09	836	33,54	206 713,5	10119,2	14,97
21	16 443	5,04	1 138	21,81	420 620,1	9406,5	21,93
22	24 671	5,03	828	33,32	385 322,7	8964	16,74
23	9 274	5,43	465	29,23	322 211,3	7922,1	10,64
24	9 216	7,21	503	24,71	320 969,2	6530	13,96
25	12 201	4,87	528	30,38	138 156,0	4900,7	19,53
26	7 729	4,79	537	27,40	191 445,3	4533,9	21,47
27	7 208	5,17	567	24,72	163 589,9	4472,5	22,98
28	7 257	5,22	526	26,99	111 331,3	4424,7	21,55
29	4 802	8,07	420	32,65	94 102,4	3926,6	19,39
30	9 316	4,92	320	32,36	77 688,8	3320,9	17,46
31	5 313	6,56	637	25,73	59 697,6	3153,1	36,61
32	2 393	7,21	336	27,92	65 256,9	1939	31,41

Źródło: [Wróbel-Rotter, Osiewalski 2002, s. 47-68] oraz opracowanie własne.

Jedynym produktem działalności jednostek jest wytworzona energia (liczona w TJ). Kapitał traktowany jest jako stały czynnik produkcji. Tabela 1 zawiera nie tylko wielkości używanych przez obiekty nakładów i produktów, lecz także ich ceny, które są niezbędne dla obliczenia wartości miar EB, EBT oraz EBA dla każdej z jednostek. Ciąg cen produktu przyjęto arbitralnie¹¹ z powodu braku odpowiednich

Tabela 2. Zyski, poziomy miar efektywności zysku i nr wzorców dla obiektów z badanej grupy

Lp.	ZR	ZI	ZT	EB	Wzorzec dla EB	EBT	Wzorzec dla EBT	EBA
1	1 465,20	58 392,44	1 465,20	38,853	{3,12}	0,000	{1}	38,853
2	8 070,76	189 681,66	124 066,70	22,502	{3,18}	14,372	{3,4,15}	8,130
3	395 166,82	395 166,82	395 166,82	0,000	{3}	0,000	{3}	0,000
4	-167 515,78	-8 307,74	-93 602,72	0,950	{12,23}	0,441	{12,23}	0,509
5	-85 341,60	265 161,23	149 150,21	4,107	{3,12}	2,748	{1,3,4}	1,359
6	76 669,48	32 5621,18	224 698,95	3,247	{3,18}	1,931	{1,3,4}	1,316
7	14 269,16	28 6532,02	165 318,56	19,081	{3,18}	10,586	{1,3,4}	8,495
8	272 561,68	32 3515,05	305 731,61	0,187	{3,18}	0,122	{3,18}	0,065
9	68 579,46	13 7261,94	68 579,46	1,002	{3,12}	0,000	{9}	1,002
10	-12 832,46	297 423,02	149 795,44	24,177	{3,18}	12,673	{1,3,4}	11,504
11	204 978,52	232 802,35	221 842,80	0,136	{3,18}	0,082	{3,18}	0,053
12	17 635,40	17 635,40	17 635,40	0,000	{12}	0,000	{12}	0,000
13	-25 100,44	180 073,70	99 339,28	8,174	{3,18}	4,958	{1,3,15}	3,216
14	57 563,96	81 504,62	75 159,99	0,416	{3,18}	0,306	{3,15,18}	0,110
15	-4 455,10	3 776,06	-4 455,10	1,848	{12,23}	0,000	{15}	1,848
16	49 517,46	134 559,50	119 708,35	1,717	{3,18}	1,417	{15,18,29}	0,300
17	5 683,52	104 076,55	83 684,85	17,312	{3,18}	13,724	{15,30}	3,588
18	102 039,96	102 039,96	102 039,96	0,000	{18}	0,000	{18}	0,000
19	99 445,90	164 914,44	160 379,16	0,658	{3,18}	0,613	{3,18}	0,046
20	2 535,24	67 538,32	31 224,23	25,640	{18,29}	11,316	{15,29,30}	14,324
21	98 588,92	263 469,01	257 676,82	1,672	{3,18}	1,614	{2,3,18}	0,059
22	-1 545,28	134 224,29	108 939,11	87,861	{3,18}	71,498	{15,29,30}	16,363
23	20 309,40	22 505,36	20 309,40	0,108	{8,18}	0,000	{23}	0,108
24	12 244,22	49 302,64	38 657,76	3,027	{3,18}	2,157	{15,18,29}	0,869
25	20 286,92	75 250,58	46 846,02	2,709	{18,31}	1,309	{15,18,30}	1,400
26	45 583,98	140 481,26	129 563,02	2,082	{18,31}	1,842	{2,18,30}	0,240
27	51 514,48	128 487,49	121 931,62	1,494	{18,31}	1,367	{18,30,31}	0,127
28	43 230,44	67 422,49	59 379,03	0,560	{18,31}	0,374	{18,29,30}	0,186
29	23 631,80	23 631,80	23 631,80	0,000	{29}	0,000	{29}	0,000
30	1 791,60	20 355,17	1 791,60	10,361	{29,31}	0,000	{30}	10,361
31	64 185,48	64 185,48	64 185,48	0,000	{31}	0,000	{31}	0,000
32	34 255,54	50 253,50	46 586,99	0,467	{18,31}	0,360	{18,31}	0,107

Źródło: opracowanie własne.

¹¹ Przy konstrukcji tego ciągu cen wykorzystano częściowo dane z pracy [Wróbel-Rotter, Osiewalski 2002, s. 47-68].

danych. Oznacza to, że wnioski ekonomiczne wysnute na częściowo sztucznych danych należy traktować jedynie jako ilustrację odpowiednich mierników i metod obliczeniowych (programów liniowych).

Za pomocą powyższej tabeli oraz programów liniowych P.1 i P.2 obliczono zysk rzeczywisty, idealny i techniczny zysk idealny dla każdego z obiektów. Następnie za pomocą odpowiednich definicji uzyskano wartości miar EB , EBT oraz EBA . Wszystkie wspomniane rezultaty zestawione są w tab. 2. Dodatkowo podano także numery obiektów tworzące wzorzec wypukły dla każdej z jednostek.

W badanej grupie 32 obiektów znajduje się 10 jednostek efektywnych technicznie względem zysku o numerach $\{1,3,9,12,15,18,23,29,30,31\}$ ($EBT=0$), z czego zaledwie 5 obiektów jest również efektywnych alokacyjnie względem zysku $\{3,12,18,29,31\}$ ($EBA=0$). Miary efektywności pozostałych jednostek zawierają się w przedziałach $EB \in [0,108; 87,861]$, $EBT \in [0,082; 71,498]$. Oznacza to, iż niektóre z nich są wysoce nieefektywne. Spowodowane to jest kilkoma przyczynami. Po pierwsze dane użyte do obliczeń zostały uśrednione, a ceny produktu zostały przyjęte arbitralnie. Nie można więc przewidzieć, jakie wyniki otrzymalibyśmy stosując pełniejsze i dokładniejsze dane rzeczywiste. Po drugie nie wiadomo, czy spełnione jest założenie o jednorodności technologicznej grupy, mimo iż obiekty wchodzące w jej skład należą do tej samej branży (sektor energetyczny). Wskazuje na to m.in. występowanie w grupie jednostek nietypowych, których poziom nieefektywności jest wysoki w stosunku do innych obiektów. Weźmy dla przykładu pod uwagę obiekty o numerach 1 i 22. Ich miary efektywności zysku wynoszą odpowiednio $EB_1=38,853$ oraz $EB_{22}=87,861$. Po usunięciu ich z grupy obie miary zawierają się w znacznie węższych przedziałach ($EB \in [0,108; 25,640]$; $EBT \in [0,082; 14,372]$). W dalszym ciągu jednak występują jednostki o zbyt wysokiej nieefektywności. I wreszcie trzecią i najważniejszą przyczyną otrzymania takich, a nie innych rezultatów jest słabość dotycząca samej metody DEA. Programy liniowe definiujące miary efektywności związane z zyskiem zawierają dużą liczbę niewiadomych w stosunku do liczby wiążących warunków ograniczających (zob. część 5 artykułu). Przy maksymalizacji funkcji celu oznacza to, iż jej wartość optymalna (zysk idealny bądź techniczny zysk idealny) może być dużo wyższa od wartości zysku rzeczywistego. To z kolei powoduje, iż poziomy miar EB , EBT są zbyt wysokie (zależność pomiędzy ZI , ZT a EB , EBT jest wprost proporcjonalna). Liczby zmiennych w programie nie można ograniczyć (wynika to z postaci formuły zysku). Można natomiast wprowadzić dodatkowe wiążące warunki ograniczające, które zmniejszą wartość wspomnianego maksimum. Problem polega jednak na tym, iż warunki te opisują technologię i muszą być wyrazem rzeczywiście obowiązujących ograniczeń ekonomicznych. Nie możemy więc tworzyć warunków sztucznych, czyli nie mających interpretacji ekonomicznej, bądź też nieprawdziwych. Kluczową rolę odgrywa tu wiedza badacza na temat procesu technologicznego, który podlega analizie. Im więcej posiadamy informacji na ten temat, im dane użyte do obliczeń są bardziej rzetelne, tym większe prawdopodobieństwo, iż otrzymane rezultaty odzwierciedlają rzeczywisty stan rzeczy.

Literatura

- Färe R., Grosskopf S., Lee H., *A Nonparametric Approach to Expenditure-constrained Profit Maximization*, „American Journal of Agricultural Economics” 1990, s. 574-581.
- Färe R., Grosskopf S., Lovell C.A.K., *Production Frontiers*, Cambridge University Press, Cambridge 1994.
- Prędkie A., *Metoda DEA – podstawy teoretyczne i ilustracja empiryczna*, materiały z XXII Konferencji im. prof. Władysława Bukietyńskiego w Łodzi (w druku) 2003a.
- Prędkie A., *Metoda DEA w ekonomicznej analizie procesu produkcyjnego*, praca doktorska pod kier. J. Osiewalskiego, Akademia Ekonomiczna w Krakowie 2003b.
- Prędkie A., *Badanie efektywności jednostek gospodarczych w sferze przychodów za pomocą metody DEA*, [w:] *Metody i zastosowania badań operacyjnych '04*, Wyd. AE, Katowice 2004.
- Wróbel-Rotter R., Osiewalski J., *Bayesowski model efektów losowych w analizie efektywności kosztowej (na przykładzie elektrowni i elektrociepłowni polskich)*, „Przegląd Statystyczny” 2002 vol. 50 nr 2, s. 47-68.

MEASURING AND DECOMPOSITION OF THE BENEFIT EFFICIENCY WITH THE HELP OF THE DEA METHOD

Summary

In the article some propositions of measuring benefit efficiency with the help of the DEA method are considered. Advantages and disadvantages of these measures are pointed, too. Besides, basic properties of these measures are indicated and graphical illustration is made. In the end, the empirical exemplary application of the ones is presented.