

**Jan Zawadzki**

Akademia Rolnicza w Szczecinie

## **JESZCZE O TWIERDZENIU LOVELLA**

### **1. Wstęp**

W pracy [1] przedstawiono fundamentalne twierdzenie dotyczące identyczności ocen parametrów otrzymanych przy zmiennych objaśniających. W modelu przyczynowo-opisowym, w którym uwzględniono trend liniowy, oraz w modelu, w którym ze zmiennej objaśnianej i objaśniających wyeliminowano trendy liniowe. Oznacza to, że parametry trendu zmiennej objaśnianej są średnimi ważonymi trendów zmiennych objaśniających oraz parametrów trendu endogennego:  $f(t) = \beta_1 t + \beta_0$ .

Twierdzenie to na trendy wielomianowe rozszerzył Tintner [4]. Lovell [3] z kolei dokonał uogólnienia na modele przyczynowo-opisowe dla danych sezonowych.

W pracy [2] dokonano wyprowadzenia wzorów wyrażających zależności między parametrami trendów liniowych i kwadratowych oraz parametrami opisującymi periodyczną lub zmienną sezonowość (zmieniającą się liniowo) w modelach ze stałymi lub zmieniającymi się sezonowo parametrami przy zmiennych objaśniających. W rozważaniach tych sezonowość była opisywana za pomocą zmiennych zero-jedynkowych. Otrzymane wyniki zilustrowano przykładami empirycznymi.

### **2. Zależności między składowymi harmonicznymi**

W pracy tej zostaną przeprowadzone rozważania dotyczące zależności między parametrami w sezonowych modelach przyczynowo-opisowych, w których składowe sezonowe zarówno w zmiennych objaśniających, jak i w zmiennej endogenicznej oraz endogennej funkcji  $f'(t)$  opisane będą za pomocą wielomianu trygonometrycznego. Rozważania dotyczyć będą szczególnego przypadku, gdy

zmienne charakteryzują się zmienną zmieniającą się liniowo, sezonowością, a parametry przy zmiennych objaśniających są stałe.

Ogólny zapis modelu przyczynowo-opisowego z parametrami zmieniającymi się sezonowo opisywanymi za pomocą wielomianu trygonometrycznego jest następujący:

$$Y_t = \sum_{j=1}^p \alpha_j X_{jt} + \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^{m/2} (m_{ij} \sin \omega_i t + n_{jr} \cos \omega_i t) X_{jt} + U_t. \quad (1)$$

Jak wykazano w pracy [2], w modelu przyczynowo-opisowym dla danych w postaci szeregów czasowych powinna występować zmienna czasowa  $t$  lub jej funkcja  $f(t)$ . W przypadku danych sezonowych powinna to być funkcja  $f'(t)$  zawierająca obok trendu także składowe opisujące sezonowość. Wprowadzenie funkcji  $f'(t)$  jest równoznaczne z eliminacją trendów i sezonowości ze wszystkich zmiennych występujących w modelu.

Zostanie rozpatrzony przypadek modelu przyczynowo-opisowego ze stałymi parametrami przy zmiennych objaśniających, przy czym zmienne zarówno objaśniane, jak i objaśniające charakteryzować się będą liniowymi trendami oraz zmiennymi wahaniami sezonowymi.

Konsekwencją powyższego założenia jest:

$$Y_t = \delta_1 t + \delta_0 + \sum_{r=0}^1 \sum_{i=1}^{m/2} (c_{ir} \sin \omega_i t + e_{ir} \cos \omega_i t) t^r + Y_t^*, \quad (2)$$

$$X_{jt} = \delta_{1j} t + \delta_{0j} + \sum_{r=0}^1 \sum_{i=1}^{m/2} (c_{ijr} \sin \omega_i t + e_{ijr} \cos \omega_i t) t^r + X_{jt}^*, \quad j = 1, 2, \dots, p. \quad (3)$$

Przy powyższych założeniach zapis modelu przyczynowo-opisowego będzie następujący:

$$Y_t = \sum_{j=1}^p \alpha_j X_{jt} + f'(t) + U_t, \quad (4)$$

gdzie:

$$f'(t) = \sum_{r=0}^1 \sum_{i=1}^{m/2} (m_{ir} \sin \omega_i t + n_{ir} \cos \omega_i t) t^r. \quad (5)$$

Po podstawieniu do (4) prawych stron równań (2) i (3) oraz przy uwzględnieniu (5) otrzymamy:

$$\begin{aligned}
& \delta_1 t + \delta_0 + \sum_{r=0}^1 \sum_{i=1}^{m/2} (c_{ir} \sin \omega_i t + e_{ir} \cos \omega_i t) t^r + Y_t^* = \\
& = \sum_{j=1}^p \alpha_j \left[ \delta_{1j} t + \delta_{0j} + \sum_{r=0}^1 \sum_{i=1}^{m/2} (c_{ijr} \sin \omega_i t + e_{ijr} \cos \omega_i t) t^r + X_{jt}^* \right] + \\
& + \left[ \sum_{r=0}^1 \sum_{i=1}^{m/2} (m_{ir} \sin \omega_i t + n_{ir} \cos \omega_i t) t^r \right] + U_t.
\end{aligned} \tag{6}$$

Z twierdzenia Lovella wynika, że oceny parametrów  $\alpha_j$  w modelu (4) oraz w modelu ze zmiennymi, z których wyeliminowano trendy liniowe i zmienne składniki sezonowe:

$$Y_t^* = \sum_{j=1}^p \alpha_j X_{jt}^* + U_t, \tag{7}$$

będą takie same.

Oznacza to, że pomiędzy parametrami trendów oraz parametrami występującymi przy składowych sinuso- i kosinusoidalnych zmiennych objaśniających oraz funkcji  $f'(t)$  a odpowiednimi parametrami zmiennej  $Y_t$  zachodzą następujące związki:

$$\delta_1 = \sum_j \alpha_j \delta_{1j} + \beta_1, \tag{8}$$

$$\delta_0 = \sum_j \alpha_j \delta_{0j} + \beta_0, \tag{9}$$

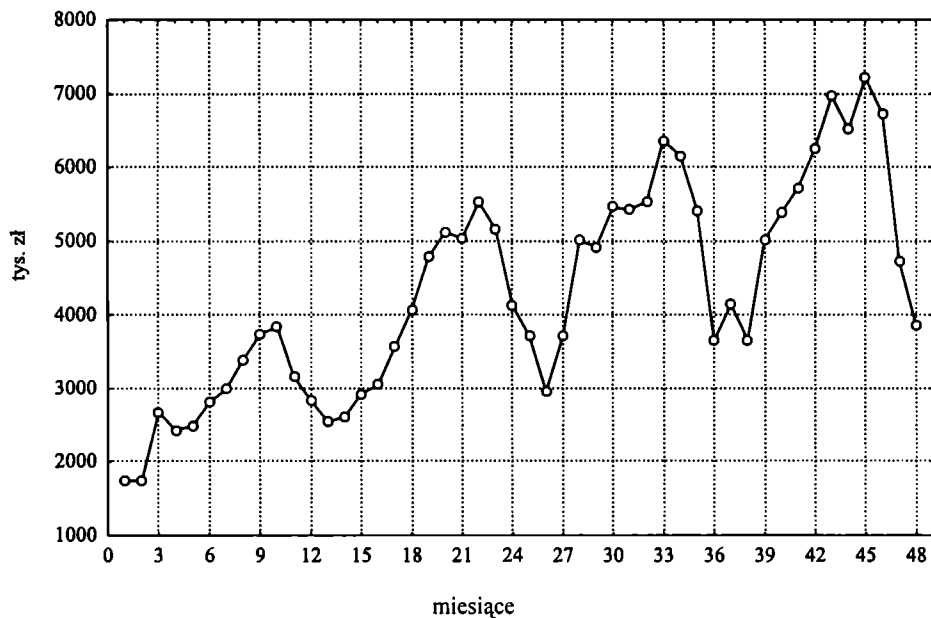
$$c_{ir} = \sum_j \alpha_j c_{ijr} + m_{ir}, \quad \left( r = 0, 1 \quad i = 1, 2, \dots, \frac{m}{2} \right). \tag{10}$$

$$e_{ir} = \sum_j \alpha_j e_{ijr} + n_{ir}. \tag{11}$$

### 3. Przykład empiryczny

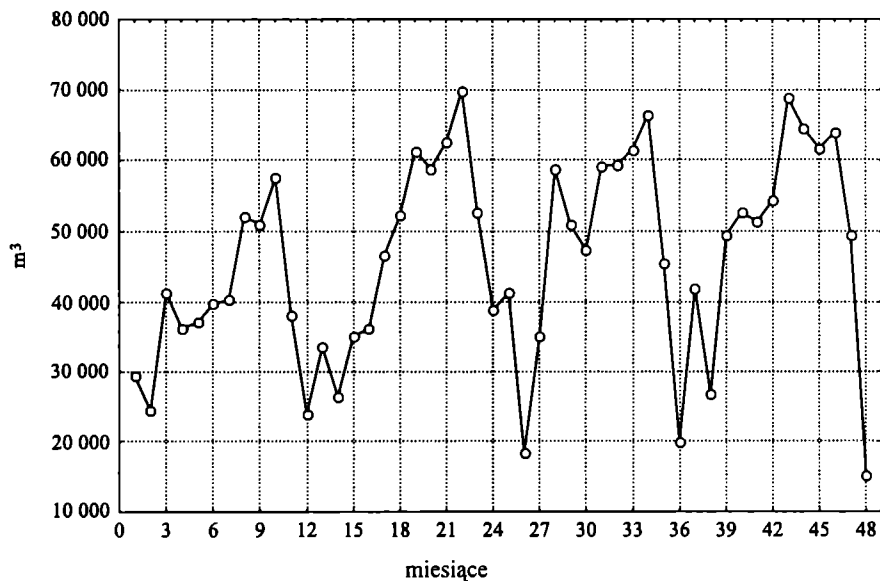
Przeprowadzone wyżej rozważania teoretyczne zostaną zilustrowane badaniem w ujęciu miesięcznym zależności kosztów produkcji betonu komórkowego ( $Y_t$  w tys. zł) od wielkości produkcji tego betonu ( $X_{1t}$ ). Z rysunków 1 i 2 zamieszczonych poniżej wynika, że zmienne wykazują zmienne wahania sezonowe.

Oszacowania parametrów trendów liniowych ze zmiennymi wahaniami sezonowymi zmiennych  $Y_t$  oraz  $X_{1t}$  wraz z ocenami statystyk  $t$ -Studenta zostały podane w tab. 1.



Rys. 1. Kształtowanie się kosztów produkcji

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 2. Kształtowanie się produkcji betonu komórkowego

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 1. Oceny parametrów trendu i zmiennych wahań sezonowych kosztów produkcji i wielkości produkcji

|                | Koszty (Y)       |              | Produkcja (X <sub>1</sub> ) |              |
|----------------|------------------|--------------|-----------------------------|--------------|
|                | Ocena par        | Statystyka t | Ocena par                   | Statystyka t |
| Wyraz wolny    | 2512,8533        | 19,36        | 39954,6833                  | 21,80        |
| T              | 74,1890          | 16,09        | 261,286806                  | 4,01         |
| <b>S1</b>      | <b>-687,0098</b> | <b>-3,81</b> | <b>-11676,905</b>           | <b>-4,58</b> |
| S2             | -284,1802        | -1,57        | -3883,5737                  | -1,52        |
| S3             | -224,8275        | -1,24        | 511,461111                  | 0,20         |
| S4             | -102,1406        | -0,57        | 1556,59358                  | 0,61         |
| S5             | 97,4835          | 0,54         | 4025,62909                  | 1,58         |
| C1             | 213,7759         | 1,15         | -1886,0477                  | -0,72        |
| C2             | -25,5260         | -0,14        | -3774,4549                  | -1,43        |
| C3             | 93,5800          | 0,50         | -1060,6389                  | -0,40        |
| C4             | 90,6210          | 0,49         | 1173,28542                  | 0,45         |
| C5             | 27,0691          | 0,15         | 505,061586                  | 0,19         |
| C6             | 50,9767          | 0,39         | 810,111111                  | 0,44         |
| TS1            | -6,6536          | -1,02        | 0,01868012                  | 0,00         |
| TS2            | 0,8592           | 0,13         | 4,56588051                  | 0,05         |
| TS3            | 8,1833           | 1,25         | -15,105556                  | -0,16        |
| TS4            | 10,9715          | 1,68         | 127,659421                  | 1,39         |
| TS5            | -1,5960          | -0,24        | -41,711736                  | -0,45        |
| <b>TC1</b>     | <b>-28,6507</b>  | <b>-4,39</b> | <b>-252,58576</b>           | <b>-2,74</b> |
| TC2            | -6,5767          | -1,01        | -29,981944                  | -0,33        |
| TC3            | -5,5024          | -0,84        | 14,3013889                  | 0,16         |
| TC4            | -3,4685          | -0,53        | -158,54722                  | -1,72        |
| TC5            | -3,9307          | -0,60        | -112,62396                  | -1,22        |
| TC6            | -4,2274          | -0,92        | -97,540972                  | -1,50        |
| R <sup>2</sup> | 0,9543           |              | 0,9086                      |              |
| SE             | 428,59           |              | 6053,5                      |              |

Źródło: opracowanie własne.

„Tłustym” drukiem zaznaczono parametry istotne statystycznie. W ostatnich dwóch wierszach podane zostały oceny parametrów struktury stochastycznej. Przez S<sub>i</sub>, C<sub>i</sub>, TS<sub>i</sub>, TC<sub>i</sub> oznaczono odpowiednio składowe:  $\sin \omega_i t$ ,  $\cos \omega_i t$ ,  $t \sin \omega_i t$ ,  $t \cos \omega_i t$ .

Rozpiszemy obecnie wzory (8)-(11) dla jednej zmiennej objaśniającej oraz stałych i zmiennych składowych sinuso- i kosinusoidalnych.

$$\delta_1 = \alpha_1 \delta_{11} + \beta_1, \quad (12)$$

$$\delta_0 = \alpha_0 \delta_{01} + \beta_0, \quad (13)$$

$$c_{i0} = \alpha_1 c_{i10} + m_{i0}, \quad (14)$$

$$e_{i0} = \alpha_1 e_{i10} + n_{i0} \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, \dots, \frac{m}{2}, \quad (15)$$

$$c_{il} = \alpha_1 c_{il1} + m_{il}, \quad (16)$$

$$e_{il} = \alpha_1 e_{il1} + n_{il}. \quad (17)$$

Oszacowanie parametrów modelu

$$Y_t = \alpha_1 X_{1t} + \left[ \sum_{r=0}^1 \sum_{i=1}^{m/2} (m_{ir} \sin \omega_i t + n_{ir} \cos \omega_i t) t^r \right] + U_t \quad (18)$$

przedstawione zostało w kolumnie drugiej tab. 2. W następnej kolumnie zestawione zostały oceny statystyk *t*-Studenta. „Tłustym” drukiem, tak jak poprzednio, zaznaczono parametry istotne statystycznie.

Tabela 2. Oszacowania parametrów modelu przyczynowo-opisowego i trendu z sezonowością dla zmiennej  $Y_t$ .

|                | Ocena parametrów | Statystyka <i>t</i> | Sprawdzenie |
|----------------|------------------|---------------------|-------------|
| wolny          | 399,123          | 0,99                | 2512,853    |
| T              | 60,366           | 14,92               | 74,189      |
| S1             | -69,264          | -0,41               | -687,010    |
| S2             | -78,727          | -0,61               | -284,180    |
| <b>S3</b>      | <b>-251,885</b>  | <b>-2,05</b>        | -224,827    |
| S4             | -184,489         | -1,49               | -102,141    |
| S5             | -115,485         | -0,90               | 97,484      |
| <b>C1</b>      | <b>313,554</b>   | <b>2,45</b>         | 213,776     |
| C2             | 174,155          | 1,32                | -25,526     |
| C3             | 149,691          | 1,18                | 93,580      |
| C4             | 28,551           | 0,22                | 90,621      |
| C5             | 0,350            | 0,00                | 27,069      |
| C6             | 8,119            | 0,09                | 50,977      |
| TS1            | -6,6546          | -1,50               | -6,6536     |
| TS2            | 0,6176           | 0,14                | 0,8592      |
| <b>TS3</b>     | <b>8,9825</b>    | <b>2,03</b>         | 8,1833      |
| TS4            | 4,2179           | 0,92                | 10,9715     |
| TS5            | 0,6107           | 0,14                | -1,5960     |
| <b>TC1</b>     | <b>-15,2881</b>  | <b>-3,01</b>        | -28,6507    |
| TC2            | -4,9906          | -1,12               | -6,5767     |
| TC3            | -6,2590          | -1,41               | -5,5024     |
| TC4            | 4,9191           | 1,05                | -3,4685     |
| TC5            | 2,0275           | 0,44                | -3,9307     |
| TC6            | 0,9328           | 0,28                | -4,2274     |
| <b>X1</b>      | <b>0,0529</b>    | <b>5,39</b>         |             |
| R <sup>2</sup> | 0,9788           |                     |             |
| SE             | 290,96           |                     |             |

Źródło: opracowanie własne.

Sprawdzenie zależności między parametrami trendów i składowych harmonicznych zmiennej objaśniającej i objaśnianej oraz funkcji  $f'(t)$  zostanie pokazane na przykładzie pierwszej harmoniki ( $i = 1$ ):

$$\hat{\delta}_1 = \hat{\alpha}_1 \hat{\delta}_{11} + \hat{\beta}_1 = 0,0529 \cdot 39954,83 + 399,123 = 2113,73 + 399,123 = 2512,853$$

$$\hat{\delta}_0 = \hat{\alpha}_1 \hat{\delta}_{01} + \hat{\beta}_0 = 0,0529 \cdot 261,287 + 60,366 = 13,8229 + 60,366 = 74,189$$

$$\hat{c}_{10} = \hat{\alpha}_1 \hat{c}_{110} + \hat{m}_{10} = 0,0529 \cdot (-16\,676,905) - 69,264 = -882,208 - 69,264 = -951,47$$

$$\hat{e}_{10} = \hat{\alpha}_1 \hat{e}_{110} + \hat{n}_{10} = 0,0529 \cdot (1886,048) + 313,554 = 99,778 + 313,544 = 413,316$$

$$\hat{c}_{11} = \hat{\alpha}_1 \hat{c}_{111} + \hat{m}_{11} = 0,0529 \cdot (-6,6536) - 6,6546 = -7,006$$

$$\hat{e}_{11} = \hat{\alpha}_1 \hat{e}_{111} + \hat{n}_{11} = 0,0529 \cdot (-28,6507) - 15,2881 = -1,516 - 15,2881 = -16,804$$

Oceny parametrów funkcji trendu i wszystkich składowych sinuso- i kosinusoidalnych zmiennej  $Y_t$  obliczone za pomocą wzorów (12)-(17) zestawione zostały w ostatniej kolumnie tab. 2.

Otrzymane w tej kolumnie oceny parametrów są identyczne z oszacowaniami MNK tych parametrów zawartych w kolumnie drugiej tab. 1. Z powyższego przykładu empirycznego wynika, że rzeczywiście zachodzą związki między parametrami trendów i składowych harmonicznych a parametrami funkcji  $f'(t)$ .

Dla danych oczyszczonych z sezonowości otrzymano następujące oszacowanie równania (7) zapisanego dla  $j = 1$ :

$$Y_t^* = 0,05290 X_{1t}^*,$$

$$R^{*2} = 0,5463,$$

$$SE^* = 205,74.$$

Niższa ocena  $R^{*2}$  w porównaniu z  $R^2$  otrzymanego dla równania (18) jest spowodowana tym, że wariancja zmiennej  $Y_t^*$  jest niższa od wariancji zmiennej  $Y_t$ . Natomiast niższa ocena odchylenia  $SE^*$  jest następstwem szacowania w równaniu (7) tylko jednego parametru ( $\alpha_1$ ). Tym samym więc większa jest liczba swobody.

## Literatura

- [1] Frisch R., Waugh F.V. (1933), *Partial Time Series Regressions as Compared with Individual Trends*, *Econometrica*, vol. 1.
- [2] Hozer J., Zawadzki J. (1990), *Zmienna czasowa i jej rola w badaniach ekonometrycznych*, PWN, Warszawa.
- [3] Lovell C.M. (1969), *Seasonal Adjustment of Economic Time Series and Multiple Regression Analysis*, *JASA*, nr 304.
- [4] Tintner G. (1952), *Econometrics*, J. Wiley, New York.

## ABOUT LOVELL'S THEOREM

### Summary

In the article, using the Lovell's theorem, there have been derived relations between parameters of trends and harmonic components of explained variable and explanatory variables in casual-descriptive models with seasonally changing parameters. The derivation was made on the assumption that there is a function  $f'(t)$  in the set of explanatory variables. This function contains a linear trend and varying seasonal term described by means of trigonometric polynomial.

The theoretical deliberations were illustrated by an empirical example concerning relations between monthly costs and an amount of output of building materials.