

Antoni Smoluk

Akademia Ekonomiczna we Wrocławiu

**PRZESTRZEŃ EKONOMICZNA,
CZYLI ALGEBRA LINIOWA CIĄGÓW FINITNYCH**

1. Nauka nie komplikuje spraw prostych, przeciwnie – porządkuje materię chaotyczną i powikłaną. Nie ma nauki bez dążenia do doskonałości. Prawa przyrody są proste i piękne, jeśli tylko są zapisane w adekwatnym języku. Ciąg jest synonimem szeregu, a szereg ciągu. Limesowanie ciągu jest badaniem możliwości rozszerzenia go do funkcji ciągłej, natomiast zbieżność szeregu oznacza, że ciąg jest funkcją całkowalną. Ciąg jest potencją, a jego granica lub suma – aktualną nieskończonością. W pojęciu sumy szeregu zawarta jest idea wpływu wielkiej liczby małych oddziaływań. Szereg geometryczny $1 + 0,1 + 0,01 + \dots$ jest potencjalną nieskończonością, a jego suma $10/9$ jest realizacją potencji: Achilles dogoni żółwia.

2. Niech $\mathcal{N}$ oznacza jednopunktowe uzupełnienie zbioru liczb naturalnych N ; jest to jednocześnie jednopunktowe uzwarcie przestrzeni N . Każdą przestrzeń topologiczną można przez dodanie jednego punktu uczynić przestrzenią zwartą. Jest to ważna operacja. Jeżeli X jest przestrzenią topologiczną i $a \notin X$, to przestrzeń topologiczna $Y = X + \{a\}$ nazywa się jednopunktowym uzwarcieniem X , gdy otoczeniami punktu dodanego a są zbiory $A + \{a\}$, gdzie A jest podzbiorem X i dopełnieniem wnętrza A jest zbiór zwarty w X . Jednopunktowym uzwarcieniem prostej R jest okrąg. Jeżeli X jest przestrzenią zwartą, to jednopunktowym uzwarcieniem jest dodanie punktu izolowanego a .

Lemat. Ciąg a należący do przestrzeni $F(N, R)$ jest ciągiem zbieżnym wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja ciągła f w przestrzeni $C(\mathcal{N}, R)$, która jest rozszerzeniem ciągu a na zbiór $\mathcal{N}$, czyli gdy $a \subset f$.

Na tej podstawie można wyeliminować pojęcie zbieżności ciągu. Pojęcie zbieżności ciągu sprowadza się bowiem do ciągłości funkcji.

Twierdzenie. Algebra liniowa $C(\mathcal{N}, R)$ nad ciałem liczb rzeczywistych jest izomorficznie izometryczna z algebrą liniową $c(N, R)$ wszystkich ciągów rzeczywistych zbieżnych.

3. Oczywiście $C(N, R) = F(N, R)$, bo przestrzeń N jest dyskretna. Każda funkcja z przestrzeni N w R jest ciągła, ale nie każda może być rozszerzona do funkcji ciągłej na przestrzeni $\mathcal{N}$. Tylko te funkcje można rozszerzyć do funkcji ciągłej, które są ciągami zbieżnymi. Rozszerzenie to jest jednoznaczne. Jeżeli funkcja $f \in C(\mathcal{N}, R)$ rozszerza ciąg $a \in F(N, R)$, to $\lim a = f(\infty)$. Nieskończoność ∞ jest rodziną takich ciągów $g \in F(N, N)$, które się stabilizują – spełniają warunek Cauchy’ego, ale które nie mają granicy w przestrzeni N . Ponieważ przestrzeń N jest dyskretna, więc każdy ciąg zbieżny ma prawie wszystkie wyrazy równe. Zbiór $\mathcal{N}$ jest rodziną klas abstrakcji relacji równoważności E określonej w zbiorze $S(N, N)$ wszystkich ciągów stabilizujących się. Jest mianowicie aEb wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg $(d(a_n, b_n))$ ma granicę 0 w przestrzeni liczb rzeczywistych R . Klasę abstrakcji ciągów zbieżnych do zera utożsamiamy z zerem, ciągów zbieżnych do 1 – z jedynką i tak dalej, natomiast klasę ciągów stabilizujących się, ale bez granicy, oznaczamy symbolem ∞ . Ciąg a jest elementem rodziny ∞ wtedy i tylko wtedy, gdy prawie wszystkie jego wyrazy są większe od dowolnej liczby naturalnej. W zbiorze $\mathcal{N}$ są określone dwa działania: dodawanie i mnożenie. Aby dodać do liczby naturalnej n nieskończoność ∞ , należy ciągi zbieżne do n dodać do ciągów zbieżnych do ∞ . Takie działanie nazywa się dodawaniem zbiorów w sensie Minkowskiego $A + B = \{x + y: x \in A, y \in B\}$. Jest więc $n + \infty = \infty + n = \infty$. Podobnie $n \infty = \infty n = \infty$, gdy liczba naturalna n nie jest 0, ale $0 \infty = \infty 0 = 0$. W rozszerzonym zbiorze liczb naturalnych iloczyn zera i nieskończoności jest więc dobrze określony i jest równy zeru.

4. Ograniczmy się do algebry liniowej ciągów o wyrazach rzeczywistych $F(N, R)$. W algebrze tej wyróżnimy kilka ważnych podalgebr liniowych. Podalgebrę $FF(N, R)$ ciągów finitnych o prawie wszystkich wyrazach równych zeru, podalgebrę $L_1(N, R)$ ciągów sumowalnych, podalgebrę $c_0(N, R)$ ciągów zbieżnych do zera, podalgebrę $c(N, R)$ ciągów zbieżnych i wreszcie podalgebrę $B(N, R)$ ciągów ograniczonych. Są to algebry liniowe uporządkowane.

Rodzina ciągów finitnych $FF(N, R)$ jest algebrą liniową unormowaną z normą miejską, zwaną też normą całkową. Jeżeli $a \in FF(N, R)$, to normę ciągu a określamy wzorem $\|a\| = |a_0| + |a_1| + \dots$; suma ta jest dobrze określona, ponieważ tylko skończona liczba wyrazów jest różna od zera. Algebra $FF(N, R)$ w metryce generowanej przez tę normę całkową nie jest przestrzenią zupełną. Jej uzupełnieniem jest przestrzeń $L_1(N, R)$ ciągów całkowalnych. Elementem przestrzeni $L_1(N, R)$ jest ciąg $a = (\frac{1}{2^n})$, którego sumą jest 2; sumę ciągu a oznaczamy symbolem $\int a$; w

tradycyjnym zapisie sumę oznacza się barokowym symbolem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i raz nazywa

się go sumą, a drugi raz – szeregiem. Algebra liniowa $L_1(N, R)$ jest przestrzenią uporządkowaną; stożek K zawiera wszystkie ciągi nieujemne i sumowalne. Podzbiór $\text{Prob}(N)$ zawarty w K ciągów sumujących się do jedynki jest zbiorem wypuk-

łym dyskretnych rozkładów prawdopodobieństw skupionych na liczbach naturalnych: $p \in \text{Prob}(N)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $0 \leq p$ oraz $\int p = p_0 + p_1 + \dots = 1$.

Jeżeli algebrę ciągów finitnych $FF(N, R)$ uzupełnimy w normie euklidesowej $\|a\|_2 = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + \dots}$, to otrzymamy algebrę liniową $L_2(N, R)$ ciągów sumowalnych z kwadratem: $a \in L_2(N, R)$ wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg $a^2 = a_0^2 + a_1^2 + \dots$ jest sumowalny. Uzupełnienie algebry ciągów finitnych w metryce Czebyszewa $\|a\|_\infty = \max \{|a_0|, |a_1|, \dots\}$ jest algebrą liniową $c_0(N, R)$ ciągów zbieżnych do zera.

5. Jeżeli ciąg jest sumowalny, to ma granicę 0. Jeżeli ciąg jest sumowalny, to jego wyrazy muszą być wspólnie ograniczone. Taki ciąg ma podciąg zbieżny. Jeśli ten podciąg nie jest zbieżny do 0, to nieskończenie wiele wyrazów ciągu spełnia warunek: $r \leq |a_n|$, gdzie $r > 0$. Suma takiego ciągu nie może być skończona; wynika to z zasady Archimedesesa.

Niech $a \in F(N, R)$. Symbolem a_+ oznaczamy ciąg $(\max\{a_n, 0\})$, natomiast symbolem a_- ciąg $(\max\{0, -a_n\})$. Oczywiście ciągi a_+ i a_- są nieujemne oraz spełniają warunek $a = a_+ - a_-$. Jeżeli $a = ((-1)^n)$, to $a_+ = (1, 0, 1, 0, \dots)$ oraz $a_- = (0, 1, 0, 1, \dots)$.

Wzorem $\Sigma(a) = (s_0, s_1, \dots)$ określamy operator $\Sigma: F(N, R) \rightarrow F(N, R)$, gdzie $s_0 = a_0, s_{n+1} = s_n + a_{n+1}, n \in N$. Operator Σ jest liniowy i monotoniczny; dlatego będziemy pisać Σa zamiast $\Sigma(a)$. Ciąg Σa nazywa się ciągiem sum częściowych ciągu a . Operator Σ jest reprezentowany macierzą nieskończoną

$$\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \end{pmatrix},$$

gdzie: $\sigma_{ij} = 1$, gdy $i \geq j$ oraz $\sigma_{ij} = 0$, gdy $i < j$.

Twierdzenie. Ciąg a jest ciągiem sumowalnym wtedy i tylko wtedy, gdy ciągi sum częściowych Σa_+ i Σa_- są zbieżne; $\int a = \lim \Sigma a_+ - \lim \Sigma a_- = \int a_+ - \int a_-$.

Jeżeli ciąg a jest sumowalny, to ciąg sum częściowych Σa jest zbieżny. Wynika to ze zbieżności ciągów Σa_+ i Σa_- i oczywistej zależności $\Sigma a = \Sigma a_+ - \Sigma a_-$. Ciąg Σa jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy ciągi Σa_+ i Σa_- są jednocześnie zbieżne lub rozbieżne do ∞ .

6. Szereg jest synonimem ciągu. Ciąg nazywamy szeregiem, gdy chcemy podkreślić, że zamierzamy go sumować, czyli całkować. Jeśli natomiast interesuje nas ciągłość ciągu, a dokładniej możliwość jego rozszerzenia do funkcji ciągłej, czyli

granica, to w takich przypadkach używamy właśnie terminu ciąg. Ciągi limesujemy, a szeregi sumujemy. Suma szeregu jest zwykłą całką, gdy miara na zbiorze argumentów – zbiorze liczb naturalnych N – jest licząca: miara zbioru równa się liczbie elementów należących do tego zbioru.

Algebrę $L_1(N, R)$ można otrzymać za darmo, uzupełniając algebrę funkcji finitowych $FF(N, R)$ w normie całkowitej. Jest to powołanie się na ogólną zasadę uzupełnień oszczędzającą czas i upraszczającą wykład. Otrzymuje się przestrzeń izomorficzną z przestrzenią ciągów sumowalnych. Uzupełnieniem algebry $FF(N, R)$ w metryce jednostajnej jest algebra $c_0(N, R)$ ciągów zbieżnych do zera.

7. Zbiorem skierowanym w prawo, krótko – zbiorem skierowanym, nazywa się każdy zbiór uporządkowany, gdy w tym zbiorze dla dowolnych dwóch elementów istnieje trzeci większy od każdego z nich. Każdy zbiór uporządkowany liniowo jest naturalnie zbiorem skierowanym. Zbiorem skierowanym w prawo jest produkt $N \times N$ z porządkiem Pareto:

$$(m, n) \leq (r, s) \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } m \leq r \text{ i } n \leq s.$$

Bardzo ważnym zbiorem skierowanym w prawo jest rodzina wszystkich podzbiorów skończonych zbioru X . Niech F oznacza rodzinę wszystkich podzbiorów skończonych zbioru liczb naturalnych N . Funkcję, której dziedziną jest zbiór skierowany w prawo, nazywa się ciągiem uogólnionym. Suma szeregu jest granicą ciągu uogólnionego. Jeżeli $a \in F(N, R)$, to istnieje ciąg uogólniony $S: F \rightarrow R$, który skończonemu podzbiorkowi A zbioru liczb naturalnych N przyporządkowuje albo liczbę 0, gdy A jest pusty, albo sumę tych wyrazów ciągu a , których numery należą do zbioru A . Jeśli więc $A = \{2, 5, 6\}$, to $S(A) = a_2 + a_5 + a_6$, a gdy $A = \{0, 2, 6, 10\}$, to $S(A) = a_0 + a_2 + a_6 + a_{10}$.

Twierdzenie. Ciąg $a \in L_1(N, R)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $S \in c(F, R)$; granica ciągu uogólnionego S jest sumą szeregu, $\int a = \lim S$.

Ciąg a jest sumowalny wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadający mu ciąg uogólniony S ma granicę; suma ciągu a jest równa granicy uogólnionego ciągu S . Zwykły ciąg sum częściowych $\sum a$ jest obcięciem szeregu S do rodziny zbiorów

$$\{\{0\}, \{0, 1\}, \{0, 1, 2\}, \dots\}.$$

Jeżeli więc uogólniony ciąg S ma granicę, to naturalnie zbieżny jest ciąg sum częściowych $\sum a$. Jeśli jednak ciąg sum częściowych $\sum a$ jest zbieżny, to ciąg S może być zbieżny i może nie być zbieżny. Ciąg uogólniony S jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżne są ciągi $\sum a_+$ i $\sum a_-$. Jeżeli założymy, że ciąg $\sum a$ jest zbieżny, to oba ciągi $\sum a_+$ i $\sum a_-$ są jednocześnie zbieżne lub rozbieżne. Jeżeli oba są jednocześnie zbieżne, to ciąg a jest sumowalny, a gdy oba są rozbieżne i ciąg $\sum a$ ma granicę, to szereg a jest sumowalny warunkowo. Warunkowa sumowalność nie ma większego znaczenia praktycznego. Jako ciekawostkę podaje się zwykle wynik

Riemanna, że każdy szereg warunkowo zbieżny, po permutacji wyrazów odpowiednio dobranej, może dać dowolną sumę.

8. Podciągiem arytmetycznym ciągu a nazywa się ciąg b taki, że $b_n = a_{s+n}$, $n \in N$, gdzie $s, r \in N$ oraz $r \geq 1$.

Podciągowe kryterium sumowalności. Jeżeli ciąg $a \in F(N, R)$ jest ciągiem malejącym, to a jest sumowalny, $a \in L_1(N, R)$, wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje podciąg arytmetyczny b ciągu a taki, że b jest sumowalny, $b \in L_1(N, R)$.

Ciąg malejący zbieżny do zera jest sumowalny wtedy i tylko wtedy, gdy ma przynajmniej jeden podciąg arytmetyczny sumowalny.

Operator $\Sigma: F(N, R) \rightarrow F(N, R)$ jest automorfizmem. Ciąg a wyznacza jednoznacznie szereg sum częściowych Σa ; odwrotnie – ciąg sum częściowych $(s_0, s_1, \dots)$ wyznacza jednoznacznie ciąg wyrazów a : $a_0 = s_0$, $a_{n+1} = s_{n+1} - s_n$, $n \in N$. Operator Σ jest odwracalny; macierz

$$\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}$$

jest odwrotnością macierzy Σ ; oczywiście $\Sigma \circ \Sigma^{-1} = I$, gdzie I jest macierzą jednostkową. Każdy ciąg jest więc ciągiem sum częściowych dla pewnego ciągu wyrazów. Nazywanie ciągu sum częściowych szeregiem jest o tyle zasadne, że jest to inny ciąg, ale zawsze jednak ciąg. Zatem ciągi limesujemy, a szeregi sumujemy.

9. Rodzina ciągów o wyrazach wymiernych zbieżnych do zera, $c_0(N, Q)$, rodzina ciągów zbieżnych, $c(N, Q)$, a także rodzina ciągów stabilizujących się $S(N, Q)$ i rodzina ciągów ograniczonych $B(N, Q)$ – to unormowane algebry liniowe nad ciałem liczb wymiernych Q .

Ciąg $a = (n/(2n+1))$ silnie rośnie i jest zbieżny do $1/2$; silna monotoniczność oznacza, że

$$a_n = \frac{n}{2n+1} < \frac{n+1}{2n+3} = a_{n+1}$$

dla każdej liczby naturalnej n ; ciąg ten jest naturalnie ograniczony. Każdy ciąg jest potencją, jego zakończenie (jego granica) jest aktualizacją tej potencji – nieskończonością aktualną. Ciąg rosnący $(1, \sqrt{2}, \sqrt{1+\sqrt{2}}, \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{2}}}, \dots)$, określony wzorem rekurencyjnym: $a_0 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{1+a_n}$, $n \in N$, aktualizuje jego granicę,

dana w symbolicznym zapisie wzorem $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\dots}}}$; granica ta jest liczbą $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \chi$, gdzie χ jest liczbą złotą: $\chi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Ciąg (x_n) określony rekurencyjnie: $x_0 = 1$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{2}{x_n})$, jest potencją, której aktualizacją jest $\sqrt{2}$. Podobnie ciąg (c_n) , gdzie c_n oznacza połowę obwodu $(n+3)$ -kąta foremnego wpisanego w koło o promieniu 1, jest potencją, a liczba π jego aktualizacją – jego granicą. Wreszcie potencja $((1 + \frac{1}{n})^n)$ aktualizuje się liczbą e ; jest to kapitał, jaki otrzymamy z jednostki pieniężnej złożonej na rok do banku stosującego kapitalizację ciągłą przy 100-procentowej stopie w stosunku rocznym.

Oczywiście nie zawsze istnieje granica; nie zawsze wiemy, czym dla danej potencji jest aktualność. Dla ciągu zbiorów $(\{a\}, \{\{a\}\}, \{\{\{a\}\}\}, \dots)$ poziom abstrakcji rośnie na zewnątrz, aktualnością jest dziwny twór $A = \dots \{\{\{a\}\}\} \dots$, który wydaje się zbiorem niepustym, a jednak nie można wskazać elementu, który do niego należy. Może to znaczyć, że aktualizacja jest tu niemożliwa lub że nasze rozumienie zbioru jest za wąskie. Podobnie potencja inna – w której abstrahujemy do wnętrza – jaką jest ciąg $(\{\}, \{\{\}\}, \{\{\{\}\}\}, \dots)$, gdzie symbol $\{\}$ oznacza zbiór pusty, aktualizuje się w obiekcie $x = \{\{\{\dots\dots\}\}\}$ podobnym do zbioru pustego, a mimo to będącym swoim własnym elementem: $x \in x$. Typy logiczne zbiorów A oraz x są nieskończone: jest to aktualizacja rosnącej potencji.

10. Pełna symetria pomiędzy 0_+ oraz ∞_+ jest wtedy, gdy uzupełniamy multiplikatywną grupę R_+^* liczb rzeczywistych silnie dodatnich w metryce $d(x, y) = |2^{-x} - 2^{-y}|$, gdzie $x, y \in R_+^*$. W tym przypadku $\frac{1}{0_+} = \infty_+$ oraz $\frac{1}{\infty_+} = 0_+$; zbiór 0 jest konusoidem ciągów o wszystkich wyrazach dodatnich zbieżnych w R do 0 . Ciągi te w grupie R_+^* nie mają granicy, bo 0 nie jest elementem tej grupy. O tym zerze można mówić pełnoprawnie jako o plus zerze. Jeżeli uzupełnimy zbiór liczb rzeczywistych silnie ujemnych $\{x \in R: x < 0\}$ w metryce $d(x, y) = |2^x - 2^y|$, to otrzymamy także dwa nowe elementy: minus nieskończoność ∞_- oraz minus zero 0_- . Tutaj też jest pełna symetria, a ponadto zero ujemne powstaje z zera dodatniego przez zanegowanie wszystkich ciągów: $0_- = -0_+$ i tak samo jest z nieskończonościami: $\infty_- = -\infty_+$.

Nieskończoności metryczne są punktami skupienia pewnych przestrzeni metrycznych i zależą od tych przestrzeni. Ponieważ istnieje wiele przestrzeni, istnieje więc też wiele tego rodzaju nieskończoności. Zero jest pełnym analogonem nieskończoności.

Literatura

Lusternik L.A., Sobolew W.L., *Elementy analizy funkcjonalnej*, PWN, Warszawa 1959.

Smoluk A., *O zbieżności i ciągłości*, Dydaktyka Matematyki 1, AE, Wrocław 2000, s. 45-51.

ECONOMICAL SPACE OR LINEAR ALGEBRA OF FINITE SEQUENCES

Summary

Vector in economics is a basket of goods; linear space R^n is a family of all n -commodity baskets: n -tuples. In an econometrical model the dimension of basket space is usually fixed. It is not convenient because in the flow of time new products appear and other disappear, the number of components of vectors are changeable. In the paper we propose new candidate for the economic space; it is the linear space $FF(N, R)$ of all sequences with terms almost all equal zero; they are really the finite sequences, for example $a = (1, 2, 1, 0, 0, \dots)$. Of course linear space R^n is imbedded in linear algebra

$FF(N, R)$. In this algebra we can introduce three different norms: integral norm $\|a\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$, Euc-

clidean norm $\|a\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2}$ and Tschebyscheff norm, so we have – as the result of completing of

$FF(N, R)$ – three different Banach spaces: $L_1(N, R)$ – the linear algebra of all summable real sequences, $L_2(N, R)$ – the linear space of sequences summable with square and $c_0(N, R)$ – the linear space of sequences which are convergent to zero; of course: $L_1(N, R) \subset L_2(N, R) \subset c_0(N, R)$. The method of completing metric spaces is a useful and powerful instrument in the science. We receive fundamental theorems concerning convergent sequences and series without hard work. The results are important and useful for econometrics and statistics. To end we call the definition of the completing of a metric space: the complete metric space Y is called a completing of the space X if there is an injection $f: X \rightarrow Y$, which is isometry and image of X is dense in Y . Every metric space can be completed.