

Fryderyk Falniowski

Akademia Ekonomiczna w Krakowie

ZŁOŻONOŚĆ UKŁADÓW DYNAMICZNYCH

1. Wstęp

Problem zdefiniowania i badania złożoności układu interesował ludzi od dawna. Nadal jednak nie ma uniwersalnej miary, dzięki której moglibyśmy rozstrzygnąć, który z dwóch danych układów jest bardziej złożony bądź jak bardzo złożony jest dany układ. Istniejące miary złożoności nawet dla prostych przypadków nie zawsze dają takie same wyniki. Możemy jednak przypuszczać, jakie własności powinna mieć dobra miara złożoności. Najbardziej złożone są układy z pogranicza chaosu i porządku, zatem poszukiwana miara powinna przyjmować wartości największe dla właśnie takich układów.

W 1986 r. Grassberger [1986] zasugerował, że wolna zbieżność entropii jest znakiem złożoności. Wprowadził wielkość, którą nazywamy efektywną miarą złożoności lub po prostu złożonością Grassbergera.

W poniższej pracy zajmiemy się badaniem złożoności danego układu dynamicznego – przestrzeni ciągów nieskończonych z przesunięciem. Dla tego układu wprowadzimy pojęcie entropii miary niezmienniczej i za jego pomocą zdefiniujemy złożoność Grassbergera. Podane zostaną pewne własności tej wielkości oraz wyniki dla szerokiej klasy miar – miar Markowa, a przede wszystkim miar Bernoullego – odpowiadających w teorii miary procesom Markowa i Bernoullego.

Przestrzeń ciągów nieskończonych z przesunięciem jest interesująca z paru powodów. Z punktu widzenia matematyka układ ten stosunkowo łatwo jest badać, a równocześnie jest on sprzężony lub semisprzężony z wieloma innymi układami o strukturze trudniejszej do badania. Wyniki uzyskane dla tego układu można zatem przenieść na te układy. Z drugiej strony ciągi mają wiele interpretacji w naukach empirycznych – w ekonomii mogą być interpretowane np. jako szeregi czasowe. Pojawiają się również w biologii (kod DNA) czy fizyce (układ statystyczny, ciąg pomiarów). Ciągi stanowią podstawę informatyki, służą do kodowania informacji, zatem znajdują zastosowanie przede wszystkim w teorii informacji.

2. Przestrzeń ciągów nieskończonych z przesunięciem. Podstawowe definicje i fakty

Niech $\Omega = X^{\mathbb{Z}}$ będzie zbiorem wszystkich ciągów dwustronnie nieskończonych postaci $x = (\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots)$, w których współrzędne x_i są punktami tej samej mierzalnej przestrzeni (X, M) . Na Ω możemy zadać odwzorowanie θ będące przesunięciem $\theta x = x'$, gdzie $x'_i = x_{i+1}$ dla dowolnego $i \in \mathbb{Z}$. Odwzorowanie θ zadaje na Ω układ dynamiczny. Przez pojęcie przestrzeni ciągów nieskończonych z przesunięciem będziemy rozumieli układ dynamiczny (Ω, θ) .

Złożoność tego układu badać będziemy za pomocą narzędzi teorii miary. W Ω istnieje naturalna σ -algebra Σ generowana przez zbiory cylindryczne, tzn. zbiory postaci

$$C_{i_1, \dots, i_r}(C_1, \dots, C_r) = \{x = (\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots) \in \Omega : x_{i_1} \in C_1, \dots, x_{i_r} \in C_r\},$$

gdzie $1 \leq r < \infty$, $i_1 < \dots < i_r$ są liczbami całkowitymi, a $C_1, \dots, C_r \in M$. Rodzinę wszystkich zbiorów cylindrycznych oznaczamy przez C . C jest półalgebrą [Falniowski 2005]. Korzystając z tego faktu oraz twierdzenia o rozszerzaniu miary [Parthasarathy 1978], otrzymujemy miarę probabilistyczną μ jednoznacznie określoną przez wartości, które przyjmuje na zbiorach cylindrycznych.

Poniżej będziemy rozpatrywali miary niezmiennicze ze względu na przesunięcie. Miarę probabilistyczną μ nazywamy niezmienniczą, jeśli dla dowolnego zbioru cylindrycznego $C_{i_1, \dots, i_r}(C_1, \dots, C_r)$ miara $\mu(C_{i_1, \dots, i_r}(C_1, \dots, C_r))$ nie zmienia się przy przesunięciu zbioru cylindrycznego w czasie, tj. dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi równość $\mu(C_{i_1, \dots, i_r}(C_1, \dots, C_r)) = \mu(C_{i_1+n, \dots, i_r+n}(C_1, \dots, C_r))$. Zbiór niezmienniczych miar probabilistycznych określonych na Ω oznaczamy przez $M(\Omega)$.

3. Entropia miary niezmienniczej

Złożoność układów dynamicznych jest związana z chaotycznością, dlatego poszukując miary złożoności, rozpatruje się najbardziej uniwersalną miarę chaosu – entropię, a dokładniej entropię Kołmogorowa-Sinaja. W przypadku przestrzeni ciągów nieskończonych z przesunięciem możemy ją wyznaczyć w dość prosty sposób za pomocą tzw. entropii częściowych (blokowych) będących analogonem entropii Shannona dla ciągu długości n , stosowanej w teorii informacji. Wprowadzamy je następująco:

Niech $X = \bigcup_{i=1}^k C_i$, gdzie C_i są zbiorami rozłącznymi, wtedy możemy zdefiniować entropię częściową.

Definicja 1. Niech $n \in N$. Entropią częściową nazywamy funkcję $H_n : M(\Omega) \rightarrow R^+$ zadaną wzorem

$$H_n(\mu) := - \sum_{i \in \{1, \dots, k\}^n} p_i(\mu) \ln(p_i(\mu))$$

dla $\mu \in M(\Omega)$, $n \geq 1$, gdzie $p_i(\mu) = \mu(C_{1, \dots, n}(C_{i_1}, \dots, C_{i_n}))$ dla $i = \{i_1, \dots, i_n\} \in \{1, \dots, k\}^n$.

Dla $n = 0$ zadajemy $H_0(\mu) := 0$.

Wydaje się, że dobrą miarą chaosu powinna być granica ciągu $\{H_n(\mu)\}_{n \in N}$. Okazuje się jednak, że zazwyczaj ta granica jest nieskończona. Dlatego zamiast zbieżności ciągu $\{H_n(\mu)\}_{n \in N}$ rozpatruje się zbieżność ciągu $\left\{\frac{H_n(\mu)}{n}\right\}_{n \in N}$ oraz ciągu przyrostów $\{H_{n+1}(\mu) - H_n(\mu)\}_{n \in N}$. Dla tych ciągów prawdziwe jest następujące twierdzenie, którego dowód można znaleźć w [Słomczyński 2003].

Twierdzenie 1. Niech $\mu \in M(\Omega)$ będzie miarą niezmienniczą ze względu na przesunięcie. Wtedy oba ciągi $\left\{\frac{H_n(\mu)}{n}\right\}_{n \in N}$ i $\{H_{n+1}(\mu) - H_n(\mu)\}_{n \in N}$ są nieujemne, malejące i mają wspólną granicę.

Definicja 2. Wspólną granicę ciągów $\left\{\frac{H_n(\mu)}{n}\right\}_{n \in N}$ i $\{H_{n+1}(\mu) - H_n(\mu)\}_{n \in N}$ oznaczamy przez $H(\mu)$ i nazywamy entropią miary niezmienniczej μ :

$$H(\mu) := \lim_{n \rightarrow \infty} (H_{n+1}(\mu) - H_n(\mu)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H_n(\mu).$$

Zauważmy, że entropia miary niezmienniczej μ jest równa entropii Kołmogorowa-Sinaja przesunięcia θ z miarą niezmienniczą μ . Ogólnie w przypadku entropii Kołmogorowa-Sinaja wykorzystujemy supremum po różnych podziałach, w przypadku entropii zadanej powyższym wzorem mamy do dyspozycji podział kanoniczny, jest ona zatem łatwiejsza do wyliczenia.

4. Zbieżność entropii częściowych

Grassberger [1986] zasugerował, że wolna zbieżność entropii jest znakiem złożoności układu. Dlatego rozpatruje się ciągi

$$g_n(\mu) := H_{n+1}(\mu) - H_n(\mu) - H(\mu)$$

dla $n \in N$.

$$h_n(\mu) := \frac{1}{n} H_n(\mu) - H(\mu)$$

dla $n \geq 1$ oraz $h_0(\mu) = H_1(\mu)$.

Ciągi $\left\{ \frac{H_n(\mu)}{n} \right\}_{n \in N}$ oraz $\{H_{n+1}(\mu) - H_n(\mu)\}_{n \in N}$ są na podstawie twierdzenia 1 malejące i nieujemne oraz zbieżają do 0 dla $n \rightarrow \infty$. Jest oczywiste, że $(H_{n+1}(\mu) - H_n(\mu))$ zbiega do granicy szybciej niż ciąg $\frac{1}{n} H_n(\mu)$, ponieważ

$$\frac{1}{n} H_n(\mu) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (H_{i+1}(\mu) - H_i(\mu)) \geq H_{n+1}(\mu) - H_n(\mu) \text{ dla } n \in N.$$

Jeśli $\{a_n\}_{n \in N}$ i $\{b_n\}_{n \in N}$ są ciągami nieujemnych liczb rzeczywistych, to zapis $a_n \approx b_n$ oznacza, że $0 < \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} < \infty$. Następujące twierdzenie, którego dowód można znaleźć w [Nowak 1998], mówi więcej o zależności między zbieżnościami rozpatrywanych ciągów.

Twierdzenie 2. Niech $f: R^+ \rightarrow R^+$ będzie funkcją malejącą taką, że $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$. Niech $F: R^+ \rightarrow R$ będzie pierwotną funkcji f . Wtedy jeśli $g_n(\mu) \approx f(n)$, to $h_n(\mu) \approx \frac{F(n)}{n}$.

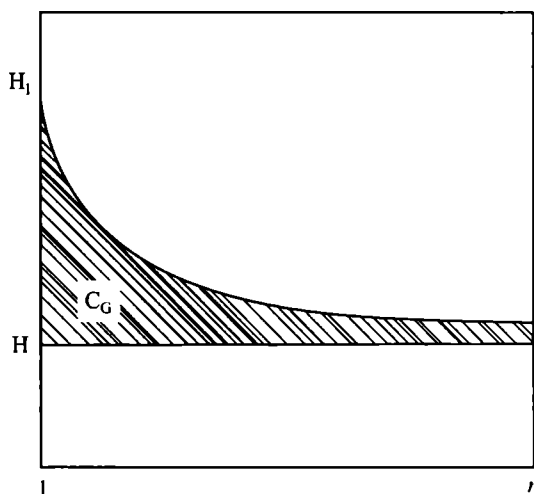
5. Złożoność Grassbergera

Definicja 3. Złożonością Grassbergera nazywamy funkcję $C_G: M(\Omega) \rightarrow R^+$ zadaną wzorem

$$C_G(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(\mu).$$

Złożoność Grassbergera często wykorzystuje się w badaniu złożoności układów dynamicznych. Osobliwą cechą tej miary jest to, że może być ona skończona zarówno dla układów chaotycznych, jak i dla układów regularnych. Mierzy ona tempo przyrostu entropii częściowych. Jest nieskończona dla układów z pogranicza porządku i chaosu.

W teorii informacji złożoność Grassbergera (nazywana tam nadwyżką entropii – *excess entropy*) jest interpretowana jako ilość informacji, jaką otrzymujemy, badając kolejne entropie częściowe. Interpretację geometryczną złożoności Grassbergera przedstawia rys. 1.



Rys. 1. Złożoność Grassbergera – interpretacja geometryczna

Źródło: [Falniowski 2005].

Czasami wygodniej obliczać nie sumę szeregu, ale granicę pewnego ciągu. Okazuje się, że prawdziwy jest następujący wzór (dowód można znaleźć w [Falniowski 2005]).

Twierdzenie 3. Dany jest wzór

$$C_G(\mu) = \lim_{n \rightarrow \infty} (H_n(\mu) - nH(\mu)) = \lim_{n \rightarrow \infty} nh_n(\mu).$$

Kolejne dwa twierdzenia charakteryzują złożoność Grassbergera, mówiąc, kiedy jest ona skończona. Dowody poniższych faktów można znaleźć w [Falniowski 2005].

Twierdzenie 4. Następujące warunki są równoważne:

- 1) $h_n(\mu) \approx \frac{1}{n}$;
- 2) $C_G(\mu) \in (0, \infty)$.

Twierdzenie 5. Następujące warunki są równoważne:

- 1) $C_G(\mu) = 0$;
- 2) $\forall_{n \in N} H_n(\mu) = nH(\mu)$;
- 3) $\forall_{n \in N} h_n(\mu) = 0$;
- 4) $h_1(\mu) = 0$;
- 5) $g_0(\mu) = 0$;
- 6) $\forall_{n \in N} g_n(\mu) = 0$.

6. Wyniki

Złożoność Grassbergera można wyznaczać dla szerokich klas miar niezmienniczych. Jedną z nich są miary Markowa, którym w teorii procesów stochastycznych odpowiadają procesy Markowa – jedne z najlepiej poznanych i szeroko wykorzystywanych w naukach empirycznych. Jeśli założymy, że przestrzeń stanów X jest skończona, to złożoność Grassbergera danej miary Markowa μ wynosi [Falniowski 2005]:

$$C_G(\mu) = 2H_1(\mu) - H_2(\mu).$$

Szczególnym przypadkiem miar Markowa są miary Bernoullego, odpowiadające w teorii miary procesom Bernoullego. Dla skończonej przestrzeni stanów i danej miary Bernoullego μ pierwszy wyraz ciągu $g_n(\mu)$ jest równy 0, zatem $C_G(\mu) = 0$.

Więcej informacji na temat miar Markowa i miar Bernoullego można znaleźć w [Falniowski 2005; Fomin, Kornfeld, Sinaj 1987; Słomczyński 2003].

7. Zastosowania w ekonomii

W teorii informacji złożoność Grassbergera (nazywana tam nadwyżką entropii – zob. [Crutchfield, Feldman 2003]) interpretowana jest jako „koszt amnezji” – mówi nam, o ile bardziej losowy będzie układ, jeśli nagle zapomnimy całą informację dotyczącą lewej części ciągu x , tzn ciągu $(\dots, x_{-2}, x_{-1})$.

Możemy obliczać złożoność Grassbergera dla ciągu x oraz ciągów $\theta^{-i}x$ dla $i = 1, 2, \dots$, gdzie $\theta^{-k}x$ jest ciągiem powstałym przez przesunięcie wszystkich wyrazów ciągu x o k w prawo. Złożoność Grassbergera danego ciągu $\theta^{-i}x$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) będzie sugerowała nam, jak wiele informacji stracimy, odrzucając część ciągu leżącą na lewo od x_{-i} . Można ją zatem wykorzystać np. w sytuacji, gdy mamy bardzo dużo danych i potrzebujemy wybrać tylko część z nich.

Jak już zauważyliśmy, ciąg nieskończony można interpretować jako pewien szereg czasowy – ciąg liczb opisujących zachowanie pewnej wielkości. W ekonomii może być nią np. kurs dolara lub kurs akcji na giełdzie.

Korzystając z interpretacji zaczerpniętej z teorii informacji, złożoność Grassbergera można wykorzystać następująco. Mamy pewien rynek finansowy oraz szereg czasowy go opisujący. Chcielibyśmy przewidzieć zachowanie rynku. W tym celu analizujemy związany z nim szereg czasowy. Często zdarza się, że potrzebujemy odrzucić najstarsze dane – np. ze względu na błędy tych pomiarów bądź z racji uproszczenia obliczeń. Nie wiemy jednak, jak wiele mówią nam one o zachowaniu się rynku oraz jak wiele danych można odrzucić, nie tracąc zbyt wiele informacji. W tym celu możemy analizować złożoności Grassbergera kolejnych ciągów $\theta^{-i}x$, które powiedzą nam, jak wiele informacji stracimy, odrzucając odpowiednie długie ciągi danych.

8. Podsumowanie

Złożoność Grassbergera jest jedną z wielkości charakteryzujących złożoność danego układu dynamicznego lub procesu stochastycznego. Jest wykorzystywana i rozwijana przez fizyków, informatyków i matematyków. Ze względu na prostotę i związek z teorią informacji wydaje się, że może się stać pomocnym narzędziem także w innych dziedzinach nauki, a zwłaszcza w ekonomii.

Literatura

- Crutchfield J.P., Feldman D.P., *Regularities Unseen, Randomness Observed: Levels of Entropy Convergence*, „Chaos” 2003, 15:25-54.
- Crutchfield J.P., Packard N.H., *Symbolic Dynamics of One-dimensional Maps: Entropies, Finite Precision and Noise*, „Int. J. Theo. Phys.” 1982, 21:433-466.
- Falniowski F., *Zbieżność entropii*, praca magisterska, Uniwersytet Jagielloński, Kraków 2005.
- Fomin S.W., Kornfeld I.P., Sinaj J.P., *Teoria ergodyczna*, PWN, Warszawa 1987.
- Grassberger P., *Toward a Quantitative Theory of Self-generated Complexity*, „Int. J. Theo. Phys.” 1986, 25:907-938.
- Nowak M.A., *Szybkość zbieżności entropii warunkowych i częściowych w definicji entropii Kolmogorowa-Sinaja*, praca magisterska, Uniwersytet Jagielloński, Kraków 1998.
- Parthasarathy K.R., *Introduction to Probability and Measure*, Springer-Verlag, New York Inc., New York 1978.
- Słomczyński W., *Dynamical Entropy, Markov Operators and Iterated Function Systems*, Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków 2003.

COMPLEXITY OF DYNAMIC SYSTEMS

Summary

In the context of dynamic systems, Grassberger has suggested that a slow approach of the entropy to its extensive asymptotic limit is a sign of complexity. He has introduced some measures of complexity called Effective Measure Complexity (or just Grassberger's Complexity). Crutchfield and Packard have developed this idea on the field of information theory. This article transports their ideas into the field of measure theory and gives some interesting results for invariant measures on the space of infinite strings. There is also a proposition of using it in economics.