

Politechnika Wrocławska
Wydział Informatyki i Zarządzania

**Efektywność systemu gospodarki zasobami
z rozbudowanym układem transportowym –
ujęcie modelowe**

**Rozprawa doktorska
mgr Mirosław Liana**

Promotor: dr hab. Mieczysław J. Król

Wrocław 2004

Praca została zrealizowana przy współpracy z Zakładami Metod Ilościowych w Ekonomii Politechniki Rzeszowskiej i Uniwersytetu Rzeszowskiego oraz Instytutem Organizacji i Zarządzania Politechniki Wrocławskiej.

Składam serdeczne podziękowania

Panu dr hab. Mieczysławowi J. Królowi, prof. URz

za inspirujące prowadzenie pracy.

Mirosław Liana

SPIS TREŚCI

WSTĘP	5
ROZDZIAŁ 1. CHARAKTERYSTYKA GŁÓWNYCH KIERUNKÓW BADAŃ W TEORII GROMADZENIA ZASOBÓW W OPARCIU O ANALIZĘ LITERATURY Z TEJ DZIEDZINY	8
1.1. Rys historyczny oraz przegląd wybranych klasyfikacji modeli gospodarowania zasobami	8
1.2. Problematyka sterowania zapasami w systemach produkcyjnych	13
1.3. Zagadnienia rozważane w modelach typu „zaopatrzenie – zbyt”	19
1.4. Problemy gromadzenia zasobów pieniężnych w organizacjach ubezpieczeń	25
1.5. Gromadzenie zapasów a teoria masowej obsługi	28
1.6. Tematyka badań nad systemami gospodarki zasobami z ciągłymi układami transportowymi	29
ROZDZIAŁ 2. OPIS I ANALIZA CYBERNETYCZNO – EKONOMICZNEGO SYSTEMU TYPU „TRANSPORT – ZAPASY”	32
2.1. Matematyczny model funkcjonowania systemu „bazowego”	32
2.2. Wpływ parametrów systemu na prawdopodobieństwo deficytu w zbiorniku	38
2.3. Wpływ parametrów systemu na prawdopodobieństwo przepełnienia zbiornika ...	44
2.4. Ocena łącznych strat spowodowanych deficytem lub przepełnieniem	51
2.5. Analiza wydajności systemu „bazowego”	57
ROZDZIAŁ 3. ZWIĄZKI MIĘDZY PARAMETRAMI MODELI CIĄGŁYCH UKŁADÓW TRANSPORTOWYCH	64
3.1. Model jednoczęściowego układu transportowego	64
3.2. Zasady upraszczania modelu szeregowo złożonego układu transportowego	66
3.3. Reguły upraszczania modelu równolegle złożonego układu transportowego	70
3.4. Odniesienie do zwielokrotnionych połączeń równoległych	74
3.5. Praktyczne znaczenie wzorów redukcyjnych	76
ROZDZIAŁ 4. ANALIZA FUNKCJONOWANIA SYSTEMÓW GOSPODARKI ZASOBAMI Z SZEREGOWO ZŁOŻONYMI CIĄGŁYMI UKŁADAMI TRANSPORTOWYMI	77
4.1. Model systemu ze złożonym szeregowo układem transportowym	77

4.2. Ocena efektywności funkcjonowania systemu w wariancie jednorodnym układu transportowego	79
4.2.1. Deficyt w zbiorniku	80
4.2.2. Przepełnienie zbiornika	83
4.2.3. Łączne straty spowodowane deficytem i przepełnieniem	86
4.2.4. Wydajność systemu	89
4.3. Ocena efektywności funkcjonowania systemu w wariancie niejednorodnym układu transportowego	93
4.3.1. Deficyt w zbiorniku	94
4.3.2. Przepełnienie zbiornika	95
4.3.3. Łączne straty spowodowane deficytem i przepełnieniem	96
4.3.4. Wydajność systemu	98
UWAGI KOŃCOWE	115
INDEKS SYMBOLI I OZNACZEŃ	117
SPIS RYSUNKÓW	119
SPIS TABEL	122
LITERATURA	123

WSTĘP

W dobie gospodarki rynkowej efektywne funkcjonowanie zaopatrzenia i racjonalne wykorzystanie zasobów jest niezmiernie ważne dla każdego przedsiębiorstwa. Problemami tymi zajmuje się teoria gromadzenia zasobów („theory of storage”). Przedmiotem jej badań są teoretyczne modele funkcjonowania rzeczywistych systemów gospodarki zasobami. Prowadzone prace dotyczą: poszukiwania efektywnych strategii uzupełniania zapasów, wskazania optymalnych warunków funkcjonowania systemów, planowania i sterowania przebiegiem procesu produkcyjnego, zapobiegania awaryjności systemów itp.

Osobne miejsce w teorii gromadzenia zasobów zajmują systemy cybernetyczno – ekonomiczne typu „transport – zapasy”, które praktyczną realizację znajdują w wielu gałęziach gospodarki (przetwórstwo węgla, ropy i gazu, przetwórstwo spożywcze, dystrybucja towarów itp.). Systemy tego typu były przedmiotem badań Zakładu Doświadczalnego Instytutu Matematyki i Fizyki Teoretycznej Politechniki Wrocławskiej. Prace naukowców wrocławskich ukierunkowane były na opracowanie systematyki metod służących do badania własności tzw. „układów KTZ” (układy technologiczne kopalni odkrywkowych z transportem ciągłym), w ujęciu umożliwiającym łatwe ich wykorzystanie dla celów projektowych i eksploatacyjnych.

Niniejsza praca powstała w wyniku kontynuacji tych badań, przede wszystkim w ich nurcie ekonomicznym. Tematyka pracy związana jest z oceną efektywności funkcjonowania systemów typu „transport – zapasy” z pośrednim zbiornikiem. Dotychczasowe wyniki badań poszerzono w szczególności o analizę ekonomiczną systemów z wieloczęściowymi układami transportowymi. Kryterium służącym do oceny efektywności funkcjonowania badanych systemów są pewne wskaźniki określające m. in. wielkości strat generowanych przez występujące losowo zjawiska – deficyt lub przepełnienie magazynu-zbiornika.

Głównym celem pracy było zbadanie wpływu różnorodnych parametrów określających funkcjonowanie systemów na wielkość strat spowodowanych wystąpieniem ww.

niekorzystnych zdarzeń. Na tle celu głównego wyodrębniono następujące cele szczegółowe:

- analiza wydajności systemów,
- wyprowadzenie zależności pomiędzy parametrami modeli różnych układów transportowych,
- określenie optymalnej pojemności i, w przypadku systemów z wieloczęściowymi układami transportowymi, miejsca lokalizacji magazynu-zbiornika,
- wskazanie najlepszego ustawienia poszczególnych nitek w szeregowo złożonych układach transportowych.

Praca składa się z czterech rozdziałów. W rozdziale pierwszym przypomniano genezę teorii gromadzenia zasobów, pionierskie prace i poruszane w nich zagadnienia. Scharakteryzowano główne kierunki badań w „theory of storage”, odwołując się do powszechnie uznanych klasyfikacji. Zaakcentowano różnorodność modeli i analizowanych problemów w systemach produkcyjno – magazynowych, zaopatrzenia i zbytu oraz ubezpieczeń społecznych. Zwrócono również uwagę na związki z teorią masowej obsługi. Dokonano krótkiego przeglądu najnowszych prac z zakresu gromadzenia zapasów. Scharakteryzowano także dotychczasowe badania prowadzone w ośrodku wrocławskim i rzeszowskim, a dotyczące systemów gospodarowania zasobami z ciągłymi układami transportowymi.

W rozdziale drugim opisano pewien system cybernetyczno – ekonomiczny typu „transport – zapasy”, pełniący w pracy rolę systemu podstawowego („bazowego”). Przypomniano matematyczny model funkcjonowania tego systemu, znany z prac m.in. Króla i Autora niniejszej rozprawy. Przedstawiono szereg wskaźników wprowadzonych przez Króla, które posłużyły do oceny efektywności funkcjonowania rozważanych w pracy systemów. Wspomniane wskaźniki (oprócz wskaźnika wydajności systemu) określają niekorzystne zjawiska (deficyt w magazynie lub jego przepełnienie), których losowe wystąpienie może powodować wzrost kosztów funkcjonowania systemów. Zbadano wpływ parametrów technologiczno – niezawodnościowych systemu „bazowego” na wartości omawianych wskaźników.

W rozdziale trzecim zaprezentowano matematyczne modele jedno- i wieloczęściowych ciągłych układów transportowych. Wyprowadzono zależności pomiędzy parametrami tych modeli (tzw. wzory redukcyjne). Związki te pozwalają zastępować modele wieloczęściowych układów transportowych (złożonych szeregowo lub równolegle)

przez model układu jednoczęściowego. Umożliwia to wykorzystanie dotychczas uzyskanych wyników i stosowanych metod (między innymi przedstawionych w rozdziale drugim) w badaniach systemów z bardziej rozbudowanymi układami transportowymi.

W rozdziale czwartym, w oparciu o wzory redukcyjne, przeprowadzono analizę efektywności funkcjonowania systemów gospodarki zasobami z szeregowo złożonymi układami transportowymi (w wariancie jednorodnym i niejednorodnym). Wyniki badań pozwoliły Autorowi wskazać optymalne (przy różnych kryteriach) konfiguracje tych systemów, czyli ustawienia poszczególnych podukładów oraz miejsce lokalizacji magazynu. Uzupełnieniem analiz są liczne wykresy ilustrujące otrzymane wyniki.

Zaprezentowane w pracy rezultaty mogą być wykorzystane do sterowania istniejącymi systemami gospodarki zasobami, w których transport zasobu odbywa się w sposób ciągły oraz narażony jest na niespodziewane awarie (np. taśmociągi, gazociągi, ropociągi, wodociągi itp.). Mogą również znaleźć zastosowanie na etapie projektowania nowych systemów tego typu. Stanowią także bazę do dalszych matematycznych i ekonomicznych analiz systemów z rozbudowanymi ciągłymi układami transportowymi. Kierunki dalszych badań, z których część stanowi obecnie przedmiot zainteresowania naukowców z ośrodka wrocławskiego i rzeszowskiego, wskazano w uwagach końcowych pracy.

ROZDZIAŁ 1

CHARAKTERYSTYKA GŁÓWNYCH KIERUNKÓW BADAŃ W TEORII GROMADZENIA ZASOBÓW W OPARCIU O ANALIZĘ LITERATURY Z TEJ DZIEDZINY

1.1. Rys historyczny oraz przegląd wybranych klasyfikacji modeli gospodarowania zasobami

Problemami racjonalnego gospodarowania zasobami ludzkość zajmowała się od wieków. Znane są np. papirusy pochodzące z około XVIII wieku p.n.e., z których dowiadujemy się, że Egipcjanie obliczali wielkości zapasów prowiantu dla wojska (zob. Rubalski [130]). Również obecnie, efektywne funkcjonowanie i zarządzanie różnorodnymi systemami produkcyjnymi, systemami zaopatrzenia i zbytu, systemami ubezpieczeń społecznych itp. wymaga odpowiedniego gospodarowania posiadanymi zasobami, takimi jak surowce i materiały, półfabrykaty, paliwa, części zamienne, zasoby pieniężne itp. Jednymi z najważniejszych powodów, dla których wiele firm gromadzi strategiczne rezerwy zasobów, są (zob. Sarjusz – Wolski [132]):

- wyrównywanie (amortyzowanie) różnic w intensywnościach strumieni dopływu (zakupów) i odpływu (zużycia, sprzedaży),
- neutralizowanie wahań losowych cechujących strumienie odpływu (popyt większy od prognozowanego średniego), a także ewentualnych opóźnień w dostawach uzupełniających,
- uzyskiwanie rabatów od dostawcy przy zakupie większych partii,
- sezonowy charakter niektórych dóbr (np. płodów rolnych),
- pomyślną koniunkturę rynkową, co do której istnieje uzasadnione przypuszczenie, iż się niebawem „odwróci”.

Dlatego też sterowanie i kontrola posiadanych zapasów w znaczący sposób wpływają na kondycję finansową tych przedsiębiorstw. W procesie sterowania zapasami zachodzi konieczność odpowiedzi na wiele różnych pytań, np.:

- kiedy odnowić zapasy,
- do jakiego poziomu lub o jaką wielkość odnowić zapasy?

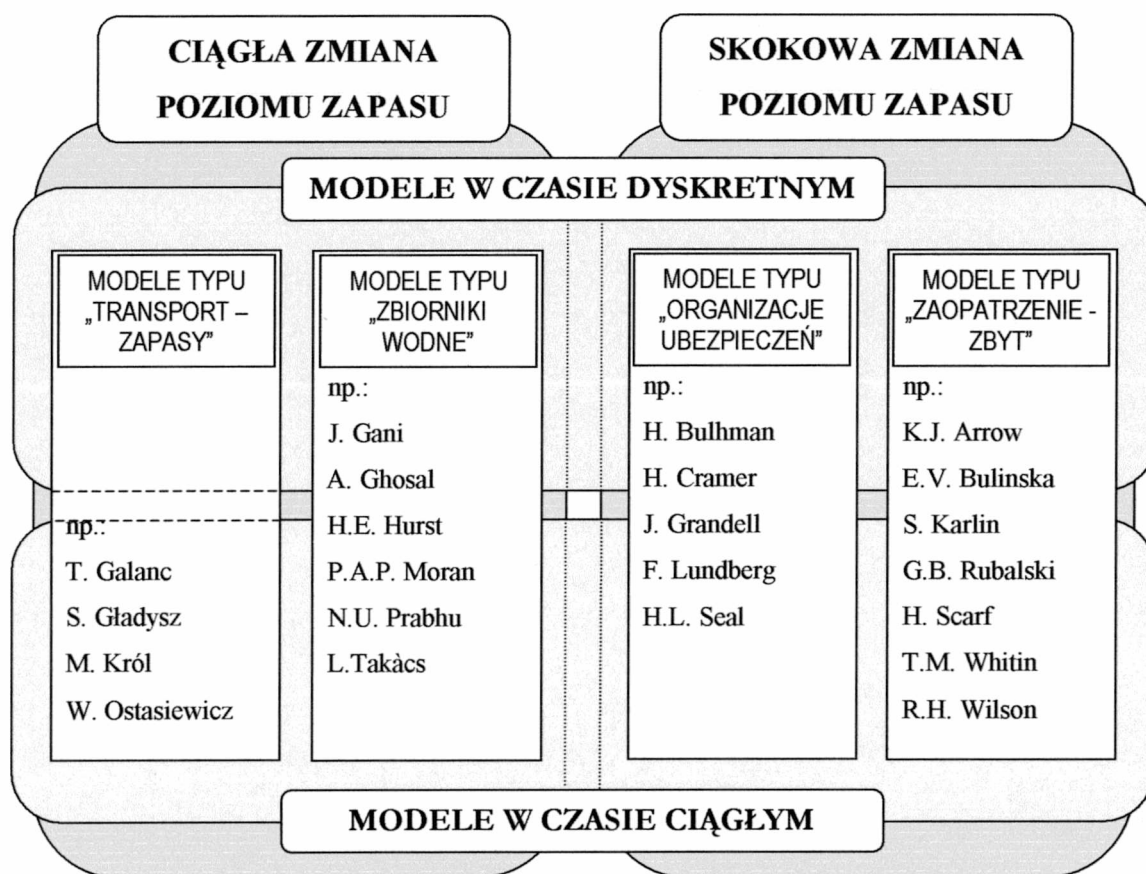
Odpowiedzi na te pytania w odniesieniu do założonych celów (np. maksymalizacji zysku lub minimalizacji pewnych kosztów) sprzyjają bardziej efektywnemu zarządzaniu systemami gromadzenia zasobów. W ich realizacji pomocne są modele matematyczne tych systemów, ułatwiające analizę i symulację zjawisk zachodzących w rzeczywistych systemach. Mnogość i różnorodność modelowanych systemów doprowadziła do dynamicznego rozwoju dziedziny zwanej teorią gromadzenia zasobów („theory of storage”). Powstały liczne prace i wygłoszono wiele referatów prezentujących wyniki dotychczasowych badań (np. Aggarwal [1], Bulinska [18], Prabhu [127]).

Dominującą grupę pośród matematycznych modeli systemów gospodarowania zasobami stanowią modele optymalizacyjne, w których głównym celem jest minimalizacja sumarycznych kosztów związanych z realizacją dostaw oraz przechowywaniem zapasów (np. Whitin [162], Tijms [156], Bulinska [19]). Spotyka się również modele, w których główny nacisk położono na tzw. „podejście niezawodnościowe”. Ich celem jest określenie i analiza warunków niezawodnego funkcjonowania systemu przez określony czas (np. Browne [16], Prabhu [127]).

Pierwsze matematyczne modele systemów gromadzenia zasobów pojawiły się w pracach Harrisa [73] oraz Wilsona [165]. Były to tzw. modele EOQ (*Economic Order Quantity*), w których założono zarówno deterministyczny i stały w czasie popyt na gromadzone produkty, jak i deterministyczne, okresowe ich dostawy. Model Wilsona został zmodyfikowany przez Wagnera i Withina [161], którzy przeanalizowali jego dynamiczną wersję (z uwzględnieniem deterministycznego, ale zmiennego w czasie popytu na produkty). Głównym celem systemów tego typu było wskazanie takiej wielkości zamawianej okresowo partii towaru, która minimalizuje średni koszt realizacji zamówienia i przechowywania towaru.

Modele wykorzystujące metody probabilistyczne pojawiły się w badaniach dotyczących zbiorników wodnych. Wyniki tych badań, w których założono, że wejście do zbiornika jest losowe, zaś wyjście deterministyczne, zostały przedstawione przez Morana w monografii [114]. Ogólniejszy typ modeli probabilistycznych, w których zarówno proces wejścia, jak i wyjścia jest losowy, badali Gani [54, 56] oraz Arrow, Karlin, Scarf [6]. Gani wprowadził pojęcie funkcji zapasów, określającej poziom zapasów w magazynie.

Od tego czasu, w badaniach dotyczących systemów gromadzenia zasobów, bardzo często wykorzystuje się metody stochastyczne. Mnogość różnorodnych modeli doprowadziła do prób ich usystematyzowania (zob. rys. 1.1). Swoje klasyfikacje zaproponowali m.in. Prabhu [127], Chikan, Kelle, Meszena [24], Menipaz [109].



Rys. 1.1. Ogólna klasyfikacja modeli gospodarowania zasobami.

Prabhu [127] ogólnie sklasyfikował modele gromadzenia zasobów w 4 grupach.

1. Modele typu „zaopatrzenie – zbyt” (*inventory models*). W modelach tych proces wejścia jest deterministycznie sterowany, natomiast proces wyjścia może być deterministyczny lub losowy. Poziom zgromadzonych zasobów zmienia się skokowo. Szersze omówienie modeli typu „zaopatrzenie – zbyt” znajduje się w rozdziale 1.3.
2. Modele typu „zbiorniki”, np. wodne (*dams models*). W tych modelach zarówno proces wejścia, jak i wyjścia mogą być losowe, a poziom zapasu zmienia się w sposób ciągły. Głównym celem prowadzonych badań było wyznaczenie optymalnej pojemności zbiornika (np. Hurst [79], Ghosal [60]). Moran [114] sformułował stochastyczną teorię zbiorników, zaś Koopmans i Tjalling [88] opracowali optymalną strategię gromadzenia

wody w pewnym systemie hydroelektrycznym. Gani i Prabhu [55] oraz Takacs [153, 154] zajmowali się określeniem rozkładu prawdopodobieństwa funkcji zapasów dla zbiornika o ograniczonej i nieograniczonej pojemności.

3. Modele typu „organizacje ubezpieczeń” (*insurance risk models*). W tych modelach proces wejścia jest deterministyczny, proces wyjścia – losowy, zaś poziom zapasu zmienia się skokowo. Szersze omówienie modeli typu „organizacje ubezpieczeń” znajduje się w rozdziale 1.4.
4. Modele masowej obsługi (zwane też modelami „kolejek” – *queueing models*) – zostaną przybliżone w rozdziale 1.5.

Klasyfikacja Chikana, Kelle, Meszeny [24] jest wielopoziomowa. Na pierwszym poziomie podział przebiega ze względu na cel modelu (optymalizacja kosztów lub osiągnięcie zadanej niezawodności systemu). Następnie, modele optymalizacyjne są dzielone ze względu na liczbę lokalizacji zasobów w systemie (jedna lub kilka). Modele z jedną lokalizacją dzielone są ze względu na liczbę produktów w systemie (jeden lub kilka). Wreszcie modele z jednym produktem są dzielone na kilka grup ze względu na kolejne kryteria: statyczny lub dynamiczny charakter modelu, losowy lub deterministyczny proces wejścia, losowy lub deterministyczny proces wyjścia. Na ostatnim poziomie następuje podział modeli z deterministycznym wejściem ze względu na strategię uzupełniania zapasów.

Menipaz [109], w celu stworzenia własnej klasyfikacji modeli gospodarowania zasobami, wprowadził następujące założenia.

1. Popyt na dany produkt nie ma wpływu na popyt na inny produkt.
2. Popyt jest znany i stały w czasie.
3. Koszt uzupełniania zasobów jest znany i niezależny od wielkości partii.
4. Koszt uzupełniania zasobów danego produktu nie wpływa na koszt uzupełniania zasobów innego produktu.
5. Koszt przechowywania jest znany i zależy od wielkości zapasu.
6. Cały popyt jest zaspokajany z aktualnie posiadanych zapasów czyli nie uwzględnia się zaległych dostaw tzw. *Back Orders*.
7. Uzupełniane zasoby, natychmiast po dostarczeniu, są gotowe do wykorzystania.
8. Czas, po którym jest realizowane zamówienie uzupełniające zasoby, jest znany i stały.
9. Poziom zapasów kontrolowany jest w sposób ciągły.
10. Okres (horyzont) planowania jest nieskończony.

Przyjmując niektóre z tych założeń za kluczowe, Menipaz stworzył następującą wielopoziomową klasyfikację.

Pierwszym kryterium było przyjęcie (popyt niezależny) lub odrzucenie (popyt zależny) założenia 1. Modele z popytem zależnym zostały podzielone na:

- modele typu MRP (*Material Requirements Planning* – planowanie potrzeb materiałowych), w których produkt finalny składa się z kilku komponentów, więc popyt na ten produkt wpływa na popyt na jego komponenty (np. Buzacott, Shanthikumar [21], Orlicky [117]),
- modele typu MRP *with Order Points* – modyfikacja modeli typu MRP z punktami odnawiania (np. Bollapragada, Rao [15]),
- modele typu *Echelon Systems* (tzw. systemy eszelonowe), składające się z kilku etapów dystrybucji (np. dostawca – hurtownia – detaliści), więc popyt na końcowym etapie wywołuje popyt na etapach wcześniejszych (np. Matta, Sinha [107], Clark [26], Zipkin [169]).

Z kolei modele z popytem niezależnym, w wyniku przyjęcia lub odrzucenia założenia 2, zostały podzielone na :

- systemy z deterministycznym popytem (*Deterministic System*),
- systemy z losowym popytem (*Stochastic System*).

Systemy z losowym popytem nie były dalej szczegółowo klasyfikowane. Natomiast systemy z deterministycznym popytem, w wyniku przyjęcia lub odrzucenia założenia 9, zostały podzielone na dwie grupy: z ciągłą (*Continuous Review*) lub okresową (*Periodic Review*) kontrolą poziomu zapasu.

Modele typu *Periodic Review* nie zostały dalej szczegółowo sklasyfikowane. Natomiast modele typu *Continuous Review*, w wyniku przyjęcia lub odrzucenia założenia 7, podzielono na:

- klasyczne modele typu EOQ (przyjęcie założenia 7) (np. Wilson [165]),
- modele typu ELS (*Economic Lot Size*) (odrzucenie założenia 7) (np. Salomon [131]).

Modele ELS charakteryzują się tym, że zaspokojenie popytu w pełnym wymiarze jest możliwe dopiero po dostarczeniu wszystkich partii zasobu.

Przedstawione klasyfikacje modeli gromadzenia zasobów nie są jedynymi spotykanymi w literaturze (zob. np. Naddor [115], Hochstadter [78], Klemm i Mikut [84], Aggarwal [1], Nahmias [116], Silver [142]). Pozwalają jednak zrozumieć, jak obszerną

i różnorodną dziedziną jest „*theory of storage*” oraz umożliwiającą poznanie sposobów opisu i prezentacji stosowanych modeli.

1.2. Problematyka sterowania zapasami w systemach produkcyjnych

Problem odpowiedniego gospodarowania zapasami występuje w każdym zakładzie produkcyjnym. Magazynuje się surowce w związku z niepewnością dostaw, tworzy się zapasy produkcji w toku w celu uniknięcia przerw w pracy jednego wydziału wskutek nierytmicznej pracy innego, składa się wyroby gotowe, by nie stracić ewentualnej możliwości sprzedaży, części zamienne zaś – by uniknąć kosztownych przerw w produkcji. Dlatego systemy produkcyjne są od wielu lat przedmiotem intensywnych badań (np. Altiok, Ranjan [3], Arrow, Karlin, Scarf [6]). Rozważa się je w wielu aspektach i wariantach, uwzględniając różne konfiguracje, zastosowane techniki planowania i sterowania produkcją, odmienne cele i strategie. Wyróżnić wśród nich można systemy dwupoziomowe i wielopoziomowe.

Dwupoziomowe systemy produkcyjne typu szeregowego składają się z dwóch jednostek produkcyjnych z przejściowym buforem o skończonej pojemności. Ogólnie, modele takich systemów można sklasyfikować przyjmując następujące kryteria podziału:

- rodzaj przepływu wytwarzanych produktów (ciągły lub „dyskretny”),
- w przypadku dyskretnego przepływu produktów – moment obserwacji jednostek produkcyjnych (przed lub po przesłaniu produktów),
- specyfikę jednostek produkcyjnych (identyczne lub nie, o takim samym czasie cyklu bądź nie),
- specyfikę awaryjności jednostek produkcyjnych (obie awaryjne lub nie, awarie jednoczesne lub nie),
- specyfikę napraw jednostek produkcyjnych (naprawy równoczesne lub nie),
- typ rozkładu czasu pracy jednostek produkcyjnych do pierwszej awarii (wykładniczy lub geometryczny),
- typ rozkładu czasu awarii jednostek produkcyjnych (wykładniczy lub geometryczny),
- typ zaistniałych awarii (awarie zależne od czasu pracy lub od stanu pracy jednostek produkcyjnych).

Najczęściej badane typy dwupoziomowych systemów produkcyjnych to:

- modele systemów, w których czasy eksploatacji są zmiennymi losowymi, przepływ wytwarzanych produktów jest „dyskretny”, zaś jednostki produkcyjne nie są podatne na awarie (np. Hillier [75]),
- modele systemów, w których czasy wytwarzania są deterministyczne, przepływ wytwarzanych produktów jest „dyskretny”, zaś jednostki produkcyjne ulegają awariom „od czasu do czasu” (np. Yeralan, Muth [168]),
- modele systemów, w których czasy wytwarzania są losowe, przepływ wytwarzanych produktów jest „dyskretny”, zaś jednostki produkcyjne ulegają awariom (np. Buzacott [22]),
- modele systemów, w których przepływ wytwarzanych produktów jest ciągły, prędkości wytwarzania jednostek produkcyjnych są deterministyczne, zaś same jednostki mogą ulegać awariom (np. Mitra [110], Sevast`yanov [140], Wijngaard [163]).

W modelach wielopoziomowych systemów produkcyjnych proces produkcji podzielony jest na kilka etapów (poziomów). Pomiędzy kolejnymi poziomami znajdują się bufory (magazyny). Gromadzone są w nich produkty wytworzone (przetworzone) przez jednostki produkcyjne (np. maszyny, ludzi) na poprzednich poziomach i wykorzystywane na poziomach następnych. Każda jednostka produkcyjna charakteryzuje się indywidualnymi parametrami określającymi czas bezawaryjnej pracy, czas napraw, a także wielkość produkcji.

Ze względu na różne konfiguracje, w jakich występują, wielopoziomowe systemy produkcyjne dzieli się na:

- modele typu szeregowego (tzw. *Serial Systems*) – na każdym poziomie tylko jedna jednostka produkcyjna (np. Wijngaard [163], Conway, Maxell, McClain, Thomas [29]),
- modele typu montażowego (tzw. *Assembly Systems*) – tylko jedna jednostka na następnym poziomie produkcji (np. McClain, Moodie [108], Smith, Daskalaki [144]),
- modele typu dystrybucyjnego (tzw. *Distribution Systems*) – tylko jedna jednostka na poprzednim poziomie produkcji (np. Gershwin [59]),
- modele typu ogólnego (tzw. *General Systems*) – różne połączenia poprzednich typów (np. Gershwin [59]),
- sieci produkcyjne ze wspólnym buforem dla kilku jednostek produkcyjnych (tzw. *Buffer – sharing Network*) (np. Ancelin, Semery [4]).

Z kolei, ze względu na strategię zarządzania, systemy produkcyjne dzieli się na systemy typu PUSH i typu PULL. Systemy typu PUSH charakteryzują się tym, że harmonogram produkcji jest ustalony „z góry”. Występuje tzw. centralne planowanie popytu na produkty, materiały, komponenty na kolejnych etapach procesu produkcyjnego, w oparciu o prognozy i przewidywania rynku (np. Buzacott [20], Wijngaard [163]). Systemy typu PULL charakteryzują się tym, że przepływ materiałów i komponentów produkcji zostaje zapoczątkowany na ostatnim poziomie procesu produkcyjnego adekwatnie do aktualnego popytu na produkty finalne. Powoduje to wystąpienie popytu na kolejnych, coraz wcześniejszych etapach procesu produkcyjnego. Modelowym przykładem systemu produkcyjnego typu PULL jest system JUST IN TIME z przepływem informacji kontrolowanym za pomocą systemu KANBAN, wprowadzony w latach 60-tych przez firmę Toyota (np. Altiok, Ranjan [3], Kempny [80], Silver, Peterson [143], Witkowski [166]).

Efektywne zarządzanie złożonymi systemami produkcyjnymi wymaga stosowania nowoczesnych metod kontroli. W analizie systemów z agregatowym (wielopoziomowym) sterowaniem produkcją rozważa się dwie, zasadniczo różniące się, struktury kontroli.

1. Kontrola lokalna (*Local Control*) charakteryzuje się tym, że wielkość produkcji na danym etapie produkcyjnym jest uzależniona od poziomów zapasów w buforach bezpośrednio go poprzedzającym oraz bezpośrednio po nim następującym. Przykładem systemów, w których wykorzystywane są struktury lokalnej kontroli, są RPS (*Reorder Point Systems*) z odpowiednimi strategiami odnawiania zasobów oraz systemy typu KANBAN (zob. np. Altiok, Ranjan [3], Koster [89], Witkowski [166]).
2. Kontrola integralna (*Integral Control*) jest realizowana za pomocą jednej z dwóch globalnych struktur: kontroli podstawy zapasu lub kontroli zdolności produkcyjnej. System kontroli podstawy zapasu (*Base Stock System* – BSS) charakteryzuje się tym, że informacja o popycie na produkty finalne jest natychmiast przesyłana na wszystkie etapy procesu produkcyjnego i ustalane są odpowiednie poziomy kontroli zasobów (zob. np. Koster [89], Silver, Peterson [143], Timmer, Bertrand, Monhemius [157]). System kontroli zdolności produkcyjnej (*Workload Control* – WC) polega na sterowaniu „wejściem” poprzez ustalenie norm zdolności produkcyjnej dla każdego górnego eszelonu. Szczegółowy opis systemu WC można znaleźć w pracach Kostera [89] i Paumena [121].

Modele złożonych systemów (o różnej konfiguracji, posiadających wiele jednostek produkcyjnych wraz z pośrednimi buforami) są skomplikowane w analizie. Ze względu na niemożność stosowania w ich przypadku metod analitycznych, powszechne stało się wykorzystywanie metod numerycznych i symulacyjnych (np. Koster [89], Gershwin [58], Ancelin, Semery [4]).

W badaniach systemów produkcyjnych poruszane były różne problemy. Jednym z rozpatrywanych zagadnień jest wyznaczanie optymalnej pojemności buforów. Głównym celem tych badań jest określenie wpływu pojemności buforów na wydajność systemu. Obszerny przegląd prowadzonych w tym kierunku badań i uzyskanych rezultatów znajduje się w pracy Buzacott'a i Shanthikumara [21].

Prowadzono także badania, których celem było znalezienie optymalnych miejsc lokalizacji buforów (magazynów) w systemach produkcyjnych. Conway, Maxell, McClain i Thomas [29], dzięki prowadzonym symulacjom wykazali, że odpowiednie umiejscowienie buforów w systemie znacząco wpływa na zwiększenie przepływu produktów. Hillier, So i Boling [76, 77] uzyskali zadowalające wyniki w tym zakresie w przypadku systemu produkcyjnego typu szeregowego złożonego z co najwyżej sześciu jednostek produkcyjnych oraz ograniczone wyniki dla systemu złożonego z dziewięciu jednostek. Problem optymalnego umiejscowienia buforów w systemach produkcyjnych rozważali również Glasserman i Yao [62].

Poszukiwano również optymalnego umiejscowienia buforów w systemie produkcyjnym ze względu na minimalizację tzw. zasobów pracy w toku. Smith i Daskalaki [144] oraz McClain i Moodie [108] prowadzili takie badania w systemach typu montażowego. Natomiast So [146] opracował numeryczny algorytm dla tego typu zagadnień w liniach produkcyjnych składających się z wielu poziomów produkcyjnych.

Ważnym i często analizowanym problemem występującym w systemach produkcyjnych jest wybór odpowiedniej strategii sterowania procesem produkcyjnym. Najczęściej analizowane strategie to:

- *implicit policy* – produkcja odnawiająca zasoby jest wszczynana dopiero wtedy, gdy poziom zapasu obniży się poniżej pewnego poziomu (np. Vargas, Metters [158]),
- *explicit policy (flexible policy)* – zastosowanie poziomów bezpieczeństwa zapasu pozwala absorbować wahania popytu i produkcja jest wznawiana tylko wtedy, gdy poziom zapasu jest „ujemny” (np. Vargas, Metters [158]),

- *dual – buffer policy* – uwzględnia dwa niezależne poziomy bezpieczeństwa, pierwszy dla sterowania wielkością produkcji, drugi dla sterowania uzupełnieniami zapasu (np. Ehrhardt [38]).

Istotnym problemem występującym w systemach produkcyjnych jest ustalenie optymalnej wielkości partii dla każdego z produktów. W przypadku deterministycznego popytu problem ten nosi nazwę *Economic Lot Scheduling Problem* (ELSP) (zob. Salomon [131], Elmaghraby [39]), zaś w przypadku losowego popytu: *Stochastic Economic Lot Scheduling Problem* (SELSP) (zob. Sox, Muckstadt [147], Federgruen, Katalan [42], Gallego, Joneja [52], Markowitz, Reiman, Wein [106]).

Gallego i Joneja [52] pokazali, w jaki sposób cykliczne planowanie (*cyclic scheduling*) może być wykorzystane do wyznaczania wzajemnych oddziaływań między planowaniem produkcji wyrobów gotowych a planowaniem produkcji podzespołów produkcyjnych.

Federgruen i Katalan [42] zakładali w analizowanym modelu, że popyt na każdy towar ma rozkład Poissona, zaś czasy przygotowania produkcji oraz obsługi mają rozkład dowolny. Obliczyli optymalne (minimalizujące koszty produkcji i przechowywania zapasów) poziomy bezpieczeństwa zapasu zasobów produkcyjnych. Otrzymali optymalną strategię kontroli w klasie strategii typu *base stock*.

Markowitz, Reiman i Wein [106] ustalając pewną rotacyjną sekwencję wytwarzania poszczególnych produktów wyznaczyli optymalne rozwiązanie dla dynamicznej strategii kontroli. W modelu uwzględnili tylko koszty przygotowania procesu produkcyjnego.

Sox i Muckstadt [147] zastosowali bardziej dynamiczne podejście do problemu planowania cyklicznego procesu produkcyjnego. Opracowali model wykorzystujący programowanie stochastyczne do określenia sekwencji produkcyjnej i wielkości produkcji w systemach o skończonym horyzoncie planowania.

Hanssmann [71] zajmował się problemem planowania procesu produkcyjnego, gdy popyt na produkty jest deterministyczny. Zakładał, że w cyklu każdy produkt wytwarzany jest tylko raz, po czym cykl się powtarza. Poszukiwał rozwiązania minimalizującego średni jednostkowy koszt przygotowania i przestawiania produkcji oraz przechowywania zapasów.

He, Jewkes i Buzacott [74] również rozpatrywali pewien system produkcyjno – magazynowy typu „*make-to-order*”. Wykorzystali programowanie dynamiczne do

stworzenia algorytmu pozwalającego wyznaczyć optymalną strategię uzupełniania zapasów. Przy pomocy analizy numerycznej pokazali, że pewne informacje uzyskane dzięki kontroli zapasów mogą istotnie zredukować całkowite koszty magazynowania.

Niektóre prace (np. Hahm, Yano [70], Erlebacher, Meller [41]) dotyczą planowania procesu produkcyjnego z uwzględnieniem dostaw wytwarzanych produktów do klienta. Hahm i Yano [70] analizowali model z wieloma komponentami dostarczonymi do jednego odbiorcy. Każdy komponent produkowany był na tej samej maszynie. Dostawa do odbiorcy składała się z kombinacji produktów w wymaganych ilościach. Opracowali optymalny plan produkcji i dostaw komponentów „na czas”, gdy czas pomiędzy kolejnymi dostawami jest równy czasowi cyklu produkcyjnego. Dokonali również przeglądu wcześniejszych prac z tego zakresu. Erlebacher i Meller [41] rozpatrywali problem ustalenia odpowiedniej liczby centrów dystrybucyjnych, ich lokalizacji w systemie produkcyjno – dystrybucyjnym oraz przypisania do nich odpowiednich klientów. Celem było utrzymanie właściwej jakości obsługi przy jednoczesnej minimalizacji ustalonych kosztów przechowywania zapasów i transportu.

Istotne z punktu widzenia zastosowań praktycznych (np. w branży elektrotechnicznej lub petrochemicznej) są modele systemów koprodukcyjnych, produkujących wyroby należące do różnych klas, ale substytucyjnych. Na przykład Gerchak, Tripathy i Wang [57] rozważali dwa modele. W pierwszym produkuje się wyroby z wyższej oraz niższej klasy. Wyroby z klasy wyższej mogą zastępować wyroby z klasy niższej. Ponadto, wyroby dobre i z wyższej klasy są produkowane w losowych proporcjach. W drugim modelu funkcjonują równolegle dwa procesy produkcji. Pierwszy z nich jest analogiczny do opisanego w modelu pierwszym. Drugi proces produkcji wytwarza tylko wyroby niższej klasy z losowym odsetkiem wyrobów dobrych. Zakładając deterministyczny popyt na produkty, autorzy wyznaczyli metodami analitycznymi warunki optymalności dla wielkości produkcji w cyklu.

Przedmiotem badań są również modele produkcyjno – magazynowe uwzględniające awaryjność maszyn. Przykładowo, Aka, Gilbert i Ritchken [2] rozpatrywali model składający się z kilku maszyn pracujących równolegle, posiadających wspólny awaryjny komponent. Przyjmując wykładniczy rozkład czasu bezawaryjnej pracy komponentów oraz stały czas oczekiwania na realizację ich dostaw, badali, jaki wpływ posiada awaryjność poszczególnych komponentów i strategia gospodarowania ich zapasami na ponoszone przez system koszty. Zgodnie z przyjętą strategią wymiany,

komponenty są wymieniane natychmiast po każdej awarii. Z kolei strategia gospodarowania zapasem komponentów zakłada, że zamawiana jest określona ich ilość natychmiast po tym, gdy poziom zapasowych komponentów spadnie poniżej pewnej granicy. Funkcja kosztów uwzględniała koszty przestojów produkcyjnych, koszty przechowywania zapasów oraz koszty dostaw zależne od wielkości zamówienia.

Das i Sarkar [33] rozważali system produkcyjno – magazynowy z losowym popytem (rozkład Poissona) na pojedynczy produkt. Zakładali, że czas produkcji jednostki wyrobu, czas pomiędzy kolejnymi awariami oraz czas naprawy i konserwacji mają dowolny rozkład. Wyznaczyli optymalne parametry konserwacji systemu, pozwalające maksymalnie obniżyć koszty jego funkcjonowania.

Z kolei Srinivasan i Lee [150] badali system, który ulega losowym awariom. Częstość awarii zwiększa się w miarę jego funkcjonowania. W systemie produkuje się kilka wyrobów, dla których popyt ma rozkład Poissona. Zgodnie z przyjętą strategią sterowania, produkcja przebiega do momentu, gdy zgromadzony zapas wyrobów osiągnie pewien górny próg graniczny. Wtedy rozpoczynany jest proces przywracania systemu do jego początkowej sprawności. Po jego zakończeniu, produkcja jest wznawiana, gdy poziom zapasu spadnie poniżej dolnego progu granicznego. Gdy system ulegnie awarii podczas produkcji, dokonuje się jedynie niezbędnych napraw w celu jej przywrócenia. Srinivasan i Lee określili optymalną strategię sterowania procesem produkcyjnym, gdy czas powstawania awarii w systemie ma rozkład Weibulla.

1.3. Zagadnienia rozważane w modelach typu „zaopatrzenie – zbyt”

Modele systemów gromadzenia zasobów typu „zaopatrzenie – zbyt” opisują różnego rodzaju rzeczywiste systemy hurtownicze, magazynowe, tzw. wieloeszelonowe systemy dystrybucyjne itp. Podstawową cechą takich systemów jest jedno- lub wieloetapowy proces „przepływu” zasobów. Publikacje dotyczące systemów tego typu charakteryzują się dużą różnorodnością rozważanych problemów. Do najczęściej poruszanych zagadnień należą:

- wyznaczenie optymalnych wielkości dostaw oraz czasów ich realizacji (*Warehouse Scheduling Problem* – WSP), przy uwzględnieniu różnych wariantów funkcjonowania systemu i szeregu ograniczeń związanych np. z pojemnością magazynów lub ładownością środków transportu (np. Hadley, Whitin [69], Hariga, Jackson [72]),

- badanie wpływu preferencyjnej polityki cenowej na efektywność funkcjonowania systemu (np. Moinzadeh [111]),
- ustalenie optymalnych miejsc składowania oraz wielkości zapasów na poszczególnych etapach dystrybucji (np. Badinelli, Schwarz [7], Daskin, Coullard, Shen [34]),
- badanie wpływu losowych zakłóceń zaopatrzenia na efektywność systemu (np. Gullu, Onol, Erkip [68], Parlar, Wang, Gerchak [120], Rubalski [128, 129]),
- problem właściwego skoordynowania podejmowanych decyzji dotyczących uzupełniania zasobów magazynowych z odpowiednim przebiegiem trasy zaopatrzeń (np. Viswanathan, Mathur [160]).

W literaturze dotyczącej *Warehouse Scheduling Problem* spotyka się najczęściej poniższe założenia, które określają warunki realizacji uzupełnień magazynowych.

1. Popyt na przechowywane towary jest znany i występuje w sposób ciągły w czasie, tzn. niezrealizowany popyt nie jest uwzględniany w kolejnych zamówieniach.
2. Zasoby mogą być dostarczane w nieograniczonych ilościach natychmiast po wystąpieniu zamówienia.
3. Plan realizacji dostaw jest cykliczny i wielkości dostaw w cyklu są równe popytowi.
4. Planowanie dostaw magazynowych jest opracowywane dla nieskończonego horyzontu czasowego, zaś rozważane miary wydajności to m.in. średni koszt przechowywania zasobów oraz średni koszt realizacji zamówień.

Celem prowadzonych badań jest wskazanie takiego planu dostaw zasobów, który pozwoli zoptymalizować wykorzystanie posiadanej przestrzeni magazynowej. Wyróżnić można dwie, często stosowane łącznie, techniki:

- planowanie wielkości dostaw,
- koordynacja czasów składania zamówień uzupełniających niedobór zasobów.

Redukcja wielkości dostaw pozwala zmniejszyć potrzebną przestrzeń magazynową i obniżyć koszty przechowywania zapasów. Jednocześnie powoduje to zwiększenie liczby dostaw w cyklu, więc wzrost kosztów transportu. Odpowiednia koordynacja pomiędzy czasami dostaw poszczególnych towarów (przesunięcie w czasie) pozwala również zmniejszyć wymagania dotyczące przestrzeni magazynowej.

Czynnikiem mającym znaczny wpływ na efektywność funkcjonowania systemów dystrybucyjnych są wahania cen zasobów. Dostawcy i producenci towarów często stosują preferencyjną politykę cenową, np. przy większych zamówieniach. Niektóre towary charakteryzują się okresowymi spadkami cen, występują posezonowe wyprzedaże.

Niezmierzalnie ważne jest miejsce zakupu, bowiem kolejni pośrednicy uwzględniają w cenach własne marże i narzuty. Dlatego w analizie systemów dystrybucyjnych uwzględniany jest również zasygnalizowany tutaj aspekt cenowy.

W wielopoziomowych systemach dystrybucyjnych składających się z centralnego ośrodka dystrybucyjnego (centralna hurtownia), kilku ośrodków regionalnych (hurtownie regionalne) oraz wielu ośrodków detalicznych (poszczególni sprzedawcy detaliczni), istotna jest odpowiednia koordynacja działań w celu minimalizacji kosztów funkcjonowania systemu. Poszukiwania optymalnych strategii gospodarowania zasobami magazynowymi w takich systemach są przedmiotem badań od ponad czterdziestu lat. Wczesne wyniki badań zostały wyczerpująco podsumowane w pracach: Clarka [26] oraz Schwarza [136]. Bardzo często stosowana jest metodologia oparta na procedurze dekompozycji, zaproponowana przez Deuermeyera i Schwarza [37]. Wśród analizowanych modeli występują zarówno modele typu PUSH, jak i PULL. Rozważano również eszelonowe strategie uzupełniania zapasów magazynowych (*Echelon Stock*), oraz problem określenia optymalnych tras zaopatrzeń, które minimalizują średnie koszty transportu (zob. odwołania w Viswanathan, Mathur [160]).

Inne problemy decyzyjne występują w wielomagazynowych systemach dystrybucyjnych. Systemy takie składają się z kilku magazynów, między którymi istnieje możliwość przesyłania zasobów. Wykorzystywane są wtedy, gdy popyt jest stosunkowo duży w porównaniu z pojemnością pojedynczego magazynu. Główne problemy decyzyjne to ustalenie optymalnej wielkości zapasów w poszczególnych magazynach oraz wskazanie optymalnej strategii realizacji zamówień, gdy ich wielkość przewyższa zapas w magazynie (wykorzystać zapasy z innych magazynów czy dokonać zakupu poza systemem) (np. Tagaras, Cohen [151], Archibald, Sassen, Thomas [5]).

Poniżej przedstawiony jest krótki przegląd wybranych prac związanych z modelami typu „zaopatrzenie – zbyt”.

Hadley i Whitin [69] stosowali metodę czynników Lagrange’a do wyznaczenia takich wielkości dostaw towarów, które minimalizują jednostkowe koszty przechowywania zapasu oraz koszty realizacji zamówień. Zakładali możliwość równoczesnych dostaw wszystkich rodzajów towarów przy ograniczonej przestrzeni magazynowej.

Feng i Xiao [43] pokazali, że klasa strategii (s, S) jest optymalna dla systemów gromadzenia zapasów jednego produktu w jednym magazynie. Zaproponowali nowy, wydajniejszy algorytm znajdowania optymalnych parametrów s, S .

Hariga i Jackson [72] rozważali problem planowania dostaw zasobów do magazynu przy zadanym ograniczeniu posiadanej przestrzeni magazynowej. Kryterium optymalizacyjnym była minimalizacja jednostkowych kosztów pozyskiwania i przechowywania zapasu. Porównali efektywność i złożoność obliczeniową kilku algorytmów służących do wyznaczania optymalnych czasów realizacji dostaw przy zadanych częstościach ich wystąpienia.

Beyer, Sethi i Sridhar [13] badali modele z losowym popytem na wiele produktów i z ograniczeniami dotyczącymi przestrzeni magazynowej. Analizowali strukturę optymalnych strategii, gdy koszt realizacji zamówienia uzupełniającego zapasy jest liniowy, a koszt przechowywania zapasów jest wypukły. Uzyskane optymalne strategie są uogólnieniami „base-stock policy” dla przypadku pojedynczego produktu.

Teunter i Vlachos [155] analizowali model magazynowy z dyskretnym czasem i dwoma trybami realizacji zamówień uzupełniających zapasy. Zamówienia regularne składane są co pewien czas i charakteryzują się określonym czasem realizacji. Zamówienia szczególne (awaryjne) występują w przypadku groźby wyczerpania zapasów i charakteryzują się krótszym czasem realizacji, ale wyższym kosztem.

Moinzadeh [111] badał strategie zagospodarowania zapasów oraz odnawiania zasobów magazynowych w systemie, w którym w losowych momentach czasu występują promocyjne zniżki cenowe na towar oferowany przez dostawcę. Zakładał, że popyt na towar jest stały w czasie, czasy realizacji dostaw są nieistotne, a czas pomiędzy kolejnymi promocyjnymi ofertami ma rozkład wykładniczy. Zakładając ponadto, że cykl wyznaczony jest przez kolejne dwa promocyjne zamówienia oraz uwzględniając w funkcji celu koszty realizacji zamówień i koszty przechowywania zapasów, wyznaczył parametry optymalnej strategii.

Sherbrooke [141] wprowadził i analizował tzw. METRIC (*Multi – Echelon Technique for Recoverable Item Control*) model. Jak pierwszy wprowadził strategię uzupełniania zapasów typu $(S-1, S)$, zwaną potocznie „jeden za jeden”. Stosowana jest ona często, gdy towary są bardzo drogie, a popyt na nie jest relatywnie niski. Według tej strategii, posiadany zapas zasobów jest uzupełniany po każdorazowej jednostkowej sprzedaży.

Schneider, Rinks i Kelle [135] korzystali z metody dekompozycji do określenia wzajemnych relacji pomiędzy zastosowaną we wszystkich ośrodkach dystrybucyjnych strategią odnawiania zasobów (s, S), a niedoborem zasobów w centralnym ośrodku dystrybucyjnym. W analizowanym przez nich modelu uwzględniono również możliwość zwiększenia niezawodności funkcjonowania centralnej hurtowni.

Badinelli i Schwarz [7] analizowali wpływ strategicznych rezerw magazynowych gromadzonych w centralnym ośrodku zbytu na efektywność funkcjonowania całego systemu dystrybucyjnego. Wyniki ich badań wskazują, że dla pewnych szczególnych typów systemów dystrybucyjnych korzystniej jest zlokalizować strategiczne rezerwy zasobów w poszczególnych regionalnych ośrodkach zbytu niż w ośrodku centralnym.

Matta i Sinha [107] rozpatrywali dwupoziomowy system dystrybucyjny typu PULL, składający się z hurtowni oraz kilku sprzedawców detalicznych. Zakładali, że hurtownia uzupełnia swoje zapasy korzystając ze strategii (s, S), natomiast detaliści wykorzystywali strategię (R, S) (zamówienie składane jest po upływie czasu R , zapasy są uzupełniane do poziomu S). Pomijali koszty dystrybucji zasobów z hurtowni do detalistów. Przedstawili algorytm numeryczny, pozwalający wyznaczyć oszacowania optymalnych parametrów strategii uzupełniania zapasów.

Viswanathan i Mathur [160] analizowali model wielopoziomowego systemu dystrybucji z eszelonową strategią odnawiania zapasów. Model dotyczył wielu produktów. Opracowali procedury heurystyczne, które pozwalają rozwiązać problem ustalenia optymalnej trasy równoczesnych dostaw do kilku detalistów. Procedury otrzymano w dwóch wariantach: ograniczonej i nieograniczonej pojemności środków transportu.

Tagaras i Cohen [151] rozpatrywali model systemu złożonego z dwóch magazynów, między którymi możliwy jest transfer zasobów. Zakładali, że znany jest całkowity popyt oraz, że przesyłanie zasobów między magazynami jest dopuszczalne dopiero pod koniec każdego okresu funkcjonowania systemu.

Archibald, Sassen i Thomas [5] z kolei analizowali model systemu, w którym transfer zasobów między dwoma magazynami jest możliwy w dowolnym momencie. Zakładali ponadto, że niedobór zasobów w magazynie mógł być zaspokojony również przez zewnętrzne zamówienie. Otrzymali charakterystyki dla optymalnych (minimalizujących koszty) strategii systemu w wariantach z jednym lub wieloma produktami.

Cormier i Gunn [30] analizowali problem odpowiedniej koordynacji decyzji dotyczących uzupełniania zapasów. W modelu założyli możliwość zwiększenia ograniczonej pojemności magazynowej poprzez dzierżawę lub budowę nowego magazynu. Założyli ponadto deterministyczny popyt na magazynowane produkty. Za kryterium optymalizacyjne przyjęli koszty przechowywania i uzupełniania zapasów. Porównali skuteczność kilku strategii rozszerzania posiadanej przestrzeni magazynowej.

Daskin, Coullard i Shen [34] analizowali problem lokalizacji centralnego ośrodka dystrybucyjnego w systemie. Sformułowali model jako zadanie programowania nieliniowego całkowitoliczbowego oraz podali algorytm pozwalający znaleźć jego optymalne rozwiązanie. Przetestowali go dla przypadku 88 i 150 odbiorców detalicznych. Przeprowadzili analizę wrażliwości optymalnych rozwiązań na zmiany kluczowych parametrów modelu.

Demchenko, Knopov i Pepelyaev [35] analizowali procesy Markowa z dyskretnym czasem w celu optymalizacji pewnego systemu kontroli zapasów. Udowodnili optymalność strategii (s, S) w przypadku wypukłości funkcji kosztów.

Demchenko, Knopov i Chorney [36] poszukiwali optymalnych strategii w semi – Markowskich systemach magazynowych. Wskazali warunki istnienia optymalnej niezrandomizowanej Markowskiej strategii przy ogólnych założeniach dotyczących funkcjonowania systemu. Udowodnili, że przy pewnych dodatkowych założeniach dotyczących warunków składowania w magazynie, optymalna strategia ma dolne ograniczenie (s, S) .

Lian i Liu [100] rozważali modele magazynowe szybko psujących się artykułów z ciągłą kontrolą poziomu zapasu i z odnawialnymi grupowymi zamówieniami. Otrzymali zwięzłą formę funkcji średniego długookresowego kosztu dla strategii uzupełniania zapasów (s, S) . Stosowali analizę numeryczną do identyfikacji własności funkcji kosztu.

Gallego, Ryan i Simchi-Levi [53] rozpatrywali stochastyczne modele magazynowe o skończonym horyzoncie czasowym i skokowych dystrybuantach popytu, które są niezupełnie określone przez wybrane momenty, percentyle lub kombinacje momentów i percentyli. Celem było określenie strategii magazynowej, która minimalizuje maksimum oczekiwanego kosztu w klasie dystrybuant spełniających określone powyżej warunki. Pokazali, że szereg modeli magazynowych o tej formie może być rozwiązanych przez sekwencje programów liniowych.

Sethi, Yan i Zhang [139] analizowali system magazynowy z okresową kontrolą poziomu zapasu oraz z szybkim i wolnym trybem realizacji zamówień. W modelu, na początku każdego okresu czasu, uaktualniane są informacje dotyczące popytu oraz wielkości zapasów. W tym samym czasie podejmowane są decyzje o liczbie zamówień realizowanych szybko i wolno. Zamówienia szybkie realizowane są na końcu bieżącego okresu, zaś wolne – przyszłego okresu czasu. Wykazali, że istnieje optymalna strategia Markowa i że jest to zmodyfikowana strategia „*base – stock policy*”.

Gullu, Onol i Erkip [68] zajmowali się analizą pewnego systemu gromadzenia zasobów z „dyskretnym czasem”, w którym zaopatrzenie podlegało losowym awariom. W danym okresie czasu zaopatrzenie mogło funkcjonować normalnie lub być całkiem niedostępne z zadaniem prawdopodobieństwem, które jest zmienne w czasie. Założyli znany i zmienny w poszczególnych okresach czasu popyt. Zaproponowali algorytm wyznaczania optymalnych poziomów uzupełnień dla każdego okresu, minimalizujących koszty wynikające z niedoboru zasobów, ich pozyskiwania oraz przechowywania w magazynie.

Parlar, Wang i Gerchak [120] opracowali model, w którym dostępność zaopatrzenia jest modelowana procesem Markowa. W ich modelu zaopatrzenie w dowolnej chwili czasu funkcjonuje normalnie lub jest całkiem niedostępne. Wykazali optymalność strategii typu (s, S) , w której poziom zasobów „ s ” zależy od stanu zaopatrzenia w poprzednim okresie czasu.

Przeglądu współczesnych modeli systemów gromadzenia zasobów, uwzględniających losowe zakłócenia w procesie zaopatrzenia, dokonali Yano i Lee [167].

1.4. Problemy gromadzenia zasobów pieniężnych w organizacjach ubezpieczeń

Modele systemów typu „organizacje ubezpieczeń” charakteryzują się tym, że proces wejścia (podaż) jest deterministyczny (stałe składki ubezpieczeniowe klientów), natomiast proces wyjścia (popyt) jest losowy (losowe wypłaty świadczeń dla ubezpieczonych). Poziom zapasu zasobów pieniężnych zmienia się w sposób skokowy i może być kontrolowany okresowo lub ciągle. Losowa funkcja zapasu nazywana jest „rezerwą ryzyka” (*risk reserve*) i zależy od procesu wejścia (deterministyczne składki), wyjścia (proces losowy zwykle o rozkładzie Poissona) oraz od wkładu początkowego

firmy ubezpieczeniowej. Kiedy „rezerwa ryzyka” osiąga wartość ujemną, przedsiębiorstwo jest zrujnowane.

Badania nad teorią ryzyka w modelach ubezpieczeniowych zostały zapoczątkowane jeszcze w XIX w. (Barrois, Dormoy). Klasyczna teoria kolektywnego ryzyka została sformułowana w początkach XX wieku przez Lundberga [104, 105], a w ujęciu stochastycznym przez Cramera [31, 32]. Istotny wkład w jej późniejszy rozwój wniósł Seal [137], który podkreślił matematyczny i statystyczny aspekt tej teorii. Bühlmann [17] przedstawił metody matematyczne stosowane w analizie ryzyka ubezpieczeń, natomiast Seal w monografii [138] zawarł numeryczne wyniki dotyczące funkcjonowania przedsiębiorstwa przez określony czas.

W modelach typu „organizacje ubezpieczeń” rozpatrywane są między innymi następujące problemy:

- uzyskanie rozkładu zmiennej losowej (zależnej od wkładu początkowego) określającej najkrótszy czas, po którym firma zostanie zrujnowana (tzw. „problem ruiny”) (np. Lundberg [105], Cramer [31]),
- wyznaczenie takiej wielkości wkładu początkowego, która zapewni uniknięcie ruiny przedsiębiorstwa z zadaniem prawdopodobieństwem przez określony czas (np. Seal [138], Willmot [164]).

W przebogatej tematyce badawczej związanej z tą dziedziną rozważane jest także zagadnienie określenia optymalnych strategii inwestycyjnych dla firmy, w której istnieje niekontrolowany i losowy przepływ gotówki, lub występuje pewien losowy proces ryzyka. Na przykład Browne [16] wyznaczył taką strategię inwestycyjną, która minimalizuje prawdopodobieństwo ruiny, następnie zbadał zależność pomiędzy otrzymaną strategią a tzw. funkcją użyteczności firmy.

Klasyczny problem „kolektywnej ruiny” przedsiębiorstwa ubezpieczeniowego, dla którego proces „rezerwy ryzyka” jest zależny od czasu, badany był m.in. przez Knessla i Petersa [85, 86]. W rozważanym przez nich modelu uwzględniono zmianę w czasie wysokości składek ubezpieczeniowych, które są liniowo zależne od wielkości rezerwy. Dla przyjętego modelu otrzymano dokładne oraz asymptotyczne rozwiązania dla prawdopodobieństwa uniknięcia ruiny przez zadany okres czasu.

Badany jest również problem określenia równań różniczkowych cząstkowych pozwalających wyznaczyć prawdopodobieństwa ruiny. Pewną ogólną metodę postępowania zaproponował np. Moller [113]. W jego modelu proces warunkowych

prawdopodobieństw ruiny utożsamiono z pewnym martyngałem i uzyskano numerycznie rozwiązanie dla prawdopodobieństwa ruiny w skończonym przedziale czasu.

Interesującym nadal tematem badawczym jest znalezienie oszacowania dla prawdopodobieństwa ruiny w różnych modelach. Na przykład, oszacowaniem prawdopodobieństwa ruiny w zależności od ilości wypadków zajmował się Vázquez-Abad [159]. Zaproponował dwa podejścia do tego problemu: z wykorzystaniem regeneracyjnego procesu gromadzenia lub tzw. „procesu próbkowania”. Dla obu procesów otrzymał poszukiwane oszacowania oraz dokonał komputerowej symulacji wyników. Z kolei problem oszacowania prawdopodobieństwa ruiny w modelu, w którym wysokość składek ubezpieczeniowych zależy od aktualnej „rezerwy ryzyka” przedsiębiorstwa ubezpieczeniowego, badali Błaszczyszyn i Rolski [14]. Natomiast w pracy Furrera, Michny i Weron [45] zastosowano pewien samopodobny proces z dryfem, α – stabilny ruch Levy’ego, w celu oszacowania prawdopodobieństwa ruiny w skończonym horyzoncie czasowym.

Szereg aktualnych prac koncentruje się wokół nierówności Lundberga. Na przykład Schmidli [133] rozważał proces ryzyka określony w modelu Coxa i uzyskał nierówność Lundberga w przypadku niewielkich wypłat odszkodowań stosując rachunek martyngałów. Uogólnioną postać nierówności Lundberga uzyskał Willmot [164]. Otrzymane uogólnienie nie jest w postaci wykładniczej i może być pomocne szczególnie wtedy, gdy nierówności w postaci wykładniczej nie dają zadowalających rezultatów.

Obszerne przeglądu modeli aktuarialnych dokonano w pracy [118] pod redakcją Ostasiewicza. Autorzy wnikliwie opisali rozwój tej dziedziny wiedzy na przestrzeni wieków, akcentując najnowsze metody badań i uzyskane dzięki nim wyniki. W pracy znaleźć można m. in. modele ryzyka indywidualnego i kolektywnego, omówione zagadnienie ruiny z czasem ciągłym lub dyskretnym, zastosowania procesów punktowych i martyngałów w modelach dynamiki ryzyka, modele ryzyka z kapitalizacją, kredytami i inflacją. Przedstawione rezultaty uzupełnione są o bogaty spis literatury dotyczącej tej tematyki.

Podsumowania badań związanych z modelami typu „organizacje ubezpieczeń” znaleźć można również w pracach: Beard, Pentikainen, Pesonen [12], Seal [138], Grandell [67], Panjer, Willmot [119], Schmidt [134].

1.5. Gromadzenie zapasów a teoria masowej obsługi

Badania systemów masowej obsługi zostały zapoczątkowane przez Erlanga (np. [40]) na początku XX wieku. Jego prace dotyczyły zagadnień wzmożonego ruchu w centralach telefonicznych. W wyniku kontynuacji tych badań powstały kolejne prace, np. Moliny [112] i Fry'a [44]. Okres badań koncentrujących się na zagadnieniach matematycznych tej teorii zapoczątkowali Kołmogorow [87] i Chinczyn [25]. Po drugiej wojnie światowej nastąpił szybki rozwój tej teorii, szczególnie w dziedzinie zagadnień przemysłowych.

W modelach masowej obsługi rozważa się zagadnienie polegające na obsłudze klientów zgłaszającymi się w losowych chwilach czasu (czas pomiędzy kolejnymi zgłoszeniami jest losowy). Również czas obsługi zgłaszających się klientów jest losowy. Obsługa klientów przebiega według założonego schematu. Zwykle polega on na tym, że ten kto zgłasza się pierwszy, zostaje pierwszy obsłużony. Rozważa się także inne specyficzne schematy obsługi klientów. Bardzo ważne dla teorii masowej obsługi jest określenie czasu oczekiwania na obsługę przez określonego klienta. Czas ten możemy interpretować jako określony zasób. Zatem stosunkowo łatwo można przejść na grunt teorii gospodarowania zasobami. Funkcja określająca czas oczekiwania na obsługę określonego klienta to inaczej funkcja zapasu zasobów, losowy czas pomiędzy kolejnymi zgłoszeniami to proces wejścia, zaś losowy czas obsługi klientów to proces wyjścia. Modele masowej obsługi mogą być interpretowane jak „modele zbiorników” (z losowym wejściem i wyjściem oraz dyskretną funkcją zapasów) (zob. Prabhu [126]).

Nowoczesną teorię prawdopodobieństwa do systemów masowej obsługi wprowadził Kendall [81, 82], który w swoich pracach scharakteryzował również wszystkie dotychczasowe wyniki badań z tej tematyki. Wprowadził zapis charakteryzujący model masowej obsługi postaci $G/G/1$, oznaczający model z pojedynczym serwerem, w którym czasy pomiędzy kolejnymi zgłoszeniami klientów, jak i czasy ich obsługi, mają dowolny rozkład. W pracach dotyczących teorii masowej obsługi pojawiają się również inne modele oznaczane $M/M/1$, w których czasy pomiędzy kolejnymi zgłoszeniami klientów, jak i czasy ich obsługi, mają rozkłady posiadające własność Markowa (brak pamięci). Specjalnymi modelami mającymi duże znaczenie praktyczne są modele oznaczane $M/G/1$, w których czasy pomiędzy kolejnymi zgłoszeniami mają rozkład wykładniczy (proces zgłoszeń jest procesem Poissona) oraz $G/M/1$, w których czasy obsługi mają rozkład wykładniczy.

Rozważane są również inne schematy obsługi klientów, np. takie, w których klienci podzieleni są na dwie klasy: klienci mający priorytet (zawsze obsługiwani jako pierwsi) oraz klienci obsługiwani normalnie (zob. Cobham [27]). Wewnątrz tych klas przyjęta jest zasada: kto pierwszy przychodzi, ten pierwszy zostaje obsłużony. Taki priorytet obsługi klientów zwany jest priorytetem statycznym. Rozważane są również priorytety dynamiczne (zmieniające się w czasie) przyjmowania zgłoszeń klientów.

W modelach masowej obsługi istnieje ścisła zależność pomiędzy kolejką a pewnym błędzeniem losowym, którą badali Lindley [103], Smith [145] oraz Spitzer [148, 149]. Dzięki zastosowaniu odpowiednich technik faktoryzacji wyniki ich badań przyczyniły się w znacznym stopniu do uproszczenia wielu problemów z teorii kolejek. Wyczerpującą analizę systemów masowej obsługi można znaleźć w pracach: Cohen [28], Gnedenko, Kovalenko [66], Kleinrock [83], Takács [152].

1.6. Tematyka badań nad systemami gospodarki zasobami z ciągłymi układami transportowymi

Od wczesnych lat sześćdziesiątych ubiegłego wieku w ośrodku wrocławskim prowadzone są badania dotyczące pewnych systemów gospodarowania zasobami występujących w górnictwie odkrywkowym węgla brunatnego. W systemach tych nadawca zasobu (kopalnia) przy pomocy ciągłego układu transportowego (układ taśmociągów) przesyła zasób (węgiel brunatny) do jego odbiorcy (elektrownia). Systemy te zwane są systemami KTZ (Kopalnia – Taśmociąg – Zwałowisko). Ponieważ odbiorca wymaga ciągłych dostaw zasobów w wymaganych ilościach, zaś proces ich dostarczania podlega pewnym losowym zakłóceniom, dlatego układ transportowy współpracuje z magazynem – zbiornikiem, w którym gromadzone są rezerwowe zapasy. Głównym celem prowadzonych badań jest analiza procesu awarii układów taśmociągów, wydajności systemu oraz wpływu magazynów na efektywność pracy systemu w różnych jego konfiguracjach.

Badania te zostały zapoczątkowane przez Gładysza (np. [63, 64, 65]), który zajmował się modelowaniem systemu, analizował proces awarii układu transportowego i wpływ rozdzielni (rozgałęzień) na funkcjonowanie systemu. Modelowaniem działania układu przenośników taśmowych zajmował się również Battek [11]. Ponadto, Battek, Dyrka, Janczewski i Rychlikowski [9, 10] opracowali model matematyczny funkcjonowania układu KTZ oraz doskonalili metody sterowania systemem. Król [95]

zajmował się analizą stochastyczną pewnych systemów tego typu. Galanc i Król [49] badali, jaki jest wpływ instalacji zbiorników na wydajność układu KTZ. Synteza wyników wczesnych prac naukowo – badawczych nad tego typu systemami została zawarta w opracowaniu zespołowym [8]. Prace prowadzone przez ww. matematyków we współpracy z Instytutem Górnictwa i Poltegiem stanowiły bardzo udaną próbę zastosowania procesów Markowa i teorii ergodycznej, która przyniosła wymierne korzyści ekonomiczne kombinatowi energetycznemu w Turossowie (zob. Byczkowski i in. [23]).

Na przełomie lat siedemdziesiątych i osiemdziesiątych XX wieku Galanc, Kazienko i Mikuś [48] zajmowali się między innymi zagadnieniem prognozowania procesu wydobywania w kopalniach odkrywkowych. Aspekt prognostyczny w rozpatrywanych systemach cybernetycznych typu „transport – zapasy” został zaprezentowany przez Galanca w monografii [51].

Obecnie, w dobie gospodarki rynkowej, prace badawcze nad wyżej wspomnianymi systemami gospodarki zasobami kontynuowane są w ośrodkach wrocławskim i rzeszowskim. W pracach: Galanc [46], Galanc, Jaśniewicz, S. Ostasiewicz [47] oraz Galanc, W. Ostasiewicz, Pisz [50] badano zagadnienie wąskiego gardła pewnego systemu produkcyjno – zaopatrzeniowego. Analizowany system składa się z podsystemu produkcji, podsystemu transportowego, magazynu – zbiornika i odbiorcy. Podano sposób obliczania prawdopodobieństwa wystąpienia wąskiego gardła systemu oraz innych charakterystyk przekątnika. Wielkości te uzależniono od parametrów systemu. Pozwala to z jednej strony projektować optymalnie funkcjonujące systemy, a z drugiej – ułatwia sterowanie systemami już istniejącymi.

Król [96] wprowadził szereg wskaźników przydatnych do oceny wpływu niekorzystnych zjawisk na efektywne funkcjonowanie pewnych systemów typu „transport – zapasy”. W pracy [97] dokonał oceny efektywnego wykorzystania magazynu w systemie. Jako wskaźnik stopnia wykorzystania przyjął prawdopodobieństwo, z jakim poziom zgromadzonych zapasów oscyluje pomiędzy dolną i górną granicą pojemności magazynu. Przeprowadził analizę liczbową wyżej wspomnianego wskaźnika w zależności od parametrów charakteryzujących funkcjonowanie systemu.

Pewien uproszczony model stacjonarnego systemu typu „transport – zapasy” o szerokich możliwościach zastosowań był analizowany przez Króla i Pisulę. W systemie tym zakładano, że część ciągłego układu transportowego łącząca magazyn – zbiornik z odbiorcą zasobu jest bezawaryjna. W pracach Króla i Pisuli [98] oraz Pisuli [123, 124,

125] przedstawiono wpływ podstawowych parametrów charakteryzujących system na wielkość ponoszonych przez niego strat. Przyjęta funkcja celu, określająca całkowite i wypadkowe straty systemu, uwzględnia koszty związane z przechowywaniem zapasu oraz ich awaryjnym pozyskiwaniem spoza systemu. W rozprawie doktorskiej Pisula [122] dokonał oceny efektywności funkcjonowania wyżej wspomnianego systemu w różnych jego wariantach, określił najbardziej korzystne, w aspekcie ekonomicznym, pojemności magazynu oraz przedstawił wpływ różnorodnych parametrów na czasowy przebieg sumarycznych strat.

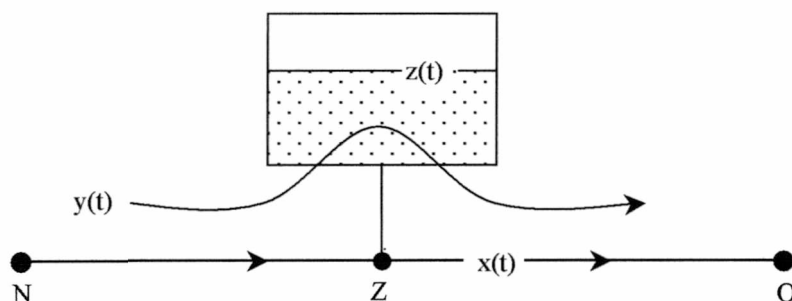
Badania dotyczące oceny funkcjonowania innego systemu typu „transport – zapasy” prowadzone były przez Króla i Autora niniejszej pracy. W systemie tym, zarówno część układu transportowego łącząca nadawcę zasobu z magazynem, jak i część łącząca magazyn z odbiorcą zasobu, są awaryjne. Prace Króla i Liany [90, 91, 93] dotyczyły określenia wpływu parametrów technologicznych i niezawodnościowych systemu na wielkość strat spowodowanych wystąpieniem niekorzystnych zjawisk podczas jego pracy, takich jak nadmiar lub niedobór zasobu w zbiorniku. Król i Liana [92] dokonali również oceny stopnia wykorzystania magazynu-zbiornika w tym systemie. Przedmiotem ich badań były też systemy gospodarki zasobami z rozbudowanymi, szeregowo złożonymi, ciągłymi układami transportowymi oraz z pośrednim zbiornikiem. Z analizą efektywności funkcjonowania tych systemów związane są prace: Król, Liana [94] oraz Liana [101]. Głównym celem tych badań było wskazanie optymalnego miejsca lokalizacji i pojemności magazynu-zbiornika. W badaniach systemów z rozbudowanymi, szeregowo złożonymi, układami transportowymi wykorzystano możliwość uproszczenia modelu poprzez redukcję liczby jego parametrów. Zastosowane wzory redukcyjne zostały przedstawione w artykule Liany [102]. Niniejsza rozprawa gromadzi i uzupełnia wyniki zaprezentowane w wyżej wymienionych pracach.

ROZDZIAŁ 2

OPIS I ANALIZA CYBERNETYCZNO-EKONOMICZNEGO SYSTEMU TYPU „TRANSPORT – ZAPASY”

2.1. Matematyczny model funkcjonowania systemu „bazowego”

Rozważany jest system, w którym układ transportowy łączący nadawcę zasobu N z odbiorcą O podzielony jest na dwie części przez magazyn – zbiornik Z o skończonej pojemności V ($0 < V < \infty$) (por. rys. 2.1). Zakłada się, że obie części układu transportowego mogą wzajemnie niezależnie ulegać losowym awariom. Celem zbiornika jest podtrzymanie pracy jednej z tych części w przypadku awarii drugiej. Pozwala to zmniejszyć wymuszone awariami układu transportowego przestoje w pracy nadawcy oraz odbiorcy. Część układu transportowego łącząca nadawcę ze zbiornikiem jest nazywana „wejściową” (lub doprowadzającą), z kolei łącząca zbiornik z odbiorcą – „wyjściową” (lub odprowadzającą).



Rys. 2.1. Schemat rozpatrywanego systemu transportowo – magazynowego.

Funkcjonowanie układu transportowego jest scharakteryzowane procesem stochastycznym $\{x(t), t \geq 0\}$, o którym zakłada się, że jest procesem stacjonarnym i jednorodnym (zob. np. Gichman, Skorochod [61]). Przestrzeń fazowa X procesu $\{x(t), t \geq 0\}$ jest czterostanowa (por. rys. 2.2). Przyjmuje się następującą interpretację poszczególnych stanów:

- $1 = x_{00}$ – obydwie części układu transportowego pracują,
- $2 = x_{10}$ – część wejściowa jest w stanie awarii, natomiast wyjściowa w stanie pracy,

- 3 = x_{01} – część wejściowa jest w stanie pracy, natomiast wyjściowa w stanie awarii,
 4 = x_{11} – obie części są w stanie awarii.

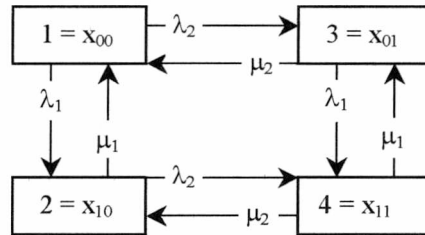
Prawdopodobieństwa przejścia procesu $\{x(t), t \geq 0\}$ pomiędzy stanami określone są następująco:

$$\begin{aligned} P(x(t + \Delta t) = 2 | x(t) = 1) &= P(x(t + \Delta t) = 4 | x(t) = 3) = \lambda_1 \cdot \Delta t + o(\Delta t), \\ P(x(t + \Delta t) = 3 | x(t) = 1) &= P(x(t + \Delta t) = 4 | x(t) = 2) = \lambda_2 \cdot \Delta t + o(\Delta t), \\ P(x(t + \Delta t) = 1 | x(t) = 2) &= P(x(t + \Delta t) = 3 | x(t) = 4) = \mu_1 \cdot \Delta t + o(\Delta t), \\ P(x(t + \Delta t) = 1 | x(t) = 3) &= P(x(t + \Delta t) = 2 | x(t) = 4) = \mu_2 \cdot \Delta t + o(\Delta t), \end{aligned} \quad (2.1)$$

gdzie:

- λ_1 – intensywność prawdopodobieństwa przejścia części wejściowej z pracy do awarii,
 λ_2 – intensywność prawdopodobieństwa przejścia części wyjściowej z pracy do awarii,
 μ_1 – intensywność prawdopodobieństwa przejścia części wejściowej z awarii do pracy,
 μ_2 – intensywność prawdopodobieństwa przejścia części wyjściowej z awarii do pracy,

oraz $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$, $\lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$.

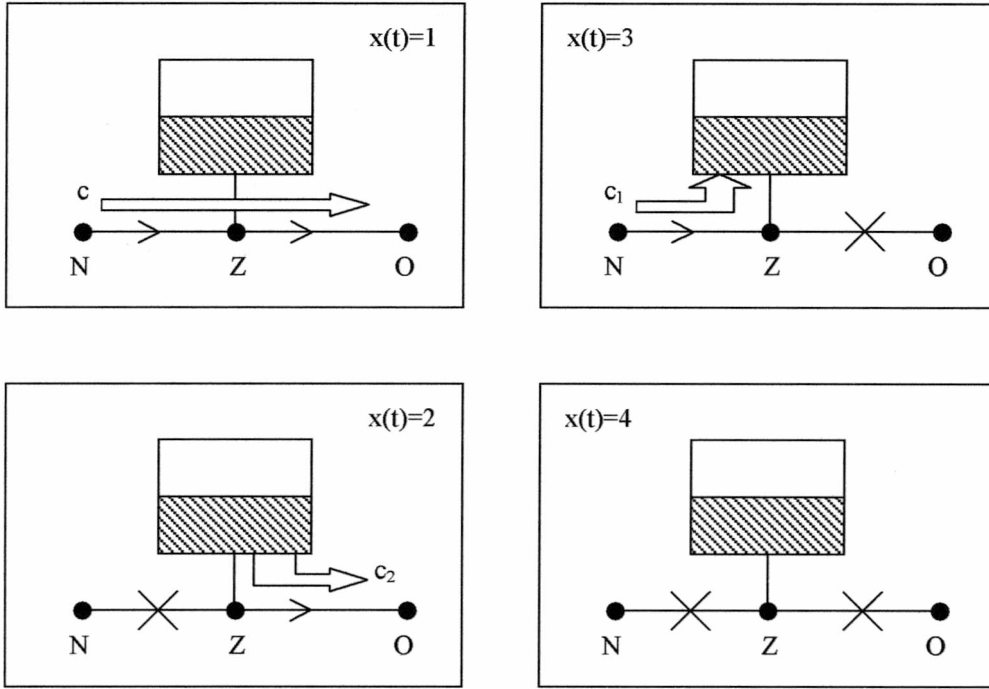


Rys. 2.2. Schemat przejść pomiędzy poszczególnymi stanami procesu $x(t)$.

Reżim zapełniania zasobem układu transportowego przez nadawcę charakteryzuje proces stochastyczny $\{y(t), t \geq 0\}$ z przestrzenią fazową Y . Zakłada się, że jest on jednorodny i niezależny od procesu $\{x(t), t \geq 0\}$. W pracy przyjmuje się, że nadawca załadowuje układ transportowy ze stałą (średnią) prędkością c ($c > 0$), czyli że proces $\{y(t), t \geq 0\}$ jest jednostanowy ($Y = \{c\}$).

Transport zasobu w systemie odbywa się według następującego schematu (por. rys. 2.3). Jeżeli sprawne są obie części układu transportowego ($x(t) = 1$), wtedy zasób ze stałą (średnią) prędkością c przekazywany jest bezpośrednio od nadawcy do odbiorcy i poziom zapasu w zbiorniku nie ulega zmianie. Jeżeli sprawna jest tylko część wyjściowa

układu transportowego ($x(t)=2$), odbiorca zaopatrywany jest w zasób ze zbiornika ze średnią „awaryjną” prędkością c_2 ($0 < c_2 \leq c$). Jeżeli sprawna jest tylko część wejściowa układu transportowego ($x(t)=3$), nadawca przesyła zasób do zbiornika ze średnią „awaryjną” prędkością c_1 ($0 < c_1 \leq c$). Natomiast, jeżeli obie części układu transportowego są niesprawne, nie jest możliwy jakikolwiek transport zasobu w systemie.



Rys. 2.3. Schemat przedstawiający transport zasobu w systemie przy różnych stanach procesu $x(t)$.

Tak określony reżim zapewniania – opróżniania zbiornika opisuje funkcja $f: X \times Y \rightarrow R$ określona na iloczynie kartezjańskim przestrzeni fazowych procesów $\{x(t), t \geq 0\}$ i $\{y(t), t \geq 0\}$ następująco:

$$f(1, c) = f(4, c) = 0, \quad (2.2)$$

$$f(2, c) = -c_2, \quad 0 < c_2 \leq c,$$

$$f(3, c) = c_1, \quad 0 < c_1 \leq c.$$

Poziom zapasu w magazynie charakteryzuje proces $\{z(t), t \geq 0\}$. W dowolnej chwili t ($t \geq 0$) przy dostatecznie małym Δt ($\Delta t > 0$) poziom ten określa zależność:

$$z(t + \Delta t) = \max\{0, \min\{V, z(t) + f(x(t), y(t)) \cdot \Delta t\}\} \quad (2.3)$$

Funkcjonowanie rozpatrywanego systemu transportowo – magazynowego w całości opisuje zatem wektorowy proces stochastyczny $\{x(t), y(t), z(t); t \geq 0\}$, którego

własności omówione są w pracach Battek i in. [8], Galanc, Kazienko, Mikuś [48], Król [95]. Założenie o stacjonarności procesu $\{x(t), y(t), z(t)\}; t \geq 0\}$ pozwala uzyskać dla funkcji $g_j(z)$ rozkładu prawdopodobieństwa poziomu zapełnienia magazynu poniższy układ równań różniczkowych (zob. Król, Startek [99]):

$$\begin{cases} -(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot g_1(z) + \mu_1 \cdot g_2(z) + \mu_2 \cdot g_3(z) = 0, \\ \lambda_1 \cdot g_1(z) - (\lambda_2 + \mu_1) \cdot g_2(z) + \mu_2 \cdot g_4(z) = -c_2 \cdot \frac{dg_2}{dz}, \\ \lambda_2 \cdot g_1(z) - (\lambda_1 + \mu_2) \cdot g_3(z) + \mu_1 \cdot g_4(z) = c_1 \cdot \frac{dg_3}{dz}, \\ \lambda_2 \cdot g_2(z) + \lambda_1 \cdot g_3(z) - (\mu_1 + \mu_2) \cdot g_4(z) = 0, \end{cases} \quad (2.4)$$

$$\begin{cases} (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot Q_1(V) = \mu_2 \cdot Q_3(V), \\ Q_2(V) = 0, \\ (\lambda_1 + \mu_2) \cdot Q_3(V) = \lambda_2 \cdot Q_1(V) + \mu_1 \cdot Q_4(V) + c_1 \cdot g_3(V), \\ (\mu_1 + \mu_2) \cdot Q_4(V) = \lambda_1 \cdot Q_3(V), \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot Q_1(0) = \mu_1 \cdot Q_2(0), \\ (\lambda_2 + \mu_1) \cdot Q_2(0) = \lambda_1 \cdot Q_1(0) + \mu_2 \cdot Q_4(0) + c_2 \cdot g_2(0), \\ Q_3(0) = 0, \\ (\mu_1 + \mu_2) \cdot Q_4(0) = \lambda_2 \cdot Q_2(0), \end{cases}$$

gdzie:

$$P(x(t) = j, y(t) = c, z_1 < z(t) < z_2) = \int_{z_1}^{z_2} g_j(z) dz, \quad 0 \leq z_1 < z_2 \leq V,$$

$$Q_j(V) = P(x(t) = j, y(t) = c, z(t) = V),$$

$$Q_j(0) = P(x(t) = j, y(t) = c, z(t) = 0),$$

$$g_j(V) = \lim_{z \rightarrow V^-} g_j(z), \quad g_j(0) = \lim_{z \rightarrow 0^+} g_j(z),$$

$$j \in X, \quad t \geq 0, \quad 0 < z < V.$$

Układ równań (2.4) posiada dwa rozwiązania (zob. Król [95]), w zależności od wartości parametru k , zwanego parametrem charakterystycznym systemu. Parametr k przedstawiony jest następującą zależnością:

$$k = \frac{v_z}{v_w}, \quad (2.5)$$

gdzie:

v_z – faktyczna prędkość zapełniania magazynu–zbiornika,

v_w – faktyczna prędkość wybierania z magazynu–zbiornika.

Prędkości te z kolei określone są poniższymi związkami:

$$v_z = P(x(t)=3) \cdot c_1 = \frac{\mu_1}{\mu_1 + \lambda_1} \cdot \frac{\lambda_2}{\mu_2 + \lambda_2} \cdot c_1, \quad (2.6)$$

$$v_w = P(x(t)=2) \cdot c_2 = \frac{\lambda_1}{\mu_1 + \lambda_1} \cdot \frac{\mu_2}{\mu_2 + \lambda_2} \cdot c_2.$$

Faktyczna prędkość zapewniania informuje, ile średnio jednostek zasobu jest w jednostce czasu dostarczanych do magazynu – zbiornika, natomiast faktyczna prędkość wybierania – ile jest z niego wybieranych. Jeżeli parametr charakterystyczny $k = 1$, to średnio w każdej jednostce czasu tyle samo jednostek zasobu jest do magazynu dostarczanych, co z niego wybieranych. Ten wariant funkcjonowania systemu nazywa się wariantem regularnym. Wariant, dla którego $k \neq 1$, nazywa się wariantem nieregularnym.

Zależności (2.7) są rozwiązaniami układu równań (2.4) w wariacie regularnym (dla $k = 1$).

$$\begin{cases} g_1(z) = \frac{\mu_2}{\lambda_2} \cdot g_3(z) \\ g_2(z) = \frac{\lambda_1}{\mu_1} \cdot \frac{\mu_2}{\lambda_2} \cdot g_3(z) \\ g_3(z) = \frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \mu_1 \cdot \mu_2}{(\lambda_1 + \mu_1) \cdot (\lambda_2 + \mu_2)} \cdot \frac{\lambda + \mu}{c_1 \cdot \lambda \cdot \mu + \lambda_1 \cdot \mu_2 \cdot (\lambda + \mu) \cdot V} \\ g_4(z) = \frac{\lambda_1}{\mu_1} \cdot g_3(z) \end{cases} \quad (2.7)$$

$$\begin{cases} Q_1(V) = \frac{c_1}{\lambda_1} \cdot \frac{\mu}{\lambda + \mu} \cdot g_3(V) \\ Q_2(V) = 0 \\ Q_3(V) = \frac{c_1}{\lambda_1 \cdot \mu_2} \cdot \frac{\lambda \cdot \mu}{\lambda + \mu} \cdot g_3(V) \\ Q_4(V) = \frac{c_1}{\mu_2} \cdot \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \cdot g_3(V) \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q_1(0) = \frac{c_1}{\lambda_2} \cdot \frac{\mu}{\lambda + \mu} \cdot g_3(0) \\ Q_2(0) = \frac{c_1}{\lambda_2 \cdot \mu_1} \cdot \frac{\lambda \cdot \mu}{\lambda + \mu} \cdot g_3(0) \\ Q_3(0) = 0 \\ Q_4(0) = \frac{c_1}{\mu_1} \cdot \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \cdot g_3(0) \end{cases}$$

Natomiast zależności (2.8) są rozwiązaniami układu równań (2.4) w wariancie nieregularnym (dla $k \neq 1$).

$$\begin{cases} g_1(z) = \frac{\mu_1 \cdot c_1 + \mu_2 \cdot c_2}{c_2 \cdot \lambda} \cdot g_3(z) \\ g_2(z) = \frac{c_1}{c_2} \cdot g_3(z) \\ g_3(z) = \frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \mu_1 \cdot \mu_2}{(\lambda_1 + \mu_1) \cdot (\lambda_2 + \mu_2)} \cdot \frac{\lambda + \mu}{\lambda \cdot \mu} \cdot \frac{1}{c_1} \cdot \left(\frac{\lambda_2 \cdot \mu_1}{\lambda_1 \cdot \mu_2} - \frac{c_2}{c_1} \right) e^{xz} \\ g_4(z) = \frac{\lambda_2 \cdot c_1 + \lambda_1 \cdot c_2}{c_2 \cdot \mu} \cdot g_3(z) \end{cases} \quad (2.8)$$

$$\begin{cases} Q_1(V) = \frac{\mu_2}{\lambda} \cdot Q_3(V) \\ Q_2(V) = 0 \\ Q_3(V) = \frac{\lambda_2 \cdot \mu_1}{(\lambda_1 + \mu_1) \cdot (\lambda_2 + \mu_2)} \cdot \left(\frac{\lambda_2 \cdot \mu_1}{\lambda_1 \cdot \mu_2} - \frac{c_2}{c_1} \right) \cdot e^{xV} \\ Q_4(V) = \frac{\lambda_1}{\mu} \cdot Q_3(V) \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q_1(0) = \frac{\mu_1}{\lambda} \cdot Q_2(0) \\ Q_2(0) = \frac{\lambda_1 \cdot \mu_2}{(\lambda_1 + \mu_1) \cdot (\lambda_2 + \mu_2)} \cdot \frac{\frac{\lambda_2 \cdot \mu_1}{\lambda_1 \cdot \mu_2} - \frac{c_2}{c_1}}{\frac{\lambda_2 \cdot \mu_1}{\lambda_1 \cdot \mu_2} e^{xV} - \frac{c_2}{c_1}} \\ Q_3(0) = 0 \\ Q_4(0) = \frac{\lambda_2}{\mu} \cdot Q_2(0) \end{cases}$$

gdzie: $0 \leq z \leq V$, $x = \frac{\lambda + \mu}{\lambda \cdot \mu} \cdot \frac{\lambda_1 \cdot \mu_2}{c_1} \cdot (k-1)$, $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$, $\mu = \mu_1 + \mu_2$.

Całkując $g_j(z)$, $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, otrzymuje się prawdopodobieństwa

$$Q_j(z_1, z_2) = P(x(t) = j, y(t) = c, z_1 < z(t) < z_2) = \int_{z_1}^{z_2} g_j(z) dz, \text{ dla } 0 \leq z_1 < z_2 \leq V.$$

Pozwalają one wyznaczyć szereg wskaźników przydatnych do ilościowej oceny funkcjonowania systemu (zob. Król [96, 97], Król, Liana [90, 91, 92]). W dalszej części pracy wykorzystywane są następujące wskaźniki:

- wskaźnik deficytu w magazynie P_d ,
- wskaźnik przepełnienia magazynu P_p ,
- wskaźnik strat spowodowanych deficytem i przepełnieniem E_{dp} ,
- wskaźnik wydajności systemu W .

W kolejnych podrozdziałach przedstawiony jest wpływ parametrów opisanego systemu, zwanego w tej pracy „bazowym”, na wartości tych wskaźników.

2.2. Wpływ parametrów systemu na prawdopodobieństwo deficytu w zbiorniku

Przez deficyt w magazynie określa się sytuację, gdy proces $\{x(t), t \geq 0\}$ znajduje się w stanie 2 (część wejściowa układu transportowego nie pracuje, część wyjściowa pracuje), jednakże odbiorca nie otrzymuje zasobu, ponieważ magazyn jest pusty (por. Król [96], Król, Liana [91]). Sytuacja taka jest niekorzystna dla rozważanego systemu typu „transport – zapasy”, gdyż zmusza odbiorcę do przestoju lub czerpania zasobu z innego źródła, co z kolei generuje dodatkowe koszty.

Prawdopodobieństwo wystąpienia tego zdarzenia przyjmuje się za wskaźnik deficytu w magazynie P_d , czyli $P_d = Q_2(0) = P(x(t) = 2, y(t) = c, z(t) = 0)$. Wykorzystując rozwiązania (2.7) układu równań (2.4), uzyskuje się postać analityczną wskaźnika:

$$P_d = \begin{cases} P_2 \cdot \frac{k-1}{ke^{xV} - 1}, & \text{dla } k \neq 1, \\ P_2 \cdot \frac{1}{1 + \lambda_1 \mu_2 \frac{\lambda + \mu}{\lambda \mu} \frac{V}{c_1}}, & \text{dla } k = 1, \end{cases} \quad (2.9)$$

gdzie:

$$P_2 = P(x(t) = 2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \mu_1} \cdot \frac{\mu_2}{\lambda_2 + \mu_2},$$

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2, \quad \mu = \mu_1 + \mu_2,$$

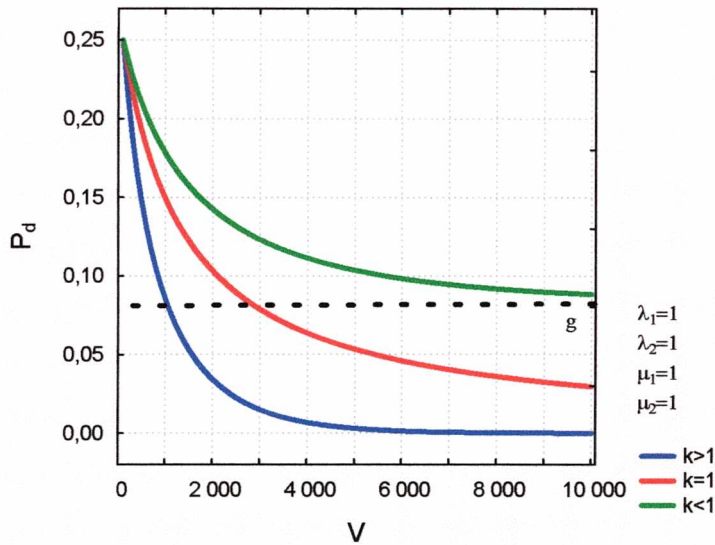
$$x = \frac{\lambda + \mu}{\lambda \mu} \cdot \frac{\lambda_1 \mu_2}{c_1} (k - 1), \quad k = \frac{\mu_1 \lambda_2 c_1}{\lambda_1 \mu_2 c_2}.$$

Średnia wielkość strat spowodowanych deficytem w magazynie (E_d) określona jest równością:

$$E_d = P_d \cdot c_2. \quad (2.10)$$

Zarówno P_d , jak i E_d uzależnione są od parametrów niezawodnościowych układu transportowego ($\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$) oraz parametrów technologicznych systemu (c_1, c_2, V). Badając wpływ poszczególnych parametrów na wskaźnik P_d , przy ustalonych wartościach pozostałych parametrów, otrzymano poniższe wnioski.

Wniosek 2.1. Zwiększanie pojemności magazynu zawsze zmniejsza straty spowodowane deficytem, ponieważ wskaźnik P_d jest funkcją malejącą zmiennej V ($\frac{d}{dV} P_d < 0$). Wykres funkcji $P_d(V)$ jest krzywą wypukłą ($\frac{d^2}{dV^2} P_d > 0$), więc wraz ze wzrostem pojemności magazynu spadek strat spowodowanych deficytem jest coraz wolniejszy (por. rys.2.4).



Rys. 2.4. Zależność wskaźnika P_d od parametru V .

Wniosek 2.2. Przy dowolnym V ($V > 0$) prawdopodobieństwo deficytu jest mniejsze niż prawdopodobieństwo awarii części wejściowej i jednocześnie pracy części wyjściowej układu transportowego. Wynika to wprost z wniosku 2.1 i granicy $\lim_{V \rightarrow 0^+} P_d = P_2$.

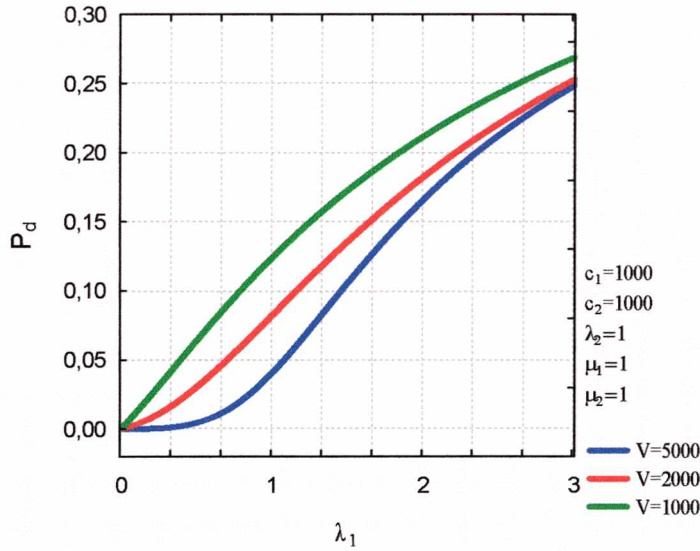
Wniosek 2.3. Gdy faktyczna prędkość zapełniania magazynu v_z jest nie mniejsza od faktycznej prędkości wybierania v_w ($k \geq 1$), to poprzez zwiększanie pojemności magazynu można wartość wskaźnika P_d sprowadzić dowolnie blisko 0, czyli straty systemu spowodowane deficytem uczynić nieistotnymi (por. rys. 2.4). W przeciwnym przypadku, zwiększając jedynie pojemność magazynu, nie można obniżyć prawdopodobieństwa deficytu poniżej wartości $g = P_2 \cdot (1 - k)$, ponieważ

$$\lim_{V \rightarrow +\infty} P_d = \begin{cases} 0, & \text{dla } k \geq 1, \\ P_2 \cdot (1 - k), & \text{dla } k < 1. \end{cases}$$

Wniosek 2.4. Minimalna pojemność zbiornika $V_{\min}$, która przy ustalonych pozostałych parametrach gwarantuje zadaną wartość wskaźnika P_d , określona jest zależnością:

$$V_{\min} = \begin{cases} \frac{c_1}{\lambda_1 \mu_2} \cdot \frac{\lambda \mu}{\lambda + \mu} \cdot \frac{P_2 - P_d}{P_d}, & \text{dla } k = 1, \\ \frac{1}{x} \ln \frac{P_d - P_2(1 - k)}{k P_d}, & \text{dla } k \neq 1, \end{cases}$$

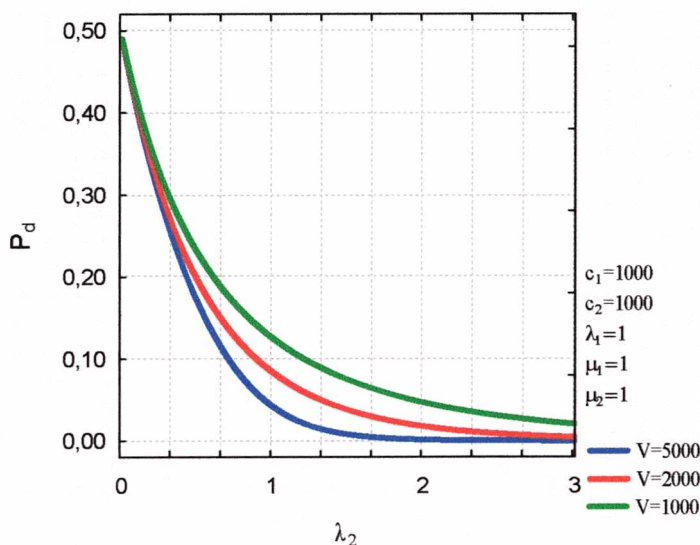
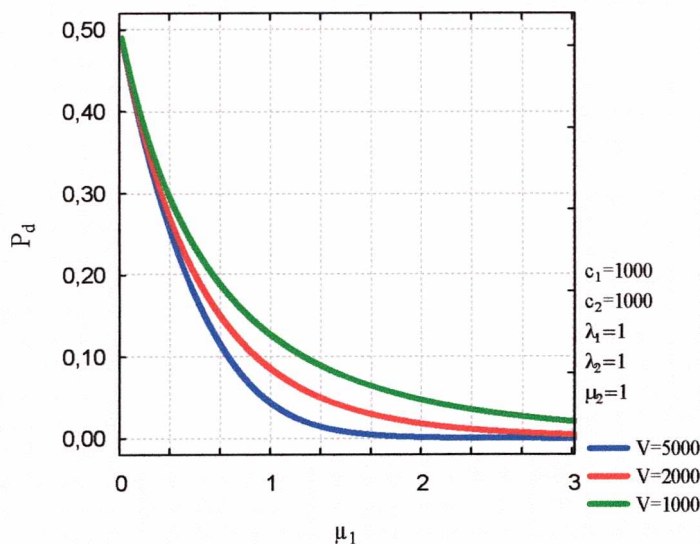
gdzie $\max\{0, P_2(1 - k)\} < P_d \leq P_2$.



Rys. 2.5. Zależność wskaźnika P_d od parametru λ_1 .

Wniosek 2.5. Gdy wzrasta intensywność powstawania awarii w części wejściowej układu transportowego (λ_1), to rośnie (od 0) prawdopodobieństwo wystąpienia deficytu (por. rys. 2.5). Wartość P_d nigdy jednak nie przekroczy prawdopodobieństwa pracy części wyjściowej układu transportowego, bowiem $\lim_{\lambda_1 \rightarrow +\infty} P_d = \frac{\mu_2}{\lambda_2 + \mu_2}$ oraz $\lim_{\lambda_1 \rightarrow 0^+} P_d = 0$.

Wniosek 2.6. Gdy wzrasta intensywność powstawania awarii w części wyjściowej układu transportowego (λ_2), to prawdopodobieństwo wystąpienia deficytu maleje do 0 ($\lim_{\lambda_2 \rightarrow +\infty} P_d = 0$) (por. rys. 2.6). Gdyby część wyjściowa układu transportowego była prawie bezawaryjna ($\lambda_2 \approx 0$), to prawdopodobieństwo deficytu byłoby nieomal równe prawdopodobieństwu awarii części wejściowej układu transportowego, ponieważ $\lim_{\lambda_2 \rightarrow 0^+} P_d = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \mu_1}$.

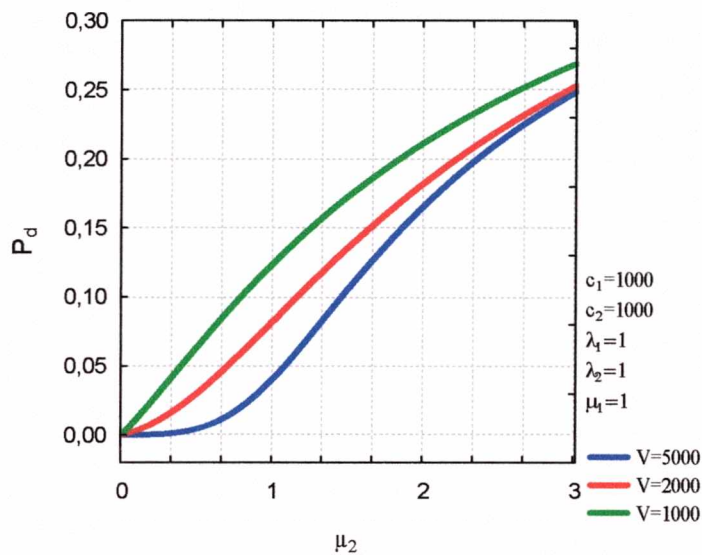
Rys. 2.6. Zależność wskaźnika P_d od parametru λ_2 .Rys. 2.7. Zależność wskaźnika P_d od parametru μ_1 .

Wniosek 2.7. Gdy wzrasta intensywność likwidowania awarii w części wejściowej (μ_1), to prawdopodobieństwo deficytu maleje do 0 ($\lim_{\mu_1 \rightarrow +\infty} P_d = 0$) (por. rys. 2.7). Ponadto, P_d nigdy

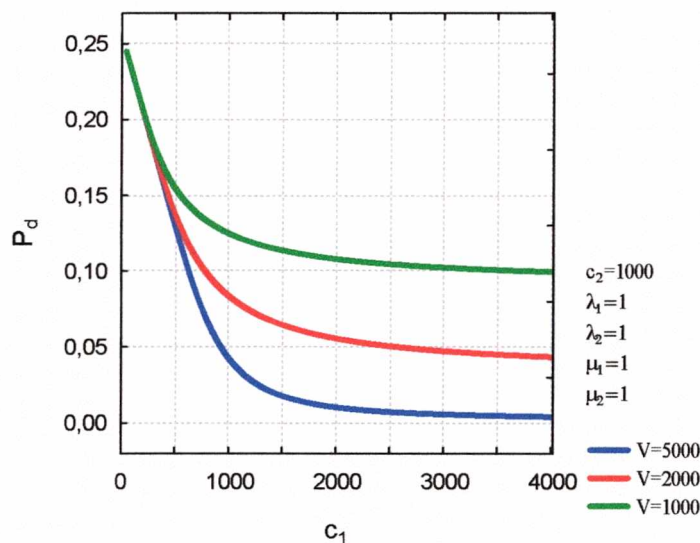
nie będzie większe od prawdopodobieństwa pracy części wyjściowej układu transportowego. Mamy bowiem $\lim_{\mu_1 \rightarrow 0^+} P_d = \frac{\mu_2}{\lambda_2 + \mu_2}$.

Wniosek 2.8. Gdy wzrasta intensywność likwidowania awarii w części wyjściowej układu transportowego (μ_2), to rośnie prawdopodobieństwo deficytu (por. rys. 2.8), nie przekraczając jednak nigdy prawdopodobieństwa awarii części wejściowej. Mamy bowiem

$$\lim_{\mu_2 \rightarrow 0^+} P_d = 0 \text{ oraz } \lim_{\mu_2 \rightarrow +\infty} P_d = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \mu_1}.$$



Rys. 2.8. Zależność wskaźnika P_d od parametru μ_2 .



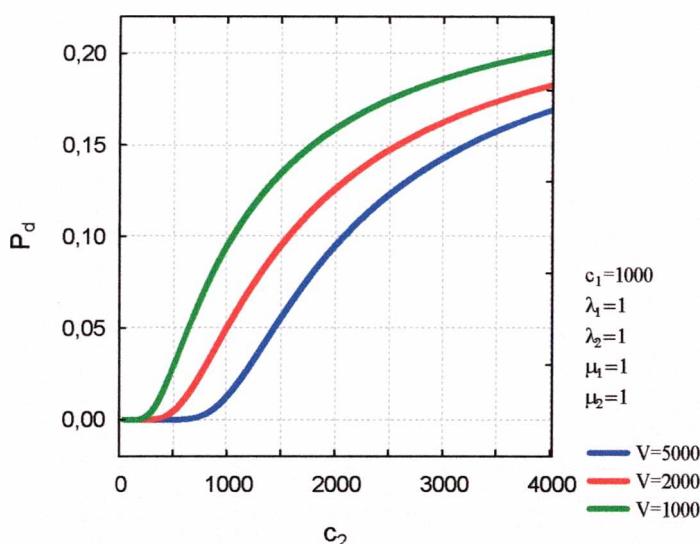
Rys. 2.9. Zależność wskaźnika P_d od parametru c_1 .

Wniosek 2.9. Gdy wzrasta prędkość zapełniania magazynu (c_1), to prawdopodobieństwo deficytu maleje zbiegając asymptotycznie do wartości $P_2 \cdot e^{d_1 V}$ (por. rys. 2.9), ponieważ

$$\lim_{c_1 \rightarrow +\infty} P_d = P_2 \cdot e^{d_1 V}, \text{ gdzie } d_1 = -\frac{\lambda + \mu}{\lambda \mu} \cdot \frac{\mu_1 \lambda_2}{c_2}. \text{ Gdy prędkość zapełniania jest}$$

równa 0 (czyli nie występuje ładowanie zasobu do magazynu), to prawdopodobieństwo deficytu jest równe prawdopodobieństwu przebywania układu transportowego w stanie 2 (awaria części wejściowej, praca części wyjściowej). Mamy bowiem $\lim_{c_1 \rightarrow 0^+} P_d = P_2$.

Wniosek 2.10. Gdy wzrasta prędkość wybierania z magazynu (c_2), to prawdopodobieństwo deficytu rośnie zbiegając asymptotycznie do wartości P_2 ($\lim_{c_2 \rightarrow +\infty} P_d = P_2$) (por. rys. 2.10). Oczywiście, gdy prędkość wybierania jest równa 0 (czyli magazyn nie jest opróżniany), nie może wystąpić zjawisko deficytu ($\lim_{c_2 \rightarrow 0^+} P_d = 0$).



Rys. 2.10. Zależność wskaźnika P_d od parametru c_2 .

Wniosek 2.11. Istnieje związek między pojemnością magazynu V , częstościami zmian stanów przez układ transportowy, a wielkością strat spowodowanych deficytem. Mianowicie:

$$\begin{aligned} P_d(V = mV_0, c_1 = c_{1,0}, c_2 = c_{2,0}, \lambda_1 = \lambda_{1,0}, \lambda_2 = \lambda_{2,0}, \mu_1 = \mu_{1,0}, \mu_2 = \mu_{2,0}) = \\ = P_d(V = V_0, c_1 = c_{1,0}, c_2 = c_{2,0}, \lambda_1 = m\lambda_{1,0}, \lambda_2 = m\lambda_{2,0}, \mu_1 = m\mu_{1,0}, \mu_2 = m\mu_{2,0}). \end{aligned}$$

Inaczej mówiąc, m -krotne zwiększenie częstości zmian stanów lub m -krotne zwiększenie pojemności magazynu powodują taki sam spadek wartości wskaźnika deficytu.

Wniosek 2.12. Istnieje związek między pojemnością magazynu V , prędkościami zapełniania c_1 i wybierania c_2 , a wielkością strat spowodowanych deficytem. Mianowicie:

$$\begin{aligned} P_d(V = V_0, c_1 = c_{1,0}, c_2 = c_{2,0}, \lambda_1 = \lambda_{1,0}, \lambda_2 = \lambda_{2,0}, \mu_1 = \mu_{1,0}, \mu_2 = \mu_{2,0}) = \\ = P_d(V = mV_0, c_1 = mc_{1,0}, c_2 = mc_{2,0}, \lambda_1 = \lambda_{1,0}, \lambda_2 = \lambda_{2,0}, \mu_1 = \mu_{1,0}, \mu_2 = \mu_{2,0}). \end{aligned}$$

Inaczej mówiąc, jednoczesne m -krotne zwiększenie prędkości zapełniania, wybierania i pojemności magazynu nie powoduje zmiany wartości wskaźnika deficytu.

Reasumując, straty systemu spowodowane deficytem można zmniejszać poprzez:

- zwiększenie pojemności magazynu,
- zwiększenie prędkości zapełniania,
- zmniejszenie prędkości wybierania,
- poprawę funkcjonowania części wejściowej układu transportowego,
- pogorszenie funkcjonowania części wyjściowej układu transportowego.

Oczywiście, ostatni z wymienionych postulatów, choć zapewne najłatwiejszy do spełnienia, wydaje się być najmniej wskazany.

2.3. Wpływ parametrów systemu na prawdopodobieństwo przepełnienia zbiornika

Przez przepełnienie magazynu określa się sytuację, gdy proces $\{x(t), t \geq 0\}$ znajduje się w stanie 3 (część wyjściowa układu transportowego nie pracuje, natomiast część wejściowa pracuje), jednakże nadawca nie może przesyłać zasobu, ponieważ magazyn jest pełny (zob. Król [96], Król, Liana [90]). Sytuacja ta jest niekorzystna dla rozważanego systemu typu „transport – zapasy”. Nadawca, jeśli nie znajdzie innego odbiorcy zasobu, będzie zmuszony np. do wstrzymania produkcji bądź wydobywania, co oczywiście generuje dodatkowe straty dla systemu.

Prawdopodobieństwo wystąpienia przepełnienia przyjmuje się za wskaźnik przepełnienia P_p . Zatem $P_p = Q_3(V) = P(x(t) = 3, y(t) = c, z(t) = V)$. Podobnie jak w przypadku P_d , wykorzystując rozwiązania (2.7) układu równań (2.4), uzyskuje się postać analityczną wskaźnika przepełnienia:

$$P_p = \begin{cases} P_3 \cdot \frac{(k-1)e^{xV}}{ke^{xV} - 1}, & \text{dla } k \neq 1, \\ P_3 \cdot \frac{1}{1 + \lambda_1 \mu_2 \frac{\lambda + \mu}{\lambda \mu} \frac{V}{c_1}}, & \text{dla } k = 1, \end{cases} \quad (2.11)$$

gdzie:

$$P_3 = P(x(t) = 3) = \frac{\mu_1}{\lambda_1 + \mu_1} \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \mu_2},$$

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2, \quad \mu = \mu_1 + \mu_2,$$

$$x = \frac{\lambda + \mu}{\lambda \mu} \cdot \frac{\lambda_1 \mu_2}{c_1} (k-1), \quad k = \frac{\mu_1 \lambda_2 c_1}{\lambda_1 \mu_2 c_2}.$$

Średnia wielkość strat spowodowanych przepełnieniem magazynu (E_p) określona jest równością:

$$E_p = P_p \cdot c_1. \quad (2.12)$$

Wielkość strat spowodowanych przepełnieniem uzależniona jest od parametrów niezawodnościowych układu transportowego ($\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$) oraz parametrów technologicznych systemu (c_1, c_2, V). Badając wpływ poszczególnych parametrów na wskaźnik P_p , przy ustalonych wartościach pozostałych parametrów, otrzymano poniższe wnioski.

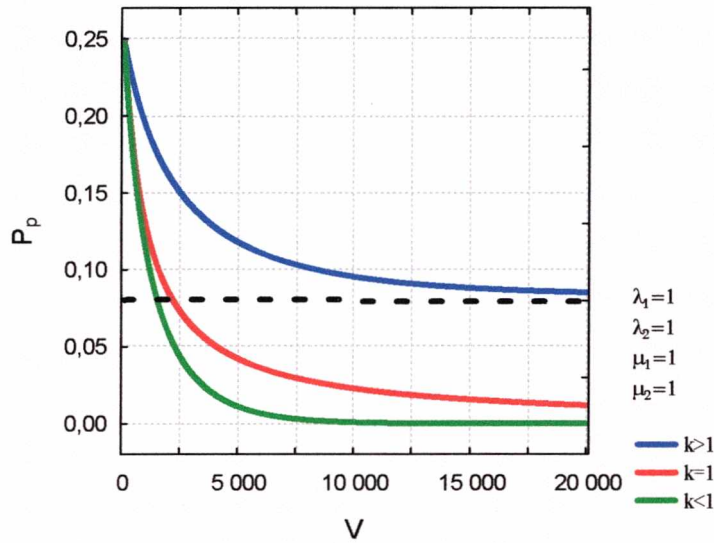
Wniosek 2.13. Zwiększanie pojemności magazynu zawsze obniża prawdopodobieństwo jego przepełnienia, ponieważ $\frac{d}{dV} P_p < 0$. Wykres funkcji $P_p(V)$ jest krzywą wypukłą

$\left(\frac{d^2}{dV^2} P_p > 0 \right)$, więc wraz ze wzrostem pojemności magazynu spadek strat spowodowanych przepełnieniem jest coraz wolniejszy (por. rys. 2.11).

Wniosek 2.14. Przy dowolnym V ($V > 0$) prawdopodobieństwo przepełnienia jest mniejsze niż prawdopodobieństwo awarii części wyjściowej i jednocześnie pracy części wejściowej układu transportowego. Wynika to wprost z poprzedniego wniosku i granicy $\lim_{V \rightarrow 0^+} P_p = P_3$.

Wniosek 2.15. Gdy faktyczna prędkość zapełniania v_z jest nie większa od faktycznej prędkości wybierania v_w ($k \leq 1$), to poprzez instalację zbiornika o odpowiednio dużej pojemności można praktycznie wyeliminować straty spowodowane przepełnieniem. Mamy bowiem

$$\lim_{V \rightarrow +\infty} P_p = \begin{cases} 0, & \text{dla } k \leq 1, \\ P_3 \cdot \left(1 - \frac{1}{k}\right), & \text{dla } k > 1. \end{cases}$$



Rys. 2.11. Zależność wskaźnika P_p od parametru V .

Wniosek 2.16. Minimalna pojemność zbiornika $V_{\min}$, która przy ustalonych pozostałych parametrach gwarantuje zadaną wartość wskaźnika P_p , określona jest zależnością:

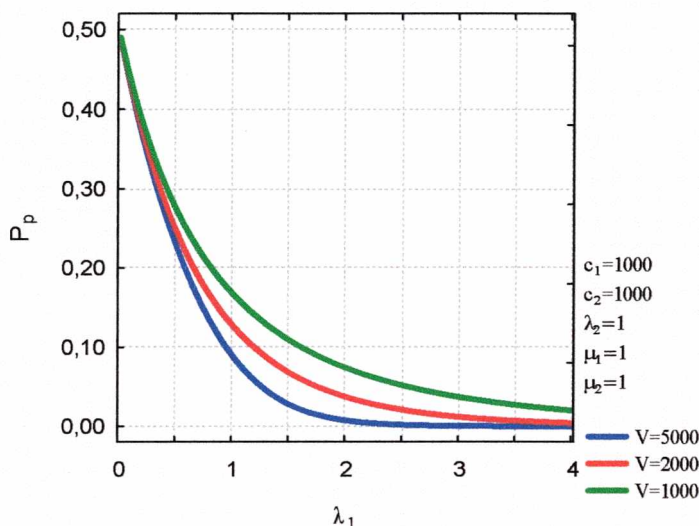
$$V_{\min} = \begin{cases} \frac{c_1}{\lambda_1 \mu_2} \cdot \frac{\lambda \mu}{\lambda + \mu} \cdot \frac{P_3 - P_p}{P_p}, & \text{dla } k = 1, \\ \frac{1}{x} \ln \frac{P_p}{k P_p + (1 - k) P_3}, & \text{dla } k \neq 1, \end{cases}$$

gdzie $\max \left\{ 0, \frac{k-1}{k} \cdot P_3 \right\} < P_p \leq P_3$.

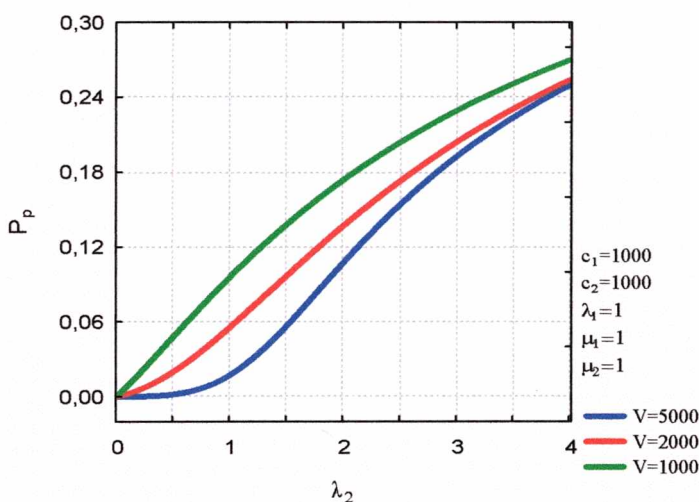
Wniosek 2.17. Gdy wzrasta intensywność powstawania awarii w części wejściowej układu transportowego (λ_1), to prawdopodobieństwo wystąpienia przepełnienia maleje do 0 ($\lim_{\lambda_1 \rightarrow +\infty} P_p = 0$) (por. rys. 2.12). Gdyby część wejściowa układu transportowego była prawie bezawaryjna ($\lambda_1 \approx 0$), to prawdopodobieństwo przepełnienia byłoby niemal równe praw-

dopodobieństwu awarii części wyjściowej układu transportowego, ponieważ

$$\lim_{\lambda_1 \rightarrow 0^+} P_p = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \mu_2}.$$



Rys. 2.12. Zależność wskaźnika P_p od parametru λ_1 .



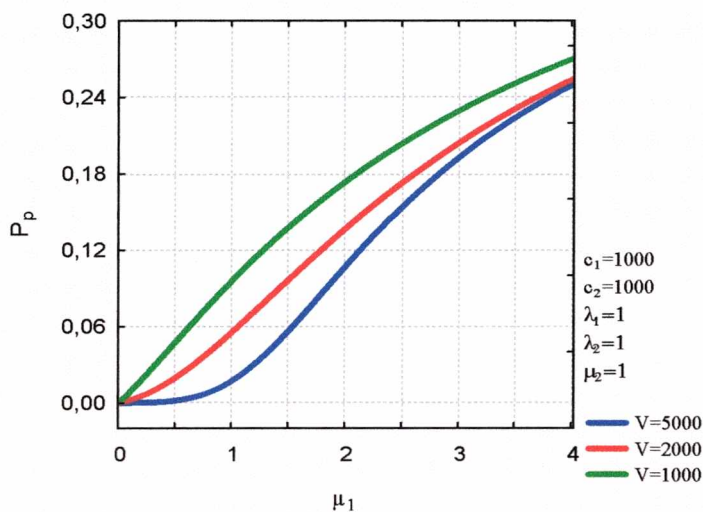
Rys. 2.13. Zależność wskaźnika P_p od parametru λ_2 .

Wniosek 2.18. Gdy wzrasta intensywność powstawania awarii w części wyjściowej układu transportowego (λ_2), to prawdopodobieństwo wystąpienia przepełnienia rośnie od 0 ($\lim_{\lambda_2 \rightarrow 0^+} P_p = 0$) (por. rys. 2.13). Wartość P_p nigdy jednak nie przekroczy prawdopodobień-

stwa pracy części wejściowej układu transportowego, ponieważ $\lim_{\lambda_2 \rightarrow +\infty} P_p = \frac{\mu_1}{\lambda_1 + \mu_1}$.

Wniosek 2.19. Gdy wzrasta intensywność likwidowania awarii w części wejściowej układu transportowego (μ_1), to rośnie prawdopodobieństwo przepełnienia (por. rys. 2.14), nie przekraczając jednak nigdy prawdopodobieństwa awarii części wyjściowej. Mamy bowiem

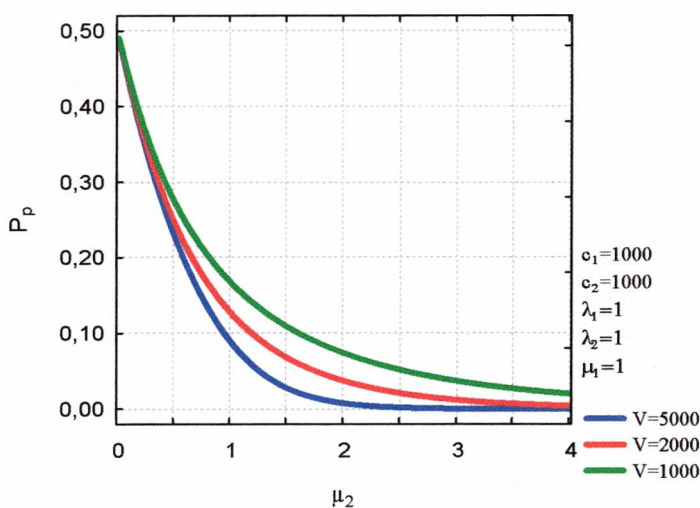
$$\lim_{\mu_1 \rightarrow 0^+} P_p = 0 \text{ oraz } \lim_{\mu_1 \rightarrow +\infty} P_p = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \mu_2}.$$



Rys. 2.14. Zależność wskaźnika P_p od parametru μ_1 .

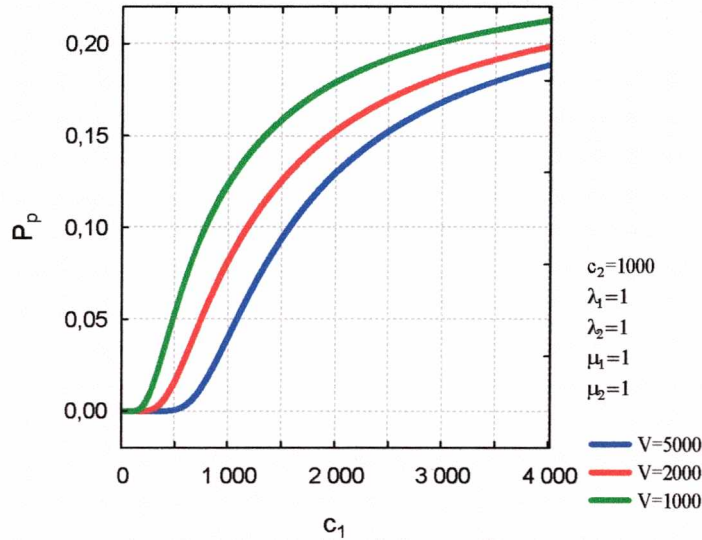
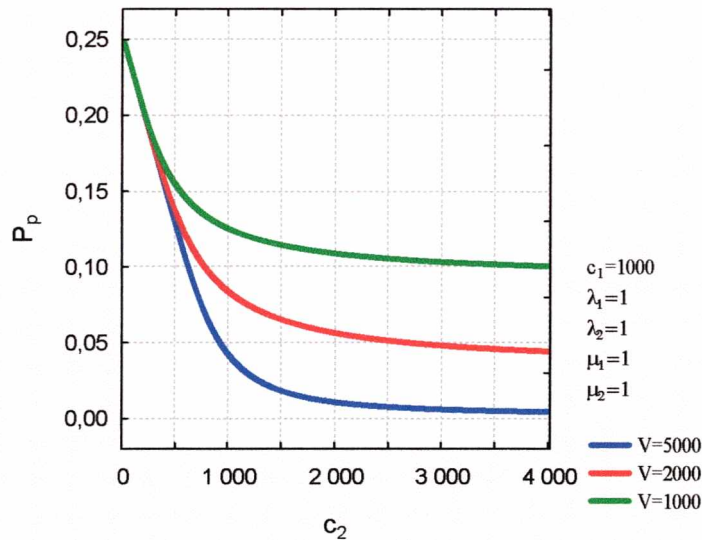
Wniosek 2.20. Gdy wzrasta intensywność likwidowania awarii w części wyjściowej (μ_2), to prawdopodobieństwo przepełnienia maleje do 0 ($\lim_{\mu_2 \rightarrow +\infty} P_p = 0$) (por. rys. 2.15). Wartość

P_p nigdy nie będzie większe od prawdopodobieństwa pracy części wejściowej układu transportowego, ponieważ $\lim_{\mu_2 \rightarrow 0^+} P_p = \frac{\mu_1}{\lambda_1 + \mu_1}$.



Rys. 2.15. Zależność wskaźnika P_p od parametru μ_2 .

Wniosek 2.21. Gdy wzrasta prędkość zapełniania magazynu (c_1), to prawdopodobieństwo wystąpienia przepełnienia rośnie zbiegając asymptotycznie do wartości P_3 ($\lim_{c_1 \rightarrow +\infty} P_p = P_3$) (por. rys. 2.16). Gdy prędkość zapełniania jest równa 0 (czyli nie występuje ładowanie zasobu do magazynu), nie może wystąpić również jego przepełnienie ($\lim_{c_1 \rightarrow 0^+} P_p = 0$).

Rys. 2.16. Zależność wskaźnika P_p od parametru c_1 .Rys. 2.17. Zależność wskaźnika P_p od parametru c_2 .

Wniosek 2.22. Gdy wzrasta prędkość wybierania z magazynu (c_2), to prawdopodobieństwo wystąpienia przepełnienia maleje zbiegając asymptotycznie do wartości $P_3 \cdot e^{d_2 V}$.

Mamy bowiem $\lim_{c_2 \rightarrow +\infty} P_p = P_3 \cdot e^{d_2 V}$, gdzie $d_2 = -\frac{\lambda + \mu}{\lambda \mu} \cdot \frac{\lambda_1 \mu_2}{c_1}$. Gdy prędkość wybierania jest równa 0 (czyli magazyn nie jest opróżniany), prawdopodobieństwo przepełnienia jest równe prawdopodobieństwu przebywania układu transportowego w stanie 3 (awaria części wyjściowej, praca części wejściowej). Mamy bowiem $\lim_{c_2 \rightarrow 0^+} P_p = P_3$ (por. rys. 2.17).

Wniosek 2.23. Istnieje związek między pojemnością magazynu V , częstościami zmian stanów przez układ transportowy, a wielkością strat spowodowanych przepełnieniem. Mianowicie:

$$\begin{aligned} P_p(V = mV_0, c_1 = c_{1,0}, c_2 = c_{2,0}, \lambda_1 = \lambda_{1,0}, \lambda_2 = \lambda_{2,0}, \mu_1 = \mu_{1,0}, \mu_2 = \mu_{2,0}) = \\ = P_p(V = V_0, c_1 = c_{1,0}, c_2 = c_{2,0}, \lambda_1 = m\lambda_{1,0}, \lambda_2 = m\lambda_{2,0}, \mu_1 = m\mu_{1,0}, \mu_2 = m\mu_{2,0}). \end{aligned}$$

Inaczej mówiąc, m -krotne zwiększenie częstości zmian stanów lub m -krotne zwiększenie pojemności magazynu powodują taki sam spadek wartości wskaźnika przepełnienia.

Wniosek 2.24. Istnieje związek między pojemnością magazynu V , prędkościami zapełniania c_1 i wybierania c_2 , a wielkością strat spowodowanych przepełnieniem. Mianowicie:

$$\begin{aligned} P_p(V = V_0, c_1 = c_{1,0}, c_2 = c_{2,0}, \lambda_1 = \lambda_{1,0}, \lambda_2 = \lambda_{2,0}, \mu_1 = \mu_{1,0}, \mu_2 = \mu_{2,0}) = \\ = P_p(V = mV_0, c_1 = mc_{1,0}, c_2 = mc_{2,0}, \lambda_1 = \lambda_{1,0}, \lambda_2 = \lambda_{2,0}, \mu_1 = \mu_{1,0}, \mu_2 = \mu_{2,0}). \end{aligned}$$

Inaczej mówiąc, jednoczesne m -krotne zwiększenie prędkości zapełniania, wybierania i pojemności magazynu nie powoduje zmiany wartości wskaźnika przepełnienia.

Podsumowując, straty systemu spowodowane przepełnieniem magazynu można zmniejszać poprzez:

- zwiększenie pojemności magazynu,
- zmniejszenie prędkości zapełniania,
- zwiększenie prędkości wybierania,
- pogorszenie funkcjonowania części wejściowej układu transportowego,
- poprawę funkcjonowania części wyjściowej układu transportowego.

W przypadku przepełnienia, najmniej wskazanym wydaje się być przedostatni z wymienionych postulatów.

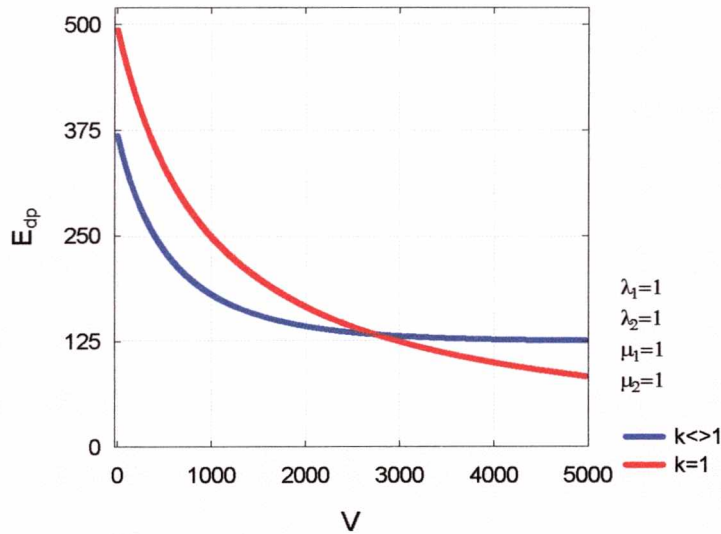
2.4. Ocena łącznych strat spowodowanych deficytem lub przepełnieniem

W tym rozdziale przedstawiony jest wpływ poszczególnych parametrów systemu na wskaźnik E_{dp} , mierzący średnie straty spowodowane łącznie przez deficyt i przepełnienie magazynu. Wskaźnik E_{dp} zdefiniowany jest następująco:

$$E_{dp} = E_d + E_p = P_d \cdot c_2 + P_p \cdot c_1. \quad (2.13)$$

Wnioski dotyczące wskaźnika E_{dp} uzyskuje się wykorzystując m.in. wyniki zaprezentowane w rozdziałach 2.2 i 2.3.

Wniosek 2.25. Zwiększanie pojemności magazynu zawsze zmniejsza straty spowodowane deficytem i przepełnieniem, ponieważ wskaźnik E_{dp} jest funkcją malejącą zmiennej V ($\frac{d}{dV}E_{dp} < 0$). Wraz ze wzrostem V obniżka tych strat jest jednak coraz wolniejsza, ponieważ wykres funkcji $E_{dp}(V)$ jest krzywą wypukłą ($\frac{d^2}{dV^2}E_{dp} > 0$) (por. rys. 2.18).



Rys. 2.18. Zależność wskaźnika E_{dp} od parametru V .

Wniosek 2.26. Przy dowolnej pojemności magazynu V ($V > 0$) wielkość strat spowodowanych deficytem i przepełnieniem jest mniejsza od $c_2 \cdot P_2 + c_1 \cdot P_3$. Wynika to wprost z poprzedniego wniosku i granicy $\lim_{V \rightarrow 0^+} E_{dp} = c_2 \cdot P_2 + c_1 \cdot P_3$.

Wniosek 2.27. Straty systemu spowodowane deficytem i przepełnieniem można praktycznie wyeliminować poprzez zwiększanie pojemności magazynu tylko wtedy, gdy faktyczna prędkość zapełniania magazynu v_z jest równa faktycznej prędkości wybierania v_w ($k = 1$), ponieważ:

$$\lim_{V \rightarrow +\infty} E_{dp} = \begin{cases} c_2 \cdot P_2 \cdot (1-k), & \text{dla } k < 1, \\ 0, & \text{dla } k = 1, \\ c_1 \cdot P_3 \cdot (1 - \frac{1}{k}), & \text{dla } k > 1. \end{cases}$$

Wniosek 2.28. Minimalna pojemność zbiornika, która przy ustalonych pozostałych parametrach gwarantuje zadaną wartość wskaźnika E_{dp} , określona jest zależnością:

$$V_{min} = \begin{cases} \frac{c_1}{\lambda_1 \mu_2} \cdot \frac{\lambda \mu}{\lambda + \mu} \cdot \frac{c_2 \cdot P_2 + c_1 \cdot P_3 - E_{dp}}{E_{dp}}, & \text{dla } k = 1, \\ \frac{1}{x} \ln \left(\frac{1}{k} \cdot \frac{E_{dp} - c_2 \cdot P_2 \cdot (1-k)}{E_{dp} - c_1 \cdot P_3 \cdot \left(1 - \frac{1}{k}\right)} \right), & \text{dla } k \neq 1, \end{cases}$$

gdzie $\max\{c_2 \cdot P_2 \cdot (1-k), c_1 \cdot P_3 \cdot (1 - 1/k)\} < E_{dp} \leq c_2 \cdot P_2 + c_1 \cdot P_3$.

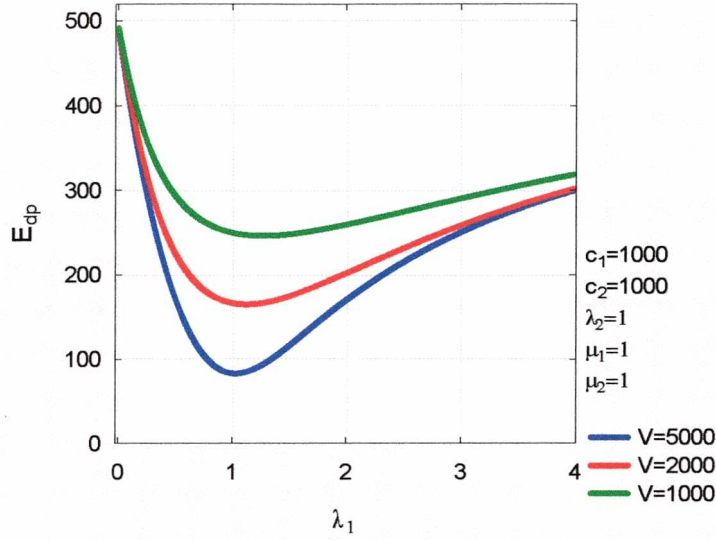
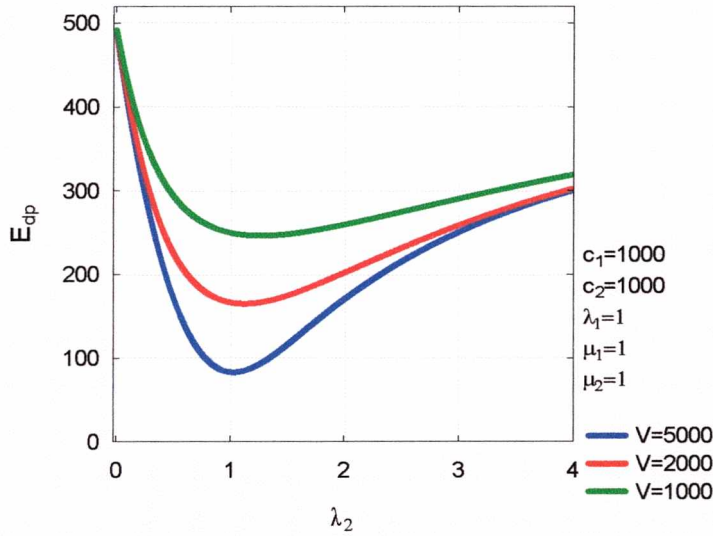
Wniosek 2.29. Funkcja $E_{dp}(\lambda_1)$ osiąga wartość minimalną dla pewnego λ_1^* zależnego od pozostałych parametrów systemu (por. rys. 2.19). Jeżeli wartość zmiennej λ_1 maleje w przedziale $(0, \lambda_1^*)$, to wielkość strat spowodowanych deficytem i przepełnieniem rośnie do

wartości $c_1 \cdot \lambda_2 / (\lambda_2 + \mu_2)$, ponieważ $\lim_{\lambda_1 \rightarrow 0^+} E_{dp} = c_1 \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \mu_2}$. Jeżeli wartość zmiennej λ_1

rośnie w przedziale $(\lambda_1^*, +\infty)$, to wielkość strat spowodowanych deficytem i przepełnieniem również rośnie do wartości $c_2 \cdot \mu_2 / (\lambda_2 + \mu_2)$, ponieważ

$\lim_{\lambda_1 \rightarrow +\infty} E_{dp} = c_2 \cdot \frac{\mu_2}{\lambda_2 + \mu_2}$. Gdy wzrasta pojemność magazynu V , to λ_1^* zbiega do wartości

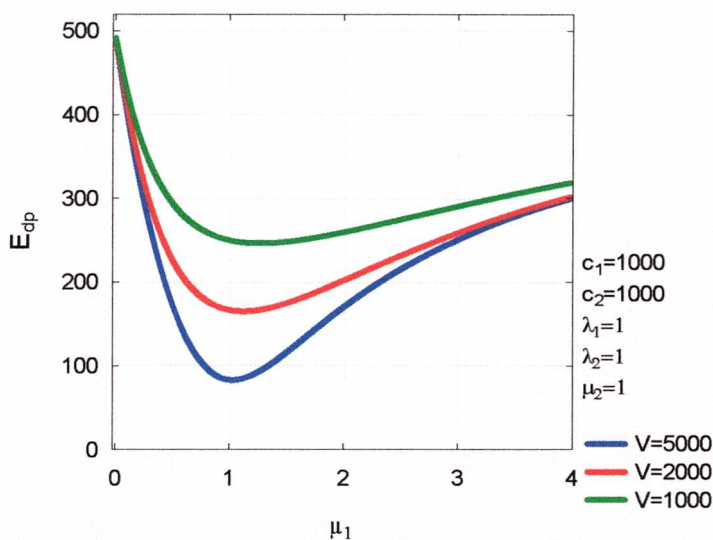
$c_1 \cdot \mu_1 \cdot \lambda_2 / (c_2 \cdot \mu_2)$. Gdy $c_1 \cdot \lambda_2 \geq c_2 \cdot \mu_2$, to λ_1^* jest nie mniejsze od $c_1 \cdot \mu_1 \cdot \lambda_2 / (c_2 \cdot \mu_2)$.


Rys. 2.19. Zależność wskaźnika E_{dp} od parametru λ_1 .

Rys. 2.20. Zależność wskaźnika E_{dp} od parametru λ_2 .

Wniosek 2.30. Funkcja $E_{dp}(\lambda_2)$ osiąga wartość minimalną dla pewnego λ_2^* zależnego od pozostałych parametrów systemu (por. rys. 2.20). Jeżeli wartość zmiennej λ_2 maleje w przedziale $(0, \lambda_2^*)$, to wielkość strat spowodowanych deficytem i przepełnieniem rośnie do wartości $c_2 \cdot \lambda_1 / (\lambda_1 + \mu_1)$, ponieważ $\lim_{\lambda_2 \rightarrow 0^+} E_{dp} = c_2 \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \mu_1}$. Jeżeli wartość zmiennej λ_2 rośnie w przedziale $(\lambda_2^*, +\infty)$, to wielkość strat spowodowanych deficytem i przepełnieniem również rośnie do wartości $c_1 \cdot \mu_1 / (\lambda_1 + \mu_1)$, ponieważ

$\lim_{\lambda_2 \rightarrow +\infty} E_{dp} = c_1 \cdot \frac{\mu_1}{\lambda_1 + \mu_1}$. Gdy wzrasta pojemność magazynu V , to λ_2^* zbiega do wartości $c_2 \cdot \mu_2 \cdot \lambda_1 / (c_1 \cdot \mu_1)$. Gdy $c_2 \cdot \lambda_1 \geq c_1 \cdot \mu_1$, to λ_2^* jest nie mniejsze od $c_2 \cdot \mu_2 \cdot \lambda_1 / (c_1 \cdot \mu_1)$.

Wniosek 2.31. Funkcja $E_{dp}(\mu_1)$ osiąga wartość minimalną dla pewnego μ_1^* zależnego od pozostałych parametrów systemu (por. rys. 2.21). Jeżeli wartość zmiennej μ_1 maleje w przedziale $(0, \mu_1^*)$, to wielkość strat spowodowanych deficytem i przepełnieniem rośnie do wartości $c_2 \cdot \mu_2 / (\lambda_2 + \mu_2)$, ponieważ $\lim_{\mu_1 \rightarrow 0^+} E_{dp} = c_2 \cdot \frac{\mu_2}{\lambda_2 + \mu_2}$. Jeżeli wartość zmiennej μ_1 rośnie w przedziale $(\mu_1^*, +\infty)$, to wielkość strat spowodowanych deficytem i przepełnieniem również rośnie do wartości $c_1 \cdot \lambda_2 / (\lambda_2 + \mu_2)$, ponieważ $\lim_{\mu_1 \rightarrow +\infty} E_{dp} = c_1 \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \mu_2}$. Gdy wzrasta pojemność magazynu V , to μ_1^* zbiega do wartości $c_2 \cdot \mu_2 \cdot \lambda_1 / (c_1 \cdot \lambda_2)$. Gdy $c_1 \cdot \lambda_2 \leq c_2 \cdot \mu_2$, to μ_1^* jest nie mniejsze od $c_2 \cdot \mu_2 \cdot \lambda_1 / (c_1 \cdot \lambda_2)$.



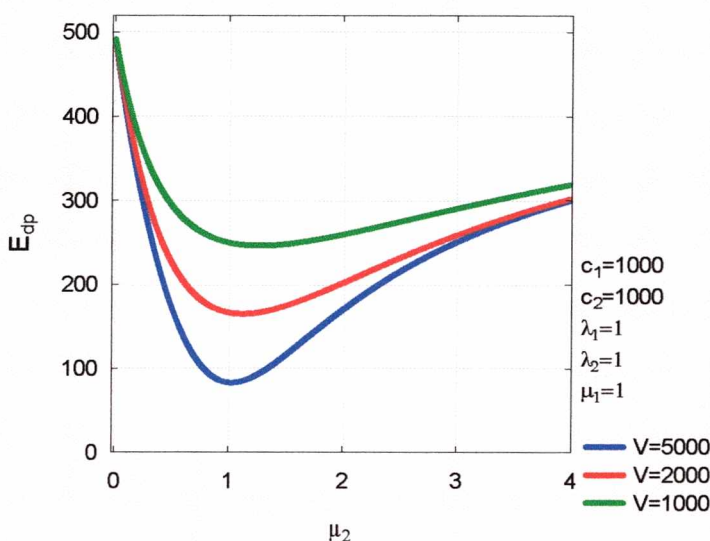
Rys. 2.21. Zależność wskaźnika E_{dp} od parametru μ_1 .

Wniosek 2.32. Funkcja $E_{dp}(\mu_2)$ osiąga wartość minimalną dla pewnego μ_2^* zależnego od pozostałych parametrów systemu (por. rys. 2.22). Jeżeli wartość zmiennej μ_2 maleje w przedziale $(0, \mu_2^*)$, to wielkość strat spowodowanych deficytem i przepełnieniem rośnie do wartości $c_1 \cdot \mu_1 / (\lambda_1 + \mu_1)$, ponieważ $\lim_{\mu_2 \rightarrow 0^+} E_{dp} = c_1 \cdot \frac{\mu_1}{\lambda_1 + \mu_1}$. Jeżeli wartość zmiennej μ_2

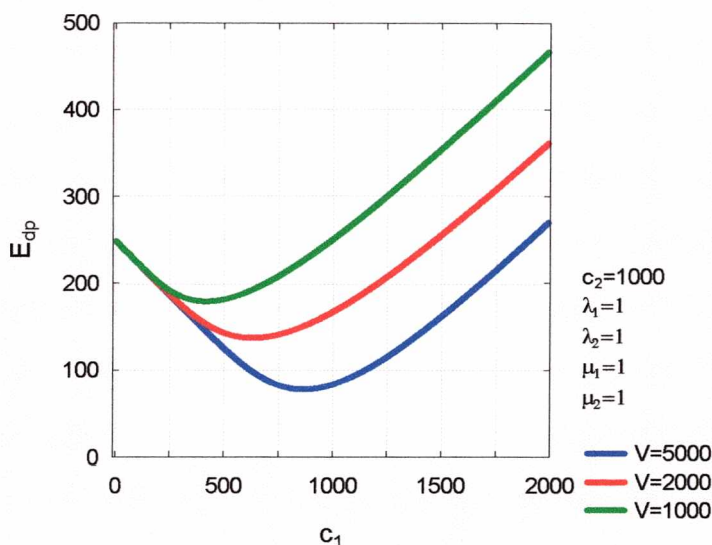
rośnie w przedziale $(\mu_2^*, +\infty)$, to wielkość strat spowodowanych deficytem i przepełnieniem również rośnie do wartości $c_2 \cdot \lambda_1 / (\lambda_1 + \mu_1)$, ponieważ

$\lim_{\mu_2 \rightarrow +\infty} E_{dp} = c_2 \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \mu_1}$. Gdy wzrasta pojemność magazynu V , to μ_2^* zbiega do wartości

$c_1 \cdot \mu_1 \cdot \lambda_2 / (c_2 \cdot \lambda_1)$. Gdy $c_2 \cdot \lambda_1 \leq c_1 \cdot \mu_1$, to μ_2^* jest nie mniejsze od $c_1 \cdot \mu_1 \cdot \lambda_2 / (c_2 \cdot \lambda_1)$.



Rys. 2.22. Zależność wskaźnika E_{dp} od parametru μ_2 .

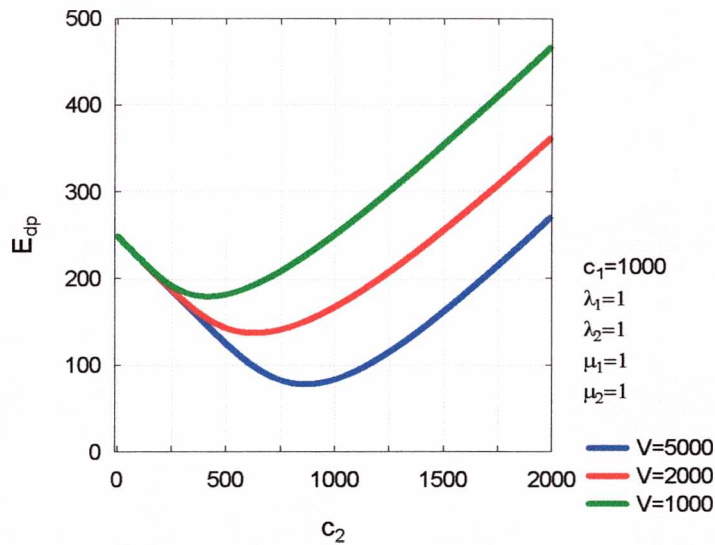


Rys. 2.23. Zależność wskaźnika E_{dp} od parametru c_1 .

Wniosek 2.33. Funkcja $E_{dp}(c_1)$ osiąga wartość minimalną dla pewnego c_1^* zależnego od pozostałych parametrów systemu (por. rys. 2.23). Jeżeli wartość zmiennej c_1 maleje

w przedziale $(0, c_1^*)$, to wielkość strat spowodowanych deficytem i przepełnieniem rośnie do wartości $c_2 \cdot P_2$, ponieważ $\lim_{c_1 \rightarrow 0^+} E_{dp} = c_2 \cdot P_2$. Jeżeli wartość zmiennej c_1 rośnie w przedziale $(c_1^*, +\infty)$, to wielkość strat spowodowanych deficytem i przepełnieniem również nieograniczenie wzrasta, ponieważ $\lim_{c_1 \rightarrow +\infty} E_{dp} = +\infty$. Gdy pojemność magazynu V rośnie, to także c_1^* rośnie, zbiegając asymptotycznie do wartości $c_2 \cdot \mu_2 \cdot \lambda_1 / (\mu_1 \cdot \lambda_2)$.

Wniosek 2.34. Funkcja $E_{dp}(c_2)$ osiąga wartość minimalną dla pewnego c_2^* zależnego od pozostałych parametrów systemu (por. rys. 2.24). Jeżeli wartość zmiennej c_2 maleje w przedziale $(0, c_2^*)$, to wielkość strat spowodowanych deficytem i przepełnieniem rośnie do wartości $c_1 \cdot P_3$, ponieważ $\lim_{c_2 \rightarrow 0^+} E_{dp} = c_1 \cdot P_3$. Jeżeli wartość zmiennej c_2 rośnie w przedziale $(c_2^*, +\infty)$, to wielkość strat spowodowanych deficytem i przepełnieniem również nieograniczenie rośnie, ponieważ $\lim_{c_2 \rightarrow +\infty} E_{dp} = +\infty$. Gdy pojemność magazynu V rośnie, to także c_2^* rośnie, zbiegając asymptotycznie do wartości $c_1 \cdot \mu_1 \cdot \lambda_2 / (\mu_2 \cdot \lambda_1)$.



Rys. 2.24. Zależność wskaźnika E_{dp} od parametru c_2 .

Wniosek 2.35. Istnieje związek między pojemnością magazynu V , częstościami zmian stanów przez układ transportowy, a wielkością strat spowodowanych deficytem i przepełnieniem. Mianowicie:

$$\begin{aligned} E_{dp}(V = mV_0, c_1 = c_{1,0}, c_2 = c_{2,0}, \lambda_1 = \lambda_{1,0}, \lambda_2 = \lambda_{2,0}, \mu_1 = \mu_{1,0}, \mu_2 = \mu_{2,0}) = \\ = E_{dp}(V = V_0, c_1 = c_{1,0}, c_2 = c_{2,0}, \lambda_1 = m\lambda_{1,0}, \lambda_2 = m\lambda_{2,0}, \mu_1 = m\mu_{1,0}, \mu_2 = m\mu_{2,0}). \end{aligned}$$

Inaczej mówiąc, m-krotne zwiększenie częstości zmian stanów lub m-krotne zwiększenie pojemności magazynu powodują taki sam spadek wartości wskaźnika E_{dp} .

Wniosek 2.36. Istnieje związek między pojemnością magazynu V , prędkościami c_1 i c_2 , a wielkością strat spowodowanych deficytem i przepełnieniem. Mianowicie:

$$\begin{aligned} E_{dp}(V = mV_0, c = c_0, c_1 = mc_{1,0}, c_2 = mc_{2,0}, \lambda_1 = \lambda_{1,0}, \lambda_2 = \lambda_{2,0}, \mu_1 = \mu_{1,0}, \mu_2 = \mu_{2,0}) = \\ = m \cdot E_{dp}(V = V_0, c = c_0, c_1 = c_{1,0}, c_2 = c_{2,0}, \lambda_1 = \lambda_{1,0}, \lambda_2 = \lambda_{2,0}, \mu_1 = \mu_{1,0}, \mu_2 = \mu_{2,0}). \end{aligned}$$

Inaczej mówiąc, jednoczesne m-krotne zwiększenie prędkości zapełniania, wybierania i pojemności magazynu powoduje m-krotny wzrost wartości wskaźnika E_{dp} .

2.5. Analiza wydajności systemu „bazowego”

Przez wydajność systemu określa się średnią ilość zasobu, która w jednostce czasu przepływa przez system (zob. Król [96], Liana [101]). Miarą wydajności jest wskaźnik W określony zależnością $W = c \cdot P(x(t) = 1) + c_1 \cdot P(x(t) = 3, 0 \leq z(t) < V)$. Wykorzystując rozwiązania (2.7) układu równań (2.4), uzyskuje się postać analityczną wskaźnika, mianowicie:

$$W = \begin{cases} c \cdot P_1 + c_1 \cdot P_3 \cdot \frac{e^{xV} - 1}{k \cdot e^{xV} - 1}, & \text{dla } k \neq 1, \\ c \cdot P_1 + c_1 \cdot P_3 \cdot \frac{\lambda_1 \mu_2 \frac{\lambda + \mu}{\lambda \mu} \frac{V}{c_1}}{1 + \lambda_1 \mu_2 \frac{\lambda + \mu}{\lambda \mu} \frac{V}{c_1}}, & \text{dla } k = 1, \end{cases} \quad (2.14)$$

gdzie:

$$P_1 = \frac{\mu_1}{\mu_1 + \lambda_1} \cdot \frac{\mu_2}{\mu_2 + \lambda_2}, \quad P_3 = \frac{\mu_1}{\mu_1 + \lambda_1} \cdot \frac{\lambda_2}{\mu_2 + \lambda_2},$$

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2, \quad \mu = \mu_1 + \mu_2,$$

$$x = \frac{\lambda + \mu}{\lambda \mu} \cdot \frac{\lambda_1 \mu_2}{c_1} (k - 1), \quad k = \frac{\mu_1 \lambda_2 c_1}{\lambda_1 \mu_2 c_2}.$$

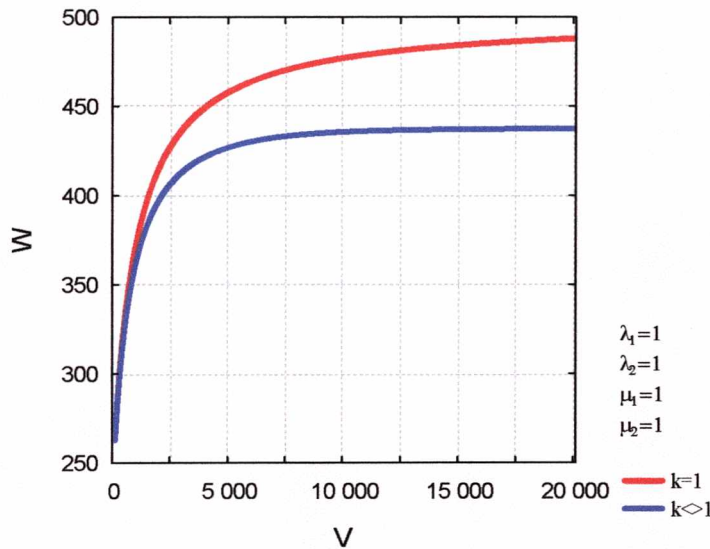
Wskaźnik wydajności, podobnie jak pozostałe wskaźniki, uzależniony jest od parametrów niezawodnościowych układu transportowego $(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2)$ oraz parametrów

technologicznych systemu (c, c_1, c_2, V). Badając wpływ poszczególnych parametrów na wskaźnik W , przy ustalonych wartościach pozostałych parametrów, otrzymano poniższe wnioski.

Wniosek 2.37. Wskaźnik W jest funkcją rosnącą zmiennej V , ponieważ $\frac{d}{dV}W > 0$ dla dowolnego k . Zatem zwiększanie pojemności magazynu zawsze podnosi wydajność systemu oraz spełniony jest warunek $W_0 < W < W_\infty$, gdzie

$$W_0 = \lim_{V \rightarrow 0^+} W = c \cdot P_1,$$

$$W_\infty = \lim_{V \rightarrow \infty} W = \begin{cases} c \cdot P_1 + c_1 \cdot P_3, & \text{dla } k \leq 1, \\ c \cdot P_1 + c_1 \cdot P_3 \cdot \frac{1}{k}, & \text{dla } k > 1. \end{cases}$$



Rys. 2.25. Zależność wskaźnika W od parametru V .

Wniosek 2.38. Wykres funkcji $W=f(V)$ jest krzywą wklęsłą, ponieważ $\frac{d^2}{dV^2}W < 0$ dla dowolnego k (por. rys. 2.25). Zatem, w kontekście poprzedniego wniosku, wzrost pojemności magazynu skutkuje coraz wolniejszymi przyrostami wydajności systemu.

Wniosek 2.39. Minimalna pojemność magazynu $V_{\min}$, która gwarantuje zadaną wartość wskaźnika W , przy ustalonych pozostałych parametrach, określona jest zależnością:

$$V_{\min} = \begin{cases} \frac{1}{x} \cdot \ln \frac{W_{\infty} - W}{W_{\infty} - W + (1-k) \cdot (W - W_0)}, & \text{dla } k < 1, \\ \frac{c_1 \cdot \mu \cdot \lambda}{\lambda_1 \cdot \mu_2 \cdot (\mu + \lambda)} \cdot \frac{W - W_0}{W_{\infty} - W}, & \text{dla } k = 1, \\ \frac{1}{x} \cdot \ln \frac{k \cdot (W_{\infty} - W) + (1-k) \cdot (W_0 - W)}{k \cdot (W_{\infty} - W)}, & \text{dla } k > 1, \end{cases}$$

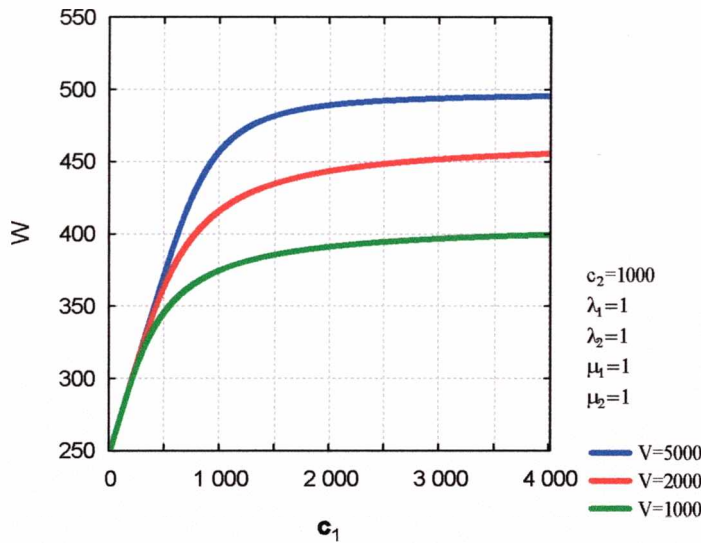
gdzie $W_0 \leq W < W_{\infty}$.

Wniosek 2.40. Gdy wzrasta prędkość zapełniania magazynu c_1 , to wydajność systemu rośnie (por. rys. 2.26) zbiegając asymptotycznie do granicy

$$\lim_{c_1 \rightarrow +\infty} W = W_0 + c_2 \cdot P_2 \cdot (1 - e^{d_1 V}), \text{ gdzie } d_1 = -\frac{\lambda + \mu}{\lambda \mu} \cdot \frac{\mu_1 \lambda_2}{c_2}.$$

Gdy prędkość zapełniania jest równa 0 (czyli nie występuje ładowanie zasobu do magazynu), to wydajność systemu jest równa wydajności systemu bez magazynu, ponieważ

$$\lim_{c_1 \rightarrow 0^+} W = W_0.$$

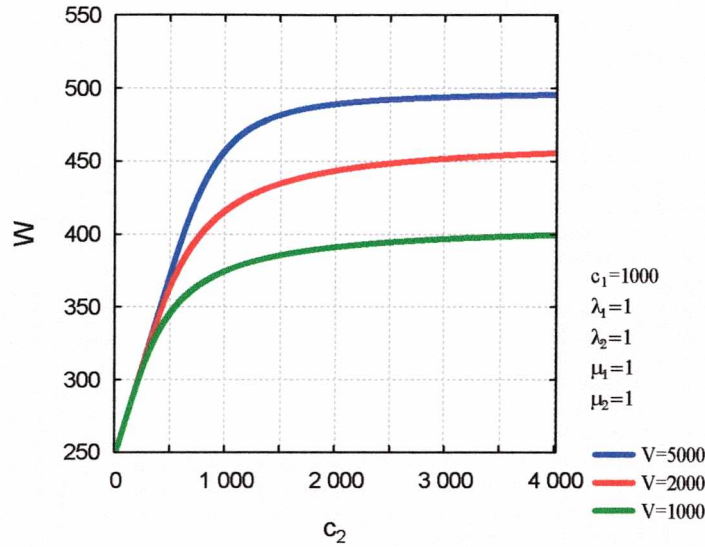


Rys. 2.26. Zależność wskaźnika W od parametru c_1 .

Wniosek 2.41. Gdy wzrasta prędkość wybierania z magazynu c_2 , to wydajność systemu rośnie (por. rys. 2.27) zbiegając asymptotycznie do granicy

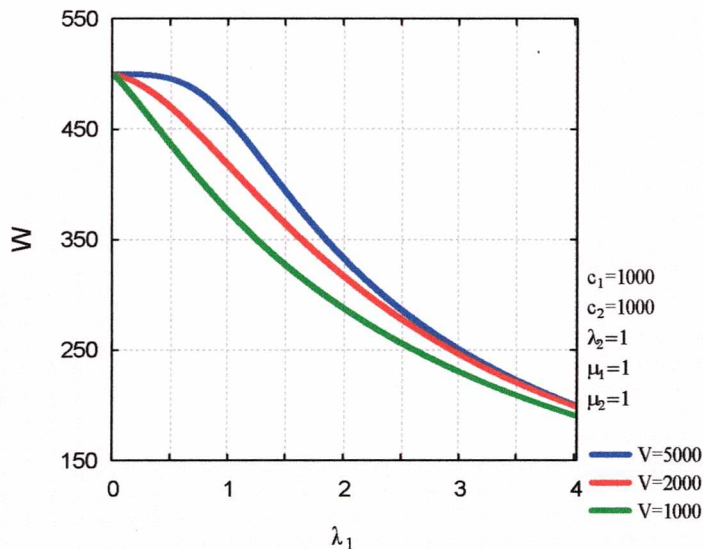
$$\lim_{c_2 \rightarrow +\infty} W = W_0 + c_1 \cdot P_3 \cdot (1 - e^{d_2 V}), \text{ gdzie } d_2 = -\frac{\lambda + \mu}{\lambda \mu} \cdot \frac{\mu_2 \lambda_1}{c_1}.$$

Gdy prędkość wybierania jest równa 0 (czyli magazyn nie jest opróżniany), to wydajność systemu jest równa wydajności systemu bez magazynu, ponieważ $\lim_{c_2 \rightarrow 0^+} W = W_0$.

Rys. 2.27. Zależność wskaźnika W od parametru c_2 .

Wniosek 2.42. Gdy wzrasta intensywność λ_1 powstawania awarii w części wejściowej układu transportowego, to wydajność systemu maleje (por. rys. 2.28), zbiegając asymptotycznie do 0 ($\lim_{\lambda_1 \rightarrow +\infty} W = 0$). Gdy część wejściowa układu transportowego jest praktycznie

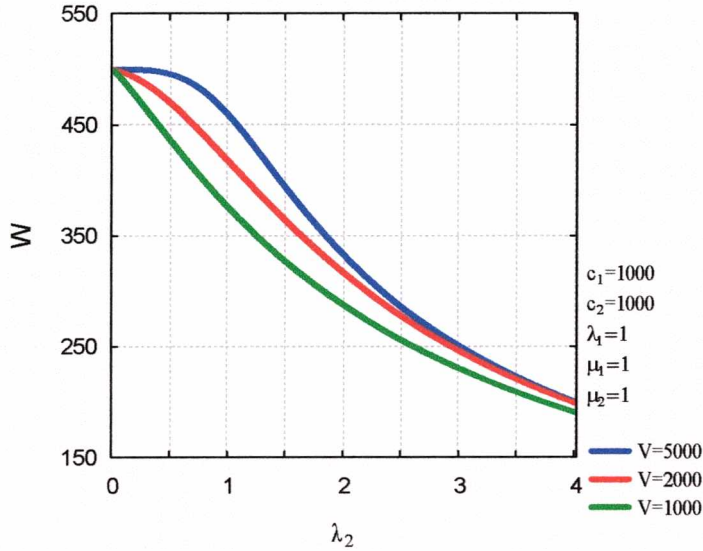
bezwaryjna ($\lambda_1 \approx 0$), to wydajność systemu jest bliska granicy $\lim_{\lambda_1 \rightarrow 0^+} W = c \cdot \frac{\mu_2}{\lambda_2 + \mu_2}$.

Rys. 2.28. Zależność wskaźnika W od parametru λ_1 .

Wniosek 2.43. Gdy wzrasta intensywność λ_2 powstawania awarii w części wyjściowej układu transportowego, to wydajność systemu maleje (por. rys. 2.29), zbiegając asympto-

tycznie do 0 ($\lim_{\lambda_2 \rightarrow +\infty} W = 0$). Gdy część wyjściowa układu transportowego jest praktycznie

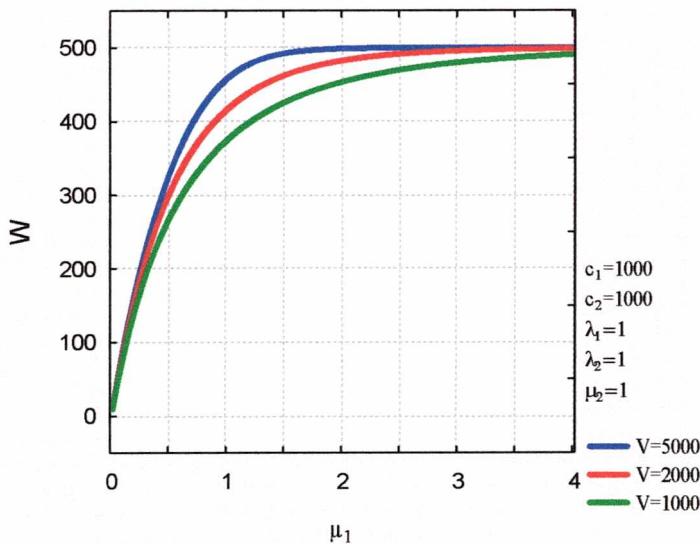
bezawaryjna ($\lambda_2 \approx 0$), to wydajność systemu jest bliska granicy $\lim_{\lambda_2 \rightarrow 0^+} W = c \cdot \frac{\mu_1}{\lambda_1 + \mu_1}$.



Rys. 2.29. Zależność wskaźnika W od parametru λ_2 .

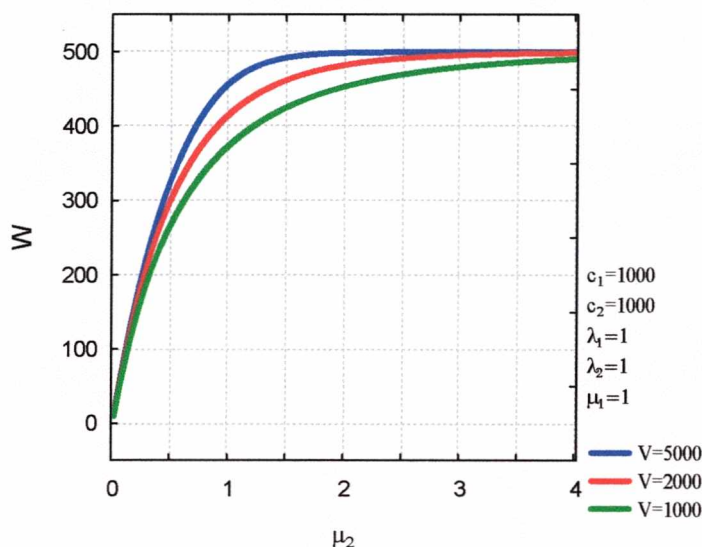
Wniosek 2.44. Gdy wzrasta intensywność μ_1 likwidowania awarii w części wejściowej układu transportowego, to wydajność systemu rośnie od 0 ($\lim_{\mu_1 \rightarrow 0^+} W = 0$), zbiegając asymptotycznie do granicy $\lim_{\mu_1 \rightarrow +\infty} W = c \cdot \frac{\mu_2}{\lambda_2 + \mu_2}$ (por. rys. 2.30).

totycznie do granicy $\lim_{\mu_1 \rightarrow +\infty} W = c \cdot \frac{\mu_2}{\lambda_2 + \mu_2}$ (por. rys. 2.30).



Rys. 2.30. Zależność wskaźnika W od parametru μ_1 .

Wniosek 2.45. Gdy wzrasta intensywność μ_2 likwidowania awarii w części wyjściowej układu transportowego, to wydajność systemu rośnie od 0 ($\lim_{\mu_2 \rightarrow 0^+} W = 0$), zbiegając asymptotycznie do granicy $\lim_{\mu_2 \rightarrow +\infty} W = c \cdot \frac{\mu_1}{\lambda_1 + \mu_1}$ (por. rys. 2.31).



Rys. 2.31. Zależność wskaźnika W od parametru μ_2 .

Wniosek 2.46. Istnieje związek między pojemnością magazynu V , częstościami zmian stanów przez układ transportowy, a wydajnością systemu. Mianowicie:

$$W(V = mV_0, c = c_0, c_1 = c_{1,0}, c_2 = c_{2,0}, \lambda_1 = \lambda_{1,0}, \lambda_2 = \lambda_{2,0}, \mu_1 = \mu_{1,0}, \mu_2 = \mu_{2,0}) = \\ = W(V = V_0, c = c_0, c_1 = c_{1,0}, c_2 = c_{2,0}, \lambda_1 = m\lambda_{1,0}, \lambda_2 = m\lambda_{2,0}, \mu_1 = m\mu_{1,0}, \mu_2 = m\mu_{2,0}).$$

Inaczej mówiąc, m -krotne zwiększenie częstości zmian stanów lub m -krotne zwiększenie pojemności magazynu powodują taki sam wzrost wydajności systemu.

Wniosek 2.47. Istnieje związek między pojemnością magazynu V , prędkościami c , c_1 i c_2 , a wydajnością systemu. Mianowicie:

$$W(V = mV_0, c = mc_0, c_1 = mc_{1,0}, c_2 = mc_{2,0}, \lambda_1 = \lambda_{1,0}, \lambda_2 = \lambda_{2,0}, \mu_1 = \mu_{1,0}, \mu_2 = \mu_{2,0}) = \\ = m \cdot W(V = V_0, c = c_0, c_1 = c_{1,0}, c_2 = c_{2,0}, \lambda_1 = \lambda_{1,0}, \lambda_2 = \lambda_{2,0}, \mu_1 = \mu_{1,0}, \mu_2 = \mu_{2,0}).$$

Inaczej mówiąc, jednoczesne m -krotne zwiększenie wszystkich prędkości transportu i pojemności magazynu powoduje m -krotny wzrost wydajności systemu.

Reasumując, podnieść wydajność systemu można poprzez:

- zwiększenie pojemności magazynu,

- zwiększenie prędkości transportu zasobu,
- zmniejszenie awaryjności części wejściowej lub wyjściowej układu transportowego.

ROZDZIAŁ 3

ZWIĄZKI MIĘDZY PARAMETRAMI MODELI CIĄGLYCH UKŁADÓW TRANSPORTOWYCH

3.1. Model jednoczęściowego układu transportowego

W tym rozdziale przypomniany zostanie model jednoczęściowego (prostego) ciągłego układu transportowego. Każdy prezentowany w tej pracy wieloczęściowy układ transportowy złożony jest z takich prostych podukładów. Zakłada się, że wszystkie podukłady, bez względu na konfigurację, w jakiej pracują, oraz niezależnie od pozostałych podukładów, mogą ulegać losowym awariom. Ponadto zakłada się, że podukład może ulec awarii jedynie podczas swojej pracy oraz awaria co najmniej dwóch podukładów w tej samej chwili t ($t \geq 0$) jest zdarzeniem praktycznie niemożliwym (występującym z prawdopodobieństwem równym 0). Obserwacja funkcjonowania układu transportowego przez dostatecznie długi okres czasu pozwala oszacować średni czas trwania awarii oraz częstość i prawdopodobieństwo awarii. Wielkości te charakteryzują awaryjność układu transportowego (por. Battek [11], Battek i in. [8], Liana [102]).

Funkcjonowanie i -tego podukładu opisuje się dwustanowym procesem stochastycznym $\{X_i(t), t \geq 0\}$ ($i = 1, \dots, n$), gdzie n – liczba podukładów, $X_i(t) = 0$ oznacza pracę, natomiast $X_i(t) = 1$ – awarię i -tego podukładu w chwili t . O procesach $\{X_i(t), t \geq 0\}$ ($i = 1, \dots, n$) zakłada się, że są stacjonarnymi, jednorodnymi procesami Markowa (zob. Gichman, Skorochod [61]). Prawdopodobieństwa przejścia między stanami procesów $\{X_i(t), t \geq 0\}$ ($i = 1, \dots, n$) w przedziale czasu $(0, \Delta t)$, $\Delta t > 0$ określa się następująco:

$$\begin{cases} p_{01}^i(\Delta t) = P(X_i(t + \Delta t) = 1 | X_i(t) = 0) = \lambda_i \cdot \Delta t + o(\Delta t), \\ p_{00}^i(\Delta t) = P(X_i(t + \Delta t) = 0 | X_i(t) = 0) = 1 - \lambda_i \cdot \Delta t + o(\Delta t), \\ p_{10}^i(\Delta t) = P(X_i(t + \Delta t) = 0 | X_i(t) = 1) = \mu_i \cdot \Delta t + o(\Delta t), \\ p_{11}^i(\Delta t) = P(X_i(t + \Delta t) = 1 | X_i(t) = 1) = 1 - \mu_i \cdot \Delta t + o(\Delta t), \end{cases} \quad (3.1)$$

gdzie: $\lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$, λ_i – intensywność powstawania awarii w i -tym podukładzie, μ_i – intensywność likwidowania awarii w i -tym podukładzie (por. np. Battek i in. [8]).

Prawdopodobieństwo, że proces Markowa $\{X_i(t), t \geq 0\}$ ($i=1, \dots, n$) opisujący pracę i -tego podukładu znajdzie się w stanie m ($m=0,1$) w chwili $t + \Delta t$ zależy od stanu, w którym proces ten przebywał w chwili t zgodnie z poniższą równością:

$$P(X_i(t + \Delta t) = m) = P(X_i(t + \Delta t) = m | X_i(t) = m) \cdot P(X_i(t) = m) + \sum_{l \neq m} P(X_i(t + \Delta t) = m | X_i(t) = l) \cdot P(X_i(t) = l) \quad (3.2)$$

Uwzględniając założenie, że: $p_m^i = P(X_i(t + \Delta t) = m) = P(X_i(t) = m)$ dla $t \geq 0$, $\Delta t > 0$, na podstawie równości (3.2) otrzymuje się układ równań:

$$\begin{cases} p_0^i = p_0^i \cdot p_{00}^i(\Delta t) + p_1^i \cdot p_{10}^i(\Delta t), \\ p_1^i = p_0^i \cdot p_{01}^i(\Delta t) + p_1^i \cdot p_{11}^i(\Delta t). \end{cases} \quad (3.3)$$

Uwzględniając z kolei (3.1), redukując wyrazy podobne i przechodząc do granicy przy $\Delta t \rightarrow 0^+$ otrzymuje się układ równań zależnych:

$$\begin{cases} -\lambda p_0^i + \mu p_1^i = 0, \\ \lambda p_0^i - \mu p_1^i = 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

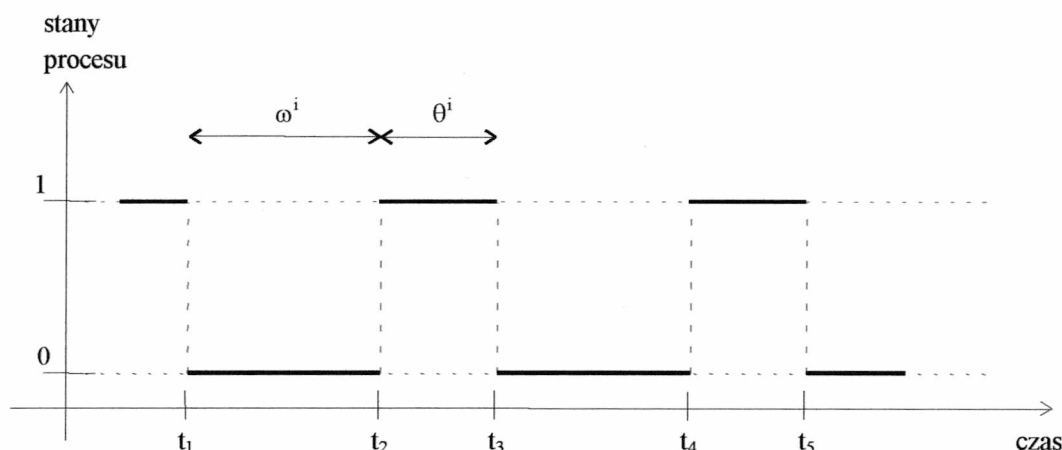
Dołączając warunek: $p_0^i + p_1^i = 1$, wyznacza się prawdopodobieństwa przebywania procesu $\{X_i(t), t \geq 0\}$ ($i=1, \dots, n$) w danym stanie (pracy lub awarii) w zależności od intensywności przejść pomiędzy stanami:

$$p_0^i = \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i}, \quad p_1^i = \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i}; \quad (3.5)$$

Oprócz prawdopodobieństw przebywania w poszczególnych stanach, innymi ważnymi charakterystykami procesu $\{X_i(t), t \geq 0\}$ ($i=1, \dots, n$) są: v_0^i – częstość wejścia do stanu pracy, v_1^i – częstość wejścia do stanu awarii. Dla opisywanego dwustanowego procesu częstości te są równe, ponieważ częstość wejścia do stanu pracy jest równa częstości wyjścia z niego, czyli wejścia do stanu awarii ($v_0^i = v_1^i$). Częstość wejścia do stanu pracy (v_0^i) jest odwrotnością średniego czasu pomiędzy dwoma kolejnymi wejściami do tego stanu. Czas ten z kolei jest sumą średnich czasów: pracy (ω^i) i awarii (θ^i) (por.

rys. 3.1). Mamy: $\omega^i = \frac{1}{\lambda_i}$, $\theta^i = \frac{1}{\mu_i}$ ($i=1, 2, \dots, n$), zatem:

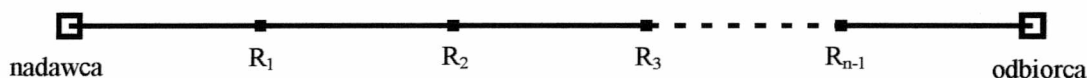
$$v_0^i = \frac{1}{\omega^i + \theta^i} = \frac{1}{\frac{1}{\lambda_i} + \frac{1}{\mu_i}} = \frac{\lambda_i \mu_i}{\lambda_i + \mu_i} = p_1^i \cdot \mu_i = p_0^i \cdot \lambda_i = v_1^i. \quad (3.6)$$

Rys. 3.1. Trajektoria pewnej realizacji procesu $X_i(t)$.

Funkcjonowanie i -tego podukładu ($i = 1, 2, \dots, n$) charakteryzują więc intensywności λ_i i μ_i . Określają one jednoznacznie zarówno prawdopodobieństwo przebywania układu transportowego w stanie pracy bądź awarii (3.5), jak też częstości wejścia do tych stanów (3.6).

3.2. Zasady upraszczania modelu szeregowo złożonego układu transportowego

Zakłada się, że układ transportowy (np. łączący nadawcę zasobu z jego odbiorcą) jest złożony z n ($n \geq 2$) podukładów połączonych szeregowo w tzw. punktach rewersji R_i ($i = 1, 2, \dots, n-1$) (por. rys. 3.2).



Rys. 3.2. Schemat szeregowo złożonego układu transportowego.

Funkcjonowanie i -tego podukładu ($i = 1, 2, \dots, n$) scharakteryzowane jest procesem $\{X_i(t), t \geq 0\}$ (analogicznie jak w rozdziale 3.1), natomiast całego układu transportowego – wektorowym procesem $\{\mathbf{X}(t), t \geq 0\}$, gdzie $\mathbf{X}(t) = \langle X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t) \rangle$. Stany

procesu $\{X(t), t \geq 0\}$ oznaczone są n-elementowymi ciągami złożonymi z 0 i 1, gdzie 0 (1) na i-tej pozycji sygnalizuje pracę (awarię) i-tego podukładu ($i = 1, 2, \dots, n$).

Układ transportowy pracuje, gdy są sprawne wszystkie jego podukłady. Awaria któregośkolwiek z nich unieruchamia całość. Zatem wektorowy proces $\{X(t), t \geq 0\}$ osiąga tylko stany oznaczone ciągami z co najwyżej jedną jedynką. Wprowadza się więc oznaczenia:

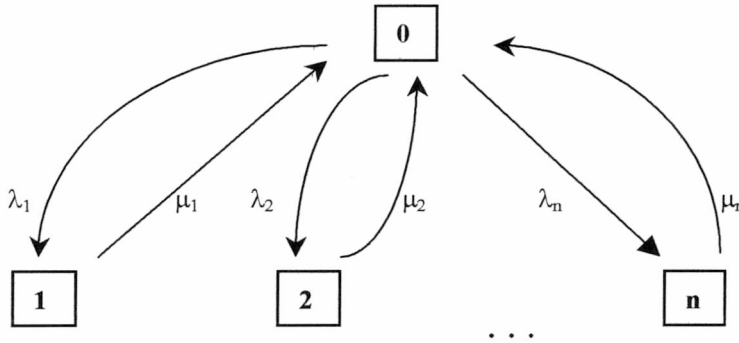
stan **0** – wszystkie podukłady są sprawne (ciąg złożony z samych 0),

stan **i** – i-ty podukład jest niesprawny (1 na i-tej pozycji w ciągu), $i = 1, 2, \dots, n$.

Przejścia procesu $\{X(t), t \geq 0\}$ pomiędzy tak zakodowanymi stanami opisane są wzorami (3.7) (por. rys. 3.3):

$$\begin{aligned} p_{0i}(\Delta t) &= P(X(t + \Delta t) = i | X(t) = 0) = \lambda_i \Delta t + o(\Delta t), \\ p_{00}(\Delta t) &= P(X(t + \Delta t) = 0 | X(t) = 0) = 1 - \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \Delta t + o(\Delta t), \\ p_{i0}(\Delta t) &= P(X(t + \Delta t) = 0 | X(t) = i) = \mu_i \Delta t + o(\Delta t), \\ p_{ii}(\Delta t) &= P(X(t + \Delta t) = i | X(t) = i) = 1 - \mu_i \Delta t + o(\Delta t), \end{aligned} \quad (3.7)$$

gdzie $i = 1, 2, \dots, n$, $\Delta t > 0$, $t \geq 0$.



Rys. 3.3. Schemat przejść pomiędzy stanami procesu $X(t)$ opisującego funkcjonowanie złożonego szeregowo układu transportowego.

Podobnie jak w rozdziale 3.1 (por. zależność (3.3)) otrzymuje się układ równań:

$$\begin{cases} \dot{p}_0 = p_0 \cdot p_{00}(\Delta t) + \sum_{i=1}^n p_i \cdot p_{i0}(\Delta t), \\ \dot{p}_i = p_0 \cdot p_{0i}(\Delta t) + p_i \cdot p_{ii}(\Delta t), \\ p_0 + \sum_{i=1}^n p_i = 1. \end{cases} \quad (3.8)$$

Rozwiązania układu równań (3.8), uzyskane z wykorzystaniem (3.7), są następujące:

$$p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\mu_i}}, \quad p_j = \frac{\frac{\lambda_j}{\mu_j}}{1 + \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\mu_i}}, \quad \text{dla } j=1,2,\dots,n. \quad (3.9)$$

Wzory (3.9) uzależniają prawdopodobieństwa przebywania procesu $\{X(t), t \geq 0\}$ w poszczególnych stanach od intensywności powstawania λ_i oraz likwidowania awarii μ_i w podukładach (nitkach) złożonego układu transportowego.

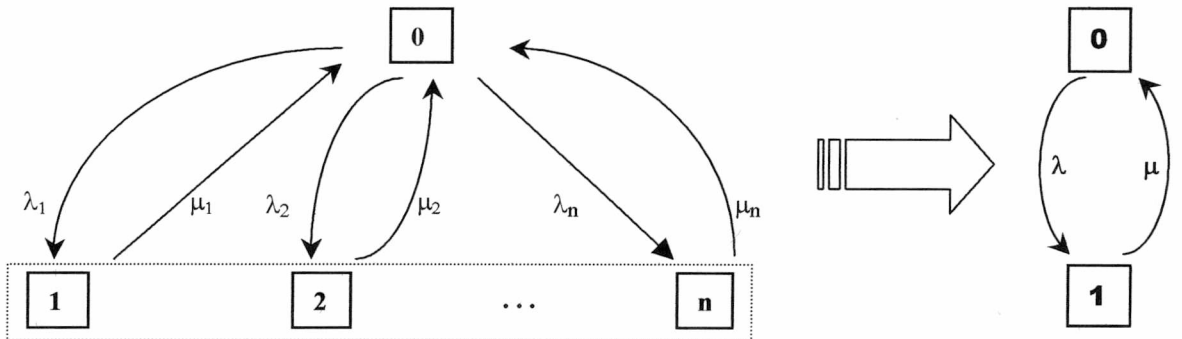
Do wyznaczenia częstości wejść procesu $\{X(t), t \geq 0\}$ do stanów i ($i=1,2,\dots,n$) wykorzystuje się zależność (3.6). Przyjmuje się bowiem, że częstość awarii podukładu transportowego jest niezależna od konfiguracji w jakiej pracuje. Stąd:

$$v_i = p_0 \cdot \lambda_i = \frac{\lambda_i}{1 + \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\mu_i}}. \quad (3.10)$$

Aby wyznaczyć częstość v_0 wystarczy zauważyć, że proces $\{X(t), t \geq 0\}$ tak często wpada w stan 0 , jak często w sumie wychodzi ze stanów i ($i=1,2,\dots,n$), zatem:

$$v_0 = \sum_{i=1}^n v_i = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i}{1 + \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\mu_i}}. \quad (3.11)$$

Aby określić prawdopodobieństwa pracy i awarii oraz częstość awarii złożonego układu transportowego, należy spojrzeć na wektorowy proces stochastyczny $\{X(t), t \geq 0\}$ opisujący jego pracę, jak na proces dwustanowy (stan pracy 0 i stan awarii 1). Stan pracy to stan 0 , natomiast stan awarii uzyskuje się przez „zlepianie” stanów i ($i=1,2,\dots,n$) (rys. 3.4).



Rys. 3.4. Schemat „zlepiania” stanów procesu wektorowego opisującego funkcjonowanie złożonego szeregowo układu transportowego.

Wykorzystując wyniki (3.9), (3.10) i (3.11) uzyskuje się żądane prawdopodobieństwa pracy oraz awarii złożonego układu transportowego:

$$P(\mathbf{X}(t) = \mathbf{0}) = \mathbf{p}_0 = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\mu_i}},$$

$$P(\mathbf{X}(t) = \mathbf{1}) = P\left(\bigcup_{i=1}^n (\mathbf{X}(t) = \mathbf{i})\right) = \sum_{i=1}^n P(\mathbf{X}(t) = \mathbf{i}) = \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\mu_i}}{1 + \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\mu_i}}, \quad (3.12)$$

oraz częstości „wejścia” do obu stanów:

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_0 = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i}{1 + \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\mu_i}}, \quad \mathbf{v}_1 = \sum_{i=1}^n \mathbf{v}_i = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i}{1 + \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\mu_i}}. \quad (3.13)$$

Tak określone charakterystyki procesu $\{\mathbf{X}(t), t \geq 0\}$ opisującego funkcjonowanie złożonego szeregowo układu transportowego zależą od n par parametrów (λ_i, μ_i) , $i = 1, 2, \dots, n$. Powstaje problem, czy ten „dwustanowy” wektorowy proces stochastyczny $\{\mathbf{X}(t), t \geq 0\}$ można opisać przy pomocy jedynie dwóch parametrów (λ, μ) , podobnie jak proces $\{X_i(t), t \geq 0\}$ omawiany w rozdziale 3.1. Gdyby było to możliwe, wtedy na podstawie związków (3.5):

$$P(\mathbf{X}(t) = \mathbf{0}) = \frac{\mu}{\lambda + \mu}, \quad P(\mathbf{X}(t) = \mathbf{1}) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}, \quad (3.14)$$

oraz na podstawie związków (3.6):

$$\mathbf{v}_0 = \frac{\mu \lambda}{\mu + \lambda} = \mathbf{v}_1. \quad (3.15)$$

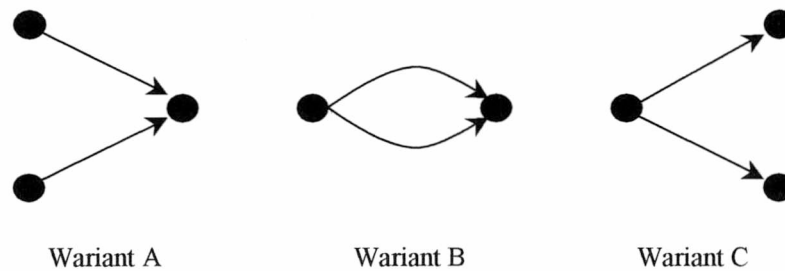
Oczywiście, taki opis nie mógłby zmieniać prawdopodobieństw pracy i awarii oraz częstości awarii złożonego układu. Przyrównując zatem (3.12) z (3.14) oraz (3.13) z (3.15), następnie rozwiązując powstały układ równań względem λ i μ , uzyskuje się:

$$\begin{cases} \lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i, \\ \mu = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i}{\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\mu_i}}. \end{cases} \quad (3.16)$$

Zależności (3.16) jednoznacznie przedstawiają intensywności: powstawania awarii (λ) i likwidowania awarii (μ) w złożonym szeregowo układzie transportowym, jako funkcje intensywności powstawania (λ_i) i likwidowania (μ_i) awarii w jego podukładach. Przedstawienie to pozwala uprościć model złożonego szeregowo układu transportowego, a przy tym nie zmienia ważnych charakterystyk jego funkcjonowania.

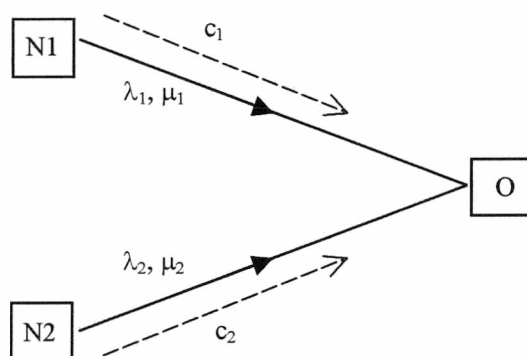
3.3. Reguły upraszczania modelu równoległe złożonego układu transportowego

Dwuczęściowe, równoległe złożone układy transportowe przedstawione są na rys. 3.5. W każdym z trzech wariantów strzałka symbolizuje jedną z nitek układu, początek strzałki – nadawcę zasobu, zaś jej koniec – odbiorcę zasobu.



Rys. 3.5. Różne warianty złożonego równoległe dwuczęściowego układu transportowego.

Funkcjonowanie układu transportowego we wszystkich trzech wariantach można opisać takim samym modelem, więc dalsze rozważania ograniczono do wariantu A. W tym wariantcie układ transportowy łączy dwóch nadawców ($N1$, $N2$) z jednym odbiorcą (O) i składa się z dwóch niezależnie działających podukładów (por. rys. 3.6). Działanie podukładu pierwszego łączącego $N1$ z O charakteryzuje proces $\{X_1(t), t \geq 0\}$ z intensywnościami λ_1 i μ_1 , natomiast pracę podukładu drugiego łączącego $N2$ z O – proces $\{X_2(t), t \geq 0\}$ z intensywnościami λ_2 i μ_2 (analogicznie jak w rozdziale 3.1). Zakłada się ponadto, że nadawca $N1$ przesyła zasób ze średnią prędkością c_1 ($c_1 > 0$), nadawca $N2$ – ze średnią prędkością c_2 ($c_2 > 0$).

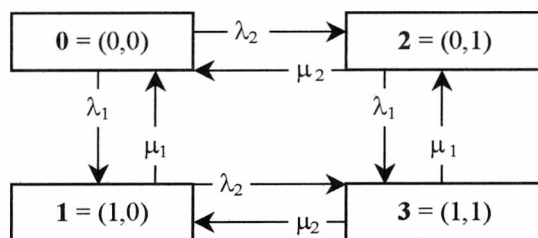


Rys. 3.6. Schemat wariantu A równoległe złożonego dwuczęściowego układu transportowego.

Podobnie jak w rozdziale 3.2, funkcjonowanie układu transportowego jako całości opisuje się wektorowym procesem stochastycznym $\{\mathbf{X}(t), t \geq 0\}$, gdzie $\mathbf{X}(t) = \langle X_1(t), X_2(t) \rangle$. Stany tego procesu są oznaczone 2-elementowymi ciągami złożonymi z 0 i 1, gdzie 0 (1) na i -tej pozycji oznacza pracę (awarię) i -tego podukładu, $i = 1, 2$. Wprowadza się następujące oznaczenia stanów procesu $\{\mathbf{X}(t), t \geq 0\}$:

- $\mathbf{0} := (0, 0)$ – obydwa podukłady pracują,
- $\mathbf{1} := (1, 0)$ – pierwszy podukład jest niesprawny,
- $\mathbf{2} := (0, 1)$ – drugi podukład jest niesprawny,
- $\mathbf{3} := (1, 1)$ – obydwa podukłady są niesprawne.

Na rysunku 3.7 przedstawiony jest schemat przejść pomiędzy stanami procesu $\{\mathbf{X}(t), t \geq 0\}$.



Rys. 3.7. Schemat przejść pomiędzy stanami wektorowego procesu $\mathbf{X}(t)$ opisującego funkcjonowanie złożonego równoległe dwuczęściowego układu transportowego.

Wykorzystując założenie o niezależności funkcjonowania obu podukładów (wówczas: $P(\mathbf{X}(t) = (m, l)) = P(X_1(t) = m) \cdot P(X_2(t) = l)$ dla $m, l = 0, 1$) oraz wzory (3.5),

otrzymuje się prawdopodobieństwa przebywania procesu $\{X(t), t \geq 0\}$ w poszczególnych stanach:

$$\begin{aligned} p_0 &= P(X(t) = (0,0)) = \frac{\mu_1}{\lambda_1 + \mu_1} \cdot \frac{\mu_2}{\lambda_2 + \mu_2}, \\ p_1 &= P(X(t) = (1,0)) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \mu_1} \cdot \frac{\mu_2}{\lambda_2 + \mu_2}, \\ p_2 &= P(X(t) = (0,1)) = \frac{\mu_1}{\lambda_1 + \mu_1} \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \mu_2}, \\ p_3 &= P(X(t) = (1,1)) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \mu_1} \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \mu_2}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

gdzie $t \geq 0$.

W celu wyznaczenia częstości wejścia procesu $\{X(t), t \geq 0\}$ do poszczególnych stanów, wykorzystuje się zależność (por. Battek i in. [8]):

$$v_j = \sum_{s \neq j} p_s \cdot \pi_{sj}, \quad (3.18)$$

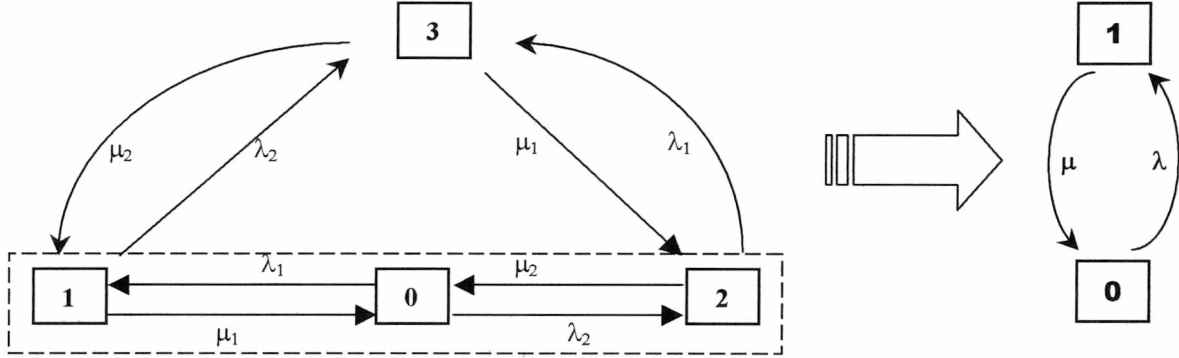
gdzie π_{sj} – intensywność prawdopodobieństwa przejścia ze stanu s do j ($j, s \in \{0,1,2,3\}$).

$$\begin{aligned} \text{Stąd: } v_0 &= p_1 \cdot \mu_1 + p_2 \cdot \mu_2 = \frac{\mu_1}{\lambda_1 + \mu_1} \cdot \frac{\mu_2}{\lambda_2 + \mu_2} \cdot (\lambda_1 + \lambda_2), \\ v_1 &= p_0 \cdot \lambda_1 + p_3 \cdot \mu_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \mu_1} \cdot \frac{\mu_2}{\lambda_2 + \mu_2} \cdot (\mu_1 + \lambda_2), \\ v_2 &= p_0 \cdot \lambda_2 + p_3 \cdot \mu_1 = \frac{\mu_1}{\lambda_1 + \mu_1} \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \mu_2} \cdot (\mu_2 + \lambda_1), \\ v_3 &= p_1 \cdot \lambda_2 + p_2 \cdot \lambda_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \mu_1} \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \mu_2} \cdot (\mu_1 + \mu_2). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Wzory (3.17) określają prawdopodobieństwa przebywania procesu wektorowego $\{X(t), t \geq 0\}$ w poszczególnych stanach, natomiast wzory (3.19) – częstości wejścia do tych stanów, jako funkcje intensywności powstawania (λ_i) i likwidowania (μ_i) awarii w obydwu podukładach ($i = 1, 2$).

W celu określenia prawdopodobieństw pracy i awarii oraz częstości awarii złożonego układu transportowego, wektorowy proces stochastyczny $\{X(t), t \geq 0\}$ opisujący jego działanie traktuje się jak proces dwustanowy (stan pracy **0** i stan awarii **1**). Stanem

awarii jest stan **3** procesu wektorowego, ponieważ tylko wtedy odbiorca nie otrzymuje zasobu. Stan pracy uzyskuje się przez „zlepianie” pozostałych stanów (**0**, **1**, **2**) (rys. 3.8).



Rys. 3.8. Schemat „zlepiania” stanów procesu wektorowego opisującego funkcjonowanie równoległe złożonego układu transportowego.

Wykorzystując zależności (3.17) uzyskuje się żądane prawdopodobieństwa pracy oraz awarii złożonego układu transportowego:

$$P(\mathbf{X}(t) = \mathbf{0}) = P\left(\bigcup_{j=0}^2 (\mathbf{X}(t) = j)\right) = \sum_{j=0}^2 P(\mathbf{X}(t) = j) = \frac{\mu_1 \lambda_2 + \mu_2 \lambda_1 + \mu_1 \mu_2}{(\lambda_1 + \mu_1)(\lambda_2 + \mu_2)}, \quad (3.20)$$

$$P(\mathbf{X}(t) = \mathbf{1}) = P(\mathbf{X}(t) = \mathbf{3}) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_1 + \mu_1)(\lambda_2 + \mu_2)}.$$

Częstość wejścia w stan awarii (równa częstości wejścia w stan pracy) uzyskuje się w oparciu o związki (3.19):

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_3 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \mu_1} \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \mu_2} \cdot (\mu_1 + \mu_2) = \mathbf{v}_1. \quad (3.21)$$

Aby ten „dwustanowy” wektorowy proces stochastyczny $\{\mathbf{X}(t), t \geq 0\}$ opisać (podobnie jak w rozdziale 3.2) przy pomocy jedynie dwóch parametrów (λ, μ) tak, by nie zmieniać prawdopodobieństw pracy i awarii złożonego układu oraz częstości awarii, przyrównuje się (3.14) i (3.20) oraz (3.15) i (3.21). Rozwiązując powstały układ równań względem λ i μ uzyskuje się poniższe zależności:

$$\begin{cases} \lambda = \frac{\mu_1 + \mu_2}{\frac{\mu_1}{\lambda_1} + \frac{\mu_2}{\lambda_2} + \frac{\mu_1}{\lambda_1} \cdot \frac{\mu_2}{\lambda_2}}, \\ \mu = \mu_1 + \mu_2. \end{cases} \quad (3.22)$$

Wzory (3.22) przedstawiają jednoznacznie intensywności: powstawania awarii (λ) i likwidowania awarii (μ) dla wektorowego procesu $\{\mathbf{X}(t), t \geq 0\}$, jako funkcje

intensywności powstawania (λ_i) i likwidowania (μ_i) awarii procesów składowych $\{X_i(t), t \geq 0\}$, gdzie $i = 1, 2$. Praktyczny sens wzorów (3.22) jest taki, że następuje jakby „zlepianie” dwóch nadawców i tylko jedna nitka transportowa łączy ich z odbiorcą. Intensywności λ i μ charakteryzują awaryjność tej nitki.

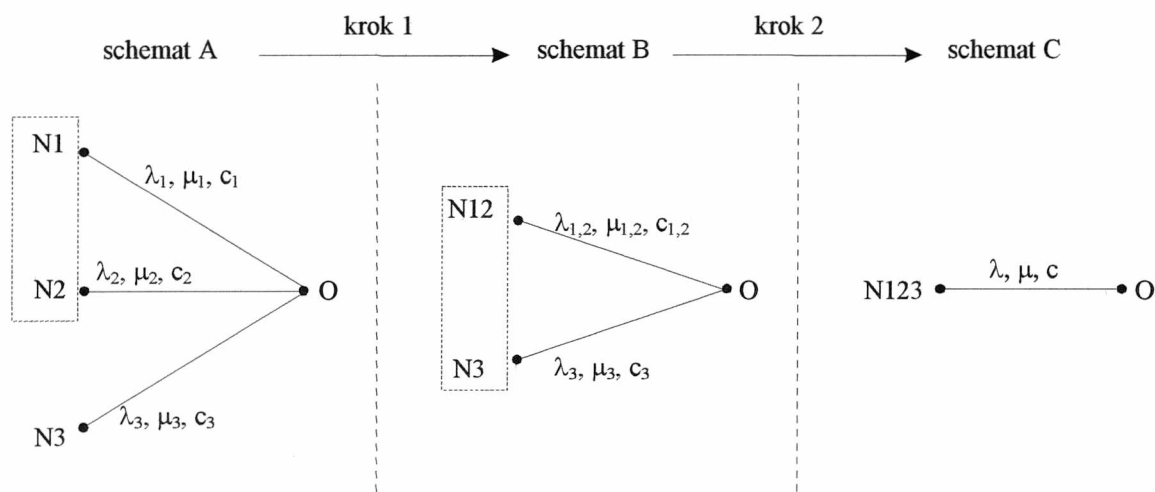
W tym uproszczonym schemacie średnia prędkość c , z jaką „zlepiony” nadawca załadunku układ transportowy zasobem wyrażona jest zależnością:

$$c = \frac{\left(1 + \frac{\lambda_2}{\mu_2}\right) \cdot c_1 + \left(1 + \frac{\lambda_1}{\mu_1}\right) \cdot c_2}{1 + \frac{\lambda_1}{\mu_1} + \frac{\lambda_2}{\mu_2}}. \quad (3.23)$$

Tak wyznaczona prędkość c zapewnia, że w wyniku uproszczenia schematu układu transportowego nie zmieni się średnia wielkość zasobu przekazanego odbiorcy w jednostce czasu. W przypadku szeregowo złożonego układu transportowanego rozważanego w rozdziale 3.2, średnia prędkość załadunku nie ulega zmianie w wyniku redukcji parametrów (wzory (3.16)) charakteryzujących awaryjność układu.

3.4. Odniesienie do zwielokrotnionych połączeń równoległych

Wyprowadzone w poprzednim podrozdziale wzory (3.22) i (3.23) można stosować również w przypadku bardziej złożonych układów, w których jeden odbiorca jest połączony układem transportowym z wieloma dostawcami. Dla przykładu rozpatrzony jest system z trzema dostawcami, przedstawiony na schemacie A rys. 3.9.



Rys. 3.9. Schemat redukcji parametrów w modelu trzyczęściowego równolegle złożonego układu transportowego.

Procedura postępowania jest wtedy dwukrokowa. W pierwszym kroku przechodzi się ze schematu A do B poprzez „zlepianie” dwóch podukładów, np. pierwszego i drugiego (por. rys. 3.9). Funkcjonowanie tego „zlepionego” podukładu charakteryzują intensywności $\lambda_{1,2}$ i $\mu_{1,2}$ wyznaczone zgodnie z (3.22) oraz prędkość $c_{1,2}$ wyznaczona zgodnie z (3.23):

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_{1,2} = \frac{\mu_1 + \mu_2}{\frac{\mu_1}{\lambda_1} + \frac{\mu_2}{\lambda_2} + \frac{\mu_1}{\lambda_1} \cdot \frac{\mu_2}{\lambda_2}}, \\ \mu_{1,2} = \mu_1 + \mu_2, \\ c_{1,2} = \frac{\left(1 + \frac{\lambda_2}{\mu_2}\right) \cdot c_1 + \left(1 + \frac{\lambda_1}{\mu_1}\right) \cdot c_2}{1 + \frac{\lambda_1}{\mu_1} + \frac{\lambda_2}{\mu_2}}. \end{array} \right.$$

Z kolei w drugim kroku przechodzi się ze schematu B do C, którego funkcjonowanie charakteryzują parametry λ , μ , c wyznaczone również na podstawie wzorów (3.22) i (3.23):

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda = \frac{\mu_{1,2} + \mu_3}{\frac{\mu_{1,2}}{\lambda_{1,2}} + \frac{\mu_3}{\lambda_3} + \frac{\mu_{1,2}}{\lambda_{1,2}} \cdot \frac{\mu_3}{\lambda_3}}, \\ \mu = \mu_{1,2} + \mu_3, \\ c = \frac{\left(1 + \frac{\lambda_3}{\mu_3}\right) \cdot c_{1,2} + \left(1 + \frac{\lambda_{1,2}}{\mu_{1,2}}\right) \cdot c_3}{1 + \frac{\lambda_{1,2}}{\mu_{1,2}} + \frac{\lambda_3}{\mu_3}}. \end{array} \right.$$

Tak wyznaczone parametry λ , μ są odpowiednio intensywnościami powstawania i likwidowania awarii w tym trzyczęściowym układzie transportowym, a c – średnią prędkością, z jaką trzech nadawcy łącznie załadują zasobem układ transportowy.

Opisana procedura pozwala charakteryzować funkcjonowanie dowolnie dużych układów transportowych przy pomocy jedynie trzech parametrów: λ , μ oraz c .

3.5. Praktyczne znaczenie wzorów redukcyjnych

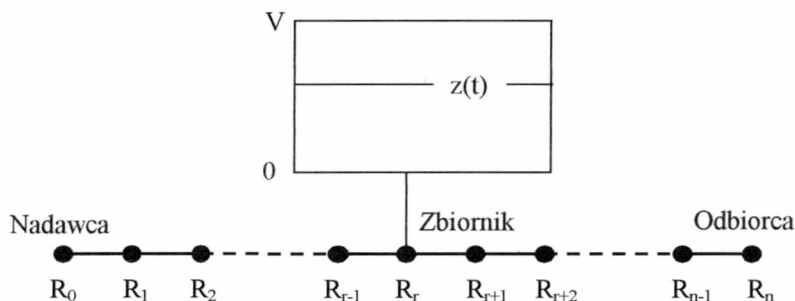
W rozdziale 3 przedstawiono, jak odpowiedni proces stochastyczny może modelować funkcjonowanie jedno- lub wieloczęściowego (złożonego szeregowo lub równoległe) układu transportowego. Pokazano, że model prosty opisany w rozdziale 3.1 można z powodzeniem stosować również do opisu złożonych układów. Pozwalają na to wzory (3.16) oraz (3.22) i (3.23). Dzięki nim następuje redukcja parametrów charakteryzujących funkcjonowanie układu transportowego, bowiem zamiast n par (λ_i, μ_i) , $i = 1, 2, \dots, n$, uzyskuje się jedną parę (λ, μ) . Redukcja taka znacznie upraszcza analizę ekonomiczną systemów gospodarki zasobami, w których złożony układ transportowy współpracuje np. z magazynem – zbiornikiem (zob. Król, Liana [94], Liana [101]). Można wtedy również zaadaptować wyniki uzyskane dla systemów gromadzenia zapasów z jedno- bądź dwuczęściowym układem transportowym (zob. Galanc [46], Król [97], Król, Liana [91, 92, 93], Król, Pisula [98], Pisula [123, 124, 125]) do systemów z układami wieloczęściowymi. Badaniu systemu z rozbudowanym układem transportowym z wykorzystaniem ww. wzorów redukcyjnych poświęcony jest następny rozdział niniejszej pracy.

ROZDZIAŁ 4

ANALIZA FUNKCJONOWANIA SYSTEMÓW GOSPODARKI ZASOBAMI Z SZEREGOWO ZŁOŻONYMI CIĄGŁYMI UKŁADAMI TRANSPORTOWYMI

4.1. Model systemu ze złożonym szeregowo układem transportowym

Rozpatrywany w tym rozdziale system typu „transport – zapasy” przedstawiony jest na rys. 4.1. System ten jest złożony z nadawcy N, odbiorcy O, łączącego ich wieloczęściowego układu transportowego oraz magazynu-zbiornika (zob. Król, Liana [94], Liana [101]).



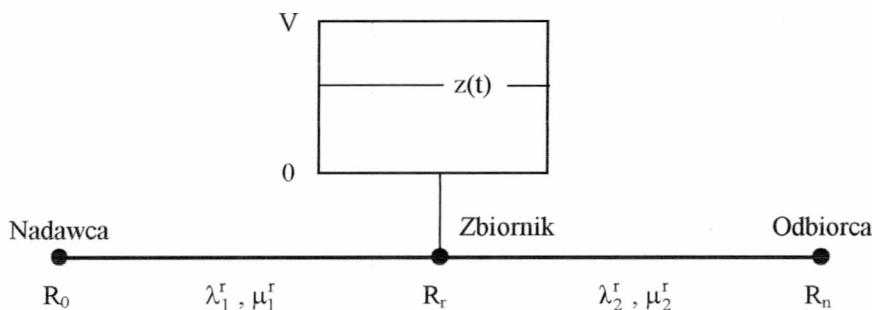
Rys. 4.1. Schemat systemu z szeregowo złożonym układem transportowym.

Układ transportowy składa się z n ($n \geq 2$) podukładów (nitek). Funkcjonowanie i -tego ($i = 1, 2, \dots, n$) podukładu opisane jest tak, jak w rozdziale 3.1. Kolejne nitki układu transportowego połączone są szeregowo w punktach rewersji R_i ($i = 1, 2, \dots, n-1$). W jednym z tych punktów umieszczony jest magazyn o skończonej pojemności V ($0 < V < \infty$). Miejsce lokalizacji magazynu R_r ($r = 1, 2, \dots, n-1$) dzieli naturalnie cały układ transportowy na dwie części: od nadawcy do magazynu (zwaną częścią wejściową) oraz od magazynu do odbiorcy (zwaną częścią wyjściową).

System funkcjonuje wg następującego schematu. Gdy wszystkie nitki są sprawne, nadawca przesyła zasób bezpośrednio do odbiorcy ze średnią prędkością c ($c > 0$). Awaria jednej z nitek części wejściowej unieruchamia tylko tę część. Wtedy odbiorca poprzez sprawną część wyjściową może nadal otrzymywać zasób z magazynu. Zasób wybierany

jest z magazynu ze średnią prędkością c_2 ($0 < c_2 \leq c$). Podobnie, jeśli awarii uległa jedna z nitek części wyjściowej unieruchamiając całą tę część, to nadal możliwy jest transport zasobu sprawną częścią wejściową. Nadawca przesyła wtedy zasób do magazynu ze średnią prędkością c_1 ($0 < c_1 \leq c$).

Wzory (3.16) pozwalają uprościć schemat systemu (por. rys. 4.2). Nie rozróżnia się już na nim poszczególnych nitek układu transportowego, a jedynie część wejściową i wyjściową. Przez λ_1^r (μ_1^r) oznacza się intensywność powstawania (likwidowania) awarii w części wejściowej, natomiast przez λ_2^r (μ_2^r) – intensywność powstawania (likwidowania) awarii w części wyjściowej układu transportowego.



Rys. 4.2. Schemat systemu z dwuczęściowym układem transportowym.

Pomiędzy parametrami niezawodnościowymi układów transportowych przedstawionych na rys. 4.1 i rys. 4.2 zachodzą związki (na podstawie 3.16):

$$\begin{aligned} \lambda_1^r &= \sum_{i=1}^r \lambda_i, & \lambda_2^r &= \sum_{i=r+1}^n \lambda_i, \\ \mu_1^r &= \frac{\lambda_1^r}{\sum_{i=1}^r \frac{\lambda_i}{\mu_i}}, & \mu_2^r &= \frac{\lambda_2^r}{\sum_{i=r+1}^n \frac{\lambda_i}{\mu_i}}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

gdzie: λ_i – intensywność powstawania awarii, natomiast μ_i – intensywność likwidowania awarii w i -tej nitce układu transportowego, $i = 1, 2, \dots, n$.

Tak uproszczony system nie różni się zasadniczo od systemu „bazowego” przedstawionego w rozdziale 2. Zatem również w przypadku rozpatrywanego w tym rozdziale systemu aktualne są wnioski 2.1 – 2.47. Mówią one, jaki jest wpływ poszczególnych parametrów systemu na efektywność jego funkcjonowania, mierzona różnymi wskaźnikami. Należy jednak podkreślić, że wartości parametrów niezawodnościowych $(\lambda_1^r, \lambda_2^r, \mu_1^r, \mu_2^r)$ systemu złożonego w istotny sposób zależą od

miejsca lokalizacji magazynu w systemie oraz od położenia poszczególnych nitek w układzie transportowym. Oznacza to, że optymalna konfiguracja systemu staje się ważnym problemem decyzyjnym, generującym podczas jego późniejszej pracy znaczne i wymierne ekonomiczne zyski. Jako kryterium optymalizacyjne służyć może jeden ze wskaźników omówionych w rozdziale 2.

W celu wskazania optymalnej konfiguracji systemu można postępować według schematu przedstawionego poniżej.

1. Określić liczbę nitek układu transportowego n oraz punkty rewersji R_r ($r=1,2,\dots,n-1$), w których jest możliwa instalacja magazynu.
2. Ustalić wartości parametrów technologicznych systemu (V, c, c_1, c_2) oraz parametrów niezawodnościowych ($\lambda_i, \mu_i, i = 1,2,\dots,n$) każdej z nitek układu transportowego.
3. Dla każdego punktu rewersji R_r oraz wszystkich permutacji nitek układu transportowego wyznaczyć wartości parametrów niezawodnościowych części wejściowej i wyjściowej, wykorzystując w tym celu zależności (4.1).
4. Dla każdego przypadku obliczyć wartość wybranego wskaźnika, wykorzystując jego postać analityczną.
5. Zestawienie otrzymanych w poprzednim punkcie wyników w tabelach lub na wykresach pomoże wybrać te konfiguracje systemu (miejsca lokalizacji magazynu i ustawienia poszczególnych podukładów), dla których wartości wybranego wskaźnika są optymalne.

W następnych rozdziałach przedstawione są wnioski dotyczące optymalnej konfiguracji badanego systemu w zależności od przyjętego kryterium decyzyjnego.

4.2. Ocena efektywności funkcjonowania systemu w wariancie jednorodnym układu transportowego

W rozdziale tym poddany jest analizie tzw. wariant jednorodny systemu gospodarki zasobami rozpatrywanego w rozdziale 4.1. Wariant ten charakteryzuje się jednorodną awaryjnością poszczególnych nitek układu transportowego, tzn.

$$\begin{aligned}\lambda_i &= \lambda, \\ \mu_i &= \mu,\end{aligned}\tag{4.2}$$

dla $i = 1,2,\dots,n$.

Wydaje się on być szczególnie interesujący, ponieważ odpowiada sytuacji, gdy układ transportowy złożony jest z identycznych elementów (podukładów) pracujących w porównywalnych warunkach. Zależności (4.1) w tym wariancie przyjmują prostszą postać:

$$\begin{aligned}\lambda_1^r &= r\lambda, & \lambda_2^r &= (n-r)\lambda, \\ \mu_1^r &= \mu, & \mu_2^r &= \mu.\end{aligned}\quad (4.3)$$

Problem znalezienia optymalnej konfiguracji systemu sprowadza się obecnie do wskazania najkorzystniejszego miejsca lokalizacji magazynu. W kolejnych podrozdziałach analizowane są wskaźniki: deficytu P_d , przepełnienia P_p , wydajności W oraz wskaźnik E_{dp} . W tabelach 4.1 – 4.4 i na wykresach 4.3 – 4.16 przedstawione są wyniki analizy liczbowej tych wskaźników dla przykładowego systemu. Przyjęto, że układ transportowy wybranego do analizy systemu składa się z 10 nitek ($n=10$). W każdej z nich intensywność λ_i jest równa 1, natomiast intensywność μ_i jest równa 2 ($i=1,2,\dots,10$). W wybranym punkcie rewersji R_r ($r=1,2,\dots,9$) ulokowany jest magazyn o różnych pojemnościach V . Warianty $V=0$ oraz $V=\infty$ odpowiadają sytuacjom, jakby w systemie umieszczono odpowiednio zbiornik o zerowej bądź nieograniczonej pojemności. Uwzględniono także różne prędkości zapełniania c_1 i wybierania c_2 .

4.2.1. Deficyt w zbiorniku

Postać analityczna wskaźnika deficytu dla rozpatrywanego wariantu jednorodnego określona jest następująco:

$$P_d = \begin{cases} P_2 \cdot \frac{\left(\frac{r}{1 - \frac{n-r}{\frac{c_1}{c_2}}} \right)}{\exp\left(\lambda \cdot \frac{V}{c_1} \cdot \frac{r}{n} \cdot \left(0,5n + \frac{\mu}{\lambda} \right) \cdot \left(\frac{n-r}{r} \cdot \frac{c_1}{c_2} - 1 \right) \right) - \frac{r}{\frac{c_1}{c_2}}}, & \text{dla } \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{r}{n-r}, \\ P_2 \cdot \frac{1}{1 + \lambda \cdot \frac{V}{c_1} \cdot \frac{r}{n} \cdot \left(0,5n + \frac{\mu}{\lambda} \right)}, & \text{dla } \frac{c_1}{c_2} = \frac{r}{n-r}, \end{cases} \quad (4.4)$$

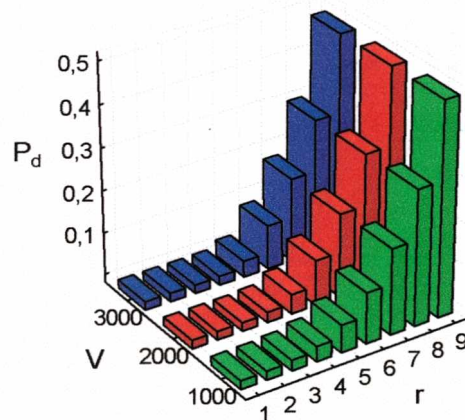
$$\text{gdzie: } P_2 = \frac{r}{r + \frac{\mu}{\lambda}} \cdot \frac{\frac{\mu}{\lambda}}{n - r + \frac{\mu}{\lambda}}.$$

Wzór (4.4) uzyskano wykorzystując związki (4.3) oraz postać analityczną wskaźnika P_d dla systemu „bazowego” (2.9). We wzorze (2.9) przyjęto, że $\lambda_i = \lambda_i^r$ i $\mu_i = \mu_i^r$ dla $i = 1, 2$. W tabeli 4.1 przedstawione są wyniki analizy liczbowej wskaźnika deficytu.

Tabela 4.1. Wartości wskaźnika deficytu P_d dla systemu z jednorodnym układem transportowym.

Pojemność magazynu	Miejsce lokalizacji magazynu w systemie								
V	R ₁	R ₂	R ₃	R ₄	R ₅	R ₆	R ₇	R ₈	R ₉
$c_1 = 1000, c_2 = 600, \lambda = 1, \mu = 2$									
0	0,061	0,100	0,133	0,167	0,204	0,250	0,311	0,400	0,545
1 000	0	0	0	0,002	0,008	0,036	0,108	0,237	0,445
2 000	0	0	0	0	0,001	0,015	0,093	0,233	0,444
3 000	0	0	0	0	0	0,008	0,090	0,233	0,444
∞	0	0	0	0	0	0	0,089	0,233	0,444
$c_1 = 1000, c_2 = 1000, \lambda = 1, \mu = 2$									
0	0,061	0,100	0,133	0,167	0,204	0,250	0,311	0,400	0,545
1 000	0	0,001	0,005	0,016	0,045	0,100	0,183	0,301	0,485
2 000	0	0	0	0,004	0,026	0,087	0,178	0,300	0,485
3 000	0	0	0	0,001	0,018	0,084	0,178	0,300	0,485
∞	0	0	0	0	0	0,083	0,178	0,300	0,485
$c_1 = 600, c_2 = 1000, \lambda = 1, \mu = 2$									
0	0,061	0,100	0,133	0,167	0,204	0,250	0,311	0,400	0,545
1 000	0	0,002	0,011	0,038	0,087	0,151	0,231	0,340	0,509
2 000	0	0	0,002	0,026	0,082	0,150	0,231	0,340	0,509
3 000	0	0	0,001	0,021	0,082	0,150	0,231	0,340	0,509
∞	0	0	0	0,017	0,082	0,150	0,231	0,340	0,509

Źródło: opracowanie własne.



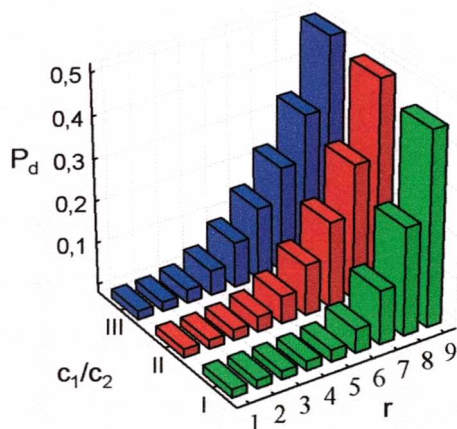
Rys. 4.3. Wykres wartości wskaźnika P_d w zależności od r i V przy ustalonych wartościach pozostałych parametrów ($n=10, c_1=1000, c_2=1000, \lambda=1, \mu=2$).

Analiza wskaźnika P_d prowadzi do następujących wniosków.

Wniosek 4.1. Dla dowolnie ustalonych wartości V , c_1 , c_2 wskaźnik P_d jest rosnącą funkcją zmiennej r , czyli najmniejsze wartości przyjmuje dla $r=1$. Aby zatem zminimalizować straty spowodowane deficytem należy magazyn zlokalizować jak najdalej od odbiorcy, czyli w punkcie R_1 (por. rys. 4.3).

Wniosek 4.2. Zmiana pojemności magazynu nie powoduje zmiany optymalnego (minimalizującego P_d) punktu lokalizacji magazynu w systemie. Jednak, im magazyn jest większy, tym mniejsze są różnice w wartościach wskaźnika P_d między punktem R_1 a punktami sąsiednimi (np. R_2 , R_3). Zatem, ulokowanie magazynu o odpowiednio dużej pojemności w punkcie np. R_3 zamiast w R_1 , nie musi powodować istotnego wzrostu strat spowodowanych deficytem.

Wniosek 4.3. Zmiana wartości ilorazu prędkości zapełniania i wybierania c_1/c_2 nie powoduje zmiany optymalnego (minimalizującego P_d) punktu lokalizacji magazynu w systemie. Jednak, im ten iloraz jest większy, tym mniejsze są różnice w wartościach wskaźnika P_d między punktem R_1 a punktami sąsiednimi (np. R_2 , R_3). Zatem, ulokowanie magazynu w punkcie np. R_3 zamiast w R_1 nie musi powodować istotnego wzrostu strat spowodowanych deficytem, jeśli iloraz c_1/c_2 będzie odpowiednio duży (por. rys. 4.4).



Rys. 4.4. Wykres wartości wskaźnika P_d w zależności od r i c_1/c_2 przy ustalonych wartościach pozostałych parametrów ($n=10$, $\lambda=1$, $\mu=2$, $V=1000$). Przyjęte oznaczenia:
I - $c_1=1000$, $c_2=600$, II - $c_1=1000$, $c_2=1000$, III - $c_1=600$, $c_2=1000$,

Wniosek 4.4. Zwiększając pojemność magazynu można sprowadzić wartości wskaźnika P_d dowolnie blisko 0, gdy stosunek prędkości zapełniania do prędkości wybierania (c_1/c_2) jest nie mniejszy niż stosunek liczby nitek części wejściowej do liczby nitek części wyjściowej układu transportowego ($r/(n-r)$). Mamy bowiem

$$\lim_{V \rightarrow \infty} P_d = \begin{cases} 0, & \text{dla } \frac{c_1}{c_2} \geq \frac{r}{n-r}, \\ \frac{r}{r + \frac{\mu}{\lambda}} \cdot \frac{\frac{\mu}{\lambda}}{n-r + \frac{\mu}{\lambda}} \cdot \left(1 - \frac{\frac{c_1}{c_2}}{\frac{r}{n-r}}\right), & \text{dla } \frac{c_1}{c_2} < \frac{r}{n-r}. \end{cases}$$

4.2.2. Przepelnienie zbiornika

Postać analityczna wskaźnika przepelnienia dla rozpatrywanego wariantu jednorodnego określona jest następująco:

$$P_p = \begin{cases} P_3 \cdot \frac{\left(1 - \frac{r}{n-r} \cdot \frac{c_1}{c_2}\right) \cdot \exp\left(\lambda \cdot \frac{V}{c_1} \cdot \frac{r}{n} \cdot \left(0,5n + \frac{\mu}{\lambda}\right) \cdot \left(\frac{n-r}{r} \cdot \frac{c_1}{c_2} - 1\right)\right)}{\exp\left(\lambda \cdot \frac{V}{c_1} \cdot \frac{r}{n} \cdot \left(0,5n + \frac{\mu}{\lambda}\right) \cdot \left(\frac{n-r}{r} \cdot \frac{c_1}{c_2} - 1\right)\right) - \frac{r}{\frac{c_1}{c_2}}}, & \text{dla } \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{r}{n-r}, \\ P_3 \cdot \frac{1}{1 + \lambda \cdot \frac{V}{c_1} \cdot \frac{r}{n} \cdot \left(0,5n + \frac{\mu}{\lambda}\right)}, & \text{dla } \frac{c_1}{c_2} = \frac{r}{n-r}, \end{cases} \quad (4.5)$$

$$\text{gdzie: } P_3 = \frac{\frac{\mu}{\lambda}}{r + \frac{\mu}{\lambda}} \cdot \frac{n-r}{n-r + \frac{\mu}{\lambda}}.$$

Wzór (4.5) uzyskano wykorzystując związki (4.3) oraz postać analityczną wskaźnika P_p dla systemu „bazowego” (2.11). We wzorze (2.11) przyjęto, że $\lambda_i = \lambda_i^r$ i $\mu_i = \mu_i^r$ dla $i = 1, 2$. W tabeli 4.2 przedstawione są wyniki analizy liczbowej wskaźnika przepelnienia.

Tabela 4.2. Wartości wskaźnika przepelnienia P_p dla systemu z jednorodnym układem transportowym.

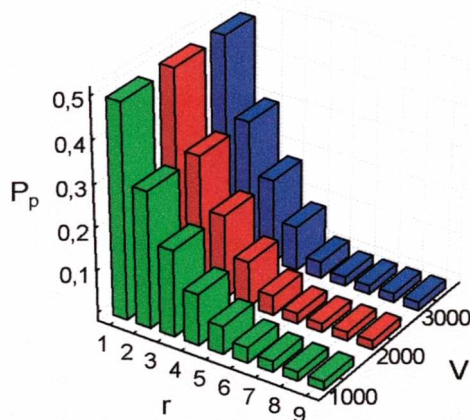
Pojemność magazynu	Miejsce lokalizacji magazynu w systemie								
V	R ₁	R ₂	R ₃	R ₄	R ₅	R ₆	R ₇	R ₈	R ₉
$c_1 = 1000, c_2 = 600, \lambda = 1, \mu = 2$									
0	0,545	0,400	0,311	0,250	0,204	0,167	0,133	0,100	0,061
1 000	0,509	0,340	0,231	0,151	0,087	0,038	0,011	0,002	0
2 000	0,509	0,340	0,231	0,150	0,082	0,026	0,002	0	0
3 000	0,509	0,340	0,231	0,150	0,082	0,021	0,001	0	0
∞	0,509	0,340	0,231	0,150	0,082	0,017	0	0	0
$c_1 = 1000, c_2 = 1000, \lambda = 1, \mu = 2$									

0	0,545	0,4	0,311	0,250	0,204	0,167	0,133	0,100	0,061
1 000	0,485	0,301	0,183	0,100	0,045	0,016	0,005	0,001	0
2 000	0,485	0,300	0,178	0,087	0,026	0,004	0	0	0
3 000	0,485	0,300	0,178	0,084	0,018	0,001	0	0	0
∞	0,485	0,300	0,178	0,083	0	0	0	0	0
$c_1 = 600, c_2 = 1000, \lambda = 1, \mu = 2$									
0	0,545	0,400	0,311	0,250	0,204	0,167	0,133	0,100	0,061
1 000	0,445	0,237	0,108	0,036	0,008	0,002	0	0	0
2 000	0,444	0,233	0,093	0,015	0,001	0	0	0	0
3 000	0,444	0,233	0,090	0,008	0	0	0	0	0
∞	0,444	0,233	0,089	0	0	0	0	0	0

Źródło: opracowanie własne.

Analiza wskaźnika P_p prowadzi do następujących wniosków.

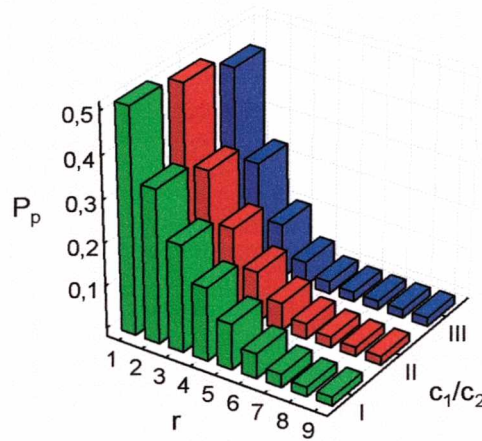
Wniosek 4.5. Dla dowolnie ustalonych wartości V , c_1 , c_2 wskaźnik P_p jest malejącą funkcją zmiennej r , czyli najmniejsze wartości przyjmuje dla $r=n-1$ (w tab.4.2 dla $r=9$). Aby zatem zminimalizować straty spowodowane przepełnieniem należy magazyn zlokalizować jak najdalej od nadawcy, czyli w punkcie R_{n-1} (por. rys. 4.5).



Rys. 4.5. Wykres wartości wskaźnika P_p w zależności od r i V przy ustalonych wartościach pozostałych parametrów ($n=10$, $c_1=1000$, $c_2=1000$, $\lambda=1$, $\mu=2$).

Wniosek 4.6. Zmiana pojemności magazynu nie powoduje zmiany optymalnego (minimalizującego P_p) punktu lokalizacji magazynu w systemie. Jednak, im magazyn jest większy, tym mniejsze są różnice w wartościach wskaźnika P_p między punktem R_{n-1} a punktami sąsiednimi (np. R_{n-2} , R_{n-3}). Zatem, ulokowanie magazynu o odpowiednio dużej pojemności w punkcie np. R_{n-3} zamiast w R_{n-1} , nie musi powodować istotnego wzrostu strat spowodowanych przepełnieniem.

Wniosek 4.7. Zmiana wartości ilorazu prędkości zapełniania i wybierania c_1/c_2 nie powoduje zmiany optymalnego (minimalizującego P_p) punktu lokalizacji magazynu w systemie. Jednak, im ten iloraz jest mniejszy, tym mniejsze są różnice w wartościach wskaźnika P_p między punktem R_{n-1} a punktami sąsiednimi (np. R_{n-2} , R_{n-3}). Zatem, ulokowanie magazynu w punkcie np. R_{n-3} zamiast w R_{n-1} nie musi powodować istotnego wzrostu strat spowodowanych przepełnieniem, jeśli iloraz c_1/c_2 będzie odpowiednio mały (por. rys. 4.6).



Rys. 4.6. Wykres wartości wskaźnika P_p w zależności od r i c_1/c_2 przy ustalonych wartościach pozostałych parametrów ($n=10$, $\lambda=1$, $\mu=2$, $V=1000$). Przyjęte oznaczenia: I - $c_1=1000$, $c_2=600$, II - $c_1=1000$, $c_2=1000$, III - $c_1=600$, $c_2=1000$,

Wniosek 4.8. Zwiększając pojemność magazynu można sprowadzić wartości wskaźnika P_p dowolnie blisko 0, gdy stosunek prędkości zapełniania do prędkości wybierania (c_1/c_2) jest nie większy niż stosunek liczby nitek części wejściowej do liczby nitek części wyjściowej układu transportowego ($r/(n-r)$). Mamy bowiem

$$\lim_{V \rightarrow \infty} P_p = \begin{cases} 0, & \text{dla } \frac{c_1}{c_2} \leq \frac{r}{n-r}, \\ \frac{\frac{\mu}{\lambda}}{r + \frac{\mu}{\lambda}} \cdot \frac{n-r}{n-r + \frac{\mu}{\lambda}} \cdot \left(1 - \frac{\frac{r}{n-r}}{\frac{c_1}{c_2}} \right), & \text{dla } \frac{c_1}{c_2} > \frac{r}{n-r}. \end{cases}$$

Wniosek 4.9. Istnieje związek pomiędzy wartościami wskaźników deficytu i przepełnienia, a mianowicie:

$$\begin{aligned} P_d(V = V_0, \lambda = \lambda_0, \mu = \mu_0, c_1 = a, c_2 = b, n = n_0, r = r_0) = \\ = P_p(V = V_0, \lambda = \lambda_0, \mu = \mu_0, c_1 = b, c_2 = a, n = n_0, r = n_0 - r_0). \end{aligned}$$

4.2.3. Łączne straty spowodowane deficytem i przepełnieniem

Wskaźnik E_{dp} , zdefiniowany równością (2.13), określa średnią wielkość strat w systemie spowodowanych deficytem i przepełnieniem. W tabeli 4.3 przedstawione są wartości wskaźnika E_{dp} odpowiadające różnym wartościom parametrów dla przykładowego systemu.

Tabela 4.3. Wartości wskaźnika E_{dp} dla systemu z jednorodnym układem transportowym.

Pojemność magazynu	Miejsce lokalizacji magazynu w systemie								
V	R ₁	R ₂	R ₃	R ₄	R ₅	R ₆	R ₇	R ₈	R ₉
$c_1 = 1000, c_2 = 600, \lambda = 1, \mu = 2$									
0	581,1	460	391,1	350	326,5	316,7	320	340	387,9
1 000	509,1	340	231,4	151,815	91,7	59,9	76,1	144,5	267,2
2 000	509,1	340	231,1	150	82,6	34,9	58,2	140,2	266,7
3 000	509,1	340	231,1	150	81,7	26,2	54,5	140	266,7
∞	509,1	340	231,1	150	81,6	16,7	53,3	140	266,7
$c_1 = 1000, c_2 = 1000, \lambda = 1, \mu = 2$									
0	606,1	500	444,4	416,7	408,2	416,7	444,4	500	606,1
1 000	485,2	302,3	187,3	116,1	90,7	116,1	187,3	302,3	485,2
2 000	484,8	300	178,3	90,4	51	90,4	178,3	300	484,8
3 000	484,8	300	177,8	85	35,5	85	177,8	300	484,8
∞	484,8	300	177,8	83,3	0	83,3	177,8	300	484,8
$c_1 = 600, c_2 = 1000, \lambda = 1, \mu = 2$									
0	387,9	340	320	316,7	326,5	350	391,1	460	581,1
1 000	267,2	144,5	76,1	59,9	91,7	151,815	231,4	340	509,1
2 000	266,7	140,2	58,2	34,9	82,6	150	231,1	340	509,1
3 000	266,7	140	54,5	26,2	81,7	150	231,1	340	509,1
∞	266,7	140	53,3	16,7	81,6	150	231,1	340	509,1
$c_1 = 200, c_2 = 1000, \lambda = 1, \mu = 2$									
0	169,7	180	195,6	216,7	244,9	283,3	337,8	420	557,6
100	118,7	111,4	122,8	146,3	180,2	226,2	289,7	382,7	534,4
500	63,9	46,4	75,3	117,2	163,3	216,7	284,4	380	533,3
1 000	51,9	29,8	71,4	116,7	163,3	216,7	284,4	380	533,3
2 000	48,7	22	71,1	116,7	163,3	216,7	284,4	380	533,3
3 000	48,5	20,5	71,1	116,7	163,3	216,7	284,4	380	533,3
∞	48,5	20	71,1	116,7	163,3	216,7	284,4	380	533,3

Źródło: opracowanie własne.

Analiza wskaźnika E_{dp} prowadzi do następujących wniosków.

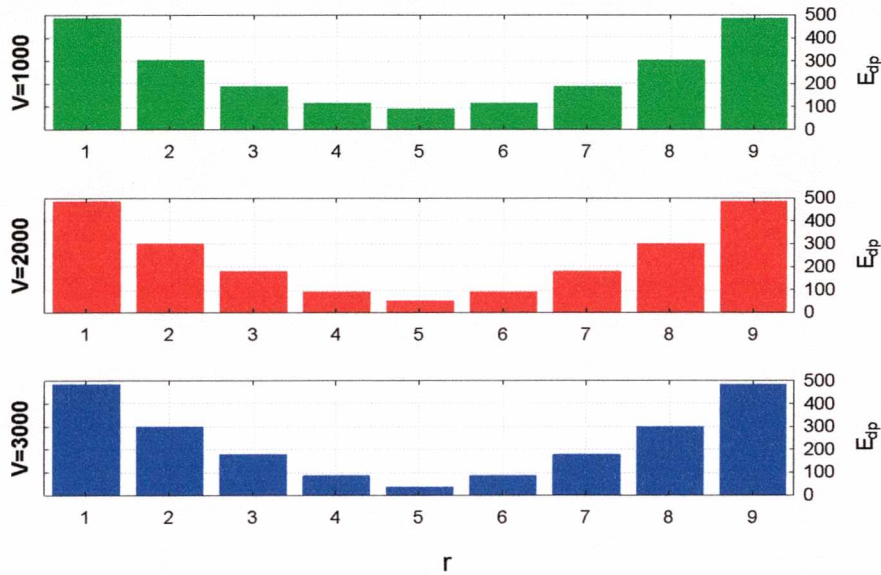
Wniosek 4.10. Badając wielkość strat spowodowanych deficytem i przepełnieniem przy różnych wartościach parametrów, wystarczy analizować warianty, gdy $c_1 \leq c_2$. Zachodzi bowiem związek:

$$\begin{aligned}
 E_{dp}(V = V_0, \lambda = \lambda_0, \mu = \mu_0, c_1 = a, c_2 = b, n = n_0, r = r_0) &= \\
 &= E_{dp}(V = V_0, \lambda = \lambda_0, \mu = \mu_0, c_1 = b, c_2 = a, n = n_0, r = n_0 - r_0).
 \end{aligned}$$

Wniosek 4.11. Gdy prędkości zapełniania i wybierania są równe ($c_1 = c_2$), to najmniejsze straty związane z deficytem i przepełnieniem wystąpią przy magazynie umieszczonym w punktach centralnych, tzn.:

- $r = n/2$, gdy n parzyste,
- $r = [n/2]$ oraz $r = [n/2] + 1$, gdy n nieparzyste ($[x]$ -cecha x).

Ponadto, wzrost pojemności magazynu nie powoduje zmiany optymalnego punktu lokalizacji magazynu w systemie (por. rys. 4.7).



Rys. 4.7. Wykres wartości wskaźnika E_{dp} w zależności od r i V przy ustalonych wartościach pozostałych parametrów ($n=10$, $c_1=1000$, $c_2=1000$, $\lambda=1$, $\mu=2$).

Wniosek 4.12. Gdy prędkość zapełniania c_1 jest mniejsza od prędkości wybierania c_2 oraz pojemność magazynu V jest mniejsza od V_0 (V_0 zależy od c_1 , c_2 , λ , μ oraz n), to optymalne miejsce r na lokalizację magazynu w systemie jest określone następująco:

- $r = 1$, gdy $\Delta \leq A$,
- $r = [r^*]$ albo $r = [r^*] + 1$, gdy $\Delta > A$,

gdzie: $r^* = \frac{\sqrt{\Delta} - nc_1}{c_2 - c_1}$, $\Delta = n^2 c_1 c_2 - \frac{\mu}{\lambda} \left(n + \frac{\mu}{\lambda} \right) (c_2 - c_1)^2$, $A = (nc_1 + c_2 - c_1)^2$.

Wniosek 4.13. Gdy prędkość zapełniania c_1 jest większa od prędkości wybierania c_2 oraz pojemność magazynu V jest mniejsza od V_0 (V_0 zależy od c_1 , c_2 , λ , μ oraz n), to optymalne miejsce r na lokalizację magazynu w systemie jest określone następująco:

- $r = n - 1$, gdy $\Delta \leq B$,

- $r = [r^*]$ albo $r = [r^*] + 1$, gdy $\Delta > B$,

gdzie: $r^* = \frac{\sqrt{\Delta} - nc_1}{c_2 - c_1}$, $\Delta = n^2 c_1 c_2 - \frac{\mu}{\lambda} \left(n + \frac{\mu}{\lambda} \right) (c_2 - c_1)^2$, $B = (nc_2 + c_1 - c_2)^2$.

Wnioski 4.11 – 4.13 uzyskano badając względem r poniższą granicę:

$$\lim_{V \rightarrow 0^+} E_{dp} = \frac{(c_2 \cdot r + c_1 \cdot (n - r)) \cdot \frac{\mu}{\lambda}}{\left(r + \frac{\mu}{\lambda} \right) \cdot \left(n - r + \frac{\mu}{\lambda} \right)}.$$

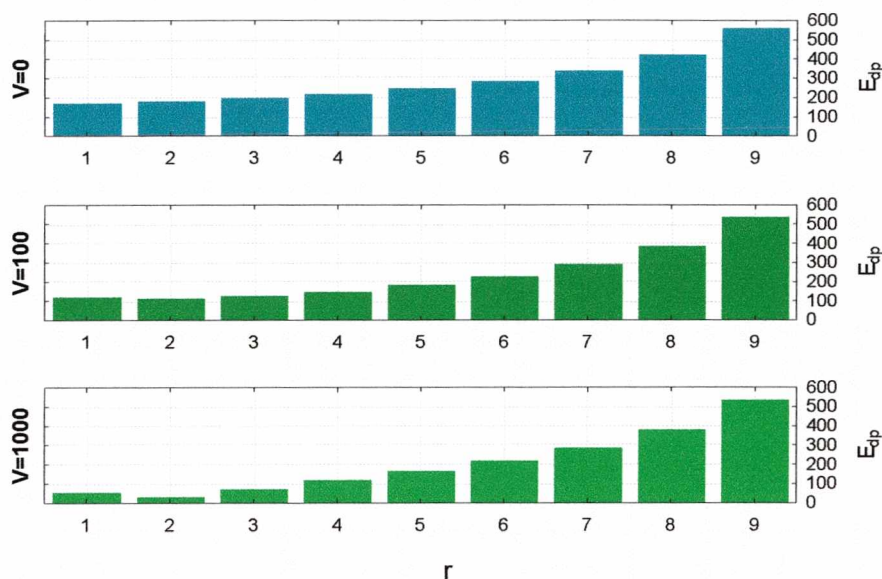
Wniosek 4.14. Gdy pojemność magazynu V jest większa od V_1 (V_1 zależy od c_1 , c_2 , λ , μ oraz n), to sumaryczne straty spowodowane deficytem i przepełnieniem są najmniejsze, jeżeli magazyn jest umieszczony w takim punkcie rewersji R_r , w którym iloraz $(c_1/c_2)/(r/(n-r))$ jest najbliższy jedynki (inaczej: r najbliższe $n \cdot c_1/(c_1 + c_2)$). Wynika to wprost z poniższej granicy:

$$\lim_{V \rightarrow +\infty} E_{dp} = \begin{cases} c_2 \cdot \frac{r}{r + \frac{\mu}{\lambda}} \cdot \frac{\frac{\mu}{\lambda}}{n - r + \frac{\mu}{\lambda}} \cdot \left(1 - \frac{\frac{c_1}{c_2}}{\frac{r}{n - r}} \right), & \text{dla } \frac{c_1}{c_2} < \frac{r}{n - r}, \\ 0, & \text{dla } \frac{c_1}{c_2} = \frac{r}{n - r}, \\ c_1 \cdot \frac{\frac{\mu}{\lambda}}{r + \frac{\mu}{\lambda}} \cdot \frac{n - r}{n - r + \frac{\mu}{\lambda}} \cdot \left(1 - \frac{\frac{r}{n - r}}{\frac{c_1}{c_2}} \right), & \text{dla } \frac{c_1}{c_2} > \frac{r}{n - r}. \end{cases}$$

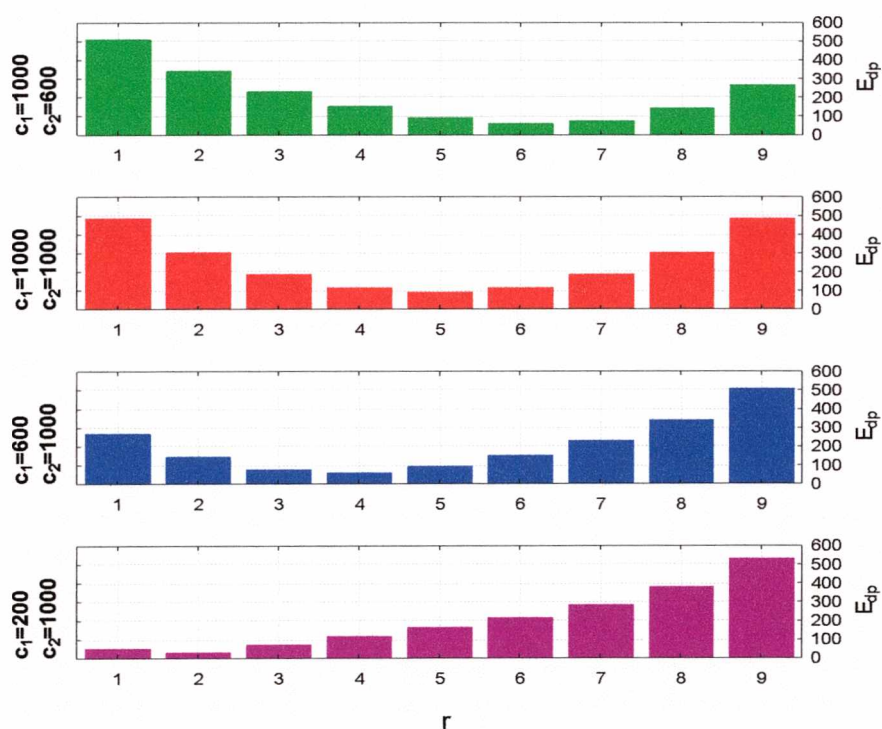
Wniosek 4.15. Gdy $c_1 \neq c_2$, to wzrost pojemności magazynu może powodować zmianę optymalnego punktu lokalizacji magazynu r (por. rys. 4.8), lecz zawsze spełnione są warunki:

- $1 \leq r \leq n/2$, gdy $c_1 < c_2$,
- $n/2 \leq r \leq n - 1$, gdy $c_1 > c_2$.

Wniosek 4.16. Zmniejszanie wartości ilorazu prędkości zapełniania i wybierania c_1/c_2 powoduje przesuwanie się optymalnego miejsca instalacji magazynu w systemie w stronę nadawcy (por. rys. 4.9).



Rys. 4.8. Wykres wartości wskaźnika E_{dp} w zależności od r i V przy ustalonych wartościach pozostałych parametrów ($n=10$, $c_1=200$, $c_2=1000$, $\lambda=1$, $\mu=2$).



Rys. 4.9. Wykres wartości wskaźnik E_{dp} w zależności od r i c_1/c_2 przy ustalonych wartościach pozostałych parametrów ($n=10$, $\lambda=1$, $\mu=2$, $V=1000$).

4.2.4. Wydajność systemu

Postać analityczna wskaźnika wydajności W dla rozpatrywanego wariantu jednorodnego określona jest następująco:

$$W = \begin{cases} c \cdot P_1 + c_1 \cdot P_3 \cdot \frac{\exp\left(\lambda \cdot \frac{V}{c_1} \cdot \frac{r}{n} \cdot \left(0,5n + \frac{\mu}{\lambda}\right) \cdot \left(\frac{n-r}{r} \cdot \frac{c_1}{c_2} - 1\right)\right) - 1}{\frac{n-r}{r} \cdot \frac{c_1}{c_2} \cdot \exp\left(\lambda \cdot \frac{V}{c_1} \cdot \frac{r}{n} \cdot \left(0,5n + \frac{\mu}{\lambda}\right) \cdot \left(\frac{n-r}{r} \cdot \frac{c_1}{c_2} - 1\right)\right) - 1}, & \text{dla } \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{r}{n-r}, \\ c \cdot P_1 + c_1 \cdot P_3 \cdot \frac{\lambda \cdot \frac{V}{c_1} \cdot \frac{r}{n} \cdot \left(0,5n + \frac{\mu}{\lambda}\right)}{1 + \lambda \cdot \frac{V}{c_1} \cdot \frac{r}{n} \cdot \left(0,5n + \frac{\mu}{\lambda}\right)}, & \text{dla } \frac{c_1}{c_2} = \frac{r}{n-r}, \end{cases} \quad (4.6)$$

$$\text{gdzie: } P_1 = \frac{\frac{\mu}{\lambda}}{r + \frac{\mu}{\lambda}} \cdot \frac{\frac{\mu}{\lambda}}{n - r + \frac{\mu}{\lambda}}, \quad P_3 = \frac{\frac{\mu}{\lambda}}{r + \frac{\mu}{\lambda}} \cdot \frac{n - r}{n - r + \frac{\mu}{\lambda}}.$$

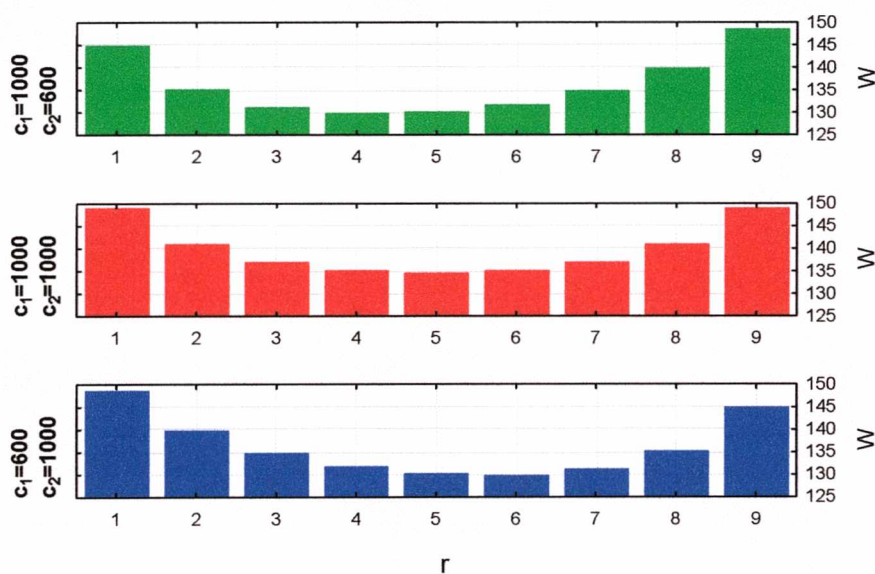
W tabeli 4.4 przedstawione są wyniki analizy liczbowej wskaźnika wydajności dla przykładowego systemu.

Tabela 4.4. Wartości wskaźnika wydajności W dla systemu z jednorodnym układem transportowym.

Pojemność magazynu	Miejsce lokalizacji magazynu w systemie								
V	R ₁	R ₂	R ₃	R ₄	R ₅	R ₆	R ₇	R ₈	R ₉
0	121,212	100,000	88,889	83,333	81,633	83,333	88,889	100,000	121,212
$c_1 = 1000, c_2 = 600, \lambda = 1, \mu = 2$									
100	144,898	135,252	131,208	129,856	130,184	131,826	134,845	139,842	148,579
250	154,630	152,834	155,068	158,920	162,991	166,293	168,170	168,405	167,393
500	157,323	159,031	165,991	175,608	185,325	191,989	192,906	187,600	177,971
1 000	157,574	159,982	168,751	182,428	199,039	211,740	210,820	197,740	181,527
3 000	157,576	160,000	168,889	183,333	204,037	228,579	221,645	199,997	181,818
∞	157,576	160,000	168,889	183,333	204,082	233,333	222,222	200,000	181,818
$c_1 = 1000, c_2 = 1000, \lambda = 1, \mu = 2$									
100	148,961	141,036	137,051	135,123	134,543	135,123	137,051	141,036	148,961
250	168,159	171,238	174,158	176,162	176,871	176,162	174,158	171,238	168,159
500	178,520	190,526	201,214	208,759	211,503	208,759	201,214	190,526	178,520
1 000	181,619	198,871	217,465	233,605	240,363	233,605	217,465	198,871	181,619
3 000	181,818	200,000	222,205	249,158	267,968	249,158	222,205	200,000	181,818
∞	181,818	200,000	222,222	250,000	285,656	250,000	222,222	200,000	181,818
$c_1 = 800, c_2 = 1000, \lambda = 1, \mu = 2$									
100	148,817	140,585	136,213	133,860	132,858	133,067	134,746	138,728	147,163
250	167,874	170,183	171,907	172,390	171,441	169,231	166,257	163,399	162,239
500	178,322	189,492	198,258	202,576	201,293	194,993	185,737	176,060	168,472
1 000	181,588	198,527	215,488	226,468	224,475	211,038	194,296	179,763	169,663
3 000	181,818	199,999	222,155	246,212	242,387	216,627	195,555	180,000	169,697
∞	181,818	200,000	222,222	250,000	244,898	216,667	195,556	180,000	169,697
$c_1 = 600, c_2 = 1000, \lambda = 1, \mu = 2$									
100	148,579	139,842	134,845	131,826	130,184	129,856	131,208	135,252	144,898
250	167,393	168,405	168,170	166,293	162,991	158,920	155,068	152,834	154,630
500	177,971	187,600	192,906	191,989	185,325	175,608	165,991	159,031	157,323
1 000	181,527	197,740	210,820	211,740	199,039	182,428	168,751	159,982	157,574
3 000	181,818	199,997	221,645	228,579	204,037	183,333	168,889	160,000	157,576
∞	181,818	200,000	222,222	233,333	204,082	183,333	168,889	160,000	157,576

$c_1 = 400, c_2 = 1000, \lambda = 1, \mu = 2$									
100	148,107	138,391	132,225	128,018	125,310	124,175	125,147	129,490	140,260
250	166,412	164,804	160,861	155,040	148,492	142,580	138,680	138,451	144,916
500	177,186	183,204	181,166	171,757	159,611	148,954	141,946	139,934	145,442
1 000	181,354	195,027	196,253	180,809	163,008	149,978	142,220	140,000	145,455
3 000	181,818	199,931	209,022	183,324	163,265	150,000	142,222	140,000	145,455
∞	181,818	200,000	213,333	183,333	163,265	150,000	142,222	140,000	145,455
$c_1 = 200, c_2 = 1000, \lambda = 1, \mu = 2$									
100	146,726	134,321	125,266	118,531	113,979	111,883	112,936	118,666	132,788
250	163,346	154,155	141,864	130,233	121,457	116,361	115,465	119,975	133,328
500	174,121	166,818	149,034	133,072	122,419	116,663	115,555	120,000	133,333
1 000	180,123	175,085	150,988	133,331	122,449	116,667	115,556	120,000	133,333
3 000	181,812	179,757	151,111	133,333	122,449	116,667	115,556	120,000	133,333
∞	181,818	180,000	151,111	133,333	122,449	116,667	115,556	120,000	133,333

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 4.10. Wykres wartości wskaźnika W w zależności od r i c_1/c_2 przy ustalonych wartościach pozostałych parametrów ($n=10, \lambda=1, \mu=2, V=100$).

Analizy wskaźnika W prowadzi do następujących wniosków.

Wniosek 4.17. Gdy pojemność magazynu V jest mniejsza od V_0 , to system osiąga największe wydajności przy lokalizacji magazynu w punktach skrajnych (por. rys. 4.10), tzn.:

- gdy $c_1 > c_2$, to najlepszy jest punkt $r=n-1$,
- gdy $c_1 < c_2$, to najlepszy jest punkt $r=1$,
- gdy $c_1 = c_2$, to obydwa punkty skrajne są równie dobre.

Wynik ten uzyskuje się badając poniższą granicę względem r :

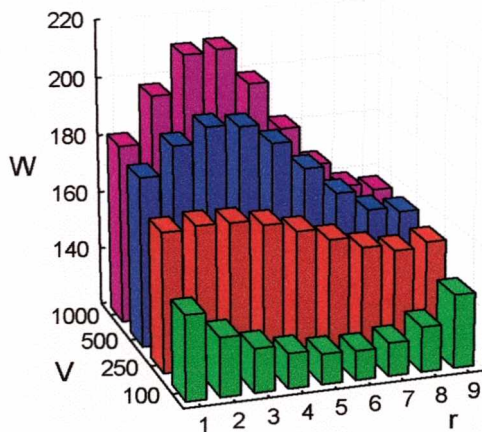
$$\lim_{V \rightarrow 0^+} W = c \cdot P_1 = c \cdot \frac{\frac{\mu}{\lambda} \cdot \frac{\mu}{\lambda}}{\left(r + \frac{\mu}{\lambda}\right) \cdot \left(n - r + \frac{\mu}{\lambda}\right)}.$$

Pojemność V_0 jest zależna od c_1 , c_2 , λ , μ oraz n .

Wniosek 4.18. Gdy pojemność magazynu V jest większa od V_0 oraz prędkość zapełniania c_1 jest równa prędkości wybierania c_2 , to system osiąga maksymalną wydajność przy lokalizacji magazynu w punktach centralnych, tzn.:

- $r=n/2$, gdy n parzyste,
- $r=[n/2]$ oraz $r=[n/2]+1$, gdy n nieparzyste ($[x]$ -cecha x).

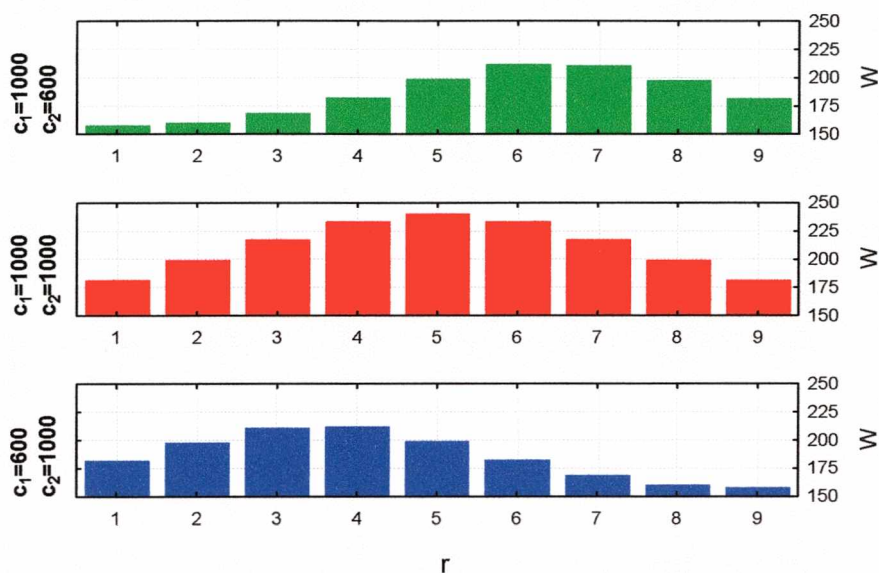
Wniosek 4.19. Gdy prędkość zapełniania c_1 jest mniejsza od prędkości wybierania c_2 , to wraz ze wzrostem pojemności magazynu V możliwe jest przesuwanie się optymalnego punktu lokalizacji w stronę odbiorcy (por. rys. 4.11). Zawsze jednak dla optymalnego punktu zachodzi zależność $1 \leq r \leq n/2$.



Rys. 4.11. Wykres wartości wskaźnika W w zależności od r i V przy ustalonych wartościach pozostałych parametrów ($n=10$, $\lambda=1$, $\mu=2$, $c_1=600$, $c_2=1000$).

Wniosek 4.20. Gdy prędkość zapełniania c_1 jest większa od prędkości wybierania c_2 , to wraz ze wzrostem pojemności magazynu V możliwe jest przesuwanie się optymalnego punktu lokalizacji w stronę nadawcy. Zawsze jednak dla optymalnego punktu zachodzi zależność $n/2 \leq r \leq n-1$.

Wniosek 4.21. Wzrost wartości ilorazu c_1/c_2 powoduje przesuwanie się w stronę odbiorcy optymalnego punktu lokalizacji magazynu w systemie (por. rys. 4.12).



Rys. 4.12. Wykres wartości wskaźnika W w zależności od r i c_1/c_2 przy ustalonych wartościach pozostałych parametrów ($n=10$, $\lambda=1$, $\mu=2$, $V=1000$).

Wniosek 4.22. Badając wydajność systemu przy różnych wartościach parametrów, wystarczy analizować warianty, gdy $c_1 \leq c_2$. Zachodzi bowiem związek:

$$\begin{aligned}
 W(V = V_0, \lambda = \lambda_0, \mu = \mu_0, c_1 = a, c_2 = b, n = n_0, r = r_0) &= \\
 = W(V = V_0, \lambda = \lambda_0, \mu = \mu_0, c_1 = b, c_2 = a, n = n_0, r = n_0 - r_0).
 \end{aligned}$$

4.3. Ocena efektywności funkcjonowania systemu w wariancie niejednorodnym układu transportowego

W rozdziale tym poddany jest analizie tzw. wariant niejednorodny omawianego w rozdziale 4.1 systemu gospodarki zasobami. W wariancie tym przynajmniej dwa podukłady charakteryzują się różnymi parametrami niezawodnościowymi, czyli nie jest spełniony warunek (4.2).

W wariancie niejednorodnym systemu pojawia się problem decyzyjny nie występujący dotychczas. Mianowicie, oprócz wskazania optymalnego miejsca lokalizacji magazynu w systemie, ważne staje się również optymalne ustawienie poszczególnych podukładów. Warto w tym miejscu zauważyć, że istotne jest jedynie, z których podukładów złożona jest część wejściowa bądź wyjściowa, a nie jest istotna ich kolejność. Wynika to wprost ze wzorów (4.1) i z przemienności dodawania.

Wniosek 4.23. Zmiana kolejności podukładów w części wejściowej lub wyjściowej złożonego szeregowo układu transportowego nie ma wpływu na jego funkcjonowanie, ponieważ nie zmienia jego parametrów niezawodnościowych $\lambda_1^r, \mu_1^r, \lambda_2^r, \mu_2^r$.

Wniosek powyższy znacznie zmniejsza liczbę przypadków, które należałoby rozpatrzyć poszukując optymalnej konfiguracji systemu.

Wyniki zaprezentowane w dalszej części rozdziału poparte są analizą liczbową przykładowego systemu. Układ transportowy wybranego systemu złożony jest, podobnie jak w rozdziale 4.2, z 10 podukładów (nitek). Ze względu na parametry niezawodnościowe rozróżnia się 5 podukładów typu A i 5 typu B. Wartości parametrów niezawodnościowych są następujące:

- dla podukładów typu A: $\lambda=1, \mu=2$,
- dla podukładów typu B: $\lambda=0,5, \mu=2$.

Zatem podukłady typu B są mniej awaryjne. Magazyn-zbiornik może być ulokowany w jednym z 9 punktów rewersji R_i ($i=1,2,\dots,9$). W analizie uwzględnia się różne pojemności magazynu V oraz różne prędkości zapełniania c_1 i wybierania c_2 .

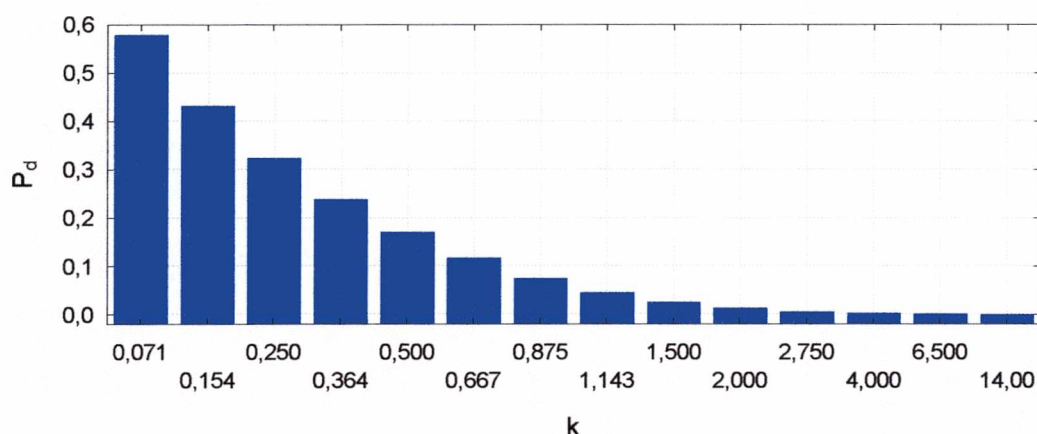
Celem analizy jest znalezienie optymalnej konfiguracji systemu, czyli wskazanie pary (r,s) , dla której wybrany wskaźnik (P_d, P_p, E_{dp}, W) przyjmuje najlepsze wartości. Pierwszy element pary (r) określa miejsce lokalizacji magazynu (punkt R_r), natomiast s określa liczbę nitek typu B w części wejściowej układu transportowego. Zmienna s spełnia warunek $\max\{0, r-5\} \leq s \leq \min\{5, r\}$. Wartości ww. wskaźników odpowiadające różnym kombinacjom parametrów systemu znajdują się w białych polach tabel 4.5 – 4.8. W leżących poniżej polach szarych umieszczone są odpowiadające im wartości wskaźnika charakterystycznego systemu k .

4.3.1. Deficyt w zbiorniku

Wyniki analizy liczbowej wskaźnika deficytu P_d znajdują się w tabelach 4.5a – 4.5i. Nietrudno zauważyć, że wskaźnik deficytu we wszystkich tabelach przyjmuje najmniejsze wartości, gdy magazyn znajduje się w punkcie R_1 , czyli możliwie najbliżej nadawcy. Wskaźnik charakterystyczny systemu k jest wtedy największy. Oprócz tego, przy lokalizacji magazynu w dowolnym punkcie R_r ($r=1,2,\dots,n-1$), wzrost parametru k (spowodowany zmianą konfiguracji układu transportowego) zawsze powoduje spadek wartości wskaźnika P_d . Można też zauważyć identyczne wartości wskaźnika P_d mimo

lokalizacji magazynu w różnych punktach rewersji. Zawsze wtedy również są jednakowe wartości wskaźnika k . Analiza wskaźnika deficytu prowadzi do poniższego wniosku.

Wniosek 4.24. Straty spowodowane deficytem są tym mniejsze, im większą wartość przyjmuje wskaźnik charakterystyczny systemu k (por. rys. 4.13). W celu maksymalizacji wskaźnika k należy magazyn zlokalizować możliwie blisko nadawcy oraz część wejściową układu transportowego złożyć z najmniej awaryjnych podukładów.



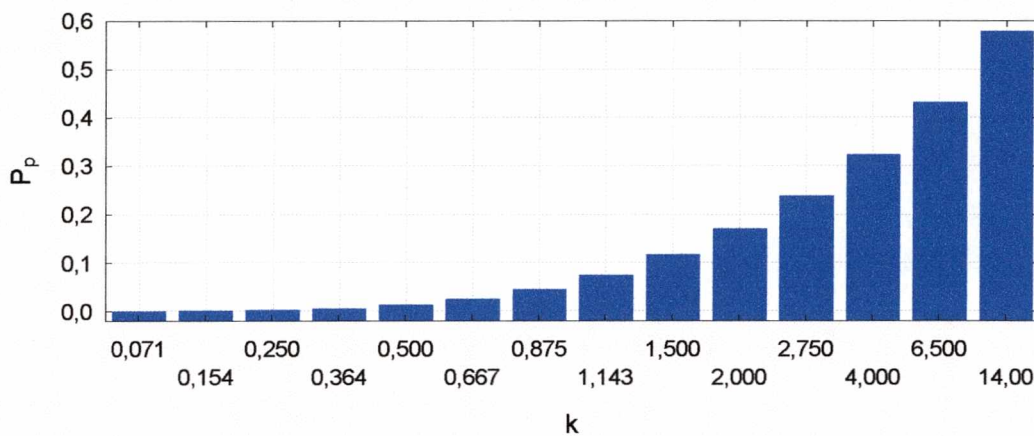
Rys. 4.13. Wartości wskaźnika deficytu (por. tab.5.5a) odpowiadające różnym konfiguracjom przykładowego systemu niejednorodnego ($V=c_1=c_2=1000$).

Wniosek 4.24 jest uogólnieniem wniosku 4.1 dotyczącego analogicznych systemów z jednorodnym układem transportowym. Również w przypadku systemów z niejednorodnym układem transportowym prawdziwe są wnioski 4.2 i 4.3.

4.3.2. Przepelnienie zbiornika

Wyniki analizy liczbowej wskaźnika przepelnienia P_p znajdują się w tabelach 4.6a – 4.6i. Odwrotnie niż wskaźnik deficytu, wskaźnik przepelnienia we wszystkich tabelach przyjmuje najmniejsze wartości, gdy magazyn znajduje się w punkcie R_9 , czyli możliwie najbliżej odbiorcy. Wskaźnik charakterystyczny systemu k jest wtedy najmniejszy. Oprócz tego, przy lokalizacji magazynu w dowolnym punkcie R_r ($r=1,2,\dots,n-1$), spadek parametru k (spowodowany zmianą konfiguracji układu transportowego) zawsze powoduje spadek wartości wskaźnika P_p . Natomiast podobnie jak w przypadku wskaźnika deficytu, można zauważyć identyczne wartości wskaźnika P_p mimo lokalizacji magazynu w różnych punktach rewersji. Zawsze wtedy również są jednakowe wartości wskaźnika k . Analiza wskaźnika przepelnienia prowadzi do poniższego wniosku.

Wniosek 4.25. Straty spowodowane przepełnieniem są tym mniejsze, im mniejszą wartość przyjmuje wskaźnik charakterystyczny systemu k (por. rys. 4.14). W celu minimalizacji wskaźnika k należy magazyn zlokalizować możliwie blisko odbiorcy oraz część wyjściową układu transportowego złożyć z najmniej awaryjnych podukładów.



Rys. 4.14. Wartości wskaźnika przepełnienia (por. tab. 4.6a) odpowiadające różnym konfiguracjom przykładowego systemu niejednorodnego ($V=c_1=c_2=1000$).

Wniosek 4.25 jest uogólnieniem wniosku 4.5 dotyczącego analogicznych systemów z jednorodnym układem transportowym. Również w przypadku systemów z niejednorodnym układem transportowym prawdziwe są wnioski 4.6 i 4.7.

4.3.3. Łączne straty spowodowane deficytem i przepełnieniem

Wyniki analizy liczbowej wskaźnika E_{dp} znajdują się w tabelach 4.7a – 4.7l. Analiza rozpatrywanego przypadku niejednorodnego prowadzi do poniższych wniosków.

Wniosek 4.26. Gdy pojemność magazynu V jest mniejsza od V_0 (V_0 zależy od pozostałych parametrów), to minimalizacja strat w systemie spowodowanych deficytem i przepełnieniem jest równoważna minimalizacji wyrażenia:

$$(c_2 \cdot \lambda_1^r \cdot \mu_2^r + c_1 \cdot \mu_1^r \cdot \lambda_2^r) / ((\lambda_1^r + \mu_1^r) \cdot (\lambda_2^r + \mu_2^r)).$$

$$\text{Mamy bowiem: } \lim_{V \rightarrow 0} E_{dp} = \frac{c_2 \cdot \lambda_1^r \cdot \mu_2^r + c_1 \cdot \mu_1^r \cdot \lambda_2^r}{(\lambda_1^r + \mu_1^r) \cdot (\lambda_2^r + \mu_2^r)}.$$

Gdy $c_1 < c_2$, to minimum strat jest osiągane przy $k > 1$. Natomiast, gdy $c_1 > c_2$, to minimum strat jest osiągane przy $k < 1$.

Wniosek 4.27. Gdy pojemność magazynu V jest większa od V_1 (V_1 również zależy od pozostałych parametrów systemu), to w systemie występują najmniejsze straty spowodowane deficytem i przepełnieniem przy $k = 1$, ponieważ:

$$\lim_{V \rightarrow +\infty} E_{dp} = \begin{cases} c_2 \cdot \frac{\lambda_1^r}{\lambda_1^r + \mu_1^r} \cdot \frac{\mu_2^r}{\lambda_2^r + \mu_2^r} \cdot (1 - k), & \text{dla } k < 1, \\ 0, & \text{dla } k = 1, \\ c_1 \cdot \frac{\mu_1^r}{\lambda_1^r + \mu_1^r} \cdot \frac{\lambda_2^r}{\lambda_2^r + \mu_2^r} \cdot (1 - \frac{1}{k}), & \text{dla } k > 1. \end{cases}$$

Należy zatem tak skonfigurować system, żeby jego parametr charakterystyczny był możliwie bliski 1.

Wniosek 4.28. Gdy prędkość zapełniania c_1 jest równa prędkości wybierania c_2 , to system generuje minimalne straty spowodowane deficytem i przepełnieniem w regularnym wariancie swej pracy, czyli dla $k = 1$. Im większe są różnice procentowe między optymalną a rzeczywistą wartością parametru k , tym straty te są większe. Wzrost pojemności magazynu nie powoduje zmiany optymalnej (minimalizującej E_{dp}) konfiguracji systemu, czyli miejsca lokalizacji magazynu oraz ustawienia poszczególnych nitek układu transportowego.

Wniosek 4.29. Gdy prędkość zapełniania c_1 jest różna od prędkości wybierania c_2 i pojemność magazynu V rośnie, to optymalna (minimalizująca E_{dp}) wartość parametru k zbiega asymptotycznie do 1. Oznacza to, że zmiana pojemności magazynu może powodować zmianę optymalnej konfiguracji systemu. Przy dużych pojemnościach magazynu najmniejsze straty występują w systemie z parametrem k najbliższym 1.

Wniosek 4.30. Badając wielkość strat spowodowanych deficytem i przepełnieniem przy różnych wartościach parametrów, wystarczy analizować warianty, gdy $c_1 \leq c_2$. Zachodzi bowiem związek:

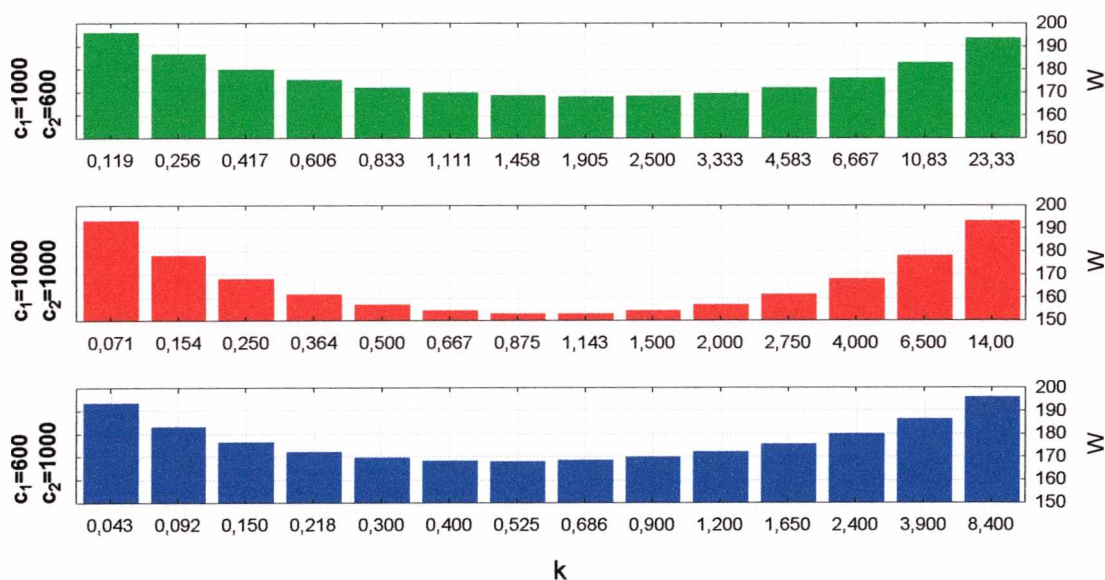
$$\begin{aligned} E_{dp}(V = V_0, k = k_0, c_1 = a, c_2 = b, n = n_0, r = r_0) = \\ = E_{dp}(V = V_0, k = 1/k_0, c_1 = b, c_2 = a, n = n_0, r = n_0 - r_0). \end{aligned}$$

4.3.4. Wydajność systemu

Wyniki analizy liczbowej wskaźnika wydajności W znajdują się w tabelach 4.8a – 4.8l. Analiza rozpatrywanego przypadku niejednorodnego prowadzi do poniższych wniosków.

Wniosek 4.31. Gdy pojemność magazynu V jest mniejsza od V_0 (V_0 jest zależne od pozostałych parametrów systemu) oraz prędkość zapełniania c_1 jest mniejsza od prędkości wybierania c_2 , to maksymalną wydajność system osiąga przy największej wartości parametru k . Aby zmaksymalizować k należy magazyn umieścić w punkcie R_1 oraz połączyć go z nadawcą najmniej awaryjnym podukładem transportowym (por. tab. 4.8k).

Wniosek 4.32. Gdy pojemność magazynu V jest mniejsza od V_0 (V_0 jest zależne od pozostałych parametrów systemu) oraz prędkość zapełniania c_1 jest większa od prędkości wybierania c_2 , to maksymalną wydajność system osiąga przy najmniejszej wartości parametru k . Aby zminimalizować k należy magazyn umieścić w punkcie R_{n-1} oraz połączyć go z odbiorcą najmniej awaryjnym podukładem transportowym (por. tab. 4.8l).

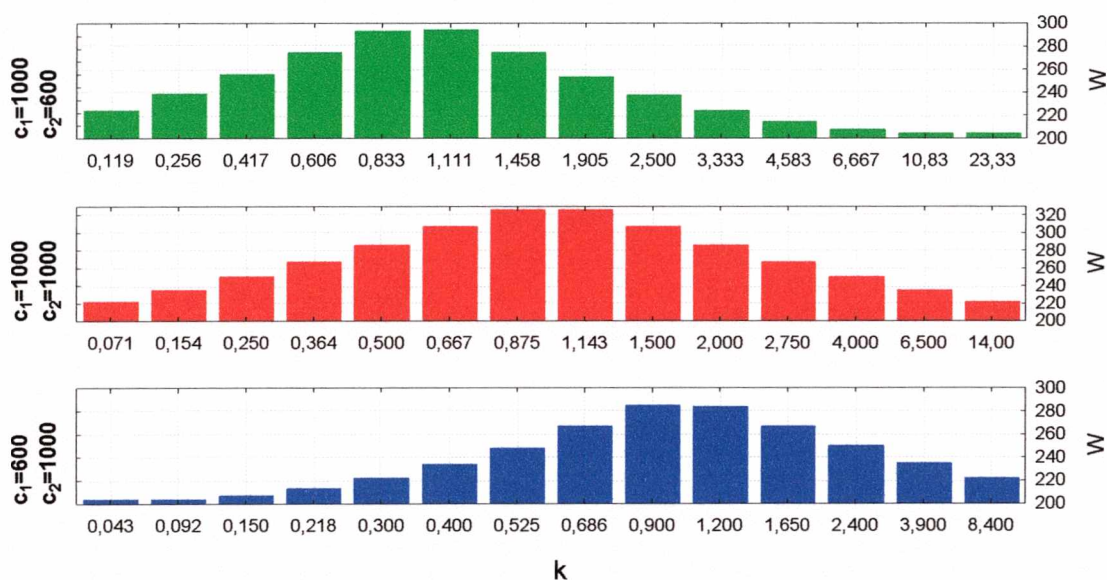


Rys. 4.15. Wartości wskaźnika wydajności (por. tab. 4.8j-l) odpowiadające różnym konfiguracjom przykładowego systemu niejednorodnego ($V=100$).

Wniosek 4.33. Gdy pojemność magazynu V jest mniejsza od V_0 (V_0 jest zależne od pozostałych parametrów systemu) oraz prędkość zapełniania c_1 jest równa prędkości

wybijania c_2 , to maksymalną wydajność system osiąga zarówno przy największej, jak i przy najmniejszej wartości parametru k (por. tab. 4.8j). We wnioskach 4.31 i 4.32 opisano, przy jakich konfiguracjach systemu parametr k przyjmuje wartości ekstremalne.

Wniosek 4.34. Gdy pojemność magazynu V jest większa od V_0 (V_0 jest zależne od pozostałych parametrów systemu) oraz prędkość zapełniania c_1 jest równa prędkości wybierania c_2 , to maksymalną wydajność system osiąga w regularnym wariancie pracy, czyli przy wartości parametru k równej 1. Im większe są różnice procentowe między optymalną a rzeczywistą wartością parametru k , tym mniejsza jest wydajność systemu (por. tab. 4.8a-c).



Rys. 4.16. Wartości wskaźnika wydajności (por. tab. 4.8a-i) odpowiadające różnym konfiguracjom przykładowego systemu niejednorodnego ($V=4000$).

Wniosek 4.35. Gdy pojemność magazynu V jest większa od V_0 (V_0 jest zależne od pozostałych parametrów systemu) oraz prędkość zapełniania c_1 jest mniejsza od prędkości wybierania c_2 , to maksymalną wydajność system osiąga przy wartości parametru k większej od 1. Gdy pojemność magazynu rośnie, to optymalna (maksymalizująca wydajność systemu) wartość parametru k maleje zbiegając asymptotycznie do 1. Oznacza to, że zmiana pojemności magazynu może powodować zmianę optymalnej konfiguracji systemu. Przy dużych pojemnościach magazynu największą wydajność będzie posiadał system z parametrem k najbliższym 1 (por. tab. 4.8d-f).

Wniosek 4.36. Gdy pojemność magazynu V jest większa od V_0 (V_0 jest zależne od pozostałych parametrów systemu) oraz prędkość zapełniania c_1 jest większa od prędkości wybierania c_2 , to maksymalną wydajność system osiąga przy wartości parametru k mniejszej od 1. Gdy pojemność magazynu rośnie, to optymalna (maksymalizująca wydajność systemu) wartość parametru k rośnie zbiegając asymptotycznie do 1 (por. tab. 4.8a-c). Oznacza to, że zmiana pojemności magazynu może powodować zmianę optymalnej konfiguracji systemu. Przy dużych pojemnościach magazynu, największą wydajność będzie posiadał system z parametrem k najbliższym 1 (por. tab. 4.8g-i).

Wniosek 4.37. Wzrost ilorazu c_1/c_2 powoduje spadek wartości parametru k , przy której system osiąga największą wydajność. Oznacza to, że zmiana prędkości zapełniania c_1 lub prędkości wybierania c_2 może prowadzić do zmiany optymalnej konfiguracji systemu.

Tabela 4.5a. Wartości wskaźnika deficytu P_d dla systemu z niejednorodnym układem transportowym ($V=1000$, $c_1=1000$, $c_2=1000$).

s	V=1000; c₁=1000; c₂=1000								
	Miejsce lokalizacji magazynu								
	R ₁	R ₂	R ₃	R ₄	R ₅	R ₆	R ₇	R ₈	R ₉
0	0.001	0.006	0.025	0.075	0.171				
	6.500	2.750	1.500	0.875	0.500				
1	0.000	0.003	0.013	0.045	0.117	0.239			
	14.000	4.000	2.000	1.143	0.667	0.364			
2		0.001	0.006	0.025	0.075	0.171	0.324		
		6.500	2.750	1.500	0.875	0.500	0.250		
3			0.003	0.013	0.045	0.117	0.239	0.432	
			4.000	2.000	1.143	0.667	0.364	0.154	
4				0.006	0.025	0.075	0.171	0.324	0.578
				2.750	1.500	0.875	0.500	0.250	0.071
5					0.013	0.045	0.117	0.239	0.432
					2.000	1.143	0.667	0.364	0.154

Tabela 4.5b. Wartości wskaźnika deficytu P_d dla systemu z niejednorodnym układem transportowym ($V=2000$, $c_1=1000$, $c_2=1000$).

S	V=2000; c₁=1000; c₂=1000								
	Miejsce lokalizacji magazynu								
	R ₁	R ₂	R ₃	R ₄	R ₅	R ₆	R ₇	R ₈	R ₉
0	0.000	0.000	0.007	0.051	0.160				
	6.500	2.750	1.500	0.875	0.500				
1	0.000	0.000	0.002	0.021	0.099	0.234			
	14.000	4.000	2.000	1.143	0.667	0.364			
2		0.000	0.000	0.007	0.051	0.160	0.322		
		6.500	2.750	1.500	0.875	0.500	0.250		
3			0.000	0.002	0.021	0.099	0.234	0.431	
			4.000	2.000	1.143	0.667	0.364	0.154	
4				0.000	0.007	0.051	0.160	0.322	0.578
				2.750	1.500	0.875	0.500	0.250	0.071
5					0.002	0.021	0.099	0.234	0.431
					2.000	1.143	0.667	0.364	0.154

Tabela 4.5c. Wartości wskaźnika deficytu P_d dla systemu z niejednorodnym układem transportowym ($V=4000$, $c_1=1000$, $c_2=1000$).

S	V=4000; c₁=1000; c₂=1000								
	Miejsce lokalizacji magazynu								
	R ₁	R ₂	R ₃	R ₄	R ₅	R ₆	R ₇	R ₈	R ₉
0	0.000	0.000	0.001	0.037	0.159				
	6.500	2.750	1.500	0.875	0.500				
1	0.000	0.000	0.000	0.007	0.093	0.233			
	14.000	4.000	2.000	1.143	0.667	0.364			
2		0.000	0.000	0.001	0.037	0.159	0.321		
		6.500	2.750	1.500	0.875	0.500	0.250		
3			0.000	0.000	0.007	0.093	0.233	0.431	
			4.000	2.000	1.143	0.667	0.364	0.154	
4				0.000	0.001	0.037	0.159	0.321	0.578
				2.750	1.500	0.875	0.500	0.250	0.071
5					0.000	0.007	0.093	0.233	0.431
					2.000	1.143	0.667	0.364	0.154

Tabela 4.5d. Wartości wskaźnika deficytu P_d dla systemu z niejednorodnym układem transportowym ($V=1000$, $c_1=600$, $c_2=1000$).

s	V=1000; c₁=600; c₂=1000								
	Miejsce lokalizacji magazynu								
	R ₁	R ₂	R ₃	R ₄	R ₅	R ₆	R ₇	R ₈	R ₉
0	0.001	0.011	0.048	0.121	0.223				
	3.900	1.650	0.900	0.525	0.300				
1	0.000	0.004	0.025	0.080	0.168	0.287			
	8.400	2.400	1.200	0.686	0.400	0.218			
2		0.001	0.011	0.048	0.121	0.223	0.364		
		3.900	1.650	0.900	0.525	0.300	0.150		
3			0.004	0.025	0.080	0.168	0.287	0.463	
			2.400	1.200	0.686	0.400	0.218	0.092	
4				0.011	0.048	0.121	0.223	0.364	0.596
				1.650	0.900	0.525	0.300	0.150	0.043
5					0.025	0.080	0.168	0.287	0.463
					1.200	0.686	0.400	0.218	0.092

Tabela 4.5e. Wartości wskaźnika deficytu P_d dla systemu z niejednorodnym układem transportowym ($V=2000$, $c_1=600$, $c_2=1000$).

S	V=2000; c₁=600; c₂=1000								
	Miejsce lokalizacji magazynu								
	R ₁	R ₂	R ₃	R ₄	R ₅	R ₆	R ₇	R ₈	R ₉
0	0.000	0.002	0.032	0.116	0.222				
	3.900	1.650	0.900	0.525	0.300				
1	0.000	0.000	0.010	0.070	0.166	0.287			
	8.400	2.400	1.200	0.686	0.400	0.218			
2		0.000	0.002	0.032	0.116	0.222	0.364		
		3.900	1.650	0.900	0.525	0.300	0.150		
3			0.000	0.010	0.070	0.166	0.287	0.463	
			2.400	1.200	0.686	0.400	0.218	0.092	
4				0.002	0.032	0.116	0.222	0.364	0.596
				1.650	0.900	0.525	0.300	0.150	0.043
5					0.010	0.070	0.166	0.287	0.463
					1.200	0.686	0.400	0.218	0.092

Tabela 4.5f. Wartości wskaźnika deficytu P_d dla systemu z niejednorodnym układem transportowym ($V=4000$, $c_1=600$, $c_2=1000$).

S	V=4000; c₁=600; c₂=1000								
	Miejsce lokalizacji magazynu								
	R ₁	R ₂	R ₃	R ₄	R ₅	R ₆	R ₇	R ₈	R ₉
0	0.000	0.000	0.023	0.115	0.222				
	3.900	1.650	0.900	0.525	0.300				
1	0.000	0.000	0.002	0.067	0.166	0.287			
	8.400	2.400	1.200	0.686	0.400	0.218			
2		0.000	0.000	0.023	0.115	0.222	0.364		
		3.900	1.650	0.900	0.525	0.300	0.150		
3			0.000	0.002	0.067	0.166	0.287	0.463	
			2.400	1.200	0.686	0.400	0.218	0.092	
4				0.000	0.023	0.115	0.222	0.364	0.596
				1.650	0.900	0.525	0.300	0.150	0.043
5					0.002	0.067	0.166	0.287	0.463
					1.200	0.686	0.400	0.218	0.092

Tabela 4.5g. Wartości wskaźnika deficytu P_d dla systemu z niejednorodnym układem transportowym ($V=1000$, $c_1=1000$, $c_2=600$).

s	V=1000; c₁=1000; c₂=600								
	Miejsce lokalizacji magazynu								
	R ₁	R ₂	R ₃	R ₄	R ₅	R ₆	R ₇	R ₈	R ₉
0	0.000	0.000	0.004	0.022	0.094				
	10.833	4.583	2.500	1.458	0.833				
1	0.000	0.000	0.001	0.009	0.049	0.163			
	23.333	6.667	3.333	1.905	1.111	0.606			
2		0.000	0.000	0.004	0.022	0.094	0.257		
		10.833	4.583	2.500	1.458	0.833	0.417		
3			0.000	0.001	0.009	0.049	0.163	0.381	
			6.667	3.333	1.905	1.111	0.606	0.256	
4				0.000	0.004	0.022	0.094	0.257	0.549
				4.583	2.500	1.458	0.833	0.417	0.119
5					0.001	0.009	0.049	0.163	0.381
					3.333	1.905	1.111	0.606	0.256

Tabela 4.5h. Wartości wskaźnika deficytu P_d dla systemu z niejednorodnym układem transportowym ($V=2000$, $c_1=1000$, $c_2=600$).

s	V=2000; c₁=1000; c₂=600								
	Miejsce lokalizacji magazynu								
	R ₁	R ₂	R ₃	R ₄	R ₅	R ₆	R ₇	R ₈	R ₉
0	0.000	0.000	0.000	0.005	0.069				
	10.833	4.583	2.500	1.458	0.833				
1	0.000	0.000	0.000	0.001	0.022	0.148			
	23.333	6.667	3.333	1.905	1.111	0.606			
2		0.000	0.000	0.000	0.005	0.069	0.250		
		10.833	4.583	2.500	1.458	0.833	0.417		
3			0.000	0.000	0.001	0.022	0.148	0.379	
			6.667	3.333	1.905	1.111	0.606	0.256	
4				0.000	0.000	0.005	0.069	0.250	0.548
				4.583	2.500	1.458	0.833	0.417	0.119
5					0.000	0.001	0.022	0.148	0.379
					3.333	1.905	1.111	0.606	0.256

Tabela 4.5i. Wartości wskaźnika deficytu P_d dla systemu z niejednorodnym układem transportowym ($V=4000$, $c_1=1000$, $c_2=600$).

s	V=4000; c₁=1000; c₂=600								
	Miejsce lokalizacji magazynu								
	R ₁	R ₂	R ₃	R ₄	R ₅	R ₆	R ₇	R ₈	R ₉
0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.057				
	10.833	4.583	2.500	1.458	0.833				
1	0.000	0.000	0.000	0.000	0.007	0.145			
	23.333	6.667	3.333	1.905	1.111	0.606			
2		0.000	0.000	0.000	0.000	0.057	0.250		
		10.833	4.583	2.500	1.458	0.833	0.417		
3			0.000	0.000	0.000	0.007	0.145	0.379	
			6.667	3.333	1.905	1.111	0.606	0.256	
4				0.000	0.000	0.000	0.057	0.250	0.548
				4.583	2.500	1.458	0.833	0.417	0.119
5					0.000	0.000	0.007	0.145	0.379
					3.333	1.905	1.111	0.606	0.256

Tabela 4.6a. Wartości wskaźnika przepełnienia P_p dla systemu z niejednorodnym układem transportowym ($V=1000$, $c_1=1000$, $c_2=1000$).

s	V=1000; c₁=1000; c₂=1000								
	Miejsce lokalizacji magazynu								
	R ₁	R ₂	R ₃	R ₄	R ₅	R ₆	R ₇	R ₈	R ₉
0	0.432	0.239	0.117	0.045	0.013				
	6.500	2.750	1.500	0.875	0.500				
1	0.578	0.324	0.171	0.075	0.025	0.006			
	14.000	4.000	2.000	1.143	0.667	0.364			
2		0.432	0.239	0.117	0.045	0.013	0.003		
		6.500	2.750	1.500	0.875	0.500	0.250		
3			0.324	0.171	0.075	0.025	0.006	0.001	
			4.000	2.000	1.143	0.667	0.364	0.154	
4				0.239	0.117	0.045	0.013	0.003	0.000
				2.750	1.500	0.875	0.500	0.250	0.071
5					0.171	0.075	0.025	0.006	0.001
					2.000	1.143	0.667	0.364	0.154

Tabela 4.6b. Wartości wskaźnika przepełnienia P_p dla systemu z niejednorodnym układem transportowym ($V=2000$, $c_1=1000$, $c_2=1000$).

s	V=2000; c₁=1000; c₂=1000								
	Miejsce lokalizacji magazynu								
	R ₁	R ₂	R ₃	R ₄	R ₅	R ₆	R ₇	R ₈	R ₉
0	0.431	0.234	0.099	0.021	0.002				
	6.500	2.750	1.500	0.875	0.500				
1	0.578	0.322	0.160	0.051	0.007	0.000			
	14.000	4.000	2.000	1.143	0.667	0.364			
2		0.431	0.234	0.099	0.021	0.002	0.000		
		6.500	2.750	1.500	0.875	0.500	0.250		
3			0.322	0.160	0.051	0.007	0.000	0.000	
			4.000	2.000	1.143	0.667	0.364	0.154	
4				0.234	0.099	0.021	0.002	0.000	0.000
				2.750	1.500	0.875	0.500	0.250	0.071
5					0.160	0.051	0.007	0.000	0.000
					2.000	1.143	0.667	0.364	0.154

Tabela 4.6c. Wartości wskaźnika przepełnienia P_p dla systemu z niejednorodnym układem transportowym ($V=4000$, $c_1=1000$, $c_2=1000$).

s	V=4000; c₁=1000; c₂=1000								
	Miejsce lokalizacji magazynu								
	R ₁	R ₂	R ₃	R ₄	R ₅	R ₆	R ₇	R ₈	R ₉
0	0.431	0.233	0.093	0.007	0.000				
	6.500	2.750	1.500	0.875	0.500				
1	0.578	0.321	0.159	0.037	0.001	0.000			
	14.000	4.000	2.000	1.143	0.667	0.364			
2		0.431	0.233	0.093	0.007	0.000	0.000		
		6.500	2.750	1.500	0.875	0.500	0.250		
3			0.321	0.159	0.037	0.001	0.000	0.000	
			4.000	2.000	1.143	0.667	0.364	0.154	
4				0.233	0.093	0.007	0.000	0.000	0.000
				2.750	1.500	0.875	0.500	0.250	0.071
5					0.159	0.037	0.001	0.000	0.000
					2.000	1.143	0.667	0.364	0.154

Tabela 4.6d. Wartości wskaźnika przepęnlienia P_p dla systemu z niejednorodnym układem transportowym ($V=1000$, $c_1=600$, $c_2=1000$).

s	V=1000; c₁=600; c₂=1000								
	Miejsce lokalizacji magazynu								
	R ₁	R ₂	R ₃	R ₄	R ₅	R ₆	R ₇	R ₈	R ₉
0	0.381	0.163	0.049	0.009	0.001				
	3.900	1.650	0.900	0.525	0.300				
1	0.549	0.257	0.094	0.022	0.004	0.000			
	8.400	2.400	1.200	0.686	0.400	0.218			
2		0.381	0.163	0.049	0.009	0.001	0.000		
		3.900	1.650	0.900	0.525	0.300	0.150		
3			0.257	0.094	0.022	0.004	0.000	0.000	
			2.400	1.200	0.686	0.400	0.218	0.092	
4				0.163	0.049	0.009	0.001	0.000	0.000
				1.650	0.900	0.525	0.300	0.150	0.043
5					0.094	0.022	0.004	0.000	0.000
					1.200	0.686	0.400	0.218	0.092

Tabela 4.6e. Wartości wskaźnika przepęnlienia P_p dla systemu z niejednorodnym układem transportowym ($V=2000$, $c_1=600$, $c_2=1000$).

s	V=2000; c₁=600; c₂=1000								
	Miejsce lokalizacji magazynu								
	R ₁	R ₂	R ₃	R ₄	R ₅	R ₆	R ₇	R ₈	R ₉
0	0.379	0.148	0.022	0.001	0.000				
	3.900	1.650	0.900	0.525	0.300				
1	0.548	0.250	0.069	0.005	0.000	0.000			
	8.400	2.400	1.200	0.686	0.400	0.218			
2		0.379	0.148	0.022	0.001	0.000	0.000		
		3.900	1.650	0.900	0.525	0.300	0.150		
3			0.250	0.069	0.005	0.000	0.000	0.000	
			2.400	1.200	0.686	0.400	0.218	0.092	
4				0.148	0.022	0.001	0.000	0.000	0.000
				1.650	0.900	0.525	0.300	0.150	0.043
5					0.069	0.005	0.000	0.000	0.000
					1.200	0.686	0.400	0.218	0.092

Tabela 4.6f. Wartości wskaźnika przepęnlienia P_p dla systemu z niejednorodnym układem transportowym ($V=4000$, $c_1=600$, $c_2=1000$).

s	V=4000; c₁=600; c₂=1000								
	Miejsce lokalizacji magazynu								
	R ₁	R ₂	R ₃	R ₄	R ₅	R ₆	R ₇	R ₈	R ₉
0	0.379	0.145	0.007	0.000	0.000				
	3.900	1.650	0.900	0.525	0.300				
1	0.548	0.250	0.057	0.000	0.000	0.000			
	8.400	2.400	1.200	0.686	0.400	0.218			
2		0.379	0.145	0.007	0.000	0.000	0.000		
		3.900	1.650	0.900	0.525	0.300	0.150		
3			0.250	0.057	0.000	0.000	0.000	0.000	
			2.400	1.200	0.686	0.400	0.218	0.092	
4				0.145	0.007	0.000	0.000	0.000	0.000
				1.650	0.900	0.525	0.300	0.150	0.043
5					0.057	0.000	0.000	0.000	0.000
					1.200	0.686	0.400	0.218	0.092

Tabela 4.6g. Wartości wskaźnika przepełnienia P_p dla systemu z niejednorodnym układem transportowym ($V=1000$, $c_1=1000$, $c_2=600$).

s	V=1000; c₁=1000; c₂=600								
	Miejsce lokalizacji magazynu								
	R ₁	R ₂	R ₃	R ₄	R ₅	R ₆	R ₇	R ₈	R ₉
0	0.463	0.287	0.168	0.080	0.025				
	10.833	4.583	2.500	1.458	0.833				
1	0.596	0.364	0.223	0.121	0.048	0.011			
	23.333	6.667	3.333	1.905	1.111	0.606			
2		0.463	0.287	0.168	0.080	0.025	0.004		
		10.833	4.583	2.500	1.458	0.833	0.417		
3			0.364	0.223	0.121	0.048	0.011	0.001	
			6.667	3.333	1.905	1.111	0.606	0.256	
4				0.287	0.168	0.080	0.025	0.004	0.000
				4.583	2.500	1.458	0.833	0.417	0.119
5					0.223	0.121	0.048	0.011	0.001
					3.333	1.905	1.111	0.606	0.256

Tabela 4.6h. Wartości wskaźnika przepełnienia P_p dla systemu z niejednorodnym układem transportowym ($V=2000$, $c_1=1000$, $c_2=600$).

s	V=2000; c₁=1000; c₂=600								
	Miejsce lokalizacji magazynu								
	R ₁	R ₂	R ₃	R ₄	R ₅	R ₆	R ₇	R ₈	R ₉
0	0.463	0.287	0.166	0.070	0.010				
	10.833	4.583	2.500	1.458	0.833				
1	0.596	0.364	0.222	0.116	0.032	0.002			
	23.333	6.667	3.333	1.905	1.111	0.606			
2		0.463	0.287	0.166	0.070	0.010	0.000		
		10.833	4.583	2.500	1.458	0.833	0.417		
3			0.364	0.222	0.116	0.032	0.002	0.000	
			6.667	3.333	1.905	1.111	0.606	0.256	
4				0.287	0.166	0.070	0.010	0.000	0.000
				4.583	2.500	1.458	0.833	0.417	0.119
5					0.222	0.116	0.032	0.002	0.000
					3.333	1.905	1.111	0.606	0.256

Tabela 4.6i. Wartości wskaźnika przepełnienia P_p dla systemu z niejednorodnym układem transportowym ($V=4000$, $c_1=1000$, $c_2=600$).

s	V=4000; c₁=1000; c₂=600								
	Miejsce lokalizacji magazynu								
	R ₁	R ₂	R ₃	R ₄	R ₅	R ₆	R ₇	R ₈	R ₉
0	0.463	0.287	0.166	0.067	0.002				
	10.833	4.583	2.500	1.458	0.833				
1	0.596	0.364	0.222	0.115	0.023	0.000			
	23.333	6.667	3.333	1.905	1.111	0.606			
2		0.463	0.287	0.166	0.067	0.002	0.000		
		10.833	4.583	2.500	1.458	0.833	0.417		
3			0.364	0.222	0.115	0.023	0.000	0.000	
			6.667	3.333	1.905	1.111	0.606	0.256	
4				0.287	0.166	0.067	0.002	0.000	0.000
				4.583	2.500	1.458	0.833	0.417	0.119
5					0.222	0.115	0.023	0.000	0.000
					3.333	1.905	1.111	0.606	0.256

Tabela 4.7a. Wartości wskaźnika strat E_{dp} dla systemu z niejednorodnym układem transportowym ($V=1000$, $c_1=1000$, $c_2=1000$).

s	V=1000; c₁=1000; c₂=1000								
	Miejsce lokalizacji magazynu								
	R ₁	R ₂	R ₃	R ₄	R ₅	R ₆	R ₇	R ₈	R ₉
0	433.3	245.2	141.7	119.9	183.9				
	6.500	2.750	1.500	0.875	0.500				
1	578.3	326.6	183.9	119.9	141.7	245.2			
	14.000	4.000	2.000	1.143	0.667	0.364			
2		433.3	245.2	141.7	119.9	183.9	326.6		
		6.500	2.750	1.500	0.875	0.500	0.250		
3			326.6	183.9	119.9	141.7	245.2	433.3	
			4.000	2.000	1.143	0.667	0.364	0.154	
4				245.2	141.7	119.9	183.9	326.6	245.2
				2.750	1.500	0.875	0.500	0.250	0.071
5					183.9	119.9	141.7	245.2	433.3
					2.000	1.143	0.667	0.364	0.154

Tabela 4.7b. Wartości wskaźnika strat E_{dp} dla systemu z niejednorodnym układem transportowym ($V=2000$, $c_1=1000$, $c_2=1000$).

s	V=2000; c₁=1000; c₂=1000								
	Miejsce lokalizacji magazynu								
	R ₁	R ₂	R ₃	R ₄	R ₅	R ₆	R ₇	R ₈	R ₉
0	431.4	234.1	105.5	71.8	162.2				
	6.500	2.750	1.500	0.875	0.500				
1	577.8	321.6	162.2	71.8	105.5	234.1			
	14.000	4.000	2.000	1.143	0.667	0.364			
2		431.4	234.1	105.5	71.8	162.2	321.6		
		6.500	2.750	1.500	0.875	0.500	0.250		
3			321.6	162.2	71.8	105.5	234.1	431.4	
			4.000	2.000	1.143	0.667	0.364	0.154	
4				234.1	105.5	71.8	162.2	321.6	577.8
				2.750	1.500	0.875	0.500	0.250	0.071
5					162.2	71.8	105.5	234.1	431.4
					2.000	1.143	0.667	0.364	0.154

Tabela 4.7c. Wartości wskaźnika strat E_{dp} dla systemu z niejednorodnym układem transportowym ($V=4000$, $c_1=1000$, $c_2=1000$).

s	V=4000; c₁=1000; c₂=1000								
	Miejsce lokalizacji magazynu								
	R ₁	R ₂	R ₃	R ₄	R ₅	R ₆	R ₇	R ₈	R ₉
0	431.4	233.3	93.6	44.4	158.8				
	6.500	2.750	1.500	0.875	0.500				
1	577.8	321.4	158.8	44.4	93.6	233.3			
	14.000	4.000	2.000	1.143	0.667	0.364			
2		431.4	233.3	93.6	44.4	158.8	321.4		
		6.500	2.750	1.500	0.875	0.500	0.250		
3			321.4	158.8	44.4	93.6	233.3	431.4	
			4.000	2.000	1.143	0.667	0.364	0.154	
4				233.3	93.6	44.4	158.8	321.4	577.8
				2.750	1.500	0.875	0.500	0.250	0.071
5					158.8	44.4	93.6	233.3	431.4
					2.000	1.143	0.667	0.364	0.154

Tabela 4.7d. Wartości wskaźnika strat E_{dp} dla systemu z niejednorodnym układem transportowym ($V=1000$, $c_1=600$, $c_2=1000$).

s	V=1000; c₁=600; c₂=1000								
	Miejsce lokalizacji magazynu								
	R ₁	R ₂	R ₃	R ₄	R ₅	R ₆	R ₇	R ₈	R ₉
0	230.3	109.2	77.1	126.3	223.8				
	3.900	1.650	0.900	0.525	0.300				
1	329.6	158.8	81.6	93.6	170.4	287.2			
	8.400	2.400	1.200	0.686	0.400	0.218			
2		230.3	109.2	77.1	126.3	223.8	364.4		
		3.900	1.650	0.900	0.525	0.300	0.150		
3			158.8	81.6	93.6	170.4	287.2	462.8	
			2.400	1.200	0.686	0.400	0.218	0.092	
4				109.2	77.1	126.3	223.8	364.4	595.6
				1.650	0.900	0.525	0.300	0.150	0.043
5					81.6	93.6	170.4	287.2	462.8
					1.200	0.686	0.400	0.218	0.092

Tabela 4.7e. Wartości wskaźnika strat E_{dp} dla systemu z niejednorodnym układem transportowym ($V=2000$, $c_1=600$, $c_2=1000$).

s	V=2000; c₁=600; c₂=1000								
	Miejsce lokalizacji magazynu								
	R ₁	R ₂	R ₃	R ₄	R ₅	R ₆	R ₇	R ₈	R ₉
0	227.5	90.5	45	116.1	222.2				
	3.900	1.650	0.900	0.525	0.300				
1	328.9	150.6	50.9	72.4	166.3	286.7			
	8.400	2.400	1.200	0.686	0.400	0.218			
2		227.5	90.5	45	116.1	222.2	364.3		
		3.900	1.650	0.900	0.525	0.300	0.150		
3			150.6	50.9	72.4	166.3	286.7	462.7	
			2.400	1.200	0.686	0.400	0.218	0.092	
4				90.5	45	116.1	222.2	364.3	595.6
				1.650	0.900	0.525	0.300	0.150	0.043
5					50.9	72.4	166.3	286.7	462.7
					1.200	0.686	0.400	0.218	0.092

Tabela 4.7f. Wartości wskaźnika strat E_{dp} dla systemu z niejednorodnym układem transportowym ($V=4000$, $c_1=600$, $c_2=1000$).

s	V=4000; c₁=600; c₂=1000								
	Miejsce lokalizacji magazynu								
	R ₁	R ₂	R ₃	R ₄	R ₅	R ₆	R ₇	R ₈	R ₉
0	227.5	86.8	27.4	115.2	222.2				
	3.900	1.650	0.900	0.525	0.300				
1	328.9	150	36.1	67	166.2	286.7			
	8.400	2.400	1.200	0.686	0.400	0.218			
2		227.5	86.8	27.4	115.2	222.2	364.3		
		3.900	1.650	0.900	0.525	0.300	0.150		
3			150	36.1	67	166.2	286.7	462.7	
			2.400	1.200	0.686	0.400	0.218	0.092	
4				86.8	27.4	115.2	222.2	364.3	595.6
				1.650	0.900	0.525	0.300	0.150	0.043
5					36.1	67	166.2	286.7	462.7
					1.200	0.686	0.400	0.218	0.092

Tabela 4.7g. Wartości wskaźnika strat E_{dp} dla systemu z niejednorodnym układem transportowym ($V=1000$, $c_1=1000$, $c_2=600$).

s	$V=1000$; $c_1=1000$; $c_2=600$								
	Miejsce lokalizacji magazynu								
	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	R_8	R_9
0	462.8	287.2	170.4	93.6	81.6				
	10.833	4.583	2.500	1.458	0.833				
1	595.6	364.4	223.8	126.3	77.1	109.2			
	23.333	6.667	3.333	1.905	1.111	0.606			
2		462.8	287.2	170.4	93.6	81.6	158.8		
		10.833	4.583	2.500	1.458	0.833	0.417		
3			364.4	223.8	126.3	77.1	109.2	230.3	
			6.667	3.333	1.905	1.111	0.606	0.256	
4				287.2	170.4	93.6	81.6	158.8	329.6
				4.583	2.500	1.458	0.833	0.417	0.119
5					223.8	126.3	77.1	109.2	230.3
					3.333	1.905	1.111	0.606	0.256

Tabela 4.7h. Wartości wskaźnika strat E_{dp} dla systemu z niejednorodnym układem transportowym ($V=2000$, $c_1=1000$, $c_2=600$).

s	$V=2000$; $c_1=1000$; $c_2=600$								
	Miejsce lokalizacji magazynu								
	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	R_8	R_9
0	462.7	286.7	166.3	72.4	50.9				
	10.833	4.583	2.500	1.458	0.833				
1	595.6	364.3	222.2	116.1	45	90.5			
	23.333	6.667	3.333	1.905	1.111	0.606			
2		462.7	286.7	166.3	72.4	50.9	150.6		
		10.833	4.583	2.500	1.458	0.833	0.417		
3			364.3	222.2	116.1	45	90.5	227.5	
			6.667	3.333	1.905	1.111	0.606	0.256	
4				286.7	166.3	72.4	50.9	150.6	328.9
				4.583	2.500	1.458	0.833	0.417	0.119
5					222.2	116.1	45	90.5	227.5
					3.333	1.905	1.111	0.606	0.256

Tabela 4.7i. Wartości wskaźnika strat E_{dp} dla systemu z niejednorodnym układem transportowym ($V=4000$, $c_1=1000$, $c_2=600$).

s	$V=4000$; $c_1=1000$; $c_2=600$								
	Miejsce lokalizacji magazynu								
	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	R_8	R_9
0	462.7	286.7	166.2	67	36.1				
	10.833	4.583	2.500	1.458	0.833				
1	595.6	364.3	222.2	115.2	27.4	86.8			
	23.333	6.667	3.333	1.905	1.111	0.606			
2		462.7	286.7	166.2	67	36.1	150		
		10.833	4.583	2.500	1.458	0.833	0.417		
3			364.3	222.2	115.2	27.4	86.8	227.5	
			6.667	3.333	1.905	1.111	0.606	0.256	
4				286.7	166.2	67	36.1	150	328.9
				4.583	2.500	1.458	0.833	0.417	0.119
5					222.2	115.2	27.4	86.8	227.5
					3.333	1.905	1.111	0.606	0.256

Tabela 4.7j. Wartości wskaźnika strat E_{dp} dla systemu z niejednorodnym układem transportowym ($V=100$, $c_1=1000$, $c_2=1000$).

s	V=100; c₁=1000; c₂=1000								
	Miejsce lokalizacji magazynu								
	R ₁	R ₂	R ₃	R ₄	R ₅	R ₆	R ₇	R ₈	R ₉
0	528.2	413.1	362.7	353.5	381.9				
	6.500	2.750	1.500	0.875	0.500				
1	630.2	459.7	381.9	353.5	362.7	413.1			
	14.000	4.000	2.000	1.143	0.667	0.364			
2		528.2	413.1	362.7	353.5	381.9	459.7		
		6.500	2.750	1.500	0.875	0.500	0.250		
3			459.7	381.9	353.5	362.7	413.1	528.2	
			4.000	2.000	1.143	0.667	0.364	0.154	
4				413.1	362.7	353.5	381.9	459.7	630.2
				2.750	1.500	0.875	0.500	0.250	0.071
5					381.9	353.5	362.7	413.1	528.2
					2.000	1.143	0.667	0.364	0.154

Tabela 4.7k. Wartości wskaźnika strat E_{dp} dla systemu z niejednorodnym układem transportowym ($V=100$, $c_1=600$, $c_2=1000$).

s	V=100; c₁=600; c₂=1000								
	Miejsce lokalizacji magazynu								
	R ₁	R ₂	R ₃	R ₄	R ₅	R ₆	R ₇	R ₈	R ₉
0	325.3	269.5	257.4	276.4	327.7				
	3.900	1.650	0.900	0.525	0.300				
1	381.6	290.3	259.2	263.2	297.5	369.3			
	8.400	2.400	1.200	0.686	0.400	0.218			
2		325.3	269.5	257.4	276.4	327.7	426.1		
		3.900	1.650	0.900	0.525	0.300	0.150		
3			290.3	259.2	263.2	297.5	369.3	504.8	
			2.400	1.200	0.686	0.400	0.218	0.092	
4				269.5	257.4	276.4	327.7	426.1	617.6
				1.650	0.900	0.525	0.300	0.150	0.043
5					259.2	263.2	297.5	369.3	504.8
					1.200	0.686	0.400	0.218	0.092

Tabela 4.7l. Wartości wskaźnika strat E_{dp} dla systemu z niejednorodnym układem transportowym ($V=100$, $c_1=1000$, $c_2=600$).

s	V=100; c₁=1000; c₂=600								
	Miejsce lokalizacji magazynu								
	R ₁	R ₂	R ₃	R ₄	R ₅	R ₆	R ₇	R ₈	R ₉
0	504.8	369.3	297.5	263.2	259.2				
	10.833	4.583	2.500	1.458	0.833				
1	617.6	426.1	327.7	276.4	257.4	269.5			
	23.333	6.667	3.333	1.905	1.111	0.606			
2		504.8	369.3	297.5	263.2	259.2	290.3		
		10.833	4.583	2.500	1.458	0.833	0.417		
3			426.1	327.7	276.4	257.4	269.5	325.3	
			6.667	3.333	1.905	1.111	0.606	0.256	
4				369.3	297.5	263.2	259.2	290.3	381.6
				4.583	2.500	1.458	0.833	0.417	0.119
5					327.7	276.4	257.4	269.5	325.3
					3.333	1.905	1.111	0.606	0.256

Tabela 4.8a. Wartości wskaźnika wydajności W dla systemu z niejednorodnym układem transportowym ($V=1000$, $c_1=1000$, $c_2=1000$).

s	V=1000; c₁=1000; c₂=1000								
	Miejsce lokalizacji magazynu								
	R ₁	R ₂	R ₃	R ₄	R ₅	R ₆	R ₇	R ₈	R ₉
0	234	261	283	289	273				
	6.500	2.750	1.500	0.875	0.500				
1	222	247	273	289	283	261			
	14.000	4.000	2.000	1.143	0.667	0.364			
2		234	261	283	289	273	247		
		6.500	2.750	1.500	0.875	0.500	0.250		
3			247	273	289	283	261	234	
			4.000	2.000	1.143	0.667	0.364	0.154	
4				261	283	289	273	247	222
				2.750	1.500	0.875	0.500	0.250	0.071
5					273	289	283	261	234
					2.000	1.143	0.667	0.364	0.154

Tabela 4.8b. Wartości wskaźnika wydajności W dla systemu z niejednorodnym układem transportowym ($V=2000$, $c_1=1000$, $c_2=1000$).

s	V=2000; c₁=1000; c₂=1000								
	Miejsce lokalizacji magazynu								
	R ₁	R ₂	R ₃	R ₄	R ₅	R ₆	R ₇	R ₈	R ₉
0	235	266	301	313	284				
	6.500	2.750	1.500	0.875	0.500				
1	222	250	284	313	301	266			
	14.000	4.000	2.000	1.143	0.667	0.364			
2		235	266	301	313	284	250		
		6.500	2.750	1.500	0.875	0.500	0.250		
3			250	284	313	301	266	235	
			4.000	2.000	1.143	0.667	0.364	0.154	
4				266	301	313	284	250	222
				2.750	1.500	0.875	0.500	0.250	0.071
5					284	313	301	266	235
					2.000	1.143	0.667	0.364	0.154

Tabela 4.8c. Wartości wskaźnika wydajności W dla systemu z niejednorodnym układem transportowym ($V=4000$, $c_1=1000$, $c_2=1000$).

s	V=4000; c₁=1000; c₂=1000								
	Miejsce lokalizacji magazynu								
	R ₁	R ₂	R ₃	R ₄	R ₅	R ₆	R ₇	R ₈	R ₉
0	235	267	307	326	286				
	6.500	2.750	1.500	0.875	0.500				
1	222	250	286	326	307	267			
	14.000	4.000	2.000	1.143	0.667	0.364			
2		235	267	307	326	286	250		
		6.500	2.750	1.500	0.875	0.500	0.250		
3			250	286	326	307	267	235	
			4.000	2.000	1.143	0.667	0.364	0.154	
4				267	307	326	286	250	222
				2.750	1.500	0.875	0.500	0.250	0.071
5					286	326	307	267	235
					2.000	1.143	0.667	0.364	0.154

Tabela 4.8d. Wartości wskaźnika wydajności W dla systemu z niejednorodnym układem transportowym ($V=1000$, $c_1=600$, $c_2=1000$).

s	V=1000; c₁=600; c₂=1000								
	Miejsce lokalizacji magazynu								
	R ₁	R ₂	R ₃	R ₄	R ₅	R ₆	R ₇	R ₈	R ₉
0	234	255	260	243	221				
	3.900	1.650	0.900	0.525	0.300				
1	222	246	261	253	232	213			
	8.400	2.400	1.200	0.686	0.400	0.218			
2		234	255	260	243	221	207		
		3.900	1.650	0.900	0.525	0.300	0.150		
3			246	261	253	232	213	204	
			2.400	1.200	0.686	0.400	0.218	0.092	
4				255	260	243	221	207	204
				1.650	0.900	0.525	0.300	0.150	0.043
5					261	253	232	213	204
					1.200	0.686	0.400	0.218	0.092

Tabela 4.8e. Wartości wskaźnika wydajności W dla systemu z niejednorodnym układem transportowym ($V=2000$, $c_1=600$, $c_2=1000$).

s	V=2000; c₁=600; c₂=1000								
	Miejsce lokalizacji magazynu								
	R ₁	R ₂	R ₃	R ₄	R ₅	R ₆	R ₇	R ₈	R ₉
0	235	265	276	248	222				
	3.900	1.650	0.900	0.525	0.300				
1	222	250	276	264	234	213			
	8.400	2.400	1.200	0.686	0.400	0.218			
2		235	265	276	248	222	207		
		3.900	1.650	0.900	0.525	0.300	0.150		
3			250	276	264	234	213	204	
			2.400	1.200	0.686	0.400	0.218	0.092	
4				265	276	248	222	207	204
				1.650	0.900	0.525	0.300	0.150	0.043
5					276	264	234	213	204
					1.200	0.686	0.400	0.218	0.092

Tabela 4.8f. Wartości wskaźnika wydajności W dla systemu z niejednorodnym układem transportowym ($V=4000$, $c_1=600$, $c_2=1000$).

s	V=4000; c₁=600; c₂=1000								
	Miejsce lokalizacji magazynu								
	R ₁	R ₂	R ₃	R ₄	R ₅	R ₆	R ₇	R ₈	R ₉
0	235	267	285	248	222				
	3.900	1.650	0.900	0.525	0.300				
1	222	250	284	267	234	213			
	8.400	2.400	1.200	0.686	0.400	0.218			
2		235	267	285	248	222	207		
		3.900	1.650	0.900	0.525	0.300	0.150		
3			250	284	267	234	213	204	
			2.400	1.200	0.686	0.400	0.218	0.092	
4				267	285	248	222	207	204
				1.650	0.900	0.525	0.300	0.150	0.043
5					284	267	234	213	204
					1.200	0.686	0.400	0.218	0.092

Tabela 4.8g. Wartości wskaźnika wydajności W dla systemu z niejednorodnym układem transportowym ($V=1000$, $c_1=1000$, $c_2=600$).

s	$V=1000$; $c_1=1000$; $c_2=600$								
	Miejsce lokalizacji magazynu								
	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	R_8	R_9
0	204	213	232	253	261				
	10.833	4.583	2.500	1.458	0.833				
1	204	207	221	243	260	255			
	23.333	6.667	3.333	1.905	1.111	0.606			
2		204	213	232	253	261	246		
		10.833	4.583	2.500	1.458	0.833	0.417		
3			207	221	243	260	255	234	
			6.667	3.333	1.905	1.111	0.606	0.256	
4				213	232	253	261	246	222
				4.583	2.500	1.458	0.833	0.417	0.119
5					221	243	260	255	234
					3.333	1.905	1.111	0.606	0.256

Tabela 4.8h. Wartości wskaźnika wydajności W dla systemu z niejednorodnym układem transportowym ($V=2000$, $c_1=1000$, $c_2=600$).

s	$V=2000$; $c_1=1000$; $c_2=600$								
	Miejsce lokalizacji magazynu								
	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	R_8	R_9
0	204	213	234	264	276				
	10.833	4.583	2.500	1.458	0.833				
1	204	207	222	248	276	265			
	23.333	6.667	3.333	1.905	1.111	0.606			
2		204	213	234	264	276	250		
		10.833	4.583	2.500	1.458	0.833	0.417		
3			207	222	248	276	265	235	
			6.667	3.333	1.905	1.111	0.606	0.256	
4				213	234	264	276	250	222
				4.583	2.500	1.458	0.833	0.417	0.119
5					222	248	276	265	235
					3.333	1.905	1.111	0.606	0.256

Tabela 4.8i. Wartości wskaźnika wydajności W dla systemu z niejednorodnym układem transportowym ($V=4000$, $c_1=1000$, $c_2=600$).

s	$V=4000$; $c_1=1000$; $c_2=600$								
	Miejsce lokalizacji magazynu								
	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	R_8	R_9
0	204	213	234	267	284				
	10.833	4.583	2.500	1.458	0.833				
1	204	207	222	248	285	267			
	23.333	6.667	3.333	1.905	1.111	0.606			
2		204	213	234	267	284	250		
		10.833	4.583	2.500	1.458	0.833	0.417		
3			207	222	248	285	267	235	
			6.667	3.333	1.905	1.111	0.606	0.256	
4				213	234	267	284	250	222
				4.583	2.500	1.458	0.833	0.417	0.119
5					222	248	285	267	235
					3.333	1.905	1.111	0.606	0.256

Tabela 4.8j. Wartości wskaźnika wydajności W dla systemu z niejednorodnym układem transportowym ($V=100$, $c_1=1000$, $c_2=1000$).

s	V=100; c₁=1000; c₂=1000								
	Miejsce lokalizacji magazynu								
	R ₁	R ₂	R ₃	R ₄	R ₅	R ₆	R ₇	R ₈	R ₉
0	187	177	173	172	174				
	6.500	2.750	1.500	0.875	0.500				
1	196	181	174	172	173	177			
	14.000	4.000	2.000	1.143	0.667	0.364			
2		187	177	173	172	174	181		
		6.500	2.750	1.500	0.875	0.500	0.250		
3			181	174	172	173	177	187	
			4.000	2.000	1.143	0.667	0.364	0.154	
4				177	173	172	174	181	196
				2.750	1.500	0.875	0.500	0.250	0.071
5					174	172	173	177	187
					2.000	1.143	0.667	0.364	0.154

Tabela 4.8k. Wartości wskaźnika wydajności W dla systemu z niejednorodnym układem transportowym ($V=100$, $c_1=600$, $c_2=1000$).

s	V=100; c₁=600; c₂=1000								
	Miejsce lokalizacji magazynu								
	R ₁	R ₂	R ₃	R ₄	R ₅	R ₆	R ₇	R ₈	R ₉
0	186	175	170	168	169				
	3.900	1.650	0.900	0.525	0.300				
1	196	180	172	168	168	172			
	8.400	2.400	1.200	0.686	0.400	0.218			
2		186	175	170	168	169	176		
		3.900	1.650	0.900	0.525	0.300	0.150		
3			180	172	168	168	172	183	
			2.400	1.200	0.686	0.400	0.218	0.092	
4				175	170	168	169	176	193
				1.650	0.900	0.525	0.300	0.150	0.043
5					172	168	168	172	183
					1.200	0.686	0.400	0.218	0.092

Tabela 4.8l. Wartości wskaźnika wydajności W dla systemu z niejednorodnym układem transportowym ($V=100$, $c_1=1000$, $c_2=600$).

s	V=100; c₁=1000; c₂=600								
	Miejsce lokalizacji magazynu								
	R ₁	R ₂	R ₃	R ₄	R ₅	R ₆	R ₇	R ₈	R ₉
0	183	172	168	168	172				
	10.833	4.583	2.500	1.458	0.833				
1	193	176	169	168	170	175			
	23.333	6.667	3.333	1.905	1.111	0.606			
2		183	172	168	168	172	180		
		10.833	4.583	2.500	1.458	0.833	0.417		
3			176	169	168	170	175	186	
			6.667	3.333	1.905	1.111	0.606	0.256	
4				172	168	168	172	180	196
				4.583	2.500	1.458	0.833	0.417	0.119
5					169	168	170	175	186
					3.333	1.905	1.111	0.606	0.256

UWAGI KOŃCOWE

Badania różnorodnych systemów gromadzenia zasobów często sprowadzają się do analizy ich modeli, w których przyjmuje się wiele założeń i uproszczeń. Uproszczenia te ułatwiają opisywanie funkcjonowania systemów metodami matematycznymi, z drugiej jednak strony ograniczają możliwości zastosowań takich modeli w konkretnych sytuacjach praktycznych. Teoria gromadzenia zasobów proponuje jednak bardzo duży wybór różnych modeli (przedstawiony w analizie literatury – rozdział 1), z których można wybrać ten najbardziej odpowiedni i zaadaptować go do praktyki. Również wyniki uzyskane przez naukowców Zakładu Doświadczalnego Instytutu Matematyki i Fizyki Teoretycznej Politechniki Wrocławskiej (np. Battek i in. [8]), na których opiera się niniejsza praca, otwierają możliwości dalszych badań i ich praktycznych implementacji.

Przedstawiona w pracy analiza efektywności funkcjonowania systemów typu „transport – zapasy” bazuje na modelu, w którym również zakłada się wiele uproszczeń w opisie jego funkcjonowania. Główne uproszczenia tego modelu to:

- założenia o jednorodności, stacjonarności i niezależności procesów $x(t)$ i $y(t)$,
- stałe prędkości, z jakimi transportowany jest zasób w systemie (c , c_1 , c_2),
- tylko jeden magazyn w systemie.

Naturalnym wydaje się prowadzenie dalszych badań nad systemami tego typu z pominięciem bądź uogólnieniem niektórych z ww. założeń (np. prędkości dostarczania i wybierania zasobów są zmienne w czasie, procesy opisujące awaryjność poszczególnych podukładów są wielostanowe, system posiada wiele magazynów itp.). Wtedy matematyczny opis modelu funkcjonowania systemu może być o wiele bardziej skomplikowany. W tej sytuacji uzasadnione stanie się większe wykorzystanie jako metodologii badań metod numerycznych zamiast analitycznych.

Ponadto, dalsze badania mogą skupiać się wokół następujących zagadnień:

- wykorzystanie innych wskaźników do oceny funkcjonowania systemów,
- analiza wskaźnikowa systemów z bardziej rozbudowanymi układami transportowymi,

- uwzględnienie w analizie różnych kosztów, np. instalacji i eksploatacji magazynu, zakupu, transportu i przechowywania zasobów, usuwania awarii układów transportowych itp.,
- odpowiedni dobór modeli opisujących funkcjonowanie rzeczywistych systemów (np. systemów gromadzenia i obrotu zasobami pieniężnymi, systemów gromadzenia i odnawiania strategicznych rezerw zasobów, systemów typu hurtownie – sprzedawcy detaliczni itp.).

Problemy te są przedmiotem bieżących badań prowadzonych w ośrodkach wrocławskim i rzeszowskim.

INDEKS SYMBOLI I OZNACZEŃ

c	– prędkość, z jaką zasób jest przesyłany bezpośrednio od nadawcy do odbiorcy
c_1	– prędkość, z jaką zasób jest przesyłany od nadawcy do magazynu
c_2	– prędkość, z jaką zasób jest przesyłany z magazynu do odbiorcy
E_d	– średnia wielkość strat spowodowanych deficytem
E_{dp}	– wskaźnik (średnia wielkość) strat spowodowanych deficytem i przepełnieniem
E_p	– średnia wielkość strat spowodowanych przepełnieniem
f	– funkcja opisująca reżim zapełniania i opróżniania magazynu-zbiornika
k	– parametr charakterystyczny systemu
N	– nadawca zasobu
NZ	– część wejściowa układu transportowego, łącząca nadawcę z magazynem
O	– odbiorca zasobu
P_d	– wskaźnik (prawdopodobieństwo) deficytu w magazynie
P_p	– wskaźnik (prawdopodobieństwo) przepełnienia w magazynie
R_i	– i -ty punkt rewersji (punkt, w którym łączą się i -ty i $(i+1)$ -szy podukład transportowy)
R_r	– punkt rewersji, w którym umieszczony jest magazyn
t	– czas
V	– pojemności magazynu-zbiornika
v_0^i	– częstość wejścia do stanu pracy przez i -ty podukład
v_1^i	– częstość wejścia do stanu awarii przez i -ty podukład
v_w	– faktyczna prędkość wybierania z magazynu-zbiornika
v_z	– faktyczna prędkość zapełniania magazynu-zbiornika
W	– wskaźnik wydajności systemu
X	– przestrzeń fazowa (stanów) procesu $x(t)$
$x(t)$	– proces stochastyczny, charakteryzujący funkcjonowanie układu transportowego
Y	– przestrzeń fazowa (stanów) procesu $y(t)$
$y(t)$	– proces stochastyczny, charakteryzujący reżim zapełniania zasobem układu transportowego przez nadawcę
Z	– magazyn-zbiornik

- ZO – część wyjściowa układu transportowego, łącząca magazyn z odbiorcą
- λ_1 – intensywność powstawania awarii w części wejściowej układu transportowego
- λ_2 – intensywność powstawania awarii w części wyjściowej układu transportowego
- λ_i – intensywność powstawania awarii w i-tym podukładzie
- μ_1 – intensywność likwidowania awarii w części wejściowej układu transportowego
- μ_2 – intensywność likwidowania awarii w części wyjściowej układu transportowego
- μ_i – intensywność likwidowania awarii w i-tym podukładzie
- π_{sj} – intensywność prawdopodobieństwa przejścia procesu stochastycznego ze stanu s do j
- θ^i – średni czas awarii w i-tym podukładzie
- ω^i – średni czas pracy w i-tym podukładzie

SPIS RYSUNKÓW

1.1. Ogólna klasyfikacja modeli gospodarowania zasobami	10
2.1. Schemat rozpatrywanego systemu transportowo – magazynowego.....	32
2.2. Schemat przejść pomiędzy poszczególnymi stanami procesu $x(t)$	33
2.3. Schemat przedstawiający transport zasobu w systemie przy różnych stanach procesu $x(t)$	34
2.4. Zależność wskaźnika P_d od parametru V	39
2.5. Zależność wskaźnika P_d od parametru λ_1	40
2.6. Zależność wskaźnika P_d od parametru λ_2	41
2.7. Zależność wskaźnika P_d od parametru μ_1	41
2.8. Zależność wskaźnika P_d od parametru μ_2	42
2.9. Zależność wskaźnika P_d od parametru c_1	42
2.10. Zależność wskaźnika P_d od parametru c_2	43
2.11. Zależność wskaźnika P_p od parametru V	46
2.12. Zależność wskaźnika P_p od parametru λ_1	47
2.13. Zależność wskaźnika P_p od parametru λ_2	47
2.14. Zależność wskaźnika P_p od parametru μ_1	48
2.15. Zależność wskaźnika P_p od parametru μ_2	48
2.16. Zależność wskaźnika P_p od parametru c_1	49
2.17. Zależność wskaźnika P_p od parametru c_2	49
2.18. Zależność wskaźnika E_{dp} od parametru V	51
2.19. Zależność wskaźnika E_{dp} od parametru λ_1	53
2.20. Zależność wskaźnika E_{dp} od parametru λ_2	53
2.21. Zależność wskaźnika E_{dp} od parametru μ_1	54
2.22. Zależność wskaźnika E_{dp} od parametru μ_2	55
2.23. Zależność wskaźnika E_{dp} od parametru c_1	55
2.24. Zależność wskaźnika E_{dp} od parametru c_2	56
2.25. Zależność wskaźnika W od parametru V	58
2.26. Zależność wskaźnika W od parametru c_1	59
2.27. Zależność wskaźnika W od parametru c_2	60
2.28. Zależność wskaźnika W od parametru λ_1	60

2.29. Zależność wskaźnika W od parametru λ_2	61
2.30. Zależność wskaźnika W od parametru μ_1	61
2.31. Zależność wskaźnika W od parametru μ_2	62
3.1. Trajektoria pewnej realizacji procesu $X_i(t)$	66
3.2. Schemat szeregowo złożonego układu transportowego.....	66
3.3. Schemat przejść pomiędzy stanami procesu $X(t)$ opisującego funkcjonowanie złożonego szeregowo układu transportowego.....	67
3.4. Schemat „zlepiania” stanów procesu wektorowego opisującego funkcjonowanie złożonego szeregowo układu transportowego.....	68
3.5. Różne warianty złożonego równoległe dwuczęściowego układu transportowego...	70
3.6. Schemat wariantu A równoległe złożonego dwuczęściowego układu transportowego	71
3.7. Schemat przejść pomiędzy stanami wektorowego procesu $X(t)$ opisującego funkcjonowanie złożonego równoległe dwuczęściowego układu transportowego ..	71
3.8. Schemat „zlepiania” stanów procesu wektorowego opisującego funkcjonowanie równoległe złożonego układu transportowego.....	73
3.9. Schemat redukcji parametrów w modelu trzyczęściowego równoległe złożonego układu transportowego.....	74
4.1. Schemat systemu z szeregowo złożonym układem transportowym.....	77
4.2. Schemat systemu z dwuczęściowym układem transportowym.....	78
4.3. Wykres wartości wskaźnika P_d w zależności od r i V przy ustalonych wartościach pozostałych parametrów ($n=10$, $c_1=1000$, $c_2=1000$, $\lambda=1$, $\mu=2$)	81
4.4. Wykres wartości wskaźnika P_d w zależności od r i c_1/c_2 przy ustalonych wartościach pozostałych parametrów ($n=10$, $\lambda=1$, $\mu=2$, $V=1000$).....	82
4.5. Wykres wartości wskaźnika P_p w zależności od r i V przy ustalonych wartościach pozostałych parametrów ($n=10$, $c_1=1000$, $c_2=1000$, $\lambda=1$, $\mu=2$)	84
4.6. Wykres wartości wskaźnika P_p w zależności od r i c_1/c_2 przy ustalonych wartościach pozostałych parametrów ($n=10$, $\lambda=1$, $\mu=2$, $V=1000$).....	85
4.7. Wykres wartości wskaźnika E_{dp} w zależności od r i V przy ustalonych wartościach pozostałych parametrów ($n=10$, $c_1=1000$, $c_2=1000$, $\lambda=1$, $\mu=2$).....	87
4.8. Wykres wartości wskaźnika E_{dp} w zależności od r i V przy ustalonych wartościach pozostałych parametrów ($n=10$, $c_1=200$, $c_2=1000$, $\lambda=1$, $\mu=2$).....	89
4.9. Wykres wartości wskaźnik E_{dp} w zależności od r i c_1/c_2 przy ustalonych wartościach pozostałych parametrów ($n=10$, $\lambda=1$, $\mu=2$, $V=1000$).....	89
4.10. Wykres wartości wskaźnika W w zależności od r i c_1/c_2 przy ustalonych wartościach pozostałych parametrów ($n=10$, $\lambda=1$, $\mu=2$, $V=100$).....	91
4.11. Wykres wartości wskaźnika W w zależności od r i V przy ustalonych wartościach pozostałych parametrów ($n=10$, $\lambda=1$, $\mu=2$, $c_1=600$, $c_2=1000$).....	92

4.12. Wykres wartości wskaźnika W w zależności od r i c_1/c_2 przy ustalonych wartościach pozostałych parametrów ($n=10$, $\lambda=1$, $\mu=2$, $V=1000$).....	93
4.13. Wartości wskaźnika deficytu odpowiadające różnym konfiguracjom przykładowego systemu niejednorodnego ($V=c_1=c_2=1000$).....	95
4.14. Wartości wskaźnika przepełnienia odpowiadające różnym konfiguracjom przykładowego systemu niejednorodnego ($V=c_1=c_2=1000$).....	96
4.15. Wartości wskaźnika wydajności odpowiadające różnym konfiguracjom przykładowego systemu niejednorodnego ($V=100$).....	98
4.16. Wartości wskaźnika wydajności odpowiadające różnym konfiguracjom przykładowego systemu niejednorodnego ($V=4000$).....	99

SPIS TABEL

4.1.	Wartości wskaźnika deficytu P_d dla systemu z jednorodnym układem transportowym.....	81
4.2.	Wartości wskaźnika przepełnienia P_p dla systemu z jednorodnym układem transportowym.....	83
4.3.	Wartości wskaźnika strat E_{dp} dla systemu z jednorodnym układem transportowym.....	86
4.4.	Wartości wskaźnika wydajności W dla systemu z jednorodnym układem transportowym.....	90
4.5a-i.	Wartości wskaźnika deficytu P_d dla systemu z niejednorodnym układem transportowym.....	101
4.6a-i.	Wartości wskaźnika przepełnienia P_p dla systemu z niejednorodnym układem transportowym.....	104
4.7a-l.	Wartości wskaźnika strat E_{dp} dla systemu z niejednorodnym układem transportowym.....	107
4.8a-l.	Wartości wskaźnika wydajności W dla systemu z niejednorodnym układem transportowym.....	111

LITERATURA

- [1] Aggarwal S. C., *A review of current inventory theory and its applications*, Int. J. Of Production Research 12, 443-482, 1974.
- [2] Aka M., Gilbert S. M., Ritchken P., *Joint inventory/replacement policies for parallel machines*, IIE Transactions 29, 441-449, 1997.
- [3] Altioik T., Ranjan R., *Multi-stage, pull-type production/inventory systems*, IIE Transactions 27, 190-201, 1995.
- [4] Ancelin B., Semery A., *Calcul de la productivite d'une ligne integree de fabrication CALIF, un logiciel industriel base sur une nouvelle heuristique*, Automatique Productique Informatique Industrielle 21, 209-238, 1987.
- [5] Archibald T. W., Sassen S. A. E., Thomas L. C., *An optimal policy for two depot inventory problem with stock transfer*, Management Science 43, 173-183, 1997.
- [6] Arrow K., Karlin S., Scarf H., *Studies in the mathematical theory of inventory and production*, Stanford University Press, Stanford, California, 1958.
- [7] Badinelli R., Schwarz L., *The value of centralized safety stock in distribution systems*, Working Paper in Management, No. MGT-2, College of Business and Economics, University of Kentucky, Lexington, Kentucky, 1984.
- [8] Battek J., Dyrka K., Galanc T., Gawkowska J., Gładysz S., Janczewski K., Jaśkiewicz B., Król M., Łabędzka J., Rychlikowski E., Szamkołowicz L., *Synteza wyników prac naukowo-badawczych w dziedzinie zastosowań nowych metod matematycznych dla przemysłu węgla brunatnego*, cz. I i II, Opracowanie Zakładu Doświadczalnego Instytutu Matematyki i Fizyki Teoretycznej Politechniki Wrocławskiej, Wrocław, 1971.
- [9] Battek J., Dyrka K., Janczewski K., Rychlikowski E., *Matematyczne metody sterowania układem KTZ w kopalni odkrywkowej*, Górnictwo Odkrywkowe nr 4, 1969.
- [10] Battek J., Dyrka K., Janczewski K., Rychlikowski E., *Model matematyczny układu KTZ w kopalni odkrywkowej*, Górnictwo Odkrywkowe nr 2, 1969.
- [11] Battek J., *Średni czas pracy i awarii układów przenośników taśmowych z punktami rewersji*, Węgiel Brunatny nr 2, 1965.
- [12] Beard R. E., Pentikainen T., Pesonen M., *Risk theory*, Methuen, London, 1969.
- [13] Beyer D., Sethi S. P., Sridhar R., *Stochastic Multiproduct Inventory Models with Limited Storage*, Journal of Optimization Theory & Applications, 111(3), 553-588, 2001.
- [14] Błaszczyszyn B., Rolski T., *Expansions for Markov-modulated systems and approximations of ruin probability*, Journal of Applied Probability 33, 57-70, 1996.

-
- [15] Bollapragada R., Rao U. S., *Uncertainty modeling and management in MRP systems*, INFORMS, Montreal, 1998.
 - [16] Browne S., *Optimal investment policies for a firm with random risk process: exponential utility and minimizing the probability of ruin*, Mathematics of Operations Research 20, 937-958, 1995.
 - [17] Bühlmann H., *Mathematical methods in risk theory*, Springer - Verlag, New York, 1970.
 - [18] Bulinska E. V., *Main research directions in inventory theory*, XXII Ogólnopolska Konferencja Zastosowań Matematyki, Zakopane – Kościelisko, 1993.
 - [19] Bulinska E. V., *Некоторые задачи оптимального управления запасами*, Канд. дис., М., Математ. ин-т им. В. А. Стеклова, 1965.
 - [20] Buzacott J. A., *Automatic transfer lines with buffer stocks*, International Journal of Production Research 5, 183-200, 1967.
 - [21] Buzacott J. A., Shanthikumar J. G., *Stochastic models of manufacturing systems*, Prentice-Hall, 1993.
 - [22] Buzacott J. A., *The effect of station breakdowns and random processing times on the capacity of flow-line with in-process storage*, AIIE Transactions 4, 308-312, 1972.
 - [23] Byczkowski T., Kasprzak W., Król M., Romanowicz Z., Weron A., *Stanisław Gładysz (1920-2001)*, Wiadomości Matematyczne, preprint.
 - [24] Chikan A., Kelle P., Meszena Gy., *A comparison of various classification systems of inventory models*, In: New results in inventory research, 661-678, Akademiai Kiado, Budapest, 1984.
 - [25] Chinczyn A. J., *Mathematisches über die Erwartung vor einem öffentlichen Schalter*, Mat. Sborn. 39, 1932.
 - [26] Clark A. J., *An informal survey of multi-echelon inventory theory*, Naval Research Logistics Quarterly 19, 621-650, 1974.
 - [27] Cobham A., *Priority Assignment in Waiting Line Problems*, J. Operations Research Soc. Amer. 2, 70-76, 1954.
 - [28] Cohen J. W., *The simple server queue*, North-Holland, Amsterdam, 1969.
 - [29] Conway R. W., Maxwell W. L., McClain J. O., Thomas L. J., *The role of work-in-process inventories in series production lines*, Operations Research 36, 229-241, 1988.
 - [30] Cormier G., Gunn E. A., *On coordinating warehouse sizing, leasing and inventory policy*, IIE Transactions 28, 149-155, 1996.
 - [31] Cramer H., *On some questions connected with mathematical risk*, Univ. of California Pub. in Statist. 2, 99-124, 1954.
 - [32] Cramer H., *On the mathematical theory of risk*, Skandia Jubille Volume, Stockholm, 1930.
 - [33] Das T. K., Sarkar S., *Optimal preventive maintenance in a production inventory system*, IIE Transactions, 31(6), 537-551, 1999.

-
- [34] Daskin M. S., Coullard C. R., Shen Z. J. M., *An inventory – location model: formulation, solution algorithm and computational results*, Annals of Operations Research, 110(1/4), 83 –106, 2002.
 - [35] Demchenko S. S., Knopov A. P., Pepelyaev V. A., *Optimal Strategies for Inventory Control Systems with a Convex Cost Function*, Cybernetics & Systems Analysis, 36(6), 891-897, 2000.
 - [36] Demchenko S. S., Knopov P. S., Chorney R. K., *Optimal strategies for a semi – Markovian inventory system*, Cybernetics & Systems Analysis, 38(1), 124-136, 2002.
 - [37] Deuermeyer B. L., Schwarz L. B., *A model for analysis of system service level in warehouse retailer distribution systems: the identical retailer case*, In: Multi-level production/inventory control systems: theory and practice, Studies in Management Science 16, Schwarz L. (ed.), North-Holland, Amsterdam, 163-193, 1981.
 - [38] Ehrhardt R., *The power approximation for computing (s, S) inventory policies*, Management Science 25, 777-786, 1979.
 - [39] Elmaghraby S. E., *The economic lot scheduling problem (ELSP): review and extensions*, Management Science 24, 587-598, 1978.
 - [40] Erlang A. K., *Sandsynlighedsregning og telefonsamtaler*, Nyt. Tidsskr. Mat. B20, 1909.
 - [41] Erlebacher S. J., Meller R. D., *The interaction of location and inventory in designing distribution systems*, IIE Transactions, 32(2), 155-166, 2000.
 - [42] Federgruen A., Katalan Z., *The stochastic economic lot scheduling problem: cyclical base-stock policies with idle times*, Management Science 42, 783-796, 1996.
 - [43] Feng Y., Xiao B., *A new algorithm for computing optimal (s, S) policies in a stochastic single item / location inventory system*, IIE Transactions, 32(11), 1081-1090, 2000.
 - [44] Fry T. C., *Probability and its Engineering Uses*, New York, 1928.
 - [45] Furrer H., Michna Z., Weron A., *Stable Lévy motion approximation in collective risk theory*, Insur.: Math. Econ. 20, 97-114, 1997.
 - [46] Galanc T., *Ilościowe charakterystyki wąskiego gardła pewnego systemu produkcyjno – zaopatrzeniowego*, Badania Operacyjne i Decyzje, nr 2, 1998.
 - [47] Galanc T., Jaśniewicz Z., Ostasiewicz S., *Gęstość procesu opisującego wąskie gardło pewnego systemu produkcyjno – zaopatrzeniowego*, Badania Operacyjne i Decyzje, nr 4, 1997.
 - [48] Galanc T., Kazienko J., Mikuś J., *Prognozowanie procesu wydobywania w kopalniach odkrywkowych*, Prace Naukowe i Prognostyczne nr 4, 1981.
 - [49] Galanc T., Król M., *Określenie wpływu zbiorników na wydajność układu transportowego*, Opracowanie techniczne, Wrocław, 1964.
 - [50] Galanc T., Ostasiewicz W., Pisz Z., *Stan graniczny dolny procesu opisującego wąskie gardło pewnego systemu produkcyjno – zaopatrzeniowego*, Badania Operacyjne i Decyzje, nr 4, 1997.
 - [51] Galanc T., *Prognozowanie trajektorii systemu cybernetycznego wyznaczonych przez cel sterowania*, Prace naukowe Ośrodka Badań Prognostycznych Politechniki Wrocławskiej 16, Seria: Monografie 4, 1984.

-
- [52] Gallego G., Joneja D., *Economic lot scheduling problem with raw material considerations*, Operations Research 42, 92-101, 1994.
 - [53] Gallego G., Ryan J. K., Simchi-Levi D., *Minimax analysis for finite-horizon inventory models*, IIE Transactions, 33(10), 861-874, 2001.
 - [54] Gani J., *A stochastic dam process with non-homogeneous Poisson inputs*, Studies in applied probability and management science, Stanford University Press, 1962.
 - [55] Gani J., Prabhu N. U., *A storage model with continuous infinitely divisible inputs*, Proc. Camb. Phil. Soc. 59, 417-429, 1963.
 - [56] Gani J., *Some problems in the theory of provisioning and dams*, Biometrika 42, 179-200, 1955.
 - [57] Gerchak Y., Tripathy A., Wang K., *Co-production models with random functionality yields*, IIE Transactions 28, 391-404, 1996.
 - [58] Gershwin S. B., *An efficient decomposition algorithm for unreliable tandem queueing systems with finite buffers*, In: Proceedings of the 1st International Workshop on Queueing Networks with Blocking, Raleigh N. C., Perros H. G., Altioik T. (eds.), North-Holland, 1988.
 - [59] Gershwin S. B., *Modeling and analysis of assembly/disassembly networks*, MIT Laboratory for Information and Decision Systems Report, 1986.
 - [60] Ghosal A., *An inventory problem: Determination of the optimum capacity of a storage system*, Operations research 3, 1-13, 1966.
 - [61] Gichman I. I., Skorochod A. W., *Wstęp do teorii procesów stochastycznych*, PWN, Warszawa, 1968.
 - [62] Glasserman P., Yao D. D., *Structured buffer-allocation problems in production lines*, Working Paper, Columbia University, 1991.
 - [63] Gładysz S., *Leistungsfähigkeit des Bandanlagensystems*, Węgiel Brunatny 7, 199-204, 1965.
 - [64] Gładysz S., *Proces awarii układów technologicznych kopalni odkrywkowej*, Węgiel Brunatny 1, 1964.
 - [65] Gładysz S., *Wpływ rozdzielni (rozgałęzień)*, Węgiel Brunatny nr 1, 1965.
 - [66] Gnedenko B. V., Kovalenko I. N., *Introduction to queueing theory*, Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, 1968.
 - [67] Grandell J., *Aspects of risk theory*, Springer-Verlag, New York, 1991.
 - [68] Gullu R., Onol E., Erkip N., *Analysis of a deterministic demand production/inventory system under nonstationary supply uncertainty*, IIE Transactions 29, 703-800, 1997.
 - [69] Hadley B. G., Whitin T. M., *Analysis of inventory systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1963.
 - [70] Hahm J., Yano C. A., *Economic lot and delivery scheduling problem: the common cycle case*, IIE Transactions 27, 113-125, 1995.
 - [71] Hanssmann F., *Operations research in production and inventory systems*, John Wiley & Sons, New York, 1962.
 - [72] Hariga A. M., Jackson P. L., *The warehouse scheduling problem: formulation and algorithms*, IIE Transactions 28, 115-128, 1996.

-
- [73] Harris F., *Operations and cost (Factory management series)*, Chicago, A. W. Shaw Co., 1915.
 - [74] He Q-M., Jewkes E. M., Buzacott J., *The value of information used in inventory control of a make-to-order inventory-production system*, IIE Transactions, 34(11), 999-1013, 2002.
 - [75] Hillier F. S., Boling R. W., *Finite queues in series with exponential or Erlang service times – A numerical approach*, Operations Research 15, 286-303, 1967.
 - [76] Hillier F. S., So K. C., Boling R. W., *Toward characterizing the optimal allocation of storage space in production line systems with variable operation times*, Management Science 39, 126-133, 1993.
 - [77] Hillier F. S., So K. C., *The effect of the coefficient of variation of operations times on the allocation of storage space in production line system*, IIE Transactions 23, 198-206, 1991.
 - [78] Hochstadter D., *Stochastische lagerhaltungsmodelle*, Springer - Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1969.
 - [79] Hurst H. E., *Long term storage capacity of reservoirs*, Trans. Amer. Soc. Civ. Engrs. 116, 1951.
 - [80] Kempny D., *Just-in-Time – system doskonałej kontroli zapasów*, Gospodarka Materialowa i Logistyka 9, 1966.
 - [81] Kendall D. G., *Some problems in the theory of queues*, J. Roy. Statist. Soc. B 13, 151-185, 1951.
 - [82] Kendall D. G., *Stochastic processes occurring in the theory of queues and their analysis by the method of the imbedded Markov chain*, Ann. Math. Statist. 24, 338-354, 1954.
 - [83] Kleinrock L., *Queueing systems*, Volume I: Theory, John Wiley, New York, 1975.
 - [84] Klemm H., Mikut M., *Lagerhaltungsmodelle*, Verlag die Wirtschaft, Berlin, 1972.
 - [85] Knessl C., Peters C.S., *Exact and asymptotic solutions for the time-dependent problem of collective ruin I*, SIAM Journal on Applied Mathematics 54, 1745-1767, 1994.
 - [86] Knessl C., Peters C.S., *Exact and asymptotic solutions for the time-dependent problem of collective ruin II*, SIAM Journal on Applied Mathematics 56, 1471-1521, 1996.
 - [87] Kołmogorow A., *Sur le problème d'attente*, Mat. Sborn. 38, 1931.
 - [88] Koopmans C., Tjalling C., *Water storage policy in a simplified hydroelectric system*, Cowles Foundation Paper No. 115, 1958.
 - [89] Koster M. B. M., *Capacity oriented analysis and design of production systems*, Springer - Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1989.
 - [90] Król M. J., Liana M., *Analiza zjawiska zwanego przepełnieniem magazynu, występującego w systemie transport – zapasy*, Zeszyty Naukowe Politechniki Rzeszowskiej, nr 153, 1996.
 - [91] Król M. J., Liana M., *Ilościowa ocena deficytu u odbiorcy w pewnym systemie gospodarki zasobami*, Zeszyty Naukowe Politechniki Rzeszowskiej, nr 152, 1996.

-
- [92] Król M. J., Liana M., *O pewnym wskaźniku oceny stopnia wykorzystania magazynu – zbiornika współpracującego z ciągłym układem transportowym*, Zeszyty Naukowe Politechniki Rzeszowskiej, nr 143, 1996.
- [93] Król M. J., Liana M., *Stochastyczna ocena zjawisk występujących w pewnych systemach cybernetyczno – ekonomicznych*, XXIV Ogólnopolska Konferencja Naukowo – Szkoleniowa Zastosowań Matematyki, Zakopane, 1995.
- [94] Król M. J., Liana M., *Wpływ miejsca instalacji magazynu – zbiornika w systemie transportowym na straty spowodowane deficytem lub przepełnieniem*, Badania Operacyjne i Decyzje, nr 2, Wrocław, 1997.
- [95] Król M., *Analiza stochastyczna pewnych systemów gromadzenia zapasów z ciągłym układem transportowym*, W: Systemy informatyczne w górnictwie, Prace naukowe Instytutu Górnictwa Politechniki Wrocławskiej nr 18, 361-374, Wrocław, 1975.
- [96] Król M., *O wskaźnikach oceny niekorzystnych zjawisk w pracy pewnego systemu gospodarki zapasami*, Badania Operacyjne i Decyzje nr 4, 55-67, 1992.
- [97] Król M., *Ocena efektywnego wykorzystania magazynu-zbiornika w pewnym systemie gospodarki zapasami*, Badania Operacyjne i Decyzje nr 3, 33-46, 1992.
- [98] Król M., Pisula T., *Analiza strat w pewnym systemie transport ciągły-zapasy*, Badania Operacyjne i Decyzje nr 2, 21-30, 1995.
- [99] Król M., Startek M., *The stochastic analysis of continuous transport system with the storage – reservoir*, Zeszyty Naukowe Politechniki Rzeszowskiej, nr 134, 1995.
- [100] Lian Z., Liu L., *Continuous review perishable inventory systems: models and heuristics*, IIE Transactions, 33(9), 809-822, 2001.
- [101] Liana M., *O problemie efektywnego gospodarowania zasobami w złożonych systemach transportowych*, Konferencja Naukowa „Przedsiębiorczość w procesie przemian strukturalnych w Europie Środkowo - Wschodniej”, Rzeszów, 1998.
- [102] Liana M., *O redukcji liczby parametrów wieloczęściowych układów transportowych występujących w systemach gospodarki zasobami*, Badania Operacyjne i Decyzje nr 1, 31-44, 2003.
- [103] Lindley D. V., *Theory of queues with a simple server*, Proc. Camb. Phil. Soc. 48, 277-289, 1952.
- [104] Lundberg F., *Approximerad framställning av sannolikhetsfunktioner. Återförsäkring av kollektivrisker*, Uppsala, 1903.
- [105] Lundberg F., *Zur Theorie der Rückversicherung*, Verhandl. Kongr. Versicherungsmath., Wien, 1909.
- [106] Markowitz D., Reiman M. I., Wein L. M., *The stochastic economic lot scheduling problem: heavy traffic analysis of dynamic cyclic policies*, Working Paper no. 3863-95-MSA, MIT Sloan School of Management, 1995.
- [107] Matta K., Sinha D., *Policy and cost approximations of two-echelon distribution systems with a procurement cost at the higher echelon*, IIE Transactions 27, 638-646, 1995.
- [108] McClain J. O., Moodie D. R., *A comment on „Buffer space allocation in automated assembly lines”*, Operations Research 39, 857-860, 1991.

-
- [109] Menipaz E., *A taxonomy and shibboleth of inventory models*, In: New results in inventory research, 745-752, Akademia Kiado, Budapest, 1984.
 - [110] Mitra D., *Stochastic fluid models*, Performance '87, Courtois P., Latouche G. (eds.), 39-51, Elsevier, Amsterdam, 1988.
 - [111] Moinszadeh H. K., *Replenishment and stocking policies for inventory systems with random deal offerings*, Management Science 43, 334-342, 1997.
 - [112] Molina E. C., *Application of the theory of probability to telephone – trunking problems*, Bell. Syst. Tech. J. 6, 1926.
 - [113] Moller C. M., *Stochastic differential equations for ruin probabilities*, Journal of Applied Probability 32, 74-89, 1995.
 - [114] Moran P. A. P., *The theory of storage*, Methuen, London, 1959.
 - [115] Naddor E., *Inventory systems*, John Wiley and Sons, New York, 1966.
 - [116] Nahmias S., *Inventory models*, In: Belzer J., Holzmann A. H., Kent A., Encyclopedia of computer science and technology, Marcel Decker, New York vol. 9, 447-483, 1978.
 - [117] Orlicky J., *Planowanie potrzeb materiałowych – nowy styl sterowania produkcją i zapasami*, PWE, Warszawa, 1981.
 - [118] Ostasiewicz W. (red.), *Modele aktuarialne*, Wyd. AE im. O. Langego we Wrocławiu, Wrocław, 2000.
 - [119] Panjer H. H., Willmot G. E., *Insurance Risk Models*, American Society of Actuaries, Schaumburg, 1992.
 - [120] Parlar M., Wang Y., Gerchak Y., *A periodic review inventory model with Markovian supply availability: optimality of (s,S) policies*, International Journal of Production Economics 42, 131-136, 1995.
 - [121] Paumen P., *Workload control: The foundation for production control of assembly factories of Ics at Philips*, Master's Thesis, Eindhoven University of Technology, 1986.
 - [122] Pisula T., *Analizyczna i numeryczna ocena efektywności funkcjonowania pewnego systemu cybernetyczno – ekonomicznego typu transport – zapasy*, Rozprawa doktorska, Politechnika Wrocławska, Wrocław 1999.
 - [123] Pisula T., *Analiza liczbowa strat systemu transport-zapasy funkcjonującego w ustalonych uwarunkowaniach ekonomicznych*, Zeszyty Naukowe Politechniki Rzeszowskiej nr 153, Ekonomia i Nauki Humanistyczne z. 4, 93-106, 1996.
 - [124] Pisula T., *Wpływ braku równowagi cenowej na efektywność pewnego systemu gospodarki zasobami*, Zeszyty Naukowe Politechniki Rzeszowskiej nr 143, Zarządzanie i Marketing z. 1, 73-90, 1996.
 - [125] Pisula T., *Wpływ kosztów utrzymania zbiornika na efektywne funkcjonowanie systemu gospodarki zapasami*, Zeszyty Naukowe Politechniki Rzeszowskiej nr 143, Zarządzanie i Marketing z. 1, 61-71, 1996.
 - [126] Prabhu N. U., *Queues and inventories: A study of their basic stochastic processes*, John Wiley, New York, 1965.

-
- [127] Prabhu N. U., *Stochastic storage processes, queues, insurance risk and dams*, Springer - Verlag, 1980.
 - [128] Rubalski G. B., *Model' upravlienija zapasami so slučajnom zaderžkoj v dostavkie pri pieriodičskich vosmožnostijach popolnienij*, Izv. AN. SSSR Tech. kib. 1986 No 6.
 - [129] Rubalski G. B., *Strategie postavok kratnych razmierov v modielijach upravlienija zapassov*, Izv. AN. SSSR Tech. kib. 1986 No 1.
 - [130] Rubalski G. B., *Управление запасами при случайном спросе*, Издательство „Советское радио“, Москва, 1977.
 - [131] Salomon M., *Deterministic lotsizing model for production planning*, vol. 355 of Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Springer - Verlag, Berlin, 1991.
 - [132] Sarjusz – Wolski Z., *Sterowanie zapasami w przedsiębiorstwie*, PWE, Warszawa, 2000.
 - [133] Schmidli H., *Lundberg inequalities for a Cox model with a piecewise constant intensity*, Journal of Applied Probability 33, 196-210, 1996.
 - [134] Schmidt K. D., *Lectures on Risk Theory*, Teubner, Stuttgart, 1996.
 - [135] Schneider H., Rinks D. B., Kelle P., *Allocation of safety stock in a wholesale inventory system using a service level*, Working Paper, College of Business Administration, Louisiana State University, Baton Rouge, LA., 1992.
 - [136] Schwarz L. B., *Multi-level production/inventory control systems: theory and practice*, Studies in Management Science 16, North-Holland, Amsterdam, 1981.
 - [137] Seal H. L., *Stochastic theory of a risk business*, John Wiley, New York, 1969.
 - [138] Seal H. L., *Survival Probabilities: the goal of risk theory*, John Wiley, New York, 1978.
 - [139] Sethi S. P., Yan H., Zhang H., *Peeling layers of an onion: inventory model with multiple delivery modes and forecast updates*, Journal of Optimization Theory & Applications, 108(2), 253-281, 2001.
 - [140] Sevast'yanov B. A., *Influence of storage bin capacity on the average standstill time of a production line*, Theory of Probability and Its Applications 7, 429-438, 1962.
 - [141] Sherbrooke C. C., *METRIC: a multi-echelon technique for recoverable item control*, Operations Research 16, 122-141, 1968.
 - [142] Silver E. A., *Operations research in inventory management, A review and critique*, Operations Research, 628-645, 1981.
 - [143] Silver E. A., Peterson R., *Decision systems for inventory management and production planning*, Wiley Management and Administration Sciences (2nd ed.), 1985.
 - [144] Smith J. M., Daskalaki S., *Buffer space allocation in automated assembly lines*, Operations Research 36, 343-358, 1988.
 - [145] Smith W. L., *On the distribution of queueing times*, Proc. Camb. Phil. Soc. 49, 449-461, 1953.
 - [146] So K. C., *Optimal buffer allocation strategy for minimizing work-in-process inventory in unpaced production lines*, IIE Transactions 29, 81-88, 1997.

-
- [147] Sox C. R., Muckstadt J. A., *Optimization-based planning for the stochastic lot-scheduling problem*, IIE Transactions 29, 349-357, 1997.
 - [148] Spitzer F., *A combinatorial lemma and its applications to probability theory*, Trans. Amer. Math. Soc. 82, 323-339, 1956.
 - [149] Spitzer F., *The Wiener - Hopf equation whose kernel is a probability density*, Duke Math. J. 24, 327-344, 1957.
 - [150] Srinivasan M. M., Lee H., *Production-inventory systems with preventive maintenance*, IIE Transactions 28, 879-890, 1996.
 - [151] Tagaras G., Cohen M. A., *Pooling in two-location inventory systems with non-negligible replenishment lead times*, Management Science 38, 1067-1083, 1992.
 - [152] Takács L., *Introduction to the theory of queues*, Oxford Univ. Press, New York, 1962.
 - [153] Takács L., *The distribution of the content of a dam when the input process has stationary independent increments*, J. Math. Mech. 15, 101-112, 1966.
 - [154] Takács L., *The distribution of the content of finite dams*, J. Appl. Prob. 4, 151-161, 1967.
 - [155] Teunter R., Vlachos D., *An Inventory System with Periodic Regular Review and Flexible Emergency Review*, IIE Transactions, 33(8), 625-635, 2001.
 - [156] Tijms H. C., *Analysis of (s, S) inventory models*, Mathematics Centre Tracts No. 40, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1972.
 - [157] Timmer J. P. J., Bertrand J. W. M., Monhemius W., *Production and inventory control with the Base Stock System*, Raport BDK/KBS/84/05, Eindhoven University of Technology, 1984.
 - [158] Vargas V. A., Metters R., *Adopting lot-sizing techniques to stochastic demand through production scheduling policy*, IIE Transactions 28, 141-148, 1996.
 - [159] Vázquez-Abad F. J., *Pathwise derivative estimation of ruin probabilities*, APORS'97, 1997.
 - [160] Viswanathan S., Mathur K., *Integrating routing and inventory decisions in one-warehouse multiretailer multiproduct distribution systems*, Management Science 43, 294-312, 1997.
 - [161] Wagner H. M., Whitin T. M., *Dynamic version of the economic lot size model*, Management Science 5, 89-96, 1959.
 - [162] Whitin T. M., *The theory of inventory management*, Princeton Univ. Press 1957.
 - [163] Wijngaard J., *The effect of interstage buffer storage on the output of two unreliable production units in series with different production rates*, AIIE Transactions 11, 42-47, 1979.
 - [164] Willmot G. E., *A non-exponential generalization of an inequality arising in queueing and insurance risk*, Journal of Applied Probability 33, 176-183, 1996.
 - [165] Wilson R. H., *A scientific routine for stock control*, Harvard Bus. Rev. 13, 1, 194-201, 1934.
 - [166] Witkowski J., *Wdrażanie i efekty techniki KANBAN w małej firmie produkcyjnej*, Gospodarka Materiałowa i Logistyka 1, 1998.

-
- [167] Yano C. A., Lee H. L., *Lot-sizing with random yields: a review*, Operations Research 43, 311-334, 1995.
- [168] Yeralan S., Muth E. J., *A general model of production line with intermediate buffer and station breakdown*, IIE Transactions 19, 130-139, 1987.
- [169] Zipkin P., *Evaluation of base-stock policies in multi-echelon inventory systems with compound-Poisson demand*, Research Working Paper, Graduate School of Business, Columbia University, New York, 1988.

ANEKS

Wyniki zaprezentowane w Rozdziale 4.2 są zilustrowane tabelami i wykresami wykonanymi w oparciu o symulację liczbową dla przykładowego systemu. W systemie tym przyjęto, że średni czas pracy jego podukładów jest większy od średniego czasu ich awarii (tak jest, gdy $\mu > \lambda$), co jest na ogół prawdą w sytuacjach rzeczywistych. Jednak, z teoretycznego punktu widzenia, warto wspomnieć o dwóch pozostałych przypadkach, gdy:

- średnie czasy pracy i awarii są równe (jeżeli $\mu = \lambda$),
- średni czas pracy jest krótszy od średniego czasu awarii (jeżeli $\mu < \lambda$).

Poniżej, w tabelach A1–A8, przedstawiono więc wyniki analogicznej symulacji, przeprowadzonej również dla systemów z 10-częściowymi układami transportowymi, spełniających jeden z powyższych warunków. W analizie uwzględniono, podobnie jak w Rozdziale 4.2, różne pojemności magazynu V oraz różne prędkości zapełniania c_1 i wybierania c_2 .

Tabela A1. Wartości wskaźnika deficytu P_d dla systemu z jednorodnym układem transportowym ($\lambda=1, \mu=1$).

Pojemność magazynu	Miejsce lokalizacji magazynu w systemie								
V	R ₁	R ₂	R ₃	R ₄	R ₅	R ₆	R ₇	R ₈	R ₉
$c_1 = 1000, c_2 = 600, \lambda = 1, \mu = 1$									
0	0,050	0,074	0,094	0,114	0,139	0,171	0,219	0,296	0,450
1 000	0,000	0,000	0,000	0,002	0,008	0,029	0,080	0,177	0,368
2 000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,001	0,013	0,067	0,173	0,367
3 000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,007	0,064	0,173	0,367
∞	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,063	0,173	0,367
$c_1 = 1000, c_2 = 1000, \lambda = 1, \mu = 1$									
0	0,050	0,074	0,094	0,114	0,139	0,171	0,219	0,296	0,450
1 000	0,000	0,002	0,005	0,014	0,035	0,071	0,130	0,224	0,400
2 000	0,000	0,000	0,000	0,004	0,020	0,061	0,125	0,222	0,400
3 000	0,000	0,000	0,000	0,001	0,014	0,058	0,125	0,222	0,400
∞	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,057	0,125	0,222	0,400
$c_1 = 600, c_2 = 1000, \lambda = 1, \mu = 1$									
0	0,050	0,074	0,094	0,114	0,139	0,171	0,219	0,296	0,450
1 000	0,001	0,003	0,010	0,029	0,060	0,104	0,163	0,252	0,420
2 000	0,000	0,000	0,003	0,019	0,056	0,103	0,163	0,252	0,420
3 000	0,000	0,000	0,001	0,016	0,056	0,103	0,163	0,252	0,420
∞	0,000	0,000	0,000	0,011	0,056	0,103	0,163	0,252	0,420

Tabela A2. Wartości wskaźnika deficytu P_d dla systemu z jednorodnym układem transportowym ($\lambda=2, \mu=1$).

Pojemność magazynu	Miejsce lokalizacji magazynu w systemie								
V	R ₁	R ₂	R ₃	R ₄	R ₅	R ₆	R ₇	R ₈	R ₉
$c_1 = 1000, c_2 = 600, \lambda = 2, \mu = 1$									
0	0,035	0,047	0,057	0,068	0,083	0,103	0,133	0,188	0,316
1 000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,001	0,009	0,041	0,110	0,257
2 000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,003	0,038	0,110	0,257
3 000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,001	0,038	0,110	0,257
∞	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,038	0,110	0,257
$c_1 = 1000, c_2 = 1000, \lambda = 2, \mu = 1$									
0	0,035	0,047	0,057	0,068	0,083	0,103	0,133	0,188	0,316
1 000	0,000	0,000	0,000	0,003	0,013	0,037	0,077	0,141	0,281
2 000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,007	0,034	0,076	0,141	0,281
3 000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,005	0,034	0,076	0,141	0,281
∞	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,034	0,076	0,141	0,281
$c_1 = 600, c_2 = 1000, \lambda = 2, \mu = 1$									
0	0,035	0,047	0,057	0,068	0,083	0,103	0,133	0,188	0,316
1 000	0,000	0,000	0,002	0,012	0,034	0,062	0,099	0,160	0,295
2 000	0,000	0,000	0,000	0,009	0,033	0,062	0,099	0,160	0,295
3 000	0,000	0,000	0,000	0,008	0,033	0,062	0,099	0,160	0,295
∞	0,000	0,000	0,000	0,007	0,033	0,062	0,099	0,160	0,295

Tabela A3. Wartości wskaźnika przepełnienia P_p dla systemu z jednorodnym układem transportowym ($\lambda=1, \mu=1$).

Pojemność magazynu	Miejsce lokalizacji magazynu w systemie								
V	R ₁	R ₂	R ₃	R ₄	R ₅	R ₆	R ₇	R ₈	R ₉
$c_1 = 1000, c_2 = 600, \lambda = 1, \mu = 1$									
0	0,450	0,296	0,219	0,171	0,139	0,114	0,094	0,074	0,050
1 000	0,420	0,252	0,163	0,104	0,060	0,029	0,010	0,003	0,001
2 000	0,420	0,252	0,163	0,103	0,056	0,019	0,003	0,000	0,000
3 000	0,420	0,252	0,163	0,103	0,056	0,016	0,001	0,000	0,000
∞	0,420	0,252	0,163	0,103	0,056	0,011	0,000	0,000	0,000
$c_1 = 1000, c_2 = 1000, \lambda = 1, \mu = 1$									
0	0,450	0,296	0,219	0,171	0,139	0,114	0,094	0,074	0,050
1 000	0,400	0,224	0,130	0,071	0,035	0,014	0,005	0,002	0,000
2 000	0,400	0,222	0,125	0,061	0,020	0,004	0,000	0,000	0,000
3 000	0,400	0,222	0,125	0,058	0,014	0,001	0,000	0,000	0,000
∞	0,400	0,222	0,125	0,057	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
$c_1 = 600, c_2 = 1000, \lambda = 1, \mu = 1$									
0	0,450	0,296	0,219	0,171	0,139	0,114	0,094	0,074	0,050
1 000	0,368	0,177	0,080	0,029	0,008	0,002	0,000	0,000	0,000
2 000	0,367	0,173	0,067	0,013	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000
3 000	0,367	0,173	0,064	0,007	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
∞	0,367	0,173	0,063	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Tabela A4. Wartości wskaźnika przepełnienia P_p dla systemu z jednorodnym układem transportowym ($\lambda=2, \mu=1$).

Pojemność magazynu	Miejsce lokalizacji magazynu w systemie								
V	R ₁	R ₂	R ₃	R ₄	R ₅	R ₆	R ₇	R ₈	R ₉
$c_1 = 1000, c_2 = 600, \lambda = 2, \mu = 1$									
0	0,316	0,188	0,133	0,103	0,083	0,068	0,057	0,047	0,035
1 000	0,295	0,160	0,099	0,062	0,034	0,012	0,002	0,000	0,000
2 000	0,295	0,160	0,099	0,062	0,033	0,009	0,000	0,000	0,000
3 000	0,295	0,160	0,099	0,062	0,033	0,008	0,000	0,000	0,000
∞	0,295	0,160	0,099	0,062	0,033	0,007	0,000	0,000	0,000
$c_1 = 1000, c_2 = 1000, \lambda = 2, \mu = 1$									
0	0,316	0,188	0,133	0,103	0,083	0,068	0,057	0,047	0,035
1 000	0,281	0,141	0,077	0,037	0,013	0,003	0,000	0,000	0,000
2 000	0,281	0,141	0,076	0,034	0,007	0,000	0,000	0,000	0,000
3 000	0,281	0,141	0,076	0,034	0,005	0,000	0,000	0,000	0,000
∞	0,281	0,141	0,076	0,034	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
$c_1 = 600, c_2 = 1000, \lambda = 2, \mu = 1$									
0	0,316	0,188	0,133	0,103	0,083	0,068	0,057	0,047	0,035
1 000	0,257	0,110	0,041	0,009	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000
2 000	0,257	0,110	0,038	0,003	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
3 000	0,257	0,110	0,038	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
∞	0,257	0,110	0,038	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Tabela A5. Wartości wskaźnika E_{dp} dla systemu z jednorodnym układem transportowym ($\lambda=1$, $\mu=1$).

Pojemność magazynu	Miejsce lokalizacji magazynu w systemie								
V	R ₁	R ₂	R ₃	R ₄	R ₅	R ₆	R ₇	R ₈	R ₉
$c_1 = 1000, c_2 = 600, \lambda = 1, \mu = 1$									
0	480,0	340,7	275,0	240,0	222,2	217,1	225,0	251,9	320,0
1 000	420,0	251,9	163,0	105,1	65,4	46,2	58,1	109,1	221,0
2 000	420,0	251,9	162,5	102,9	56,8	26,9	42,7	104,0	220,0
3 000	420,0	251,9	162,5	102,9	55,7	19,9	39,0	103,7	220,0
∞	420,0	251,9	162,5	102,9	55,6	11,4	37,5	103,7	220,0
$c_1 = 1000, c_2 = 1000, \lambda = 1, \mu = 1$									
0	500,0	370,4	312,5	285,7	277,8	285,7	312,5	370,4	500,0
1 000	400,7	225,3	135,1	85,9	69,4	85,9	135,1	225,3	400,7
2 000	400,0	222,3	125,9	64,5	39,7	64,5	125,9	222,3	400,0
3 000	400,0	222,2	125,1	59,3	27,8	59,3	125,1	222,2	400,0
∞	400,0	222,2	125,0	57,1	0	57,1	125,0	222,2	400,0
$c_1 = 600, c_2 = 1000, \lambda = 1, \mu = 1$									
0	320,0	251,9	225,0	217,1	222,2	240,0	275,0	340,7	480,0
1 000	221,0	109,1	58,1	46,2	65,4	105,1	163,0	251,9	420,0
2 000	220,0	104,0	42,7	26,9	56,8	102,9	162,5	251,9	420,0
3 000	220,0	103,7	39,0	19,9	55,7	102,9	162,5	251,9	420,0
∞	220,0	103,7	37,5	11,4	55,6	102,9	162,5	251,9	420,0
$c_1 = 200, c_2 = 1000, \lambda = 1, \mu = 1$									
0	140,0	133,3	137,5	148,6	166,7	194,3	237,5	311,1	460,0
100	102,1	87,2	90,6	103,8	125,4	157,1	205,1	284,4	441,4
500	56,1	38,0	54,4	80,7	111,2	148,6	200,0	281,5	440,0
1 000	44,2	24,2	50,4	80,0	111,1	148,6	200,0	281,5	440,0
2 000	40,4	17,1	50,0	80,0	111,1	148,6	200,0	281,5	440,0
3 000	40,0	15,5	50,0	80,0	111,1	148,6	200,0	281,5	440,0
∞	40,0	14,8	50,0	80,0	111,1	148,6	200,0	281,5	440,0

Tabela A6. Wartości wskaźnika E_{dp} dla systemu z jednorodnym układem transportowym ($\lambda=2$, $\mu=1$).

Pojemność magazynu	Miejsce lokalizacji magazynu w systemie								
V	R ₁	R ₂	R ₃	R ₄	R ₅	R ₆	R ₇	R ₈	R ₉
$c_1 = 1000, c_2 = 600, \lambda = 2, \mu = 1$									
0	336,8	216,5	167,6	143,6	132,2	129,9	137,1	160,0	224,6
1 000	294,7	160,0	99,1	61,6	34,1	17,3	26,8	66,2	154,4
2 000	294,7	160,0	99,0	61,5	33,1	10,4	23,3	65,9	154,4
3 000	294,7	160,0	99,0	61,5	33,1	8,4	22,9	65,9	154,4
∞	294,7	160,0	99,0	61,5	33,1	6,8	22,9	65,9	154,4
$c_1 = 1000, c_2 = 1000, \lambda = 2, \mu = 1$									
0	350,9	235,3	190,5	170,9	165,3	170,9	190,5	235,3	350,9
1 000	280,7	141,3	77,0	39,6	25,4	39,6	77,0	141,3	280,7
2 000	280,7	141,2	76,2	34,8	13,8	34,8	76,2	141,2	280,7
3 000	280,7	141,2	76,2	34,3	9,4	34,3	76,2	141,2	280,7
∞	280,7	141,2	76,2	34,2	0	34,2	76,2	141,2	280,7
$c_1 = 600, c_2 = 1000, \lambda = 2, \mu = 1$									
0	224,6	160,0	137,1	129,9	132,2	143,6	167,6	216,5	336,8
1 000	154,4	66,2	26,8	17,3	34,1	61,6	99,1	160,0	294,7
2 000	154,4	65,9	23,3	10,4	33,1	61,5	99,0	160,0	294,7
3 000	154,4	65,9	22,9	8,4	33,1	61,5	99,0	160,0	294,7
∞	154,4	65,9	22,9	6,8	33,1	61,5	99,0	160,0	294,7
$c_1 = 200, c_2 = 1000, \lambda = 2, \mu = 1$									
0	98,2	84,7	83,8	88,9	99,2	116,2	144,8	197,6	322,8
100	59,3	43,2	45,1	54,4	69,1	90,3	122,5	179,1	308,9
500	31,8	16,2	30,8	47,9	66,1	88,9	121,9	178,8	308,8
1 000	28,5	11,2	30,5	47,9	66,1	88,9	121,9	178,8	308,8
2 000	28,1	9,6	30,5	47,9	66,1	88,9	121,9	178,8	308,8
3 000	28,1	9,4	30,5	47,9	66,1	88,9	121,9	178,8	308,8
∞	28,1	9,4	30,5	47,9	66,1	88,9	121,9	178,8	308,8

Tabela A7. Wartości wskaźnika wydajności W dla systemu z jednorodnym układem transportowym ($\lambda=1$, $\mu=1$).

Pojemność magazynu	Miejsce lokalizacji magazynu w systemie								
V	R ₁	R ₂	R ₃	R ₄	R ₅	R ₆	R ₇	R ₈	R ₉
0	50,0	37,0	31,3	28,6	27,8	28,6	31,3	37,0	50,0
$c_1 = 1000, c_2 = 600, \lambda = 1, \mu = 1$									
100	67,6	60,8	58,2	57,3	57,5	58,4	60,2	63,4	70,2
250	76,5	74,4	75,3	77,2	79,3	81,3	82,9	84,1	85,5
500	79,6	80,2	84,3	89,9	95,4	99,4	100,8	99,2	95,4
1 000	80,0	81,4	87,3	96,0	106,2	114,0	114,7	108,4	99,5
3 000	80,0	81,5	87,5	97,1	111,0	127,2	124,3	111,1	100,0
∞	80,0	81,5	87,5	97,1	111,1	131,4	125,0	111,1	100,0
$c_1 = 1000, c_2 = 1000, \lambda = 1, \mu = 1$									
100	70,5	64,2	61,4	60,2	59,8	60,2	61,4	64,2	70,5
250	86,2	86,0	86,6	87,1	87,3	87,1	86,6	86,0	86,2
500	95,9	101,5	106,5	109,9	111,1	109,9	106,5	101,5	95,9
1 000	99,6	109,6	119,9	128,5	131,9	128,5	119,9	109,6	99,6
3 000	100,0	111,1	125,0	141,8	152,8	141,8	125,0	111,1	100,0
∞	100,0	111,1	125,0	142,9	166,3	142,9	125,0	111,1	100,0
$c_1 = 800, c_2 = 1000, \lambda = 1, \mu = 1$									
100	70,4	63,9	61,0	59,5	58,9	59,1	60,2	62,8	69,3
250	85,9	85,3	85,2	84,9	84,2	83,1	81,9	81,1	82,0
500	95,7	100,7	104,4	106,0	105,0	101,6	96,9	91,9	88,3
1 000	99,6	109,2	118,3	123,6	122,0	114,4	104,7	95,9	89,9
3 000	100,0	111,1	124,9	139,2	136,3	119,9	106,2	96,3	90,0
∞	100,0	111,1	125,0	142,9	138,9	120,0	106,3	96,3	90,0
$c_1 = 600, c_2 = 1000, \lambda = 1, \mu = 1$									
100	70,2	63,4	60,2	58,4	57,5	57,3	58,2	60,8	67,6
250	85,5	84,1	82,9	81,3	79,3	77,2	75,3	74,4	76,5
500	95,4	99,2	100,8	99,4	95,4	89,9	84,3	80,2	79,6
1 000	99,5	108,4	114,7	114,0	106,2	96,0	87,3	81,4	80,0
3 000	100,0	111,1	124,3	127,2	111,0	97,1	87,5	81,5	80,0
∞	100,0	111,1	125,0	131,4	111,1	97,1	87,5	81,5	80,0
$c_1 = 400, c_2 = 1000, \lambda = 1, \mu = 1$									
100	69,9	62,6	58,7	56,3	54,8	54,2	54,7	57,3	64,7
250	84,8	81,7	78,4	74,7	70,9	67,5	65,1	64,9	69,2
500	94,7	96,0	93,2	87,1	79,7	73,0	68,3	66,5	70,0
1 000	99,3	106,0	104,7	94,5	83,0	74,2	68,7	66,7	70,0
3 000	100,0	111,0	114,9	97,1	83,3	74,3	68,7	66,7	70,0
∞	100,0	111,1	118,8	97,1	83,3	74,3	68,7	66,7	70,0
$c_1 = 200, c_2 = 1000, \lambda = 1, \mu = 1$									
100	69,0	60,1	54,7	51,0	48,4	47,1	47,5	50,4	59,3
250	82,5	74,7	66,8	59,8	54,4	51,0	49,9	51,8	60,0
500	92,0	84,7	72,8	62,5	55,5	51,4	50,0	51,9	60,0
1 000	97,9	91,6	74,8	62,9	55,6	51,4	50,0	51,9	60,0
3 000	100,0	96,0	75,0	62,9	55,6	51,4	50,0	51,9	60,0
∞	100,0	96,3	75,0	62,9	55,6	51,4	50,0	51,9	60,0

Tabela A8. Wartości wskaźnika wydajności W dla systemu z jednorodnym układem transportowym ($\lambda=2$, $\mu=1$).

Pojemność magazynu	Miejsce lokalizacji magazynu w systemie								
V	R ₁	R ₂	R ₃	R ₄	R ₅	R ₆	R ₇	R ₈	R ₉
0	17,5	11,8	9,5	8,5	8,3	8,5	9,5	11,8	17,5
$c_1 = 1000, c_2 = 600, \lambda = 2, \mu = 1$									
100	34,3	32,8	32,9	33,5	34,3	35,1	36,0	36,9	38,7
250	38,2	38,9	41,4	44,5	47,4	49,7	50,6	50,2	48,7
500	38,6	40,0	43,6	48,7	54,3	58,8	59,5	56,6	52,1
1 000	38,6	40,0	43,8	49,5	57,3	64,9	64,7	58,7	52,6
3 000	38,6	40,0	43,8	49,6	57,9	69,3	66,6	58,8	52,6
∞	38,6	40,0	43,8	49,6	57,9	70,1	66,7	58,8	52,6
$c_1 = 1000, c_2 = 1000, \lambda = 2, \mu = 1$									
100	39,1	37,9	37,6	37,6	37,6	37,6	37,6	37,9	39,1
250	49,1	51,7	54,0	55,6	56,1	55,6	54,0	51,7	49,1
500	52,2	57,5	62,9	67,2	68,9	67,2	62,9	57,5	52,2
1 000	52,6	58,8	66,3	74,2	78,2	74,2	66,3	58,8	52,6
3 000	52,6	58,8	66,7	76,9	86,2	76,9	66,7	58,8	52,6
∞	52,6	58,8	66,7	76,9	90,7	76,9	66,7	58,8	52,6
$c_1 = 800, c_2 = 1000, \lambda = 2, \mu = 1$									
100	38,9	37,5	37,0	36,6	36,3	36,0	35,7	35,8	37,1
250	49,0	51,2	52,8	53,3	52,7	51,0	48,6	46,0	44,1
500	52,2	57,2	61,8	64,3	63,3	59,2	53,9	49,0	45,5
1 000	52,6	58,7	65,9	71,7	70,2	62,7	55,2	49,4	45,6
3 000	52,6	59,8	66,7	76,5	74,2	63,2	55,2	49,4	45,6
∞	52,6	59,8	66,7	76,9	74,4	63,2	55,2	49,4	45,6
$c_1 = 600, c_2 = 1000, \lambda = 2, \mu = 1$									
100	38,7	36,9	36,0	35,1	34,3	33,5	32,9	32,8	34,3
250	48,7	50,2	50,6	49,7	47,4	44,5	41,4	38,9	38,2
500	52,1	56,6	59,5	58,8	54,3	48,7	43,6	40,0	38,6
1 000	52,6	58,7	64,7	64,9	57,3	49,5	43,8	40,0	38,6
3 000	52,6	58,8	66,6	69,3	57,9	49,6	43,8	40,0	38,6
∞	52,6	58,8	66,7	70,1	57,9	49,6	43,8	40,0	38,6
$c_1 = 400, c_2 = 1000, \lambda = 2, \mu = 1$									
100	38,3	35,8	34,0	32,3	30,8	29,4	28,4	28,2	33,3
250	48,2	48,2	46,2	42,7	38,7	34,9	32,0	30,5	31,5
500	51,9	55,0	53,6	47,6	41,0	35,9	32,4	30,6	31,6
1 000	52,6	58,2	58,4	49,4	41,3	35,9	32,4	30,6	31,6
3 000	52,6	58,8	62,0	49,6	41,3	35,9	32,4	30,6	31,6
∞	52,6	58,8	62,9	49,6	41,3	35,9	32,4	30,6	31,6
$c_1 = 200, c_2 = 1000, \lambda = 2, \mu = 1$									
100	37,0	32,5	28,9	25,8	23,3	21,5	20,6	21,0	24,5
250	46,3	41,3	34,5	28,8	24,7	22,2	21,0	21,2	24,6
500	50,8	46,0	36,0	29,1	24,8	22,2	21,0	21,2	24,6
1 000	52,4	48,5	36,2	29,1	24,8	22,2	21,0	21,2	24,6
3 000	52,6	49,4	36,2	29,1	24,8	22,2	21,0	21,2	24,6
∞	52,6	49,4	36,2	29,1	24,8	22,2	21,0	21,2	24,6

STRESZCZENIE PRACY DOKTORSKIEJ

TYTUŁ: EFEKTYWNOŚĆ SYSTEMU GOSPODARKI ZASOBAMI Z ROZBUDOWANYM UKŁADEM TRANSPORTOWYM – UJĘCIE MODELOWE

Autor: mgr Mirosław Liana

Promotor: dr hab. Mieczysław J. Król, prof. URz

Słowa kluczowe: gospodarowanie zasobami, procesy stochastyczne

Praca powstała w wyniku kontynuacji badań dotyczących układów technologicznych kopalni odkrywkowych z ciągłym transportem. Dotychczasowe wyniki badań poszerzono w niej o analizę ekonomiczną systemów z wieloczęściowymi układami transportowymi.

Głównym celem pracy jest zbadanie wpływu różnorodnych parametrów określających funkcjonowanie systemu na wielkość strat spowodowanych wystąpieniem niekorzystnych zdarzeń, takich jak nadmiar lub niedobór zasobów w zbiorniku. Wskaźniki tych zdarzeń są miernikami efektywności funkcjonowania systemu.

Najważniejsze wyniki przedstawione w pracy to: wyprowadzenie wzorów redukcyjnych pozwalających upraszczać modele ciągłych układów transportowych, określenie optymalnej pojemności zbiornika oraz wskazanie optymalnej konfiguracji systemu tzn. miejsca lokalizacji zbiornika i ustawienia poszczególnych podukładów transportowych.

Praca składa się z czterech rozdziałów. Uzupełnieniem przeprowadzonych analiz są liczne wykresy ilustrujące otrzymane wyniki oraz bogaty wykaz literatury światowej poświęconej zagadnieniom teorii gromadzenia zasobów.

WROCLAW UNIVERSITY OF TECHNOLOGY
DEPARTMENT OF INFORMATICS AND MANAGEMENT

Wrocław 2004

DOCTOR'S THESIS ABSTRACT

TITLE: EFFICIENCY OF THE RESOURCES MANAGEMENT SYSTEM WITH A COMPLEX TRANSPORTATION – A MODEL APPROACH

Author: mgr Mirosław Liana

Supervisor: dr hab. Mieczysław J. Król, prof. URz

Key words: resources management, stochastic processes

This dissertation is the result of ongoing research into technological systems in coal mining quarries with continuous transport systems. Current research results have been expanded with economic analysis of systems with the multi-component transportation.

The main purpose of this work is to investigate the influence of various parameters which characterize the functioning of the system in relation to the extent of the losses caused by randomly arising adverse events such as overflow or deficit of resources in the reservoir. The efficiency of the system is described through indices of the events.

Major results presented in this dissertation: introduction of reduction formulae allowing to simplify of models of continuous transport systems, determination of optimal capacity of the reservoir, determination of the optimal configuration of the system, i.e. location of the reservoir and arrangement of the specific transport subsystems.

The dissertation consists of four chapters followed by numerous graphs illustrating the results obtained, as well as extensive worldwide references related with the theory of resources storage.

