

Katarzyna Kuziak

Akademia Ekonomiczna we Wrocławiu

ZAGADNIENIE RYZYKA MODELU W ZARZĄDZANIU RYZYKIEM*

Ryzyko modelu pojawia się wszędzie tam, gdzie do opisu rzeczywistości jest używany model teoretyczny. Powoduje to, że kontrola tego ryzyka powinna być podstawą w każdym przypadku wykorzystania modelu.

Znaczenie modeli teoretycznych w procesie zarządzania ryzykiem jest ogromne. W procesie tym wyróżnić można trzy podstawowe etapy – identyfikację, pomiar i sterowanie. Na każdym z nich (np. do wyceny, zabezpieczania, oszacowania poziomu ryzyka) wykorzystywane są modele teoretyczne, których użycie stwarza dodatkowe ryzyko – ryzyko modelu. Na ryzyko to zwrócono szczególną uwagę w 1998 r., po upadku funduszu LTCM (*long term capital management*). Fundusz LTCM generował zyski głównie przez złożone strategie arbitrażowe, oparte na wyrafinowanych modelach matematycznych, z wykorzystaniem olbrzymiej dźwigni. Przyczyną upadku LTCM, poza czynnikami rynkowymi, było właśnie ryzyko modelu.

W obszarze zarządzania ryzykiem w wielu przypadkach jest konieczne ustalenie wartości pozycji (wyceny) nie na podstawie rynku (tzw. *mark-to-market*), ale właśnie na podstawie modelu (tzw. *mark-to-model*). Zachodzi więc konieczność stosowania modeli. Większość działań w pomiarze ryzyka zaczyna się od założenia znanego modelu, co w praktyce oznacza zignorowanie ryzyka modelu.

Ogólnie w procesie budowy modelu można wyróżnić cztery podstawowe etapy:

- 1) specyfikację,
- 2) określenie zbioru danych,
- 3) estymację parametrów,
- 4) weryfikację.

Właściwie na każdym z nich może powstać ryzyko modelu.

* Pracę napisano w ramach projektu badawczego nr 1 H02B 01426 nt. „Metody ekonometryczno-statystyczne w zintegrowanym systemie zarządzania ryzykiem w przedsiębiorstwie”, finansowanego przez Komitet Badań Naukowych w latach 2004-2006.

Ryzyko modelu może być różnie definiowane – jest to możliwość poniesienia straty w wyniku zastosowania złego modelu do wyceny instrumentów finansowych lub pomiaru ryzyka (zakładamy, że model jest wykorzystywany poprawnie) [Gątarek 2002]. Bardziej ogólnie możemy stwierdzić, że pojawia się ono wówczas, gdy opisywany w sposób formalny i poprawny fragment rzeczywistości – model – oddala się od rzeczywistości, generując straty. Na potrzeby tego artykułu przyjmiemy, że ryzyko modelu będzie tym ryzykiem, które powstaje w procesie budowy modelu. Trywialny błąd w wykorzystaniu modelu będzie zatem tzw. ryzykiem operacyjnym, a nie ryzykiem modelu. Niektórzy zaliczają ryzyko modelu do ryzyka operacyjnego, inni traktują je jako odrębny rodzaj ryzyka. Podział w tym przypadku nie jest ostry.

Wyróżniamy trzy podstawowe grupy źródeł ryzyka modelu:

- 1) finansowe,
- 2) techniczne,
- 3) statystyczne.

W grupie źródeł finansowych można wyróżnić brak płynności, nieuwzględnienie kosztów transakcyjnych, nieuwzględnienie bid-ask spreadów, wybór ceny do analiz (cena zamknięcia, cena transakcji, średnia cena). Wśród źródeł technicznych można wyróżnić: niewystarczającą liczbę powtórzeń w symulacjach, błędy przybliżeń, ograniczone przedziały ważności rozwiązań.

W niniejszym artykule zwrócimy uwagę jedynie na statystyczne źródła ryzyka modelu. Możemy do nich zaliczyć przede wszystkim:

1. Błędy estymacji modelu pojawiające się np. wskutek:
 - różnych technik estymacji,
 - błędów w estymacji parametrów,
 - błędów wynikających z dyskretyzacji,
 - istnienia obserwacji nietypowych,
 - nieodpowiedniej liczby obserwacji,
 - wykorzystania danych o nieodpowiedniej częstotliwości.
2. Błędą specyfikację modelu, będącą wynikiem np.:
 - błędów w rozwiązywaniu analitycznym,
 - błędnej specyfikacji procesu kształtującego stopę zwrotu (wartość) instrumentu finansowego,
 - pominięcia istotnego czynnika.

Na przykład błąd estymacji może dotyczyć szacowania parametru zmienności dlatego, że zmienność może zostać oszacowana:

- jako zmienność historyczna (np. modele z grupy GARCH),
- jako zmienność implikowana.

Błąd specyfikacji procesu kształtującego stopę zwrotu (wartość) instrumentu finansowego w modelu Blacka-Scholesa-Mertona może pojawić się np. w przypadku przyjęcia założenia dla procesu stopy zwrotu instrumentu podstawowego innego niż geometryczny ruch Browna, np.:

- geometrycznego ruchu Browna ze składnikiem losowym o rozkładzie innym niż normalny,
- procesu Ornsteina-Uhlenbecka,
- procesu skoku-dyfuzji (*jump-diffusion*).

Ilustracja zagadnienia ryzyka modelu w zarządzaniu ryzykiem, której źródłem będzie zła specyfikacja procesu stochastycznego kształtującego stopę zwrotu, zostanie przedstawiona na przykładzie modelu wyceny opcji na indeks WIG20 oraz modelu VaR dla pozycji portfela akcji wchodzących w skład indeksu WIG20. Źródło ryzyka modelu, którym jest błąd estymacji modelu pojawiający się wskutek nieodpowiedniej liczby obserwacji, będzie zilustrowane przykładem modelu wyceny opcji na indeks WIG20.

W pierwszym przykładzie w modelu wyceny opcji na indeks WIG20 rozważone zostaną następujące procesy dla stóp zwrotu r_t indeksu w trzech modelach wyceny opcji indeksowej:

1. Model Blacka-Scholesa-Mertona (BSM):

$$r_t = \mu \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \varepsilon_t,$$

$$\varepsilon_t \sim N(0, 1),$$

gdzie: μ oznacza oczekiwaną stopę zwrotu, a σ – zmienność (odchylenie standardowe stopy zwrotu). Proces ten zakłada stałą zmienność w czasie.

2. Model CEV (*constant elasticity variance*):

$$r_t = \mu \Delta t + \sigma S^{\alpha-1} \sqrt{\Delta t} \varepsilon_t,$$

$$\varepsilon_t \sim N(0, 1),$$

gdzie: μ oznacza oczekiwaną stopę zwrotu, a $\sigma S^{\alpha-1}$ – zmienność. Proces ten zakłada stałą elastyczność wariancji, jest wykorzystywany do modelowania heteroskedastyczności.

3. AR(1)-GJR-GARCH(1,1)¹:

$$r_t = \mu + \phi r_{t-1} + \varepsilon_t,$$

$$h_t = \omega + (\alpha + \alpha' I_{(\varepsilon_{t-1} < 0)}) \varepsilon_{t-1}^2 + \beta h_{t-1},$$

$$V = \frac{\omega}{1 - \bar{\alpha} - \beta} \times \frac{1}{1 - \phi^2},$$

gdzie: μ , ϕ , α , α' , β , ω – parametry procesu stóp zwrotu, h – warunkowa wariancja, V – bezwarunkowa wariancja procesu (długoterminowa wariancja procesu). Proces ten umożliwia uwzględnienie grubych ogonów rozkładów, skupiania zmienności, autokorelacji stóp zwrotu oraz efektu dźwigni (asymetrycznej reakcji inwestorów na dobre i złe wiadomości).

W modelu BSM i CEV wyceny opcji znana jest postać analityczna modelu, natomiast w przypadku trzeciego modelu nie ma postaci analitycznej modelu (war-

¹ W dalszych opisach będzie stosowany skrót GJR-GARCH.

tość opcji jest ustalana za pomocą symulacji Monte Carlo metodą zaproponowaną w pracy [Duan 1995].

Tabela 1. Oszacowania parametrów procesu stopy zwrotu indeksu WIG20

Model	Parametry
GBM	$\mu = 0,0000$ $\sigma = 0,2551$
CEV	$\mu = -0,0001$ $\sigma = 0,8609$ $\alpha = 0,8318$
GJR-GARCH	$\mu = -0,00002$ $\phi = 0,04531$ $\omega = 0,00001$ $\beta = 0,94430$ $\alpha = 0,02370$ $\alpha^- = 0,03077$

Źródło: obliczenia własne.

Na podstawie analizy dopasowania procesów do opisu kształtowania stopy zwrotu indeksu WIG20 wybrany został model GJR-GARCH. Następnie wysymulowany został proces stopy zwrotu indeksu WIG20 dla oszacowań parametrów z procesu GJR-GARCH i wycenione zostały opcje indeksowe za pomocą dwóch pozostałych modeli (tab. 1). Przyjęto hipotetyczną opcję na WIG20 o parametrach: wielkość WIG20 – 1600 pkt, stopa wolna od ryzyka – 6%, długość do terminu wygaśnięcia – 63 dni, średnia stopa dywidendy – 2%. Wykonano 500 000 powtórzeń dla różnych cen wykonania: 1500, 1550, 1600, 1650 i 1700. W tabeli 2 podano wyniki wyceny – prawidłowej, tj. z modelu GJR-GARCH, oraz nieprawidłowej, tj. na podstawie błędnie wyspecyfikowanego procesu stochastycznego stopy zwrotu w modelu BSM i zmodyfikowanego BSM*, w którym przyjęto długoterminową zmienność V z procesu GJR-GARCH oraz modelu CEV.

Tabela 2. Wartości opcji dla różnych cen wykonania i różnych procesów stóp zwrotu

Model	Ceny wykonania				
	1500	1550	1600	1650	1700
GJR-GARCH	182,8069	123,7760	105,2971	71,5782	52,5355
CEV	176,4835	133,0469	118,2862	82,4268	70,2544
BSM	168,2150	127,1653	103,5143	76,2954	60,3414
BSM*	168,6291	127,0573	103,7178	76,1781	61,0460

Źródło: obliczenia własne.

W tabeli 2 pogrubioną czcionką są zaznaczone wyniki najbliższe wartościom opcji z procesem GJR-GARCH. Nie ma żadnych istotnych prawidłowości, poza spodziewaną, że wyniki z modelu BSM*, w którym przyjęto długoterminową zmienność z procesu GJR-GARCH, są najbliższe wynikom GJR-GARCH. Widać jednak, że jeżeli przyjmiemy nieprawidłowy proces, różnice w wynikach wartości opcji mogą być znaczące (są to różnice dla jednej opcji, a podmioty często posiadają portfele).

W drugim przykładzie zilustrowane zostanie ryzyko modelu, pojawiające się wskutek złej specyfikacji procesu stochastycznego kształtującego stopę zwrotu w modelu wielkości zagrożonej – VaR. Model VaR będzie oszacowany metodą wariancji-kowariancji dla pozycji złożonej z akcji wchodzących w skład indeksu WIG20, przy założeniu dwóch procesów stopy zwrotu WIG20:

- 1) geometrycznego ruchu Browna,
- 2) AR(1)-GJR-GARCH(1,1).

Podobnie jak w pierwszym przykładzie, uwzględniono również długoterminową zmienność V z modelu AR(1)-GJR-GARCH(1,1). Wyniki oszacowań wielkości strat dla hipotetycznej wartości portfela akcji wchodzących w skład indeksu WIG20 są zestawione w tab. 3. Rozważono dwa poziomy istotności dla VaR – 5 i 1% oraz podano poziom zmienności uwzględniony w obliczeniach.

Tabela 3. Wartości strat w modelu VaR dla portfela akcji wchodzących w skład indeksu WIG20

	GBM = 0,4624	GJR-GARCH = 0,3107	GJR-GARCH* = 0,3092
VaR95	762 960	512 655	510 180
VaR99	107 7392	723 931	720 436

Źródło: obliczenia własne.

Różnice są znaczne, a jeśli weźmiemy pod uwagę to, że podmiot na podstawie wielkości VaR ustala np. wysokość kapitału na pokrycie strat, jest istotne, jaki proces stopy zwrotu zostanie przyjęty.

W trzecim przykładzie ryzyko modelu pojawiające się wskutek błędu estymacji modelu spowodowanej nieodpowiednią liczbą obserwacji będzie zilustrowane przykładem modelu wyceny opcji na indeks WIG20. Rozważone zostaną dwa szeregi obserwacji różnej długości:

- 1) 2121 obserwacje (notowania WIG20 od 2 stycznia 1996 r. do 28 czerwca 2004 r.),
- 2) 1622 obserwacje (notowania WIG20 od 1 stycznia 1998 r. do 28 czerwca 2004 r.).

Do wyceny użyte będą te same modele, które wykorzystano w przykładzie pierwszym, tj. BSM, CEV i GJR-GARCH. Uwzględniono również model BSM*, w którym przyjęto długoterminową zmienność z procesu GJR-GARCH. Wartości opcji zestawiono w tab. 4.

Tabela 4. Wartości opcji dla różnych procesów stóp zwrotu i różnej długości szeregów stóp zwrotu

Opcja	Wartość opcji							
	CEV		GJR-GARCH		BSM		BSM*	
	2121	1622	2121	1622	2121	1622	2121	1622
OW20I4160	156,54	156,55	207,86	196,56	217,52	218,00	215,24	212,00
OW20I4170	126,05	126,42	138,88	124,72	152,70	153,27	149,97	146,07
OW20I4180	79,19	79,56	89,92	76,04	105,68	106,28	102,84	98,77
OW20I4190	46,74	47,05	55,26	42,67	70,54	71,10	67,86	64,04
OW20I4200	25,97	26,21	32,40	22,23	45,52	46,01	43,19	39,91
OW20L4190	97,96	98,46	124,83	139,57	138,71	138,08	134,61	128,73

Źródło: obliczenia własne.

Najmniej wrażliwe na długość szeregu stóp zwrotu są modele CEV i BSM. Jeśli uwzględnimy długoterminową zmienność z procesu GJR-GARCH w modelu BSM*, można zauważyć nieco większe rozbieżności w wycenie niż w modelu BSM. Największe rozbieżności w wartościach opcji powstały wyniku zastosowania procesu GJR-GARCH.

Zagadnienie ryzyka modelu w zarządzaniu ryzykiem zilustrowano przykładem błędu estymacji (złej specyfikacji procesu stochastycznego kształtującego stopę zwrotu) oraz błędu estymacji. Przeprowadzone badania dla modelu wyceny opcji na indeks giełdowy WIG20 i modelu VaR dla pozycji portfela akcji wchodzących w skład indeksu WIG20 wskazują, jak ważne są założenia leżące u podstaw tych modeli, a właściwie każdego modelu. Wyniki wskazują na dużą wrażliwość wyniku na przyjęte założenia i konieczność zarządzania tego rodzaju ryzykiem. Ponieważ modele te w zarządzaniu ryzykiem mogą być pomocne w określaniu poziomu rezerw na pokrycie strat czy limitów na pozycjach, należy uwzględnić poprzez np. pomiar ryzyka modelu. W przypadku opcji takim miernikiem może być współczynnik vega (pochodna ceny opcji po zmienności ceny instrumentu bazowego). Przykłady te wskazują ponadto, że pomocne w zarządzaniu ryzykiem modelu mogą być techniki analizy danych takie, jak:

- estymacja odporna,
- analiza szeregów czasowych,
- analiza rozkładów,
- prognozowanie.

Oprócz stosowania techniki analizy danych, w zarządzaniu ryzykiem modelu konieczne są:

- wyspecjalizowana kadra,
- współpraca zarządzających ryzykiem z departamentem zawierającym transakcje,
- testowanie wykorzystywanych modeli (analiza scenariuszy),
- regularna kontrola wykorzystywanych modeli,
- limity pozycji,
- tworzenie rezerw na pokrycie strat.

Literatura

- Allen S.L., *Financial Risk Management: a Practitioners Guide to Managing Market and Credit Risk*, Wiley 2003.
- Crouhy M., Galai D., Mark R., *Risk Management*, McGraw-Hill, New York 2001.
- Derman E., *Model Risk*, „Risk” 1996, 9, s. 34-37.
- Duan J., *The GARCH Option Pricing Model*, „Mathematical Finance” 1995, nr 5, s. 13-32.
- Gątarek D., *Ryzyko modelu*, „Rynek Terminowy” 2002, nr 4, s. 52-55.

- Glosten R. Jagannathan, D. Runkle, *On the Relation between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks*, „Journal of Finance” 1993, 48, s. 1179-1801.
- Kato T., Yoshida T., *Model Risk and its Control. Monetary and Economic Studies*, 2000, grudzień, s. 129-156.
- Rebonato R., *Theory and Practice of Model Risk Management*.

MODEL RISK IN RISK MANAGEMENT PROCESS

Summary

Model risk is understood as the special risk that arises when reality is described by theoretical model (every model is a simplification of reality). The first step before using any of theoretical models should be model risk control. Theoretical models play an important role in risk management process. Risk management process can be separated into three activities (steps): identification, measurement, monitor and control. In every step (for pricing, hedging, risk valuation) theoretical models will be used. This causes the additional risk, a so-called model risk. The paper will present model risk, types of model risk and sources of model risk. Empirical evidence will be given.