

**INSTYTUT CYBERNETYKI TECHNICZNEJ
POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ**

Raport serii: PREPRINTY nr 50/2004

Miary jakości manipulatorów mobilnych

(rozprawa doktorska)

Katarzyna ZADARNOWSKA

PROMOTOR:

Prof. dr hab. inż. Krzysztof Tchoń

Słowa kluczowe:

- manipulator mobilny
- kinematyka i dynamika
- miary jakości
- zręczność
- konfiguracja endogeniczna

**WROCŁAW
październik 2004**

1287



320333 L / 1



2005/ 02211D

Dziękuję promotorowi, Profesorowi Krzysztofowi Tchoniowi za poświęcony czas i wnikliwe wskazówki, którym rozprawa zawdzięcza to, co w niej najlepsze.

Podstawowe tezy rozprawy:

- 1. Miary jakości manipulatorów mobilnych można wyprowadzić w ramach metody przestrzeni endogenicznej, wykorzystując analogię do manipulatorów stacjonarnych.*
- 2. Uzyskane w ten sposób miary jakości nie mają istotnych ograniczeń miar uzyskanych w podejściu tradycyjnym.*
- 3. Dynamiczne miary jakości manipulatorów mobilnych można zbudować przez analogię do miar kinematycznych.*
- 4. Wyprowadzone miary jakości nadają się do optymalnego projektowania zachowania lub geometrii i dynamiki manipulatorów mobilnych.*

Spis ważniejszych oznaczeń

A	-	macierz ograniczeń Pfaffa
$\mathcal{D}_{(),T}$	-	macierz zręczności manipulatora mobilnego
d	-	lokalna dystorsja manipulatora holonomicznego
$d_{(),T}$	-	lokalna dystorsja manipulatora mobilnego
D	-	globalna dystorsja manipulatora holonomicznego
$D_{(),T}$	-	globalna dystorsja manipulatora mobilnego
E	-	elipsoida manipulowalności manipulatora holonomicznego
$E_{(),T}$	-	elipsoida zręczności manipulatora mobilnego
$\varphi_{(),t}$	-	strumień układu dynamicznego
k	-	kinematyka manipulatora holonomicznego
$K_{(),T}$	-	kinematyka chwilowa manipulatora mobilnego
κ	-	lokalny współczynnik uwarunkowania konfiguracji manipulatora holonomicznego
$\kappa_{(),T}$	-	lokalny współczynnik uwarunkowania konfiguracji manipulatora mobilnego
$\mathcal{K}$	-	globalny współczynnik uwarunkowania manipulatora holonomicznego
$\mathcal{K}_{(),T}$	-	globalny współczynnik uwarunkowania manipulatora mobilnego
$L_m^2[0, T]$	-	przestrzeń Hilberta
M	-	macierz manipulowalności manipulatora holonomicznego
$\mathcal{M}_{(),T}$	-	macierz mobilności manipulatora mobilnego
m	-	lokalna manipulowalność manipulatora holonomicznego
$m_{(),T}$	-	lokalna zręczność manipulatora mobilnego
$\mathcal{M}$	-	globalna manipulowalność manipulatora holonomicznego
$\mathcal{M}_{(),T}$	-	globalna zręczność manipulatora mobilnego
$\mathbf{m}_{(),T}$	-	lokalna mobilność manipulatora mobilnego
$\mathfrak{M}_{(),T}$	-	globalna mobilność manipulatora mobilnego
$\mathbb{R}^n$	-	przestrzeń euklidesowa n-wymiarowa
t	-	śląd macierzy manipulowalności manipulatora holonomicznego
$\mu_{(),T}^e$	-	efektywność energetyczna manipulatora mobilnego
$\mu_{(),T}^m$	-	efektywność ruchowa manipulatora mobilnego
$\mathcal{X}$	-	endogeniczna przestrzeń konfiguracyjna manipulatora mobilnego

Spis treści

1. Wstęp	7
2. Miary jakości manipulatorów stacjonarnych	11
3. Miary jakości manipulatorów mobilnych - podejście klasyczne	18
3.1. B. Bayle, J.-Y. Forquet, M. Renaud i G. Foulon	18
3.2. Y. Yamamoto, Y. Yun i S. Fukuda	19
3.3. J. F. Gardner i S. A. Velinsky	23
3.4. Ograniczenie podejścia tradycyjnego	24
4. Metoda endogenicznej przestrzeni konfiguracyjnej	25
4.1. Kinematyka	25
4.1.1. Manipulatory mobilne klasy (0,nh)	25
4.1.2. Manipulatory mobilne klasy (nh,h)	27
4.1.3. Manipulatory mobilne klasy (nh,nh)	30
4.2. Dynamika	32
4.2.1. Manipulatory mobilne klasy (nh,h)	32
4.2.2. Manipulatory mobilne klasy (nh,0)	35
4.3. Endogeniczna przestrzeń konfiguracyjna o ograniczonym paśmie	37
5. Endogeniczne miary jakości manipulatorów mobilnych	38
5.1. Miary kinematyczne	38
5.1.1. Manipulatory mobilne klasy (0,nh)	38
5.1.2. Manipulatory mobilne klasy (nh,h)	39
5.1.3. Manipulatory mobilne klasy (nh,nh)	42
5.2. Miary dynamiczne	43
5.2.1. Manipulatory mobilne klasy (nh,h)	43
5.2.2. Manipulatory mobilne klasy (nh,0)	44
6. Metoda endogenicznej przestrzeni konfiguracyjnej a podejście tradycyjne	46
6.1. Podejście tradycyjne	46
6.2. Metoda endogenicznej przestrzeni konfiguracyjnej	48
7. Modele manipulatorów mobilnych poddanych badaniom symulacyjnym	53
8. Wyznaczenie kinematycznych miar jakości manipulatorów mobilnych	61
8.1. Zręczność	61
8.1.1. Manipulator typu (0,nh): planarny manipulator nieholonomiczny typu 3R	61
8.1.2. Manipulator typu (nh,h): manipulator holonomiczny typu RTR na platformie dwukołowej	62
8.1.3. Manipulator typu (nh,h): planarny manipulator holonomiczny typu 3R na samochodzie kinematycznym	66
8.1.4. Manipulator typu (nh,nh): planarny manipulator nieholonomiczny typu 3R na samochodzie kinematycznym	67
8.1.5. Manipulator typu (nh,nh): planarny manipulator nieholonomiczny typu 3R na monocyklu	70
8.2. Izotropowość	72
8.2.1. Manipulator typu (0,nh): planarny manipulator nieholonomiczny typu 3R	72

8.2.2.	Manipulator typu (nh,h): planarny manipulator holonomiczny typu 2R na monocyklu . . .	75
8.2.3.	Manipulator typu (nh,nh): planarny manipulator nieholonomiczny typu 3R na samochodzie kinematycznym	80
8.3.	Dystorsja	86
8.3.1.	Manipulator typu (nh,h): planarny manipulator holonomiczny typu 3R na platformie dwukołowej	86
8.3.2.	Manipulator typu (nh,nh): planarny manipulator nieholonomiczny typu 3R na platformie dwukołowej	89
9.	Wyznaczenie dynamicznych miar jakości manipulatorów mobilnych	95
9.1.	Zręczność	95
9.1.1.	Manipulator typu (nh,0): robot mobilny MK	95
9.1.2.	Manipulator typu (nh,0): deskorolka	99
9.2.	Izotropowość	105
9.2.1.	Manipulator typu (nh,0): robot mobilny MK	105
9.3.	Dystorsja	109
9.3.1.	Manipulator typu (nh,0): deskorolka	109
10.	Inne parametryzacje funkcji sterujących platformy	111
10.1.	Wielomiany Czebyszewa	113
10.2.	Wielomiany Bernsteina	116
11.	Rozszerzenia	122
11.1.	Normy	122
11.1.1.	Manipulator typu (nh,h): manipulator typu RTR na platformie dwukołowej	122
11.2.	Uśrednianie względem T	126
11.2.1.	Manipulator typu (nh,h): manipulator typu RTR na platformie dwukołowej	126
11.3.	Efektywność	127
11.3.1.	Efektywność energetyczna	127
11.3.2.	Efektywność ruchowa	131
12.	Podsumowanie	135
A.	Dodatek	137
A.1.	Obliczanie macierzy mobilności $\mathcal{M}_{q_0,T}$	137
A.2.	Ilustracja graficzna elipsoidy zręczności $E_{q_0,T}$	137
A.3.	Obliczanie globalnych miar jakości manipulatorów mobilnych	138
A.4.	Optymalizacja miar jakości	139
	Bibliografia	141
	Spis rysunków	145
	Spis tabel	151

1. Wstęp

Manipulatory stacjonarne są przedmiotem intensywnych badań już od ponad trzydziestu lat, a prace nad ich projektowaniem wciąż są dokumentowane w literaturze robotycznej ([67], [41], [27]). W odróżnieniu od manipulatorów stacjonarnych, tematyką manipulatorów mobilnych zaczęto interesować się stosunkowo niedawno, bo dopiero w latach 90 tych XX wieku. Mianem manipulatora mobilnego określa się układ robotyczny złożony z platformy mobilnej oraz umieszczonego na niej manipulatora stacjonarnego. W tym połączeniu obu podsystemów, a raczej w połączeniu ich zalet, należy upatrywać przyczyn znacznego wzrostu zainteresowania teorią i zastosowaniami manipulatorów mobilnych. Istotnie, własności lokomocyjne platformy przyczyniają się do rozszerzenia przestrzeni roboczej manipulatora, natomiast ramię umożliwia platformie pełnienie funkcji manipulacyjnych. To połączenie własności lokomocyjnych platformy oraz manipulacyjnych ramienia sprawia, że manipulatory mobilne są coraz powszechniej stosowane w robotyce usługowej, przemysłowej, medycznej, jak również w bardziej wyspecjalizowanych dziedzinach, takich jak obsługa reaktorów nuklearnych, badania kosmiczne i podwodne. Różnorodne i jednocześnie coraz powszechniejsze zastosowanie manipulatorów mobilnych stawia przed robotykami zadanie skonstruowania narzędzi modelowania oraz algorytmów sterowania manipulatorów mobilnych.

Uzyskane dotąd wyniki badań w tej dziedzinie zostały dość obszernie udokumentowane w literaturze ([25], [69], [68], [29], [17], [54], [15], [63], [19]), niemniej jednak wciąż istnieją w dziedzinie manipulatorów mobilnych otwarte problemy badawcze. Należy do nich zasadnicza z punktu widzenia sterowania oraz projektowania układów robotycznych problematyka miar jakości manipulatorów mobilnych. Z myślą o stawiających rosnące wymagania zastosowaniach robotów, coraz częściej rezygnuje się z produkcji prostych i tanich manipulatorów stacjonarnych na rzecz droższych, ale zręcznych manipulatorów mobilnych wyposażonych w dodatkowe stopnie swobody oraz bogate czujnikowanie. Jednak, mimo postępu badań, wciąż brakuje instrumentarium pozwalającego ilościowo opisywać zręczność manipulatorów mobilnych, własność robotów decydującą o wielkości ich przestrzeni roboczej, łatwości poruszania się, a także o ich zdolności do unikania przeszkód i konfiguracji osobliwych. W literaturze istnieje wiele prac dotyczących miar jakości manipulatorów stacjonarnych, natomiast niewiele prac poświęcono manipulatorom mobilnym. Ponieważ klasa manipulatorów mobilnych zawiera w sobie klasę manipulatorów stacjonarnych, wydaje się, że poprawna metodologia postępowania powinna zakładać definiowanie pojęć i własności manipulatorów mobilnych na wzór ich odpowiedników dla manipulatorów stacjonarnych. W dziedzinie manipulatorów stacjonarnych przyjęto pewną klasyfikację miar jakości. Przede wszystkim zdefiniowano pojęcie zręczności lokalnej, opisującej wrażliwość efektora na małe ruchy przegubów w pobliżu ustalonej konfiguracji manipulatora, oraz zręczności globalnej odzwierciedlającej wrażliwość manipulatora jako całości. Efektem było wyróżnienie lokalnych oraz globalnych miar jakości. Ponadto, w zależności od charakteru modelu manipulatora, zdefiniowano miary kinematyczne, określone dla manipulatorów opisywanych jedynie równaniami kinematyki i dynamiczne, otrzymywane po uwzględnieniu dynamiki robota. Pokazano, że zręczność systemów robotycznych można definiować przez odwołanie się do optymalizacji pewnych kryteriów, najczęściej mających postać różnego rodzaju funkcjonałów macierzy Jacobiego manipulatora. Inspiracją do takiego podejścia została zaczerpnięta z sięgającej swymi początkami lat trzydziestych dwudziestego stulecia teorii planowania eksperymentu. W ramach teorii planowania eksperymentu, na podstawie funkcjo-

nałów macierzy informacyjnej skonstruowano takie pojęcia jak elipsoida ufności - odpowiednik elipsoidy manipulowalności, kryterium D-optimalności - równoważnik manipulowalności, a także odpowiadające robotycznemu pojęciu dystorsji kryterium A-optimalności. Szczegółowe omówienie oraz przykłady zastosowania kryteriów planowania eksperymentu zawiera praca [51].

W literaturze poświęconej konstruowaniu i zastosowaniom miar jakości manipulatorów stacjonarnych, do najwcześniej zdefiniowanych miar należy ekscentryczność wprowadzona przez Liegeois [35]. Kinematyczna koncepcja współczynnika uwarunkowania została zaproponowana w pracy [52], natomiast odpowiednią dynamiczną miarę anizotropowości konfiguracji podali Ma i Angeles [36]. Yoshikawa wprowadził pojęcie kinematycznej i dynamicznej manipulowalności oraz koncepcję kinematycznej i dynamicznej elipsoidy manipulowalności [71], [72]. Zastosowaniem tych miar do wyznaczenia optymalnej konfiguracji i geometrii manipulatora wykonującego określone zadanie zajęli się Klein i Blaho [32]. Zaproponowali oni także, by jako jednej z miar jakości używać najmniejszej wartości własnej macierzy manipulowalności. Van den Doel i Pai pokazali, że miarą jakości działania manipulatorów stacjonarnych może być tensor krzywizny opisujący nieliniowości trajektorii ruchu ramienia manipulatora [66]. Aspragathos i Foussias podali koncepcję wydajności prędkości, miary pozwalającej wyznaczyć największą prędkość efektora przy najmniejszej prędkości przegubów manipulatora [3]. Zeghloul i współpracownicy zaproponowali pojęcie indeksu zgodności [80] pozwalającego uzyskać konfigurację, dla której precyzja ruchu i wielkość siły w zadanym kierunku manipulatora osiągają największą wartość. Koncepcja globalnego współczynnika uwarunkowania została zaproponowana przez Gosselina i Angelesa [22]. Park i Brockett zdefiniowali lokalne oraz globalne pojęcie dystorsji, miary niesztynności kinematyki robota. Praca [73] wprowadziła pojęcie globalnej manipulowalności. Szczegółowe definicje wymienionych wyżej miar jakości manipulatorów stacjonarnych zostaną omówione w rozdziale 2. Miary jakości manipulatorów stacjonarnych są wykorzystywane przy rozwiązywaniu odwrotnego zadania kinematyki i zadania planowania ruchu [32]. Używa się ich do poszukiwania optymalnego punktu pracy w przestrzeni zadaniowej robota [32]. Ponadto mogą one służyć do utrzymywania przegubów manipulatora w obrębie ich ograniczeń mechanicznych ([35], [48]). Wskaźniki jakości znajdują zastosowanie przy wyznaczaniu konfiguracji optymalnych, czyli np. dalekich od osobliwych, omijających granice przestrzeni roboczej lub charakteryzujących się dużą ruchliwością. Współczynnik uwarunkowania jest przydatny przy wyznaczaniu konfiguracji izotropowych. Miary jakości mogą być użyteczne przy optymalnym doborze prędkości przegubów robota [49]. Prace [1] oraz [3] opisują ich zastosowanie do planowania optymalnej trajektorii efektora robota w przestrzeni zadaniowej. W pracy [70] omówiono zastosowanie miar jakości do bezkolizyjnego sterowania parą współpracujących manipulatorów zamontowanych na wspólnej platformie mobilnej. Ich wykorzystanie do koordynacji między manipulacją a lokomocją manipulatorów mobilnych opisano w [69]. Globalne miary jakości wykorzystuje się do projektowania optymalnej geometrii robotów [21].

Literatura dotycząca miar jakości manipulatorów mobilnych jest znacznie skromniejsza. Zagadnieniem przeniesienia pojęć manipulowalności oraz kinematycznej i dynamicznej elipsoidy manipulowalności na manipulatory mobilne zajęli się Yamamoto i Yun [70]. Gardner i Velinsky pokazali przykład wykorzystania kinematycznej elipsoidy manipulowalności w celu wyznaczenia optymalnej geometrii manipulatora mobilnego [21]. Różne definicje manipulowalności dla kołowych manipulatorów mobilnych zaproponowano w pracach [6], [20], [68]. Wymienione prace prezentują tradycyjne podejście do manipulatorów mobilnych, którego mankamentem jest, że nie dla każdego nieholonomicznego robota mobilnego miary jakości są dobrze określone. Kwestię tę wyjaśniamy szczegółowo w rozdziale 3.

Niniejsza rozprawa proponuje sposób podejścia, który nie posiada wad podejścia tradycyjnego. Nowy schemat postępowania, wykorzystujący koncepcję endogenicznej przestrzeni konfiguracyjnej, ujmuje problem modelowania kinematyki manipulatorów mobilnych z punktu widzenia teorii sterowania oraz respektuje zasadę analogii i korespondencji manipulatorów stacjonarnych i mobilnych. W obrębie proponowanego podejścia w równym stopniu uwzględniane są własności manipulatora pokładowego oraz

platformy mobilnej. Szczegółowy wykład metody endogenicznej przestrzeni konfiguracyjnej można znaleźć w pracach [56], [57], [58], [59], [63], [64]. Celem niniejszej pracy jest przeniesienie na manipulatory mobilne miar jakości istniejących dla manipulatorów stacjonarnych przy zastosowaniu metody endogenicznej przestrzeni konfiguracyjnej. Sugestię takiego postępowania zawiera praca [64]. Inspiracją do podjęcia tematyki rozprawy była nie tylko ciekawość naukowa, lecz także przekonanie autorki o znaczeniu praktycznym miar jakości manipulatorów mobilnych.

Rozprawa dotyczy konstruowania miar jakości manipulatorów mobilnych oraz wskazuje na ich zastosowanie do optymalnego projektowania konfiguracji oraz geometrii robotów. Jest ona podsumowaniem kilkuletnich badań, których szczegółowe wyniki zostały opublikowane w pracach [74], [76], [65], [77], [75]. Metodologia przyjęta w pracy opiera się na założeniu, że miary jakości manipulatorów mobilnych tworzy się analogicznie do istniejących, dobrze zdefiniowanych miar jakości manipulatorów stacjonarnych, natomiast dynamiczne miary jakości robotów mobilnych można konstruować poprzez analogię do odpowiednich kinematycznych miar jakości manipulatorów mobilnych. Podstawowe wyniki rozprawy (rozdziały 4 i 5) obejmują zdefiniowanie i przebadanie następujących miar jakości manipulatorów mobilnych: lokalna zręczność kinematyczna i dynamiczna, lokalny kinematyczny i dynamiczny współczynnik uwarunkowania konfiguracji, globalny kinematyczny i dynamiczny współczynnik uwarunkowania, lokalna mobilność kinematyczna i dynamiczna, globalna mobilność kinematyczna i dynamiczna, lokalna dystorsja kinematyczna i dynamiczna oraz globalna dystorsja kinematyczna i dynamiczna. Zalety metody endogenicznej przestrzeni konfiguracyjnej w porównaniu do podejścia tradycyjnego przedstawiono w rozdziale 3. W rozdziale 6 pokazujemy przykład zadania optymalnego projektowania manipulatora mobilnego, które można rozwiązać zarówno w sposób tradycyjny, jak i metodą endogenicznej przestrzeni konfiguracyjnej. W pracy zamieszczono wyniki optymalizacji konfiguracji przykładowych manipulatorów mobilnych (rozdziały 8 i 9). Pokazujemy m.in., że w konfiguracji zręcznej manipulator mobilny porusza się po okręgu, a jego ramię jest wysunięte w kierunku jazdy. Przedstawiamy konfiguracje izotropowe wybranych manipulatorów mobilnych. Na podstawie znanych kryteriów chaosu pokazujemy, że zachowanie manipulatorów mobilnych w konfiguracjach izotropowych jest chaotyczne. Wyniki optymalizacji geometrii manipulatorów mobilnych sugerują, że manipulator pokładowy powinien być zamontowany w wierzchołkach platformy mobilnej. Praca podejmuje problem optymalizacji konfiguracji i geometrii nowych obiektów robotycznych, jakimi są manipulatory podwójnie nieholonomiczne. W ramach testowania dynamicznych miar jakości proponujemy optymalne parametry geometryczne i dynamiczne robota mobilnego MK i projektujemy zręcznego robota mobilnego typu deskorolka. Wyniki rozdziału 10 sugerują niezależność miar jakości od reprezentacji funkcji sterujących platformy mobilnej. Rozdział 11 wprowadza nowe miary opisujące własności energetyczne oraz ruchowe manipulatora mobilnego. Jego wyniki wskazują także na to, że miary jakości nie zależą w sposób istotny od horyzontu sterowania.

Układ pracy jest następujący: rozdział 2 zawiera przegląd literatury poświęconej konstruowaniu miar jakości manipulatorów stacjonarnych. Zamieszczono w nim definicje większości znanych miar jakości manipulatorów stacjonarnych. Rozdział 3 jest usystematyzowaniem tradycyjnego podejścia do miar jakości manipulatorów mobilnych. W jego podsumowaniu wskazujemy na istotne ograniczenia tego podejścia oraz proponujemy nowy sposób postępowania. Szczegółowy opis metody endogenicznej przestrzeni konfiguracyjnej zawiera rozdział 4. W rozdziale 5 definiujemy miary jakości wprowadzone w ramach podejścia endogenicznego. Rozdział 6 przedstawia, na drodze symulacji komputerowych, porównanie odpowiadających sobie miar jakości wprowadzonych w ramach podejścia tradycyjnego i metody endogenicznej przestrzeni konfiguracyjnej. W rozdziale 7 przedstawiamy modele manipulatorów mobilnych poddanych badaniom symulacyjnym. Rozdziały 8 i 9 prezentują wyniki uzyskane z zastosowania odpowiednio kinematycznych oraz dynamicznych miar jakości do optymalizacji konfiguracji oraz geometrii wybranych manipulatorów mobilnych. W obliczeniach funkcje sterujące platformy mobilnej są reprezentowane w postaci szeregu Fouriera. W rozdziale 10 przedstawiamy wybrane nie - fourierowskie reprezentacje funkcji

sterujących. Rozdział 11 podejmuje dwa problemy, które pojawiły się w trakcie badań nad miarami jakości manipulatorów mobilnych: problem normowania miar jakości oraz zależności miar jakości od horyzontu sterowania manipulatorów mobilnych. W tym kontekście, w rozdziale 11 proponujemy dwa nowe wskaźniki określające efektywność manipulatorów mobilnych. Rozdział 12 stanowi podsumowanie rozprawy. Rozdziały 2 i 3 stanowią podsumowanie znanych w dziedzinie konstruowania oraz zastosowania miar jakości manipulatorów stacjonarnych i mobilnych. Rozdziały 4-11 rozprawy zawierają własne wyniki badań autorki.

2. Miary jakości manipulatorów stacjonarnych

Rozważmy manipulator stacjonarny o p stopniach swobody, poruszający się w r - wymiarowej przestrzeni zadaniowej. Położenie i orientację efektora manipulatora stacjonarnego opisuje kinematyka manipulatora

$$k : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^r, y = k(x), \quad (2.1)$$

będąca odwzorowaniem analitycznym przestrzeni konfiguracyjnej w przestrzeń zadaniową manipulatora. Mając daną kinematykę, definiujemy Jakobian analityczny manipulatora stacjonarnego, który w konfiguracji $x \in \mathbb{R}^p$ wyraża się odwzorowaniem liniowym

$$J(x) : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^r,$$

prędkości ruchu w przestrzeni konfiguracyjnej w punkcie x w prędkości ruchu w przestrzeni zadaniowej w punkcie $k(x)$, zdefiniowanym za pomocą pochodnej

$$\eta = J(x)v = \left. \frac{d}{d\alpha} k(x + \alpha v) \right|_{\alpha=0}. \quad (2.2)$$

Jakobian $J(x) = \frac{\partial k}{\partial x}(x)$ określa wpływ nieskończenie małych zmian konfiguracji manipulatora stacjonarnego na położenie efektora.

Założmy, że $k(x)$ reprezentuje kinematykę redundantnego ($p > r$) manipulatora stacjonarnego. Dla wybranej konfiguracji $x \in \mathbb{R}^p$ oraz ustalonego $\eta \in \mathbb{R}^r$, rozwiązujemy względem $v \in \mathbb{R}^p$ równanie jacobianowe

$$\eta = J(x)v. \quad (2.3)$$

Konfigurację x nazywamy regularną, jeśli jacobian analityczny jest suriekcją (macierz $J(x)$ ma rząd r). Wówczas równanie (2.3) posiada rozwiązanie dla każdego η . W przeciwnym razie konfigurację nazywamy osobliwą. W konfiguracji regularnej równanie (2.3) można rozwiązać stosując metodę najmniejszych kwadratów, sprowadzającą się do minimalizacji kwadratu normy

$$\min \frac{1}{2} v^T v,$$

przy ograniczeniu równościowym postaci (2.3). Jak wiadomo [42], rozwiązaniem postawionego w ten sposób zadania jest

$$v = J^\#(x)\eta, \quad (2.4)$$

przy czym odwzorowanie

$$J^\#(x) : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^n$$

stanowi jacobian pseudoodwrotny opisany zależnością

$$J^\#(x) = J^T(x)M^{-1}(x), \quad (2.5)$$

a macierz $M(x)$ jest macierzą manipulowalności daną wzorem

$$M(x) = J(x)J^T(x). \quad (2.6)$$

Nietrudno zauważyć, że w konfiguracji regularnej rząd macierzy $M(x)$ wynosi r .

Konstrukcją miar jakości manipulatorów stacjonarnych zaczęto zajmować się w latach 70-tych XX wieku. Lokalne miary jakości mierzą zręczność manipulatora stacjonarnego dla jego szczególnej konfiguracji, postury. Opisują one charakter ruchu efektora w przestrzeni zadaniowej, a dokładniej, określają, w jakim stopniu nieskończenie małe zmiany położenia w przestrzeni konfiguracyjnej wpływają na ruch efektora w przestrzeni zadaniowej. Natomiast globalne miary jakości mierzą całkowitą zręczność manipulatora. W większości przypadków globalne miary jakości są definiowane za pomocą uśredniania odpowiednich miar lokalnych po pewnym ustalonym obszarze przestrzeni konfiguracyjnej [23]. Dla manipulatorów stacjonarnych opisywanych jedynie równaniami kinematyki definiuje się kinematyczne miary jakości. Po uwzględnieniu dynamiki mechanizmu otrzymujemy odpowiednie miary dynamiczne.

Jedną z pierwszych lokalnych miar jakości manipulatorów stacjonarnych była zaproponowana przez Liegeois *ekscentryczność* [35] mierząca odległość położenia przegubów od ich pozycji środkowych

$$e(x) = \sum_{i=1}^p (x_i - x_{ci})^2. \quad (2.7)$$

Liegeois wykorzystał *ekscentryczność* do automatycznej rekonfiguracji ramion redundantnych w celu zminimalizowania możliwości zatrzymania się manipulatora w trakcie pracy. Ponadto Klein i Blaho zaproponowali wykorzystanie *ekscentryczności* do rozmieszczenia przegubów manipulatora w pobliżu ich pozycji środkowych [32].

Kolejną lokalną miarę jakości, zwaną *manipulowalnością*, wprowadził Yoshikawa [72]. Manipulowalność w konfiguracji x wyraża się wzorem

$$m(x) = \sqrt{\det(M(x))} = \sqrt{\prod_{i=1}^r \lambda_{iM(x)}}, \quad (2.8)$$

przy czym $\lambda_{iM(x)}$ oznacza i -tą wartość własną macierzy manipulowalności $M(x)$. Zerowa wartość *manipulowalności* sygnalizuje wystąpienie konfiguracji osobliwej manipulatora stacjonarnego. *Manipulowalność* jest miarą możliwości ruchowych efektora, w odpowiedzi na równomierny ruch przegubów [66], lub inaczej, miarą wrażliwości efektora na lokalne zmiany konfiguracji manipulatora. Można pokazać, że dla manipulatora typu $2R$ (ramię i przedramię ręki człowieka) *manipulowalność* jest maksymalna wówczas, gdy kąt między ramieniem, a przedramieniem wynosi $\frac{\pi}{2}$, co znajduje wyraz na przykład w ułożeniu ręki człowieka piszącego na tablicy. W tej pozycji wrażliwość dłoni trzymającej kredę na małe ruchy w przegubach jest największa. Yoshikawa wprowadził również dynamiczny odpowiednik manipulowalności [71]. Próbę badania *manipulowalności* podjęli m.in. Doty i inni [18], którzy poprzez wprowadzenie odpowiednich metryk w przestrzeni konfiguracyjnej i zadaniowej manipulatora zaproponowali miary niezależne od wyboru współrzędnych początkowych. Ponadto Hong i Kim przenieśli *manipulowalność* na roboty równoległe i zastosowali ją do projektowania optymalnej długości ramion manipulatora [24]. Określeniem *manipulowalności* dla układu manipulatorów współpracujących zajęli się autorzy pracy [8]. Praca [73] wprowadza graficzną reprezentację możliwości ruchowych manipulatora, mianowicie *elipsoidę manipulowalności*. Niech

$$S(x) = \{v \in \mathbb{R}^p \mid \|v\|^2 = v^T v = 1\} \quad (2.9)$$

będzie sferą jednostkową kierunków ruchu w przestrzeni konfiguracyjnej. Jej obrazem w przestrzeni zadaniowej jest *elipsoida manipulowalności*

$$E(x) = J(x)S(x) = \{\eta \in \mathbb{R}^r \mid \eta^T M^{-1}(x)\eta = 1\}. \quad (2.10)$$

Do jej skonstruowania wykorzystano jacobian pseudoodwrotny (2.4). Nietrudno zauważyć, że najdłuższa i najkrótsza półoś elipsoidy $E(x)$ są równe odpowiednio pierwiastkowi z największej ($\sqrt{\lambda_{M(x)}}$) i najmniejszej ($\sqrt{\lambda_{M(x)}}$) wartości własnej macierzy manipulowalności $M(x)$. Manipulowalność dana zależnością (2.8) jest miarą objętości elipsoidy manipulowalności. W konfiguracji osobiowej minimalna wartość własna macierzy manipulowalności $\lambda_{M(x)} = 0$, a co za tym idzie, *elipsoida manipulowalności* ulega spłaszczeniu. Jeżeli wszystkie wartości własne macierzy manipulowalności są jednakowe, mamy do czynienia z konfiguracją izotropową manipulatora stacjonarnego. Wtedy jacobian analityczny przekształca sferę kierunków ruchu z przestrzeni konfiguracyjnej w sferę w przestrzeni zadaniowej. Oznacza to, że w przestrzeni zadaniowej manipulatora nie ma uprzywilejowanych kierunków ruchu. W przeciwnym razie, mamy do czynienia z konfiguracją anizotropową manipulatora. W takiej sytuacji sfera kierunków ruchu jest transformowana w elipsoidę w przestrzeni zadaniowej. W konfiguracji anizotropowej w przestrzeni zadaniowej manipulatora istnieją uprzywilejowane kierunki ruchu, w których ruch odbywa się szybciej niż w innych. Lee badając własności *elipsoidy manipulowalności* wybranych manipulatorów nieredundantnych oraz redundantnych uwzględnił dodatkowo fakt, że prędkości poszczególnych przegubów mogą być ograniczone poprzez ich wartości maksymalne $|\dot{q}_i| \leq \dot{q}_{imax}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Zatem, w tym przypadku w skład wyrażenia (2.10) wchodzi unormowana macierz Jacobiego $\tilde{J}(x) = J(x)R$, przy czym macierz diagonalna $R = \text{diag}\{\dot{q}_{1max}, \dots, \dot{q}_{nmax}\}$ [34].

W robotyce istnieją ponadto dwie inne koncepcje *elipsoidy manipulowalności*. Pierwszą, *uogólnioną elipsoidę inercji* (GIE - Generalized Inertia Ellipsoid) zaproponował Asada [2]. Wyraża się ona wzorem

$$y^T M_{1sx} y = 1, \quad (2.11)$$

przy czym $M_{1sx} = (J_{sx} A_{sx}^{-1} J_{sx}^T)^{-1}$ jest symetryczną, dodatniookreśloną macierzą energii kinetycznej efektoru, natomiast $A_{sx} = \sum_{i=1}^n (m_i J_{sxv_{ci}}^T J_{sxv_{ci}} + J_{sx\omega_{ci}}^T R_i I_i R_i^T J_{sx\omega_{ci}})$ jest symetryczną, dodatniookreśloną macierzą energii kinetycznej przestrzeni przegubowej. J_{sx} jest macierzą Jacobiego manipulatora stacjonarnego, $J_{sxv_{ci}}$ i $J_{sx\omega_{ci}}$ oznaczają odpowiednio składniki prędkości liniowych i kątowych macierzy Jacobiego odnoszącej się do prędkości środka masy i-tego ogniwa, R_i - macierz rotacji i-tego ogniwa, m_i - masa i-tego ogniwa i wreszcie I_i - macierz inercji i-tego ogniwa. Drugą, *dynamiczną elipsoidę manipulowalności* (DME - Dynamic Manipulability Ellipsoid) wprowadził Yoshikawa [71]

$$\{\ddot{x} \mid \ddot{x}^T M_{2sx}^T M_{2sx} \ddot{x} = 1\}, \quad (2.12)$$

przy czym $M_{2sx} = J_{sx}^T M_{1sx}$.

Kształt obu elipsoid zależy od rozmieszczenia silników oraz wartości przełożenia przekładni układu napędowego. Izotropowość ostatniej oznacza, że silniki sterujące mechanizmem z jednostkowym przełożeniem przekładni, wywołują jednakowe we wszystkich kierunkach przyspieszenia efektoru. Wpływ parametrów silników przykładowego manipulatora stacjonarnego (ich mas, inercji, lokalizacji i przełożenia przekładni) na rozmiar, kształt oraz kierunek elipsoid DME oraz GIE zbadali Matone i Roth w pracy [40]. *Elipsoida manipulowalności* została przeniesiona na układy współpracujących manipulatorów w pracy [12]. Określeniem *dynamicznej manipulowalności* oraz *dynamicznej elipsoidy manipulowalności* dla przypadku manipulatorów współpracujących zajęli się Bicchi, Prattichizzo i Melchiorri [9].

Globalną miarę manipulowalności, będącą uśrednieniem lokalnej manipulowalności, po pewnym obszarze przestrzeni konfiguracyjnej $X \subset \mathbb{R}^n$

$$\mathcal{M}(k) = \frac{1}{\text{vol}(X)} \int_X m(x) dx \quad (2.13)$$

definiuje praca [73]. Manipulowalność globalna $\mathcal{M}(k(\cdot))$ jest normą L_1 funkcji manipulowalności lokalnej. Miarę stopnia anizotropowości konfiguracji, lub inaczej miarę niejednorodności transformacji prędkości zadanej jacobianem analitycznym zaproponowali Salisbury i Craig [52]. Wykorzystali oni w tym celu znany z algebry liniowej współczynnik uwarunkowania macierzy. Nowa miara nosi nazwę *współczynnika uwarunkowania konfiguracji* i wyraża się wzorem

$$\kappa(x) = \frac{\bar{\lambda}_{M(x)}}{\underline{\lambda}_{M(x)}}. \quad (2.14)$$

Optymalna wartość *współczynnika uwarunkowania* $\kappa(x) = 1$ oznacza, że manipulator znajduje się w konfiguracji izotropowej, często bardzo pożądanej ze względu na dokładność kinematyczną, niedokładności modelu, czy unikanie konfiguracji osobliwych [1]. Salisbury i Craig zastosowali *współczynnik uwarunkowania* do optymalizacji dokładności pozycjonowania chwytaka manipulatora. Bezwymiarową postać *współczynnika uwarunkowania*, dla redundantnych manipulatorów równoległych wprowadzili Zhang i Duffy [81]. Angeles wykorzystał miarę anizotropowości konfiguracji do zaprojektowania odpornego manipulatora równoległego (niewrażliwego na zmiany środowiska, szumy i niedokładności mechaniczne i programowe) [1]. Ma i Angeles zaproponowali, jako miarę anizotropowości momentu inercji ramienia, *dynamiczny współczynnik uwarunkowania* [36]. Autorzy ci zastosowali nową miarę do projektowania manipulatorów charakteryzujących się izotropowością [37]. Globalną definicję *współczynnika uwarunkowania* podali Gosselin i Angeles [22]. Powstała ona na zasadzie całkowania odpowiedniej miary lokalnej po pewnym obszarze przestrzeni roboczej i dotyczyła manipulatorów redundantnych.

Nieco inną definicję miary globalnej proponuje praca [73]

$$\mathcal{K}(k) = \frac{1}{\text{vol}(X)} \int_X \kappa(x) dx. \quad (2.15)$$

Współczynnik uwarunkowania stosowano również w pracach [39], [31], [79] i [10], głównie do optymalizacji własności manipulatorów.

W pracy [32] Klein i Blaho zaproponowali, by mianem lokalnej miary jakości manipulatorów stacjonarnych określić również *minimalną wartość własną macierzy manipulowalności* $\underline{\lambda}_{M(x)}$, która w pobliżu osobliwości zmienia się bardziej radykalnie aniżeli pozostałe wartości własne, a co za tym idzie ma istotny wpływ na charakter pozostałych miar. Doty i inni [18] sugerują, by używać jej w celu regulowania granicy pożądanej prędkości przegubu

$$\|\dot{x}\| \leq \frac{1}{\sqrt{\underline{\lambda}_{M(x)}}} \|\dot{y}\|. \quad (2.16)$$

Według Parka [50], miarą jakości manipulatorów stacjonarnych może być każda symetryczna funkcja $F(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ wartości własnych macierzy manipulowalności $M(x)$. I tak na przykład, oprócz znanej już *manipulowalności*, autor ten wprowadził jako lokalną miarę jakości działania manipulatorów, *śląd macierzy manipulowalności* $M(x)$

$$t = \text{tr } M(x) = \sum_{i=1}^r \lambda_{iM(x)}. \quad (2.17)$$

W pracy [26] zamieszczono wyniki badań symulacyjnych wybranych elementarnych funkcji symetrycznych wartości własnych macierzy manipulowalności $M(x)$. Van den Doel i Pai [66] wprowadzili klasę lokalnych i globalnych miar jakości manipulatorów redundantnych, zarówno kinematycznych jak i dynamicznych. Ma i Angeles [37] wykorzystali miarę zwaną *izotropowością dynamiczną* do optymalnego projektowania manipulatorów. Park i Brockett [49] zdefiniowali kinematyczną miarę jakości zwaną *globalną dystorsją kinematyczną*. Dla wprowadzenia dystorsji założymy, że kinematyka manipulatora jest odwzorowaniem rozmierności konfiguracyjnej w rozmierność zadaniową i że są to rozmierności Riemanna. *Globalna dystorsja kinematyczna* jest miarą odległości kinematyki mechanizmu od izometrii, inaczej mówiąc, jest miarą niesztynności kinematyki

$$D_K(k) = \int_X d(k)(x) \sqrt{\det(H(x))} dx, \quad (2.18)$$

przy czym

$$d_K(k)(x) = \text{Tr}(J^T(x)G(k(x))J(x)H^{-1}(x)), \quad (2.19)$$

jest lokalną dystorsją kinematyczną, natomiast $H(x)$ i $G(k(x))$ są symetrycznymi, dodatnio określonymi macierzami definiującymi metryki Riemanna odpowiednio na rozmierności konfiguracyjnej i zadaniowej. Tensor mierzący dystorsję (zmiany długości i kątów) mechanizmu wprowadza wcześniej teoria elastyczności [38]. W przypadku gdy kinematyka jest odwzorowaniem $k: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^r$ przestrzeni euklidesowych, można przyjąć, że $H(x) = I_p$ oraz $G(y) = I_r$ i wówczas *lokalną dystorsję kinematyczną* zapisujemy wzorem (2.17). Z punktu widzenia kinematyki, pojęcie *dystorsji kinematycznej* interpretujemy jako niejednorodność transformacji prędkości. Globalna dystorsja bierze pod uwagę zarówno geometrię jak i topologię rozmierności konfiguracyjnej i zadaniowej manipulatora.

Podobnie, kiedy wejście mechanizmu stanowią momenty napędowe przegubów, natomiast wyjście - przyspieszenia efektora, możemy zdefiniować *globalną dystorsję dynamiczną* [49], miarę która w sposób analogiczny określa niejednorodność transformacji moment napędowy - przyspieszenie efektora. *Globalna dystorsja dynamiczna*

$$D_D(k) = \int_X d_D(k)(x) \sqrt{\det(Q(x))} dx \quad (2.20)$$

jest uśrednieniem *lokalnej dystorsji dynamicznej*

$$d_D(k)(x) = \text{Tr}(J^T(x)G(k(x))J(x)Q^{-1}(x)). \quad (2.21)$$

W tym przypadku metryka Riemanna na rozmierności konfiguracyjnej zdefiniowana jest w naturalny sposób poprzez macierz inercji $Q(x)$. Autorzy pracy [49] pokazali, że obie miary, zarówno *kinematyczna* jak i *dynamiczna dystorsja globalna*, mogą być wykorzystywane do optymalnego projektowania manipulatorów. Co więcej, *globalna dystorsja kinematyczna* pomaga optymalnie dobierać prędkości poszczególnych przegubów manipulatora. Praca [73] zawiera wyniki badań symulacyjnych dotyczących zastosowania *globalnej dystorsji kinematycznej* do optymalizacji geometrii przykładowych manipulatorów stacjonarnych. Ważnym przykładem dynamicznej miary jakości jest *tensor krzywizny* rozmierności konfiguracyjnej [66]. *Tensor krzywizny* zdefiniowany wzorem

$$R_{irkj}(x) = \sum_{s=1}^n Q_{is}(x) R_{rkj}^s(x), \quad (2.22)$$

opisujący nieliniowość geodezyjnych w przestrzeni konfiguracyjnej, a co za tym idzie - nieliniowość trajektorii ruchu ramienia. *Tensor krzywizny* jest zadany za pomocą macierzy inercji $Q(x)$ definiującej

metrykę Riemanna na rozmaitości konfiguracyjnej. Elementy $R_{irkj}(x)$ *tensora krzywizny* nazywamy symbolami Riemanna I-go rodzaju, natomiast współczynniki $R_{rkj}^s(x)$, wyznaczone przez symbole Christoffela II-go rodzaju

$$\Gamma_{jk}^i(x) = \sum_{l=1}^n Q_{il}^{-1}(x) C_{jk}^l(x), \quad (2.23)$$

gdzie

$$C_{jk}^i(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial Q_{ij}(x)}{\partial x_k} + \frac{\partial Q_{ik}(x)}{\partial x_j} - \frac{\partial Q_{jk}(x)}{\partial x_i} \right), \quad (2.24)$$

reprezentują tzw. symbole Riemanna II-go rodzaju

$$R_{rkj}^s(x) = \frac{\partial \Gamma_{rj}^s(x)}{\partial x_k} - \frac{\partial \Gamma_{rk}^s(x)}{\partial x_j} + \sum_p (\Gamma_{rj}^p(x) \Gamma_{pk}^s(x) - \Gamma_{rk}^p(x) \Gamma_{pj}^s(x)). \quad (2.25)$$

Tożsamościowe znikanie *tensora krzywizny* oznacza, że rozmaitość konfiguracyjna jest płaska, izometryczna z $\mathbb{R}^p$. Spong [55] wykazał, że jest ono warunkiem koniecznym i wystarczającym dokładnej linearyzacji przez sprzężenie zwrotne sztywnych robotów manipulacyjnych. Wreszcie $R_{irkj}(x) = 0 \quad \forall x$ jest warunkiem istnienia izometrii danej rozmaitości i przestrzeni euklidesowej o tym samym wymiarze [55]. Praca [73] zawiera wyniki symulacyjne wyznaczenia *tensora krzywizny* dla podwójnego wahadła oraz mechanizmu sferycznego.

Jeszcze inną lokalną miarą jakości jest *indeks zgodności* zdefiniowany w [80]. Miara ta służy do wyznaczenia konfiguracji manipulatora, w której precyzja działania lub wielkość siły oraz prędkości efektora będą maksymalne w wybranym kierunku u . *Indeks zgodności* bazuje na współczynnikach transmisji siły α i prędkości β w rozważanym kierunku. Współczynniki opisane są wzorami

$$\alpha = [u^T M(x) u]^{-\frac{1}{2}} \quad \beta = [u^T (M(x))^{-1} u]^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.26)$$

przy czym w pierwszym przypadku u oznacza wektor jednostkowy siły, w drugim natomiast - wektor jednostkowy prędkości.

W pracy [3] podano zastosowanie miar jakości działania manipulatorów do rozwiązania problemu planowania optymalnej trajektorii efektora. Autorzy poszukują takiej ścieżki w przestrzeni zadaniowej, wzdłuż której prędkość efektora będzie największa dla najmniejszych prędkości przegubów. W tym celu definiowana jest globalna miara *wydajności prędkości*

$$r_m = \min\{(r_v)_i, (r_v)_s, (r_v)_f\}, \quad (2.27)$$

gdzie

$$r_v = \frac{1}{\sqrt{\underline{u}_v^T (J_v J_v^T)^{-1} \underline{u}_v}}, \quad (2.28)$$

$\underline{u}_v$ jest wektorem jednostkowym wyznaczonym wzdłuż unormowanego wektora prędkości efektora $\dot{\underline{x}}_v$, J_v - unormowaną macierzą Jacobiego oraz $i = 1, \dots, k-2$. i , s oraz f oznaczają kolejno i -ty, początkowy i końcowy punkt trajektorii.

Oczywiście, przy optymalizacji istnieje możliwość konstruowania wielokryterialnych funkcji celu, zbudowanych z kilku miar jakości robotów [80].

Wybór miary jakości zależy od zadania wykonywanego przez manipulator. Lokalne miary jakości mogą być wykorzystywane do rozwiązania odwrotnego zadania kinematyki. Stosuje się je głównie w przypadku manipulatorów redundantnych ($p > r$), kiedy odwrotne zadanie kinematyki posiada nieskończenie wiele

rozwiązań, a odpowiednia miara jakości pozwala wybrać najlepsze z nich. Wystarczy zauważyć, że ponieważ macierz $J^\#(x)$ spełnia równanie

$$J(x)J^\#(x) = \mathbb{I}_r,$$

zatem prawdziwa jest zależność

$$J(x)(\mathbb{I}_p - J^\#(x)J(x)) = 0. \quad (2.29)$$

Z powyższego wynika, że odwzorowanie

$$v \mapsto (\mathbb{I}_p - J^\#(x)J(x))v, \quad (2.30)$$

jest projekcją przestrzeni $\mathbb{R}^p$ na przestrzeń zerową $\text{Ker}J(x)$ jacobianu analitycznego. Zatem, do prawej strony równania (2.29) możemy dodać dowolny wektor należący do $\text{Ker}J(x)$, stanowiący obraz pewnego wektora $v \in \mathbb{R}^p$ przez odwzorowanie (2.30). W efekcie otrzymujemy *algorytm jacobianu pseudoodwrotnego z projekcją*

$$\dot{x} = -\gamma J^\#(x)(k(x) - y_d) + (\mathbb{I}_p - J^\#(x)J(x))v, \quad (2.31)$$

który znajduje położenie przegubów manipulatora x odpowiadające zadanemu położeniu efektora y_d (zakładamy, że podczas realizacji zadania manipulator nie jest wprowadzany w konfiguracje osobliwe). Aby uzyskać trajektorię zapewniającą dużą manipulowalność, wektor v pojawiający się w równaniu (2.31) wybieramy w postaci

$$v = \beta \frac{\partial m(x)}{\partial x}, \quad (2.32)$$

gdzie $\beta > 0$. Zapewnia to ruch w kierunku prowadzącym od osobliwości. Według Baillieula [4], rolę wektora v może również spełniać gradient ekscentryczności (2.7).

Lokalne miary służą również do wyznaczenia optymalnego punktu pracy w przestrzeni zadaniowej, punktu w którym mógłby się później znaleźć przedmiot podlegający obróbce manipulatora [32]. Ponadto wykorzystuje się je do sterowania ramieniem manipulatora w taki sposób, by jego konfiguracja była optymalna (na przykład daleka od osobliwej) dla zadanego położenia efektora [32]. Miary jakości pomagają również utrzymywać przeguby w obrębie ich ograniczeń mechanicznych [35], [48]. Za pomocą *współczynnika uwarunkowania* można zaprojektować geometrię manipulatora zapewniającą jego pracę w konfiguracji izotropowej.

3. Miary jakości manipulatorów mobilnych - podejście klasyczne

Manipulatorem mobilnym nazywa się układ robotyczny złożony z platformy mobilnej i umieszczonego na niej manipulatora stacjonarnego wyposażonego w efektor. Ze względu na typ kinematyki platformy oraz manipulatora pokładowego, wyróżniamy 4 klasy manipulatorów mobilnych [62]:

- (h,h): holonomiczna platforma i holonomiczny manipulator;
- (h,nh): holonomiczna platforma i nieholonomiczny manipulator;
- (nh,h): nieholonomiczna platforma i holonomiczny manipulator;
- (nh,nh): nieholonomiczna platforma i nieholonomiczny manipulator.

W tym rozdziale zaprezentujemy tradycyjne podejście do modelowania i definiowania miar jakości manipulatorów mobilnych. Dla ustalenia uwagi zajmiemy się najbardziej typową klasą (nh,h). Nasze rozważania oprzemy na pracach poświęconych jednoczesnemu modelowaniu manipulatorów mobilnych oraz konstruowaniu ich miar jakości. W pierwszym rzędzie omówimy metodologię zaproponowaną przez: B. Bayle'a, J.-Y. Forqueta, M. Renauda i G. Foulona ([20], [6], [7]). Następnie przedstawimy podejście Y. Yamamoto, S. Fukudy i Y. Yuna ([69], [70], [68]), a na zakończenie przeanalizujemy metodę J. F. Gardnera i S. A. Velinsky'ego [21]. Przedstawione rekonstrukcje wykorzystują współrzędne konfiguracyjne i zadaniowe.

3.1. B. Bayle, J.-Y. Forquet, M. Renaud i G. Foulon

Rozważmy manipulator mobilny składający się z kołowej platformy mobilnej oraz umieszczonego na niej manipulatora stacjonarnego. Niech wektory

$$x = (x_m, x_p)$$

zawierające współrzędne uogólnione manipulatora $x_m \in \mathbb{R}^{k_m}$ oraz platformy $x_p \in \mathbb{R}^{k_p}$, tworzą przestrzeń konfiguracyjną manipulatora mobilnego $x \in \mathbb{R}^p$, $p = k_m + k_p$. Załóżmy, że położenie i orientację platformy mobilnej określa wektor $q \in \mathbb{R}^n$, a wektor $y \in \mathbb{R}^r$ definiuje położenie i orientację efektora. Przestrzenie $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^m$ nazywają się odpowiednio przestrzenią zadaniową platformy i manipulatora mobilnego.

Model kinematyki manipulatora mobilnego

$$k : \mathbb{R}^{k_m} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^r, \quad y = k(x_m, q) \quad (3.1)$$

jest odwzorowaniem przestrzeni konfiguracyjnej manipulatora oraz przestrzeni zadaniowej platformy w przestrzeń zadaniową całego układu.

Model kinematyki chwilowej

$$\dot{y} = \frac{\partial k}{\partial x_m}(x_m, q)\dot{x}_m + \frac{\partial k}{\partial q}(x_m, q)\dot{q} \quad (3.2)$$

wyraża prędkości zadaniowe manipulatora mobilnego w funkcji prędkości przegubów manipulatora i prędkości zadaniowych platformy.

Biorąc pod uwagę ograniczenia nieholonomiczne wyznaczające dopuszczalne prędkości ruchu platformy, wyliczamy prędkości platformy w przestrzeni zadaniowej

$$\dot{q} = G(q)u_p, \quad (3.3)$$

gdzie u_p oznacza wektor sterowań platformy. Zdefiniujmy wektor sterowań manipulatora jako

$$u_m = \dot{x}_m. \quad (3.4)$$

Uwzględniając zależności (3.4) i (3.3), model kinematyki chwilowej zapisujemy jako

$$\dot{y} = \frac{\partial k}{\partial x_m}(x_m, q)u_m + \frac{\partial k}{\partial q}(x_m, q)G(q)u_p, \quad (3.5)$$

lub inaczej

$$\dot{y} = J(x_m, q)u, \quad (3.6)$$

przy czym $u = (u_m, u_p) \in \mathbb{R}^m$ oraz $J(x_m, q) = \begin{bmatrix} \frac{\partial k}{\partial x_m}(x_m, q) & \frac{\partial k}{\partial q}(x_m, q)G(q) \end{bmatrix}$ jest macierzą Jacobiego o wymiarze $r \times m$. Konfigurację, w której rząd macierzy $J(x_m, q)$ jest niepełny nazywamy konfiguracją osobliwą manipulatora. Założymy, że manipulator mobilny jest redundantny ($m > r$).

Po zdefiniowaniu macierzy Jacobiego możemy przejść do przedstawienia miar jakości manipulatorów mobilnych. Dla danej konfiguracji (x_m, q) elipsoida manipulowalności charakteryzuje zbiór prędkości $\dot{y}$ w przestrzeni zadaniowej, dla których $\|\dot{q}\| = 1$. *Elipsoidę manipulowalności* definiujemy jako

$$w_1 = \{\dot{y} \in \mathbb{R}^r \mid \dot{y}^T (J(x_m, q)J^T(x_m, q))^{-1} \dot{y} = 1\}. \quad (3.7)$$

Manipulowalność definiuje się wzorem

$$w_2 = \sqrt{\det(J(x_m, q)J^T(x_m, q))} = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_r, \quad (3.8)$$

przy czym $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r$ to tzw. wartości osobliwe macierzy $J(x_m, q)$. Nietrudno zauważyć, że *manipulowalność* opisuje objętość *elipsoidy manipulowalności*.

Współczynnik uwarunkowania, miarę pozwalającą określić odległość konfiguracji manipulatora mobilnego od osobliwości, zapisujemy wzorem

$$w_3 = \frac{\sigma_1}{\sigma_r}. \quad (3.9)$$

Autorzy wprowadzają również *ekscentryczność elipsoidy*, miarę opisującą kształt *elipsoidy manipulowalności*,

$$w_4 = \sqrt{1 - \frac{\sigma_r^2}{\sigma_1^2}}. \quad (3.10)$$

Ekscentryczność elipsoidy została zastosowana do rozwiązania problemu planowania ruchu manipulatora mobilnego w przestrzeni zadaniowej (operacyjnej) [7].

3.2. Y.Yamamoto, Y. Yun i S. Fukuda

Rozważmy manipulator mobilny klasy (nh,h) złożony z manipulatora stacjonarnego zamontowanego na platformie mobilnej, z umieszczonym w jego chwytaku obiektem manipulacji. Zakładając, że manipulator posiada p stopni swobody, współrzędne uogólnione manipulatora zapisujemy w postaci wektora $x =$

$(x_1 \dots x_p) \in \mathbb{R}^p$, natomiast współrzędne platformy za pomocą wektora $q = (q_1 \dots q_n) \in \mathbb{R}^n$. Ruch platformy podlega $l < n$ ograniczeniom nieholonomicznym danym zależnością

$$A(q)\dot{q} = 0. \quad (3.11)$$

Zakładamy, że współrzędne efektora $y = k(x, q)$. Równania ruchu manipulatora mobilnego, uwzględniające jego dynamikę oraz interakcje manipulatora z platformą mobilną zapisujemy w postaci układu [70]

$$\begin{cases} Q^m \ddot{x} + C^m + G^m = \tau^m - R_p \ddot{q} - J^T h \\ Q^p \ddot{q} + C^p = B \tau^p - A^T \lambda_p - R^p \ddot{x}. \end{cases} \quad (3.12)$$

Macierze Q^m , C^m i G^m oznaczają odpowiednio $p \times p$ -wymiarową podmacierz macierzy inercji, p -wymiarowy wektor sił Coriolisa oraz p -wymiarowy wektor grawitacji manipulatora. Wektor C^m zależy od prędkości platformy $\dot{q}$, natomiast wektor G^m może zależeć od jej konfiguracji q (jeśli platforma porusza się po niepoziomej powierzchni). Wektor τ^m jest p -wymiarowym wektorem sił i momentów sił działających w przegubach manipulatora pokładowego, J oznacza macierz Jacobiego manipulatora, h jest wektorem sił zewnętrznych działających na efektor manipulatora, R_p jest $p \times n$ -wymiarową podmacierzą macierzy inercji zależną od x i q , Q^p oznacza $n \times n$ -wymiarową macierz inercji platformy, C^p - wektor sił Coriolisa platformy, τ^p - m -wymiarowy ($m = n-l$) wektor sił i momentów sił sterujących, działających na platformę, $\lambda_p \in \mathbb{R}^l$ - wektor mnożników Lagrange'a i wreszcie R^p - podmacierz macierzy inercji, zależną od x i q . B jest macierzą sterowań platformy.

Niech $G(q)$ spełnia równanie

$$A(q)G(q) = 0. \quad (3.13)$$

Z (3.11) i (3.13) wynika, że istnieje m -wymiarowy wektor η , taki że

$$\dot{q} = G(q)\eta, \quad (3.14)$$

a zatem

$$\ddot{q} = G(q)\dot{\eta} + \dot{G}(q)\eta. \quad (3.15)$$

Wykorzystując równania (3.14) i (3.15) oraz mnożąc drugie równanie układu (3.12) przez G^T , otrzymujemy

$$G^T(Q^p G \dot{\eta} + Q^p \dot{G} \eta + C^p) = G^T B \tau^p - G^T R^p \ddot{x}. \quad (3.16)$$

Podstawiając wzór (3.15) do pierwszego równania zależności (3.12) dostajemy

$$Q^m \ddot{x} + C^m + G^m = \tau^m - R_p \dot{G} \eta - R_p G \dot{\eta} - J^T h. \quad (3.17)$$

W efekcie, otrzymujemy następujące równania ruchu przedstawione w formie macierzowej

$$P \dot{\zeta} = \xi + Q \tau - J^T h, \quad (3.18)$$

gdzie

$$\zeta = \begin{pmatrix} \eta \\ \dot{x} \end{pmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} G^T Q^p G & G^T R^p \\ R_p S & Q^p \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} G^T B & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix}$$

$$\xi = \begin{pmatrix} -G^T Q^p \dot{G} \eta - G^T C^p \\ -C^m - G^m - R_p \dot{G} \eta \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} \tau^p \\ \tau^m \end{pmatrix}.$$

W kolejnym kroku rozważamy ruch obiektu umieszczonego w chwytaku manipulatora. Niech h_o oznacza s -wymiarowy wektor sił i momentów zewnętrznych działających na środek masy obiektu manipulacji, związany z wektorem h zależnością

$$h_o = Wh, \quad (3.19)$$

zawierającą nieosobliwą kwadratową macierz W rozmiaru $s \times s$.

Bazując na dualności między siłami a prędkościami, wynikającej z zasady pracy wirtualnej, można pokazać, że

$$v = W^T v_o, \quad (3.20)$$

gdzie v_o jest s -wymiarowym wektorem prędkości środka masy obiektu, natomiast v jest wektorem prędkości efektora. Różniczkując równanie (3.20) po czasie dostajemy równanie na przyspieszenie

$$a = W^T a_o + \dot{W}^T v_o, \quad (3.21)$$

przy czym a_o jest s -wymiarowym wektorem przyspieszenia obiektu. Równania ruchu obiektu możemy zapisać za pomocą następującej zależności

$$M_o a_o + c_o + g_o = h_o, \quad (3.22)$$

przy czym M_o , c_o i g_o oznaczają odpowiednio macierz inercji obiektu, wektor sił Coriolisa i wektor sił grawitacji działających na obiekt.

Bazując na równaniach ruchu manipulatora, platformy (3.18) i obiektu (3.22) definiuje się *kinematyczną* oraz *dynamiczną elipsoidę zadaniową*.

Niech

$$\bar{\zeta} = Y\zeta,$$

oznacza wektor znormalizowanych prędkości platformy i manipulatora, gdzie

$$Y = \text{diag}\{ Y_1, Y_2, \dots, Y_{m+p} \}$$

$$Y_i = \frac{1}{\dot{\eta}_{i_{\max}}}, i = 1, \dots, m,$$

oraz

$$Y_{m+i} = \frac{1}{\dot{x}_{i_{\max}}}, i = 1, \dots, p,$$

oznaczymy przez

$$\bar{J} = JY^{-1}$$

znormalizowaną macierz Jacobiego manipulatora mobilnego, $J(q, x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial k}{\partial q}(q, x)G(q) & \frac{\partial k}{\partial x}(q, x) \end{bmatrix}$.

Rozważmy sferę jednostkową znormalizowanych prędkości platformy i manipulatora

$$\{\bar{\zeta} \mid \bar{\zeta}^T \bar{\zeta} = 1\}. \quad (3.23)$$

Równanie (3.23) jest transformowane w *kinematyczną elipsoidę zadaniową* w przestrzeni prędkości obiektu

$$\{v_o \mid (Y\bar{J}^\# v)^T (Y\bar{J}^\# v) = (Y\bar{J}^\# W^T v_o)^T (Y\bar{J}^\# W^T v_o) = v_o^T (Y\bar{J}^\# W^T)^T (Y\bar{J}^\# W^T) v_o = 1\}, \quad (3.24)$$

gdzie $\bar{J}^\#$ reprezentuje znormalizowany Jakobian pseudoodwrotny. Tak zdefiniowana *kinematyczna elipsoidalna zadaniowa* bierze pod uwagę zarówno manipulowalność jak i lokomocję manipulatora mobilnego.

W celu wprowadzenia *dynamicznej elipsoidy zadaniowej* rozważamy dynamikę manipulatora mobilnego.

Jeśli założymy, że manipulator mobilny oraz obiekt nie poruszają się ($\zeta = (\eta, \dot{x}) = 0$ i $v_o = 0$), wówczas będą spełnione następujące zależności

$$\eta = 0, C^m = 0, C^p = 0, c_o = 0, \dot{J}\zeta = 0, \dot{W}^T v_o = 0.$$

a zatem $a = J\dot{\zeta} + \dot{J}\zeta$ redukuje się do

$$a = J\dot{\zeta}. \quad (3.25)$$

Również równania (3.18), (3.21) i (3.22) ulegną uproszczeniu

$$\tau = Q^{-1}P\dot{\zeta} - Q^{-1}\xi + Q^{-1}J^T h \quad (3.26)$$

$$a = W^T a_o \quad (3.27)$$

$$M_o a_o + g_o = h_o. \quad (3.28)$$

Z (3.25) i (3.27) wynika

$$\dot{\zeta} = J^\# W^T a_o, \quad (3.29)$$

natomiast (3.19) i (3.28) dają w efekcie

$$W^{-1}(M_o a_o + g_o) = h. \quad (3.30)$$

Podstawiając (3.29) i (3.30) do (3.26), dostajemy

$$\begin{aligned} \tau &= Q^{-1}P J^\# W^T a_o - Q^{-1}\xi + Q^{-1}J^T W^{-1}(M_o a_o + g_o) = \\ &= (Q^{-1}P J^\# W^T + Q^{-1}J^T W^{-1}M_o)a_o + \mu_o = \Lambda a_o + \mu_o, \end{aligned} \quad (3.31)$$

przy czym

$$\Lambda = Q^{-1}P J^\# W^T + Q^{-1}J^T W^{-1}M_o$$

$$\mu_o = -Q^{-1}\xi + Q^{-1}J^T W^{-1}g_o.$$

Tak jak w przypadku kinematycznym, normalizujemy wektor momentów wejściowych τ

$$\bar{\tau} = Z\tau,$$

gdzie

$$Z = \text{diag}\{ Z_1, Z_2, \dots, Z_{m+p} \}$$

$$Z_i = \frac{1}{\tau_{i_{max}}^p}, i = 1, \dots, m$$

oraz

$$Z_{m+i} = \frac{1}{\tau_{i_{max}}^m}, i = 1, \dots, p.$$

Sfera jednostkowa momentów sterujących

$$\{\bar{\tau} \mid \bar{\tau}^T \bar{\tau} = 1\} \quad (3.32)$$

jest transformowana w *dynamiczną elipsoidę zadaniową* w przestrzeni przyspieszeń obiektu

$$\{a_o \mid a_o^T \bar{\Lambda}^T \bar{\Lambda} a_o + 2a_o^T \bar{\Lambda}^T \bar{\mu}_o + \bar{\mu}_o^T \bar{\mu}_o = 1\}, \quad (3.33)$$

gdzie $\bar{\Lambda} = Z\Lambda$, natomiast $\bar{\mu}_o = Z\mu_o$.

Dynamiczna elipsoida zadaniowa uwzględnia wkład manipulowalności i lokomocji manipulatora mobilnego w zadanie wykonywane przez efektor. Kształt obu elipsoid zadaniowych odzwierciedla ograniczenia nałożone na prędkości platformy.

3.3. J. F. Gardner i S. A. Velinsky

W dalszym ciągu rozważamy manipulator mobilny klasy (nh,h). Niech $x = (x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$ oznacza wektor zmiennych uogólnionych manipulatora. Kinematykę manipulatora mobilnego opisuje odwzorowanie

$$y = k(x, p), \quad (3.34)$$

$y \in \mathbb{R}^r$, a wektor nawigacji $p \in \mathbb{R}^6$ opisuje współrzędne położenia i orientacji platformy mobilnej

$$p = (p_x, p_y, p_z, \theta_x, \theta_y, \theta_z). \quad (3.35)$$

Pochodna wektora nawigacji p definiuje prędkości platformy mobilnej. Prędkość efektora manipulatora mobilnego zapisujemy w postaci zależności od prędkości manipulatora oraz platformy

$$\dot{y} = \frac{\partial k}{\partial x}(x, p)\dot{x} + \frac{\partial k}{\partial p}(x, p)\dot{p}. \quad (3.36)$$

W celu połączenia kinematyki i sterowania platformy mobilnej oraz manipulatora, należy odnieść wektor nawigacji p jest wyrażony przez funkcje sterujące platformy

$$\dot{p} = G(p)u, \quad (3.37)$$

przy czym postać macierzy $G(p)$ wynika z ograniczeń nieholonomicznych nałożonych na ruch platformy, natomiast $u \in \mathbb{R}^m$ jest wektorem sterowań platformy. Podobnie jak w podrozdziale 3.2 założono, że ograniczenia nieholonomiczne dotyczą położenia i orientacji platformy. Podstawiając (3.37) do (3.36) otrzymujemy następujący model różniczkowy kinematyki manipulatora mobilnego

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} \frac{\partial k}{\partial x}(x, p) & \frac{\partial k}{\partial p}(x, p)G(p) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ u \end{pmatrix}. \quad (3.38)$$

Elipsoidalność manipulowalności odwzorowuje sferę prędkości jednostkowych z przestrzeni konfiguracyjnej w przestrzeń zadaniową manipulatora mobilnego. Aby uwzględnić fakt, że poszczególne napędy manipulatora mobilnego z reguły charakteryzują się różnymi prędkościami maksymalnymi, należy znormalizować wektor prędkości

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ u \end{pmatrix} = \Omega \begin{pmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \hat{u} \end{pmatrix}, \quad (3.39)$$

gdzie

$$\Omega = \text{diag}\{\omega_{1_{max}}, \omega_{2_{max}}, \dots, \omega_{(p+m)_{max}}\}, \quad (3.40)$$

dla

$$\begin{cases} \omega_{i_{max}} = \dot{x}_{i_{max}} & \text{dla } i = 1, 2, \dots, p \\ \omega_{(p+i)_{max}} = u_{i_{max}} & \text{dla } i = 1, 2, \dots, m. \end{cases}$$

Przeskalowany wektor prędkości $(\dot{\hat{x}}, \hat{u})$ przyjmuje wartości z przedziału $[-1; 1]$. Podstawiając (3.39) do (3.38) oraz uwzględniając maksymalne prędkości ruchu manipulatora i platformy otrzymujemy nowy model kinematyki układu

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} \frac{\partial k}{\partial x}(x, p) & \frac{\partial k}{\partial p}(x, p)G(p) \end{bmatrix} \Omega \begin{pmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \hat{u} \end{pmatrix} = \hat{J} \begin{pmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \hat{u} \end{pmatrix}. \quad (3.41)$$

Wykorzystując powyższy model kinematyki, definiuje się w naturalny sposób *elipsoidalność manipulowalności* manipulatora mobilnego

$$\{(\dot{\hat{x}}, \hat{u}) \mid \dot{y}^T \dot{y} = (\dot{\hat{x}}, \hat{u})^T (\hat{J}^\#)^T \hat{J}^\# (\dot{\hat{x}}, \hat{u}) = (\dot{\hat{x}}, \hat{u})^T (\hat{J} \hat{J}^T)^{-1} (\dot{\hat{x}}, \hat{u}) = 1\} \quad (3.42)$$

3.4. Ograniczenie podejścia tradycyjnego

Ostatnie trzy podrozdziały pozwalają w następujący sposób podsumować dominujące w literaturze, tradycyjne podejście do miar jakości manipulatorów mobilnych. Załóżmy, że kinematyka platformy oraz położenie i orientacja efektora manipulatora umieszczonego na platformie są dane w postaci układu sterowania z funkcją wyjścia

$$\dot{q} = G(q)u, \quad y = k(q, x), \quad (3.43)$$

przy czym wektory $q \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^p$, $y \in \mathbb{R}^r$, $u \in \mathbb{R}^m$ reprezentują odpowiednio współrzędne platformy, położenie przegubów manipulatora, położenie i orientację efektora oraz sterowania platformy mobilnej. Po zróżniczkowaniu funkcji wyjścia y dostaniemy

$$\dot{y} = \frac{\partial k}{\partial q}(q, x)\dot{q} + \frac{\partial k}{\partial x}(q, x)\dot{x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial k}{\partial q}(q, x)G(q) & \frac{\partial k}{\partial x}(q, x) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \dot{x} \end{pmatrix}, \quad (3.44)$$

gdzie

$$J(q, x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial k}{\partial q}(q, x)G(q) & \frac{\partial k}{\partial x}(q, x) \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

jest macierzą Jacobiego rozmiaru $r \times (m + p)$. Przy takich założeniach, odpowiednikiem *macierzy manipulowalności* (2.6), stanowiącej punkt wyjściowy do konstruowania miar jakości robotów, będzie macierz

$$M(q, x) = J(q, x)J^T(q, x) = \frac{\partial k}{\partial x}(q, x)\left(\frac{\partial k}{\partial x}\right)^T(q, x) + \frac{\partial k}{\partial q}(q, x)G(q)G^T(q)\left(\frac{\partial k}{\partial q}\right)^T(q, x). \quad (3.46)$$

Przy definiowaniu miar jakości zarówno manipulatorów stacjonarnych, jak i mobilnych, konieczne jest odróżnienie konfiguracji osobliwych i nieosobliwych robota. W przypadku tradycyjnym konfiguracje manipulatora mobilnego będą nieosobliwe, gdy wymiar wektora y nie przekroczy sumy wymiarów wektorów x i u ($r \leq m + p$). W przeciwnym razie rząd macierzy $J(q, x)$ będzie niepełny, a co za tym idzie, wszystkie konfiguracje (q, x) manipulatora mobilnego staną się osobliwe. Z powyższego wynika, że przy podejściu tradycyjnym nie uda się skonstruować miar jakości w przypadku, gdy np. w skład manipulatora mobilnego będzie wchodziła wyłącznie platforma mobilna, lub gdy manipulator zamontowany na platformie nie będzie posiadał wystarczającej liczby stopni swobody. Rozważmy prosty przykład tzw. podnośnika mobilnego. Składa się on z platformy typu monocykl i umieszczonego na niej manipulatora o jednym stopniu swobody, pełniącego rolę podnośnika (poruszającego się wzdłuż osi pionowej). Model kinematyki podnośnika ma postać

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = u_1 \cos q_3 \\ \dot{q}_2 = u_1 \sin q_3 \\ \dot{q}_3 = u_2, \end{cases} \quad y = (q_1, q_2, x). \quad (3.47)$$

Analiza tego modelu pokazuje, że macierz (3.46) jest zawsze osobliwa, a zatem w ramach podejścia tradycyjnego zdefiniowanie jakichkolwiek miar jakości jest niemożliwe. Z drugiej strony można pokazać, że po zastosowaniu odpowiednich sterowań (u_1, u_2, x) , podnośnik mobilny jest w stanie osiągnąć każdy punkt w przestrzeni R^3 , skąd wynika, że jakość jego działania może być zadowalająca. *Metoda endogenicznej przestrzeni konfiguracyjnej*, którą zaprezentujemy w następnym rozdziale pozwala wyznaczyć miary jakości w każdym przypadku, gdy układ jest sterowalny. Fundamentalnym dla metody przestrzeni endogenicznej jest pojęcie konfiguracji endogenicznej, składającej się z funkcji sterujących platformy i manipulatora pokładowego. Celem niniejszej rozprawy jest pokazanie, że metoda endogenicznej przestrzeni konfiguracyjnej pozwala zdefiniować kinematyczne i dynamiczne miary jakości wszelkiego typu manipulatorów mobilnych. Podstawowe pojęcia metody przestrzeni endogenicznej przedstawiono w pracach [63], [56], [57], [58], [64], [59].

4. Metoda endogenicznej przestrzeni konfiguracyjnej

W ramach *metody endogenicznej przestrzeni konfiguracyjnej* zaprezentujemy sposób modelowania kinematyki manipulatorów mobilnych klasy (nh,h) oraz (nh,nh), a także zasadę modelowania kinematyki oraz dynamiki manipulatorów mobilnych klasy (nh,h) i (nh,0). Manipulatory stacjonarne klasy (0,h), czyli stacjonarne manipulatory holonomiczne są rozpowszechnione i szeroko omawiane w literaturze robotycznej ([18], [22], [32], [41], [66], [72]). Ponieważ manipulatory nieholonomiczne (manipulatory klasy (0,nh)) zostały skonstruowane stosunkowo niedawno ([14], [43]), przed przejściem do manipulatorów mobilnych klasy (nh,h) i (nh,nh), zapoznamy Czytelnika z podstawowymi pojęciami dotyczącymi stacjonarnych manipulatorów nieholonomicznych. Klasę (nh,0) manipulatorów mobilnych będziemy nazywać robotami mobilnymi.

4.1. Kinematyka

4.1.1. Manipulatory mobilne klasy (0,nh)

Zacznijmy od wprowadzenia zasadniczych pojęć opisujących stacjonarne manipulatory nieholonomiczne. Załóżmy, że dane są współrzędne w przestrzeni konfiguracyjnej $p \in \mathbb{R}^n$ i zadaniowej $y \in \mathbb{R}^r$ manipulatora. Współrzędne przegubowe $p \in \mathbb{R}^n$ są napędzane za pomocą m wejść sterujących $u \in \mathbb{R}^m$. Biorąc pod uwagę niezależne ograniczenia nieholonomiczne

$$A(p)\dot{p} = 0, \quad (4.1)$$

nałożone na położenia i prędkości przegubów manipulatora, wprowadzamy model kinematyki manipulatora nieholonomicznego, zapisywany w postaci bezdryfowego układu sterowania z funkcją wyjścia opisującą położenie i orientację efektora w funkcji położenia przegubów

$$\begin{cases} \dot{p} = F(p)u = \sum_{i=1}^m f_i(p)u_i \\ y = k(p) = (k_1(p), \dots, k_r(p)). \end{cases} \quad (4.2)$$

Funkcje sterujące manipulatora należą do przestrzeni Hilberta, funkcji określonych na przedziale $[0, T]$, całkownych z kwadratem w sensie Lebesgue'a $u(\cdot) \in L_m^2[0, T]$. Sterowanie

$$u(\cdot) \in \mathcal{X} = L_m^2[0, T] \quad (4.3)$$

należy do *endogenicznej przestrzeni konfiguracyjnej* $\mathcal{X}$ manipulatora nieholonomicznego. Dobierając odpowiednio macierz wagową $R(t)$, $R(t) = R^T(t) > 0$ opisującą własności sterujące manipulatora, wyposażamy *endogeniczną przestrzeń konfiguracyjną* w iloczyn skalarny

$$\langle u(\cdot), v(\cdot) \rangle_R = \int_0^T u^T(t)R(t)v(t)dt \quad (4.4)$$

i definiujemy normę konfiguracji endogenicznej

$$\|u(\cdot)\|_{\mathbb{R}}^2 = \int_0^T u^T(t)R(t)u(t)dt. \quad (4.5)$$

Mając ustaloną posturę początkową manipulatora nieholonomicznego $p_0 \in \mathbb{R}^n$ oraz zadane sterowanie $u(\cdot) \in \mathcal{X}$, dla każdej chwili czasu $t \in [0, T]$ potrafimy wyznaczyć trajektorię stanu manipulatora

$$p(t) = \psi_{p_0, t}(u(\cdot))$$

będącą rozwiązaniem (4.2). Wykorzystując trajektorie stanu układu (4.2) definiujemy *kinematykę chwilową* manipulatora nieholonomicznego, która jest odwzorowaniem wejście - wyjście układu (4.2) dla zadanego T oraz p_0

$$K_{p_0, T} : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^r$$

określonym zależnością

$$y(T) = K_{p_0, T}(u(\cdot)) = k(\psi_{p_0, T}(u(\cdot))). \quad (4.6)$$

Kinematyka chwilowa, dla zadanej chwili czasu T oraz postury początkowej manipulatora p_0 , opisuje położenie i orientację efektora manipulatora nieholonomicznego w zależności od funkcji sterujących manipulatora.

Odwrotne zadanie kinematyki manipulatora nieholonomicznego polega na określeniu, dla ustalonych (p_0, T) i zadanego $y \in \mathbb{R}^r$, konfiguracji endogenicznej $u(\cdot) \in \mathcal{X}$, takiej że

$$K_{p_0, T}(u(\cdot)) = y. \quad (4.7)$$

W celu rozwiązania tego zadania, dla ustalonej konfiguracji $u(\cdot) \in \mathcal{X}$ oraz odpowiadającej jej trajektorii $p(t)$, definiujemy przybliżenie liniowe układu (4.2)

$$\begin{cases} \dot{\zeta} = A(t)\zeta + B(t)v(t), \\ \eta = C(t)\zeta, \end{cases} \quad (4.8)$$

przy czym

$$A(t) = \frac{\partial(F(p(t))u(t))}{\partial p}, \quad B(t) = F(p(t)), \quad C(t) = \frac{\partial k(p(t))}{\partial p}. \quad (4.9)$$

Jakobian analityczny manipulatora nieholonomicznego

$$J_{p_0, T}(u(\cdot)) : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^r,$$

transformujący przestrzeń styczną do przestrzeni konfiguracyjnej w punkcie $u(\cdot)$ w przestrzeń styczną do przestrzeni zadaniowej w punkcie $K_{p_0, T}(u(\cdot))$ definiuje odwzorowanie osiągalności wyjścia układu wariacyjnego (4.8) przy $\zeta_0 = 0$ i wyraża się zależnością

$$J_{p_0, T}(u(\cdot))v(\cdot) = \left. \frac{d}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} K_{p_0, T}(u(\cdot) + \alpha v(\cdot)) = C(T) \int_0^T \Psi(T, s) B(s) v(s) ds, \quad (4.10)$$

przy czym $\Psi(t, s)$ oznacza macierz fundamentalną przybliżenia liniowego (4.8), spełniającą równanie

$$\frac{\partial \Psi(t, s)}{\partial t} = A(t)\Psi(t, s), \quad \Psi(s, s) = I_n. \quad (4.11)$$

Konfigurację $u(\cdot) \in \mathcal{X}$ określamy mianem regularnej, jeśli odwzorowanie (4.10) jest suriekcją. W przeciwnym razie mówimy, że konfiguracja jest osobliwa.

W konfiguracji regularnej $u(\cdot) \in \mathcal{X}$ równanie jacobianowe

$$J_{p_0,T}(u(\cdot))v(\cdot) = \chi, \quad (4.12)$$

posiada rozwiązanie $v(\cdot)$, które otrzymujemy poprzez minimalizację kwadratu normy

$$\min_{v(\cdot)} \|v(\cdot)\|_R^2 \quad (4.13)$$

przy ograniczeniu (4.12). Stosując metodę mnożników Lagrange'a można pokazać, że to rozwiązanie jest następujące

$$v(t) = (J_{p_0,T}^\#(u(\cdot))\chi)(t) = R^{-1}(t)B^T(t)\Psi^T(T,t)C^T(T)M_{p_0,T}^{-1}(u(\cdot))\chi, \quad (4.14)$$

przy czym

$$M_{p_0,T}(u(\cdot)) = C(T) \int_0^T \Psi(T,s)B(s)R^{-1}(s)B^T(s)\Psi^T(T,s)dsC^T(T) \quad (4.15)$$

jest *macierzą manipulowalności kinematycznej* manipulatora nieholonomicznego. Warto dodać, że konfiguracja endogeniczna $u(\cdot) \in \mathcal{X}$ jest regularna, wtedy i tylko wtedy, gdy $\text{rank} M_{p_0,T}(u(\cdot)) = r$.

4.1.2. Manipulatory mobilne klasy (nh,h)

Rozważmy manipulator mobilny złożony z nieholonomicznej platformy mobilnej opisywanej współrzędnymi uogólnionymi $q \in \mathbb{R}^n$ oraz umieszczonego na niej stacjonarnego manipulatora opisywanego współrzędnymi $x \in \mathbb{R}^p$. Zakładamy, że ruch platformy podlega $l \leq n$ niezależnym ograniczeniom fazowym w formie Pfaffa

$$A(q)\dot{q} = 0, \quad (4.16)$$

przy czym $A(q)$ jest analityczną macierzą ograniczeń o rozmiarze $l \times n$, pełnego rzędu $\text{rank} A(q) = l$. Zakładamy, że ograniczenia (4.16) są nieholonomiczne. Nieholonomiczne ograniczenia fazowe wyznaczają dopuszczalne prędkości ruchu platformy. W każdym punkcie $q \in \mathbb{R}^n$ prędkości te są opisane przy pomocy bezdryfowego układu sterowania

$$\dot{q} = G(q)u = \sum_{i=1}^m g_i(q)u_i \quad (4.17)$$

reprezentującego kinematykę platformy. Pola wektorowe $g_1(q), \dots, g_m(q)$, $m = n-l$ rozpinają dystrybucję $\text{Ker} A(q)$.

Niech $y \in \mathbb{R}^r$ oznacza położenie i orientację efektora w zewnętrznym układzie współrzędnych. Przestrzeń $\mathbb{R}^r$ wyposażoną w iloczyn skalarny

$$\langle y_1, y_2 \rangle_Q = y_1^T Q y_2, \quad (4.18)$$

przy czym $Q = Q^T > 0$, będziemy nazywać przestrzenią zadaniową manipulatora mobilnego. Położenie i orientacja efektora we współrzędnych zadaniowych zależy od postury platformy q i położenia przegubów manipulatora x

$$y = k(q, x). \quad (4.19)$$

W rezultacie, bezdryfowy układ sterowania (4.17) wraz z funkcją wyjścia (4.19) stanowią model matematyczny kinematyki manipulatora mobilnego

$$\begin{cases} \dot{q} = G(q)u = \sum_{i=1}^m g_i(q)u_i \\ y = k(q, x). \end{cases} \quad (4.20)$$

Zakładamy, że funkcje sterujące $u(\cdot)$ układu (4.20) należą do przestrzeni Hilberta $L_m^2[0, T]$ funkcji całkowalnych z kwadratem w sensie Lebesgue'a na przedziale $[0, T]$ i przyjmujących wartości w $\mathbb{R}^m$. Ponieważ na poziomie kinematyki położenie przegubów jest zmienną sterowaną, w układzie (4.20) wektor $x \in \mathbb{R}^p$ należy dołączyć do wektora sterowań. Zatem para $(u(\cdot), x)$ tworzy *kinematyczną endogeniczną przestrzeń konfiguracyjną* $\mathcal{X}$ manipulatora mobilnego

$$(u(\cdot), x) \in \mathcal{X} = L_m^2[0, T] \times \mathbb{R}^p, \quad (4.21)$$

będącą przestrzenią Hilberta z iloczynem skalarnym

$$\langle (u_1(\cdot), x_1), (u_2(\cdot), x_2) \rangle_{RW} = \int_0^T u_1^T(t) R(t) u_2(t) dt + x_1^T W x_2 \quad (4.22)$$

oraz normę

$$\|(u(\cdot), x)\|_{RW}^2 = \int_0^T u^T(t) R(t) u(t) dt + x^T W x. \quad (4.23)$$

Macierze $R(t)$ i W są macierzami wagowymi spełniającymi własności $R(t) = R^T > 0$ oraz $W = W^T > 0$. Załóżmy, że dla każdej postury początkowej platformy $q_0 \in \mathbb{R}^n$ i każdego sterowania $u(\cdot) \in L_m^2[0, T]$ istnieje trajektoria

$$q(t) = \varphi_{q_0, t}(u(\cdot))$$

zdefiniowana dla każdej chwili czasu $t \in [0, T]$. Odwzorowanie osiągalności wyjścia układu (4.20)

$$K_{q_0, T} : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^r$$

określone zależnością

$$y(T) = K_{q_0, T}(u(\cdot), x) = k(\varphi_{q_0, T}(u(\cdot)), x) \quad (4.24)$$

nazywa się *kinematyką chwilową* manipulatora mobilnego [64]. Kinematyka $K_{q_0, T}$ opisuje położenie i orientację efektora manipulatora mobilnego w chwili T , przy ustalonej posturze początkowej q_0 platformy. Dla ustalonego (q_0, T) i przy zadanym $y \in \mathbb{R}^r$ *odwrotne zadanie kinematyki* manipulatora mobilnego polega na określeniu konfiguracji $(u(\cdot), x) \in \mathcal{X}$, takiej że

$$K_{q_0, T}(u(\cdot), x) = y. \quad (4.25)$$

Dla danej konfiguracji $(u(\cdot), x) \in \mathcal{X}$ oraz odpowiadającej jej trajektorii $q(t)$, definiujemy układ wariacyjny, będący przybliżeniem liniowym układu (4.20) wzdłuż $(u(t), x, q(t))$:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = A(t)\xi + B(t)v \\ \dot{\zeta} = C(t, x)\xi + D(t, x)w, \end{cases} \quad (4.26)$$

przy czym

$$\begin{aligned} A(t) &= \frac{\partial(G(q(t))u(t))}{\partial q}, & B(t) &= G(q(t)), \\ C(t, x) &= \frac{\partial k(q(t), x)}{\partial q}, & D(t, x) &= \frac{\partial k(q(t), x)}{\partial x} \end{aligned} \quad (4.27)$$

definiują odpowiednie macierze układu (4.26). Jakobian analityczny

$$J_{q_0, T}(u(\cdot), x) : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^r$$

jest transformacją liniową przestrzeni stycznej do przestrzeni konfiguracyjnej w punkcie $(u(\cdot), x)$ w przestrzeń styczną do zadaniowej w punkcie $K_{q_0, T}(u(\cdot), x)$, zdefiniowaną za pomocą pochodnej

$$J_{q_0, T}(u(\cdot), x)(v(\cdot), w) = \frac{d}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} K_{q_0, T}(u(\cdot) + \alpha v(\cdot), x + \alpha w). \quad (4.28)$$

W wyniku różniczkowania otrzymujemy następującą postać *jakobianu analitycznego*

$$J_{q_0, T}(u(\cdot), x)(v(\cdot), w) = C(T, x) \int_0^T \Phi(T, s) B(s) v(s) ds + D(T, x) w, \quad (4.29)$$

reprezentującego odwzorowanie osiągalności wyjścia przybliżenia liniowego (4.26) przy $\xi_0 = 0$. Macierz $\Phi(t, s)$ jest macierzą fundamentalną układu (4.26) spełniającą równanie

$$\frac{\partial \Phi(t, s)}{\partial t} = A(t) \Phi(t, s), \quad \Phi(s, s) = I_n. \quad (4.30)$$

Równanie jakobianowe

$$J_{q_0, T}(u(\cdot), x)(v(\cdot), w) = \eta, \quad (4.31)$$

posiada rozwiązanie $(v(\cdot), w)$, które otrzymujemy z minimalizacji kwadratu normy

$$\min \frac{1}{2} \|(v(\cdot), w)\|_{RW}^2 \quad (4.32)$$

przy ograniczeniu (4.31). Wprowadzając pojęcie *jakobianu pseudoodwrotnego*

$$J_{q_0, T}^\#(u(\cdot), x) : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathcal{X} \quad (4.33)$$

zdefiniowanego wyrażeniem

$$(J_{q_0, T}^\#(u(\cdot), x)\eta)(t) = \begin{bmatrix} B^T(t) \Phi^T(T, t) C^T(T, x) \\ D^T(T, x) \end{bmatrix} \mathcal{D}_{q_0, T}^{-1}(u(\cdot), x) \eta, \quad (4.34)$$

otrzymujemy konfigurację endogeniczną

$$\begin{pmatrix} v(t) \\ w \end{pmatrix} = (J_{q_0, T}^\#(u(\cdot), x)\eta)(t) \quad (4.35)$$

rozwiązującą równanie jakobianowe (4.31). Macierz $\mathcal{D}_{q_0, T}(u(\cdot), x)$, będącą odpowiednikiem macierzy manipulowalności (2.6), nazywamy *macierzą zręczności kinematycznej* manipulatora mobilnego. W konfiguracji $(u(\cdot), x) \in \mathcal{X}$

$$\mathcal{D}_{q_0, T}(u(\cdot), x) = D(T, x) W^{-1} D^T(T, x) + C(T, x) \mathcal{M}_{q_0, T}(u(\cdot)) C^T(T, x). \quad (4.36)$$

W skład *macierzy zręczności kinematycznej* wchodzi *macierz mobilności kinematycznej* platformy, zdefiniowana wzorem

$$\mathcal{M}_{q_0, T}(u(\cdot)) = \int_0^T \Phi(T, s) B(s) R^{-1}(s) B^T(s) \Phi^T(T, s) ds. \quad (4.37)$$

Macierz zręczności kinematycznej jest odpowiednikiem macierzy Grama sterowalności wyjścia przybliżenia liniowego (4.26), natomiast *macierz mobilności kinematycznej* odpowiada macierzy Grama sterowalności

w przestrzeni stanu. Warto zauważyć, że gdy liczba ograniczeń fazowych rośnie $l = n$, a więc gdy manipulator mobilny traci zdolność ruchu i staje się zwykłym manipulatorem ($k(q, x) = k(x)$), wówczas *macierz zręczności kinematycznej* pokrywa się ze znaną *macierzą manipulowalności* (2.6). Podobnie, w przypadku gdy manipulator mobilny składa się wyłącznie z platformy mobilnej ($k(q, x) = k(q)$), *macierz zręczności kinematycznej* przechodzi w *macierz mobilności kinematycznej* (4.37).

Konfigurację $(u(\cdot), x) \in \mathcal{X}$ określamy mianem regularnej, jeśli odwzorowanie $J_{q_0, T}(u(\cdot), x)$ jest suriekcją ($J_{q_0, T}(u(\cdot), x)\mathcal{X} = \mathbb{R}^r$). Oznacza to, że *macierz zręczności kinematycznej* jest pełnego rzędu ($\det D_{q_0, T}(u(\cdot), x) \neq 0$). W przeciwnym razie konfiguracja $(u(\cdot), x) \in \mathcal{X}$ jest osobliwa.

4.1.3. Manipulatory mobilne klasy (nh,nh)

Manipulatory te są także określane mianem manipulatorów podwójnie nieholonomicznych. W ich skład wchodzi zarówno nieholonomiczna platforma opisywana n_1 współrzędnymi uogólnionymi $q \in \mathbb{R}^{n_1}$ napędzana m_1 sterowaniami $u^1 \in \mathbb{R}^{m_1}$, jak również nieholonomiczny manipulator o n_2 współrzędnych przegubowych $p \in \mathbb{R}^{n_2}$ napędzany m_2 wejściami sterującymi $u^2 \in \mathbb{R}^{m_2}$. Zastosowaniu metody endogenicznej przestrzeni konfiguracyjnej do tej klasy manipulatorów mobilnych jest poświęcona praca [62].

Niech $y \in \mathbb{R}^r$ oznacza przestrzeń zadaniową wyposażoną w iloczyn skalarny

$$\langle y_1, y_2 \rangle_Q = y_1^T Q y_2, \quad (4.38)$$

gdzie $Q = Q^T > 0$. Biorąc pod uwagę ograniczenia nieholonomiczne nałożone zarówno na platformę, jak i manipulator pokładowy, model kinematyki manipulatora podwójnie nieholonomicznego zapisujemy w postaci pary bezdryfowych układów sterowania ze wspólną funkcją wyjścia, wyrażającą zależność położenia i orientacji efektora od współrzędnych uogólnionych platformy i manipulatora

$$\begin{cases} \dot{q} = G(q)u^1 = \sum_{i=1}^{m_1} g_i(q)u_i^1 \\ \dot{p} = F(p)u^2 = \sum_{i=1}^{m_2} f_i(p)u_i^2 \\ y = k(q, p) = (k_1(q, p), \dots, k_r(q, p)). \end{cases} \quad (4.39)$$

Funkcje sterujące platformy oraz manipulatora należą do produktu dwóch przestrzeni funkcji określonych na przedziale $[0, T]$ całkowalnych z kwadratem w sensie Lebesgue'a

$$u^1(\cdot) \in L_{m_1}^2[0, T], \quad u^2(\cdot) \in L_{m_2}^2[0, T].$$

Poprzez analogię do manipulatorów klasy (nh,h), definiujemy *kinematyczną endogeniczną przestrzeń konfiguracyjną* $\mathcal{X}$ manipulatorów podwójnie nieholonomicznych

$$(u^1(\cdot), u^2(\cdot)) \in \mathcal{X} = L_{m_1}^2[0, T] \times L_{m_2}^2[0, T]. \quad (4.40)$$

Po odpowiednim doborze $m_i \times m_i$ macierzy wagowych $R_i(t)$, $R_i(t) = R_i^T(t) > 0$, $i = 1, 2$, odzwierciedlających własności sterujące platformy oraz manipulatora, endogeniczna przestrzeń konfiguracyjna staje się przestrzenią Hilberta z iloczynem skalarnym

$$\langle (u^1(\cdot), u^2(\cdot)), (v^1(\cdot), v^2(\cdot)) \rangle_{R_1 R_2} = \int_0^T ((u^1)^T(t) R_1(t) u^2(t) + (v^1)^T(t) R_2(t) v^2(t)) dt. \quad (4.41)$$

Norma konfiguracji endogenicznej

$$\|(u^1(\cdot), u^2(\cdot))\|_{R_1 R_2}^2 = \int_0^T ((u^1)^T(t) R_1(t) u^1(t) + (u^2)^T(t) R_2(t) u^2(t)) dt. \quad (4.42)$$

Mając ustaloną posturę początkową manipulatora podwójnie nieholonomicznego $(q_0, p_0) \in \mathbb{R}^{n_1+n_2}$, dla każdej pary sterowań $(u^1(\cdot), u^2(\cdot)) \in \mathcal{X}$ możemy wyznaczyć trajektorie stanu manipulatora mobilnego

$$(q(t), p(t)) = (\varphi_{q_0, t}(u^1(\cdot)), \psi_{p_0, t}(u^2(\cdot))), \quad t \in [0, T].$$

Kinematykę chwilową manipulatora podwójnie nieholonomicznego

$$K_{q_0, p_0, T} : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^r,$$

definiujemy jako odwzorowanie wejście - wyjście układu (4.39)

$$y(T) = K_{q_0, p_0, T}(u^1(\cdot), u^2(\cdot)) = k(\varphi_{q_0, T}(u^1(\cdot)), \psi_{p_0, T}(u^2(\cdot))). \quad (4.43)$$

w chwili T .

Odwrotne zadanie kinematyki manipulatora podwójnie nieholonomicznego polega na określeniu, dla ustalonych (q_0, p_0, T) i zadanego $y_d \in \mathbb{R}^r$, konfiguracji endogenicznej $(u^1(\cdot), u^2(\cdot)) \in \mathcal{X}$, takiej że

$$K_{q_0, p_0, T}(u^1(\cdot), u^2(\cdot)) = y_d. \quad (4.44)$$

W celu rozwiązania wyżej postawionego zadania definiujemy liniowe przybliżenie układu (4.39) względem par sterowanie - trajektoria $(u^1(\cdot), q(t)), (u^2(\cdot), p(t))$,

$$\begin{cases} \dot{\xi} = A_1(t)\xi + B_1(t)v^1(t), \\ \dot{\zeta} = A_2(t)\zeta + B_2(t)v^2(t), \\ \dot{\eta} = C_1(t)\xi + C_2(t)\zeta, \end{cases} \quad (4.45)$$

przy czym

$$\begin{aligned} A_1(t) &= \frac{\partial(G(q(t))u^1(t))}{\partial q}, & B_1(t) &= G(q(t)), \\ A_2(t) &= \frac{\partial(F(p(t))u^2(t))}{\partial p}, & B_2(t) &= F(p(t)), \\ C_1(t) &= \frac{\partial k(q(t), p(t))}{\partial q}, & C_2(t) &= \frac{\partial k(q(t), p(t))}{\partial p}. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Jakobian analityczny manipulatora podwójnie nieholonomicznego $J_{q_0, p_0, T}(u^1(\cdot), u^2(\cdot)) : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^r$, transformujący przestrzeń styczną do przestrzeni konfiguracyjnej w punkcie $(u^1(\cdot), u^2(\cdot))$ w przestrzeń styczną do przestrzeni zadaniowej w punkcie $K_{q_0, p_0, T}(u^1(\cdot), u^2(\cdot))$, definiuje odwzorowanie osiągalności wyjścia układu wariacyjnego (4.45) przy $(\xi_0, \zeta_0) = 0$ i wyraża się zależnością

$$\begin{aligned} J_{q_0, p_0, T}(u^1(\cdot), u^2(\cdot))(v^1(\cdot), v^2(\cdot)) &= \frac{d}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} K_{q_0, p_0, T}(u^1(\cdot) + \alpha v^1(\cdot), u^2(\cdot) + \alpha v^2(\cdot)) = \\ &= C_1(T) \int_0^T \Phi(T, s) B_1(s) v^1(s) ds + C_2(T) \int_0^T \Psi(T, s) B_2(s) v^2(s) ds, \end{aligned} \quad (4.47)$$

przy czym $\Phi(t, s)$ oraz $\Psi(t, s)$ są macierzami fundamentalnymi przybliżenia liniowego (4.45), spełniającymi równania

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(t, s)}{\partial t} &= A(t)\Phi(t, s), & \Phi(s, s) &= I_{n_1}, \\ \frac{\partial \Psi(t, s)}{\partial t} &= A(t)\Psi(t, s), & \Psi(s, s) &= I_{n_2}. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Konfigurację $(u^1(\cdot), u^2(\cdot)) \in \mathcal{X}$ nazywamy regularną, jeśli odwzorowanie (4.47) jest suriekcją, w przeciwnym razie mamy do czynienia z konfiguracją osobliwą.

Dla zadanego punktu $\chi \in \mathbb{R}^r$ z przestrzeni zadaniowej określamy równanie jacobianowe

$$J_{q_0, p_0, T}(u^1(\cdot), u^2(\cdot))(v^1(\cdot), v^2(\cdot)) = \chi, \quad (4.49)$$

które w konfiguracji regularnej $(u^1(\cdot), u^2(\cdot)) \in \mathcal{X}$ posiada rozwiązanie $(v^1(\cdot), v^2(\cdot))$, uzyskiwane za pośrednictwem minimalizacji kwadratu normy

$$\min_{v^1(\cdot), v^2(\cdot)} \|(v^1(\cdot), v^2(\cdot))\|_{R_1 R_2}^2 \quad (4.50)$$

przy ograniczeniu (4.49). Rozwiązaniem jest para $(v^1(t), v^2(t))$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} v^1(t) \\ v^2(t) \end{pmatrix} &= (J_{q_0, p_0, T}^\#(u^1(\cdot), u^2(\cdot))\chi)(t) = \\ &= \begin{bmatrix} R_1^{-1}(t)B_1^T(t)\Phi^T(T, t)C_1^T(T) \\ R_2^{-1}(t)B_2^T(t)\Psi^T(T, t)C_2^T(T) \end{bmatrix} \mathcal{D}_{q_0, p_0, T}^{-1}(u^1(\cdot), u^2(\cdot))\chi, \end{aligned} \quad (4.51)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{q_0, p_0, T}(u^1(\cdot), u^2(\cdot)) &= \\ &= C_1(T)\mathcal{M}_{q_0, T}(u^1(\cdot))C_1^T(T) + C_2(T) \int_0^T \Psi(T, s)B_2(s)R_2^{-1}(s)B_2^T(s)\Psi^T(T, s)ds C_2^T(T) \end{aligned} \quad (4.52)$$

oznacza *macierz zręczności kinematycznej* manipulatora podwójnie nieholonomicznego. Druga część prawej strony równania definiuje macierz manipulowalności pokładowego manipulatora nieholonomicznego (por. 4.15). Warto dodać, że konfiguracja endogeniczna $(u^1(\cdot), u^2(\cdot)) \in \mathcal{X}$ jest regularna wtedy i tylko wtedy, gdy rząd macierzy $\mathcal{D}_{q_0, p_0, T}(u^1(\cdot), u^2(\cdot))$ wynosi r . W skład *macierzy zręczności kinematycznej* wchodzi *macierz mobilności kinematycznej* platformy nieholonomicznej, która w konfiguracji $u^1(\cdot)$ wyraża się wzorem

$$\mathcal{M}_{q_0, T}(u^1(\cdot)) = \int_0^T \Phi(T, s)B_1(s)R_1^{-1}(s)B_1^T(s)\Phi^T(T, s)ds. \quad (4.53)$$

Jeśli manipulator mobilny składa się wyłącznie z platformy mobilnej, wówczas $\mathcal{D}_{q_0, p_0, T}(u^1(\cdot), u^2(\cdot))$ przechodzi w $\mathcal{M}_{q_0, T}(u^1(\cdot))$.

4.2. Dynamika

4.2.1. Manipulatory mobilne klasy (nh, h)

W tym podrozdziale, przez analogię do macierzy zręczności kinematycznej zdefiniowanej dla manipulatorów mobilnych, wyprowadzimy odpowiednie pojęcie dynamiczne uwzględniające nie tylko kinematykę, lecz także dynamikę platformy mobilnej i manipulatora pokładowego.

Rozważamy manipulator mobilny, w skład którego wchodzi platforma mobilna o współrzędnych uogólnionych $q \in \mathbb{R}^{n_1}$ oraz manipulator pokładowy opisany współrzędnymi przegubowymi $p \in \mathbb{R}^{n_2}$. Załóżmy, że platforma podlega $l \leq n_1$ niezależnym ograniczeniom fazowym w formie Pfaffa

$$A(q)\dot{q} = 0. \quad (4.54)$$

Kinematykę platformy reprezentujemy za pomocą bezdryfowego układu sterowania

$$\dot{q} = G(q)\eta = \sum_{i=1}^{m_1} g_i(q)\eta_i, \quad (4.55)$$

przy czym $m_1 = n_1 - l$, $A(q)G(q) = 0$, natomiast $\eta \in \mathbb{R}^{m_1}$ jest wektorem zmiennych pomocniczych mających sens prędkości. Model dynamiki manipulatora mobilnego wyprowadzimy, na podstawie zasady Lagrange'a - d'Alemberta, wychodząc od układu równań

$$Q(q, p) \begin{pmatrix} \ddot{q} \\ \ddot{p} \end{pmatrix} + C(q, p, \dot{q}, \dot{p}) \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} + D(q, p) = B(q, p) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F(q) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.56)$$

gdzie $Q(q, p)$ oznacza macierz inercji, $C(q, p, \dot{q}, \dot{p})$ jest wektorem sił i momentów Coriolisa i odśrodkowych, $D(q, p)$ - wektorem grawitacji, $B(q, p)$ - macierzą sterowań. $F(q)$ oznacza siły (momenty) więzów nieholonomicznych. Wektory $u \in \mathbb{R}^{m_1}$ i $v \in \mathbb{R}^{n_2}$ są sterowaniami platformy i manipulatora. Mają one sens sił i momentów sił.

Po zastosowaniu redukcji nieholonomicznej współrzędnych $q \in \mathbb{R}^{n_2}$ i po uwzględnieniu funkcji wyjścia opisującej współrzędne manipulatora mobilnego w przestrzeni zadaniowej otrzymujemy afiniczny układ sterowania opisujący kinematykę i dynamikę manipulatora mobilnego

$$\begin{cases} \dot{q} = G(q)\eta \\ \dot{p} = \pi \\ \begin{pmatrix} \dot{\eta} \\ \dot{\pi} \end{pmatrix} = P(q, p, \eta, \pi) + R(q, p)u \\ y = k(q, p), \end{cases} \quad (4.57)$$

przy czym

$$\begin{aligned} P(q, p, \eta, \pi) = \\ = \left(\begin{bmatrix} G^T & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{bmatrix} Q \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{bmatrix} \right)^{-1} \left(- \begin{bmatrix} G^T & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{bmatrix} \left(Q \begin{bmatrix} \dot{G} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + C \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} \eta \\ \pi \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} G^T & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{bmatrix} D \right) \\ R(q, p) = \left(\begin{bmatrix} G^T & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{bmatrix} Q \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} G^T & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

Funkcje sterujące $u(\cdot) = (u(\cdot), v(\cdot))$ układu (4.57), mające sens sił i momentów, stanowią *dynamiczną konfigurację endogeniczną* manipulatora mobilnego. Należą one do przestrzeni Hilberta $u(\cdot) \in \mathcal{X} = L^2_{m_1+n_2}[0, T]$ z iloczynem skalarnym

$$\langle u(\cdot), v(\cdot) \rangle_R = \int_0^T u^T(t) R(t) v(t) dt \quad (4.58)$$

oraz normą

$$\|u(\cdot)\|_R^2 = \int_0^T u^T(t) R(t) u(t) dt. \quad (4.59)$$

Macierz $R(t)$ jest macierzą wagową, spełniającą własności $R(t) = R^T(t) > 0$.

Przestrzeń $\mathcal{X}$ nazywamy *dynamiczną endogeniczną przestrzenią konfiguracyjną* manipulatora mobilnego. Niech $x = (q, p, \eta, \pi) \in \mathbb{R}^{n_1+m_1+2n_2}$. Załóżmy, że dla każdego stanu początkowego x_0 i każdego sterowania $u(\cdot)$ istnieje trajektoria

$$x(t) = \varphi_{x_0, t}(u(\cdot)) = (q(t), p(t), \eta(t), \pi(t))$$

zdefiniowana dla każdej chwili czasu $t \in [0, T]$. Wówczas, przez analogię do pojęcia *kinematyki chwilowej*, możemy wyprowadzić pojęcie *dynamicznego odwzorowania zadaniowego*

$$K_{x_0, T} : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^r, \quad K_{x_0, T}(u(\cdot)) = k(q_{x_0, T}(u(\cdot)), p_{x_0, T}(u(\cdot))), \quad (4.60)$$

które dla ustalonego stanu początkowego x_0 oraz zadanej chwili T opisuje położenie i orientację efektora manipulatora mobilnego w przestrzeni zadaniowej w zależności od funkcji sterujących $u(\cdot)$.

Dynamiczny jacobian zadaniowy definiujemy jako

$$J_{x_0, T}(u(\cdot))v(\cdot) = \frac{d}{d\alpha} \big|_{\alpha=0} K_{x_0, T}(u(\cdot) + \alpha v(\cdot)). \quad (4.61)$$

Aby obliczyć *jacobian zadaniowy* dla danej konfiguracji $u(\cdot) \in \mathcal{X}$ oraz odpowiadającej jej trajektorii $x(t)$, definiujemy układ wariacyjny

$$\dot{\xi} = A(t)\xi + B(t)v, \quad \eta = C(t)\xi, \quad (4.62)$$

związany z (4.57) i będący liniowym, nieautonomicznym układem sterowania, przy czym

$$A(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial(G(q(t))\eta(t))}{\partial q} & 0 & G(q(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{n_2} \\ \frac{\partial(P(q,p,\eta,\pi)+R(q,p)u(t))}{\partial q} & \frac{\partial(P(q,p,\eta,\pi)+R(q,p)u(t))}{\partial p} & \frac{\partial P(q,p,\eta,\pi)}{\partial \eta} & \frac{\partial P(q,p,\eta,\pi)}{\partial \pi} \end{bmatrix},$$

$$B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ R(q(t), p(t)) \end{bmatrix}, \quad C(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial k}{\partial q}(q(t), p(t)), & \frac{\partial k}{\partial p}(q(t), p(t)) \end{bmatrix}.$$

Wobec postaci układów (4.57) i (4.62), *dynamiczny jacobian zadaniowy* będący odwzorowaniem osiągalności wyjścia przybliżenia liniowego (4.73) zapiszemy jako

$$J_{x_0, T}(u(\cdot))v(\cdot) = C(T) \int_0^T \Phi(T, s) B(s) v(s) ds, \quad (4.63)$$

gdzie $\Phi(t, s)$ jest macierzą fundamentalną układu wariacyjnego (4.62), spełniającą równanie różniczkowe

$$\frac{\partial \Phi(t, s)}{\partial t} = A(t)\Phi(t, s), \quad \Phi(s, s) = I_{n_1+m_1+2n_2}.$$

Na zakończenie zdefiniujemy *dynamiczną macierz zręczności* manipulatora mobilnego

$$\mathcal{D}_{x_0, T}(u(\cdot)) = C(T) \int_0^T \Phi(T, s) B(s) R^{-1}(s) B^T(s) \Phi^T(T, s) ds C^T(T). \quad (4.64)$$

Dynamiczną konfigurację endogeniczną $u(\cdot) \in \mathcal{X}$ określamy mianem regularnej, jeżeli dynamiczny jacobian zadaniowy $J_{x_0, T}(u(\cdot))$ jest suriekcją ($\det \mathcal{D}_{x_0, T}(u(\cdot)) \neq 0$). W przeciwnym razie konfiguracja $u(\cdot) \in \mathcal{X}$ jest osobliwa.

4.2.2. Manipulatory mobilne klasy (nh,0)

Manipulatory mobilne klasy (nh,0) stanowią szczególny przypadek rozważanych w poprzednim podrozdziale manipulatorów mobilnych klasy (nh,h). W szczególności, mamy do czynienia z manipulatorami mobilnymi klasy (nh,0) wówczas, gdy manipulator mobilny traci własności manipulacyjne $k(q, p) = k(q)$ np., gdy składa się wyłącznie z platformy mobilnej. Manipulatory mobilne klasy (nh,0) nazywamy robotami mobilnymi. W zasadzie, pojęcia charakteryzujące klasę (nh,0) można otrzymać przez wyspecjalizowanie pojęć dla klasy (nh,h), jednak ze względu na znaczenie klasy (nh,0) przedstawimy niezależne wyprowadzenie. W tym celu rozważmy jeszcze raz platformę mobilną opisaną współrzędnymi uogólnionymi $q \in \mathbb{R}^n$. Załóżmy, że platforma podlega l nieholonomicznym ograniczeniom Pfaffa

$$A(q)\dot{q} = 0. \quad (4.65)$$

Kinematykę platformy reprezentujemy za pomocą bezdryfowego układu sterowania

$$\dot{q} = G(q)\eta = \sum_{i=1}^m g_i(q)\eta_i, \quad (4.66)$$

gdzie $m = n - l$, $A(q)G(q) = 0$, natomiast $\eta \in \mathbb{R}^m$ jest wektorem zmiennych pomocniczych mających sens prędkości. Korzystając z zasady Lagrange'a - d'Alemberta, dynamikę robota mobilnego zapisujemy w postaci

$$Q(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + D(q) = A^T(q)\lambda + B(q)u, \quad (4.67)$$

gdzie $\lambda \in \mathbb{R}^l$ jest wektorem mnożników Lagrange'a, $Q(q)$ - macierzą inercji, $C(q, \dot{q})$ - wektorem sił i momentów Coriolisa i odśrodkowych, $D(q)$ - wektorem grawitacji, natomiast $B(q)$ oznacza macierz sterowań. Po standardowym wyeliminowaniu mnożników Lagrange'a oraz uwzględnieniu funkcji wyjścia opisującej współrzędne robota mobilnego w przestrzeni zadaniowej otrzymujemy afiniczny układ sterowania opisujący kinematykę i dynamikę robota mobilnego

$$\begin{cases} \dot{q} = G(q)\eta \\ \dot{\eta} = P(q, \eta) + R(q)u \\ y = k(q) \end{cases}, \quad (4.68)$$

przy czym

$$P(q, \eta) = (G^T(q)Q(q)G(q))^{-1}G^T(q)(-Q(q)\dot{G}(q)\eta - C(q, G(q)\eta)\eta - D(q))$$

oraz

$$R(q) = (G^T(q)Q(q)G(q))^{-1}G^T(q)B(q).$$

Funkcje sterujące $u(\cdot)$ układu (4.68) mają sens sił i momentów, dlatego będziemy je nazywać *dynamiczną konfiguracją endogeniczną* robota mobilnego. Należą one do przestrzeni Hilberta $\mathcal{X} = L_m^2[0, T]$ z iloczynem skalarnym

$$\langle u(\cdot), v(\cdot) \rangle_R = \int_0^T u^T(t)R(t)v(t)dt \quad (4.69)$$

gdzie $R(t)$ jest macierzą wagową, $R(t) = R^T(t) > 0$. Norma konfiguracji

$$\|u(\cdot)\|_R^2 = \int_0^T u^T(t)R(t)u(t)dt. \quad (4.70)$$

Przestrzeń $\mathcal{X}$ określamy mianem *dynamicznej endogenicznej przestrzeni konfiguracyjnej* robota mobilnego. Niech $q(t) = \varphi_{q_0, \eta_0, t}(u(\cdot))$ oraz $\eta(t) = \psi_{q_0, \eta_0, t}(u(\cdot))$ oznaczają trajektorie stanu układu uzyskane po zastosowaniu sterowania $u(\cdot) \in \mathcal{X}$. Wówczas definiujemy pojęcie *dynamicznego odwzorowania zadaniowego*

$$K_{q_0, \eta_0, T} : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^r, \quad K_{q_0, \eta_0, T}(u(\cdot)) = k(\varphi_{q_0, \eta_0, T}(u(\cdot))), \quad (4.71)$$

które dla ustalonego stanu początkowego (q_0, η_0) i zadanego horyzontu sterowania T opisuje położenie i orientację robota w przestrzeni zadaniowej w zależności od funkcji sterujących $u(\cdot)$.

Dynamiczny jacobian zadaniowy definiujemy jako pochodną

$$J_{q_0, \eta_0, T}(u(\cdot))v(\cdot) = \frac{d}{d\alpha} \big|_{\alpha=0} K_{q_0, \eta_0, T}(u(\cdot) + \alpha v(\cdot)). \quad (4.72)$$

W celu obliczenia *jacobianu zadaniowego*, dla danej konfiguracji $u(\cdot) \in \mathcal{X}$ oraz odpowiadających jej trajektorii $(q(t), \eta(t))$ definiujemy układ wariacyjny związany z (4.68)

$$\dot{\xi} = A(t)\xi + B(t)v, \quad \eta = C(t)\xi, \quad (4.73)$$

będący liniowym, nieautonomicznym układem sterowania ze zmienną stanu $\xi \in \mathbb{R}^{n+m}$, przy czym

$$A(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial(G(q(t))\eta(t))}{\partial q} & G(q(t)) \\ \frac{\partial(P(q(t), \eta(t)) + R(q(t))u(t))}{\partial q} & \frac{\partial P(q(t), \eta(t))}{\partial \eta} \end{bmatrix},$$

$$B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ B_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ R(q(t)) \end{bmatrix}, \quad C(t) = [C_1(t), C_2(t)] = \left[\frac{\partial k(q(t))}{\partial q}, 0 \right].$$

Biorąc pod uwagę postać układów (4.68) i (4.73) można pokazać, że *dynamiczny jacobian zadaniowy*, będący odwzorowaniem osiągalności wyjścia przybliżenia liniowego (4.73) zainicjowanego przy ξ_0 , wyraża się wzorem

$$J_{q_0, \eta_0, T}(u(\cdot))v(\cdot) = C_1(T) \int_0^T \Phi_{12}(T, s) B_2(s) v(s) ds, \quad (4.74)$$

przy czym

$$\Phi(t, s) = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(t, s) & \Phi_{12}(t, s) \\ \Phi_{21}(t, s) & \Phi_{22}(t, s) \end{bmatrix}$$

jest macierzą fundamentalną układu wariacyjnego (4.73), spełniającą równanie różniczkowe

$$\frac{\partial \Phi(t, s)}{\partial t} = A(t)\Phi(t, s), \quad \Phi(s, s) = I_{n+m}.$$

Dynamiczną macierz zręczności robota mobilnego definiujemy wzorem

$$\mathcal{D}_{q_0, \eta_0, T}(u(\cdot)) = C_1(T) \int_0^T \Phi_{12}(T, s) B_2(s) R^{-1}(s) B_2^T(s) \Phi_{12}^T(T, s) ds C_1^T(T). \quad (4.75)$$

Konfigurację endogeniczną $u(\cdot) \in \mathcal{X}$ nazywamy *regularną*, jeżeli jacobian zadaniowy $J_{q_0, \eta_0, T}(u(\cdot))$ jest suriekcją, co oznacza, że $\det \mathcal{D}_{q_0, \eta_0, T}(u(\cdot)) \neq 0$. W przeciwnym razie konfiguracja $u(\cdot) \in \mathcal{X}$ jest *osobliwa*.

4.3. Endogeniczna przestrzeń konfiguracyjna o ograniczonym paśmie

Konfiguracje endogeniczne manipulatorów mobilnych definiujemy za pomocą funkcji sterujących platformy oraz położeń przegubów manipulatora. Funkcje sterujące $u(\cdot)$ zarówno platformy jak i manipulatora nieholonomicznego należą do przestrzeni Hilberta $L_m^2[0, T]$ funkcji całkowalnych z kwadratem w sensie Lebesgue'a, określonych na przedziale $[0, T]$. Zatem endogeniczna przestrzeń konfiguracyjna jest nieskończenie wymiarowa. Na potrzeby realizacji obliczeń symulacyjnych wybieramy skończenie wymiarową reprezentację endogenicznej przestrzeni konfiguracyjnej. W tym celu wybieramy ortogonalną bazę w $L_m^2[0, T]$, składającą się z funkcji bazowych $\varphi_0(t), \varphi_1(t), \dots$, następnie zapisujemy sterowanie $u(t)$ w wybranej bazie, i wreszcie obcinamy uzyskane w ten sposób rozwinięcie pozostawiając jedynie skończoną liczbę jego składników. Uzyskana w ten sposób reprezentacja przestrzeni konfiguracyjnej nazywana jest reprezentacją o ograniczonym widmie częstotliwości [13]

$$(u(t), x) \rightarrow (F_s(t)c, x). \quad (4.76)$$

c definiuje wektor współczynników rozwinięcia

$$c = (c_{10}, c_{20}, \dots, c_{m0}, c_{11}, c_{21}, \dots, c_{m1}, c_{1s}, c_{2s}, \dots, c_{ms}) \in \mathbb{R}^{m(s+1)},$$

natomiast $F_s(t)$ jest macierzą funkcji bazowych

$$F_s(t) = \begin{bmatrix} \varphi_0(t)I_m & \varphi_1(t)I_m & \dots & \varphi_s(t)I_m \end{bmatrix}. \quad (4.77)$$

Z (4.76) wynika, że i -tą składową funkcji sterujących platformy można zapisać w postaci

$$u_i(t) = \sum_{j=0}^s c_{ij} \varphi_j(t). \quad (4.78)$$

W szczególności funkcje sterujące $u(\cdot)$ możemy zapisać przy pomocy skończonego szeregu Fouriera

$$u(t) = c_0 + \sum_{j=1}^k c_{2j-1} \sin j\omega t + c_{2j} \cos j\omega t. \quad (4.79)$$

Elementy szeregu nazywamy harmonicznymi, k stanowi stopień harmonicznym, $\omega = \frac{2\pi}{T}$, natomiast $c = (c_0, c_1, \dots, c_{2k})$ tworzy wektor parametrów rozwinięcia (4.79), gdzie $c_l = (c_{1l}, \dots, c_{ml})^T$, $l = 0, 1, \dots, 2k$. Po sparametryzowaniu konfiguracji endogenicznych manipulatora mobilnego (dla manipulatorów typu (nh,h) $(u(\cdot), x) \in \mathcal{X} \rightarrow (c, x) \in \tilde{\mathcal{X}}$, dla manipulatorów (nh,nh) $(u^1(\cdot), u^2(\cdot)) \in \mathcal{X} \rightarrow (c^1, c^2) \in \tilde{\mathcal{X}}$ oraz dla robotów mobilnych $u(\cdot) \in \mathcal{X} \rightarrow c \in \tilde{\mathcal{X}}$) otrzymujemy konfiguracje endogeniczne o ograniczonym paśmie. Przestrzeń $\tilde{\mathcal{X}}$ będziemy nazywać endogeniczną przestrzenią konfiguracyjną o ograniczonym paśmie. Wraz ze wzrostem liczby składników w zależności (4.78), konfiguracje endogeniczne o ograniczonym paśmie częstotliwości lepiej aproksymują konfiguracje rzeczywiste. Dla $\tilde{\mathcal{X}}$ definiujemy kinematykę o ograniczonym paśmie $\tilde{K}$, jacobian analityczny o ograniczonym paśmie $\tilde{J}$ oraz macierz zręczności o ograniczonym paśmie $\tilde{D}$. Pojęcia te wykorzystamy przy obliczeniach miar jakości manipulatorów mobilnych.

5. Endogeniczne miary jakości manipulatorów mobilnych

Przyjęta w pracy metodologia opiera się na założeniu, że kinematyczne miary jakości manipulatorów mobilnych konstruuje się analogicznie do istniejących, dobrze zdefiniowanych kinematycznych miar jakości manipulatorów stacjonarnych, natomiast dynamiczne miary jakości manipulatorów mobilnych definiujemy poprzez analogię do odpowiednich kinematycznych miar jakości manipulatorów mobilnych. Naturalne jest przyjęcie dla manipulatorów mobilnych tego samego podziału miar jakości, co dla manipulatorów stacjonarnych, a zatem wyróżniamy *lokalne* i *globalne miary jakości* manipulatorów mobilnych. *Miary lokalne* opisują zachowanie manipulatorów mobilnych w określonej konfiguracji, podczas gdy *miary globalne* opisują całkowite zachowanie manipulatorów mobilnych. Na tej samej zasadzie rozróżniamy *kinematyczne* i *dynamiczne miary jakości*. *Miary kinematyczne* są definiowane na poziomie kinematyki, natomiast *dynamiczne miary jakości* pojawiają się wówczas, gdy w rozważaniach uwzględniamy dodatkowo dynamikę układu. Dla zachowania porządku, w tym rozdziale najpierw wprowadzimy kinematyczne miary jakości dla manipulatorów stacjonarnych klasy (0,nh), następnie analogiczne miary dla manipulatorów klas (nh,h) i (nh,nh), i na koniec zaproponujemy dynamiczne miary jakości dla manipulatorów mobilnych typu (nh,h) oraz robotów mobilnych, czyli manipulatorów mobilnych klasy (nh,0).

5.1. Miary kinematyczne

5.1.1. Manipulatory mobilne klasy (0,nh)

Opierając się na znanych miarach jakości manipulatorów holonomicznych, wprowadzimy teraz odpowiednie miary jakości dla stacjonarnych manipulatorów nieholonomicznych. Zaczniemy od *kinematycznej elipsoidy manipulowalności*, która opisuje obraz jednostkowej sfery prędkości

$$S_{p_0,T}(u(\cdot)) = \{v(\cdot) \in \mathcal{X} \mid \|v(\cdot)\|_R = 1\} \quad (5.1)$$

w przestrzeni stycznej do przestrzeni konfiguracyjnej w punkcie $u(\cdot) \in \mathcal{X}$ przez *jacobian analityczny* $J_{p_0,T}(u(\cdot))$ w przestrzeni stycznej do przestrzeni zadaniowej w punkcie $K_{p_0,T}(u(\cdot))$

$$E_{p_0,T}(u(\cdot)) = J_{p_0,T}(u(\cdot))S_{p_0,T}(u(\cdot)) = \{\chi \in \mathbb{R}^r \mid \chi^T M_{p_0,T}^{-1}(u(\cdot))\chi = 1\}, \quad (5.2)$$

przy czym $M_{p_0,T}(u(\cdot))$ jest macierzą manipulowalności manipulatora nieholonomicznego (4.15). Jeśli *kinematyczna elipsoidalność manipulowalności* przyjmuje postać sfery, wszystkie kierunki ruchu w przestrzeni zadaniowej manipulatora nieholonomicznego są jednakowo osiągalne.

Lokalna manipulowalność kinematyczna

$$m_{p_0,T}(u(\cdot)) = \sqrt{\det M_{p_0,T}(u(\cdot))} = \sqrt{\prod_{i=1}^r \lambda_i M_{p_0,T}(u(\cdot))} \quad (5.3)$$

jest proporcjonalna do objętości *kinematycznej elipsoidy manipulowalności* i opisuje przeniesienie nieskończonego małego ruchu z przestrzeni sterowań manipulatora nieholonomicznego w jego przestrzeń zadaniową.

Zerowa wartość miary sygnalizuje wystąpienie konfiguracji osobliwej manipulatora nieholonomicznego. Odpowiednią miarę globalną, czyli tzw. *globalną manipulowalność kinematyczną* konstruujemy całkując miarę lokalną (5.3) po pewnym obszarze *endogenicznej przestrzeni konfiguracyjnej* $\bar{\mathcal{X}} \subset \mathcal{X}$

$$\mathcal{M}_{p_0,T}(K_{p_0,T}) = \frac{1}{\text{vol}(\bar{\mathcal{X}})} \int_{\bar{\mathcal{X}}} m_{p_0,T}(u(\cdot)) du(\cdot). \quad (5.4)$$

Lokalny kinematyczny współczynnik uwarunkowania konfiguracji endogenicznej $u(\cdot) \in \bar{\mathcal{X}}$

$$\kappa_{p_0,T}(u(\cdot)) = \sqrt{\frac{\bar{\lambda}_{M_{p_0,T}(u(\cdot))}}{\underline{\lambda}_{M_{p_0,T}(u(\cdot))}}} \quad (5.5)$$

opisuje kształt *kinematycznej elipsoidy manipulowalności*. Jeśli wartość miary jest minimalna ($\kappa_{p_0,T}(u(\cdot)) = 1$), wówczas mamy do czynienia z konfiguracją izotropową manipulatora. W konfiguracji osobliwej wartość miary jest nieskończona.

Globalny kinematyczny współczynnik uwarunkowania definiujemy za pomocą całki

$$\mathcal{K}_{p_0,T}(K_{p_0,T}) = \frac{1}{\text{vol}(\bar{\mathcal{X}})} \int_{\bar{\mathcal{X}}} \kappa_{p_0,T}(u(\cdot)) du(\cdot), \quad (5.6)$$

gdzie $\bar{\mathcal{X}} \subset \mathcal{X}$.

Na koniec wprowadzamy kinematyczną dystorsję, miarę nieszytywności kinematyki manipulatora nieholonomicznego. W rozdziale 2 zauważyliśmy, że jeśli macierze $H(x)$ i $G(k(x))$ są jednostkowe, wówczas *lokalną dystorsję* można zapisać w postaci śladu macierzy manipulowalności (2.17). Proponujemy następującą postać *lokalnej dystorsji kinematycznej* manipulatora nieholonomicznego

$$d_{p_0,T}^K(u(\cdot)) = \text{Tr} \mathcal{D}_{p_0,T}(u(\cdot)). \quad (5.7)$$

Po uśrednieniu powyższej miary względem $\bar{\mathcal{X}} \in \mathcal{X}$ dostajemy wzór na *globalną dystorsję kinematyczną*

$$D_{p_0,T}^K(K_{p_0,T}) = \frac{1}{\text{vol}(\bar{\mathcal{X}})} \int_{\bar{\mathcal{X}}} d_{p_0,T}^K(u(\cdot)) du(\cdot). \quad (5.8)$$

5.1.2. Manipulatory mobilne klasy (nh,h)

Jak poprzednio *kinematyczna elipsoidalność*

$$S_{q_0,T}(u(\cdot), x) = \{(v(\cdot), w) \in \mathcal{X} \mid \|(v(\cdot), w)\|_{RW} = 1\} \quad (5.9)$$

opisuje obraz sfery jednostkowej kierunków ruchu w przestrzeni stycznej do konfiguracyjnej w punkcie $(u(\cdot), x) \in \bar{\mathcal{X}}$, przez jacobian analityczny $J_{q_0,T}(u(\cdot), x)$, w przestrzeni stycznej do przestrzeni zadaniowej w punkcie $K_{q_0,T}(u(\cdot), x)$

$$E_{q_0,T}(u(\cdot), x) = J_{q_0,T}(u(\cdot), x) S_{q_0,T}(u(\cdot), x) = \{\zeta \in \mathbb{R}^r \mid \zeta^T \mathcal{D}_{q_0,T}^{-1}(u(\cdot), x) \zeta = 1\}. \quad (5.10)$$

Macierz $\mathcal{D}_{q_0,T}(u(\cdot), x)$ jest *macierzą zręczności kinematycznej* zdefiniowaną wzorem (4.36). Pierwiastki z maksymalnej i minimalnej wartości własnej macierzy $\mathcal{D}_{q_0,T}(u(\cdot), x)$ ($\sqrt{\bar{\lambda}_{\mathcal{D}_{q_0,T}(u(\cdot), x)}}$ oraz $\sqrt{\underline{\lambda}_{\mathcal{D}_{q_0,T}(u(\cdot), x)}}$) wyznaczają, odpowiednio, długości najdłuższej i najkrótszej półosi *kinematycznej elipsoidy zręczności*. W

konfiguracji osobliwej kinematyczna elipsoida zręczności ulega spłaszczeniu.

Miarą objętości kinematycznej elipsoidy zręczności jest lokalna zręczność kinematyczna [61], [65]

$$m_{q_0,T}(u(\cdot), x) = \sqrt{\det \mathcal{D}_{q_0,T}(u(\cdot), x)} = \sqrt{\prod_{i=1}^r \lambda_i \mathcal{D}_{q_0,T}(u(\cdot), x)}. \quad (5.11)$$

Zręczność w konfiguracji osobliwej manipulatora mobilnego wynosi 0. Lokalna zręczność kinematyczna jest własnością konfiguracji endogenicznej manipulatora mobilnego, opisująca możliwości ruchu efektora manipulatora w odpowiedzi na lokalne zmiany konfiguracji endogenicznej. Z punktu widzenia teorii sterowania, lokalna zręczność kinematyczna stanowi miarę sterowalności wyjścia przybliżenia liniowego (4.26) układu sterowania (4.20) reprezentującego kinematykę manipulatora mobilnego. Można pokazać, że umieszczenie manipulatora stacjonarnego na platformie mobilnej przyczynia się do wzrostu jego zręczności [57].

Globalna zręczność kinematyczna powstaje przez uśrednienie lokalnej zręczności kinematycznej po pewnym obszarze $\tilde{\mathcal{X}} \subset \mathcal{X}$ przestrzeni konfiguracyjnej

$$\mathcal{M}_{q_0,T}(K_{q_0,T}) = \frac{1}{\text{vol}(\tilde{\mathcal{X}})} \int_{\tilde{\mathcal{X}}} m_{q_0,T}(u(\cdot), x) d(u(\cdot), x). \quad (5.12)$$

Maksymalizacja tej miary względem kinematyki chwilowej pozwala na zaprojektowanie takiego manipulatora mobilnego, którego przeciętna zręczność osiągana przy realizacji różnych zadań jest możliwie duża. W przypadku, gdy w skład manipulatora mobilnego wchodzi nieruchoma platforma, a zatem gdy $u(\cdot) \equiv 0$ oraz $y = k(q, x) = k(x)$, zachodzi równość

$$\mathcal{D}_{q_0,T}(u(\cdot), x) = M(x),$$

a co za tym idzie lokalna zręczność kinematyczna $m(u(\cdot), x)$ przechodzi w manipulowalność (2.8), natomiast globalna zręczność kinematyczna $\mathcal{M}_{q_0,T}(K_{q_0,T}(\cdot))$ staje się manipulowalnością globalną (2.13). Podobnie, gdy manipulator mobilny składa się wyłącznie z platformy mobilnej ($y = k(q, x) = k(q)$), wówczas

$$\mathcal{D}_{q_0,T}(u(\cdot), x) = \mathcal{M}_{q_0,T}(u(\cdot)),$$

natomiast lokalna zręczność kinematyczna $m(u(\cdot), x)$ staje się zdefiniowaną w konfiguracji $u(\cdot)$ lokalną mobilnością kinematyczną platformy

$$m_{q_0,T}(u(\cdot)) = \sqrt{\det \mathcal{M}_{q_0,T}(u(\cdot))} = \sqrt{\prod_{i=1}^r \lambda_i \mathcal{M}_{q_0,T}(u(\cdot))}, \quad (5.13)$$

Globalna mobilność kinematyczna platformy powstaje z uśrednienia odpowiedniej miary lokalnej

$$\mathfrak{M}_{q_0,T}(K_{q_0,T}) = \frac{1}{\text{vol}(\tilde{\mathcal{X}})} \int_{\tilde{\mathcal{X}}} m_{q_0,T}(u(\cdot)) du(\cdot). \quad (5.14)$$

po obszarze $\tilde{\mathcal{X}} \subset \mathcal{X}$ endogenicznej przestrzeni konfiguracyjnej.

O kształcie kinematycznej elipsoidy zręczności, a co za tym idzie o stopniu izotropowości konfiguracji manipulatora mobilnego informuje lokalny kinematyczny współczynnik uwarunkowania konfiguracji endogenicznej, wyrażony wzorem

$$\kappa_{q_0,T}(u(\cdot), x) = \sqrt{\frac{\bar{\lambda}_{\mathcal{D}_{q_0,T}(u(\cdot), x)}}{\underline{\lambda}_{\mathcal{D}_{q_0,T}(u(\cdot), x)}}}. \quad (5.15)$$

Minimalna wartość miary $\kappa_{q_0,T}(u(\cdot), x) = 1$ gwarantuje izotropowość konfiguracji endogenicznej manipulatora mobilnego. W konfiguracji osobiwej wartość miary rośnie nieograniczenie.

Globalny kinematyczny współczynnik uwarunkowania określamy jako

$$\mathcal{K}_{q_0,T}(K_{q_0,T}) = \frac{1}{\text{vol}(\mathcal{X})} \int_{\mathcal{X}} \kappa_{q_0,T}(u(\cdot), x) d(u(\cdot), x), \quad (5.16)$$

gdzie $\mathcal{X} \subset \mathcal{X}$.

Z definicji wynika, że manipulator mobilny osiąga konfigurację izotropową, jeżeli wszystkie wartości własne macierzy $\mathcal{D}_{q_0,T}(u(\cdot), x)$ są jednakowe. Oznacza to, że zadanie wyznaczenia konfiguracji izotropowych można sprowadzić do następującego problemu optymalizacji

$$\min_{u(\cdot)} F_r(u(\cdot)) \quad (5.17)$$

gdzie

$$F_r(u(\cdot)) = (\lambda_1 - \lambda_2)^2 + (\lambda_1 - \lambda_3)^2 + \dots + (\lambda_1 - \lambda_r)^2 + (\lambda_2 - \lambda_3)^2 + \dots + (\lambda_2 - \lambda_r)^2 + \dots + (\lambda_{r-1} - \lambda_r)^2. \quad (5.18)$$

Zazwyczaj znacznie łatwiej wyliczyć współczynniki wielomianu charakterystycznego macierzy $\mathcal{D}_{q_0,T}(u(\cdot), x)$ niż jej wartości własne. Zapiszmy więc wielomian charakterystyczny macierzy $\mathcal{D}_{q_0,T}(u(\cdot), x)$

$$w(\lambda) = \det(\lambda I_r - \mathcal{D}_{q_0,T}(u(\cdot))) = \lambda^r + a_{r-1}\lambda^{r-1} + \dots + a_0. \quad (5.19)$$

Poszczególne elementy wielomianu charakterystycznego są funkcjami symetrycznymi wartości własnych macierzy zręczności kinematycznej

$$\begin{aligned} a_{r-1} &= -\text{Tr}\mathcal{D}_{q_0,T}(u(\cdot)) = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_r) \\ a_{r-2} &= \lambda_1\lambda_2 + \dots + \lambda_1\lambda_r + \dots + \lambda_{r-1}\lambda_r \\ &\vdots \\ a_0 &= (-1)^r \det\mathcal{D}_{q_0,T}(u(\cdot)) = (-1)^r \lambda_1\lambda_2 \dots \lambda_r. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Korzystając z powyższej własności, funkcję celu (5.18) możemy zapisać jako funkcję współczynników wielomianu charakterystycznego

$$F_r(u(\cdot)) = (r-1)a_{r-1}^2 - 2ra_{r-2}. \quad (5.21)$$

Nietrudno zauważyć, że dla $r = 2$

$$F_2(u(\cdot)) = (\lambda_1 - \lambda_2)^2 = \lambda_1^2 - 2\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2 = (\lambda_1 + \lambda_2)^2 - 4\lambda_1\lambda_2 = a_1^2 - 4a_0, \quad (5.22)$$

a dla $r = 3$

$$\begin{aligned} F_3(u(\cdot)) &= (\lambda_1 - \lambda_2)^2 + (\lambda_1 - \lambda_3)^2 + (\lambda_2 - \lambda_3)^2 = \\ &= \lambda_1^2 - 2\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2 + \lambda_1^2 - 2\lambda_1\lambda_3 + \lambda_3^2 + \lambda_2^2 - 2\lambda_2\lambda_3 + \lambda_3^2 = \\ &= 2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) - 2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3) = 2a_2^2 - 6a_1. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Na zakończenie przez analogię do miar jakości zdefiniowanych dla manipulatorów stacjonarnych, określimy *dystorsję* manipulatorów mobilnych klasy (nh,h). *Lokalną dystorsję kinematyczną* definiujemy wzorem

$$d_{q_0,T}^K(u(\cdot), x) = \text{Tr}\mathcal{D}_{q_0,T}(u(\cdot), x), \quad (5.24)$$

Globalna dystorsja kinematyczna powstaje z uśrednienia odpowiedniej miary lokalnej

$$D_{q_0,T}^K(K_{q_0,T}) = \frac{1}{\text{vol}(\mathcal{X})} \int_{\mathcal{X}} d_{q_0,T}^K(u(\cdot), x) d(u(\cdot), x). \quad (5.25)$$

Jest to miara niesztynności kinematyki.

5.1.3. Manipulatory mobilne klasy (nh,nh)

W niniejszym podrozdziale zdefiniujemy miary jakości dla manipulatorów mobilnych klasy (nh,nh). W związku z tym, że ich interpretacja jest taka sama jak dla manipulatorów klasy (nh,h), ograniczymy się do ich wymienienia.

Kinematyczną elipsoidę zręczności manipulatorów podwójnie nieholonomicznych definiujemy jako obraz sfery jednostkowej kierunków ruchu

$$S_{q_0,p_0,T}(u^1(\cdot), u^2(\cdot)) = \{(v^1(\cdot), v^2(\cdot)) \in \mathcal{X} \mid \|(v^1(\cdot), v^2(\cdot))\|_{R_1 R_2} = 1\} \quad (5.26)$$

w przestrzeni stycznej do przestrzeni konfiguracyjnej w konfiguracji $(u^1(\cdot), u^2(\cdot)) \in \mathcal{X}$ przez *jacobian analityczny* $J_{q_0,p_0,T}(u^1(\cdot), u^2(\cdot))$ w przestrzeni stycznej do przestrzeni zadaniowej w punkcie $K_{q_0,p_0,T}(u^1(\cdot), u^2(\cdot))$,

$$\begin{aligned} E_{q_0,p_0,T}(u^1(\cdot), u^2(\cdot)) &= J_{q_0,p_0,T}(u^1(\cdot), u^2(\cdot)) S_{q_0,p_0,T}(u^1(\cdot), u^2(\cdot)) = \\ &= \{\chi \in \mathbb{R}^r \mid \chi^T \mathcal{D}_{q_0,p_0,T}^{-1}(u^1(\cdot), u^2(\cdot)) \chi = 1\}. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Lokalną zręczność kinematyczną [62]

$$m_{q_0,p_0,T}(u^1(\cdot), u^2(\cdot)) = \sqrt{\det \mathcal{D}_{q_0,p_0,T}(u^1(\cdot), u^2(\cdot))} = \sqrt{\prod_{i=1}^r \lambda_{i\mathcal{D}_{q_0,p_0,T}(u^1(\cdot), u^2(\cdot))}}, \quad (5.28)$$

jest miarą objętości $E_{q_0,p_0,T}$, która opisuje transmisję nieskończenie małego ruchu z przestrzeni endogenicznej manipulatora podwójnie nieholonomicznego do jego przestrzeni zadaniowej.

Globalną zręczność kinematyczną

$$\mathcal{M}_{q_0,p_0,T}(K_{q_0,p_0,T}) = \frac{1}{\text{vol}(\tilde{\mathcal{X}})} \int_{\tilde{\mathcal{X}}} m_{q_0,p_0,T}(u^1(\cdot), u^2(\cdot)) d(u^1(\cdot), u^2(\cdot)). \quad (5.29)$$

powstaje przez uśrednienie po obszarze $\tilde{\mathcal{X}} \subset \mathcal{X}$.

Lokalną mobilność kinematyczną platformy w konfiguracji

$$m_{q_0,T}(u^1(\cdot)) = \sqrt{\det \mathcal{M}_{q_0,T}(u^1(\cdot))} = \sqrt{\prod_{i=1}^r \lambda_{i\mathcal{M}_{q_0,T}(u^1(\cdot))}}. \quad (5.30)$$

Globalną mobilność kinematyczną ma postać całki

$$\mathfrak{M}_{q_0,T}(K_{q_0,p_0,T}) = \frac{1}{\text{vol}(\tilde{\mathcal{X}})} \int_{\tilde{\mathcal{X}}} m_{q_0,p_0,T}(u^1(\cdot)) du^1(\cdot), \quad (5.31)$$

po pewnym obszarze $\tilde{\mathcal{X}} \subset \mathcal{X}$.

Wprowadzamy również miary izotropowości konfiguracji endogenicznej $(u^1(\cdot), u^2(\cdot)) \in \mathcal{X}$ podwójnie nieholonomicznego manipulatora mobilnego, a więc *lokalny kinematyczny współczynnik uwarunkowania konfiguracji endogenicznej*

$$\kappa_{q_0,p_0,T}(u^1(\cdot), u^2(\cdot)) = \sqrt{\frac{\bar{\lambda}_{\mathcal{D}_{q_0,p_0,T}(u^1(\cdot), u^2(\cdot))}}{\underline{\lambda}_{\mathcal{D}_{q_0,p_0,T}(u^1(\cdot), u^2(\cdot))}}} \quad (5.32)$$

oraz globalny kinematyczny współczynnik uwarunkowania

$$\mathcal{K}_{q_0,p_0,T}(K_{q_0,p_0,T}) = \frac{1}{\text{vol}(\mathcal{X})} \int_{\mathcal{X}} \kappa_{q_0,p_0,T}(u^1(\cdot), u^2(\cdot)) d(u^1(\cdot), u^2(\cdot)). \quad (5.33)$$

Globalna dystorsja kinematyczna, jest miarą niesztynności kinematyki manipulatora podwójnie nieholonomicznego,

$$D_{q_0,p_0,T}^K(K_{q_0,p_0,T}) = \frac{1}{\text{vol}(\mathcal{X})} \int_{\mathcal{X}} d_{q_0,p_0,T}^K(u^1(\cdot), u^2(\cdot)) d(u^1(\cdot), u^2(\cdot)). \quad (5.34)$$

Wyrażenie pod całką nosi nazwę *lokalnej dystorsji kinematycznej*, która jest dana wzorem

$$d_{q_0,p_0,T}^K(u^1(\cdot), u^2(\cdot)) = \text{Tr} \mathcal{D}_{q_0,p_0,T}(u^1(\cdot), u^2(\cdot)). \quad (5.35)$$

5.2. Miary dynamiczne

5.2.1. Manipulatory mobilne klasy (nh,h)

Na zakończenie tego rozdziału przedstawimy miary jakości robotów mobilnych opisywanych równaniami dynamiki. Sposób podejścia do omawianej klasy robotów zaproponowano w podrozdziale 4.2.2. Przypomnijmy, że opieramy się na założeniu, iż dynamiczne miary jakości manipulatorów mobilnych definiuje się analogicznie do odpowiednich kinematycznych miar jakości tych manipulatorów.

W ten sposób, przez analogię definiujemy *dynamiczną elipsoidę zręczności* [76], która jest odwzorowaniem, przez jacobian zadaniowy, sfery jednostkowej kierunków ruchu

$$S_{x_0,T}(u(\cdot)) = \{v(\cdot) \in \mathcal{X} \mid \|v(\cdot)\|_R = 1\}, \quad (5.36)$$

z przestrzeni stycznej do przestrzeni konfiguracyjnej w punkcie $u(\cdot) \in \mathcal{X}$, w przestrzeń styczną do przestrzeni zadaniowej w punkcie $K_{x_0,T}(u(\cdot))$

$$E_{x_0,T}(u(\cdot)) = J_{x_0,T}(u(\cdot)) S_{x_0,T}(u(\cdot)) = \{\chi \in \mathbb{R}^r \mid \chi^T \mathcal{D}_{x_0,T}^{-1}(u(\cdot)) \chi = 1\}, \quad (5.37)$$

przy czym $\mathcal{D}_{x_0,T}(u(\cdot))$ definiuje zależność 4.64.

Lokalna zręczność dynamiczna

$$m_{x_0,T}(u(\cdot)) = \sqrt{\det \mathcal{D}_{x_0,T}(u(\cdot))} = \sqrt{\prod_{i=1}^r \lambda_{i\mathcal{D}_{x_0,T}(u(\cdot))}}, \quad (5.38)$$

jest miarą objętości *elipsoidy zręczności dynamicznej*. Opisuje ona wrażliwość efektora manipulatora mobilnego na nieskończenie małe zmiany konfiguracji endogenicznej $u(\cdot) \in \mathcal{X}$.

Globalną zręczność dynamiczną konstruujemy uśredniając *lokalną zręczność dynamiczną* po podzbiorze przestrzeni konfiguracyjnej

$$\mathcal{M}_{x_0,T}(K_{x_0,T}) = \frac{1}{\text{vol}(\mathcal{X})} \int_{\mathcal{X}} m_{x_0,T}(u(\cdot)) du(\cdot). \quad (5.39)$$

Lokalny dynamiczny współczynnik uwarunkowania

$$\kappa_{x_0,T}(u(\cdot)) = \sqrt{\frac{\bar{\lambda}_{\mathcal{D}_{x_0,T}(u(\cdot))}}{\underline{\lambda}_{\mathcal{D}_{x_0,T}(u(\cdot))}}} \quad (5.40)$$

jest miarą izotropowości *dynamicznej konfiguracji endogenicznej* manipulatora mobilnego. Całkując miarę po obszarze $\tilde{\mathcal{X}} \subset \mathcal{X}$ otrzymujemy *globalny dynamiczny współczynnik uwarunkowania*

$$\mathcal{K}_{x_0,T}(K_{x_0,T}) = \frac{1}{\text{vol}(\tilde{\mathcal{X}})} \int_{\tilde{\mathcal{X}}} \kappa_{x_0,T}(u(\cdot)) du(\cdot). \quad (5.41)$$

Na koniec wprowadzamy *globalną dystorsję dynamiczną*, miarę nieszytywności odwzorowania zadaniowego lub też niejednorodności transformacji siły i momenty napędowe - położenie i orientacja efektora

$$\mathcal{D}_{x_0,T}^D(K_{x_0,T}) = \frac{1}{\text{vol}(\tilde{\mathcal{X}})} \int_{\tilde{\mathcal{X}}} d_{x_0,T}^D(u(\cdot)) du(\cdot). \quad (5.42)$$

Powstaje ona przez uśrednienie *lokalnej dystorsji dynamicznej*

$$d_{x_0,T}^D(u(\cdot)) = \text{Tr} \mathcal{D}_{x_0,T}(u(\cdot)). \quad (5.43)$$

po podzbiorze $\tilde{\mathcal{X}} \subset \mathcal{X}$.

5.2.2. Manipulatory mobilne klasy (nh,0)

W podrozdziale wprowadzamy miary jakości manipulatorów mobilnych klasy (nh,0). Jako pierwszą konstruujemy *dynamiczną elipsoidę zręczności* [76], będącą obrazem sfery jednostkowej

$$S_{q_0,\eta_0,T}(u(\cdot)) = \{v(\cdot) \in \mathcal{X} \mid \|v(\cdot)\|_R = 1\}, \quad (5.44)$$

prędkości w przestrzeni stycznej do przestrzeni konfiguracyjnej w punkcie $u(\cdot) \in \mathcal{X}$, poprzez jacobian zadaniowy, w przestrzeni stycznej do przestrzeni zadaniowej w punkcie $K_{q_0,\eta_0,T}(u(\cdot))$

$$E_{q_0,\eta_0,T}(u(\cdot)) = J_{q_0,\eta_0,T}(u(\cdot)) S_{q_0,\eta_0,T}(u(\cdot)) = \{\chi \in \mathbb{R}^r \mid \chi^T \mathcal{D}_{q_0,\eta_0,T}^{-1}(u(\cdot)) \chi = 1\}. \quad (5.45)$$

Podobnie definiujemy *lokalną zręczność dynamiczną* [75]

$$m_{q_0,\eta_0,T}(u(\cdot)) = \sqrt{\det \mathcal{D}_{q_0,\eta_0,T}(u(\cdot))} = \sqrt{\prod_{i=1}^r \lambda_i \mathcal{D}_{q_0,\eta_0,T}(u(\cdot))}, \quad (5.46)$$

będącą miarą objętości *elipsoidy zręczności dynamicznej* i opisującą wrażliwość robota mobilnego na małe zmiany konfiguracji endogenicznej $u(\cdot) \in \mathcal{X}$ (opisującej np. momenty obrotowe kół).

Odpowiednia miara globalna przyjmuje postać

$$\mathcal{M}_{q_0,\eta_0,T}(K_{q_0,\eta_0,T}) = \frac{1}{\text{vol}(\tilde{\mathcal{X}})} \int_{\tilde{\mathcal{X}}} m_{q_0,\eta_0,T}(u(\cdot)) du(\cdot). \quad (5.47)$$

Informacje o kształcie *dynamicznej elipsoidy zręczności* zawiera *lokalny dynamiczny współczynnik uwarunkowania*

$$\kappa_{q_0,\eta_0,T}(u(\cdot)) = \sqrt{\frac{\bar{\lambda}_{\mathcal{D}_{q_0,\eta_0,T}(u(\cdot))}}{\lambda_{\mathcal{D}_{q_0,\eta_0,T}(u(\cdot))}}}. \quad (5.48)$$

Po scałkowaniu po obszarze $\bar{\mathcal{X}} \subset \mathcal{X}$ uzyskujemy odpowiednią miarę globalną

$$\mathcal{K}_{q_0, \eta_0, T}(K_{q_0, \eta_0, T}) = \frac{1}{\text{vol}(\bar{\mathcal{X}})} \int_{\bar{\mathcal{X}}} \kappa_{q_0, \eta_0, T}(u(\cdot)) du(\cdot). \quad (5.49)$$

Miarę nieszttywności odwzorowania zadaniowego stanowi *globalna dystorsja dynamiczna*

$$\mathcal{D}_{q_0, \eta_0, T}^D(K_{q_0, \eta_0, T}) = \frac{1}{\text{vol}(\bar{\mathcal{X}})} \int_{\bar{\mathcal{X}}} \mathcal{D}_{q_0, \eta_0, T}^D(u(\cdot)) du(\cdot), \quad (5.50)$$

powstała przez uśrednienie *lokalnej dystorsji dynamicznej*

$$\mathcal{D}_{q_0, \eta_0, T}^D(u(\cdot)) = \text{Tr} \mathcal{D}_{q_0, \eta_0, T}(u(\cdot)). \quad (5.51)$$

6. Metoda endogenicznej przestrzeni konfiguracyjnej a podejście tradycyjne

Niniejszy rozdział ma na celu porównanie wyników uzyskanych przy zastosowaniu do rozwiązania tego samego zadania metodą tradycyjną i metodą endogenicznej przestrzeni konfiguracyjnej. Zadanie będzie polegało na wyznaczeniu optymalnego punktu zamontowania manipulatora typu ZEBRA ZERO na platformie dwukołowej. Chcemy wybrać taki punkt umieszczenia manipulatora na platformie, dla którego zręczność w kierunku jazdy całego układu będzie największa. Najpierw przedstawimy wyniki Gardnera i Velinskiego [21], a następnie rozwiążemy to zadanie wykorzystując metodologię przestrzeni endogenicznej. W ten sposób pokażemy zalety metodologii przestrzeni endogenicznej.

6.1. Podejście tradycyjne

ZEBRA ZERO jest manipulatorem stacjonarnym o sześciu stopniach swobody. Pierwsze trzy stopnie swobody, odpowiedzialne za makroruchy robota, składają się z osi pionowej oraz dwóch poziomych osi równoległych, natomiast ostatnie trzy stopnie swobody tworzą nadgarstek manipulatora. W rozważaniach uwzględnimy jedynie trzy pierwsze stopnie swobody. Kinematyka opisująca położenie manipulatora ZEBRA ZERO jest dana wzorem [21]

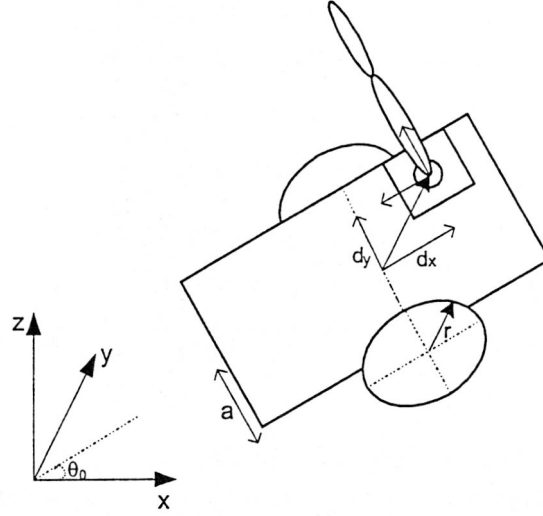
$$k(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} \cos x_1 (l_2 \cos x_2 + l_3 \cos(x_2 + x_3)) \\ \sin x_1 (l_2 \cos x_2 + l_3 \cos(x_2 + x_3)) \\ l_1 - l_2 \sin x_2 - l_3 \sin(x_2 + x_3) \end{pmatrix}, \quad (6.1)$$

przy czym x_1, x_2, x_3 są zmiennymi przegubowymi manipulatora, natomiast l_1, l_2, l_3 oznaczają długości jego ramion. Manipulator został umieszczony na platformie mobilnej wyposażonej w dwa niezależnie napędzane koła (rysunek 6.1). Gardner i Velinsky definiują prędkość efektora manipulatora mobilnego zgodnie ze wzorem (3.36)

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -l_c \sin x_1 & -l_s \cos x_1 & -l_3 \cos x_1 \sin(x_2 + x_3) \\ -l_c \cos x_1 & -l_s \sin x_1 & -l_3 \sin x_1 \sin(x_2 + x_3) \\ 0 & -l_c & -l_3 \cos(x_2 + x_3) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & -(d_y + l_c \sin x_1) \\ 0 & 1 & d_x + l_c \cos x_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \\ \dot{\theta}_0 \end{pmatrix}, \quad (6.2)$$

przy czym $l_c = l_2 \cos x_2 + l_3 \cos(x_2 + x_3)$, $l_s = l_2 \sin x_2 + l_3 \sin(x_2 + x_3)$, natomiast d_x i d_y oznaczają współrzędne punktu zamontowania manipulatora na platformie mobilnej w układzie lokalnym. Ostatnia część wzoru (6.2) opisuje orientację θ_0 oraz położenie na płaszczyźnie (x, y) platformy mobilnej. Zależność (3.37) zapiszemy jako

$$\begin{pmatrix} \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \\ \dot{\theta}_0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r}{2} \cos \theta_0 & \frac{r}{2} \cos \theta_0 \\ \frac{r}{2} \sin \theta_0 & \frac{r}{2} \sin \theta_0 \\ -\frac{r}{2a} & \frac{r}{2a} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\psi}_l \\ \dot{\psi}_r \end{pmatrix}, \quad (6.3)$$



Rys. 6.1: Manipulator mobilny typu Zebra Zero.

gdzie ψ_l i ψ_r opisują kąt obrotu odpowiednio lewego oraz prawego koła, r - promień kół oraz $2a$ - szerokość platformy. Podstawiając (6.3) do (6.2) otrzymujemy model różniczkowy (3.38) kinematyki manipulatora mobilnego

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -l_c \sin(\theta_0 + x_1) & -l_s \cos(\theta_0 + x_1) & -l_3 \cos(\theta_0 + x_1) \sin(x_2 + x_3) \\ -l_c \cos(\theta_0 + x_1) & -l_s \sin(\theta_0 + x_1) & -l_3 \sin(\theta_0 + x_1) \sin(x_2 + x_3) \\ 0 & -l_c & -l_3 \cos(x_2 + x_3) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{\psi}_l \\ \dot{\psi}_r \end{pmatrix} \quad (6.4)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{r}{2a} (l_c \sin(\theta_0 + x_1) + d_x \sin \theta_0 + \cos \theta_0 (d_y + a)) & \frac{-r}{2a} (l_c \sin(\theta_0 + x_1) + d_x \sin \theta_0 + \cos \theta_0 (d_y - a)) \\ \frac{-r}{2a} (l_c \cos(\theta_0 + x_1) + d_x \cos \theta_0 - \sin \theta_0 (d_y + a)) & \frac{r}{2a} (l_c \cos(\theta_0 + x_1) + d_x \cos \theta_0 - \sin \theta_0 (d_y - a)) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Uwzględniając jedynie dwa pierwsze wiersze macierzy Jacobiego we wzorze (6.4) (dotyczące ruchu efektora w płaszczyźnie (x, y)) oraz normalizując wektor prędkości zgodnie ze wzorem (3.39), dostajemy następującą postać macierzy Jacobiego

$$\tilde{J} = \begin{bmatrix} -l_c \sin(\theta_0 + x_1) \omega_{1max} & -l_s \cos(\theta_0 + x_1) \omega_{2max} & -l_3 \cos(\theta_0 + x_1) \sin(x_2 + x_3) \omega_{3max} \\ -l_c \cos(\theta_0 + x_1) \omega_{1max} & -l_s \sin(\theta_0 + x_1) \omega_{2max} & -l_3 \sin(\theta_0 + x_1) \sin(x_2 + x_3) \omega_{3max} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{r \psi_{lmax}}{2a} (l_c \sin(\theta_0 + x_1) + d_x \sin \theta_0 + \cos \theta_0 (d_y + a)) & \frac{-r \psi_{rmax}}{2a} (l_c \sin(\theta_0 + x_1) + d_x \sin \theta_0 + \cos \theta_0 (d_y - a)) \\ \frac{-r \psi_{lmax}}{2a} (l_c \cos(\theta_0 + x_1) + d_x \cos \theta_0 - \sin \theta_0 (d_y + a)) & \frac{r \psi_{rmax}}{2a} (l_c \cos(\theta_0 + x_1) + d_x \cos \theta_0 - \sin \theta_0 (d_y - a)) \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

Gardner i Velinsky wykorzystali macierz Jacobiego $\tilde{J}$ w celu zdefiniowania *macierzy manipulowalności* (2.6) oraz *elipsoidy manipulowalności* (2.10). *Elipsoidę manipulowalności* zastosowali do wyznaczenia optymalnych współrzędnych (d_x, d_y) punktu zamontowania manipulatora na platformie mobilnej. Celem było uzyskanie możliwie największej zręczności w kierunku poruszania się manipulatora mobilnego, czyli wzdłuż osi x układu lokalnego. Wartości pozostałych parametrów przyjęto tak jak w tabeli (6.1). Rysunki (6.2)-(6.4) obrazują zrekonstruowane wykresy *elipsoid manipulowalności* uzyskane dla różnych punktów zamontowania manipulatora na platformie mobilnej. Podobne wyniki zawiera praca [21]. Żądanie,

parametr	wartość
l_1	$0.254m$
l_2	$0.274m$
l_3	$0.228m$
r	$0.127m$
a	$0.5m$
ω_{1max}	$3.729 \frac{rad}{s}$
$\omega_{2max}, \omega_{3max}$	$6.521 \frac{rad}{s}$
ψ_{1max}, ψ_{2max}	$20.94 \frac{rad}{s}$

Tab. 6.1: Wartości parametrów manipulatora mobilnego typu ZEBRA ZERO

by manipulator mobilny był najbardziej zręczny wzdłuż kierunku jazdy oznacza, że najdłuższa oś *elipsoidy manipulowalności* powinna być skierowana wzdłuż osi x lokalnego układu współrzędnych. Nietrudno zauważyć, że optymalną sytuację przedstawia rysunek (6.3a), z którego wynika, że manipulator należy umieścić na osi kół, możliwie najdalej od środka platformy.

6.2. Metoda endogenicznej przestrzeni konfiguracyjnej

Rozwiążemy teraz to samo zadanie przy wykorzystaniu metody przestrzeni endogenicznej. Kinematykę manipulatora typu ZEBRA ZERO zapisujemy w postaci układu sterowania

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = (u_1 + u_2) \frac{r}{2} \cos \theta_0, & \dot{q}_2 = (u_1 + u_2) \frac{r}{2} \sin \theta_0 \\ \dot{q}_3 = -\frac{r}{2a} u_1 + \frac{r}{2a} u_2 \end{cases} \quad (6.6)$$

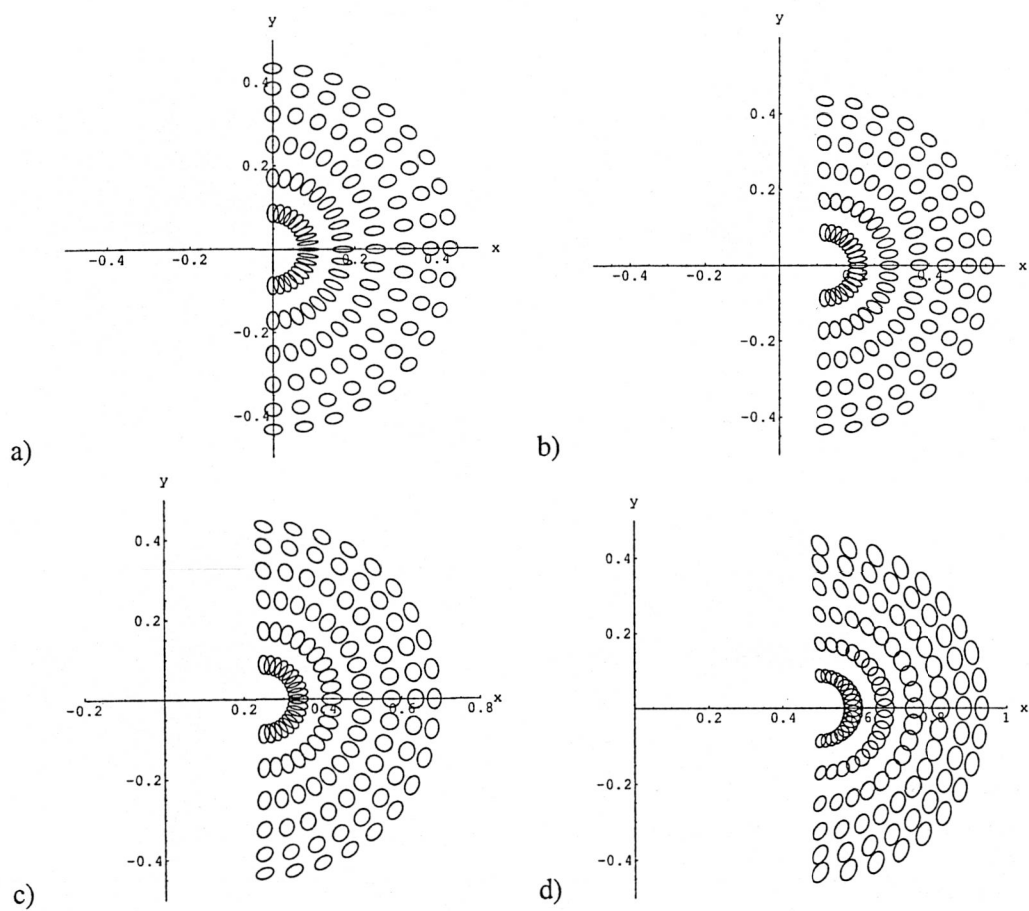
z funkcją wyjścia

$$y = k(q, x) = \begin{pmatrix} q_1 + d_x \cos \theta_0 - d_y \sin \theta_0 + \cos(x_0 + x_1)(l_2 \cos x_2 + l_3 \cos(x_2 + x_3)) \\ q_2 + d_x \sin \theta_0 + d_y \cos \theta_0 + \sin(x_0 + x_1)(l_2 \cos x_2 + l_3 \cos(x_2 + x_3)) \\ l_1 - l_2 \sin x_2 - l_3 \sin(x_2 + x_3) \end{pmatrix}, \quad (6.7)$$

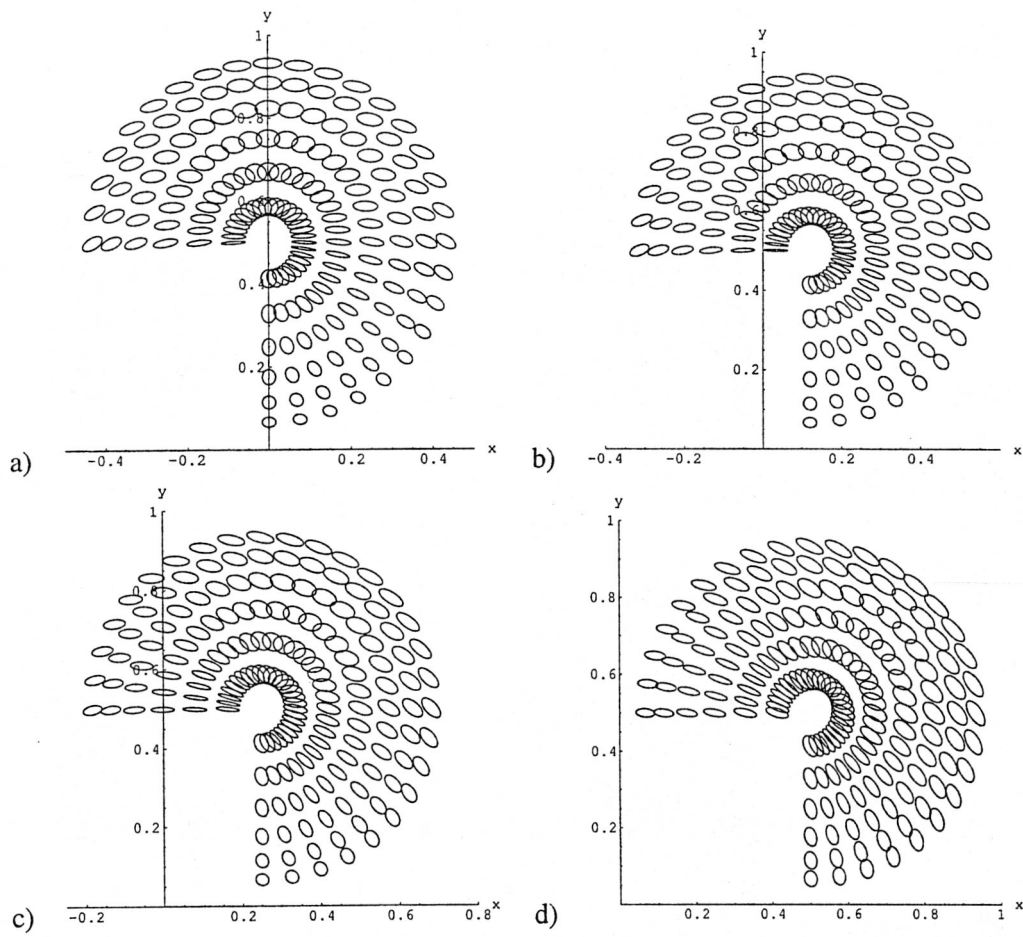
opisującą położenie efektora w trójwymiarowej przestrzeni kartezjańskiej. Wszystkie parametry przyjmujemy takie jak w tabeli (6.1). Dla uproszczenia zakładamy, że funkcje sterujące $u(\cdot)$ są stałe oraz $(u_1, u_2) \in [-3; 3]$, $(x_1, x_2, x_3) \in [0; 2\pi]$ i $q_0 = 0$. Ze wzoru (4.29) wyliczamy *jacobian analityczny* $J_{q_0, T}(u(\cdot), x)$, następnie na podstawie zależności (4.36) obliczamy *macierz zręczności kinematycznej* $\mathcal{D}_{q_0, T}(u(\cdot), x)$, by w efekcie wyznaczyć optymalne współrzędne (d_x, d_y) , korzystając ze wzoru

$$\bar{d} = \max_{d_x, d_y} \int_{\mathcal{X}} w^T \bar{v}_{\mathcal{D}_{q_0, T}(u(\cdot), x)}(u(\cdot), x, d_x, d_y) d(u(\cdot), x), \quad (6.8)$$

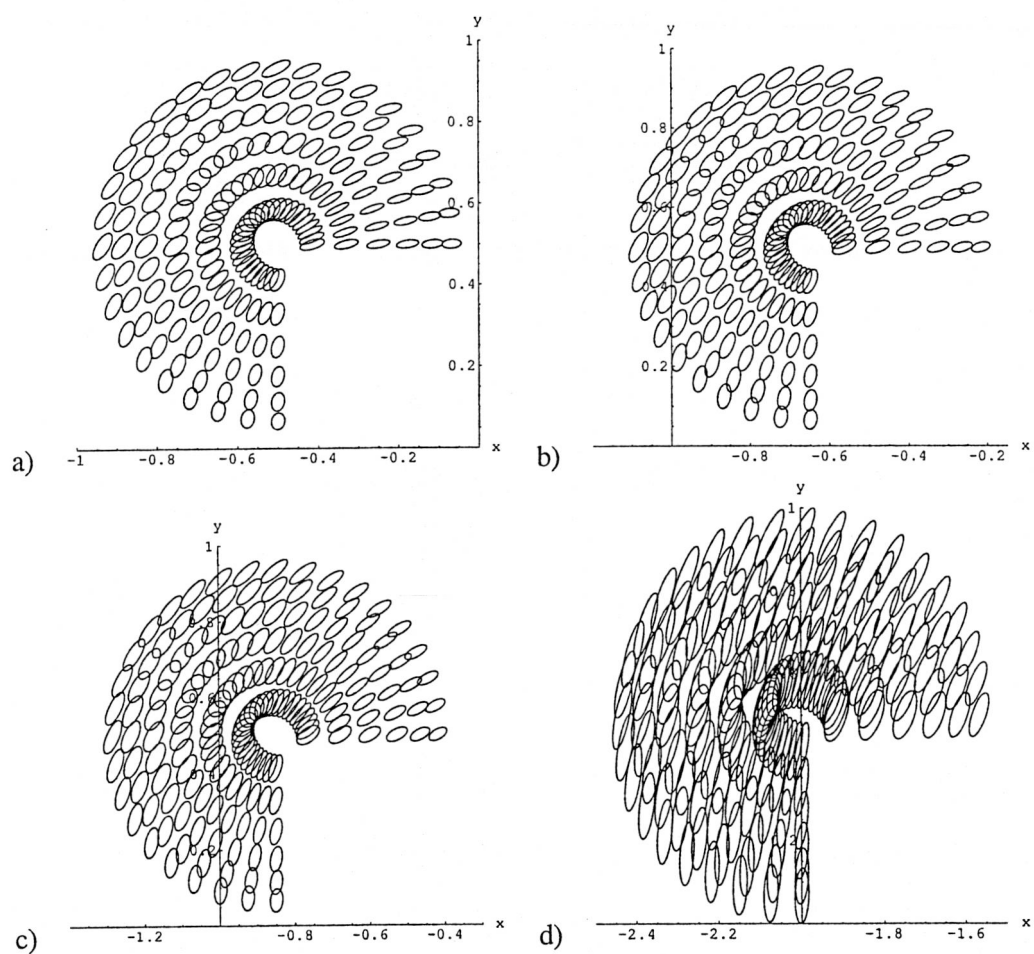
przy czym w jest wektorem definiującym pożądany kierunek ruchu manipulatora mobilnego, natomiast $\bar{v}_{\mathcal{D}_{q_0, T}(u(\cdot), x)}$ - wektorem własnym macierzy $\mathcal{D}_{q_0, T}(u(\cdot), x)$ odpowiadającym jej największej wartości własnej $\bar{\lambda}_{\mathcal{D}_{q_0, T}(u(\cdot), x)}$. Formuła (6.8) opisuje długość rzutu wektora na zadany kierunek. Przyjmujemy, że $-2 \leq d_x \leq 2$ oraz $-0.5 \leq d_y \leq 0.5$. Tabela (6.2) zawiera optymalne współrzędne (d_x, d_y) zamontowania manipulatora na platformie, uzyskane dla różnych wartości horyzontu sterowania T . Okazuje się, że metoda przestrzeni endogenicznej sugeruje, by manipulator umieścić możliwie najbliżej lewego, bądź prawego brzegu platformy mobilnej $d_y = 0.5m$, przy czym to, jak daleko względem osi kół będzie



Rys. 6.2: *Elipsoidy manipulowalności* manipulatora mobilnego typu ZEBRA ZERO dla: a) $d_x = 0$, $d_y = 0$; b) $d_x = 0.12m$, $d_y = 0m$ c) $d_x = 0.25$, $d_y = 0$; d) $d_x = 0.5m$, $d_y = 0$.



Rys. 6.3: *Elipsoidy manipulowalności* manipulatora mobilnego typu ZEBRA ZERO dla: a) $d_x = 0$, $d_y = 0.5m$; b) $d_x = 0.12m$, $d_y = 0.5m$ c) $d_x = 0.25m$, $d_y = 0.5m$; d) $d_x = 0.5m$, $d_y = 0.5m$.



Rys. 6.4: Elipsoidy manipulowalności manipulatora mobilnego typu ZEBRA ZERO dla: a) $d_x = -0.5m$, $d_y = 0.5m$; b) $d_x = -0.65m$, $d_y = 0.5m$ c) $d_x = -0.85m$, $d_y = 0.5m$; d) $d_x = -2m$, $d_y = 0.5$.

wysunięty manipulator, zależy od wartości horyzontu sterowania T . Dla małych wartości T , przy których platforma może wykonać jedynie niewielki ruch, wysunięcie manipulatora jest większe, natomiast wraz ze wzrostem T , wysunięcie manipulatora względem osi kół maleje do zera. Nietrudno zaobserwować, że uzyskane przez nas wyniki są zbliżone do wyników Gardnera i Velinskyego. W szczególności, dla $T = 4\pi$ rozwiązania optymalne proponowane przez obie metody pokrywają się. Oznacza to, że w ramach *metody endogenicznej przestrzeni konfiguracyjnej* potrafimy nie tylko zdefiniować miary jakości dla manipulatora mobilnego, lecz także rozwiązać klasyczne zadania projektowe, w sposób efektywny (w pracy [21] w celu rozwiązania zadania zastosowano czasochłonne metody przeglądu zupełnego, my natomiast, poprzez odpowiednie zdefiniowanie funkcji celu oraz wykorzystanie technik optymalizacyjnych, potrafimy znaleźć rozwiązanie zadania w bardzo krótkim czasie).

horyzont sterowania	współrzędne (d_x, d_y)
$T = \pi$	$(d_x, d_y) = (\pm 1.442m, \pm 0.5m)$
$T = 3\pi$	$(d_x, d_y) = (\pm 0.927m, \pm 0.5m)$
$T = 4\pi$	$(d_x, d_y) = (\pm 0.000m, \pm 0.5m)$

Tab. 6.2: Optymalny punkt umieszczenia manipulatora typu ZEBRA ZERO na platformie mobilnej

7. Modele manipulatorów mobilnych poddanych badaniom symulacyjnym

Niniejszy rozdział zawiera modele oraz rysunki robotów poddanych badaniom symulacyjnym.

MANIPULATOR NIEHOŁONOMICZNY (0,nh): planarny manipulator nieholonomiczny typu 3R

Model kinematyki tego manipulatora jest dany zależnością ([14], [43])

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = u_1 \\ \dot{p}_2 = a_2 u_2 \sin p_1 \\ \dot{p}_3 = a_3 u_2 \sin p_2 \cos p_1 \end{cases} \quad (7.1)$$

Funkcja wyjścia wyznacza położenie i orientację efektora w przestrzeni kartezjańskiej

$$y = k(p) = \begin{pmatrix} l_1 \cos p_1 + l_2 \cos(p_1 + p_2) + l_3 \cos(p_1 + p_2 + p_3) \\ l_1 \sin p_1 + l_2 \sin(p_1 + p_2) + l_3 \sin(p_1 + p_2 + p_3) \\ p_1 + p_2 + p_3 \end{pmatrix}, \quad (7.2)$$

przy czym zmienne (p_1, p_2, p_3) opisują posturę manipulatora. Sterowania u_1 i u_2 oznaczają odpowiednio prędkość kątową pierwszego przegubu manipulatora oraz prędkość kątową przekładni nieholonomicznej pierwszego przegubu. Przełożenia przekładni nieholonomicznych w przegubach manipulatora wynoszą a_2 i a_3 . Manipulator przyjmuje konfiguracje osobliwe dla $u_2 \equiv 0$.

MANIPULATOR MOBILNY (nh,h): Manipulator holonomiczny typu RTR na platformie dwukołowej

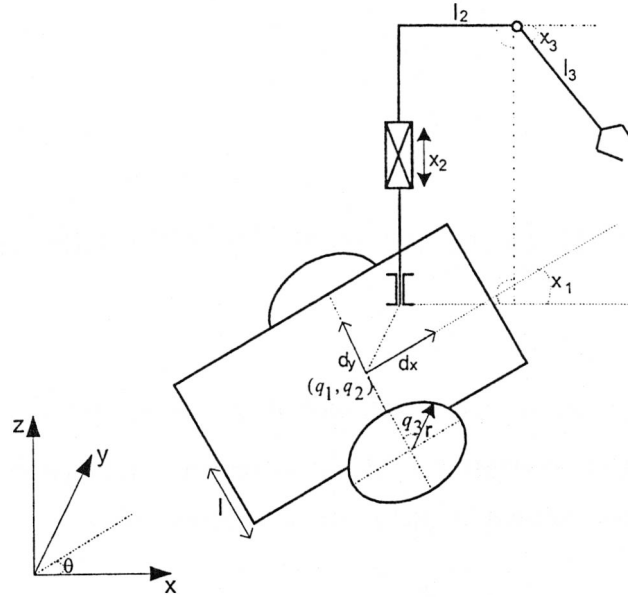
Kinematykę manipulatora mobilnego reprezentuje bezdryfowy układ sterowania [65]

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = (u_1 + u_2)l \cos \frac{r}{2l}(q_3 - q_4) \\ \dot{q}_2 = (u_1 + u_2)l \sin \frac{r}{2l}(q_3 - q_4) \\ \dot{q}_3 = \frac{2l}{r}u_1 \\ \dot{q}_4 = \frac{2l}{r}u_2 \end{cases} \quad (7.3)$$

z funkcją wyjścia opisującą położenie efektora w układzie współrzędnych kartezjańskich

$$y = k(q, x) = \begin{pmatrix} q_1 + d_x \cos \theta - d_y \sin \theta + (l_2 + l_3 \cos x_3) \cos(\theta + x_1), \\ q_2 + d_x \sin \theta + d_y \cos \theta + (l_2 + l_3 \cos x_3) \sin(\theta + x_1), \\ x_2 + l_3 \sin x_3 \end{pmatrix}, \quad (7.4)$$

Postura platformy jest opisywana za pomocą zmiennych (q_1, q_2, q_3, q_4) , jej orientacja - $\theta = \frac{r}{2l}(q_3 - q_4)$. Kąty w przegubach obrotowych manipulatora oznaczamy jako (x_1, x_3) , a położenie przegubu translacyjnego jako x_2 . Sterowania u_1 i u_2 są prędkościami kątowymi kół platformy. Zmienne uogólnione oraz parametry geometryczne manipulatora mobilnego zostały objaśnione na rysunku (7.1).



Rys. 7.1: Manipulator holonomiczny typu RTR zamontowany na platformie dwukołowej.

MANIPULATOR MOBILNY (nh,h): planarny manipulator holonomiczny typu 2R na monocyklu

Kinematykę tego manipulatora mobilnego reprezentuje układ sterowania

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = u_1 \cos q_3 \\ \dot{q}_2 = u_1 \sin q_3 \\ \dot{q}_3 = u_2 \end{cases}, \quad (7.5)$$

z funkcją wyjścia opisującą współrzędne kartezjańskie efektora w przestrzeni zadaniowej

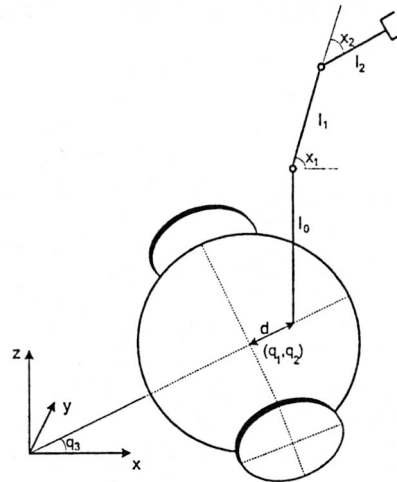
$$y = k(q, x) = \begin{pmatrix} q_1 + (l_1 \cos x_1 + l_2 \cos(x_1 + x_2)) \cos q_3 + d \cos q_3 \\ q_2 + (l_1 \cos x_1 + l_2 \cos(x_1 + x_2)) \sin q_3 + d \sin q_3 \\ l_0 + l_1 \sin x_1 + l_2 \sin(x_1 + x_2) \end{pmatrix}. \quad (7.6)$$

Rozważany manipulator został przedstawiony na rysunku (7.2). Postura monocykla jest opisywana współrzędnymi uogólnionymi (q_1, q_2, q_3) . Manipulator, charakteryzujący się zmiennymi przegubowymi (x_1, x_2) , został umieszczony na wysięgniku o długości l_0 i wysunięty na odległość d do przodu względem środka platformy. Sterowanie u_1 jest prędkością manipulatora mobilnego, natomiast u_2 - prędkością zmiany orientacji platformy.

MANIPULATOR MOBILNY (nh,h): planarny manipulator holonomiczny typu 3R na samochodzie kinematycznym

Kinematykę manipulatora holonomicznego typu potrójne wahadło umieszczonego na samochodzie kinematycznym definiujemy za pomocą układu sterowania

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = l u_1 \cos q_3 \cos q_4 \\ \dot{q}_2 = l u_1 \sin q_3 \cos q_4 \\ \dot{q}_3 = u_1 \sin q_4 \\ \dot{q}_4 = u_2 \end{cases}, \quad (7.7)$$

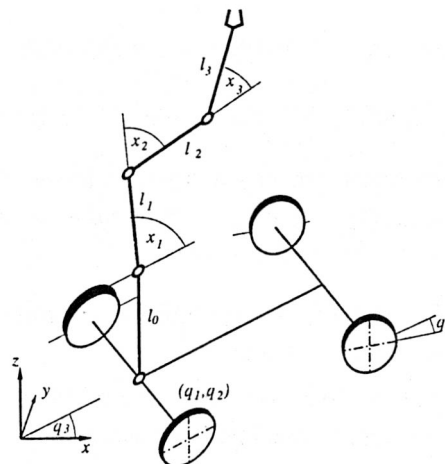


Rys. 7.2: Planarny manipulator holonomiczny typu 2R na monocykle.

z wyjściem

$$y = k(q, x) = \begin{pmatrix} q_1 + (l_1 \cos x_1 + l_2 \cos(x_1 + x_2) + l_3 \cos(x_1 + x_2 + x_3)) \cos q_3 \\ q_2 + (l_1 \cos x_1 + l_2 \cos(x_1 + x_2) + l_3 \cos(x_1 + x_2 + x_3)) \sin q_3 \\ l_0 + l_1 \sin x_1 + l_2 \sin(x_1 + x_2) + l_3 \sin(x_1 + x_2 + x_3) \end{pmatrix}. \quad (7.8)$$

Rysunek (7.3) objaśnia znaczenie współrzędnych (q_1, q_2, q_3, q_4) samochodu oraz manipulatora o współrzędnych przegubowych (x_1, x_2, x_3) , umieszczonego na środku tylnej osi samochodu, na wysięgniku o długości l_0 .



Rys. 7.3: Planarny manipulator holonomiczny typu 3R zamontowany na samochodzie kinematycznym.

MANIPULATOR MOBILNY (nh,h): planarny manipulator holonomiczny typu 3R na platformie dwukołowej

Kinematykę zapisujemy w postaci układu sterowania

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = (u_1 + u_2)l \cos \frac{r}{2l}(q_3 - q_4) \\ \dot{q}_2 = (u_1 + u_2)l \sin \frac{r}{2l}(q_3 - q_4) \\ \dot{q}_3 = \frac{2l}{r}u_1 \\ \dot{q}_4 = \frac{2l}{r}u_2 \end{cases} \quad (7.9)$$

z funkcją wyjścia

$$y = k(q, x) = \begin{pmatrix} q_1 + d_x \cos \theta - d_y \sin \theta + (l_1 \cos x_1 + l_2 \cos(x_1 + x_2) + l_3 \cos(x_1 + x_2 + x_3)) \cos q_3 \\ q_2 + d_x \sin \theta + d_y \cos \theta + (l_1 \cos x_1 + l_2 \cos(x_1 + x_2) + l_3 \cos(x_1 + x_2 + x_3)) \sin q_3 \\ l_0 + l_1 \sin x_1 + l_2 \sin(x_1 + x_2) + l_3 \sin(x_1 + x_2 + x_3) \end{pmatrix}. \quad (7.10)$$

Współrzędne platformy oraz jej parametry geometryczne objaśnia rysunek (7.1). d_x i d_y definiują przesunięcie manipulatora względem środka platformy w kierunku odpowiednio y_1 i y_2 . Za pomocą zmiennych (x_1, x_2, x_3) oznaczamy położenie katowe przegubów manipulatora. W celu uniknięcia kolizji pomiędzy platformą a manipulatorem, został on umieszczony na wysięgniku o długości l_0 .

MANIPULATOR PODWÓJNIE NIEHOLOONOMICZNY (nh,nh): planarny manipulator nieholonomiczny typu 3R na samochodzie kinematycznym

Manipulator podwójnie nieholonomiczny składa się z nieholonomicznego manipulatora planarnego o trzech stopniach swobody zamontowanego na samochodzie kinematycznym. Jego kinematyka jest dana za pomocą układu sterowania [62]

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = lu_1^1 \cos q_3 \cos q_4 & \dot{p}_1 = u_1^2 \\ \dot{q}_2 = lu_1^1 \sin q_3 \cos q_4 & \dot{p}_2 = a_2 u_2^2 \sin p_1 \\ \dot{q}_3 = u_1^1 \sin q_4 & \dot{p}_3 = a_3 u_2^2 \sin p_2 \cos p_1 \\ \dot{q}_4 = u_2^1 & \end{cases} \quad (7.11)$$

oraz funkcji wyjścia

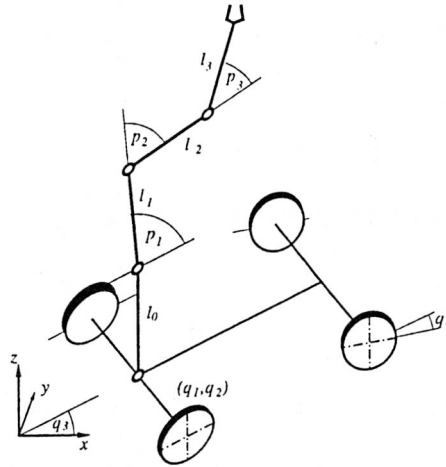
$$y = k(q, p) = \begin{pmatrix} q_1 + (l_1 \cos p_1 + l_2 \cos(p_1 + p_2) + l_3 \cos(p_1 + p_2 + p_3)) \cos q_3 \\ q_2 + (l_1 \cos p_1 + l_2 \cos(p_1 + p_2) + l_3 \cos(p_1 + p_2 + p_3)) \sin q_3 \\ l_0 + l_1 \sin p_1 + l_2 \sin(p_1 + p_2) + l_3 \sin(p_1 + p_2 + p_3) \end{pmatrix}. \quad (7.12)$$

Współrzędne oraz parametry geometryczne manipulatora mobilnego objaśnia rysunek (7.4). Pary (u_1^1, u_2^1) i (u_1^2, u_2^2) są odpowiednio sterowaniami platformy i manipulatora, natomiast a_2 i a_3 - przełożeniami przekładni nieholonomicznych przegubów manipulatora.

MANIPULATOR PODWÓJNIE NIEHOLOONOMICZNY (nh,nh): planarny manipulator nieholonomiczny typu 3R na platformie dwukołowej

Biorąc pod uwagę założenia na brak poślizgu kół platformy mobilnej, nietrudno pokazać, że kinematykę rozważanego manipulatora mobilnego można zapisać w postaci układu sterowania

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = (u_1^1 + u_2^1)l \cos \frac{r}{2l}(q_3 - q_4) & \dot{p}_1 = u_1^2 \\ \dot{q}_2 = (u_1^1 + u_2^1)l \sin \frac{r}{2l}(q_3 - q_4) & \dot{p}_2 = a_2 u_2^2 \sin p_1 \\ \dot{q}_3 = \frac{2l}{r}u_1^1 & \dot{p}_3 = a_3 u_2^2 \sin p_2 \cos p_1 \\ \dot{q}_4 = \frac{2l}{r}u_2^1 & \end{cases} \quad (7.13)$$



Rys. 7.4: Planarny manipulator nieholonomiczny typu 3R zamontowany na samochodzie kinematycznym.

z funkcją wyjścia opisującą położenie efektora manipulatora nieholonomicznego w przestrzeni kartezjańskiej:

$$y = k(q, p) = \begin{pmatrix} q_1 + d_x \cos \theta - d_y \sin \theta + (l_1 \cos p_1 + l_2 \cos(p_1 + p_2) + l_3 \cos(p_1 + p_2 + p_3)) \cos q_3 \\ q_2 + d_x \sin \theta + d_y \cos \theta + (l_1 \cos p_1 + l_2 \cos(p_1 + p_2) + l_3 \cos(p_1 + p_2 + p_3)) \sin q_3 \\ l_0 + l_1 \sin p_1 + l_2 \sin(p_1 + p_2) + l_3 \sin(p_1 + p_2 + p_3) \end{pmatrix}. \quad (7.14)$$

$\theta = \frac{r}{2l}(q_3 - q_4)$ oznacza orientację platformy. Posturę platformy oraz manipulatora wyznaczają odpowiednio współrzędne (q_1, q_2, q_3, q_4) oraz (p_1, p_2, p_3) . Sterowania u_1^1 , u_2^1 definiują prędkości kątowe kół platformy, u_1^2 to prędkość kątowa pierwszego przegubu manipulatora, a u_2^2 oznacza prędkość kątową przekładni nieholonomicznej pierwszego przegubu. a_1 i a_2 są przełożeniami przekładni nieholonomicznych manipulatora. Parametry geometryczne platformy zostały objaśnione na rysunku (7.1), a manipulatora - na rysunku (7.4).

MANIPULATOR PODWÓJNIE NIEHOLOONOMICZNY (nh,nh): planarny manipulator nieholonomiczny typu 3R na monocyklu

Równania kinematyki tego robota są następujące [59]

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = u_1^1 \cos q_3 & \dot{p}_1 = u_1^2 \\ \dot{q}_2 = u_1^1 \sin q_3 & \dot{p}_2 = a_2 u_2^2 \sin p_1 \\ \dot{q}_3 = u_2^1 & \dot{p}_3 = a_3 u_2^2 \sin p_2 \cos p_1 \end{cases}. \quad (7.15)$$

Funkcja wyjścia określa położenie efektora manipulatora w układzie współrzędnych kartezjańskich

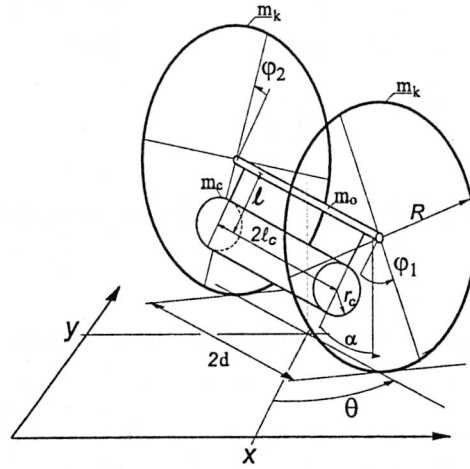
$$y = k(q, p) = \begin{pmatrix} q_1 + (l_1 \cos p_1 + l_2 \cos(p_1 + p_2) + l_3 \cos(p_1 + p_2 + p_3)) \cos q_3 + d \cos q_3 \\ q_2 + (l_1 \cos p_1 + l_2 \cos(p_1 + p_2) + l_3 \cos(p_1 + p_2 + p_3)) \sin q_3 + d \sin q_3 \\ l_0 + l_1 \sin p_1 + l_2 \sin(p_1 + p_2) + l_3 \sin(p_1 + p_2 + p_3) \end{pmatrix}. \quad (7.16)$$

Znaczenie współrzędnych oraz parametrów geometrycznych platformy mobilnej robota objaśniono na rysunku (7.2). Jest ona sterowana za pomocą prędkości ruchu postępowego u_1^1 oraz prędkości zmiany

orientacji u_2^1 . Na platformie umieszczono manipulator pokładowy taki jak na rysunku (7.4). Manipulator łączy z platformą wysięgnik o długości l_0 . Posturę manipulatora nieholonomicznego opisują zmienne (p_1, p_2, p_3) . Na ich wartość wpływamy pośrednio poprzez funkcje sterujące u_1^2, u_2^2 , mające znaczenie prędkości. Jak poprzednio, przełożenia przekładni oznaczamy symbolami a_1 i a_2 .

ROBOT MOBILNY MK (nh,0)

Schemat robota MK oraz objaśnienie znaczenia jego parametrów i współrzędnych przedstawia rysunek (7.5). Robot MK jest wyposażony w dwa niezależnie napędzane koła, każde o promieniu R i masie m_k ,



Rys. 7.5: Robot mobilny MK.

równomiernie rozłożonej na obwodzie. Koła łączy oś o długości $2d$ i masie m_o . Na osi kół, w odległości ℓ od niej, jest zawieszony korpus robota (zakładamy, że jest to jednorodny walec o promieniu r_c , masie m_c i długości ℓ_c). Środek masy wózka pozostającego w stanie spoczynku znajduje się poniżej osi kół. Robot wskutek wahań korpusu. Wektor $q = (x, y, \varphi_1, \varphi_2, \alpha)$ opisuje położenie środkowego punktu osi robota w układzie zewnętrznym, kąty obrotu kół oraz kąt odchylenia korpusu robota od pionu. Przy wykorzystaniu formalizmu lagranżowskiego oraz przy założeniu braku poślizgu kół otrzymujemy model kinematyki i dynamiki robota MK

$$\begin{cases} \dot{x} = \eta_{123} \cos \theta, \quad \dot{y} = \eta_{123} \sin \theta, \quad \dot{\varphi}_1 = \frac{2}{R} \eta_1, \quad \dot{\varphi}_2 = \frac{2}{R} \eta_2, \quad \dot{\alpha} = \frac{1}{R} \eta_3, \\ Q(\alpha) \dot{\eta} + C(\alpha, \eta) = B u, \\ y = (x + (\ell + r_c) \sin \alpha \cos \theta, y + (\ell + r_c) \sin \alpha \sin \theta, R - (\ell + r_c) \cos \alpha), \end{cases} \quad (7.17)$$

gdzie $\theta = \frac{R}{2d}(\varphi_2 - \varphi_1)$ i $\eta_{123} = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3$, przy czym η_1, η_2 są wyznaczone przez prędkości liniowe w punktach styku kół z podłożem, natomiast η_3 jest składnikiem prędkości liniowej kół, który wynika z wahadłowego ruchu korpusu. Funkcja wyjścia opisuje położenie wybranego punktu korpusu robota w zewnętrznym układzie współrzędnych kartezjańskich. Poszczególne składniki modelu są następujące ([28], [76]):

macierz bezwładności $Q(\alpha)$

$$Q(\alpha) = \begin{bmatrix} (m_c + \frac{4}{3}m_o + 8m_k) d^2 + m_k R^2 + m_c (\ell^2 \sin^2 \alpha + \frac{1}{3}\ell_c^2 + \frac{1}{2}r_c^2) \\ (m_c + \frac{2}{3}m_o) d^2 - m_k R^2 - m_c (\ell^2 \sin^2 \alpha + \frac{1}{3}\ell_c^2 + \frac{1}{2}r_c^2) \\ (m_c + m_o + 4m_k + \frac{m_c \ell}{R} \cos \alpha) d^2 \\ (m_c + \frac{2}{3}m_o) d^2 - m_k R^2 - m_c (\ell^2 \sin^2 \alpha + \frac{1}{3}\ell_c^2 + \frac{1}{2}r_c^2) \\ (m_c + \frac{4}{3}m_o + 8m_k) d^2 + m_k R^2 + m_c (\ell^2 \sin^2 \alpha + \frac{1}{3}\ell_c^2 + \frac{1}{2}r_c^2) \\ (m_c + m_o + 4m_k + \frac{m_c \ell}{R} \cos \alpha) d^2 \\ (m_o + m_c + 4m_k + \frac{m_c \ell}{R} \cos \alpha) d^2 \\ (m_c + m_o + 4m_k + \frac{m_c \ell}{R} \cos \alpha) d^2 \\ (m_c + m_o + 4m_k + \frac{2m_c \ell}{R} \cos \alpha + \frac{m_c}{R^2} (\ell^2 + \frac{1}{2}r_c^2)) d^2 \end{bmatrix}, \quad (7.18)$$

wektor momentów sił Coriolisa, odśrodkowych, tarcia lepkiego oraz sił grawitacji

$$C(\alpha, \eta) = \begin{pmatrix} -m_c \ell \sin \alpha (2\eta_2 + \eta_3) (\eta_2 - \eta_1) - \\ \frac{2m_c \ell^2}{R} \sin \alpha \cos \alpha \eta_3 (\eta_2 - \eta_1) - \frac{m_c d^2 \ell \sin \alpha}{R^2} \eta_3^2 + \frac{4d^2 k_1}{R^2} \eta_1 \\ m_c \ell \sin \alpha (2\eta_1 + \eta_3) (\eta_2 - \eta_1) + \\ \frac{2m_c \ell^2}{R} \sin \alpha \cos \alpha \eta_3 (\eta_2 - \eta_1) - \frac{m_c d^2 \ell \sin \alpha}{R^2} \eta_3^2 + \frac{4d^2 k_2}{R^2} \eta_2 \\ - \frac{m_c \ell \sin \alpha}{R} (\eta_2 - \eta_1)^2 (R + \ell \cos \alpha) - \frac{m_c \ell d^2}{R^2} \sin \alpha \eta_3^2 + \\ \frac{m_c g \ell d^2}{R} \sin \alpha \end{pmatrix}, \quad (7.19)$$

i macierz sterowań

$$B = \frac{2d^2}{R} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (7.20)$$

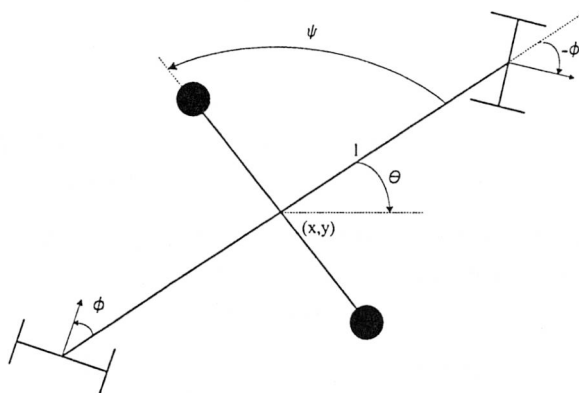
DESKOROLKA (nh,0)

Schemat rozważanego robota przedstawia rysunek (7.6). Deskorolka składa się z deski o masie m i długości $2l$ wyposażonej w dwie pary kół oraz umieszczonego na niej rotora. Wektor $q = (x, y, \theta, \phi, \psi)$ opisuje odpowiednio położenie (x, y) i orientację θ deski w zewnętrznym układzie odniesienia, kąt skrętu kół ϕ względem deski i kąt obrotu rotora ψ względem deski. Dla uproszczenia przyjęto, że kąty skrętu kół przednich i tylnych mają tę samą wartość. Po uwzględnieniu ograniczeń nieholonomicznych, za pomocą formalizmu lagranżowskiego uzyskano następujący model kinematyki i dynamiki deskorolki ([45], [46])

$$\begin{cases} \dot{x} = \eta_1 l \cos \theta \cos \phi, & \dot{y} = \eta_1 \sin \theta \cos \phi, & \dot{\theta} = -\eta_1 \sin \phi, & \dot{\phi} = \eta_2, & \dot{\psi} = \eta_3, \\ Q(\phi) \dot{\eta} + C(\phi, \eta) = Bu, \\ y = (x + l \cos \theta, y + l \sin \theta), \end{cases} \quad (7.21)$$

gdzie J , J_r i J_w definiują odpowiednio bezwładność deski, rotora i kół, symbole u_1 i u_2 oznaczają odpowiednio moment skręcający kierownicy i moment sterujący rotora, natomiast kolejno: macierz bezwładności $Q(\phi)$, wektor momentów sił Coriolisa, odśrodkowych, tarcia lepkiego oraz sił grawitacji $C(\phi, \eta)$ i macierz sterowań B są określone wzorami

$$Q(\phi) = \begin{bmatrix} J + J_r + 2J_w & 0 & -J_r \sin \phi \\ 0 & 2J_w & 0 \\ -J_r \sin \phi & 0 & J_r \end{bmatrix}, \quad C(\phi, \eta) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -J_r \cos \phi \eta_1 \eta_2 \end{bmatrix}, \quad (7.22)$$



Rys. 7.6: Deskorolka.

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (7.23)$$

W modelu założono dodatkowo, że $ml^2 = J + J_r + 2J_w$.

8. Wyznaczenie kinematycznych miar jakości manipulatorów mobilnych

8.1. Zręczność

8.1.1. Manipulator typu (0,nh): planarny manipulator nieholonomiczny typu 3R

Kinematyka rozważanego manipulatora została opisana równaniami (7.1) i (7.2).

OPTYMALNA KONFIGURACJA

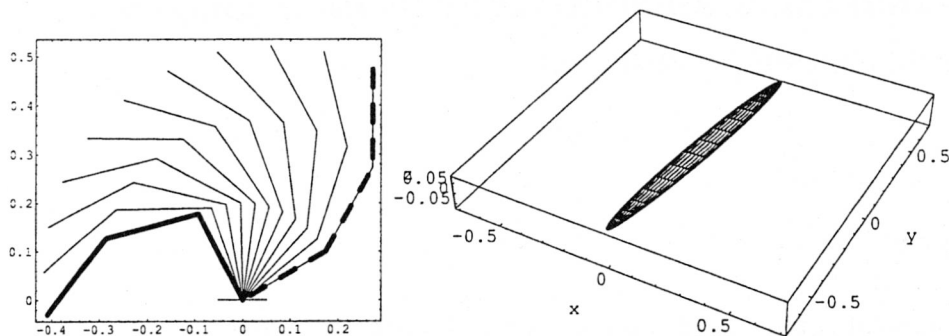
Zadanie optymalizacji konfiguracji polega na doborze funkcji sterujących (konfiguracji endogenicznej $u_1(\cdot), u_2(\cdot)$), a co za tym idzie wartości kątów przegubów manipulatora (p_1, p_2, p_3) , w taki sposób, by maksymalizować lokalną manipulowalność - kinematyczną miarę jakości daną zależnością (5.3). W celu rozwiązania tego zadania ustalamy wartości przełożeń przekładni $a_2 = a_3 = 0.1$, parametry geometryczne $l_1 = l_2 = l_3 = 0.2$ oraz posturę początkową manipulatora pokładowego $p_0 = (30^\circ, 30^\circ, 30^\circ)$. W tabeli (8.1) zostały zebrane wyniki symulacji przeprowadzonych dla stałej wartości horyzontu czasowego sterowania $T = \pi$, przy funkcjach sterujących stałych ($i = 1, 2; j = 0$) i zawierających odpowiednio pierwsze ($i = 1, 2; j = 0, 1, 2$) i drugie ($i = 1, 2; j = 0, 1, 2, 3, 4$) harmoniczne (przez c_{ij} oznaczamy parametry rozwinięcia (4.79)).

ograniczenia	optymalna konfiguracja
$ c_{ij} \leq 3$ $i = 1, 2, j = 0$ $\tilde{\mathcal{X}} = R^2$	$\{c_{10}, c_{20}\} = \{0.4867, 3\}$ $\{p_1, p_2, p_3\} = \{117^\circ, 78^\circ, 37^\circ\}$ $\tilde{m}_{p_0, T}(c) = 1.46 * 10^{-4}$
$ c_{ij} \leq 3$ $i = 1, 2, j = 0, 1, 2$ $\tilde{\mathcal{X}} = R^6$	$\{c_{10}, c_{11}, c_{12}, c_{20}, c_{21}, c_{22}\} = \{1.6182, -1.8824, 2.8023, 3, 3, -3\}$ $\{p_1, p_2, p_3\} = \{320^\circ, 83^\circ, 30^\circ\}$ $\tilde{m}_{p_0, T}(c) = 2.26 * 10^{-4}$
$ c_{ij} \leq 3$ $i = 1, 2, j = 0, 1, 2, 3, 4$ $\tilde{\mathcal{X}} = R^{10}$	$\{c_{10}, c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{14}\} = \{1.7244, -1.9073, 0.7196, -1.8155, -0.6314\}$ $\{c_{20}, c_{21}, c_{22}, c_{23}, c_{24}\} = \{3, 3, -3, 3, -3\}$ $\{p_1, p_2, p_3\} = \{339^\circ, 86^\circ, 48^\circ\}$ $\tilde{m}_{p_0, T}(c) = 3.30 * 10^{-4}$

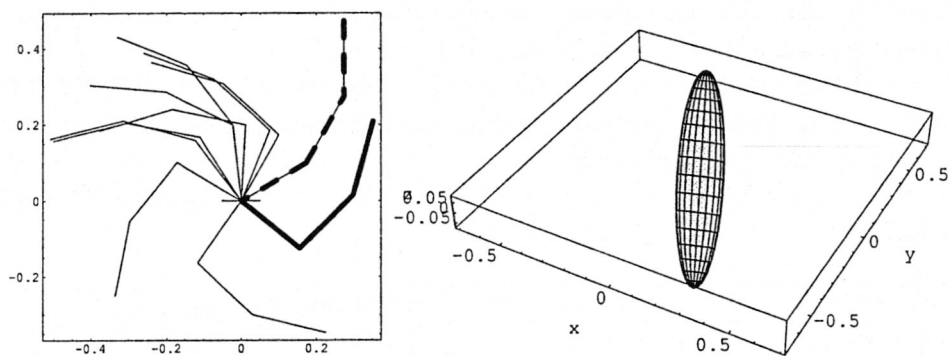
Tab. 8.1: Optymalne konfiguracje manipulatora mobilnego typu (0,nh) - planarny manipulator nieholonomiczny 3R.

Na rysunkach (8.1), (8.2) i (8.3) pokazano kolejne przejścia manipulatora nieholonomicznego z konfiguracji początkowych (pogrubiona linia przerywana) do zręcznych (pogrubiona linia ciągła) oraz odpowiadające konfiguracjom zręcznym elipsoidy manipulowalności obliczone według wzoru (5.2). Warto zwrócić uwagę na fakt, że w konfiguracji zręcznej kąt p_2 jest bliski wartości 90° , co oznacza, że konfiguracja manipulatora

nieholonomicznego jest daleka od osobliwej. Symulacje przeprowadzone dla stałych funkcji sterujących oraz różnych wartości parametru T dowodzą, że sterowanie u_2 zawsze wybierane jest z dolnego lub górnego ograniczenia. Można także zauważyć, że zręczna konfiguracja manipulatora nieholonomicznego jest zupełnie inna niż konfiguracja zręczna odpowiedniego manipulatora holonomicznego, w której x_1 jest dowolne, $x_2 = 315^\circ$, a $x_3 = 295^\circ$.



Rys. 8.1: Optymalna konfiguracja oraz elipsoida manipulowalności planarnego manipulatora nieholonomicznego typu 3R. $\tilde{\mathcal{X}} = R^2$. Współczynnik uwarunkowania $\tilde{\kappa}_{p_0,T}(c) = 26922.800$, wartości własne $\lambda_{M_{p_0,T}}(c) = \{0.430765, 0.003157, 0.000025\}$, dystorsja $\tilde{d}_{p_0,T}(c) = 0.434$.



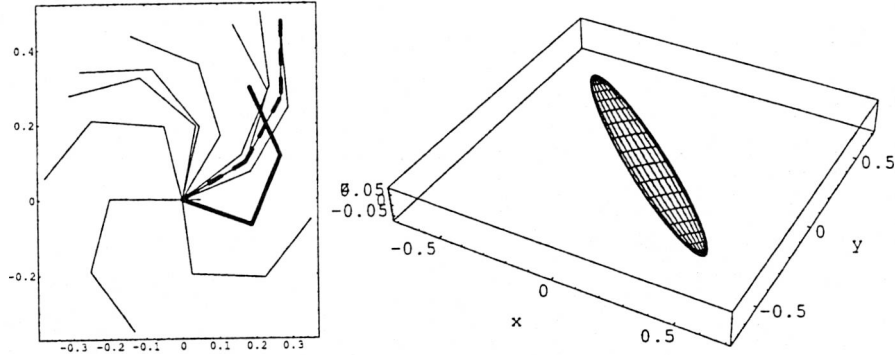
Rys. 8.2: Optymalna konfiguracja oraz elipsoida manipulowalności planarnego manipulatora nieholonomicznego typu 3R. $\tilde{\mathcal{X}} = R^6$. Współczynnik uwarunkowania $\tilde{\kappa}_{p_0,T}(c) = 38495.700$, wartości własne $\lambda_{M_{p_0,T}}(c) = \{0.461948, 0.009135, 0.000012\}$, dystorsja $\tilde{d}_{p_0,T}(c) = 0.471$.

8.1.2. Manipulator typu (nh,h): manipulator holonomiczny typu RTR na platformie dwukołowej

Rozpatrujemy manipulator mobilny przedstawiony na rysunku (7.1) i opisany równaniami (7.3), (7.4).

OPTYMALNA KONFIGURACJA

Dla ustalonych wartości parametrów geometrycznych $l = l_2 = 1, l_3 = 2, r = 0.5$, zadanych współrzędnych punktu zamontowania manipulatora na platformie $(d_x, d_y) = (1, 0)$, zadanej postury początkowej platformy $q_0 = (0, 0, 45^\circ, 45^\circ)$ oraz horyzontu czasowego $T = \pi$, wybieramy zmienne przegubowe manipulatora (x_1, x_2, x_3) oraz kolejno stałe funkcje sterujące platformy $(i = 1, 2; j = 0)$, zawierające pierwsze $(i = 1, 2;$



Rys. 8.3: Optymalna konfiguracja oraz elipsoida manipulowalności planarnego manipulatora nieholonomicznego typu 3R. $\tilde{\mathcal{X}} = R^{10}$. Współczynnik uwarunkowania $\tilde{\kappa}_{p_0,T}(c) = 9480.550$, wartości własne $\lambda_{M_{p_0,T}}(c) = \{0.360261, 0.007928, 0.000038\}$, dystorsja $\tilde{d}_{p_0,T}(c) = 0.368$.

$j = 0, 1, 2$) i drugie ($i = 1, 2; j = 0, 1, 2, 3, 4$) harmoniczne, tak by maksymalizować lokalną zręczność kinematyczną (5.11). Ograniczenia nałożone na konfiguracje dopuszczalne są następujące: $x_1, x_3 \in [0, 2\pi]$, $x_2 \in [0, x_{2max}]$, $|c_{ij}| \leq 3$. Uzyskane w ten sposób konfiguracje optymalne zostały zamieszczone w tabeli (8.2). Przez ε oznaczamy energię robota zużytą na osiągnięcie konfiguracji optymalnej. Okazuje się, że wartość jednego ze sterowań jest zawsze wybierana z ograniczenia.

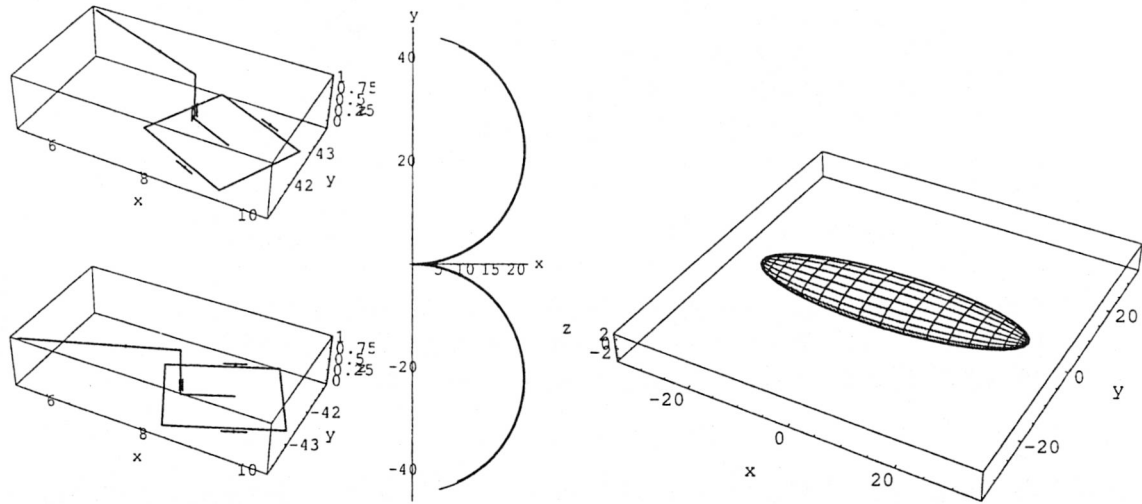
Rysunki (8.4) - (8.6) przedstawiają odpowiednie konfiguracje optymalne manipulatora mobilnego (jego

ograniczenia	optymalna konfiguracja (c, x)
$i = 1, 2,$ $j = 0$	$\{c_{10}, c_{20}, x_1, x_3\} = \{(2.39, 3.00, 5.69, 0.00), (3.00, 2.39, 0.59, 0.00)\}$ $\tilde{m}_{q_0,T}(c, x) = 460.63$ $\varepsilon = 46.22$
$i = 1, 2,$ $j = 0, 1, 2$	$\{c_{10}, c_{11}, c_{12}, c_{20}, c_{21}, c_{22}, x_1, x_3\} =$ $= \{(3.00, -1.38, -2.39, 3.00, -3.00, -3.00, 5.93, 0.00),$ $(3.00, -3.00, -3.00, 3.00, -1.38, -2.39, 0.36, 0.00)\}$ $\tilde{m}_{q_0,T}(c, x) = 669.89$ $\varepsilon = 96.79$
$i = 1, 2,$ $j = 0, 1, 2, 3, 4$	$\{c_{10}, c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{14}, c_{20}, c_{21}, c_{22}, c_{23}, c_{24}, x_1, x_3\} =$ $= \{(3.00, -1.10, -3.00, -3.00, 1.63, 3.00, -3.00, -3.00, -3.00, 3.00, 0.19, 0.00),$ $(3.00, -3.00, -3.00, -3.00, 3.00, 3.00, -1.10, -3.00, -3.00, 1.63, 6.09, 0.00)\}$ $\tilde{m}_{q_0,T}(c, x) = 954.76$ $\varepsilon = 147.45$

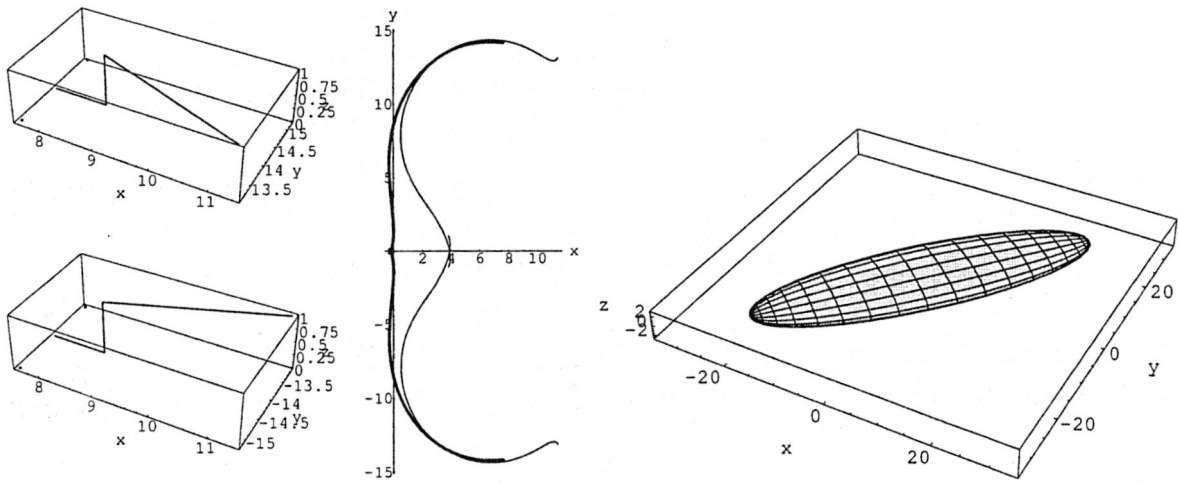
Tab. 8.2: Optymalna konfiguracja manipulatora mobilnego typu (nh,h) - manipulator holonomiczny typu RTR na platformie dwukołowej.

położenie końcowe, jak również trajektorie platformy i efektora wraz z odpowiadającymi im elipsoidami zręczności kinematycznej). W konfiguracji optymalnej ramię manipulatora jest wysunięte maksymalnie do przodu, a sam robot może poruszać się w jednym z dwóch dopuszczalnych kierunków. Kształt elipsoid zręczności kinematycznej dowodzi, że wraz z dodawaniem do funkcji sterujących kolejnych harmonicznych, wzrasta anizotropowość konfiguracji zręcznych rozważanego manipulatora mobilnego.

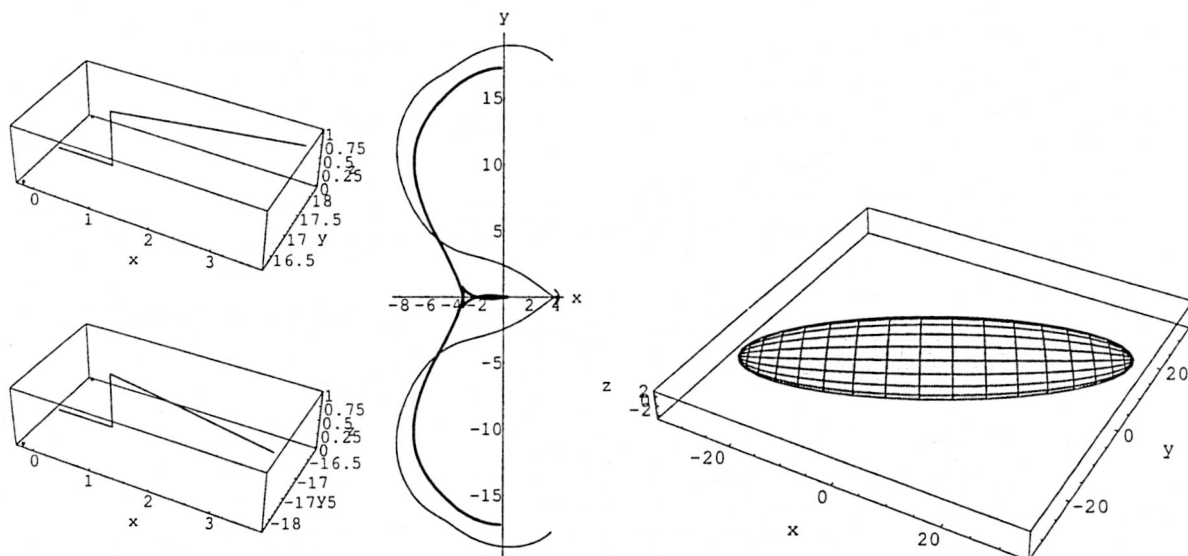
Wyniki zamieszczone w tabeli (8.3) wskazują, że dla przypadku stałych sterowań (u_1, u_2), istnieje pewna graniczna wartość horyzontu czasowego sterowania ($T = 1$), po przekroczeniu której manifestacja optymal-



Rys. 8.4: Optymalna konfiguracja manipulatora mobilnego typu (nh,h) - manipulator holonomiczny typu RTR na platformie dwukołowej (pogrubiona linia oznacza trajektorię platformy) oraz elipsoidę zręczności ($j = 0$). Współczynnik uwarunkowania $\tilde{\kappa}_{q_0,T}(c,x) = 145.11$, wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0,T}}(c,x) = \{728.46, 58.22, 5.02\}$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0,T}(c,x) = 791.70$.



Rys. 8.5: Optymalna konfiguracja manipulatora mobilnego typu (nh,h) - manipulator holonomiczny typu RTR na platformie dwukołowej (pogrubiona linia oznacza trajektorię platformy) oraz elipsoidę zręczności ($j = 0, 1, 2$). Współczynnik uwarunkowania $\tilde{\kappa}_{q_0,T}(c,x) = 214.31$, wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0,T}}(c,x) = \{1075.84, 83.36, 5.02\}$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0,T}(c,x) = 1164.22$.



Rys. 8.6: Optymalna konfiguracja manipulatora mobilnego typu (nh,h) - manipulator holonomiczny typu RTR na platformie dwukołowej (pogrubiona linia oznacza trajektorię platformy) oraz elipsoidę zręczności ($j = 0, 1, 2, 3, 4$). Współczynnik uwarunkowania $\tilde{\kappa}_{q_0,T}(c, x) = 244.45$, wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0,T}}(c, x) = \{1227.10, 148.60, 5.03\}$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0,T}(c, x) = 1380.72$.

nej konfiguracji endogenicznej manipulatora mobilnego zmienia się z jazdy po prostej w ruch po okręgu. Ponadto okazuje się, że konfiguracja osobliwa potrójnego wahadła ($x_3 = 0$), po jego zamontowaniu na platformie mobilnej, przestaje być konfiguracją osobliwą, a staje się jego konfiguracją zręczną. Szczegółowe symulacje potwierdzają, że wyniki uzyskane przy różnych ograniczeniach nałożonych na funkcje sterujące ($u_1(\cdot), u_2(\cdot)$) mają podobny charakter.

ograniczenia	optymalna konfiguracja (c, x)
$T = 0.3$	$\{c_{10}, c_{20}, x_1, x_3\} = \{(3.00, 3.00, 1.41, 0.00), (3.00, 3.00, 4.87, 0.00)\}$ $\tilde{m}_{q_0,T}(c, x) = 10.85$
$T = 1$	$\{c_{10}, c_{20}, x_1, x_3\} = \{(3.00, 3.00, 1.45, 0.00), (3.00, 3.00, 4.83, 0.00)\}$ $\tilde{m}_{q_0,T}(c, x) = 51.57$
$T = 1.5$	$\{c_{10}, c_{20}, x_1, x_3\} = \{(3.00, 2.90, 1.41, 0.00), (2.90, 3.00, 4.87, 0.00)\}$ $\tilde{m}_{q_0,T}(c, x) = 97.40$
$T = 2$	$\{c_{10}, c_{20}, x_1, x_3\} = \{(3.00, 2.48, 1.05, 0.00), (2.48, 3.00, 5.23, 0.00)\}$ $\tilde{m}_{q_0,T}(c, x) = 165.74$

Tab. 8.3: Optymalna konfiguracja manipulatora mobilnego typu (nh,h) - manipulator holonomiczny typu RTR na platformie dwukołowej ($j = 0$).

OPTYMALNA GEOMETRIA

W kolejnym kroku rozwiążemy przykładowe zadanie projektowania optymalnej geometrii rozważanego manipulatora mobilnego. W tym celu będziemy poszukiwać współrzędnych (d_x, d_y) punktu zamontowania manipulatora RTR na platformie dwukołowej i długości ramion manipulatora (l_2, l_3), tak by maksymalizować globalną zręczność kinematyczną (5.12). Zadanie to rozwiążemy dla ustalonych pozostałych

parametrów geometrycznych $l = 1$, $r = 0.5$, zadanej postury początkowej platformy $q_0 = (0, 0, 45^\circ, 45^\circ)$ i horyzontu czasowego sterowania $T = \pi$ oraz ograniczonych ($|c_{ij}| \leq 1$) funkcji sterujących zawierających pierwsze harmoniczne ($i = 1, 2$; $j = 0, 1, 2$). Wyniki otrzymane dla różnych ograniczeń nałożonych na zmienne decyzyjne (d_x, d_y, l_2, l_3) , zawiera tabela (8.4).

ograniczenia	optymalna geometria	global zręczność
$l_2 + l_3 = 8$, $l_2 \geq 0, l_3 \geq 0$, $-1 \leq d_x \leq 1$, $-3 \leq d_y \leq 3$.	$l_2 = 0, l_3 = 8$, $(d_x, d_y) = \{(-1, -3), (-1, 3), (1, -3), (1, 3)\}$	$\tilde{\mathcal{M}}_{q_0, T}(K_{q_0, T}) = 181.41$
$l_2 + l_3 = 8$, $l_2 \geq 0, l_3 \geq 0$, $-1 \leq d_x \leq 1$, $-6 \leq d_y \leq 3$.	$l_2 = 0, l_3 = 8$, $(d_x, d_y) = \{(1, -6), (-1, -6)\}$	$\tilde{\mathcal{M}}_{q_0, T}(K_{q_0, T}) = 276.89$
$l_2 + l_3 = 8$, $l_2 \geq 0, l_3 \geq 0$, $-0.5 \leq d_x \leq 1$, $-3 \leq d_y \leq 3$.	$l_2 = 0, l_3 = 8$, $(d_x, d_y) = \{(1, -3), (1, 3)\}$	$\tilde{\mathcal{M}}_{q_0, T}(K_{q_0, T}) = 181.41$
$0 \leq l_2 \leq 5$, $0 \leq l_3 \leq 3$, $-1 \leq d_x \leq 1$, $-3 \leq d_y \leq 3$.	$l_2 = 5, l_3 = 3$, $(d_x, d_y) = \{(-1, -3), (-1, 3), (1, -3), (1, 3)\}$	$\tilde{\mathcal{M}}_{q_0, T}^1(K_{q_0, T}) = 66.99$

Tab. 8.4: Optymalna geometria manipulatora mobilnego typu (nh,h) - manipulator holonomiczny typu RTR na platformie dwukołowej.

Jak się okazuje, optymalny punkt umieszczenia manipulatora na platformie leży zawsze w wierzchołkach platformy, czyli w miejscach najbardziej oddalonych od jej środka. Przy równościowym ograniczeniu nałożonym na całkowitą długość ramion manipulatora, optymalna geometria wymaga, by długość ramienia l_3 była maksymalna (co odpowiada optymalnej geometrii manipulatora stacjonarnego typu RTR). Szczegółowe wyniki optymalizacji geometrii planarnego manipulatora holonomicznego typu 2R zamontowanego na monocyklu zawiera praca [74].

8.1.3. Manipulator typu (nh,h): planarny manipulator holonomiczny typu 3R na samochodzie kinematycznym

Kinematykę rozpatrywanego manipulatora mobilnego opisują równania (7.7), (7.8).

OPTYMALNA KONFIGURACJA

Podobnie jak poprzednio, ustalamy parametry geometryczne manipulatora: $l = 1$, $l_1 = l_2 = l_3 = 0.2$, $l_0 = 1$ i posturę początkową platformy mobilnej $q_0 = (0, 0, 0, 0)$. Poszukiwać będziemy stałych ($i = 1, 2, j = 0$) i ograniczonych ($|c_{i,j}| \leq 3$) funkcji sterujących ($u_1(\cdot)$, $u_2(\cdot)$) oraz ograniczonych zmiennych przegubowych ($(x_1, x_2, x_3) \in [0, 2\pi]$), które maksymalizują lokalną zręczność kinematyczną. Rezultaty obliczeń zamieszczono w tabeli (8.5).

Rysunek (8.7) przedstawia konfigurację optymalną manipulatora (trajektorię platformy oraz posturę manipulatora mobilnego) oraz odpowiadającą jej elipsoidę zręczności kinematycznej, uzyskane dla horyzontu czasowego $T = \pi$. Wyniki wskazują, że w konfiguracji optymalnej manipulator jest wysunięty maksymalnie w kierunku poruszania się platformy mobilnej (taka postura manipulatora 3R odpowiada jego konfiguracji

ograniczenia	optymalna konfiguracja (c, x)
$T = \pi$	$\{c_{10}, c_{20}\} = \{3, \pm 0.144\}$ $\{q_1, q_2, q_3, q_4\} = \{5.935, 4.550, 120^\circ, 25^\circ\}$ $\{x_1, x_2, x_3\} = \{0^\circ, 0^\circ, 0^\circ\}$ $\tilde{m}_{q_0, p_0, T}(c, x) = 127.056$
$T = 3\pi$	$\{c_{10}, c_{20}\} = \{3, \pm 0.019\}$ $\{q_1, q_2, q_3, q_4\} = \{14.534, 14.825, 147^\circ, 10^\circ\}$ $\{x_1, x_2, x_3\} = \{0^\circ, 0^\circ, 0^\circ\}$ $\tilde{m}_{q_0, p_0, T}(c, x) = 24652$
$T = 5\pi$	$\{c_{10}, c_{20}\} = \{3, \pm 0.007\}$ $\{q_1, q_2, q_3, q_4\} = \{23.498, 24.821, 150^\circ, 6^\circ\}$ $\{x_1, x_2, x_3\} = \{0^\circ, 0^\circ, 0^\circ\}$ $\tilde{m}_{q_0, p_0, T}(c, x) = 304430$

Tab. 8.5: Optymalna konfiguracja manipulatora mobilnego typu (nh,h) - planarny manipulator holonomiczny typu 3R na samochodzie kinematycznym

osobliwej). W miarę dodawania do funkcji sterujących samochodu coraz wyższych harmoniczných, rośnie anizotropowość uzyskanych konfiguracji.

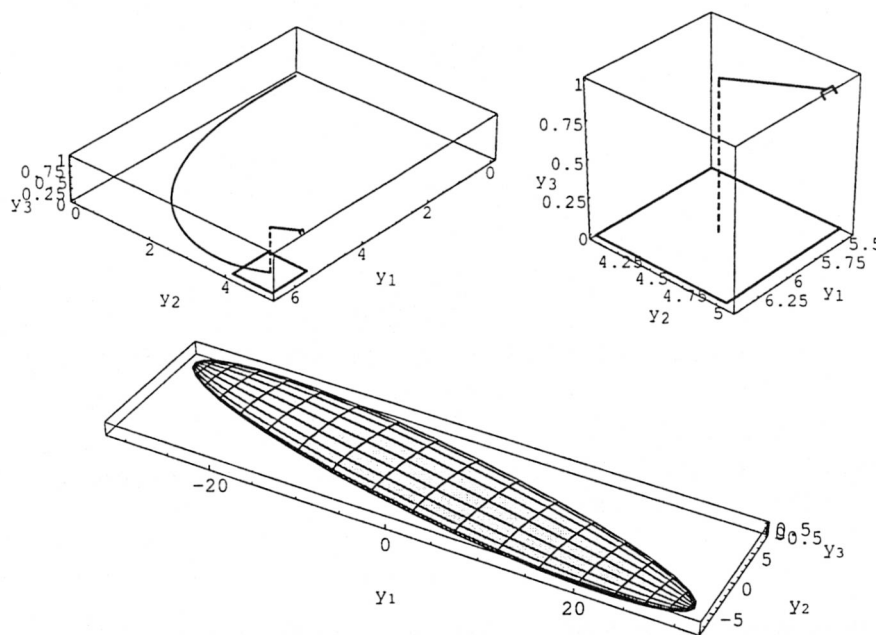
8.1.4. Manipulator typu (nh,nh): planarny manipulator nieholonomiczny typu 3R na samochodzie kinematycznym

Rozważmy manipulator mobilny różniący się od poprzedniego typem manipulatora pokładowego (nh) (rysunek 7.4). Jego kinematykę definiują zależności (7.11) i (7.12).

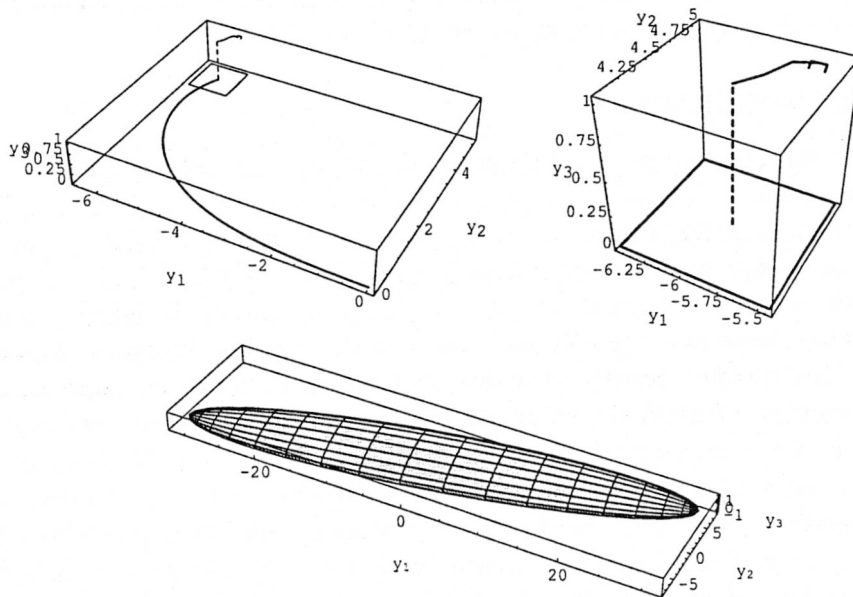
OPTYMALNA KONFIGURACJA

Parametry geometryczne, posturę początkową samochodu oraz ograniczenia na funkcje sterujące samochodem ustalamy jak poprzednio: $l = 1$, $l_0 = 1$, $l_1 = l_2 = l_3 = 0.2$, $q_0 = (0, 0, 0, 0)$, $|c_{ij}^k| \leq 3$. Dodatkowo przyjmujemy wartości współczynników $a_2 = a_3 = 0.1$ oraz posturę początkową manipulatora $p_0 = (30^\circ, 30^\circ, 30^\circ)$. Pod uwagę bierzemy stałe funkcje sterujące ($k = 1, 2; i = 1, 2; j = 0$) oraz funkcje zawierające pierwsze harmoniczne ($k = 1, 2; i = 1, 2, j = 0, 1, 2$). Rezultaty odpowiednich badań zawiera tabela (8.6). Zmienne ε , ε_p oraz ε_m oznaczają odpowiednio energię całkowitą (ε) zużytą na osiągnięcie danej konfiguracji zręcznej, składającą się z energii platformy (ε_p) oraz energii manipulatora (ε_m) nieholonomicznego. Okazuje się, że optymalna konfiguracja samochodu przypomina konfigurację optymalną uzyskaną we wcześniejszym paragrafie (patrz tab. (8.5) i (8.6)), z tą jednak różnicą, że teraz platforma mobilna porusza się w przeciwnym kierunku. Dopiero dla $T = 5\pi$ optymalne trajektorie obu manipulatorów mobilnych pokrywają się. Energia wykorzystana na osiągnięcie konfiguracji zręcznej w przypadku stałych sterowań jest rozłożona równomiernie pomiędzy platformę, a manipulator, natomiast dodanie pierwszych harmoniczných przyczynia się do wzrostu zużycia energii manipulatora.

Rysunki (8.8) i (8.9) obrazują konfiguracje zręczne (trajektorię samochodu kinematycznego oraz posturę końcową manipulatora) wraz z odpowiadającymi im elipsoidami zręczności kinematycznej, uzyskane dla horyzontu czasowego $T = \pi$. Anizotropowość konfiguracji rośnie wraz z dodawaniem do funkcji sterujących harmoniczných. Warto zauważyć, że po zamontowaniu stacjonarnego manipulatora nieholonomicznego na platformie mobilnej, jego konfiguracja osobliwa staje się jedną z konfiguracji zręcznych.



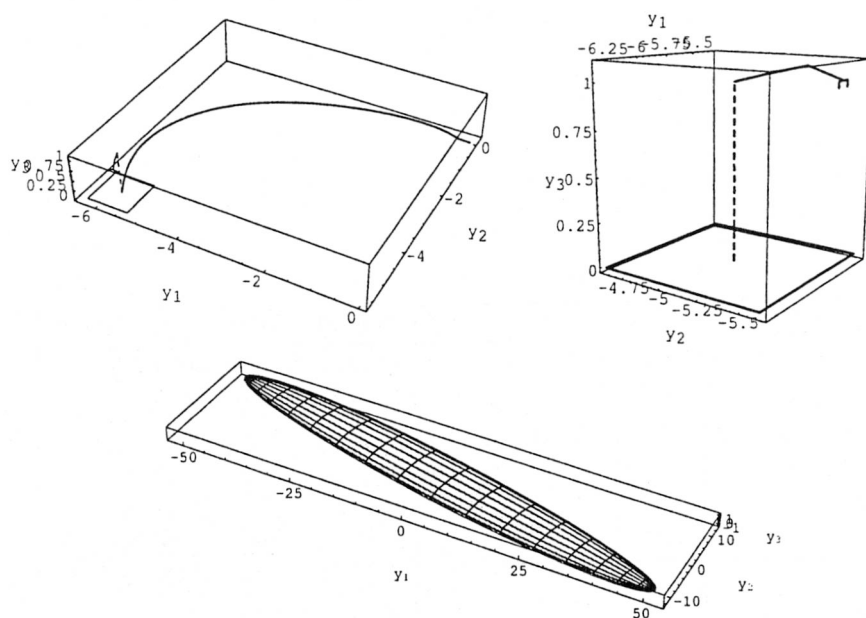
Rys. 8.7: a) Optymalna konfiguracja manipulatora mobilnego typu (nh,h) - planarny manipulator holonomiczny typu 3R na samochodzie kinematycznym ($\tilde{\mathcal{X}} = R^2$); b) Elipsoida zręczności. Współczynnik uwarunkowania $\tilde{\kappa}_{q_0,T}(c,x) = 1768.50$, wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0,T}}(c,x) = \{990.36, 29.05, 0.56\}$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0,T}(c,x) = 1019.97$.



Rys. 8.8: a) Optymalna konfiguracja manipulatora mobilnego typu (nh,nh) ($\tilde{\mathcal{X}} = R^4$) - planarny manipulator nieholonomiczny typu 3R na samochodzie kinematycznym; b) Elipsoida zręczności. Współczynnik uwarunkowania $\tilde{\kappa}_{q_0,p_0,T}(c^1,c^2) = 631.58$, wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0,p_0,T}}(c^1,c^2) = \{985.27, 28.99, 1.56\}$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0,p_0,T}(c^1,c^2) = 1015.82$.

ograniczenia	optymalna konfiguracja (c^1, c^2)
$T = \pi$ $k = 1, 2$ $i = 1, 2, j = 0$ $\tilde{\mathcal{X}} = R^4$	$\{c_{10}^1, c_{20}^1\} = \{-3, \pm 0.144\}$ $\{c_{10}^2, c_{20}^2\} = \{0.839, -3\}$ $\{q_1, q_2, q_3, q_4\} = \{-5.935, \pm 4.550, \mp 120^\circ, \pm 25^\circ\}$ $\{p_1, p_2, p_3\} = \{180^\circ, -8^\circ, 24^\circ\}$ $\tilde{m}_{q_0, p_0, T}(c^1, c^2) = 211.134$ $(\varepsilon, \varepsilon_p, \varepsilon_m) = (58.824, 28.339, 30.484)$
$T = 3\pi$ $k = 1, 2$ $i = 1, 2, j = 0$ $\tilde{\mathcal{X}} = R^4$	$\{c_{10}^1, c_{20}^1\} = \{-3, \pm 0.019\}$ $\{c_{10}^2, c_{20}^2\} = \{0.379, -3\}$ $\{q_1, q_2, q_3, q_4\} = \{-14.534, \pm 14.825, \mp 147^\circ, \pm 10^\circ\}$ $\{p_1, p_2, p_3\} = \{235^\circ, -35^\circ, -36^\circ\}$ $\tilde{m}_{q_0, p_0, T}(c^1, c^2) = 95367$ $(\varepsilon, \varepsilon_p, \varepsilon_m) = (171.003, 84.826, 86.177)$
$T = 5\pi$ $k = 1, 2$ $i = 1, 2, j = 0$ $\tilde{\mathcal{X}} = R^4$	$\{c_{10}^1, c_{20}^1\} = \{3, \pm 0.007\}$ $\{c_{10}^2, c_{20}^2\} = \{-0.048, 3\}$ $\{q_1, q_2, q_3, q_4\} = \{23.498, \pm 24.821, \pm 150^\circ, \pm 6^\circ\}$ $\{p_1, p_2, p_3\} = \{-14^\circ, 67^\circ, 262^\circ\}$ $\tilde{m}_{q_0, p_0, T}(c^1, c^2) = 2053700$ $(\varepsilon, \varepsilon_p, \varepsilon_m) = (282.781, 141.372, 141.408)$
$T = \pi$ $k = 1, 2$ $i = 1, 2, j = 0, 1, 2$ $\tilde{\mathcal{X}} = R^{12}$	$\{c_{10}^1, c_{11}^1, c_{12}^1, c_{20}^1, c_{21}^1, c_{22}^1\} = \{3, -3, -3, \pm 1.114, \pm 1.268, \pm 0.978\}$ $\{c_{10}^2, c_{11}^2, c_{12}^2, c_{20}^2, c_{21}^2, c_{22}^2\} = \{2.757, 2.687, -1.544, -3, 3, -3\}$ $\{q_1, q_2, q_3, q_4\} = \{-5.812, \mp 5.102, \pm 118^\circ, \pm 200^\circ\}$ $\{p_1, p_2, p_3\} = \{166^\circ, 1^\circ, 34^\circ\}$ $\tilde{m}_{q_0, p_0, T}(c^1, c^2) = 502.394$ $(\varepsilon, \varepsilon_p, \varepsilon_m) = (159.986, 64.475, 95.511)$

Tab. 8.6: Konfiguracje optymalne manipulatora mobilnego typu (nh,nh) - planarny manipulator nieholonomiczny typu 3R na samochodzie kinematycznym



Rys. 8.9: a) Optymalna konfiguracja manipulatora mobilnego typu (nh,nh) ($\tilde{\mathcal{X}} = R^{12}$) - planarny manipulator nieholonomiczny typu 3R na samochodzie kinematycznym; b) Elipsoida zręczności. Współczynnik uwarunkowania $\tilde{\kappa}_{q_0,p_0,T}(c^1, c^2) = 1216.39$, wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0,p_0,T}}(c^1, c^2) = \{2761.21, 40.34, 2.27\}$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0,p_0,T}(c^1, c^2) = 2803.82$.

8.1.5. Manipulator typu (nh,nh): planarny manipulator nieholonomiczny typu 3R na monocyklu

Na zakończenie zajmiemy się manipulatorem podwójnie nieholonomicznym, którego kinematyka jest opisana wzorami (7.15), (7.16).

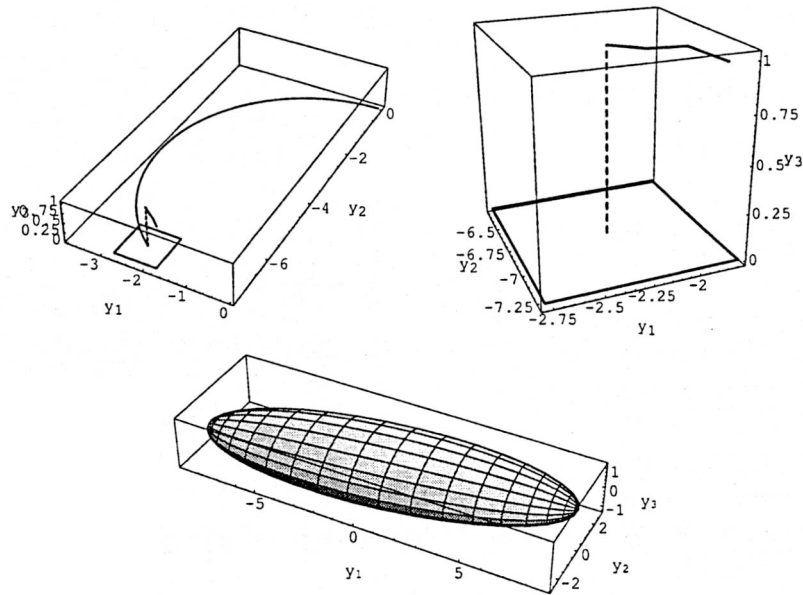
OPTYMALNA KONFIGURACJA

W celu wyznaczenia zręcznych konfiguracji manipulatora, ustalamy wartości jego parametrów geometrycznych $l_1 = l_2 = l_3 = 0.2$, $d = 0$, $l_0 = 1$, współczynników $a_2 = a_3 = 0.1$ oraz postury początkowej $q_0 = (0, 0, 0)$, $p_0 = (30^\circ, 30^\circ, 30^\circ)$. Poszukujemy optymalnych wartości stałych i ograniczonych funkcji sterujących monocykła ($k = 1; i = 1, 2; j = 0; |c_{ij}^k| \leq 3$) oraz manipulatora nieholonomicznego ($k = 2; i = 1, 2; j = 0; |c_{ij}^k| \leq 3$). Uzyskane wyniki przedstawia tabela (8.7).

W efekcie, dla różnych wartości horyzontu sterowania T uzyskujemy różne optymalne trajektorie platformy mobilnej, natomiast tę samą konfigurację zręczną manipulatora nieholonomicznego (porównaj tab. (8.6) i (8.7)). Rysunek (8.10) przedstawia zręczną konfigurację (trajektorię monocykła oraz posturę manipulatora), a także odpowiadającą jej elipsoidę zręczności kinematycznej, dla czasu $T = \pi$. Dodatkowe obliczenia dowodzą, że wraz ze wzrostem horyzontu czasowego sterowania T wzrasta anizotropowość konfiguracji zręcznych.

ograniczenia	optymalna konfiguracja (c^1, c^2)
$T = \pi$	$\{c_{10}^1, c_{20}^1, c_{10}^2, c_{20}^2\} = \{-3, \pm 0.794, 0.839, -3\}$ $\{q_1, q_2, q_3, q_4\} = \{-2.283, \mp 6.793, \pm 143^\circ\}$ $\{p_1, p_2, p_3\} = \{180^\circ, -8^\circ, 24^\circ\}$ $\tilde{m}_{q_0, p_0, T}(c^1, c^2) = 28.706$ $(\varepsilon, \varepsilon_p, \varepsilon_m) = (60.743, 30.253, 30.490)$
$T = 2\pi$	$\{c_{10}^1, c_{20}^1, c_{10}^2, c_{20}^2\} = \{-3, \pm 0.452, 0.501, -3\}$ $\{q_1, q_2, q_3, q_4\} = \{-1.976, \mp 12.976, \pm 163^\circ\}$ $\{p_1, p_2, p_3\} = \{211^\circ, -29^\circ, -1^\circ\}$ $\tilde{m}_{q_0, p_0, T}(c^1, c^2) = 328.770$ $(\varepsilon, \varepsilon_p, \varepsilon_m) = (115.959, 57.832, 58.128)$
$T = 3\pi$	$\{c_{10}^1, c_{20}^1, c_{10}^2, c_{20}^2\} = \{-3, \pm 0.309, 0.379, -3\}$ $\{q_1, q_2, q_3, q_4\} = \{-2.159, \mp 19.143, \pm 167^\circ\}$ $\{p_1, p_2, p_3\} = \{235^\circ, -35^\circ, -36^\circ\}$ $\tilde{m}_{q_0, p_0, T}(c^1, c^2) = 1420$ $(\varepsilon, \varepsilon_p, \varepsilon_m) = (171.904, 85.726, 86.178)$
$T = 5\pi$	$\{c_{10}^1, c_{20}^1, c_{10}^2, c_{20}^2\} = \{-3, \pm 0.192, -0.049, 3\}$ $\{q_1, q_2, q_3, q_4\} = \{-1.908, \mp 31.101, \pm 173^\circ\}$ $\{p_1, p_2, p_3\} = \{-14^\circ, 67^\circ, 262^\circ\}$ $\tilde{m}_{q_0, p_0, T}(c^1, c^2) = 10422$ $(\varepsilon, \varepsilon_p, \varepsilon_m) = (283.361, 141.952, 141.409)$

Tab. 8.7: Konfiguracje optymalne manipulatora mobilnego typu (nh,nh) - planarny manipulator nieholonomiczny typu 3R na monocyklu



Rys. 8.10: a) Optymalna konfiguracja manipulatora mobilnego typu (nh,nh) ($\tilde{\mathcal{X}} = R^4$) - planarny manipulator nieholonomiczny typu 3R na monocyklu; b) Elipsoida zręczności. Współczynnik uwarunkowania $\tilde{\kappa}_{q_0, p_0, T}(c^1, c^2) = 48.3077$, wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0, p_0, T}}(c^1, c^2) = \{75.36, 7.02, 1.56\}$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0, p_0, T}(c^1, c^2) = 83.94$.

8.2. Izotropowość

8.2.1. Manipulator typu (0,nh): planarny manipulator nieholonomiczny typu 3R

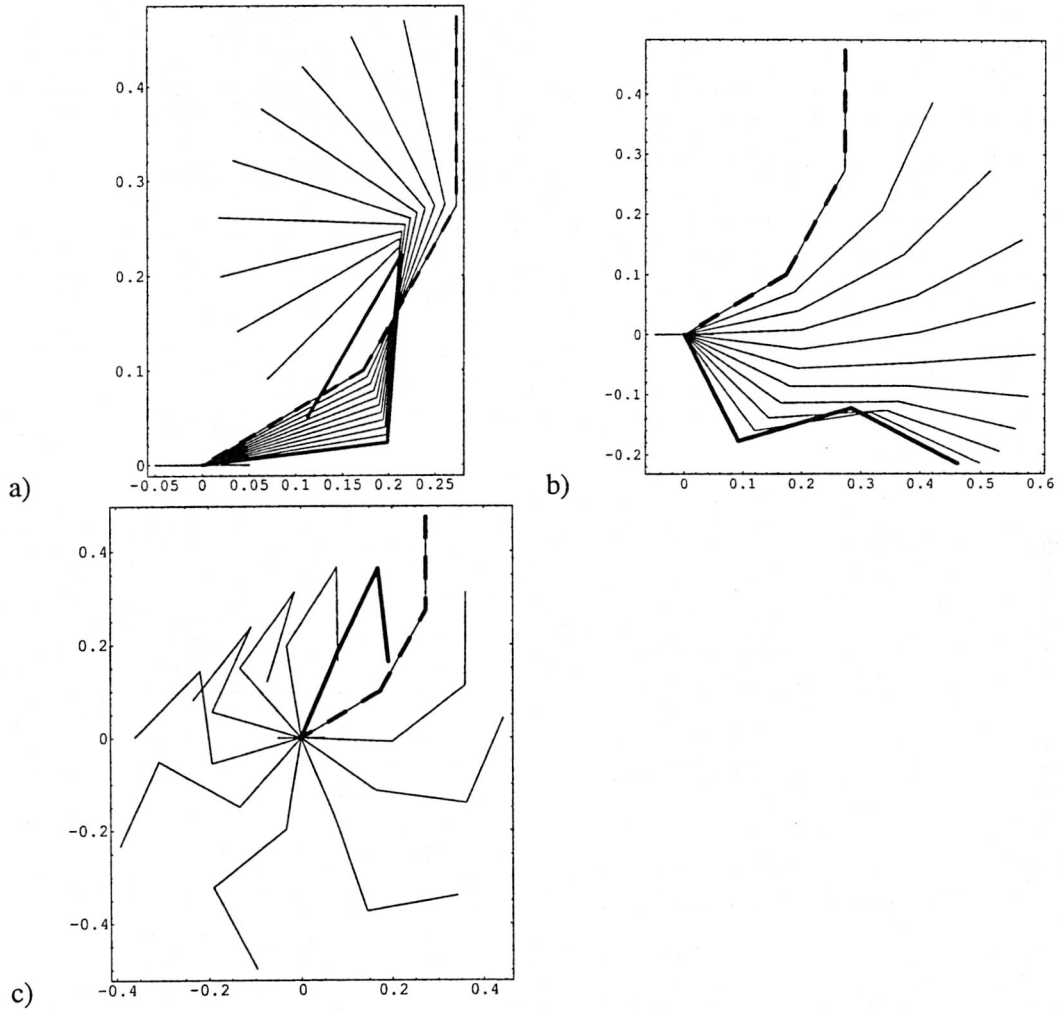
Równania kinematyki rozważanego manipulatora nieholonomicznego są dane zależnościami (7.1) i (7.2). Konfiguracji izotropowych manipulatora poszukujemy dla zadanych współczynników $a_2 = a_3 = 0.1$, długości ramion $l_1 = l_2 = l_3 = 0.2$ oraz ustalonej postury początkowej $p_0 = (30^\circ, 30^\circ, 30^\circ)$. W tym celu minimalizujemy funkcję daną zależnością (5.5). Niestety, zadanie znalezienia konfiguracji izotropowych w trójwymiarowej przestrzeni zadaniowej $y = (y_1, y_2, y_3)$ nie powiodło się. Dopiero zredukowanie przestrzeni zadaniowej do dwuwymiarowej $y = (y_1, y_2)$, pozwala rozwiązać przedstawiony problem. Przyczyną takiego zachowania jest niewspółmierność składowych funkcji wyjścia rozważanego manipulatora, które pierwsze dwie składowe określają położenie manipulatora na płaszczyźnie, natomiast trzecia składowa - jego orientację. Zatem, charakter dwóch pierwszych składowych w porównaniu z charakterem trzeciej składowej jest istotnie różny. W takim przypadku, wyznaczenie postury $p = (p_1, p_2, p_3)$ zapewniającej uzyskanie jednakowych wartości dla wszystkich trzech składowych wydaje się niemożliwe. W tabeli (8.8) zostały zamieszczone wyniki uzyskane dla przypadku dwuwymiarowej przestrzeni zadaniowej przy różnych wartościach horyzontu czasowego T oraz stałych funkcjach sterujących. Znalezione konfiguracje endogeniczne nazywamy subizotropowymi.

ograniczenia	konfiguracje subizotropowe (c)
$T = 3\pi, c_{ij} \leq 3$ $i = 1, 2, j = 0$	$\{c_{10}, c_{20}\} = \{-0.043, 2.896\}$ $\{p_1, p_2, p_3\} = \{6^\circ, 78^\circ, 153^\circ\}$
	$\{c_{10}, c_{20}\} = \{0.149, 2.918\}$ $\{p_1, p_2, p_3\} = \{110^\circ, 166^\circ, 70^\circ\}$
$T = 5\pi, c_{ij} \leq 3 \quad i = 1, 2, j = 0$	$\{c_{10}, c_{20}\} = \{-0.026, 1.738\}$ $\{p_1, p_2, p_3\} = \{6^\circ, 78^\circ, 153^\circ\}$
	$\{c_{10}, c_{20}\} = \{0.090, 1.751\}$ $\{p_1, p_2, p_3\} = \{110^\circ, 166^\circ, 70^\circ\}$
	$\{c_{10}, c_{20}\} = \{-0.103, -2.146\}$ $\{p_1, p_2, p_3\} = \{-62^\circ, 78^\circ, -43^\circ\}$
$T = 10\pi, c_{ij} \leq 3$ $i = 1, 2, j = 0$	$\{c_{10}, c_{20}\} = \{-0.013, 0.869\}$ $\{p_1, p_2, p_3\} = \{6^\circ, 78^\circ, 153^\circ\}$
	$\{c_{10}, c_{20}\} = \{0.045, 0.875\}$ $\{p_1, p_2, p_3\} = \{110^\circ, 166^\circ, 70^\circ\}$
	$\{c_{10}, c_{20}\} = \{-0.051, -1.073\}$ $\{p_1, p_2, p_3\} = \{-62^\circ, 78^\circ, -43^\circ\}$
	$\{c_{10}, c_{20}\} = \{-0.179, 2.206\}$ $\{p_1, p_2, p_3\} = \{-292^\circ, -2^\circ, 212^\circ\}$

Tab. 8.8: Konfiguracje subizotropowe manipulatora mobilnego typu (0,nh) - planarny manipulator nieholonomiczny typu 3R ($\mathcal{X} = R^2$).

Przy wcześniej przyjętej posturze początkowej $p_0 = (30^\circ, 30^\circ, 30^\circ)$, konfiguracje subizotropowe znajdujemy dopiero dla $T \geq 3\pi$. Jednak jej zmiana (np. $p_0 = (90^\circ, 90^\circ, 90^\circ)$) powoduje, że potrafimy znaleźć konfiguracje subizotropowe nawet dla $T = \pi$. Dzieje się tak dlatego, bo nowa konfiguracja początkowa jest bliższa subizotropowej, w związku z czym manipulator potrzebuje mniej czasu na przejście pomiędzy nimi. Ponadto, jak się okazuje, dla różnych horyzontów czasowych otrzymujemy te same konfiguracje

subizotropowe. Powiększenie czasu T powoduje, że do wcześniej uzyskanych konfiguracji dochodzą nowe. Kilka z nich pokazano na rysunku (8.11). Pogrubioną linią przerywaną zaznaczono konfigurację początkową, natomiast pogrubioną linią ciągłą - konfigurację subizotropową manipulatora. Konfiguracje pośrednie zaznaczono cienką linią.

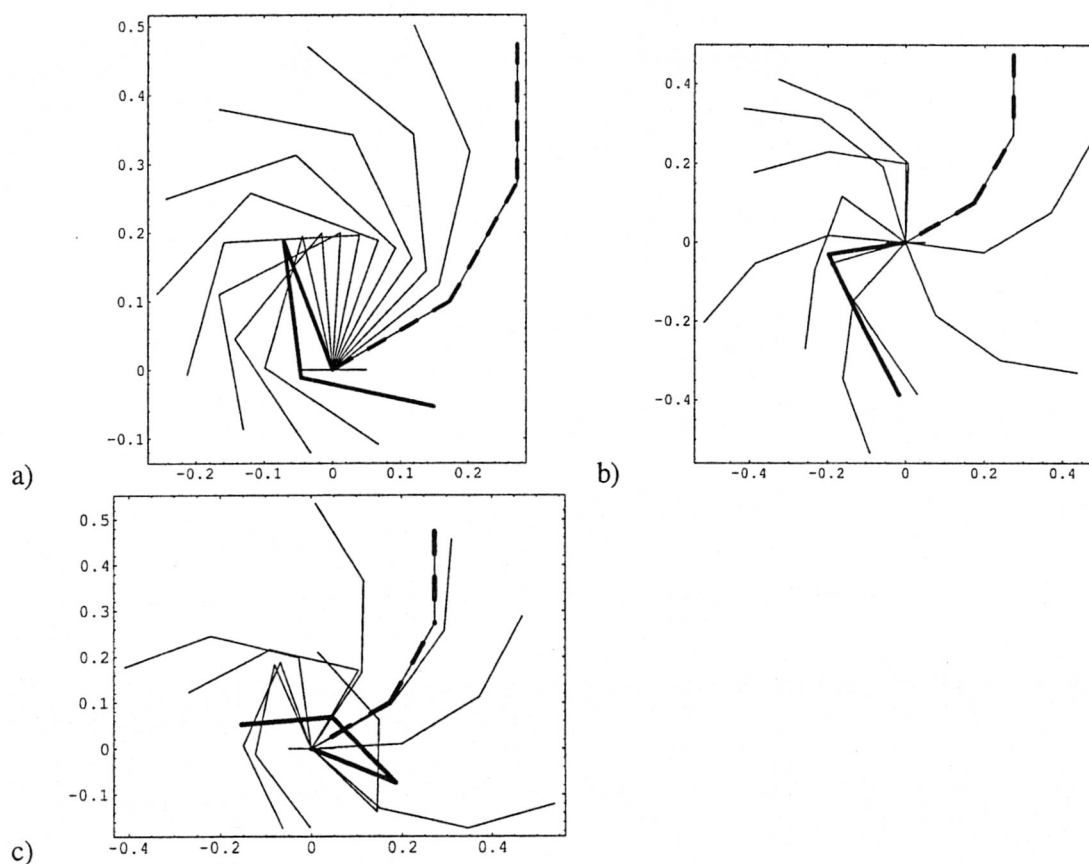


Rys. 8.11: Przykładowe konfiguracje subizotropowe manipulatora nieholonomicznego ($\tilde{\mathcal{X}} = R^2$): a) $T = 3\pi$: wartości własne $\lambda_{M_{p_0,T}}(c) = (0.06, 0.06)$, dystorsja $\tilde{d}_{p_0,T}(c) = 0.12$, manipulowalność $\tilde{m}_{p_0,T}(c) = 0.06$; b) $T = 5\pi$: wartości własne $\lambda_{M_{p_0,T}}(c) = (0.63, 0.63)$, dystorsja $\tilde{d}_{p_0,T}(c) = 1.26$, manipulowalność $\tilde{m}_{p_0,T}(c) = 0.63$; c) $T = 10\pi$: wartości własne $\lambda_{M_{p_0,T}}(c) = (0.45, 0.45)$, dystorsja $\tilde{d}_{p_0,T}(c) = 0.90$, manipulowalność $\tilde{m}_{p_0,T}(c) = 0.45$.

W tabeli (8.9) podano wyniki uzyskane przy ustalonej wartości horyzontu czasowego sterowania $T = 3\pi$, ograniczeniu $|c_{ij}| \leq 3$ na parametry funkcji sterujących stałych, a także zawierających pierwsze i drugie harmoniczne. Rysunek (8.12) przedstawia konfiguracje subizotropowe zebrane w tabeli (8.9). Jak się okazuje, żadna z nich nie jest konfiguracją subizotropową odpowiedniego manipulatora holonomicznego (x_1 - dowolne, $x_2 = 60^\circ$, $x_3 = 120^\circ$).

ograniczenia	konfiguracje subizotropowe (c)
$i = 1, 2,$ $j = 0$	$\{c_{10}, c_{20}\} = \{0.149, 2.918\}$ $\{p_1, p_2, p_3\} = \{110^\circ, 166^\circ, 70^\circ\}$ $\tilde{\kappa}_{p_0, T}(c) = 1$
$i = 1, 2,$ $j = 0, 1, 2$	$\{c_{10}, c_{11}, c_{12}, c_{20}, c_{21}, c_{22}\} = \{-1.706, -2.760, 0.793, 1.914, -3.000, -3.000\}$ $\{p_1, p_2, p_3\} = \{192^\circ, 107^\circ, 1^\circ\}$ $\tilde{\kappa}_{p_0, T}(c) = 1$
$i = 1, 2,$ $j = 0, 1, 2, 3, 4$	$\{c_{10}, c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{14}\} = \{-0.763, -2.597, -2.601, -2.796, -2.175\}$ $\{c_{20}, c_{21}, c_{22}, c_{23}, c_{24}\} = \{2.915, -2.928, -3.000, -0.861, 1.980\}$ $\{p_1, p_2, p_3\} = \{340^\circ, 156^\circ, 50^\circ\}$ $\tilde{\kappa}_{p_0, T}(c) = 1$

Tab. 8.9: Konfiguracje subizotropowe manipulatora typu (0,nh) - planarny manipulator nieholonomiczny typu 3R ($T = 3\pi$).



Rys. 8.12: Konfiguracje subizotropowe manipulatora nieholonomicznego dla $T = 3\pi$: a) $\tilde{\mathcal{X}} = R^2$: wartości własne $\lambda_{M_{p_0, T}}(c) = (0.05, 0.05)$, dystorsja $\tilde{d}_{p_0, T}(c) = 0.10$, manipulowalność $\tilde{m}_{p_0, T}(c) = 0.05$; b) $\tilde{\mathcal{X}} = R^6$: wartości własne $\lambda_{M_{p_0, T}}(c) = (0.35, 0.35)$, dystorsja $\tilde{d}_{p_0, T}(c) = 0.70$, manipulowalność $\tilde{m}_{p_0, T}(c) = 0.35$; c) $\tilde{\mathcal{X}} = R^{10}$: wartości własne $\lambda_{M_{p_0, T}}(c) = (0.10, 0.10)$, dystorsja $\tilde{d}_{p_0, T}(c) = 0.20$, manipulowalność $\tilde{m}_{p_0, T}(c) = 0.10$.

8.2.2. Manipulator typu (nh,h): planarny manipulator holonomiczny typu 2R na monocyklu

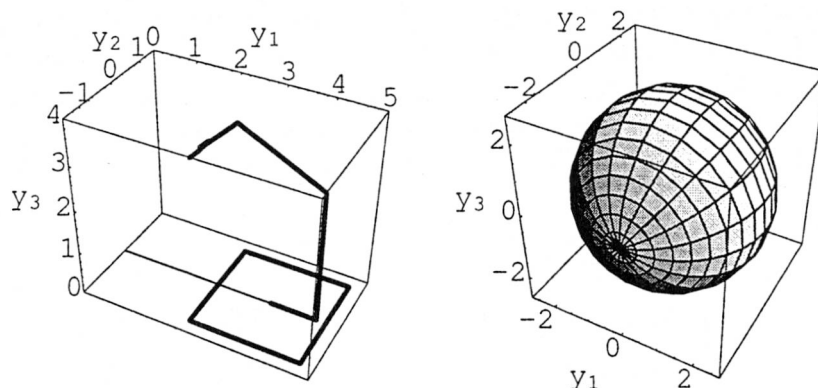
Jako przykładowy manipulator mobilny typu (nh,h) zbadamy podwójne wahadło zamontowane na jedno-kołowej platformie mobilnej (rys. 7.2). Załóżmy, że rozpatrywany manipulator, opisywany równaniami (7.5) i (7.6), porusza się w trójwymiarowej przestrzeni zadaniowej $y = (y_1, y_2, y_3)$. Oznacza to, że w celu znalezienia konfiguracji izotropowych należy minimalizować funkcję celu daną zależnością (5.15) przy ustalonych parametrach geometrycznych manipulatora $l_1 = 2$, $l_2 = 1$ i platformy $d = 1$, zadanej posturze początkowej $q_0 = (0, 0, 0)$, oraz ograniczeniach $x_1, x_2 \in [0, 2\pi]$, $|c_{ij}| \leq 3$, $i = 1, 2$, $j = 0, 1, 2$. Wybrane konfiguracje izotropowe, uzyskane dla różnych wartości horyzontu czasowego T , przedstawia tabela (8.10) oraz rysunki (8.13) i (8.14).

ograniczenia	konfiguracje izotropowe (c, x)
$T = \pi$ $ c_{ij} \leq 3$ $i = 1, 2, j = 0$ $\tilde{\mathcal{X}} = R^2$	$c_{10} = 1.04, c_{20} = 0$ $x_1 = 2.56, x_2 = 1.83$ $\tilde{\kappa}_{q_0, T}(c, x) = 1$
$T = \pi$ $ c_{ij} \leq 3$ $i = 1, 2, j = 0, 1, 2$ $\tilde{\mathcal{X}} = R^6$	$c_{10} = -2.57, c_{11} = 0.30, c_{12} = -1.13$ $c_{20} = 0.24, c_{21} = 1.03, c_{22} = -0.86$ $x_1 = 0, x_2 = 0$ $\tilde{\kappa}_{q_0, T}(c, x) = 1$
$T = 2\pi$ $ c_{ij} \leq 3$ $i = 1, 2, j = 0$ $\tilde{\mathcal{X}} = R^2$	$c_{10} = 0.56, c_{20} = 0$ $x_1 = 2.68, x_2 = 1.23$ $\tilde{\kappa}_{q_0, T}(c, x) = 1$
$T = 2\pi$ $ c_{ij} \leq 3$ $i = 1, 2, j = 0, 1, 2$ $\tilde{\mathcal{X}} = R^6$	$c_{10} = 0.11, c_{11} = -0.70, c_{12} = -0.35$ $c_{20} = -2.28, c_{21} = -0.43, c_{22} = -2.98$ $x_1 = 3.69, x_2 = 4.72$ $\tilde{\kappa}_{q_0, T}(c, x) = 1$

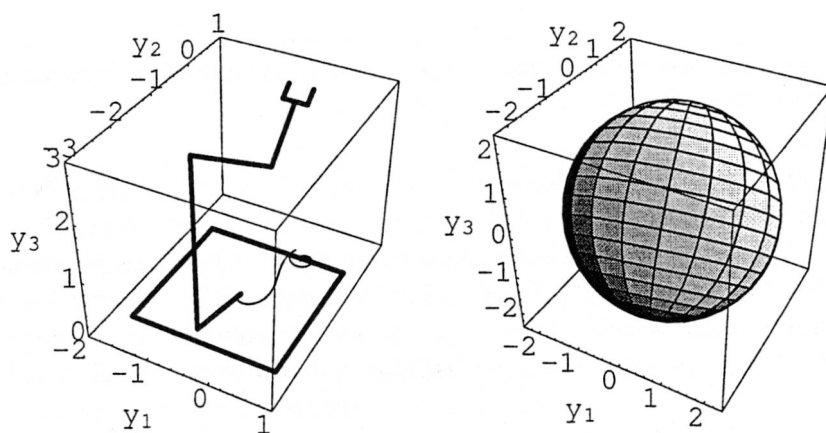
Tab. 8.10: Konfiguracje izotropowe manipulatora mobilnego typu (nh,h) - planarny manipulator holonomiczny typu 2R na monocyklu ($y = (y_1, y_2, y_3)$).

Okazuje się, że dla dużych wartości horyzontu czasowego ($T > 3\pi$) konfiguracje izotropowe nie istnieją. Fakt ten można wytłumaczyć tym, że zwiększenie horyzontu czasowego poprawia mobilność platformy w kierunkach y_1, y_2 , podczas gdy możliwości ruchu manipulatora w kierunku pionowym (y_3) pozostają takie same. Z tego powodu, dla dużych T półoś elipsoidy zrzeczności wzdłuż kierunku y_3 jest zawsze krótsza od pozostałych półosi. Dlatego, w celu wyznaczenia konfiguracji izotropowych dla dużych wartości horyzontu czasowego ($T \geq 3\pi$) ograniczamy przestrzeń zadaniową do dwuwymiarowej ($y = (y_1, y_2)$). Konfiguracje znalezione przy uwzględnieniu tego ograniczenia będziemy nazywać subizotropowymi. Tabela (8.11) zawiera niektóre z nich, uzyskane dla parametrów geometrycznych i postury początkowej zadanych jak dla przypadku trójwymiarowej przestrzeni zadaniowej oraz ustalonego horyzontu $T = 20\pi$.

Rysunki (8.15a), (8.16a), (8.17a) ilustrują zamieszczone w tabeli konfiguracje subizotropowe. Zauważmy, że po ograniczeniu przestrzeni zadaniowej manipulator mobilny z łatwością osiąga konfiguracje izotropowe. Warto także zaobserwować, że w konfiguracji izotropowej platforma manipulatora porusza się po skomplikowanych trajektoriach zawartych w pewnym ograniczonym obszarze przestrzeni zadaniowej, co sugeruje, że zachowanie platformy może być chaotyczne [5], [44]. W celu zweryfikowania tej hipotezy, zbadaliśmy trzy zasadnicze wskaźniki chaosu: kształt trajektorii platformy, widmo mocy oraz wykładnik Lapunowa. Kształt trajektorii jest intuicyjnym wskaźnikiem chaosu. Inną cechą zachowania chaotyczne-



Rys. 8.13: Konfiguracja izotropowa manipulatora mobilnego typu (nh,h) oraz odpowiadająca jej elipsoida zręczności kinematycznej uzyskana dla $T = 2\pi$ i $j = 0$ (cienka linia odpowiada trajektorii platformy mobilnej). Wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0,T}}(c, x) = \{6.807, 6.807, 6.807\}$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0,T}(c, x) = 20.421$, zręczność $\tilde{m}_{q_0,T}(c, x) = 17.76$.



Rys. 8.14: Konfiguracja izotropowa manipulatora mobilnego typu (nh,h) oraz odpowiadająca jej elipsoida zręczności kinematycznej uzyskana dla $T = 2\pi$ i $j = 0, 1, 2$ (cienka linia odpowiada trajektorii platformy mobilnej). Wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0,T}}(c, x) = \{5.276, 5.276, 5.276\}$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0,T}(c, x) = 15.83$, zręczność $\tilde{m}_{q_0,T}(c, x) = 12.12$.

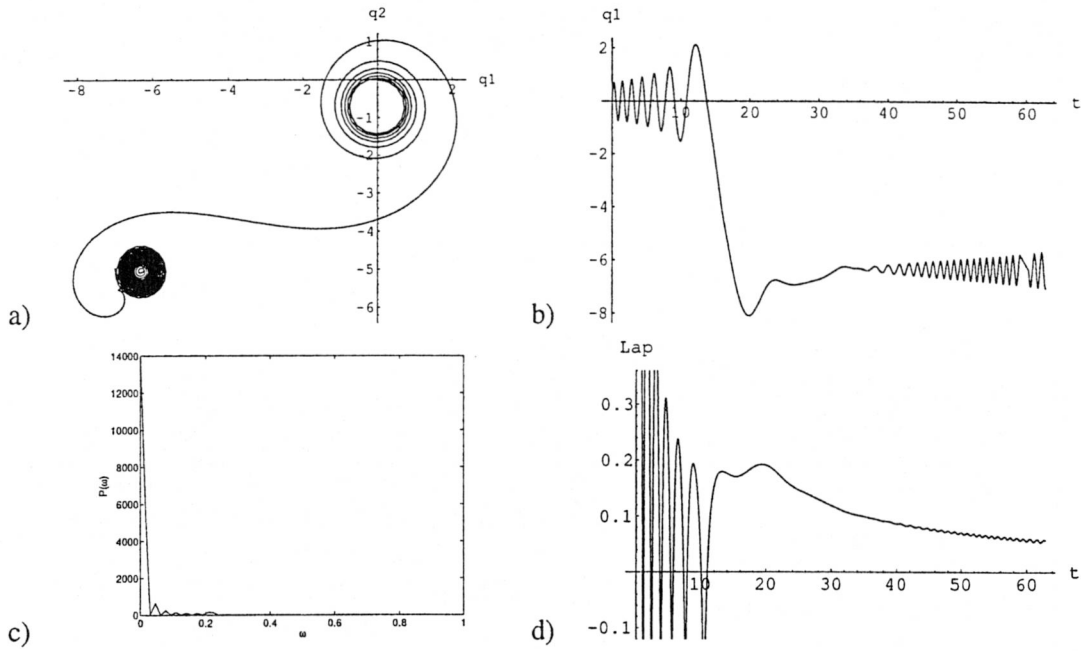
ograniczenia	konfiguracje subizotropowe (c, x)
$T = 20\pi$ $x_1, x_2 \in [0, 2\pi]$ $ c_{ij} \leq 3$ $i = 1, 2, j = 0, 1, 2$ $\tilde{\mathcal{X}} = R^6$	$c_{10} = 1.79, c_{11} = -0.11, c_{12} = 1.99$ $c_{20} = -2.98, c_{21} = 2.98, c_{22} = -2.40$ $x_1 = 0.42, x_2 = 0.12$ $\tilde{\kappa}_{q_0, T}(c, x) = 1$
$T = 20\pi$ $x_1, x_2 \in [0, 2\pi]$ $ c_{ij} \leq 3$ $i = 1, 2, j = 0, 1, 2, 3, 4$ $\tilde{\mathcal{X}} = R^{10}$	$c_{10} = -1.33, c_{11} = -0.94, c_{12} = -1.26$ $c_{13} = -1.64, c_{14} = -0.70$ $c_{20} = -1.07, c_{21} = -1.28, c_{22} = -1.61$ $c_{23} = -0.82, c_{24} = -1.25$ $x_1 = 0.12, x_2 = 0.15$ $\tilde{\kappa}_{q_0, T}(c, x) = 1$
$T = 20\pi$ $x_1, x_2 \in [0, 2\pi]$ $ c_{ij} \leq 3$ $i = 1, 2, j = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ $\tilde{\mathcal{X}} = R^{14}$	$c_{10} = 0.71, c_{11} = -2.24, c_{12} = 0.64$ $c_{13} = -2.03, c_{14} = 0.70, c_{15} = -2.07, c_{16} = -2.11$ $c_{20} = -2.25, c_{21} = 0.74, c_{22} = -2.25$ $c_{23} = 0.74, c_{24} = -2.21, c_{25} = 0.75, c_{26} = 0.78$ $x_1 = 0.13, x_2 = 0.15$ $\tilde{\kappa}_{q_0, T}(c, x) = 1$

Tab. 8.11: Konfiguracje subizotropowe manipulatora mobilnego typu (nh,h) - planarny manipulator holonomiczny typu 2R na monocyklu.

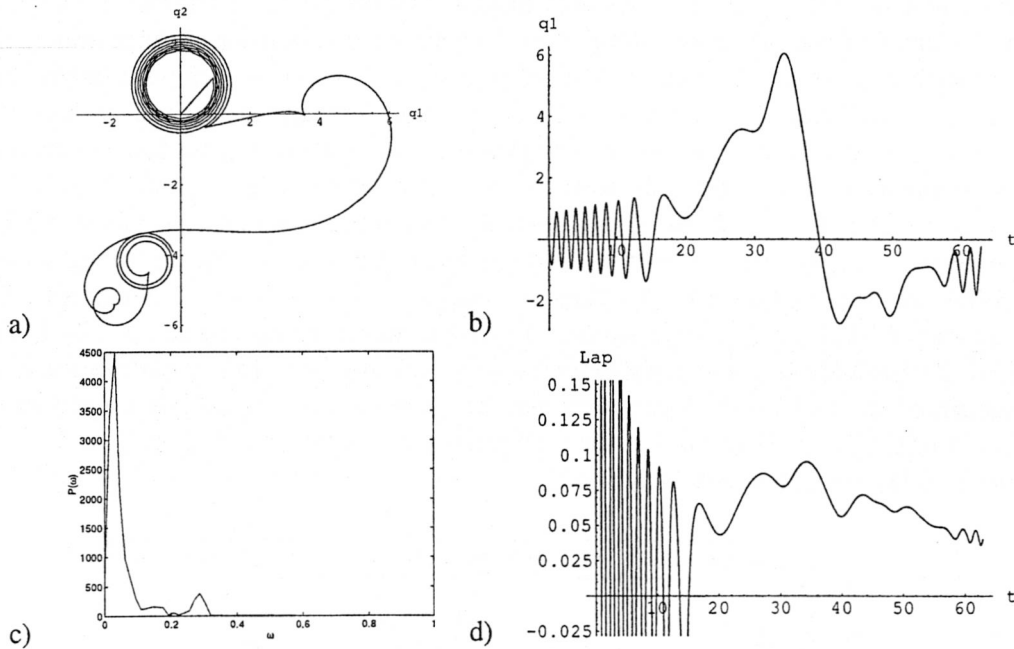
go jest koncentracja mocy sygnału w obszarze niskich częstotliwości. Wykładnik Lapunowa jest miarą wrażliwości układu na warunki początkowe. Jego dodatnia wartość świadczy o zachowaniu chaotycznym. Definicje omawianych wskaźników można znaleźć w pracy [53]. Wykresy tych wskaźników, zamieszczone na rysunkach (8.15a,b,c,d), (8.16a,b,c,d), (8.17a,b,c,d), potwierdzają chaotyczne zachowanie platformy manipulatora mobilnego, a co za tym idzie, jego efektora. Szczegółowe wyniki badania chaosu pojawiającego się w konfiguracjach izotropowych rozważanego manipulatora mobilnego przedstawia praca [77]. W pracy [78] można znaleźć wyniki badań zachowań chaotycznych manipulatorów mobilnych klasy (nh,0). Dla trójwymiarowej przestrzeni zadaniowej $(y = (y_1, y_2, y_3))$ można wyznaczyć konfigurację izotropową i jednocześnie zręczną. W tym celu poszukujemy stałych ($i = 1, 2, j = 0$) i ograniczonych ($|c_{ij}| \leq 3$) funkcji sterujących $(u_1(\cdot), u_2(\cdot))$ oraz ograniczonych zmiennych przegubowych $x_1, x_2 \in [0, 2\pi]$, takich by najpierw minimalizować lokalny współczynnik uwarunkowania (5.15), a następnie maksymalizować lokalną zręczność (5.11). Postura początkowa oraz horyzont czasowy są zadane i wynoszą odpowiednio $q_0 = (0, 0, 0)$ oraz $T = \pi$. Ustalona jest również geometria robota: $l_1 = 2, l_2 = 1, d = 1$. Tabela (8.12) oraz rysunek (8.18) prezentują uzyskany wynik.

ograniczenia	konfiguracja zręczno - izotropowa (c, x)
$T = \pi$ $ c_{ij} \leq 3$ $i = 1, 2, j = 0$ $\tilde{\mathcal{X}} = R^2$	$c_{10} = 1.037, c_{20} = 0$ $x_1 = 2.56, x_2 = 1.83$ $\tilde{\kappa}_{q_0, T}(c, x) = 1$

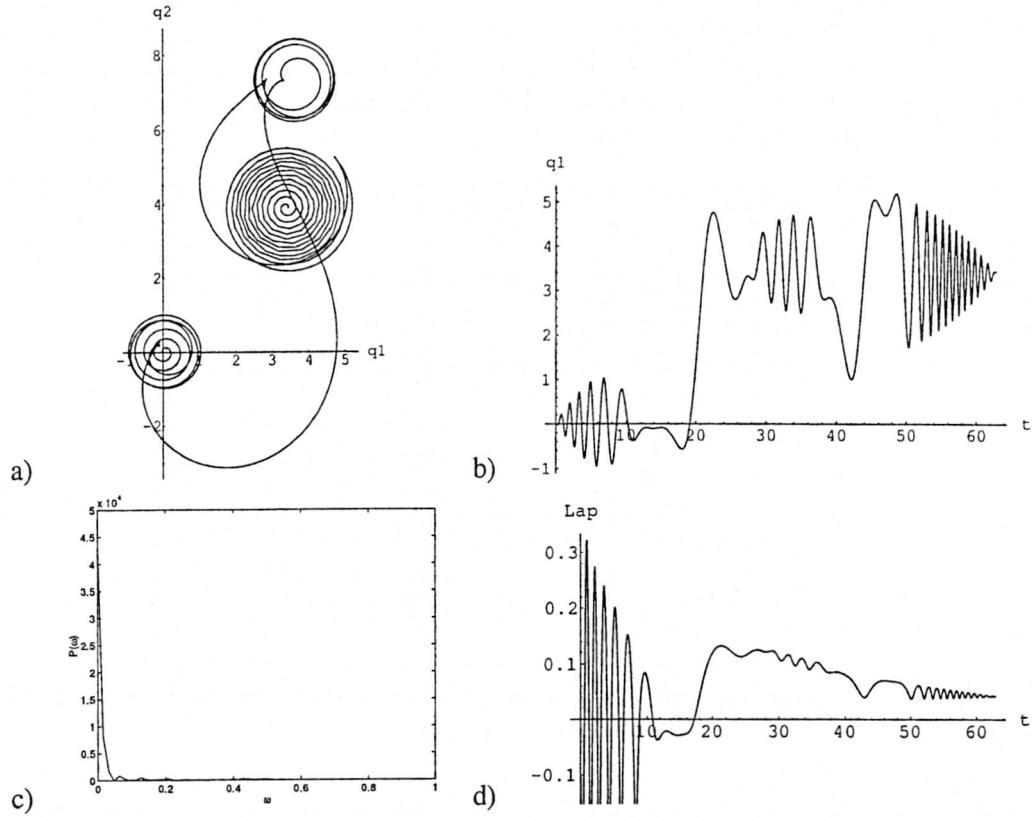
Tab. 8.12: Konfiguracja zręczno - izotropowa manipulatora mobilnego typu (nh,h) - planarny manipulator holonomiczny typu 2R na monocyklu ($y = (y_1, y_2, y_3)$).



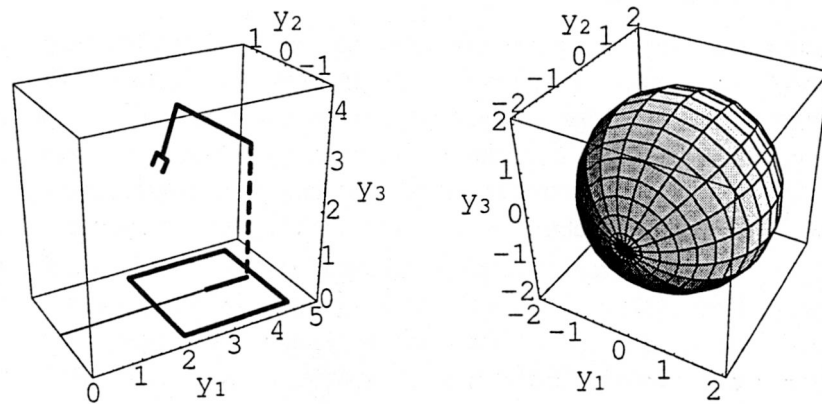
Rys. 8.15: Manipulator mobilny typu (nh,h) - planarny manipulator holonomiczny typu 2R na monocyklu: a) konfiguracja subizotropowa platformy mobilnej dla $T = 20\pi$ i $\tilde{\mathcal{X}} = R^6$; b) trajektoria $q_1(t)$; c) widmo mocy; d) wykładnik Lapunowa. Wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0,T}}(\lambda^1, x) = (751.78, 751.78)$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0,T}(\lambda^1, x) = 1503.70$, zręczność $\tilde{d}_{q_0,T}(\lambda^1, x) = 751.78$.



Rys. 8.16: Manipulator mobilny typu (nh,h) - planarny manipulator holonomiczny typu 2R na monocyklu: a) konfiguracja subizotropowa platformy mobilnej dla $T = 20\pi$ i $\tilde{\mathcal{X}} = R^{10}$; b) trajektoria $q_1(t)$; c) widmo mocy; d) wykładnik Lapunowa. Wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0,T}}(\lambda^1, x) = (612.03, 612.03)$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0,T}(\lambda^1, x) = 1224.10$, zręczność $\tilde{d}_{q_0,T}(\lambda^1, x) = 612.03$.



Rys. 8.17: Manipulator mobilny typu (nh,h) - planarny manipulator holonomiczny typu 2R na monocyklu: a) konfiguracja subizotropowa platformy mobilnej dla $T = 20\pi$ and $\tilde{\mathcal{X}} = R^{14}$; b) trajektoria $q_1(t)$; c) widmo mocy; d) wykładnik Lapunowa. Wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0,T}}(\lambda^1, x) = (743.19, 743.19)$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0,T}(\lambda^1, x) = 1486.40$, zręczność $\tilde{d}_{q_0,T}(\lambda^1, x) = 743.19$.



Rys. 8.18: Konfiguracja zręczno - izotropowa planarnego manipulatora holonomicznego typu 2R na monocyklu wraz z odpowiadającą jej elipsoidą zręczności (cienka linia odpowiada trajektorii platformy mobilnej). Wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0,T}}(c, x) = (4.063, 4.063, 4.063)$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0,T}(c, x) = 12.188$, zręczność $\tilde{m}_{q_0,T}(c, x) = 8.189$.

Na zakończenie wyznaczmy konfigurację endogeniczną ($u_1(\cdot), u_2(\cdot), x_1, x_2$) oraz geometrię manipulatora pokładowego (l_1, l_2) gwarantujące izotropowość konfiguracji. Ponownie rozważamy trójwymiarową przestrzeń zadaniową ($y = (y_1, y_2, y_3)$) i stałe funkcje sterujące. Wysunięcie manipulatora względem środka platformy jest zerowe ($d = 0$), horyzont czasowy $T = \pi$, natomiast postura początkowa $q_0 = (0, 0, 0)$. Przykładowe wyniki zebrano w tabeli (8.13) oraz na rysunku (8.19).

ograniczenia	konfiguracje i geometrie izotropowe
$ c_{ij} \leq 3$ $0 \leq l_1, l_2 \leq 3$ $i = 1, 2, j = 0$	$c_{10} = -0.0139, c_{20} = 2.9832$ $x_1 = 6.162, x_2 = 3.259$ $l_1 = 1.234, l_2 = 1.258$ $\tilde{\kappa}_{q_0, T}(c, x, l_1, l_2) = 1$
$ c_{ij} \leq 3$ $0 \leq l_1, l_2 \leq 3$ $i = 1, 2, j = 0$	$c_{10} = 0.169, c_{20} = 0$ $x_1 = 1.572, x_2 = 1.57$ $l_1 = 0.000, l_2 = 1.253$ $\tilde{\kappa}_{q_0, T}(c, x, l_1, l_2) = 1$
$ c_{ij} \leq 3$ $0 \leq l_1, l_2 \leq 3$ $i = 1, 2, j = 0$	$c_{10} = 1.302, c_{20} = 0$ $x_1 = 1.860, x_2 = 1.956$ $l_1 = 1.780, l_2 = 1.597$ $\tilde{\kappa}_{q_0, T}(c, x, l_1, l_2) = 1$

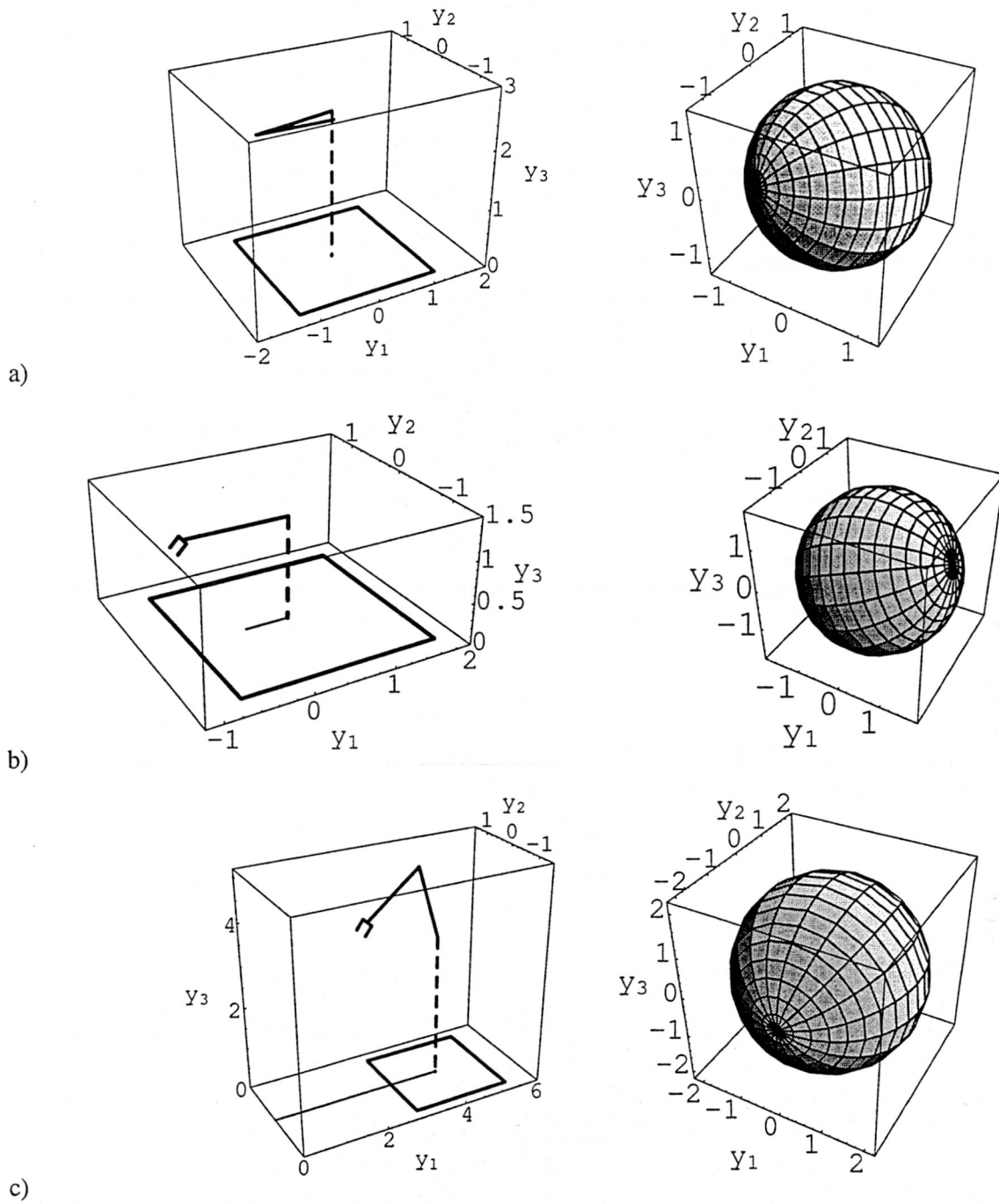
Tab. 8.13: Konfiguracje i geometrie izotropowe manipulatora mobilnego typu (nh,h) - planarny manipulator holonomiczny typu 2R na monocyklu ($y = (y_1, y_2, y_3)$).

Wyniki zamieszczone w tabeli, jak również dodatkowe szczegółowe badania symulacyjne dowodzą, że manipulator mobilny w konfiguracji izotropowej może poruszać się po dwóch rodzajach krzywych: po okręgu (8.19a) o bardzo małym promieniu i wtedy mamy do czynienia z małą zręcznością, oraz po prostej (8.19b i 8.19c) i wówczas zręczność manipulatora mobilnego jest duża. Ponadto zauważamy, że zręczność może ulec poprawie także dzięki dysproporcji długości ramion manipulatora.

8.2.3. Manipulator typu (nh,nh): planarny manipulator nieholonomiczny typu 3R na samochodzie kinematycznym

Rozpatrywany manipulator mobilny został przedstawiony na rysunku (7.4); jego kinematykę definiują równania (7.11) oraz (7.12). Naszym zadaniem jest wyznaczenie konfiguracji izotropowych tego manipulatora przy ustalonych parametrach geometrycznych $l = 1, l_0 = 1, l_1 = l_2 = l_3 = 0.2$, współczynnikach $a_2 = a_3 = 0.1$ oraz zadanej posturze początkowej platformy $q_0 = (0, 0, 0, 0)$ i manipulatora pokładowego $p_0 = (30^\circ, 30^\circ, 30^\circ)$. Konfiguracji izotropowych poszukujemy w trójwymiarowej przestrzeni zadaniowej (y_1, y_2, y_3). W tabeli (8.14) zostały zebrane wyniki uzyskane dla przypadku stałych funkcji sterujących (c_{ij}^k , $k = 1, i = 1, 2, j = 0$) i ograniczonych amplitud sterowań ($|c_{ij}^k| \leq 3$). Dla wielu przebadanych wartości horyzontu czasowego T udało się znaleźć jedynie dwie konfiguracje izotropowe. Obrazują je rysunki (8.20) i (8.21). Ponadto okazało się, że dla dużych wartości horyzontu czasowego ($T \geq 5\pi$) oraz stałych funkcji sterujących manipulator podwójnie nieholonomiczny w ogóle nie posiada konfiguracji izotropowych. Fakt ten wytłumaczyliśmy w podrozdziale (8.2.2). Dopiero ograniczenie przestrzeni zadaniowej do dwuwymiarowej (y_1, y_2) pozwala wyznaczyć konfiguracje izotropowe dla dłuższych czasów T ; okazało się, że istnieje wiele takich konfiguracji. Kilka z nich pokazano w tabeli (8.16) i na rysunku (8.23).

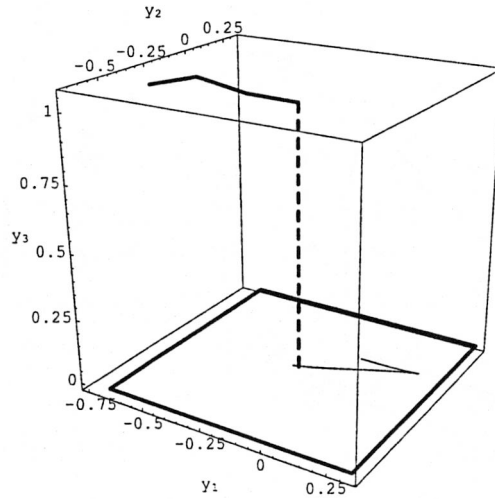
Problem wyznaczania konfiguracji izotropowych dla dużych horyzontów T można również rozwiązać po dodaniu wyższych harmonicznych do stałych funkcji sterujących (tabela 8.15). Jednak wówczas platforma manipulatora mobilnego w konfiguracji izotropowej porusza się zygzakami (rys. 8.22). Takie zachowanie



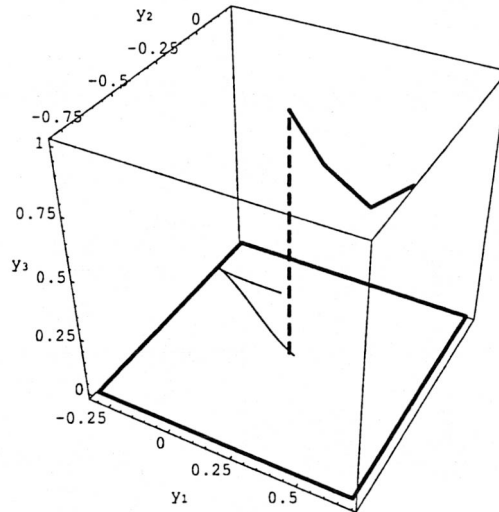
Rys. 8.19: Konfiguracje izotropowe planarnego manipulatora holonomicznego typu 2R na monocykle wraz z odpowiadającymi im elipsoidami zręczności (cienka linia odpowiada trajektorii platformy mobilnej). a) wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0,T}}(c, x, l_1, l_2) = (1.583, 1.583, 1.583)$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0,T}(c, x, l_1, l_2) = 4.749$, zręczność $\tilde{m}_{q_0,T}(c, x, l_1, l_2) = 1.992$; b) wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0,T}}(c, x, l_1, l_2) = (3.142, 3.142, 3.142)$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0,T}(c, x, l_1, l_2) = 9.424$, zręczność $\tilde{m}_{q_0,T}(c, x, l_1, l_2) = 5.568$; c) wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0,T}}(c, x, l_1, l_2) = (4.639, 4.639, 4.639)$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0,T}(c, x, l_1, l_2) = 13.918$, zręczność $\tilde{m}_{q_0,T}(c, x, l_1, l_2) = 9.993$.

ograniczenia	konfiguracje izotropowe (c^1, c^2)
$T = \pi$	$\{c_{10}^1, c_{20}^1, c_{10}^2, c_{20}^2\} = \{0.385, \pm 1.643, 0.816, -2.911\}$ $\{q_1, q_2, q_3, q_4\} = \{-0.171, -0.174, 8^\circ, 296^\circ\}$ $\{p_1, p_2, p_3\} = \{177^\circ, -8^\circ, 25^\circ\}$ $\tilde{\kappa}_{q_0, p_0, T}(c^1, c^2) = 1$
$T = 2\pi$	$\{c_{10}^1, c_{20}^1, c_{10}^2, c_{20}^2\} = \{-0.248, \pm 0.815, -0.208, 2.024\}$ $\{q_1, q_2, q_3, q_4\} = \{0.192, -0.288, -10^\circ, 294^\circ\}$ $\{p_1, p_2, p_3\} = \{-45^\circ, 21^\circ, 67^\circ\}$ $\tilde{\kappa}_{q_0, p_0, T}(c^1, c^2) = 1$
$T = 3\pi$	$\{c_{10}^1, c_{20}^1, c_{10}^2, c_{20}^2\} = \{-0.165, \pm 0.544, -0.138, 1.350\}$ $\{q_1, q_2, q_3, q_4\} = \{0.192, -0.288, -10^\circ, 294^\circ\}$ $\{p_1, p_2, p_3\} = \{-45^\circ, 21^\circ, 67^\circ\}$ $\tilde{\kappa}_{q_0, p_0, T}(c^1, c^2) = 1$
$T = 4\pi$	$\{c_{10}^1, c_{20}^1, c_{10}^2, c_{20}^2\} = \{0.096, \pm 0.411, 0.204, -0.728\}$ $\{q_1, q_2, q_3, q_4\} = \{-0.171, -0.174, 8^\circ, 296^\circ\}$ $\{p_1, p_2, p_3\} = \{177^\circ, -8^\circ, 25^\circ\}$ $\tilde{\kappa}_{q_0, p_0, T}(c^1, c^2) = 1$

Tab. 8.14: Konfiguracje izotropowe manipulatora mobilnego typu (nh,nh) - planarny manipulator nieholonomiczny typu 3R na samochodzie kinematycznym ($\tilde{\mathcal{X}} = R^4$, $y = (y_1, y_2, y_3)$).



Rys. 8.20: Konfiguracja izotropowa planarnego manipulatora nieholonomicznego typu 3R na samochodzie kinematycznym ($y = (y_1, y_2, y_3)$) dla $T = \pi$ i $\tilde{\mathcal{X}} = R^4$ (zręczność $\tilde{m}_{q_0, p_0, T}(c^1, c^2) = 1.89$; wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0, p_0, T}}(c^1, c^2) = (1.53, 1.53, 1.53)$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0, T}(c^1, c^2) = 4.59$ oraz $T = 4\pi$ (zręczność $\tilde{m}_{q_0, p_0, T}(c^1, c^2) = 15.12$; wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0, p_0, T}}(c^1, c^2) = (6.12, 6.12, 6.12)$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0, p_0, T}(c^1, c^2) = 18.36$).

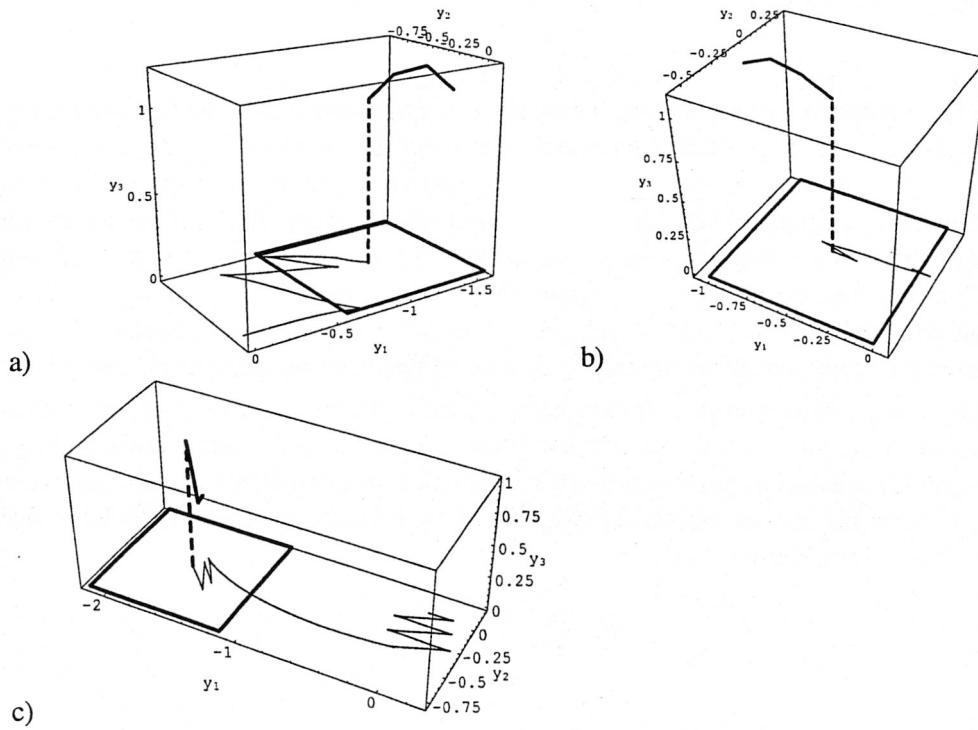


Rys. 8.21: Konfiguracja izotropowa planarnego manipulatora nieholonomicznego typu 3R na samochodzie kinematycznym ($y = (y_1, y_2, y_3)$) dla $T = 2\pi$ i $\tilde{\mathcal{X}} = R^4$ (zręczność $\tilde{m}_{q_0, p_0, T}(c^1, c^2) = 5.73$; wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0, p_0, T}}(c^1, c^2) = (3.20, 3.20, 3.20)$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0, T}(c^1, c^2) = 9.60$) oraz $T = 3\pi$ (zręczność $\tilde{m}_{q_0, p_0, T}(c^1, c^2) = 10.52$; wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0, p_0, T}}(c^1, c^2) = (4.80, 4.80, 4.80)$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0, p_0, T}(c^1, c^2) = 14.40$).

manipulatora mobilnego można wyjaśnić tym, że w konfiguracji izotropowej manipulator powinien być jednakowo zręczny we wszystkich kierunkach przestrzeni zadaniowej, w związku z czym możliwości ruchowe platformy muszą być dopasowywane do ograniczonych możliwości ruchowych manipulatora wzdłuż kierunku y_3 , poprzez pewną “deregulację” jej trajektorii ruchu. Zachowania takiego nie obserwujemy w przypadku dwuwymiarowej przestrzeni zadaniowej (rys. 8.23). Manipulator mobilny porusza się zygzakami, gdyż ograniczenie na kąt skrętu kierownicy jest zbyt mało restrykcyjne $q_4 \leq 90^\circ$. Wzmocnienie tego ograniczenia, takie by $q_4 \leq 45^\circ$, uzyskujemy w sposób pośredni, dzięki odpowiedniemu ograniczeniu jednej z funkcji sterujących platformy: $u_2^1 \leq \frac{\pi}{4T}$ (dla stałych funkcji sterujących) lub $u_2^1 \leq \frac{\pi}{4T(1+\sqrt{2})}$ (dla funkcji sterujących zawierających pierwsze harmoniczne). Okazuje się, że przy takim ograniczeniu kąta skrętu kierownicy q_4 , nie udaje się znaleźć konfiguracji izotropowych manipulatora podwójnie nieholonomicznego (platforma nie może już wykonywać gwałtownych skrętów, więc nie ma możliwości “deregulacji” jej ruchu, a zatem nie można znaleźć konfiguracji, przy których manipulator mobilny byłby jednakowo zręczny we wszystkich kierunkach).

ograniczenia	konfiguracje izotropowe (c^1, c^2)
$T = 2\pi$ $ c_{ij}^k \leq 3$ $k = 1, 2$ $i = 1, 2, j = 0, 1, 2$	$\{c_{10}^1, c_{11}^1, c_{12}^1, c_{20}^1, c_{21}^1, c_{22}^1\} = \{-0.774, -1.266, -0.450, 2.857, 2.467, -1.435\}$ $\{c_{10}^2, c_{11}^2, c_{12}^2, c_{20}^2, c_{21}^2, c_{22}^2\} = \{1.288, 1.180, 2.139, 1.144, -2.392, -1.316\}$ $\{q_1, q_2, q_3, q_4\} = \{-1.087, -0.410, -44^\circ, 308^\circ\}$ $\{p_1, p_2, p_3\} = \{134^\circ, 30^\circ, 57^\circ\}$ $\tilde{\kappa}_{q_0, p_0, T}(c^1, c^2) = 1$
$T = 3\pi$ $ c_{ij}^k \leq 3$ $k = 1, 2$ $i = 1, 2, j = 0, 1, 2$	$\{c_{10}^1, c_{11}^1, c_{12}^1, c_{20}^1, c_{21}^1, c_{22}^1\} = \{-0.082, 0.278, -0.133, 2.224, 0.107, 1.624\}$ $\{c_{10}^2, c_{11}^2, c_{12}^2, c_{20}^2, c_{21}^2, c_{22}^2\} = \{-1.095, 0.555, 0.848, 0.336, -0.175, -3.000\}$ $\{q_1, q_2, q_3, q_4\} = \{-0.503, -0.087, -7^\circ, 121^\circ\}$ $\{p_1, p_2, p_3\} = \{201^\circ, 14^\circ, 31^\circ\}$ $\tilde{\kappa}_{q_0, p_0, T}(c^1, c^2) = 1$
$T = 5\pi$ $ c_{ij}^k \leq 3$ $k = 1, 2$ $i = 1, 2, j = 0, 1, 2$	$\{c_{10}^1, c_{11}^1, c_{12}^1, c_{20}^1, c_{21}^1, c_{22}^1\} = \{0.196, 0.358, 0.620, 2.236, 0.327, 2.183\}$ $\{c_{10}^2, c_{11}^2, c_{12}^2, c_{20}^2, c_{21}^2, c_{22}^2\} = \{-2.882, -0.641, -2.911, 1.811, -3.000, -2.482\}$ $\{q_1, q_2, q_3, q_4\} = \{-1.625, -0.293, -45^\circ, 212^\circ\}$ $\{p_1, p_2, p_3\} = \{-44^\circ, -6^\circ, 96^\circ\}$ $\tilde{\kappa}_{q_0, p_0, T}(c^1, c^2) = 1$

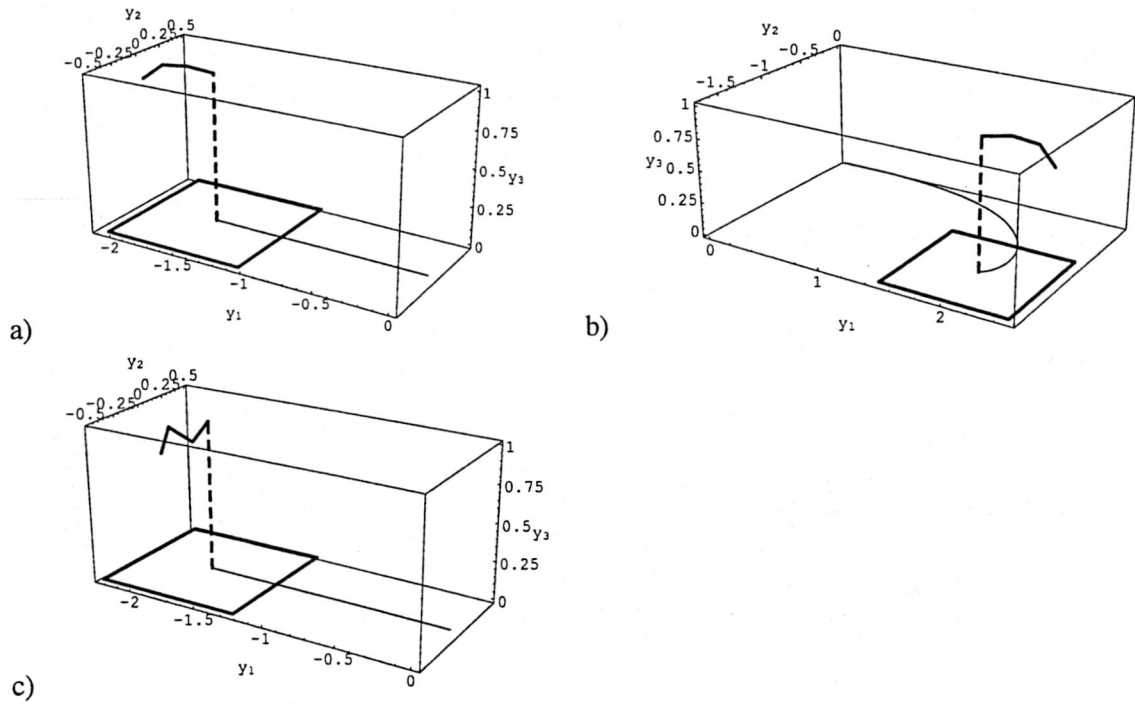
Tab. 8.15: Konfiguracje izotropowe manipulatora mobilnego typu (nh,nh) - planarny manipulator nieholonomiczny typu 3R na samochodzie kinematycznym ($\tilde{\mathcal{X}} = R^{12}$, $y = (y_1, y_2, y_3)$).



Rys. 8.22: Konfiguracje izotropowe planarnego manipulatora nieholonomicznego typu 3R na samochodzie kinematycznym ($\tilde{\mathcal{X}} = R^{12}$, $y = (y_1, y_2, y_3)$): a) $T = 2\pi$: zręczność $\tilde{m}_{q_0, p_0, T}(c^1, c^2) = 5.64$; wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0, p_0, T}}(c^1, c^2) = (1.78, 1.78, 1.78)$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0, p_0, T}(c^1, c^2) = 9.50$; b) $T = 3\pi$: zręczność $\tilde{m}_{q_0, p_0, T}(c^1, c^2) = 9.35$; wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0, p_0, T}}(c^1, c^2) = (2.11, 2.11, 2.11)$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0, p_0, T}(c^1, c^2) = 13.32$; c) $T = 5\pi$: zręczność $\tilde{m}_{q_0, p_0, T}(c^1, c^2) = 39.27$; wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0, p_0, T}}(c^1, c^2) = (3.40, 3.40, 3.40)$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0, p_0, T}(c^1, c^2) = 34.66$.

ograniczenia	konfiguracje izotropowe (c^1, c^2)
$T = \pi$	$\{c_{10}^1, c_{20}^1, c_{10}^2, c_{20}^2\} = \{-0.487, 0.000, 0.810, -1.515\}$ $\{q_1, q_2, q_3, q_4\} = \{-1.529, 0, 0^\circ, 0^\circ\}$ $\{p_1, p_2, p_3\} = \{176^\circ, 10^\circ, 30^\circ\}$ $\tilde{\kappa}_{q_0, p_0, T}(c^1, c^2) = 1$
$T = 3\pi$	$\{c_{10}^1, c_{20}^1, c_{10}^2, c_{20}^2\} = \{0.443, -0.157, -2.390, 2.458\}$ $\{q_1, q_2, q_3, q_4\} = \{1.986, -1.218, -147^\circ, -85^\circ\}$ $\{p_1, p_2, p_3\} = \{180^\circ, 19^\circ, 37^\circ\}$ $\tilde{\kappa}_{q_0, p_0, T}(c^1, c^2) = 1$
$T = 5\pi$	$\{c_{10}^1, c_{20}^1, c_{10}^2, c_{20}^2\} = \{-0.110, 0.000, -0.176, 2.098\}$ $\{q_1, q_2, q_3, q_4\} = \{-1.729, 0, 0^\circ, 0^\circ\}$ $\{p_1, p_2, p_3\} = \{-128^\circ, -72^\circ, 90^\circ\}$ $\tilde{\kappa}_{q_0, p_0, T}(c^1, c^2) = 1$

Tab. 8.16: Konfiguracje subizotropowe manipulatora mobilnego typu (nh,nh) - planarny manipulator nieholonomiczny typu 3R na samochodzie kinematycznym ($\tilde{\mathcal{X}} = R^4$, $y = (y_1, y_2)$).



Rys. 8.23: Konfiguracje subizotropowe planarnego manipulatora nieholonomicznego typu 3R na samochodzie kinematycznym ($\tilde{\mathcal{X}} = R^4$, $y = (y_1, y_2)$): a) $T = \pi$: zręczność $\tilde{m}_{q_0, p_0, T}(c^1, c^2) = 3.21$; wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0, p_0, T}}(c^1, c^2) = (3.21, 3.21)$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0, p_0, T}(c^1, c^2) = 6.42$; b) $T = 3\pi$: zręczność $\tilde{m}_{q_0, p_0, T}(c^1, c^2) = 11.13$; wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0, p_0, T}}(c^1, c^2) = (11.13, 11.13)$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0, p_0, T}(c^1, c^2) = 22.25$; c) $T = 5\pi$: zręczność $\tilde{m}_{q_0, p_0, T}(c^1, c^2) = 17.01$; wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0, p_0, T}}(c^1, c^2) = (17.01, 17.01)$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0, p_0, T}(c^1, c^2) = 34.00$.

8.3. Dystorsja

Przypomnijmy, że dystorsja jest miarą nieszywności kinematyki robota, dlatego w celu uzyskania kinematyki "bliskiej" izometrii należy minimalizować wymienioną miarę. Z drugiej strony można powiedzieć, że obecność platformy odpowiada za wzrost elastyczności kinematyki [38]. Mając na celu wzrost elastyczności stawiamy zadanie maksymalizacji omawianej miary jakości.

8.3.1. Manipulator typu (nh,h): planarny manipulator holonomiczny typu 3R na platformie dwukołowej

Model kinematyki rozważanego manipulatora jest opisany równaniami (7.9) i (7.10).

OPTYMALNA GEOMETRIA

Minimalizacja globalnej dystorsji kinematycznej

W celu wyznaczenia optymalnych wymiarów manipulatora mobilnego będziemy minimalizować globalną dystorsję, miarę kinematyczną daną zależnością (5.25). Badania przeprowadzimy przy ustalonych wartościach parametrów $l = 1$, $l_0 = 1$, $r = 0.5$, zadaniem horyzontem czasowym $T = \pi$ oraz zerowym przemieszczeniu manipulatora względem środka platformy ($d_x = d_y = 0$). Zakładamy dodatkowo, że funkcje sterujące są stałe ($i = 1, 2$; $j = 0$) i ograniczone ($|c_{ij}| \leq 1$) oraz że zmienne przegubowe manipulatora $(x_1, x_2, x_3) \in [0, 2\pi]$. Minimalizacji globalnej dystorsji dokonujemy przy ograniczeniu równościowym nałożonym na sumaryczne wymiary geometryczne manipulatora ($L = l_1 + l_2 + l_3$).

Na podstawie wyników zebranych w tabeli (8.17) wnioskujemy, że w celu uzyskania optymalnej geometrii manipulatora umieszczonego na platformie długości jego ramion należy dobrać niezależnie od wartości ograniczenia L w stosunku

$$l_1 : l_2 : l_3 = 1 : 0.8 : 0.67. \quad (8.1)$$

Dla porównania, optymalny stosunek długości ramion planarnego manipulatora stacjonarnego typu 3R wynosi [73]

$$l_1 : l_2 : l_3 = 1 : 0.5 : 0.33. \quad (8.2)$$

ograniczenia	optymalna geometria	globalna dystorsja
$L = 3$	$(l_1, l_2, l_3) = (1.2097, 0.9745, 0.8158)$	$D_{q_0, T}(K_{q_0, T}) = 133.7467$
$L = 6$	$(l_1, l_2, l_3) = (2.4195, 1.9489, 1.6316)$	$D_{q_0, T}(K_{q_0, T}) = 317.8652$
$L = 11$	$(l_1, l_2, l_3) = (4.4357, 3.5730, 2.9912)$	$D_{q_0, T}(K_{q_0, T}) = 897.4976$

Tab. 8.17: Optymalna geometria (l_1, l_2, l_3) manipulatora mobilnego typu (nh,h) - planarny manipulator holonomiczny typu 3R na platformie dwukołowej - minimalizacja globalnej dystorsji.

Zadanie wyznaczenia optymalnych ze względu na dystorsję współrzędnych (d_x, d_y) punktu zamontowania potrójnego wahadła na platformie rozwiązujemy przy warunkach takich jak poprzednio, zakładając dodatkowo, że długości ramion manipulatora są równe $l_1 = l_2 = l_3 = 0.2$. Wyniki zamieszczone w tabeli (8.18) pozwalają stwierdzić, że optymalnym punktem zamontowania manipulatora na platformie jest jej środek

$$(d_x, d_y) = (0, 0). \quad (8.3)$$

Maksymalizacja globalnej dystorsji kinematycznej

Przyjrzyjmy się optymalnej geometrii uzyskanej przez maksymalizację globalnej dystorsji (5.25). W

ograniczenia	optimalna geometria	globalna dystorsja
$-6 \leq d_x \leq 3$ $-1 \leq d_y \leq 1$	$(d_x, d_y) = (0, 0)$	$\tilde{D}_{q_0, T}(K_{q_0, T}) = 18.1305$
$-3 \leq d_x \leq 3$ $-0.5 \leq d_y \leq 1$	$(d_x, d_y) = (0, 0)$	$\tilde{D}_{q_0, T}(K_{q_0, T}) = 18.1305$

Tab. 8.18: Optimalna geometria (d_x, d_y) manipulatora mobilnego typu (nh,h) - planarny manipulator holonomiczny typu 3R na platformie dwukołowej - minimalizacja globalnej dystorsji.

pierwszym kroku poszukujemy optymalnych długości ramion manipulatora (l_1, l_2, l_3) . Pozostałe parametry geometryczne (l_0, l, r) , horyzont sterowania T oraz ograniczenia na dopuszczalny zakres sterowań i długości ramion (l_1, l_2, l_3) , przyjmujemy jak wyżej. Rezultaty obliczeń podano w tabeli (8.19). Okazuje się, że znaczenie dla optymalnej geometrii ma jedynie ostatnie ramię manipulatora

$$(l_1, l_2, l_3) = (0, 0, L). \quad (8.4)$$

ograniczenia	optimalna geometria	globalna dystorsja
$L = 3$	$(l_1, l_2, l_3) = (0, 0, 3)$	$\tilde{D}_{q_0, T}(K_{q_0, T}) = 298.0663$
$L = 6$	$(l_1, l_2, l_3) = (0, 0, 6)$	$\tilde{D}_{q_0, T}(K_{q_0, T}) = 975.1433$

Tab. 8.19: Optimalna geometria (l_1, l_2, l_3) manipulatora mobilnego typu (nh,h) - planarny manipulator holonomiczny typu 3R na platformie dwukołowej - maksymalizacja globalnej dystorsji.

Maksymalizacja globalnej dystorsji podaje również optymalny punkt zamontowania manipulatora na platformie. Z wyników zebranych w tabeli (8.20) wynika, że manipulator powinien być wysunięty możliwie najdalej względem środka platformy

$$(d_x, d_y) = (\pm \max d_x, \pm \max d_y). \quad (8.5)$$

ograniczenia	optimalna geometria	globalna dystorsja
$-6 \leq d_x \leq 3$ $-1 \leq d_y \leq 1$	$(d_x, d_y) = (-6, \pm 1)$	$\tilde{D}_{q_0, T}(K_{q_0, T}) = 243.3890$
$-3 \leq d_x \leq 3$ $-0.5 \leq d_y \leq 1$	$(d_x, d_y) = (\pm 3, 1)$	$\tilde{D}_{q_0, T}(K_{q_0, T}) = 79.0112$

Tab. 8.20: Optimalna geometria (d_x, d_y) manipulatora mobilnego typu (nh,h) - planarny manipulator holonomiczny typu 3R na platformie dwukołowej - maksymalizacja globalnej dystorsji.

OPTYMALNA KONFIGURACJA

Maksymalizacja lokalnej dystorsji kinematycznej

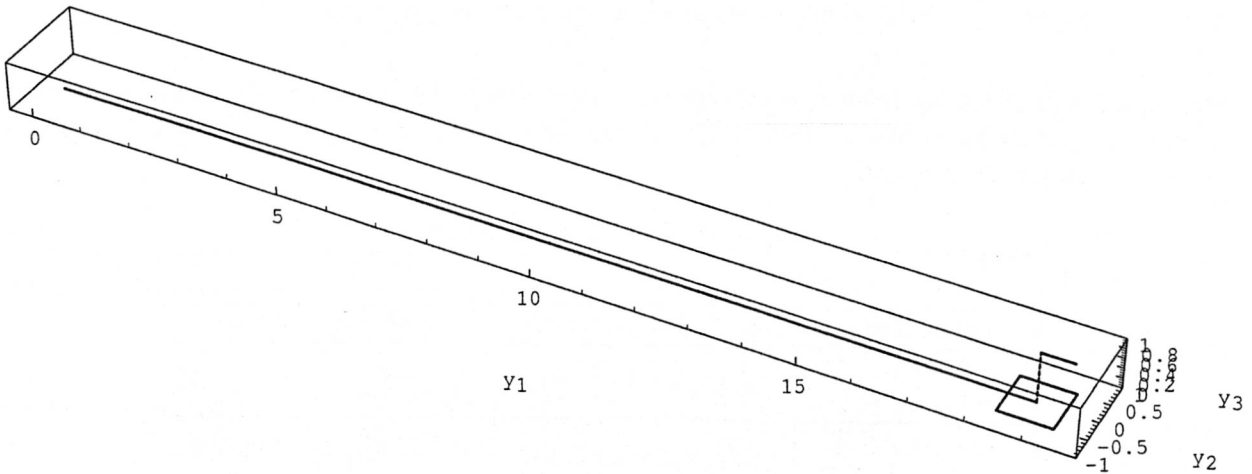
Zadanie optymalizacji konfiguracji polega na takim doborze konfiguracji endogenicznej $(u_1(\cdot), u_2(\cdot))$ oraz zmiennych przegubowych (x_1, x_2, x_3) , by maksymalizować lokalną dystorsję, daną wzorem (5.24). Przyjmujemy, że manipulator znajduje się na środku platformy ($d_x = d_y = 0$), a parametry geometryczne manipulatora mobilnego zadane są jak następuje: $l_1 = l_2 = l_3 = 0.2$, $l_0 = 1$, $r = 0.5$, $l = 1$. Poszukiwania konfiguracji optymalnych ograniczymy do stałych funkcji sterujących ($i = 1, 2$; $j = 0$), przyjmujących wartości z zakresu $|c_{ij}| \leq 3$, oraz kątów przegubowych manipulatora $(x_1, x_2, x_3) \in [0, 2\pi]$. Wyniki

otrzymane dla różnych wartości horyzontu czasowego T oraz ustalonej postury początkowej manipulatora mobilnego $q_0 = (0, 0, 0, 0)$ zamieszczono w tabeli (8.21).

horyzont czasowy sterowania	optymalna konfiguracja	lokalna dystorsja
$T = \pi$	$(c_{10}, c_{20}) = (3, 3)$ $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$	$\tilde{d}_{q_0, T}(c, x) = 824.317$
$T = 2\pi$	$(c_{10}, c_{20}) = (3, 3)$ $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$	$\tilde{d}_{q_0, T}(c, x) = 6255.100$
$T = 3\pi$	$(c_{10}, c_{20}) = (3, 3)$ $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$	$\tilde{d}_{q_0, T}(c, x) = 20758.000$

Tab. 8.21: Optymalna konfiguracja manipulatora mobilnego typu (nh,h) - planarny manipulator holonomiczny typu 3R na platformie dwukołowej ($\tilde{\mathcal{X}} = R^2$) - maksymalizacja lokalnej dystorsji.

Jedną z uzyskanych w ten sposób konfiguracji manipulatora mobilnego (trajektorię platformy oraz posturę potrójnego wahadła) przedstawia rysunek (8.24). Na jego podstawie wnioskujemy, że w konfiguracji optymalnej platforma manipulatora mobilnego porusza się po prostej, natomiast jego ramię jest wysunięte jak najdalej w kierunku jazdy platformy (ten sam wynik uzyskaliśmy maksymalizując lokalną zręczność kinematyczną tego manipulatora umieszczonego na samochodzie kinematycznym (patrz podrozdział 8.1.3)). Podobne konfiguracje optymalne (tabela 8.22) otrzymaliśmy dla funkcji sterujących zawierających pierwsze



Rys. 8.24: Optymalna konfiguracja manipulatora typu (nh,h) - planarny manipulator holonomiczny typu 3R na platformie dwukołowej - maksymalizacja lokalnej dystorsji ($\tilde{\mathcal{X}} = R^2$, $T = \pi$). Współczynnik uwarunkowania $\tilde{\kappa}_{q_0, T}(c, x) = 1459.77$, wartości własne $\lambda_{D_{q_0, T}}(c, x) = \{817.47, 6.28, 0.56\}$, zręczność $\tilde{d}_{q_0, T}(c, x) = 53.63$.

harmoniczne ($i = 1, 2$; $j = 0, 1, 2$). Jest ciekawe, że optymalna postura manipulatora holonomicznego umieszczonego na platformie odpowiada konfiguracji osobliwej tego manipulatora.

Minimalizacja lokalnej dystorsji kinematycznej

W tym paragrafie, w celu uzyskania optymalnej konfiguracji rozważanego manipulatora mobilnego, będziemy poszukiwać funkcji sterujących ($u_1(\cdot), u_2(\cdot)$) oraz zmiennych przegubowych (x_1, x_2, x_3), takich

horyzont czasowy sterowania	optymalna konfiguracja	lokalna dystorsja
$T = \pi$	$(c_{10}, c_{11}, c_{12}, c_{20}, c_{21}, c_{22}) =$ $= \{(3, -3, -3, 3, -3, -3), (-3, 3, 3, -3, 3, 3)\}$ $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$	$\tilde{d}_{q_0, T}(c, x) = 1.4284 \cdot 10^3$
$T = 2\pi$	$(c_{10}, c_{11}, c_{12}, c_{20}, c_{21}, c_{22}) =$ $= \{(3, -3, -3, 3, -3, -3), (-3, 3, 3, -3, 3, 3)\}$ $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$	$\tilde{d}_{q_0, T}(c, x) = 1.0998 \cdot 10^4$
$T = 3\pi$	$(c_{10}, c_{11}, c_{12}, c_{20}, c_{21}, c_{22}) =$ $= \{(3, -3, -3, 3, -3, -3), (-3, 3, 3, -3, 3, 3)\}$ $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$	$\tilde{d}_{q_0, T}(c, x) = 3.6662 \cdot 10^4$

Tab. 8.22: Optymalna konfiguracja manipulatora mobilnego typu (nh,h) - planarny manipulator holonomiczny typu 3R na platformie dwukołowej ($\tilde{\mathcal{X}} = R^6$) - maksymalizacja lokalnej dystorsji.

które będą minimalizowały lokalną dystorsję (5.24). Niezbędne obliczenia wykonujemy przy założeniach przyjętych jak w części dotyczącej maksymalizacji lokalnej dystorsji. W tabelach (8.23) oraz (8.24) zamieszczono wyniki uzyskane odpowiednio dla stałych funkcji sterujących ($i = 1, 2; j = 0$) oraz funkcji zawierających pierwsze harmoniczne ($i = 1, 2; j = 0, 1, 2$).

horyzont czasowy sterowania	optymalna konfiguracja (c, x)	lokalna dystorsja
$T = \pi$	$(c_{10}, c_{20}) = \{(a, -a), (-a, a)\} \forall a \in \langle -3, 3 \rangle$ $(x_1, x_2, x_3) = (\frac{\pi}{2}, \frac{104\pi}{180}, \frac{151\pi}{180})$	$\tilde{d}_{q_0, T}(c, x) = 6.3432$
$T = 2\pi$	$(c_{10}, c_{20}) = \{(a, -a), (-a, a)\} \forall a \in \langle -3, 3 \rangle$ $(x_1, x_2, x_3) = (\frac{\pi}{2}, \frac{104\pi}{180}, \frac{151\pi}{180})$	$\tilde{d}_{q_0, T}(c, x) = 12.6264$
$T = 3\pi$	$(c_{10}, c_{20}) = \{(a, -a), (-a, a)\} \forall a \in \langle -3, 3 \rangle$ $(x_1, x_2, x_3) = (\frac{\pi}{2}, \frac{104\pi}{180}, \frac{151\pi}{180})$	$\tilde{d}_{q_0, T}(c, x) = 18.9100$

Tab. 8.23: Optymalna konfiguracja manipulatora mobilnego typu (nh,h) - planarny manipulator holonomiczny typu 3R na platformie dwukołowej ($\tilde{\mathcal{X}} = R^2$) - minimalizacja lokalnej dystorsji.

Rezultaty zamieszczone w tabelach oraz rysunek (8.25) dowodzą, że w konfiguracji optymalnej platforma manipulatora mobilnego kręci się wokół własnej osi.

8.3.2. Manipulator typu (nh,nh): planarny manipulator nieholonomiczny typu 3R na platformie dwukołowej

Rozpatrzmy teraz manipulator mobilny wyposażony w planarny manipulator nieholonomiczny o trzech stopniach swobody. Model kinematyki skonstruowanego w ten sposób manipulatora mobilnego jest opisany zależnościami (7.13) i (7.14).

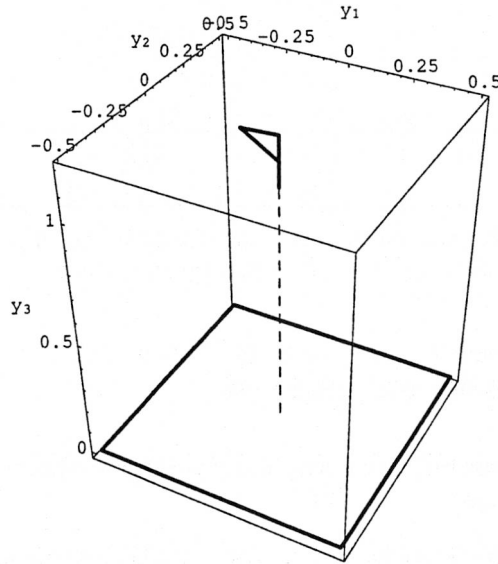
OPTYMALNA GEOMETRIA

Minimalizacja globalnej dystorsji kinematycznej

Minimalizując globalną dystorsję, będziemy starali się optymalnie zaprojektować długość ramion manipulatora nieholonomicznego (l_1, l_2, l_3). Wartości pozostałych parametrów geometrycznych oraz horyzontu czasowego T , podobnie jak współrzędne punktu zamontowania manipulatora na platformie (d_x, d_y), przyjmujemy takie same jak dla odpowiedniego manipulatora mobilnego typu (nh,h). Przełożenia przekładni

horyzont czasowy sterowania	optymalna konfiguracja (c, x)	lokalna dystorsja
$T = \pi$	$(c_{10}, c_{11}, c_{12}, c_{20}, c_{21}, c_{22}) = (a, b, c, -a, -b, -c) \forall a, b, c \in \langle -3, 3 \rangle$ $(x_1, x_2, x_3) = (\frac{\pi}{2}, \frac{104\pi}{180}, \frac{151\pi}{180})$	$\tilde{d}_{q_0, T}(c, x) = 6.3432$
$T = 2\pi$	$(c_{10}, c_{11}, c_{12}, c_{20}, c_{21}, c_{22}) = (a, b, c, -a, -b, -c) \forall a, b, c \in \langle -3, 3 \rangle$ $(x_1, x_2, x_3) = (\frac{\pi}{2}, \frac{104\pi}{180}, \frac{151\pi}{180})$	$\tilde{d}_{q_0, T}(c, x) = 12.6264$
$T = 3\pi$	$(c_{10}, c_{11}, c_{12}, c_{20}, c_{21}, c_{22}) = (a, b, c, -a, -b, -c) \forall a, b, c \in \langle -3, 3 \rangle$ $(x_1, x_2, x_3) = (\frac{\pi}{2}, \frac{104\pi}{180}, \frac{151\pi}{180})$	$\tilde{d}_{q_0, T}(c, x) = 18.9100$

Tab. 8.24: Optymalna konfiguracja manipulatora mobilnego typu (nh,h) - planarny manipulator holonomiczny typu 3R na platformie dwukołowej ($\mathcal{X} = R^6$) - minimalizacja lokalnej dystorsji.



Rys. 8.25: Optymalna konfiguracja manipulatora typu (nh,h) - planarny manipulator holonomiczny typu 3R na platformie dwukołowej - minimalizacja lokalnej dystorsji ($\mathcal{X} = R^2$, $T = \pi$). Współczynnik uwarunkowania $\tilde{\kappa}_{q_0, T}(c, x) = 86.35$, wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0, T}}(c, x) = \{3.195, 3.111, 0.037\}$, zrzętność $\tilde{m}_{q_0, T}(c, x) = 0.61$.

manipulatora pokładowego wynoszą $a_2 = a_3 = 0.1$. Na wartości kątów przegubów manipulatora wpływamy pośrednio, poprzez stałe ($k = 2; i = 1, 2; j = 0$) i ograniczone ($|c_{ij}^k| \leq 1$) funkcje sterujące. Podobnie ograniczone są funkcje sterujące platformy ($k = 1; i = 1, 2; j = 0, |c_{ij}^k| \leq 1$). Zakładamy także, że całkowita długość ramion manipulatora nieholonomicznego została ustalona ($L = l_1 + l_2 + l_3$). W tabeli (8.25) zebrano odpowiednie wyniki symulacji. Okazuje się, że optymalny stosunek długości ramion manipulatora przy ograniczeniu $l_1, l_2, l_3 \geq 0$ ma się jak

$$l_1 : l_2 : l_3 = 1 : 0 : 0.987, \quad (8.6)$$

a zatem następuje eliminacja środkowego ramienia, przy czym długości pozostałych ramion są zbliżone.

ograniczenia	optymalna geometria	globalna dystorsja
$L = 3$ $l_1, l_2, l_3 \geq 0$	$(l_1, l_2, l_3) = (1.5092, 0, 1.4908)$	$\tilde{D}_{q_0, T}(K_{q_0, T}) = 3.7749$
$L = 3$ $l_1, l_2, l_3 \geq 0.1$	$(l_1, l_2, l_3) = (1.4594, 0.1, 1.4406)$	$\tilde{D}_{q_0, T}(K_{q_0, T}) = 3.8072$
$L = 6$ $l_1, l_2, l_3 \geq 0$	$(l_1, l_2, l_3) = (3.0183, 0, 2.9817)$	$\tilde{D}_{q_0, T}(K_{q_0, T}) = 11.7270$
$L = 6$ $l_1, l_2, l_3 \geq 0.1$	$(l_1, l_2, l_3) = (2.9686, 0.1, 2.9314)$	$\tilde{D}_{q_0, T}(K_{q_0, T}) = 11.7813$

Tab. 8.25: Optymalna geometria (l_1, l_2, l_3) manipulatora mobilnego typu (nh,nh) - planarny manipulator nieholonomiczny typu 3R na platformie dwukołowej - minimalizacja globalnej dystorsji.

Maksymalizacja globalnej dystorsji kinematycznej

Optymalna geometria manipulatora podwójnie nieholonomicznego wygląda zupełnie inaczej, gdy pod uwagę weźmiemy maksymalną wartość globalnej dystorsji. Wyniki zamieszczone w tabeli (8.26) dowodzą, że przy ograniczeniach takich samych jak w poprzednim paragrafie, istotną rolę odgrywa jedynie ostatnie ramię manipulatora. Natomiast, jeśli założymy, że żadne z ramion nie może zniknąć ($l_1, l_2, l_3 \geq 0.1$), drugie ramię będzie najdłuższe

$$(l_1, l_2, l_3) = (0.1, L - l_1 - l_3, 0.1). \quad (8.7)$$

ograniczenia	optymalna geometria	globalna dystorsja
$L = 3$ $l_1, l_2, l_3 \geq 0$	$(l_1, l_2, l_3) = (0, 0, 3)$	$\tilde{D}_{q_0, T}(K_{q_0, T}) = 4.6870$
$L = 3$ $l_1, l_2, l_3 \geq 0.1$	$(l_1, l_2, l_3) = (0.1, 2.8, 0.1)$	$\tilde{D}_{q_0, T}(K_{q_0, T}) = 4.6194$
$L = 6$ $l_1, l_2, l_3 \geq 0$	$(l_1, l_2, l_3) = (0, 0, 6)$	$\tilde{D}_{q_0, T}(K_{q_0, T}) = 15.3555$
$L = 6$ $l_1, l_2, l_3 \geq 0.1$	$(l_1, l_2, l_3) = (0.1, 5.8, 0.1)$	$\tilde{D}_{q_0, T}(K_{q_0, T}) = 15.2165$

Tab. 8.26: Optymalna geometria (l_1, l_2, l_3) manipulatora mobilnego typu (nh,nh) - planarny manipulator nieholonomiczny typu 3R na platformie dwukołowej - maksymalizacja globalnej dystorsji.

OPTYMALNA KONFIGURACJA

Maksymalizacja lokalnej dystorsji kinematycznej

Na zakończenie wyliczymy konfiguracje manipulatora podwójnie nieholonomicznego gwarantujące maksymalną wartość lokalnej dystorsji (5.35). Manipulator nieholonomiczny umieszczamy na środku platformy $d_x = d_y = 0$. Parametry geometryczne, przełożenia przekładni nieholonomicznych i postura początkowa platformy i manipulatora są następujące: $l_1 = l_2 = l_3 = 0.2$, $l = 1$, $l_0 = 1$, $r = 0.5$, $a_2 = a_3 = 0.1$, $p_0 = (30^\circ, 30^\circ, 30^\circ)$, $q_0 = (0, 0, 0, 0)$. Rozważamy stałe ($k = 1, 2$; $i = 1, 2$; $j = 0$) i ograniczone ($|c_{ij}^k| \leq 3$) funkcje sterujące manipulatora mobilnego. Tabela (8.27) pokazuje wyniki uzyskane dla różnych wartości horyzontu czasowego T .

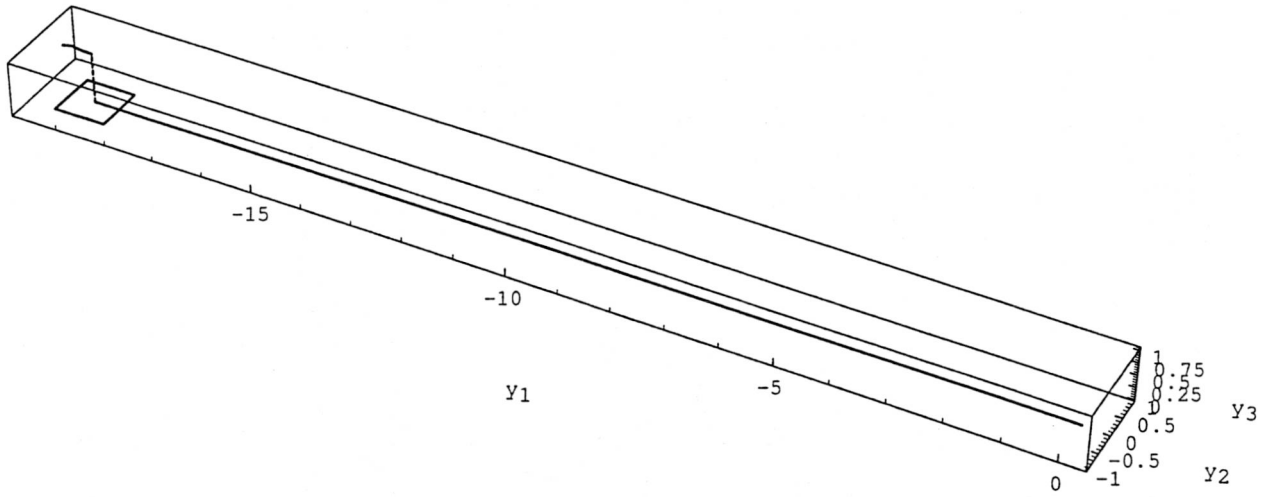
horyzont czasowy sterowania	optymalna konfiguracja	lokalna dystorsja
$T = \pi$	$(c_{10}^1, c_{20}^1) = (-3, -3)$ $(c_{10}^2, c_{20}^2) = (0.8215, -3)$ $\{q_1, q_2, q_3, q_4\} = \{-18.850, 0.000, -2160^\circ, -2160^\circ\}$ $\{p_1, p_2, p_3\} = \{178^\circ, -9^\circ, 24^\circ\}$	$\tilde{d}_{q_0, T}(c^1, c^2) = 824.174$
$T = 2\pi$	$(c_{10}^1, c_{20}^1) = (-3, -3)$ $(c_{10}^2, c_{20}^2) = (0.43676, -1.9973)$ $\{q_1, q_2, q_3, q_4\} = \{-37.699, 0.000, -4321^\circ, -4321^\circ\}$ $\{p_1, p_2, p_3\} = \{187^\circ, -19^\circ, 18^\circ\}$	$\tilde{d}_{q_0, T}(c^1, c^2) = 6.255 \cdot 10^3$
$T = 3\pi$	$(c_{10}^1, c_{20}^1) = (-3, -3)$ $(c_{10}^2, c_{20}^2) = (0.9440, -3)$ $\{q_1, q_2, q_3, q_4\} = \{-56.549, 0.000, -6481^\circ, -6481^\circ\}$ $\{p_1, p_2, p_3\} = \{180^\circ, -4^\circ, 9^\circ\}$	$\tilde{d}_{q_0, T}(c^1, c^2) = 2.076 \cdot 10^4$

Tab. 8.27: Optymalna konfiguracja manipulatora mobilnego typu (nh,nh) - planarny manipulator nieholonomiczny typu 3R na platformie dwukółowej ($\tilde{\mathcal{X}} = R^4$) - maksymalizacja lokalnej dystorsji.

Rysunek (8.26) ilustruje jedną z konfiguracji optymalnych zamieszczonych w tabeli. Jest ona zbliżona do konfiguracji optymalnej uzyskanej dla przypadku odpowiedniego manipulatora mobilnego typu (nh,h). Różnica polega na tym, że teraz platforma mobilna porusza się po prostej, ale w kierunku przeciwnym do wcześniej uzyskanego, natomiast optymalna konfiguracja manipulatora mobilnego odpowiada znalezionej wcześniej konfiguracji zręcznej manipulatora podwójnie nieholonomicznego.

Minimalizacja lokalnej dystorsji kinematycznej

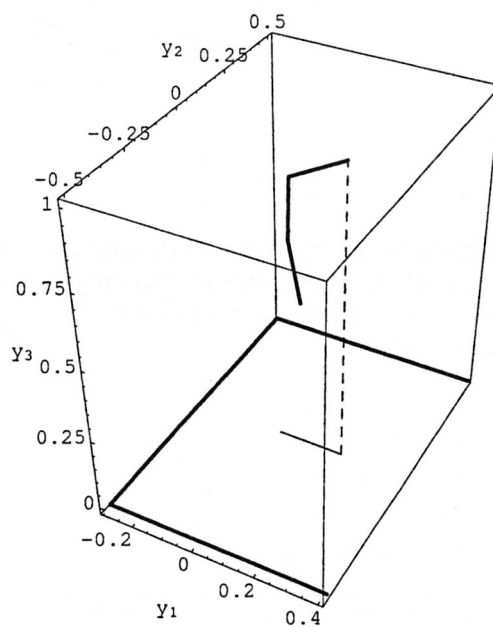
Na zakończenie przyjrzymy się konfiguracjom optymalnym manipulatora typu (nh,nh), minimalizującym lokalną dystorsję. Wszystkie założenia są takie same, jak w poprzednim paragrafie. Rezultaty obliczeń zawarto w tabeli (8.28) oraz przedstawiono na rysunku (8.27). W konfiguracji optymalnej platforma manipulatora porusza się po prostej. Bardziej szczegółowe badania dowodzą, że wraz z upływem czasu rośnie anizotropowość uzyskanych konfiguracji.



Rys. 8.26: Optymalna konfiguracja manipulatora mobilnego typu (nh,nh) - planarny manipulator nieholonomiczny typu 3R na platformie dwukołowej - maksymalizacja lokalnej dystorsji ($\mathcal{X} = R^4$, $T = \pi$). Współczynnik uwarunkowania $\tilde{\kappa}_{q_0,p_0,T}(c^1, c^2) = 526.67$, wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0,p_0,T}}(c^1, c^2) = \{816.342, 6.283, 1.550\}$, zręczność $\tilde{m}_{q_0,T}(c^1, c^2) = 89.17$.

horyzont czasowy sterowania	optymalna konfiguracja	lokalna dystorsja
$T = \pi$	$(c_{10}^1, c_{20}^1, c_{10}^2, c_{20}^2) = (0.033, 0.033, 0.992, 3.000)$ $\{q_1, q_2, q_3, q_4\} = \{0.209, 0.000, 23^\circ, 23^\circ\}$ $\{p_1, p_2, p_3\} = \{208^\circ, 60^\circ, 13^\circ\}$	$\tilde{d}_{q_0,T}(c^1, c^2) = 6.787$
$T = 2\pi$	$(c_{10}^1, c_{20}^1, c_{10}^2, c_{20}^2) = (0.014, 0.014, 0.267, 3.000)$ $\{q_1, q_2, q_3, q_4\} = \{0.172, 0.000, 20^\circ, 20^\circ\}$ $\{p_1, p_2, p_3\} = \{126^\circ, 124^\circ, 41^\circ\}$	$\tilde{d}_{q_0,T}(c^1, c^2) = 12.846$
$T = 3\pi$	$(c_{10}^1, c_{20}^1, c_{10}^2, c_{20}^2) = (-0.006, -0.006, 0.152, 2.632)$ $\{q_1, q_2, q_3, q_4\} = \{-0.119, 0.000, -13^\circ, -13^\circ\}$ $\{p_1, p_2, p_3\} = \{112^\circ, 153^\circ, 63^\circ\}$	$\tilde{d}_{q_0,T}(c^1, c^2) = 19.013$

Tab. 8.28: Optymalna konfiguracja manipulatora mobilnego typu (nh,nh) - planarny manipulator nieholonomiczny typu 3R na platformie dwukołowej ($\mathcal{X} = R^4$) - minimalizacja lokalnej dystorsji.



Rys. 8.27: Optymalna konfiguracja manipulatora mobilnego typu (nh,nh) - planarny manipulator nieholonomiczny typu 3R na platformie dwukołowej - minimalizacja lokalnej dystorsji ($\mathcal{X} = R^4$, $T = \pi$). Współczynnik uwarunkowania $\tilde{\kappa}_{q_0,p_0,T}(c^1, c^2) = 223.80$, wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0,p_0,T}}(c^1, c^2) = \{6.714, 0.074, 0.030\}$, zręczność $\tilde{m}_{q_0,T}(c^1, c^2) = 0.12$.

9. Wyznaczenie dynamicznych miar jakości manipulatorów mobilnych

9.1. Zręczność

9.1.1. Manipulator typu (nh,0): robot mobilny MK

Kinematykę oraz dynamikę robota mobilnego MK wraz z odpowiednią funkcją wyjścia opisuje równanie (7.17), natomiast sam robot został przedstawiony na rysunku (7.5).

OPTYMALNA KONFIGURACJA

Optymalizacja konfiguracji polega na znalezieniu takich sterowań robota MK ($u_1(\cdot), u_2(\cdot)$), dla których lokalna zręczność dynamiczna (5.46) przyjmuje największą wartość. Uwagę ograniczymy tu do przypadku sterowań stałych ($i = 1, 2, j = 0$) oraz funkcji sterujących zawierających pierwsze harmoniczne ($i = 1, 2, j = 0, 1, 2$), podlegających następującym ograniczeniom: $|c_{ij}| \leq 0.5$ dla $j = 0$ oraz $|c_{ij}| \leq 0.25$ dla $j = 1, 2$. W tabelach (9.1) i (9.2) zostały podane wyniki optymalizacji konfiguracji robota mobilnego MK, uzyskane dla rzeczywistych parametrów geometrycznych robota: $R = 0.254$, $d = 0.225$, $\ell = 0.12$, $r_c = 0.035$, $l_c = 0.165$, $m_o = 0.5$, $m_k = 2$, $m_c = 7$, zadanej postury $q_0 = 0$, prędkości początkowych $\eta_0 = 0$, przy różnych wartościach horyzontu czasowego sterowania T .

horyzont czasowy sterowania	optymalna konfiguracja (c)
$T = 3$	$(c_{10}, c_{20}) = \{(\pm 0.5, \pm 0.5)\}$ $\tilde{m}_{q_0, \eta_0, T}(c) = 0.0112$
$T = 6$	$(c_{10}, c_{20}) = \{(\pm 0.5, \pm 0.5)\}$ $\tilde{m}_{q_0, \eta_0, T}(c) = 5.5502$
$T = 7$	$(c_{10}, c_{20}) = \{(\pm 0.4432, \pm 0.5), (\pm 0.5, \pm 0.4432)\}$ $\tilde{m}_{q_0, \eta_0, T}(c) = 40.7099$
$T = 12$	$(c_{10}, c_{20}) = \{(\pm 0.4824, \pm 0.5), (\pm 0.5, \pm 0.4824)\}$ $\tilde{m}_{q_0, \eta_0, T}(c) = 6.6540 * 10^4$
$T = 22$	$(c_{10}, c_{20}) = \{(\pm 0.4973, \pm 0.5), (\pm 0.5, \pm 0.4973)\}$ $\tilde{m}_{q_0, \eta_0, T}(c) = 1.8854 * 10^8$

Tab. 9.1: Optymalne konfiguracje robota mobilnego MK ($\tilde{\mathcal{X}} = R^2$)

Rysunki (9.1) i (9.2) ilustrują wybrane zręczne konfiguracje robota mobilnego MK (optymalne trajektorie robota), wraz z odpowiednimi elipsoidami zręczności dynamicznej, uzyskane dla stałych sterowań (9.1) oraz sterowań zawierających pierwsze harmoniczne (9.2).

Z analizy uzyskanych wyników wnioskujemy, że istnieje pewna graniczna wartość horyzontu sterowania ($T = 7$), po przekroczeniu której optymalna konfiguracja robota zmienia się z odpowiadającej jeździe

horyzont czasowy sterowania	optimalna konfiguracja (c)
$T = 3$	$(c_{10}, c_{11}, c_{12}, c_{20}, c_{21}, c_{22}) = \{(\pm 0.5, \pm 0.25, \pm 0.25, \pm 0.5, \pm 0.25, \pm 0.25)\}$ $\tilde{m}_{q_0, \eta_0, T}(c) = 0.0306$
$T = 7$	$(c_{10}, c_{11}, c_{11}, c_{20}, c_{21}, c_{22}) = \{(\pm 0.4589, \pm 0.1802, \pm 0.25, \pm 0.5, \pm 0.25, \pm 0.25),$ $(\pm 0.5, \pm 0.25, \pm 0.25, \pm 0.4589, \pm 0.1802, \pm 0.25)\}$ $\tilde{m}_{q_0, \eta_0, T}(c) = 168.5453$

Tab. 9.2: Optimalne konfiguracje robota mobilnego MK ($\tilde{\mathcal{X}} = R^6$)

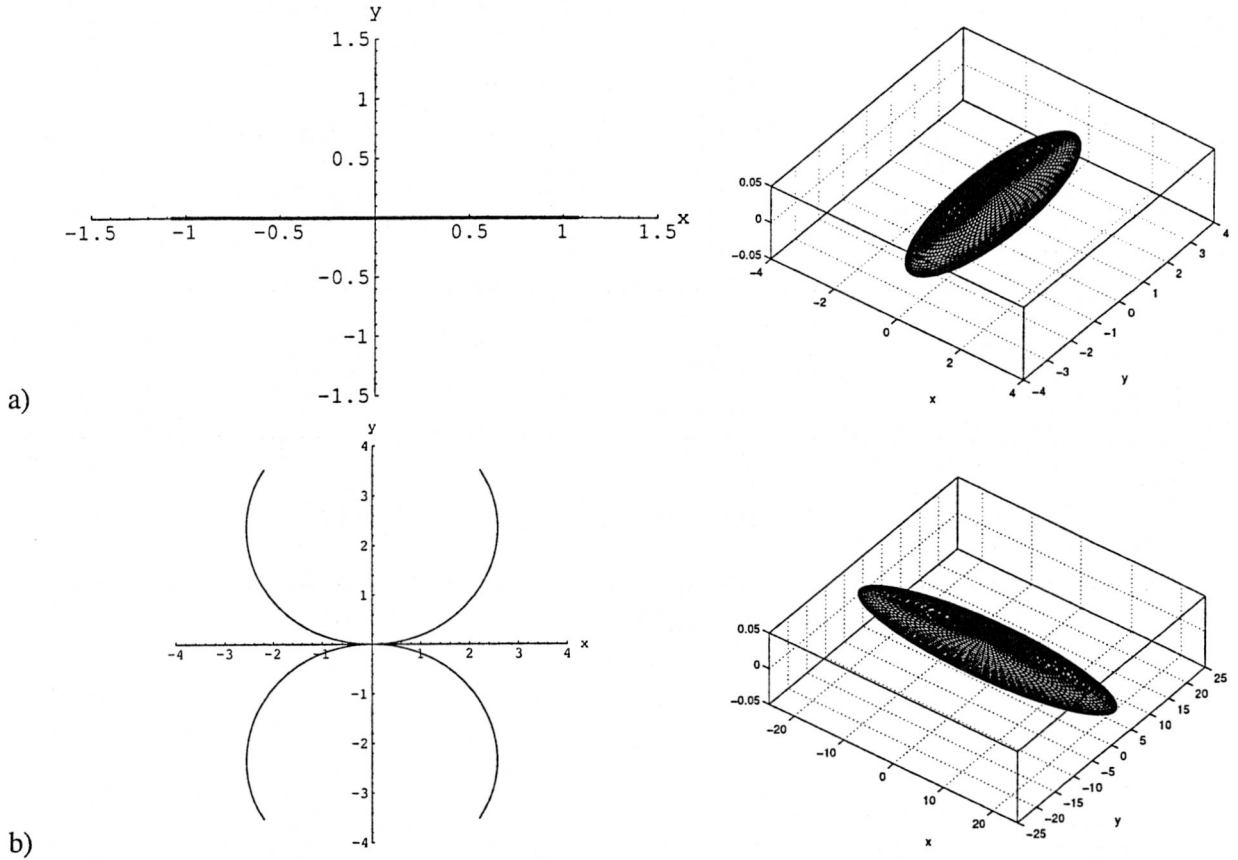
po prostej na konfigurację odpowiadającą jeździe po okręgu. Ruch po prostej zachodzi w jednym z dwóch możliwych kierunków (rysunki (9.1a) i (9.2a)), podczas gdy ruch po okręgu może odbywać się w czterech różnych kierunkach (rysunki (9.1b) i (9.2b)). Dodanie pierwszych harmonicznych do stałych funkcji sterujących przyczynia się do wzrostu lokalnej zręczności dynamicznej, a co za tym idzie - do zwiększenia objętości elipsoidy zręczności dynamicznej. Warto też zauważyć, że wraz ze wzrostem horyzontu czasowego T zwiększa się anizotropowość konfiguracji robota mobilnego MK.

OPTIMALNA GEOMETRIA I DYNAMIKA

W dziedzinie optymalizacji geometrii robota w pierwszej kolejności wyznaczmy wartości parametrów geometrycznych platformy (d, ℓ, R), w taki sposób, by maksymalizować globalną zręczność dynamiczną (5.47). Dodatkowo uwzględnimy fakt, że zarówno materiał, z którego wykonano koła jak i oś charakteryzuje się pewną gęstością, a zatem masy kół i osi zmieniają się wraz ze zmianami ich wymiarów. Ponadto zakładamy, że długość korpusu ℓ_c nie może przekraczać długości osi d . Mamy zatem zadane ograniczenia na wymiary platformy $r_c = 0.035$, $\ell_c = 0.95d$, $m_o = 2.222d$, $m_c = 7$, $m_k = 8R$. Zakładamy, że całkowanie odbywa się po zbiorze odpowiadającym stałym funkcjom sterującym ($|c_{ij}| \leq 0.5$, $k = 1$, $i = 1, 2$, $j = 0$). Wyniki uzyskane dla różnych T zamieszczono w tabeli (9.3). Jak się okazuje, maksymalną wartość globalnej zręczności dynamicznej uzyskujemy, bez względu na wartość horyzontu sterowania, poprzez zmniejszenie promienia kół R , długości osi kół d oraz wysokości zawieszenia korpusu robota ℓ . Biorąc pod uwagę sens miary zręczności interpretujemy to następująco. Minimalizacja rozmiarów platformy powoduje, że momenty inercji poszczególnych jej elementów (w tym przypadku osi, kół oraz korpusu) będą możliwie małe. Dzięki temu robot będzie potrafił w szybki i łatwy sposób zmieniać kierunek ruchu, nawet przy małych zmianach sił lub momentów sterujących. Innymi słowy, platforma będzie wrażliwa na zmiany sił i momentów napędowych. Optimalna długość osi zawieszenia korpusu ℓ sugeruje, że korpus zręcznego robota MK zachodzi na oś kół. Przy takiej geometrii macierz odsprężenia robota mobilnego MK staje się nieosobliwa. Umożliwia to zastosowanie statycznego sprzężenia zwrotnego w układzie śledzenia trajektorii tego robota.

ograniczenia	optimalna geometria	dynamiczna zręczność globalna
$T = 3, \frac{1}{2}r_c \leq \ell \leq R - r_c$ $0.2 \leq R, d \leq 0.4$	$(d, \ell, R) = (0.2, 0.0175, 0.2)$	$\tilde{\mathcal{M}}_{q_0, \eta_0, T}(K_{q_0, \eta_0, T}) = 0.0094$
$T = 5, \frac{1}{2}r_c \leq \ell \leq R - r_c$ $0.2 \leq R, d \leq 0.4$	$(d, \ell, R) = (0.2, 0.0175, 0.2)$	$\tilde{\mathcal{M}}_{q_0, \eta_0, T}(K_{q_0, \eta_0, T}) = 0.0700$
$T = 7, \frac{1}{2}r_c \leq \ell \leq R - r_c$ $0.2 \leq R, d \leq 0.4$	$(d, \ell, R) = (0.2, 0.0175, 0.2)$	$\tilde{\mathcal{M}}_{q_0, \eta_0, T}(K_{q_0, \eta_0, T}) = 0.2232$

Tab. 9.3: Optimalna geometria robota mobilnego MK (d, ℓ, R).



Rys. 9.1: Trajektorie odpowiadające zręcznym konfiguracjom robota mobilnego MK wraz z elipsoidami zręczności dynamicznej ($j = 0$) a) $T = 3$: współczynnik uwarunkowania $\tilde{\kappa}_{q_0, \eta_0, T}(c) = 259.298$, wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0, \eta_0, T}(c)} = \{1.0262, 0.0009, 11.8680\}$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0, \eta_0, T}(c) = 12.895$; b) $T = 7$: współczynnik uwarunkowania $\tilde{\kappa}_{q_0, \eta_0, T}(c) = 1.670 \cdot 10^7$, wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0, \eta_0, T}(c)} = \{2906.9, 34.6, 0.0004\}$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0, \eta_0, T}(c) = 2942$.

W kolejnym kroku wyznaczmy optymalne rozmiary korpusu robota (r_c, ℓ_c) i promień kół (R). Optymalizacji parametrów (r_c, ℓ_c, R) dokonamy przy ustalonych wartościach pozostałych parametrów: $d = 0.225$, $\ell = 0.12$, $m_o = 2.222d$, $m_c = 7$, $m_k = 8R$. Wyniki optymalizacji geometrii uzyskane dla różnych wartości horyzontu sterowania T zebrano w tabeli (9.4). W tym przypadku preferowany jest minimalny promień kół R oraz krótki korpus ℓ_c o dużym promieniu r_c .

Optymalną masę robota, czyli odpowiednio masy osi m_o , kół m_k i korpusu m_c , wyznaczmy przy następujących pozostałych parametrach geometrycznych: $R = 0.254$, $d = 0.225$, $\ell = 0.12$, $r_c = 0.035$, $\ell_c = 0.165$ i horyzoncie czasowym sterowania $T = 3$. Z wyników podanych w tabeli (9.5) wynika, że zręczny robot MK, to taki, którego oś jest możliwie najcięższa, natomiast koła i korpus lekkie.

Na zakończenie zoptymalizujemy wyłącznie rozmiary i masę korpusu (r_c, ℓ_c, m_c). Pozostałe parametry zadane są jak następuje: $R = 0.254$, $d = 0.225$, $\ell = 0.12$, $m_o = 0.5$, $m_k = 2$, $T = 3$. Uzyskany wynik zawiera tabela (9.6). Dużą globalną zręczność dynamiczną zapewnia długi i lekki korpus, o małej objętości.

ograniczenia	optymalna geometria	dynamiczna zręczność globalna
$T = 3$ $\frac{1}{4}\ell \leq r_c \leq \frac{1}{2}\ell$ $\frac{1}{4}d \leq \ell_c \leq \frac{3}{4}d$ $0.2 \leq R \leq 0.4$	$(r_c, \ell_c, R) = (0.048, 0.05625, 0.2)$	$\tilde{\mathcal{M}}_{q_0, \eta_0, T}(K_{q_0, \eta_0, T}) = 0.3826 * 10^{-4}$
$T = 5$ $\frac{1}{4}\ell \leq r_c \leq \frac{1}{2}\ell$ $\frac{1}{4}d \leq \ell_c \leq \frac{3}{4}d$ $0.2 \leq R \leq 0.4$	$(r_c, \ell_c, R) = (0.06, 0.05625, 0.2)$	$\tilde{\mathcal{M}}_{q_0, \eta_0, T}(K_{q_0, \eta_0, T}) = 0.0286$
$T = 7$ $\frac{1}{4}\ell \leq r_c \leq \frac{1}{2}\ell$ $\frac{1}{4}d \leq \ell_c \leq \frac{3}{4}d$ $0.2 \leq R \leq 0.4$	$(r_c, \ell_c, R) = (0.06, 0.05625, 0.2)$	$\tilde{\mathcal{M}}_{q_0, \eta_0, T}(K_{q_0, \eta_0, T}) = 0.3819$

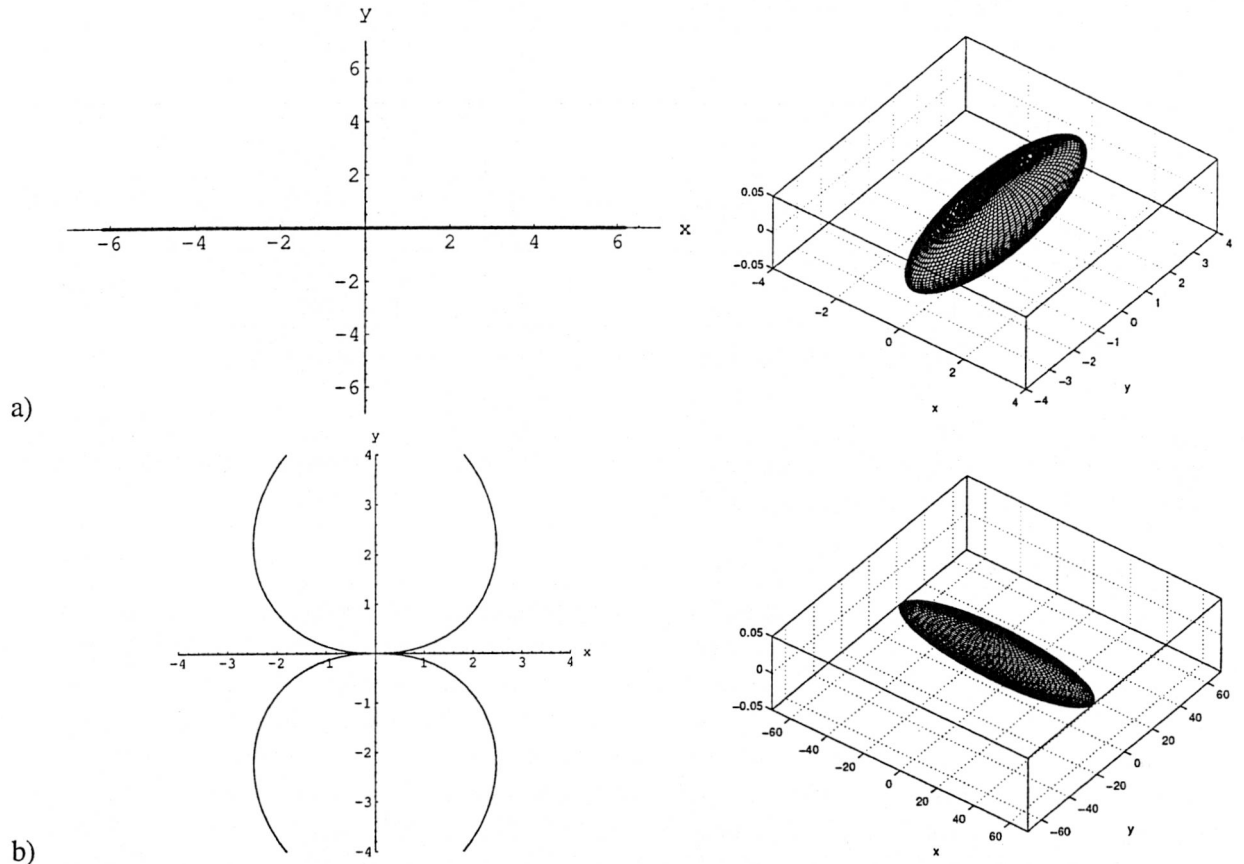
Tab. 9.4: Optymalna geometria robota mobilnego MK (r_c, ℓ_c, R) .

ograniczenia	optymalna dynamika	dynamiczna zręczność globalna
$0.2 \leq m_o \leq 3$ $0.2 \leq m_k \leq 5$ $0.2 \leq m_c \leq 10$	$(m_o, m_k, m_w) = (3, 0.057, 0.366)$	$\tilde{\mathcal{M}}_{q_0, \eta_0, T}(K_{q_0, \eta_0, T}) = 2.77 * 10^8$

Tab. 9.5: Optymalna dynamika robota mobilnego MK (m_o, m_k, m_w) .

ograniczenia	optymalna geometria i dynamika	dynamiczna zręczność globalna
$\frac{1}{4}\ell \leq r_c \leq \frac{1}{2}\ell$ $\frac{1}{4}d \leq \ell_c \leq \frac{3}{4}d$ $0.2 \leq m_w \leq 10$	$(r_c, \ell_c, m_w) = (0.03, 0.168, 0.38)$	$\tilde{\mathcal{M}}_{q_0, \eta_0, T}(K_{q_0, \eta_0, T}) = 2.44 * 10^6$

Tab. 9.6: Optymalna geometria i dynamika robota mobilnego MK (r_c, ℓ_c, m_w) .



Rys. 9.2: Trajektorie odpowiadające zręcznym konfiguracjom robota mobilnego MK wraz z elipsoidami zręczności dynamicznej ($j = 0, 1, 2$) a) $T = 3$: współczynnik uwarunkowania $\tilde{\kappa}_{q_0, \eta_0, T}(c) = 298.650$, wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0, \eta_0, T}}(c) = \{1.023, 0.002, 12.695\}$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0, \eta_0, T}(c) = 13.721$; b) $T = 7$: współczynnik uwarunkowania $\tilde{\kappa}_{q_0, \eta_0, T}(c) = 1.894 \cdot 10^7$, wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0, \eta_0, T}}(c) = \{3097.000, 40.107, 0.001\}$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0, \eta_0, T}(c) = 3137$.

9.1.2. Manipulator typu (nh,0): deskorolka

Kinematykę i dynamikę tego robota oraz jego funkcję wyjścia (opisującą położenie punktu na przodzie deski) definiuje równanie (7.21). Schemat robota przedstawia rysunek (7.6).

OPTYMALNA KONFIGURACJA

W pierwszym kroku znajdziemy konfiguracje zręczne robota typu deskorolka. W tym celu ustalamy warunki początkowe $(q_0, \eta_0) = (0, 1)$, długość $l = 0.3m$ oraz parametry dynamiczne robota: $m = 60kg$, $J_r = 0.72kg \cdot m^2$, $J_w = 0.13kg \cdot m^2$, $J = 0.5kg \cdot m^2$. Będziemy poszukiwać takich konfiguracji endogenicznych $(u_1(\cdot), u_2(\cdot))$, w których robot osiągnie maksymalną wartość lokalnej zręczności dynamicznej (5.46). Rozważane będą stałe funkcje sterujące ($i = 1, 2, j = 0$) oraz funkcje zawierające pierwsze harmoniczne ($i = 1, 2, j = 0, 1, 2$). Sterowania dopuszczalne będą mieściły się w zakresie $|c_{ij}| \leq 3$. Tabela (9.7) zawiera wyniki uzyskane dla różnych wartości horyzontu czasowego T .

Rysunki (9.3) i (9.4) obrazują zamieszczone w tabeli konfiguracje zręczne wraz z odpowiednimi elipsoidami zręczności dynamicznej. Ruch robota odbywa się w jednym z dwóch dopuszczalnych kierunków. Wzrost

horyzont czasowy sterowania	optimalne konfiguracje (c)
$T=3$ $i = 1, 2, j = 0$	$(c_{10}, c_{20}) = \{(\pm 0.185, \mp 3)\}$ $\tilde{m}_{q_0, \eta_0, T}(c) = 28.502$
$T=7$ $i = 1, 2, j = 0$	$(c_{10}, c_{20}) = \{(\pm 0.036, \mp 3)\}$ $\tilde{m}_{q_0, \eta_0, T}(c) = 24016$
$T=3$ $i = 1, 2, j = 0, 1, 2$	$(c_{10}, c_{11}, c_{12}, c_{20}, c_{21}, c_{22}) = \{(\mp 0.277, \pm 0.844, \mp 1.323, \mp 3, \mp 3, \pm 3)\}$ $\tilde{m}_{q_0, \eta_0, T}(c) = 780.562$
$T=7$ $i = 1, 2, j = 0, 1, 2$	$(c_{10}, c_{11}, c_{12}, c_{20}, c_{21}, c_{22}) = \{(\mp 0.110, \pm 0.412, \mp 0.385, \mp 3, \mp 3, \mp 3)\}$ $\tilde{m}_{q_0, \eta_0, T}(c) = 343070$

Tab. 9.7: Optimalne konfiguracje robota mobilnego typu deskorolka.

anizotropowości konfiguracji zręcznych jest spowodowany wzrostem horyzontu T , a także dodawaniem do funkcji sterujących kolejnych harmoniczych.

OPTYMALNA GEOMETRIA I DYNAMIKA

W celu wyznaczenia optymalnej geometrii deskorolki zakładamy następujące zależności: masa deski m zależy od masy rotora M ($m = \frac{5}{4}M$), natomiast moment bezwładności rotora J_r zależy od jego masy M i promienia r ($J_r = 2Mr^2$). Dane są długość $l = 0.3m$ oraz bezwładność deski $J = 0.5kg$ i kół $J_w = 0.13kg$. Na początek wyznaczmy masę rotora M , w następstwie czego będziemy mogli policzyć optymalny moment bezwładności rotora J_r oraz masę deski m . Ustalamy wartość promienia rotora r , $r = r_{nom} = 0.17m$. Zakładamy, że masa nominalna rotora wynosi $M_{nom} = 12kg$ i zmienia się w zakresie $50\%M_{nom} < M < 150\%M_{nom}$. Ograniczymy się do stałych funkcji sterujących ($i = 1, 2, j = 0$) z zakresu $|c_{ij}| \leq 3$. Tabela (9.8) zawiera wyniki uzyskane dla różnych wartości horyzontu czasowego T . Dla tak przyjętych założeń maksimum globalnej zręczności dynamicznej (5.47) deskorolki osiągniemy przy minimalnej masie rotora M , a co za tym idzie, przy minimalnej masie deski m i małej bezwładności rotora J_r .

ograniczenia	optymalna geometria i dynamika	dynamiczna zręczność globalna
$T = 3$ $ c_{ij} \leq 3$ $i = 1, 2, j = 0$ $6 < M < 18$ $m = \frac{5}{4}M$ $J_r = 2Mr^2$	$M = 6 \rightarrow \{m = 7.5, J_r = 0.347\}$	$\tilde{\mathcal{M}}_{q_0, \eta_0, T}(K_{q_0, \eta_0, T}) = 2.794$
$T = 5$ $ c_{ij} \leq 3$ $i = 1, 2, j = 0$ $6 < M < 18$ $m = \frac{5}{4}M$ $J_r = 2Mr^2$	$M = 6 \rightarrow \{m = 7.5, J_r = 0.347\}$	$\tilde{\mathcal{M}}_{q_0, \eta_0, T}(K_{q_0, \eta_0, T}) = 48.827$

Tab. 9.8: Optymalna geometria i dynamika robota mobilnego typu deskorolka (M, m, J_r).

Podobne wyniki uzyskujemy, gdy za pomocą wartości promienia r chcemy wyznaczyć optymalną bezwładność rotora J_r . Do poprzednio przyjętych założeń dokładamy następujące: masa rotora jest równa

jego masie nominalnej $M = M_{nom} = 12kg$, natomiast wartość promienia rotora zmienia się w zakresie $50\%r_{nom} < r < 150\%r_{nom}$. Tutaj, tak jak poprzednio, otrzymujemy minimalną wartość promienia r , a co za tym idzie małą bezwładność rotora J_r (tabela 9.9).

ograniczenia	optymalna geometria i dynamika	dynamiczna zręczność globalna
$T = 3$ $ c_{ij} \leq 3$ $i = 1, 2; j = 0$ $0.085 < r < 0.255$ $J_r = 2Mr^2$	$r = 0.085 \rightarrow \{J_r = 0.173\}$	$\tilde{\mathcal{M}}_{q_0, \eta_0, T}(K_{q_0, \eta_0, T}) = 3.476$
$T = 5$ $ c_{ij} \leq 3$ $i = 1, 2; j = 0$ $0.085 < r < 0.255$ $J_r = 2Mr^2$	$r = 0.085 \rightarrow \{J_r = 0.173\}$	$\tilde{\mathcal{M}}_{q_0, \eta_0, T}(K_{q_0, \eta_0, T}) = 51.551$

Tab. 9.9: Optymalna geometria i dynamika robota mobilnego typu deskorolka (r, J_r) .

Uzyskane wyniki stają się zrozumiałe, gdy przyjrzymy się bliżej ograniczeniom nałożonym na funkcje sterujące ($|c_{ij}| \leq 3$). Wydaje się oczywiste, że zawsze łatwiej będzie sterować lekkim i małym robotem. Sprawdźmy, czy optymalne wyniki zmieniają się, gdy uzależnimy zakres dopuszczalnych sterowań od wymiarów geometrycznych robota. Załóżmy mianowicie, że

$$\begin{aligned} |u_1| &= \beta M l^2 \\ |u_2| &= \alpha M r^2 \end{aligned}$$

Podstawiając do powyższych zależności $u_1 = u_2 = 3$ (z poprzednich ograniczeń), $M = M_{nom} = 12kg$, $l = 0.3m$ i $r = r_{nom} = 0.17m$ otrzymujemy

$$\alpha = 8.65, \quad \beta = 2.78.$$

Nowe ograniczenia na funkcje sterujące przyjmą postać

$$-2.78Ml^2 < u_1 < 2.78Ml^2, \quad -8.65Mr^2 < u_2 < 8.65Mr^2.$$

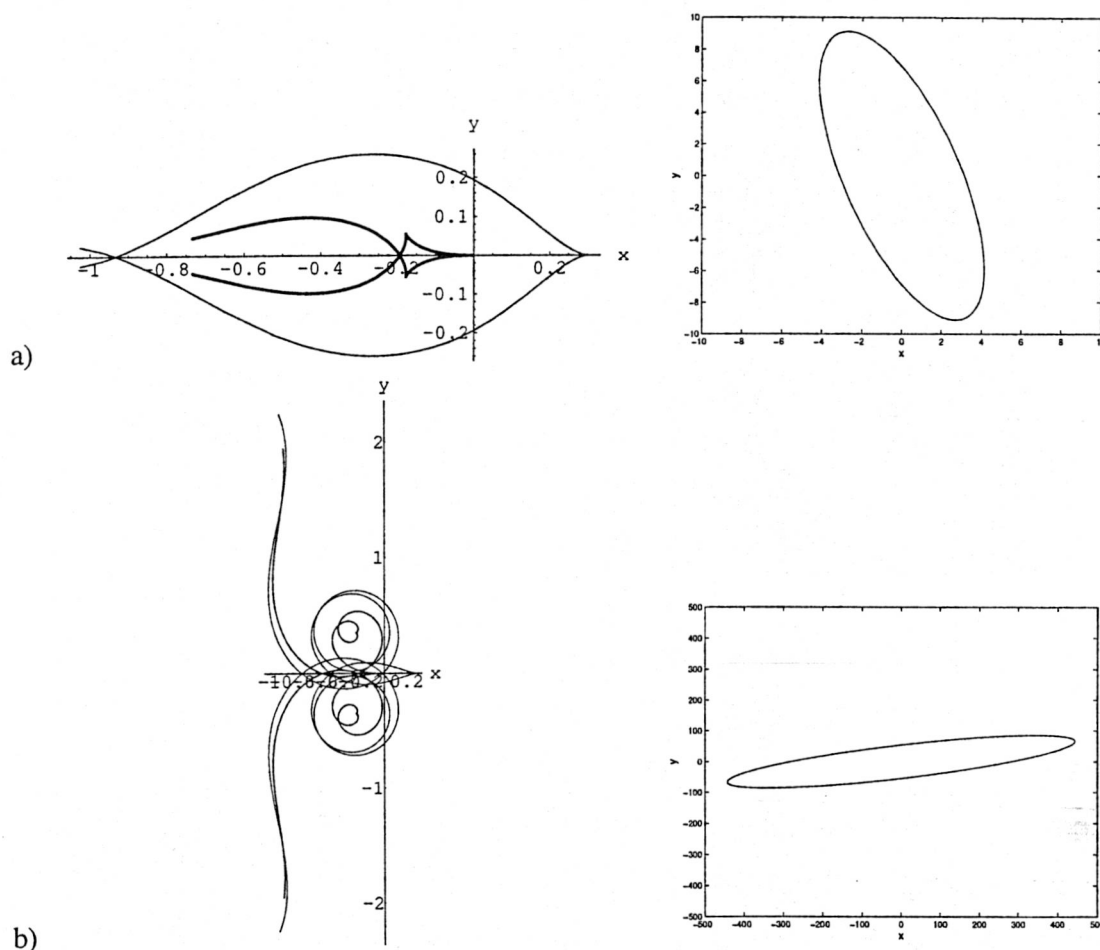
Tabele (9.10) i (9.11) prezentują rezultaty nowych założeń. Okazuje się, że w tym przypadku preferowany jest ciężki robot, o dużej bezwładności rotora J_r i dużym promieniu r . Masa robota maleje wraz ze wzrostem horyzontu czasowego T .

ograniczenia	optymalna dynamika	dynamiczna zręczność globalna
$T = 3$ $-2.78Ml^2 < c_{10} < 2.78Ml^2$ $-8.65Mr^2 < c_{20} < 8.65Mr^2$ $6 < M < 18$ $m = \frac{5}{4}M$ $J_r = 2Mr^2$	$M = 18 \rightarrow$ $\rightarrow \{m = 22.5, J_r = 1.040\}$	$\tilde{\mathcal{M}}_{q_0, \eta_0, T}(K_{q_0, \eta_0, T}) = 8.895$
$T = 5$ $-2.78Ml^2 < c_{10} < 2.78Ml^2$ $-8.65Mr^2 < c_{20} < 8.65Mr^2$ $6 < M < 18$ $m = \frac{5}{4}M$ $J_r = 2Mr^2$	$M = 14.824 \rightarrow$ $\rightarrow \{m = 18.530, J_r = 0.857\}$	$\tilde{\mathcal{M}}_{q_0, \eta_0, T}(K_{q_0, \eta_0, T}) = 72.589$

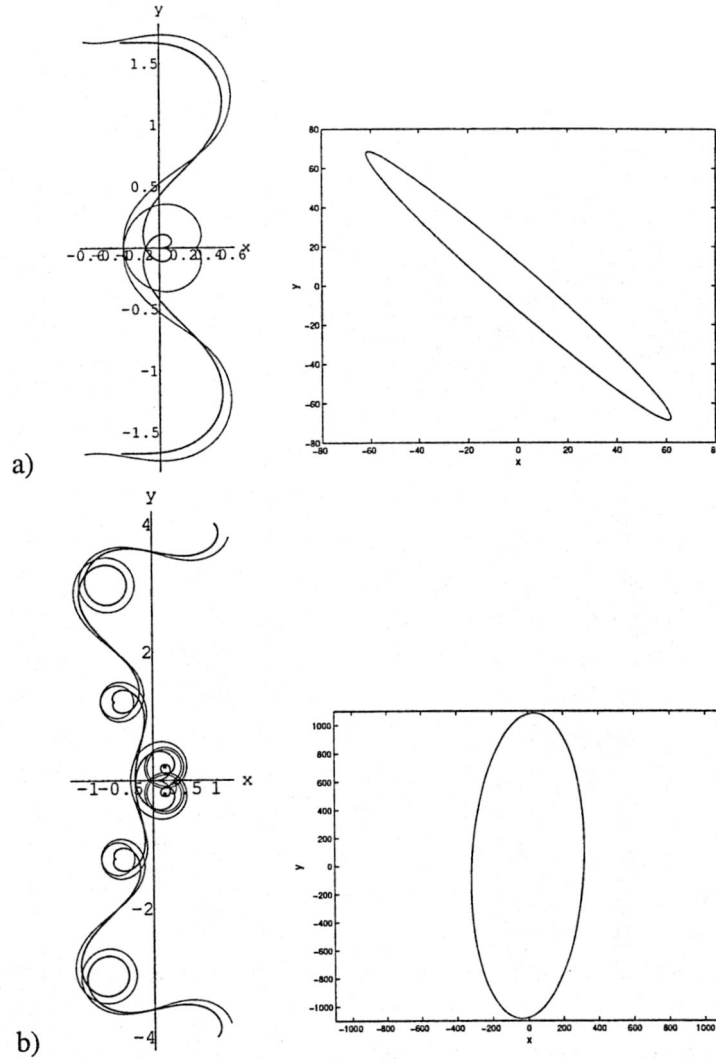
Tab. 9.10: Optymalna dynamika robota mobilnego typu deskorolka (M, m, J_r).

ograniczenia	optymalna geometria i dynamika	dynamiczna zręczność globalna
$T = 3$ $-2.78Ml^2 < c_{10} < 2.78Ml^2$ $-8.65Mr^2 < c_{20} < 8.65Mr^2$ $0.085 < r < 0.255$ $J_r = 2Mr^2$	$r = 0.255 \rightarrow \{J_r = 1.561\}$	$\tilde{\mathcal{M}}_{q_0, \eta_0, T}(K_{q_0, \eta_0, T}) = 16.588$
$T = 5$ $-2.78Ml^2 < c_{10} < 2.78Ml^2$ $-8.65Mr^2 < c_{20} < 8.65Mr^2$ $0.085 < r < 0.255$ $J_r = 2Mr^2$	$r = 0.255 \rightarrow \{J_r = 1.561\}$	$\tilde{\mathcal{M}}_{q_0, \eta_0, T}(K_{q_0, \eta_0, T}) = 166.267$

Tab. 9.11: Optymalna geometria i dynamika robota mobilnego typu deskorolka (r, J_r).



Rys. 9.3: Trajektorie odpowiadające zręcznym konfiguracjom robota mobilnego typu deskorolka (cienka linia - trajektoria punktu początkowego deski; pogrubiona linia - trajektoria środka deski) wraz z elipsoidami zręczności ($j = 0$) a) $T = 3$: współczynnik uwarunkowania $\tilde{\kappa}_{q_0, \eta_0, T}(c) = 6805.1$, wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0, \eta_0, T}}(c) = \{8.8923, 91.3745\}$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0, \eta_0, T}(c) = 100.267$; b) $T = 7$: współczynnik uwarunkowania $\tilde{\kappa}_{q_0, \eta_0, T}(c) = 3.9014 \cdot 10^{10}$, wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0, \eta_0, T}}(c) = \{2878.2, 200400.0\}$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0, \eta_0, T}(c) = 203280$.



Rys. 9.4: Trajektorie odpowiadające zręcznym konfiguracjom robota mobilnego typu deskorolka (cienka linia - trajektoria punktu początkowego deski; pogrubiona linia - trajektoria środka deski) wraz z elipsoidami zręczności ($j = 0$) a) $T = 3$: współczynnik uwarunkowania $\tilde{\kappa}_{q_0, \eta_0, T}(c) = 7.061 \cdot 10^7$, wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0, \eta_0, T}}(c) = \{71.89, 8474.90\}$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0, \eta_0, T}(c) = 8547$; b) $T = 7$: współczynnik uwarunkowania $\tilde{\kappa}_{q_0, \eta_0, T}(c) = 1.165 \cdot 10^{12}$, wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0, \eta_0, T}}(c) = \{99793, 1.1792 \cdot 10^6\}$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0, \eta_0, T}(c) = 1.279 \cdot 10^6$.

9.2. Izotropowość

9.2.1. Manipulator typu (nh,0): robot mobilny MK

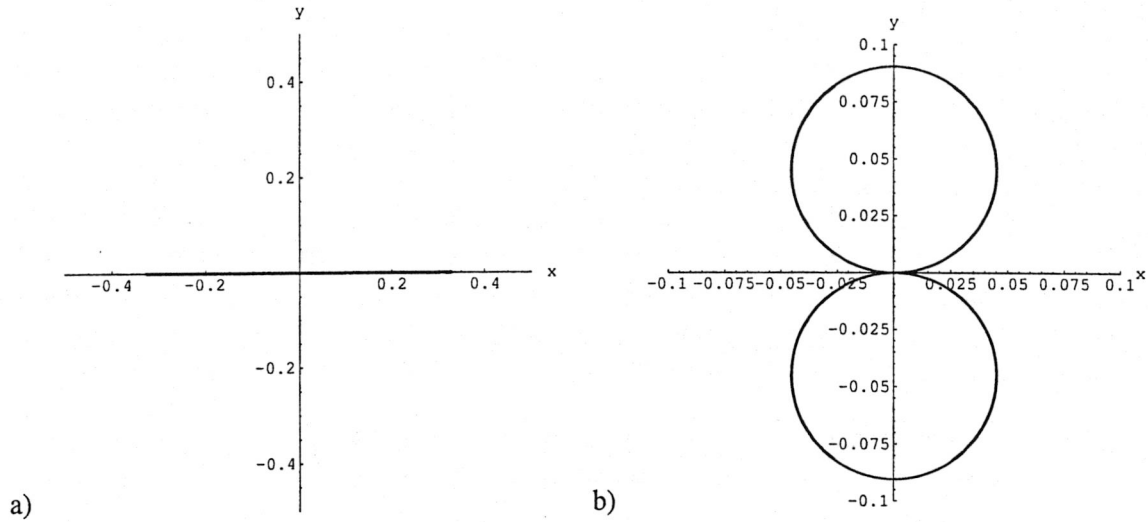
Kinematykę, dynamikę oraz funkcję wyjścia robota mobilnego MK opisuje równanie (7.17). Schemat robota przedstawia rysunek (7.5). Poszukiwanie konfiguracji izotropowych w trójwymiarowej przestrzeni kartezjańskiej (y_1, y_2, y_3) pozwala na sformułowanie następującego wniosku: podobnie jak w przypadku manipulatorów nieholonomicznych, izotropowe konfiguracje robota udaje się znaleźć tylko dla małych wartości horyzontu sterowania T . Jak poprzednio, jest to związane z możliwościami ruchowymi robota wzdłuż odpowiednich kierunków. Możliwości te, dla przypadku kierunków (y_1, y_2) rosną w miarę wzrostu horyzontu T , natomiast dla kierunku y_3 pozostają te same. Z tego powodu, dopiero zredukowanie przestrzeni zadaniowej do dwuwymiarowej (y_1, y_2) pozwala odnaleźć konfiguracje izotropowe dla dużych wartości T . Po zredukowaniu przestrzeni zadaniowej, konfiguracje takie będziemy nazywać subizotropowymi. Tabela (9.12) zawiera kilka z nich, uzyskanych dla stałych funkcji sterujących ($i = 1, 2, j = 0$), różnych wartości T , rzeczywistych parametrów geometrycznych: $R = 0.254$, $d = 0.225$, $\ell = 0.12$, $r_c = 0.035$, $l_c = 0.165$, $m_o = 0.5$, $m_k = 2$, $m_c = 7$ oraz ustalonej postury $q_0 = 0$ i zerowych prędkości początkowych $\eta_0 = 0$.

ograniczenia	konfiguracje izotropowe (c)
$T = 3$ $ c_{ij} \leq 0.5$	$(c_{10}, c_{20}) = (\pm 0.152, \pm 0.152)$ $\tilde{\kappa}_{q_0, \eta_0, T}(c) = 1$
$T = 4$ $ c_{ij} \leq 0.5$	$(c_{10}, c_{20}) = (\pm 0.086, \pm 0.086)$ $\tilde{\kappa}_{q_0, \eta_0, T}(c) = 1$
$T = 6$ $ c_{ij} \leq 0.5$	$(c_{10}, c_{20}) = \{(\pm 0.235, \mp 0.301), (\pm 0.301, \mp 0.235)\}$ $(c_{10}, c_{20}) = \{(\pm 0.353, \mp 0.463), (\pm 0.463, \mp 0.353)\}$ $(c_{10}, c_{20}) = \{(\pm 0.104, \mp 0.152), (\pm 0.152, \mp 0.104)\}$ $\tilde{\kappa}_{q_0, \eta_0, T}(c) = 1$
$T = 7$ $ c_{ij} \leq 0.5$	$(c_{10}, c_{20}) = \{(\pm 0.109, \mp 0.184), (\pm 0.184, \mp 0.109)\}$ $(c_{10}, c_{20}) = \{(\pm 0.115, \mp 0.078), (\pm 0.078, \mp 0.115)\}$ $(c_{10}, c_{20}) = \{(\pm 0.337, \mp 0.487), (\pm 0.487, \mp 0.337)\}$ $\tilde{\kappa}_{q_0, \eta_0, T}(c) = 1$
$T = 3$ $ c_{ij} \leq 3$	$(c_{10}, c_{20}) = (\pm 0.152, \mp 0.152)$ $(c_{10}, c_{20}) = \{(\pm 0.564, \mp 1.238), (\pm 1.238, \mp 0.564)\}$ $(c_{10}, c_{20}) = \{(\pm 0.418, \mp 1.028), (\pm 1.028, \mp 0.418)\}$ $(c_{10}, c_{20}) = \{(\pm 0.405, \mp 0.542), (\pm 0.542, \mp 0.405)\}$ $\tilde{\kappa}_{q_0, \eta_0, T}(c) = 1$
$T = 7$ $ c_{ij} \leq 3$	$(c_{10}, c_{20}) = \{(\pm 0.109, \mp 0.184), (\pm 0.184, \mp 0.109)\}$ $(c_{10}, c_{20}) = \{(\pm 0.115, \mp 0.078), (\pm 0.078, \mp 0.115)\}$ $(c_{10}, c_{20}) = \{(\pm 0.337, \mp 0.487), (\pm 0.487, \mp 0.337)\}$ $(c_{10}, c_{20}) = \{(\pm 1.499, \mp 1.418), (\pm 1.418, \mp 1.499)\}$ $(c_{10}, c_{20}) = \{(\pm 0.689, \mp 0.734), (\pm 0.734, \mp 0.689)\}$ $(c_{10}, c_{20}) = \{(\pm 0.274, \mp 0.340), (\pm 0.340, \mp 0.274)\}$ $\tilde{\kappa}_{q_0, \eta_0, T}(c) = 1$

Tab. 9.12: Konfiguracje subizotropowe robota mobilnego MK ($y = (y_1, y_2)$, $\tilde{\mathcal{X}} = R^2$).

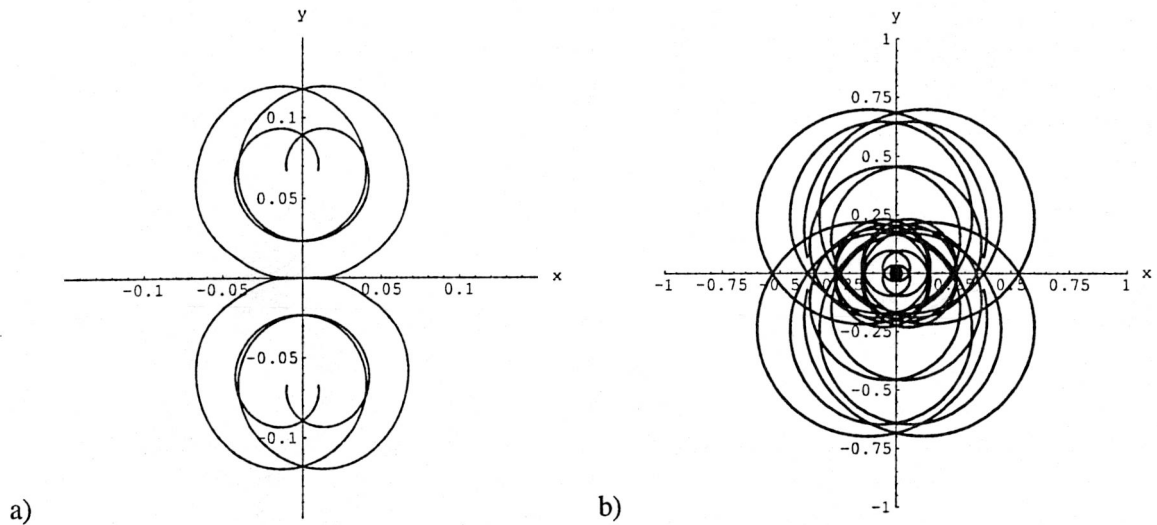
Rysunek (9.5) przedstawia konfiguracje subizotropowe (optymalne trajektorie robota MK) uzyskane przy ograniczeniu $|c_{ij}| \leq 0.5$ ($i = 1, 2, j = 0$), natomiast rysunek (9.6) pokazuje konfiguracje subizotropowe dla

ograniczenia $|c_{ij}| \leq 3$ ($i = 1, 2; j = 0$). Dla pierwszego przypadku istnieje graniczna wartość horyzontu $T = 5$, po przekroczeniu której optymalna trajektoria robota przechodzi z ruchu po prostej w ruch po okręgu. W drugim przypadku, do konfiguracji subizotropowych uzyskanych przy ograniczeniu $|c_{ij}| \leq 0.5$, dochodzą nowe konfiguracje. Osłabienie ograniczeń powoduje, że ruch robota nie jest już regularny: robot porusza się po bardziej skomplikowanych krzywych (9.6).



Rys. 9.5: Konfiguracje subizotropowe robota mobilnego MK - optymalna trajektoria robota ($\tilde{\mathcal{X}} = R^2$): a) $T = 3$: wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0, p_0, T}}(c) = \{1.014, 1.014\}$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0, p_0, T}(c) = 2.055$, zręczność $\tilde{m}_{q_0, p_0, T}(c) = 1.055$; b) $T = 7$: wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0, p_0, T}}(c) = \{0.889, 0.889\}$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0, p_0, T}(c) = 1.580$, zręczność $\tilde{m}_{q_0, p_0, T}(c) = 0.624$.

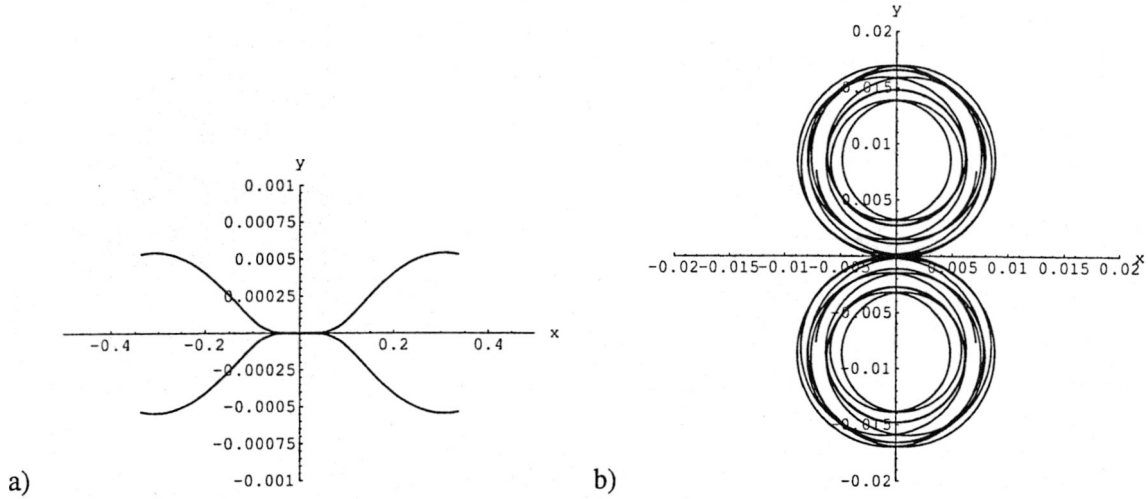
W tabeli (9.13) zebrano przykładowe konfiguracje subizotropowe, uzyskane dla funkcji sterujących zawierających pierwsze harmoniczne ($i = 1, 2, j = 0, 1, 2$) oraz ustalonych jak wyżej pozostałych parametrów. Rysunki (9.7) i (9.8) ilustrują wyniki zamieszczone w tabeli (9.13). Robot MK w konfiguracji izotropowej porusza się po dość skomplikowanych trajektoriach, w jednym z czterech dopuszczalnych kierunków.



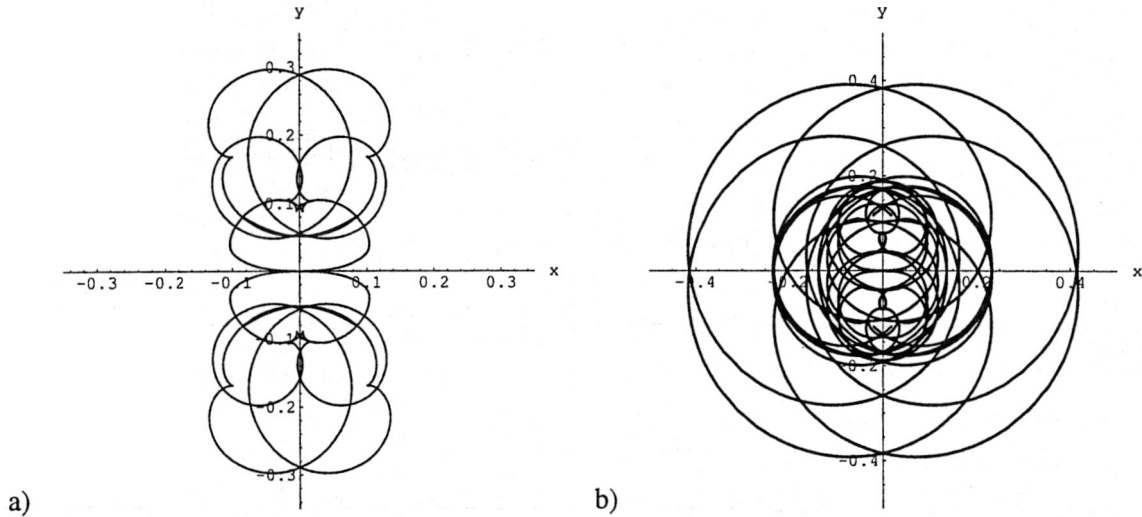
Rys. 9.6: Konfiguracje subizotropowe robota mobilnego MK - optymalna trajektoria robota ($\tilde{\mathcal{X}} = R^2$, $|c_{ij}| \leq 3$):
a) $T = 3$: wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0,p_0,T}}(c) = \{0.280, 0.280\}$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0,p_0,T}(c) = 0.156$, zręczność $\tilde{m}_{q_0,p_0,T}(c) = 0.006$; b) $T = 7$: wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0,p_0,T}}(c) = \{6.423, 6.423\}$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0,p_0,T}(c) = 82.552$, zręczność $\tilde{m}_{q_0,p_0,T}(c) = 1703$.

ograniczenia	konfiguracje izotropowe (c)
$T = 3$ $ c_{ij} \leq 0.5 \quad dla \quad i = 1, 2; j = 0$ $ c_{ij} \leq 0.25 \quad dla \quad i = 1, 2; j = 1, 2$	$(c_{10}, c_{11}, c_{12}) = \{(\pm 0.230, \mp 0.238, \pm 0.205), (\pm 0.228, \mp 0.233, \pm 0.205)\}$ $(c_{20}, c_{21}, c_{22}) = \{(\pm 0.228, \mp 0.233, \pm 0.205), (\pm 0.230, \mp 0.238, \pm 0.205)\}$ $\tilde{\kappa}_{q_0, \eta_0, T}(c) = 1$
$T = 3$ $ c_{ij} \leq 3 \quad dla \quad i = 1, 2; j = 0, 1, 2$	$(c_{10}, c_{11}, c_{12}) = \{(\pm 1.431, \mp 0.326, \pm 0.226), (\mp 2.533, \mp 0.440, \mp 2.395)\}$ $(c_{20}, c_{21}, c_{22}) = \{(\mp 2.533, \mp 0.440, \mp 2.395), (\pm 1.431, \mp 0.326, \pm 0.226)\}$ $\tilde{\kappa}_{q_0, \eta_0, T}(c) = 1$
$T = 7$ $ c_{ij} \leq 0.5 \quad dla \quad i = 1, 2; j = 0$ $ c_{ij} \leq 0.25 \quad dla \quad i = 1, 2; j = 1, 2$	$(c_{10}, c_{11}, c_{12}) = \{(\pm 0.499, \pm 0.179, \pm 0.178), (\mp 0.486, \mp 0.250, \mp 0.247)\}$ $(c_{20}, c_{21}, c_{22}) = \{(\mp 0.486, \mp 0.250, \mp 0.247), (\pm 0.499, \pm 0.179, \pm 0.178)\}$ $\tilde{\kappa}_{q_0, \eta_0, T}(c) = 1$
$T = 7$ $ c_{ij} \leq 3 \quad dla \quad i = 1, 2; j = 0, 1, 2$	$(c_{10}, c_{11}, c_{12}) = \{(\mp 1.251, \mp 0.970, \mp 1.591), (\pm 2.261, \mp 2.674, \mp 0.764)\}$ $(c_{20}, c_{21}, c_{22}) = \{(\pm 2.261, \mp 2.674, \mp 0.764), (\mp 1.251, \mp 0.970, \mp 1.591)\}$ $\tilde{\kappa}_{q_0, \eta_0, T}(c) = 1$

Tab. 9.13: Konfiguracje subizotropowe robota mobilnego MK ($y = (y_1, y_2)$, $\tilde{\mathcal{X}} = R^6$).



Rys. 9.7: Konfiguracje subizotropowe robota mobilnego MK - optymalna trajektoria robota ($\tilde{\mathcal{X}} = R^6$): a) $T = 3$: wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0,p_0,T}}(c) = \{1.013, 1.013\}$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0,p_0,T}(c) = 2.053$, zręczność $\tilde{m}_{q_0,p_0,T}(c) = 1.054$; b) $T = 7$: wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0,p_0,T}}(c) = \{0.415, 0.415\}$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0,p_0,T}(c) = 0.345$, zręczność $\tilde{m}_{q_0,p_0,T}(c) = 0.030$.



Rys. 9.8: Konfiguracje subizotropowe robota mobilnego MK - optymalna trajektoria robota ($\tilde{\mathcal{X}} = R^6$, $|c_{ij}| \leq 3$): a) $T = 3$: wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0,p_0,T}}(c) = \{1.277, 1.277\}$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0,p_0,T}(c) = 3.262$, zręczność $\tilde{m}_{q_0,p_0,T}(c) = 2.661$; b) $T = 7$: wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0,p_0,T}}(c) = \{1.593, 1.593\}$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0,p_0,T}(c) = 5.079$, zręczność $\tilde{m}_{q_0,p_0,T}(c) = 6.448$.

9.3. Dystorsja

9.3.1. Manipulator typu (nh,0): deskorolka

Kinematykę i dynamikę robota opisuje układ równań (7.21).

OPTYMALNA GEOMETRIA I DYNAMIKA

Korzystając z sugestii autorów pracy [49], wyznaczmy optymalną geometrię minimalizującą globalną dystorsję dynamiczną (5.50) robota. Wszystkie założenia będą takie same, jak przy wyznaczaniu optymalnej geometrii za pomocą globalnej zręczności dynamicznej (patrz podrozdział 9.1.2), a zatem prawdziwe są tu następujące zależności: $m = \frac{5}{4}M$, $J_r = 2Mr^2$, $l = 0.3m$, $J = 0.5kg$, $J_w = 0.13kg$, $(q_0, \eta_0) = (0, 1)$. Tabele (9.14) i (9.15) zawierają wyniki optymalizacji kolejno masy rotora M oraz jego promienia r , a co za tym idzie masy deski m i bezwładności rotora J_r dla $|c_{ij}| \leq 3$ ($i = 1, 2$, $j = 0$). Jak widzimy, w tym przypadku preferowane są maksymalne rozmiary oraz masy układu.

ograniczenia	optymalna dynamika	dynamiczna dystorsja globalna
$T = 3$ $ c_{ij} \leq 3$ $i = 1, 2; j = 0$ $6 < M < 18$ $m = \frac{5}{4}M$ $J_r = 2Mr^2$	$M = 18 \rightarrow \{m = 22.5, J_r = 1.040\}$	$\tilde{D}_{q_0, \eta_0, T}(K_{q_0, \eta_0, T}) = 23.357$
$T = 5$ $ c_{ij} \leq 3$ $i = 1, 2; j = 0$ $6 < M < 18$ $m = \frac{5}{4}M$ $J_r = 2Mr^2$	$M = 18 \rightarrow \{m = 22.5, J_r = 1.040\}$	$\tilde{D}_{q_0, \eta_0, T}(K_{q_0, \eta_0, T}) = 618.493$

Tab. 9.14: Optymalna dynamika robota mobilnego typu deskorolka (M, m, J_r).

Gdy przyjmiemy, że zakres sterowań dopuszczalnych zmienia się wraz z geometrią robota ($-2.78Ml^2 < c_{10} < 2.78Ml^2$, $-8.65Mr^2 < c_{20} < 8.65Mr^2$) otrzymujemy, że robot ma być mały i lekki (patrz tabele (9.16) i (9.17)).

ograniczenia	optymalna geometria i dynamika	dynamiczna dystorsja globalna
$T = 3$ $ c_{ij} \leq 3$ $i = 1, 2; j = 0$ $0.085 < r < 0.255$ $J_r = 2Mr^2$	$r = 0.255 \rightarrow \{J_r = 1.561\}$	$\tilde{D}_{q_0, \eta_0, T}(K_{q_0, \eta_0, T}) = 14.980$
$T = 5$ $ c_{ij} \leq 3$ $k = 1; i = 1, 2; j = 0$ $0.085 < r < 0.255$ $J_r = 2Mr^2$	$r = 0.255 \rightarrow \{J_r = 1.561\}$	$\tilde{D}_{q_0, \eta_0, T}(K_{q_0, \eta_0, T}) = 534.035$

Tab. 9.15: Optymalna geometria i dynamika robota mobilnego typu deskorolka (r, J_r).

ograniczenia	optymalna dynamika	dynamiczna dystorsja globalna
$T = 3$ $-2.78Ml^2 < c_{10} < 2.78Ml^2$ $-8.65Mr^2 < c_{20} < 8.65Mr^2$ $6 < M < 18$ $m = \frac{5}{4}M$ $J_r = 2Mr^2$	$M = 6 \rightarrow$ $\rightarrow \{m = 7.5, J_r = 0.347\}$	$\tilde{D}_{q_0, \eta_0, T}(K_{q_0, \eta_0, T}) = 1.040$
$T = 5$ $-2.78Ml^2 < c_{10} < 2.78Ml^2$ $-8.65Mr^2 < c_{20} < 8.65Mr^2$ $6 < M < 18$ $m = \frac{5}{4}M$ $J_r = 2Mr^2$	$M = 6 \rightarrow$ $\rightarrow \{m = 7.5, J_r = 0.347\}$	$\tilde{D}_{q_0, \eta_0, T}(K_{q_0, \eta_0, T}) = 67.699$

Tab. 9.16: Optymalna dynamika robota mobilnego typu deskorolka (M, m, J_r).

ograniczenia	optymalna geometria i dynamika	dynamiczna dystorsja globalna
$T = 3$ $-2.78Ml^2 < c_{10} < 2.78Ml^2$ $-8.65Mr^2 < c_{20} < 8.65Mr^2$ $0.085 < r < 0.255$ $J_r = 2Mr^2$	$r = 0.085 \rightarrow \{J_r = 0.173\}$	$\tilde{D}_{q_0, \eta_0, T}(K_{q_0, \eta_0, T}) = 0.224$
$T = 5$ $-2.78Ml^2 < c_{10} < 2.78Ml^2$ $-8.65Mr^2 < c_{20} < 8.65Mr^2$ $0.085 < r < 0.255$ $J_r = 2Mr^2$	$r = 0.085 \rightarrow \{J_r = 0.173\}$	$\tilde{D}_{q_0, \eta_0, T}(K_{q_0, \eta_0, T}) = 14.342$

Tab. 9.17: Optymalna geometria i dynamika robota mobilnego typu deskrolka (r, J_r).

10. Inne parametryzacje funkcji sterujących platformy

Konfiguracje endogeniczne manipulatorów mobilnych definiujemy za pomocą funkcji sterujących platformy oraz położeń przegubów manipulatora. Funkcje sterujące platformy to funkcje należące do przestrzeni $L_m^2[0, T]$. Endogeniczna przestrzeń konfiguracyjna platformy jest przestrzenią nieskończenie wymiarową. W praktyce, ze względów obliczeniowych, wybiera się skończenie wymiarowe reprezentacje konfiguracji endogenicznych. Podrozdział 4.3 opisuje sposób tworzenia takich reprezentacji.

Opierając się na pracach [13] i [60] wprowadzimy następujące definicje. Oznaczmy za pomocą $\mathcal{F} = L^2[0, T]$ przestrzeń wektorową funkcji rzeczywistych, określonych na przedziale $[0, T]$ i całkowalnych z kwadratem. Niech $r(t)$ będzie nieujemną funkcją wagową, dodatnią na przedziale otwartym $(0, T)$. Wówczas $\mathcal{F}$ staje się przestrzenią Hilberta z iloczynem skalarnym postaci

$$\langle f_1, f_2 \rangle_r = \int_0^T f_1(t) f_2(t) r(t) dt. \quad (10.1)$$

Mając zbiór $\varphi_k(t), k \geq 0$ funkcji ortogonalnych z $\mathcal{F}$, możemy zapisać $f \in \mathcal{F}$ w postaci szeregu

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(t), \quad (10.2)$$

lub, po ograniczeniu szeregu do $s + 1$ wyrazów, w formie

$$f_s(t) = \sum_{k=0}^s c_k \varphi_k(t). \quad (10.3)$$

Przypomijmy, że zbiór funkcji ortogonalnych nazywamy zupełnym, gdy aproksymacja z ograniczonym pasmem częstotliwości jest zbieżna w sensie średnio-kwadratowym

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \int_0^T (f(t) - f_s(t))^2 r(t) dt = 0. \quad (10.4)$$

Równoważnie, zbiór funkcji ortogonalnych $\varphi_k(t)$ nazywamy zupełnym w $\mathcal{F}$, jeśli dla dowolnego $\epsilon > 0$, $f \in \mathcal{F}$ i wystarczająco dużego s zachodzi

$$\|f(t) - f_s(t)\| < \epsilon. \quad (10.5)$$

Zbiór ortogonalnych funkcji własnych można wygenerować, rozwiązując równanie różniczkowe postaci (zagadnienie Sturma-Liouville'a)

$$\frac{d}{dt} \left(s(t) \frac{d\varphi(t)}{dt} \right) + (\mu r(t) - q(t)) \varphi(t) = 0, \quad (10.6)$$

dla ustalonych, różniczkowalnych, nieujemnych funkcji $q(t)$, $s(t)$, $r(t)$, odpowiednio dobranych warunków granicznych i różnych wartości μ .

Jeżeli funkcje własne $\varphi_i(t)$ i $\varphi_j(t)$ są ortogonalne w $\mathcal{F}$, to

$$\langle \varphi_k, \varphi_l \rangle_r = \alpha_k \delta_{kl}, \quad (10.7)$$

przy czym α_k jest stałe. Ortonormalność funkcji własnych można osiągnąć poprzez różnego rodzaju normalizację, na przykład

$$\langle \tilde{\varphi}_k, \tilde{\varphi}_l \rangle_r = \delta_{kl} \quad (10.8)$$

uzyskamy dobierając $\tilde{\varphi}_k = \varphi_k / \sqrt{\alpha_k}$.

Dzięki ortogonalności funkcji własnych, możemy policzyć współczynniki rozwinięcia (10.2) korzystając z formuły

$$c_k = \frac{\langle f, \varphi_k \rangle_r}{\langle \varphi_k, \varphi_k \rangle_r} = \frac{1}{\alpha_k} \langle f, \varphi_k \rangle_r, k \geq 0. \quad (10.9)$$

Dobierając odpowiednio funkcje $q(t)$, $r(t)$ i $s(t)$ we wzorze (10.6), otrzymujemy różnego rodzaju bazy ortogonalne w $\mathcal{F}$. Wybór $r(t) = r_F(t) = s(t) = 1$, $q(t) = 0$, $\mu = k^2$, $k \geq 0$, $\varphi(0) = \varphi(T)$ i $\dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}(T)$ pozwala uzyskać bazę Fouriera $\varphi_0 = 1$, $\varphi_{2k-1} = \sin k\omega t$, $\varphi_{2k} = \cos k\omega t$, gdzie $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Bazy Fouriera, mimo znacznej złożoności obliczeniowej, są powszechnie wykorzystywane w robotyce. Nie zmienia to jednak faktu, że przestrzeń Hilberta definiująca konfiguracje endogeniczne robotów mobilnych dopuszcza również inne niż Fouriera bazy ortogonalne. Skończenie wymiarową reprezentację konfiguracji endogenicznych możemy zapisać w postaci wielomianów Jacobiego, Legendre'a, Gegenbauera, Bernsteina, Czebyszewa; a także funkcji Haara [60]. Główna zaleta baz nie-fourierowskich leży w ich mniejszej złożoności obliczeniowej.

Najbardziej ogólny przypadek stanowią wielomiany Jacobiego. Na przedziale $[0, T]$ definiujemy je zależnością

$$J_k^{\alpha, \beta}(t) = \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{2}{T^2} \right)^k (T-t)^{-\alpha} t^{-\beta} \frac{d^k}{dt^k} \left((T-t)^{\alpha+k} t^{\beta+k} \right) \quad (10.10)$$

dobierając $r(t) = \left(\frac{2}{T}\right)^{\alpha+\beta} (T-t)^{\alpha} t^{\beta}$, $s(t) = \frac{4}{T^2} (T-t)t$, $q(t) = 0$, $\mu = k(k+\alpha+\beta+1)$ dla $\alpha, \beta > -1$ i $k \geq 0$.

Podstawiając w (10.10) $\alpha = \beta = 0$ oraz $k \geq 0$ otrzymujemy wielomiany Legendre'a

$$L_k(t) = \frac{1}{k!} \left(\frac{2}{T^2} \right)^k \frac{d^k}{dt^k} ((t-T)t)^k. \quad (10.11)$$

Podobnie, dla $\alpha = \beta = 1$ i $k \geq 0$ wielomiany Jacobiego przechodzą w wielomiany Gegenbauera

$$G_k(t) = \frac{1}{k!} \left(\frac{2}{T^2} \right)^k \frac{1}{(T-t)t} \frac{d^k}{dt^k} ((t-T)t)^{k+1}. \quad (10.12)$$

W dalszej części rozdziału zajmiemy się wielomianami Czebyszewa, jako jednym z przypadków szczególnych wielomianów Jacobiego oraz wielomianami Bernsteina, które w odróżnieniu od pozostałych wielomianów są wielomianami wysokiego rzędu (ich definicję podamy nieco później). Wybrane wielomiany wykorzystamy do zdefiniowania funkcji sterujących platformy manipulatora mobilnego. Następnie wyznaczmy konfiguracje zręczne manipulatora RTR zamontowanego na dwukołowej platformie mobilnej. Uzyskane wyniki porównamy z wynikami otrzymanymi z zastosowania odpowiedniego rozwinięcia Fouriera.

10.1. Wielomiany Czebyszewa

Podstawiając do zależności (10.10) $\alpha = \beta = \pm \frac{1}{2}$ otrzymuje wielomiany Czebyszewa pierwszego (dla $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$), lub też drugiego (dla $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$) rodzaju. Wielomiany Czebyszewa drugiego rodzaju definiujemy zależnością

$$T_k(t) = \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{2}{T^2} \right)^k \sqrt{(T-t)t} \frac{d^k}{dt^k} ((t-T)t)^{k-\frac{1}{2}}, k \geq 0, \quad (10.13)$$

lub w postaci rekurencyjnej

$$T_k(t) = 2tT_{k-1}(t) - T_{k-2}(t), \quad (10.14)$$

przy czym $T_0(t) = 1$, $T_1(t) = t$ i $k \geq 0$. Można pokazać, że $T_k(-t) = (-1)^k T_k(t)$.

Przyjmując $\alpha_k = \frac{2}{T}$ otrzymujemy postać ortonormalną wielomianów Czebyszewa drugiego rodzaju

$$T_k(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \frac{1}{2} \left(\left(\frac{2t-T}{T} - \sqrt{-1 + \frac{(2t-T)^2}{T^2}} \right)^k + \left(\frac{2t-T}{T} + \sqrt{-1 + \frac{(2t-T)^2}{T^2}} \right)^k \right), k \geq 0. \quad (10.15)$$

Zgodnie z zależnością (10.1) są one wzajemnie ortogonalne, a odpowiednia funkcja wagowa wynosi $r_T(t) = \frac{T}{2} \frac{1}{\sqrt{(T-t)t}}$.

Pierwszych pięć znormalizowanych wielomianów Czebyszewa drugiego rodzaju wygląda następująco:

$$\begin{aligned} T_0(t) &= \sqrt{\frac{2}{T}} \\ T_1(t) &= \sqrt{\frac{2}{T}} \left(\frac{2t-T}{T} \right) \\ T_2(t) &= \sqrt{\frac{2}{T}} \left(\frac{T^2 - 8Tt + 8t^2}{T^2} \right) \\ T_3(t) &= \sqrt{\frac{2}{T}} \left(-1 + \frac{18t}{T} - \frac{48t^2}{T^2} + \frac{32t^3}{T^3} \right) \\ T_4(t) &= \sqrt{\frac{2}{T}} \left(\frac{T^4 - 32T^3t + 160T^2t^2 - 256Tt^3 + 128t^4}{T^3} \right). \end{aligned} \quad (10.16)$$

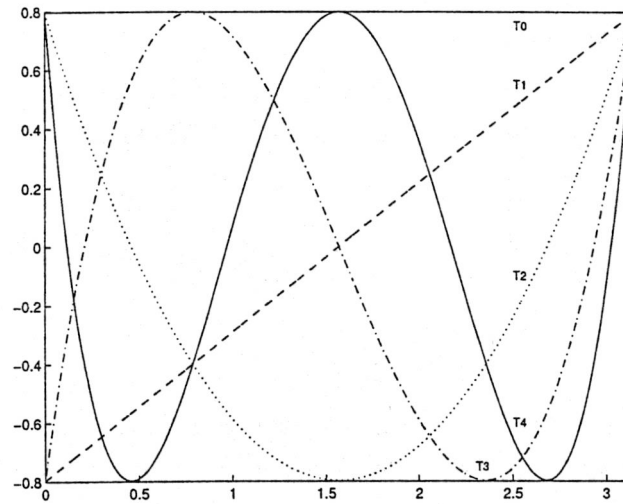
Ich wykresy dla $T = \pi$ przedstawia rysunek (10.1).

OPTYMALNA KONFIGURACJA MANIPULATORA RTR NA PLATFORMIE DWUKOŁOWEJ

Rozważany manipulator mobilny został przedstawiony w rozdziale 7. Dla danych początkowych jak w podrozdziale 8.1.2, a zatem dla ustalonych wartości parametrów geometrycznych $l = l_2 = 1$, $l_3 = 2$, $r = 0.5$, zadanych współrzędnych punktu zamontowania manipulatora na platformie $(d_x, d_y) = (1, 0)$, zadanej postury początkowej platformy $q_0 = (0, 0, 45^\circ, 45^\circ)$ oraz horyzontu czasowego $T = \pi$, wybieramy konfiguracje endogeniczne manipulatora mobilnego $(c, x) \in \mathcal{X}$ w taki sposób, by maksymalizować miarę kinematycznej zręczności lokalnej (5.11). Funkcje sterujące platformy zapisujemy w postaci wielomianów Czebyszewa, przy czym

$$u_k(t) = \sum_{i=0}^{s_k} c_{ki} \varphi_i(t). \quad (10.17)$$

Badania symulacyjne przeprowadziliśmy dla $k = 0$ i $k = 2$ oraz $s_k = \{0, 2, 4\}$. Ograniczenia na konfiguracje dopuszczalne są takie same jak w podrozdziale 8.1.2, a zatem $x_1, x_3 \in [0, 2\pi]$, $x_2 \in [0, x_{2max}]$ oraz $|c_{ki}| \leq 3$. Wyniki badań zebrano w tabeli (10.1). Ich ilustracja graficzna zamieszczona jest na rysunkach (10.2) - (10.4). Okazuje się, że konfiguracje zręczne są zbliżone do odpowiednich konfiguracji zręcznych uzyskanych przy zapisie funkcji sterujących platformy w postaci szeregów Fouriera (por. tab.

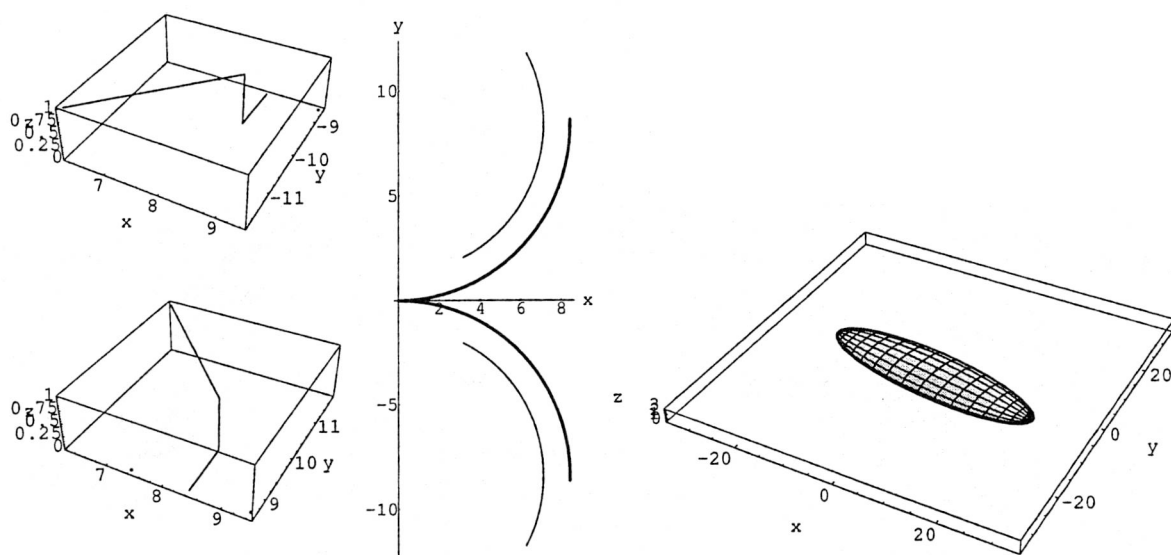


Rys. 10.1: Wielomiany Czebyszewa.

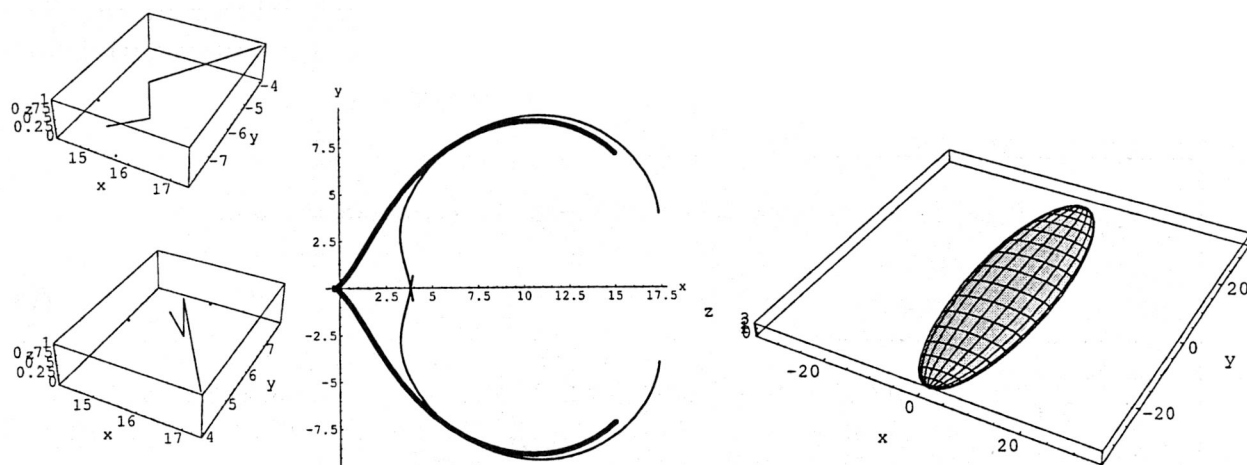
8.2 i 10.1 oraz rys. (8.4) - (8.6) i (10.2) - (10.4)). Co więcej, wartości miary zręczności, współczynnika izotropowości oraz miary dystorsji w obu przypadkach są podobne. Jedyna różnica polega na ilości energii wykorzystanej na realizację odpowiednich konfiguracji zręcznych. Manipulator mobilny, którego funkcje sterujące zapisano w postaci wielomianów Czebyszewa zużywa na realizację konfiguracji zręcznych znacznie mniej energii. Analiza uzyskanych wyników pozwala twierdzić, iż reprezentacje konfiguracji endogenicznych w postaci wielomianów Czebyszewa warto stosować tam, gdzie dużą rolę odgrywają względy ekonomiczne (niewielkie wykorzystanie energii na sterowanie oraz mała złożoność obliczeniowa).

ograniczenia	optymalna konfiguracja (c, x)
$k = 1, 2$ $l = 0$	$\{c_{10}, c_{20}, x_1, x_3\} = \{(2.36, 3.00, 5.53, 0.00), (3.00, 2.36, 0.75, 0.00)\}$ $\tilde{m}_{q_0, T}(c, x) = 331.63$ $\varepsilon = 29.17$
$k = 1, 2$ $l = 0, 1, 2$	$\{c_{10}, c_{11}, c_{12}, c_{20}, c_{21}, c_{22}, x_1, x_3\} =$ $= \{(3.00, 1.10, -2.08, 3.00, 3.00, -3.00, 6.06, 0.00),$ $(3.00, 3.00, -3.00, 3.00, 1.10, -2.08, 0.22, 0.00)\}$ $\tilde{m}_{q_0, T}(c, x) = 679.62$ $\varepsilon = 75.59$
$k = 1, 2$ $l = 0, 1, 2, 3, 4$	$\{c_{10}, c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{14}, c_{20}, c_{21}, c_{22}, c_{23}, c_{24}, x_1, x_3\} =$ $= \{(3.00, 3.00, -3.00, -0.30, 2.49, 3.00, 3.00, -3.00, -3.00, 3.00, 6.01, 0.00),$ $(3.00, 3.00, -3.00, -3.00, 3.00, 3.00, 3.00, -3.00, -0.30, 2.49, 0.27, 0.00)\}$ $\tilde{m}_{q_0, T}(c, x) = 825.65$ $\varepsilon = 128.01$

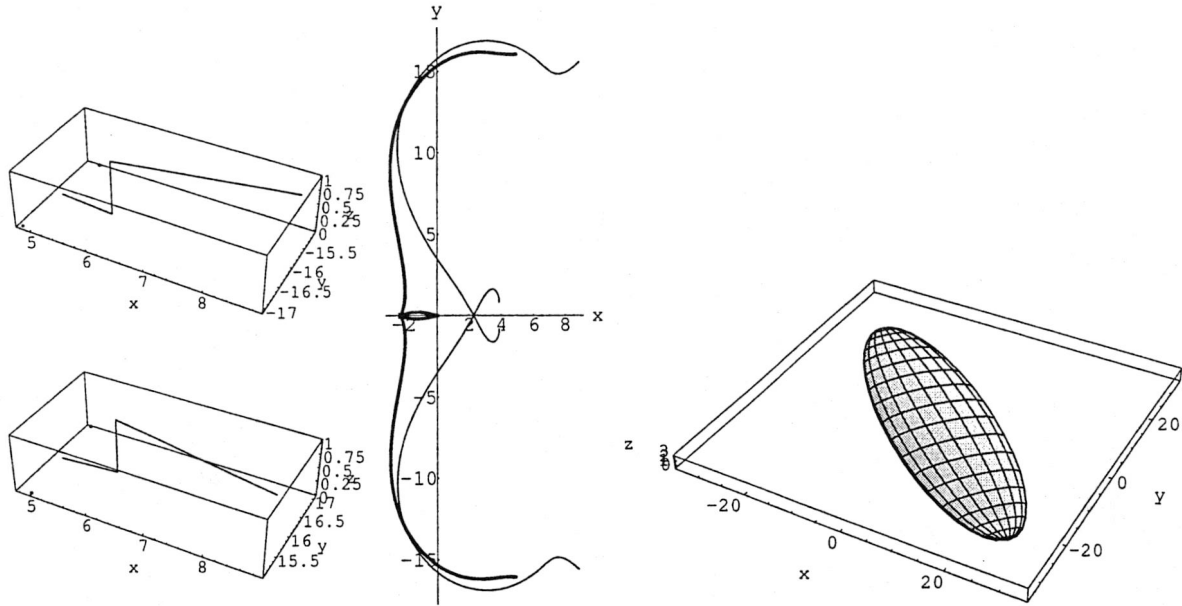
Tab. 10.1: Wielomiany Czebyszewa. Optymalna konfiguracja manipulatora mobilnego (nh,h) - manipulator holonomiczny typu RTR na platformie dwukołowej.



Rys. 10.2: Wielomiany Czebyszewa. Optymalna konfiguracja manipulatora mobilnego (nh,h) - manipulator typu RTR na platformie dwukołowej (pogrubiona linia - trajektoria platformy) wraz z elipsoidą zręczności ($j = 0$). Współczynnik uwarunkowania $\tilde{\kappa}_{q_0,T}(c,x) = 106.164$, wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0,T}}(c,x) = \{532.6864, 41.2164, 5.0176\}$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0,T}(c,x) = 578.92$.



Rys. 10.3: Wielomiany Czebyszewa. Optymalna konfiguracja manipulatora mobilnego (nh,h) - manipulator typu RTR na platformie dwukołowej (pogrubiona linia - trajektoria platformy) wraz z elipsoidą zręczności ($j = 0, 1, 2$). Współczynnik uwarunkowania $\tilde{\kappa}_{q_0,T}(c,x) = 208.47$, wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0,T}}(c,x) = \{1045.900, 88.360, 5.017\}$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0,T}(c,x) = 1139.30$.



Rys. 10.4: Wielomiany Czebyszewa. Optymalna konfiguracja manipulatora mobilnego (nh,h) - manipulator typu RTR na platformie dwukołowej (pogrubiona linia - trajektoria platformy) wraz z elipsoidą zręczności ($j = 0, 1, 2, 3, 4$). Współczynnik uwarunkowania $\tilde{\kappa}_{q_0,T}(c, x) = 242.22$, wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0,T}}(c, x) = \{1215.200, 112.148, 5.017\}$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0,T}(c, x) = 1332.40$.

10.2. Wielomiany Bernsteina

Wielomiany Bernsteina posiadają przejrzystą interpretację geometryczną, a także pozwalają na łatwe manipulowanie ich współczynnikami. Jak wykazały badania symulacyjne, złożoność obliczeniowa w przypadku wielomianów Bernsteina jest znacznie mniejsza aniżeli złożoność obliczeniowa szeregów Fouriera, czy też wielomianów Czebyszewa. Wielomiany Bernsteina definiujemy zależnością ([19], [51])

$$B_k(t) = \binom{N}{k} T^{-k} t^k \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{N-k}, \quad (10.18)$$

przy czym $k = 0, 1, \dots, N$. Przyjmując $\alpha_k = \frac{1}{T}$ dostajemy ich postać ortonormalną

$$B_k(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \binom{N}{k} T^{-k} t^k \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{N-k}, \quad k = 0, 1, \dots, N. \quad (10.19)$$

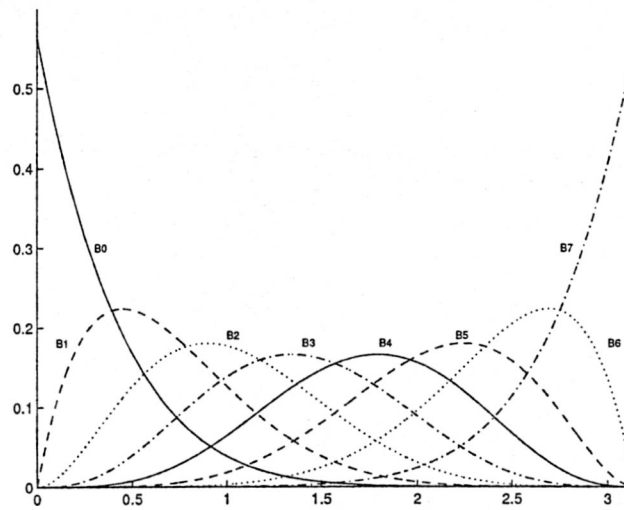
Zakładając $N = 8$ otrzymujemy kolejne wielomiany Bernsteina

$$\begin{aligned} B_0(t) &= \frac{1}{\sqrt{T}} \left(1 - \frac{t}{T}\right)^7 & B_1(t) &= \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{7t(1 - \frac{t}{T})^6}{T} \\ B_2(t) &= \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{21t^2(T-t)^5}{T^{14/2}} & B_3(t) &= \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{35t^3(T-t)^4}{T^{14/2}} \\ B_4(t) &= \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{35t^4(T-t)^3}{T^{14/2}} & B_5(t) &= \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{21t^5(T-t)^2}{T^{14/2}} \\ B_6(t) &= \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{7t^6(T-t)}{T^{14/2}} & B_7(t) &= \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{t^7}{T^{14/2}}. \end{aligned} \quad (10.20)$$

Ich wykresy zostały przedstawione na rysunku (10.5).

OPTYMALNA KONFIGURACJA MANIPULATORA RTR NA PLATFORMIE DWUKOŁOWEJ

Jeszcze raz rozwiążemy zadanie optymalizacji zręczności tego samego manipulatora mobilnego co w podrozdziale 10.1, z tym że teraz funkcje strujące platformy zapiszemy w postaci wielomianów Bernsteina. Odpowiednie obliczenia wykonano dla $k = 1$ i $k = 2$ oraz $s_k = \{0, 3, 7\}$. Wszystkie założenia dotyczące badanego manipulatora mobilnego przyjmujemy takie same jak w podrozdziale 10.1. Rezultaty obliczeń zamieszczono w tabeli (10.2) oraz na rysunkach (10.6) - (10.8). Wyznaczone konfiguracje zręczne znacznie odbiegają od uzyskanych wcześniej dla bazy Czebyszewa, czy też Fouriera (por. tab. (10.1), (8.2) i (10.2)). Jednocześnie wartość miary zręczności, a co za tym idzie sama zręczność manipulatora mobilnego, są mniejsze od wyznaczonych poprzednio. Przy niewielkiej liczbie współczynników rozwinięcia, manipulator mobilny w konfiguracji zręcznej jest w stanie poruszać się jedynie po prostej (por. rys. (10.3) i (10.7)). Wydaje się, że wpływ na takie wyniki może mieć również zbyt mała energia przeznaczona na realizację konfiguracji endogenicznych.

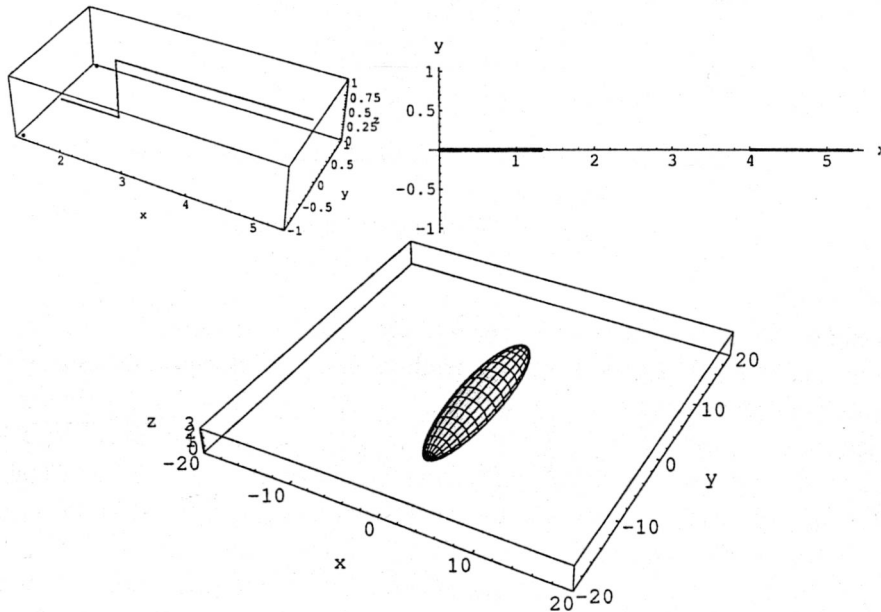


Rys. 10.5: Wielomiany Bernsteina.

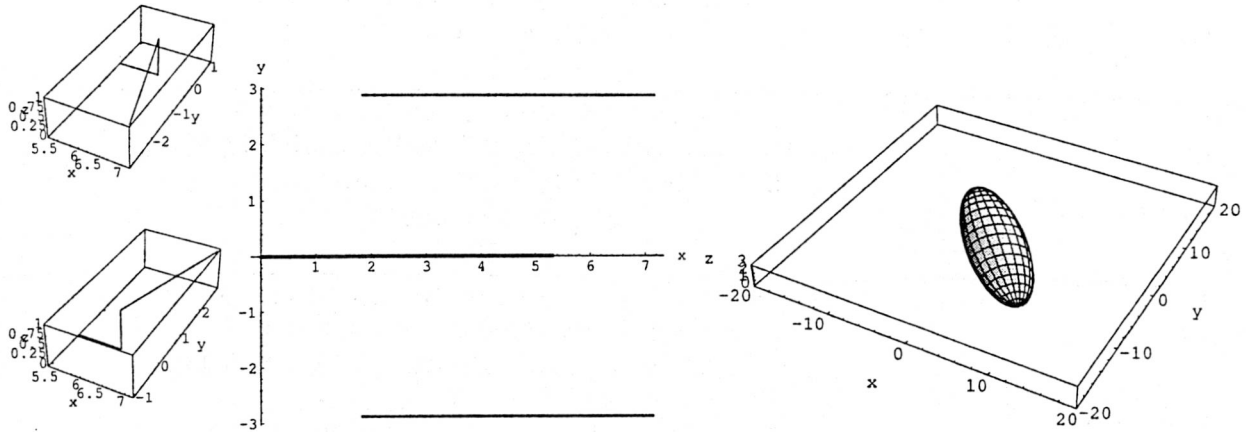
W celu zapewnienia większych możliwości ruchowych platformy mobilnej, takich jakie uzyskiwaliśmy podczas zastosowania szeregów Fouriera, czy też wielomianów Czebyszewa, osłabiamy nieco ograniczenia nałożone na konfiguracje endogeniczne platformy ($|c_{kl}| \leq 9$). Tabela (10.3) zawiera uzyskane wyniki. Przedstawiają je również rysunki (10.9), (10.10) i (10.11). Obecnie już przy niewielkiej liczbie składników rozwinięcia ($s_k = 2$), manipulator mobilny przestaje poruszać się po prostej. Jednakże na osiągnięcie nowych konfiguracji zręcznych, zużywa on prawie dziesięciokrotnie większą ilość energii. Okazuje się, że dopiero dla $l = 0, 1, 2, 3$ i niemalże trzykrotnie większej energii udaje się zrealizować konfigurację zbliżoną do uzyskanej wcześniej, przy zastosowaniu wielomianów Czebyszewa ograniczonych do pierwszych składników ($l = 0$) (por. pierwszy składnik tabeli (10.1) oraz drugi składnik tabeli (10.3)). Analiza wyników uzyskanych w trakcie badań symulacyjnych pozwala sformułować następujące wnioski: jeśli zależy nam na niewielkim zużyciu energii, a przy tym możliwie dużej zręczności manipulatora mobilnego, konfiguracje endogeniczne platformy mobilnej warto zapisywać w postaci wielomianów Czebyszewa. Jeśli najważniejsze jest zminimalizowanie złożoności obliczeniowej zadania, wybieramy wielomiany Bernsteina.

ograniczenia	optymalna konfiguracja (c, x)
$k = 1, 2;$ $l = 0$	$\{c_{10}, c_{20}, x_1, x_3\} = \{3.00, 3.00, 0.00, 0.00\}$ $\tilde{m}_{q_0, T}(c, x) = 60.78$ $\varepsilon = 1.20$
$k = 1, 2;$ $l = 0, 1, 2, 3$	$\{c_{10}, c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{20}, c_{21}, c_{22}, c_{23}, x_1, x_3\} =$ $= \{(3.00, 3.00, 3.00, 3.00, 3.00, 3.00, 3.00, 3.00, 1.29, 0.00),$ $(3.00, 3.00, 3.00, 3.00, 3.00, 3.00, 3.00, 3.00, 4.99, 0.00)\}$ $\tilde{m}_{q_0, T}(c, x) = 97.43$ $\varepsilon = 7.29$
$k = 1, 2;$ $l = 0, 1, \dots, 7$	$\{c_{10}, c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{14}, c_{15}, c_{16}, c_{17}, c_{20}, c_{21}, c_{22}, c_{23}, c_{24}, c_{25}, c_{26}, c_{27}, x_1, x_3\} =$ $= \{(3.00, 3.00, 3.00, 3.00, 3.00, 3.00, 3.00, 3.00,$ $3.00, 3.00, 3.00, 3.00, 3.00, 1.74, 0.06, 3.00, 0.76, 0.00),$ $(3.00, 3.00, 3.00, 3.00, 3.00, 1.74, 0.06, 3.00,$ $3.00, 3.00, 3.00, 3.00, 3.00, 3.00, 3.00, 5.52, 0.00)\}$ $\tilde{m}_{q_0, T}(c, x) = 221.21$ $\varepsilon = 15.40$

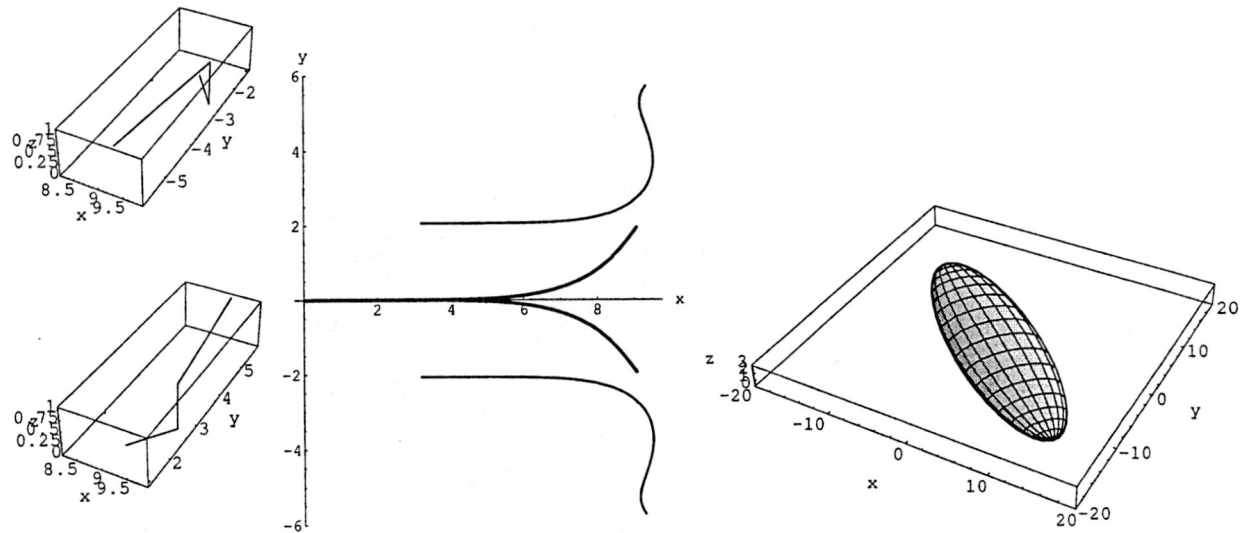
Tab. 10.2: Wielomiany Bernsteina. Optymalna konfiguracja manipulatora mobilnego (nh,h) - manipulator typu RTR na platformie dwukołowej ($|c_{kl}| \leq 3$).



Rys. 10.6: Wielomiany Bernsteina. Optymalna konfiguracja manipulatora mobilnego (nh,h) - manipulator typu RTR na platformie dwukołowej (pogrubiona linia - trajektoria platformy) wraz z elipsoidą zrzeczności ($l = 0; |c_{kl}| \leq 3$). Współczynnik uwarunkowania $\tilde{\kappa}_{q_0, T}(c, x) = 23.42$, wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0, T}}(c, x) = \{117.5056, 6.3001, 5.0176\}$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0, T}(c, x) = 128.82$.



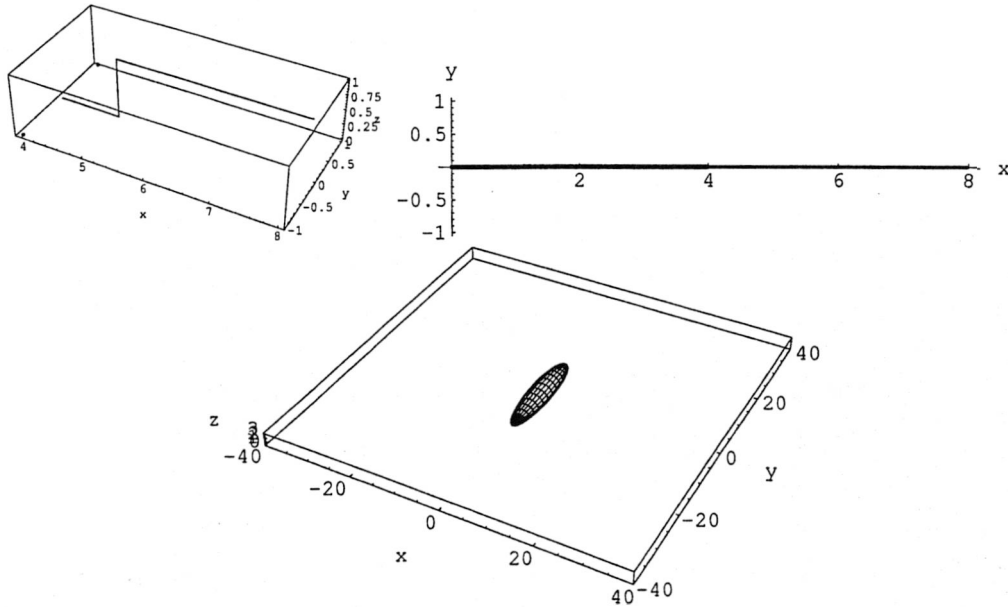
Rys. 10.7: Wielomiany Bernsteina. Optymalna konfiguracja manipulatora mobilnego (nh,h) - manipulator typu RTR na platformie dwukołowej (pogrubiona linia - trajektoria platformy) wraz z elipsoidą zręczności ($l = 0, 1, 2, 3; |c_{kl}| \leq 3$). Współczynnik uwarunkowania $\tilde{\kappa}_{q_0,T}(c, x) = 27.89$, wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0,T}}(c, x) = \{139.9489, 13.5424, 5.0176\}$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0,T}(c, x) = 158.51$.



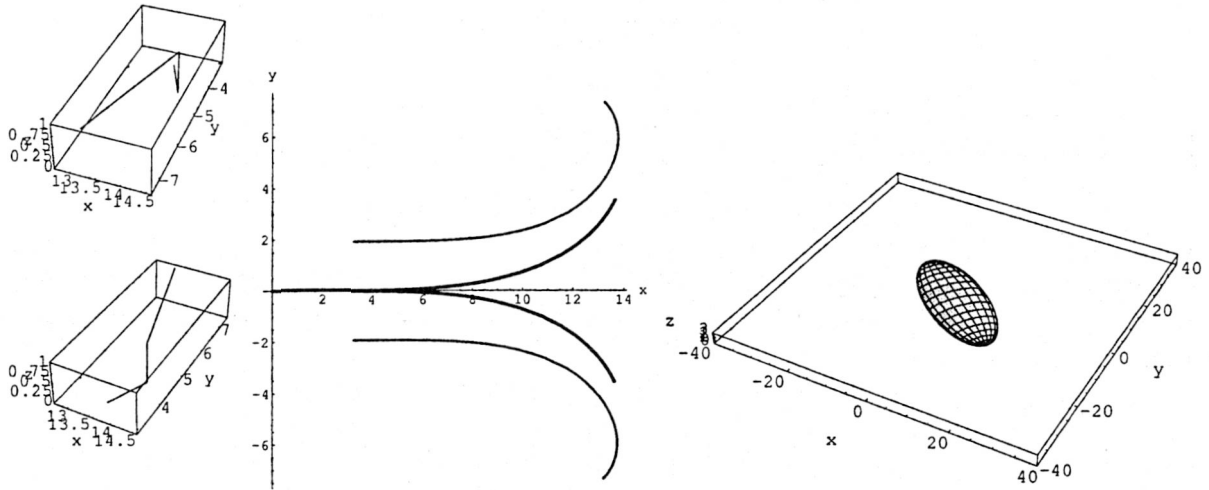
Rys. 10.8: Wielomiany Bernsteina. Optymalna konfiguracja manipulatora mobilnego (nh,h) - manipulator typu RTR na platformie dwukołowej (pogrubiona linia - trajektoria platformy) wraz z elipsoidą zręczności ($l = 0, 1, \dots, 7; |c_{kl}| \leq 3$). Współczynnik uwarunkowania $\tilde{\kappa}_{q_0,T}(c, x) = 66.088$, wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0,T}}(c, x) = \{331.6041, 29.4849, 5.0176\}$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0,T}(c, x) = 366.107$.

ograniczenia	optymalna konfiguracja (c, x)
$k = 1, 2$ $l = 0$	$\{c_{10}, c_{20}, x_1, x_3\} = \{9.00, 9.00, 0.00, 0.00\}$ $\tilde{m}_{q_0, T}(c, x) = 65.77$ $\varepsilon = 10.80$
$k = 1, 2$ $l = 0, 1, 2, 3$	$\{c_{10}, c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{20}, c_{21}, c_{22}, c_{23}, x_1, x_3\} =$ $= \{(9.00, 9.00, 9.00, 9.00, 9.00, 9.00, 9.00, 9.00, 3.81, 0.70, 0.00),$ $(9.00, 9.00, 9.00, 3.81, 9.00, 9.00, 9.00, 9.00, 5.58, 0.00)\}$ $\tilde{m}_{q_0, T}(c, x) = 299.12$ $\varepsilon = 59.36$
$k = 1, 2$ $l = 0, 1, \dots, 7$	$\{c_{10}, c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{14}, c_{15}, c_{16}, c_{17}, c_{20}, c_{21}, c_{22}, c_{23}, c_{24}, c_{25}, c_{26}, c_{27}, x_1, x_3\} =$ $= \{(9.00, 9.00, 9.00, 9.00, 9.00, 9.00, 9.00, 9.00,$ $9.00, 9.00, 9.00, 9.00, 7.19, 2.98, 9.00, 9.00, 0.25, 0.00),$ $(9.00, 9.00, 9.00, 9.00, 7.19, 2.98, 9.00, 9.00,$ $9.00, 9.00, 9.00, 9.00, 9.00, 9.00, 9.00, 9.00, 6.03, 0.00)\}$ $\tilde{m}_{q_0, T}(c, x) = 1150.30$ $\varepsilon = 146.05$

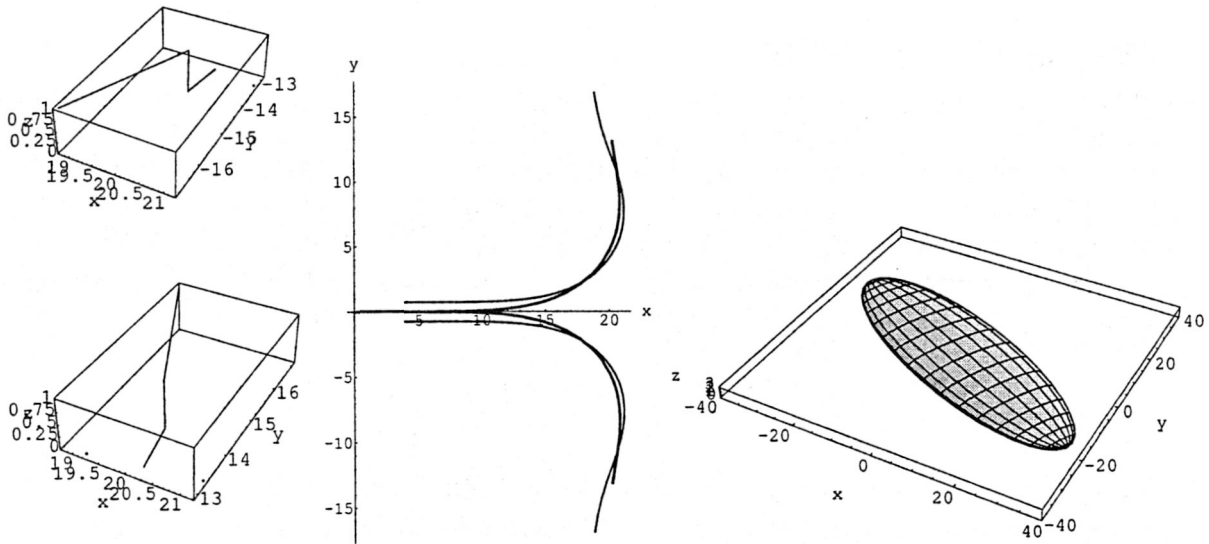
Tab. 10.3: Wielomiany Bernsteina. Optymalna konfiguracja manipulatora mobilnego (nh,h) - manipulator holonomiczny typu RTR na platformie dwukołowej ($|c_{kl}| \leq 9$).



Rys. 10.9: Wielomiany Bernsteina. Optymalna konfiguracja manipulatora mobilnego (nh,h) - manipulator typu RTR na platformie dwukołowej (pogrubiona linia - trajektoria platformy) wraz z elipsoidą zręczności ($l = 0; |c_{kl}| \leq 9$). Współczynnik uwarunkowania $\tilde{\kappa}_{q_0, T}(c, x) = 27.42$, wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0, T}}(c, x) = \{137.5929, 6.3001, 5.0176\}$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0, T}(c, x) = 148.91$.



Rys. 10.10: Wielomiany Bernsteina. Optymalna konfiguracja manipulatora mobilnego (nh,h) - manipulator typu RTR na platformie dwukołowej (pogrubiona linia - trajektoria platformy) wraz z elipsoidą zřęczności ($l = 0, 1, 2, 3; |c_{kl}| \leq 9$). Współczynnik uwarunkowania $\tilde{\kappa}_{q_0,T}(c, x) = 63.07$, wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0,T}}(c, x) = \{316.4841, 56.5504, 5.0176\}$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0,T}(c, x) = 378.05$.



Rys. 10.11: Wielomiany Bernsteina. Optymalna konfiguracja manipulatora mobilnego (nh,h) - manipulator typu RTR na platformie dwukołowej (pogrubiona linia - trajektoria platformy) wraz z elipsoidą zřęczności ($l = 0, 1, \dots, 7; |c_{kl}| \leq 9$). Współczynnik uwarunkowania $\tilde{\kappa}_{q_0,T}(c, x) = 313.16$, wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0,T}}(c, x) = \{1571.3, 168.4804, 5.0176\}$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0,T}(c, x) = 1744.8$.

11. Rozszerzenia

W niniejszym podrozdziale zajmujemy się problem normowania miar jakości oraz problem zależności miar jakości od horyzontu sterowania manipulatorów mobilnych typu (nh,h). Na zakończenie podrozdziału wprowadzamy dwa nowe wskaźniki określające efektywność manipulatorów mobilnych typu (nh,nh) oraz (nh,h).

11.1. Normy

W niniejszym podrozdziale przyjmiemy inne niż jednostkowe wartości składników macierzy wagowych $(R(t), W)$ wchodzących pośrednio w skład zależności opisującej zręczność manipulatorów mobilnych. Dzięki temu policzymy “unormowaną” kinematyczną zręczność lokalną i globalną i na ich podstawie spróbujemy wyznaczyć optymalną konfigurację i geometrię robota. Dzięki odpowiedniemu doborowi macierzy wagowych, mamy możliwość uwzględnienia istotnych, fizycznych własności mechanizmu.

11.1.1. Manipulator typu (nh,h): manipulator typu RTR na platformie dwukołowej

Rozważmy manipulator mobilny, którego optymalną konfigurację oraz geometrię wyznaczyliśmy w podrozdziale (8.1.2) zakładając jednostkowe macierze $R(t)$ i W . Został on opisany równaniami (7.3) i (7.4).

OPTYMALNA KONFIGURACJA

Naszym zadaniem jest wyznaczenie wartości zmiennych przegubowych (x_1, x_2, x_3) oraz funkcji sterujących platformy $(u(\cdot))$ w taki sposób, by maksymalizować kinematyczną zręczność lokalną (5.11). Dla ustalenia uwagi, przyjmujemy takie same założenia i ograniczenia jak w podrozdziale 8.1.2. Mamy zatem dane parametry geometryczne $l = l_2 = 1, l_3 = 2, r = 0.5$, współrzędne punktu zamontowania manipulatora na platformie mobilnej $(d_x, d_y) = (1, 0)$, posturę początkową platformy $q_0 = (0, 0, 45^\circ, 45^\circ)$, horyzont sterowania $T = \pi$ oraz ograniczenia $x_1, x_3 \in [0, 2\pi], x_2 \in [0, x_{2max}], |c_{ij}| \leq 3$ ($i = 1, 2; j = 0, 1, 2, 3, 4$). Przyjmujemy ponadto następującą postać elementów macierzy wagowych $R(t)$ i W :

$$\begin{cases} R_{ij} = \frac{1}{u_{max}^2} & \text{dla } i = j \\ R_{ij} = 0 & \text{dla } i \neq j \end{cases}, \quad \begin{cases} W_{ij} = \frac{1}{x_{max}^2} & \text{dla } i = j \\ W_{ij} = 0 & \text{dla } i \neq j \end{cases}, \quad (11.1)$$

przy czym u_{max} oznacza maksymalne wartości amplitud funkcji sterujących platformy, natomiast x_{max} - maksymalne wartości zmiennych przegubowych manipulatora pokładowego.

Uwzględniając ograniczenia nałożone na zmienne przegubowe manipulatora i funkcje sterujące platformy oraz biorąc pod uwagę zależność (11.1), otrzymujemy macierze wagowe

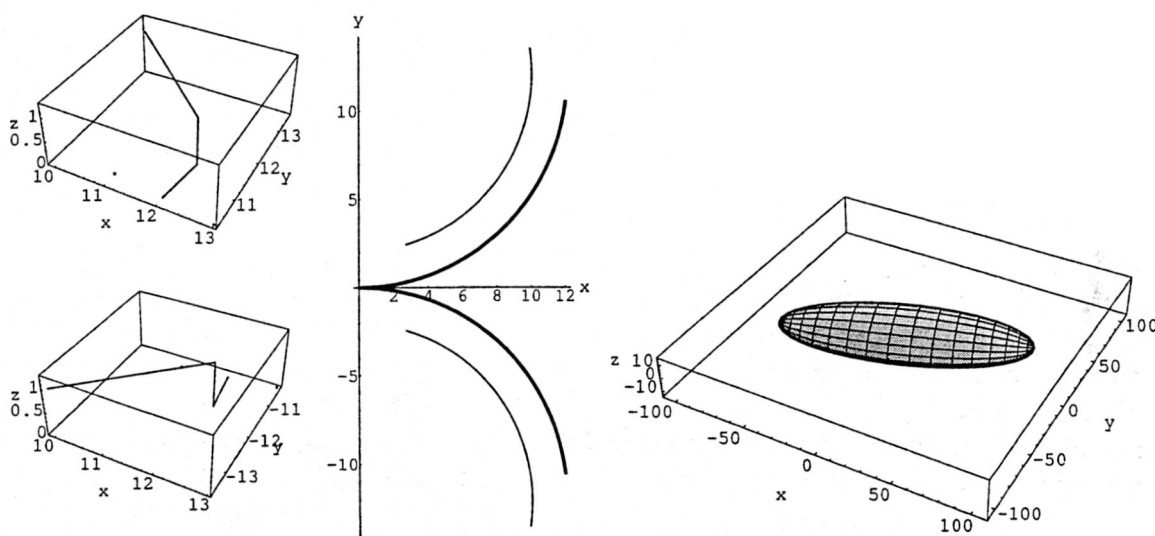
$$R(t) = \frac{1}{9} I_2 \quad W = \frac{1}{4\pi^2} I_3. \quad (11.2)$$

Wyniki optymalizacji uzyskane dla stałych funkcji sterujących ($i = 1, 2; j = 0$) oraz funkcji zawierających pierwsze ($i = 1, 2; j = 0, 1, 2$) i drugie harmoniczne ($i = 1, 2; j = 0, 1, 2, 3, 4$) przedstawia tabela (11.1)

i rysunki (11.1) - (11.3). Wyznaczone konfiguracje zręczne różnią się nieco od odpowiednich konfiguracji zręcznych uzyskanych dla jednostkowych macierzy wagowych $R(t)$ i W (por. tab. (8.2) i (11.1)). Warto zauważyć, że po unormowaniu lokalnej zręczności kinematycznej, wzrosła izotropowość oraz dystorsja uzyskanych konfiguracji zręcznych.

ograniczenia	optymalna konfiguracja (c, x)
$i = 1, 2,$ $j = 0$	$\{c_{10}, c_{20}, x_1, x_3\} = \{(2.54, 3.00, 5.33, 0.00) \wedge (3.00, 2.54, 0.96, 0.00)\}$ $\tilde{m}_{q_0, T}(c, x) = 31041$
$i = 1, 2,$ $j = 0, 1, 2$	$\{c_{10}, c_{11}, c_{12}, c_{20}, c_{21}, c_{22}, x_1, x_3\} =$ $= \{(3.00, -1.64, -2.57, 3.00, -3.00, -3.00, 5.64, 0.00),$ $(3.00, -3.00, -3.00, 3.00, -1.64, -2.57, 0.64, 0.00)\}$ $\tilde{m}_{q_0, T}(c, x) = 43591$
$i = 1, 2,$ $j = 0, 1, 2, 3, 4$	$\{c_{10}, c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{14}, c_{20}, c_{21}, c_{22}, c_{23}, c_{24}, x_1, x_3\} =$ $= \{(3.00, -1.22, -3.00, -3.00, 1.60, 3.00, -3.00, -2.93, -3.00, 3.00, 6.21, 0.00),$ $(3.00, -3.00, -2.93, -3.00, 3.00, 3.00, -1.22, -3.00, -3.00, 1.60, 0.07, 0.00)\}$ $\tilde{m}_{q_0, T}(c, x) = 57892$

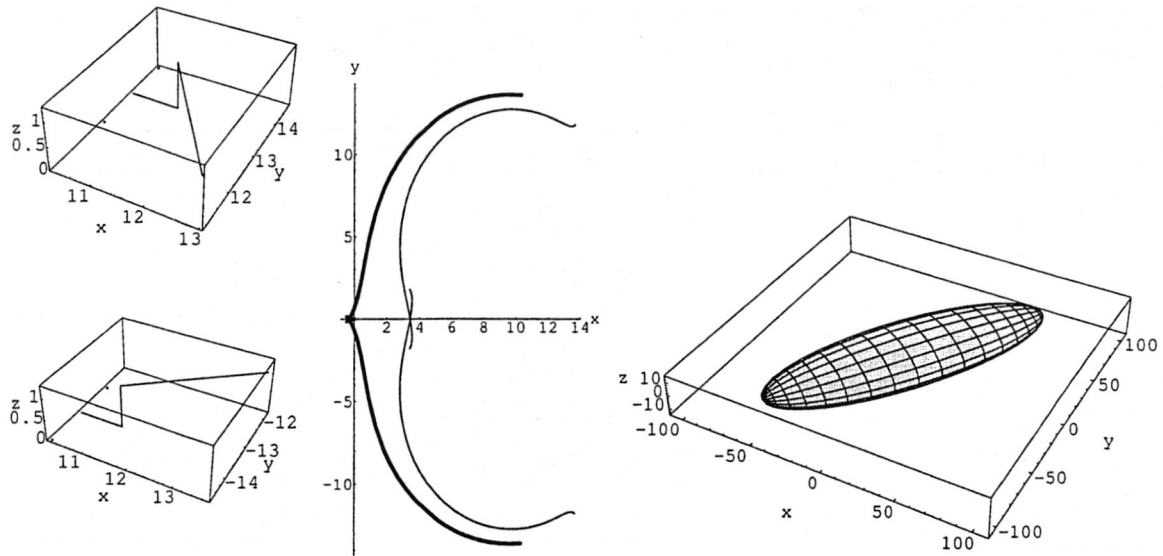
Tab. 11.1: Optymalna konfiguracja manipulatora mobilnego (nh,h) - manipulator typu RTR na platformie dwukołowej.



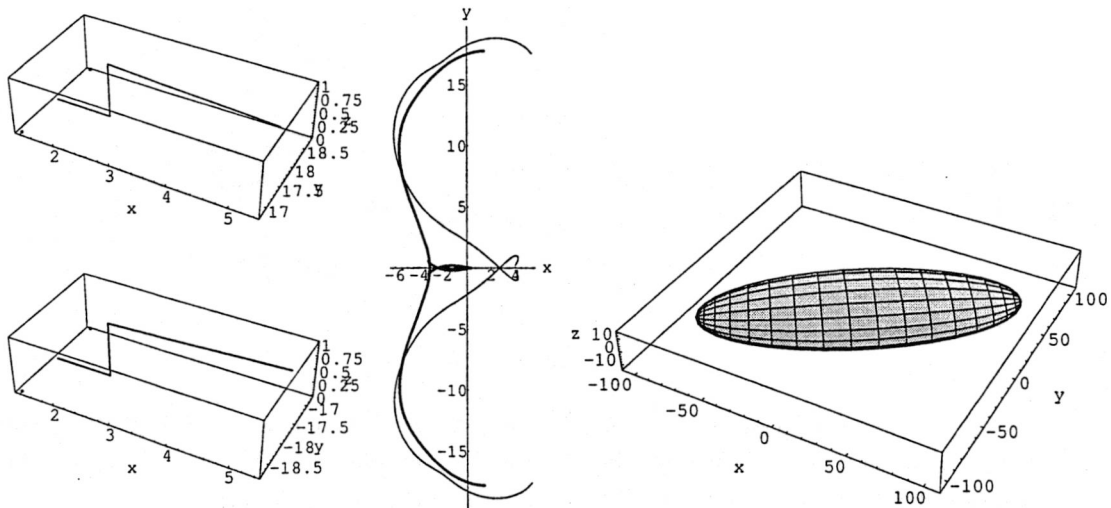
Rys. 11.1: Optymalna konfiguracja manipulatora mobilnego (nh,h) - manipulator typu RTR na platformie dwukołowej (pogrubiona linia - trajektoria platformy) wraz z elipsoidą zręczności ($j = 0$). Współczynnik uwarunkowania $\tilde{\kappa}_{q_0, T}(c, x) = 32.4$, wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0, T}}(c, x) = \{6817.8, 716.1, 210.3\}$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0, T}(c, x) = 7744.2$.

OPTYMALNA GEOMETRIA

Obecnie zastosujemy wcześniej zaproponowane macierze wagowe $R(t)$ i W do obliczenia optymalnej geometrii (d_x, d_y, l_2, l_3) rozważanego robota. Pozostałe założenia przyjmujemy jak w podrozdziale (8.1.2), a zatem $l = 1$, $r = 0.5$, $q_0 = (0, 0, 45^\circ, 45^\circ)$, $T = \pi$ oraz $|c_{ij}| \leq 1$ ($i = 1, 2$; $j = 0, 1, 2$). Rezultaty



Rys. 11.2: Optymalna konfiguracja manipulatora mobilnego (nh,h) - manipulator typu RTR na platformie dwukołowej (pogrubiona linia - trajektoria platformy) wraz z elipsoidą zręczności ($j = 0, 1, 2$). Współczynnik uwarunkowania $\tilde{\kappa}_{q_0,T}(c, x) = 49.81$, wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0,T}}(c, x) = \{10476.0, 919.3, 210.3\}$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0,T}(c, x) = 11606$.



Rys. 11.3: Optymalna konfiguracja manipulatora (nh,h) - manipulator typu RTR na platformie dwukołowej (pogrubiona linia - trajektoria platformy) wraz z elipsoidą zręczności ($j = 0, 1, 2, 3, 4$). Współczynnik uwarunkowania $\tilde{\kappa}_{q_0,T}(c, x) = 53.88$, wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0,T}}(c, x) = \{11332.0, 1498.5, 210.3\}$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0,T}(c, x) = 13041$.

obliczeń zawiera tabela (11.2). Wyznaczona geometria pokrywa się z geometrią optymalną w sensie lokalnej zręczności kinematycznej zawierającej jednostkowe macierze wagowe $R(t)$ i W (por. tab. (8.4) i (11.2)). Również w tym przypadku manipulator powinien być wysunięty możliwie najdalej względem środka platformy, a ramię l_3 ma być jak najdłuższe.

ograniczenia	optymalna geometria	global zręczność
$l_2 + l_3 = 8,$ $l_2 \geq 0, l_3 \geq 0,$ $-1 \leq d_x \leq 1,$ $-3 \leq d_y \leq 3.$	$l_2 = 0, l_3 = 8,$ $(d_x, d_y) = \{(-1, -3), (-1, 3), (1, -3), (1, 3)\}$	$\tilde{\mathcal{M}}_{q_0, T}(K_{q_0, T}) = 7274$
$l_2 + l_3 = 8,$ $l_2 \geq 0, l_3 \geq 0,$ $-1 \leq d_x \leq 1,$ $-6 \leq d_y \leq 3.$	$l_2 = 0, l_3 = 8,$ $(d_x, d_y) = \{(1, -6), (-1, -6)\}$	$\tilde{\mathcal{M}}_{q_0, T}(K_{q_0, T}) = 10318$
$l_2 + l_3 = 8,$ $l_2 \geq 0, l_3 \geq 0,$ $-0.5 \leq d_x \leq 1,$ $-3 \leq d_y \leq 3.$	$l_2 = 0, l_3 = 8,$ $(d_x, d_y) = \{(1, -3), (1, 3)\}$	$\tilde{\mathcal{M}}_{q_0, T}(K_{q_0, T}) = 7274$
$0 \leq l_2 \leq 5,$ $0 \leq l_3 \leq 3,$ $-1 \leq d_x \leq 1,$ $-3 \leq d_y \leq 3.$	$l_2 = 5, l_3 = 3,$ $(d_x, d_y) = \{(-1, -3), (-1, 3), (1, -3), (1, 3)\}$	$\tilde{\mathcal{M}}_{q_0, T}(K_{q_0, T}) = 2520$

Tab. 11.2: Optymalna geometria manipulatora mobilnego (nh,h) - manipulator typu RTR na platformie mobilnej.

11.2. Uśrednianie względem T

Miary jakości zależą od wartości horyzontu sterowania T manipulatorów mobilnych. Wydaje się to niepożądane szczególnie na etapie projektowania, kiedy nie znamy czasu pracy robota. Problem ten można rozwiązać poprzez uśrednienie miar jakości manipulatorów mobilnych względem czasu. Uśredniona lokalna zręczność kinematyczna manipulatorów typu (nh,h) (5.11) będzie dana zależnością

$$\tilde{m}_{q_0}(u(\cdot), x) = \frac{1}{R} \int_0^R m_{q_0, T}(u(\cdot), x) dT, \quad (11.3)$$

lub inaczej

$$\tilde{m}_{q_0}(u(\cdot), x) = \frac{1}{R} \sum_{k=1}^R m_{q_0, T_k}(u(\cdot), x), \quad (11.4)$$

przy czym R stanowi maksymalny czas sterowania manipulatora mobilnego.

Jeśli funkcje sterujące przedstawimy w postaci szeregu Fouriera (4.79), to zależność (11.4) będzie można zapisać jako

$$\tilde{m}_{q_0}(c, x) = \frac{1}{R} \sum_{k=1}^R m_{q_0, T_k}(c, x). \quad (11.5)$$

W analogiczny sposób można uśrednić wszystkie pozostałe miary jakości. Wykorzystamy teraz uśrednioną zręczność do obliczenia konfiguracji optymalnej przykładowego manipulatora mobilnego.

11.2.1. Manipulator typu (nh,h): manipulator typu RTR na platformie dwukołowej

Kinematykę oraz funkcję wyjścia rozważanego manipulatora definiują równania (7.3) i (7.4). Ustalamy parametry geometryczne układu $l = l_2 = 1$, $l_3 = 2$, $r = 0.5$, $(d_x, d_y) = (1, 0)$ oraz jego posturę początkową $q_0 = (0, 0, 45^\circ, 45^\circ)$. Poszukujemy zmiennych przegubowych manipulatora (x_1, x_2, x_3) oraz stałych funkcji sterujących platformy $(c_{ij}; i = 1, 2; j = 0)$ maksymalizujących uśrednioną zręczność lokalną (11.5). Ograniczenia nałożone na konfiguracje dopuszczalne są następujące: $x_1, x_3 \in [0, 2\pi]$, $x_2 \in [0, x_{2max}]$, $|c_{ij}| \leq 3$. Tabela (11.3) zawiera wyniki uzyskane dla $R = 5$ i $R = 10$. Okazuje się, że wyznaczone konfiguracje optymalne są bardzo bliskie konfiguracji zamieszczonej w tabeli (8.2) i na rysunku (8.4), uzyskanej przy identycznych założeniach oraz nieuśrednianej zręczności lokalnej zadanej wzorem (5.11). Ponadto zauważamy, że wraz ze wzrostem wartości parametru R maleje różnica między wartościami sterowań c_{10} i c_{20} .

ograniczenia	optymalna konfiguracja (c, x)
$i = 1, 2, j = 0$ $R = 5$	$\{c_{10}, c_{20}, x_1, x_3\} = \{(2.50, 3.00, 5.70, 0.00), (3.00, 2.50, 0.58, 0.00)\}$ $\tilde{m}_{q_0}(c, x) = 542.63$
$i = 1, 2, j = 0$ $R = 10$	$\{c_{10}, c_{20}, x_1, x_3\} = \{(2.69, 3.00, 6.00, 0.00), (3.00, 2.69, 0.28, 0.00)\}$ $\tilde{m}_{q_0}(c, x) = 3086$

Tab. 11.3: Optymalna konfiguracja manipulatora mobilnego (nh,h) - manipulator typu RTR na platformie dwukołowej.

11.3. Efektywność

11.3.1. Efektywność energetyczna

W tym podrozdziale definiujemy nową miarę jakości manipulatorów podwójnie nieholonomicznych, stanowiącą stosunek *lokalnej zręczności kinematycznej* do energii sterowania układu

$$\mu_{q_0, p_0, T}^e(u_1(\cdot), u_2(\cdot)) = \frac{m_{q_0, p_0, T}(u_1(\cdot), u_2(\cdot))}{\| (u_1(\cdot), u_2(\cdot)) \|_{R_1 R_2}}. \quad (11.6)$$

Nowozdefiniowaną miarę będziemy nazywać *efektywnością energetyczną* konfiguracji. Maksymalizując *efektywność energetyczną* uzyskamy konfiguracje charakteryzujące się korzystnym stosunkiem zręczności do energii sterowania robota.

Manipulator typu (nh,nh): planarny manipulator nieholonomiczny typu 3R na samochodzie kinematycznym

Efektywność energetyczną zastosujemy do wyznaczenia optymalnej konfiguracji przykładowego manipulatora podwójnie nieholonomicznego opisywanego równaniami (7.11) i (7.12). Wartości parametrów geometrycznych, posturę początkową platformy oraz manipulatora, przełożenia przekładni i ograniczenia na funkcje sterujące przyjmujemy takie same, jak w podrozdziale (8.1.4). Mamy zatem $l = 1$, $l_0 = 1$, $l_1 = l_2 = l_3 = 0.2$, $q_0 = (0, 0, 0, 0)$, $p_0 = (30^\circ, 30^\circ, 30^\circ)$, $a_2 = a_3 = 0.1$, $|c_{i,j}^k| \leq 3$. Tak jak poprzednio, przy analizie wybieramy stałe funkcje sterujące ($k = 1, 2; i = 1, 2; j = 0$) oraz funkcje zawierające pierwsze harmoniczne ($k = 1, 2; i = 1, 2, j = 0, 1, 2$). Wyniki obliczeń zebrano w tabeli (11.4).

Okazuje się, że *efektywność energetyczna* oraz *lokalna zręczność kinematyczna* rekomendują tę samą optymalną konfigurację platformy (por. tab. (8.6) i (11.4)), nieco różne są natomiast ich zalecenia dotyczące optymalnych konfiguracji manipulatora nieholonomicznego. Jak widzimy, w przypadku *efektywności energetycznej* częściowo rezygnujemy częściowo z konfiguracji zręcznej manipulatora, na rzecz minimalnego wykorzystania energii manipulatora. Dlatego zużycie energii manipulatora na osiągnięcie konfiguracji optymalnej jest znacznie mniejsze, niż to miało miejsce w przypadku optymalizacji *lokalnej zręczności kinematycznej*. Konfiguracje optymalne platformy oraz manipulatora (uzyskane dla horyzontu sterowania $T = \pi$) wraz z odpowiednimi elipsoidami zręczności zamieszczono na rysunkach (11.4) i (11.5). Wnikliwa analiza wyników pozwala zauważyć, że w porównaniu z konfiguracjami zręcznymi wzrasta anizotropowość konfiguracji efektywnych, natomiast ich dystorsja nieznacznie maleje.

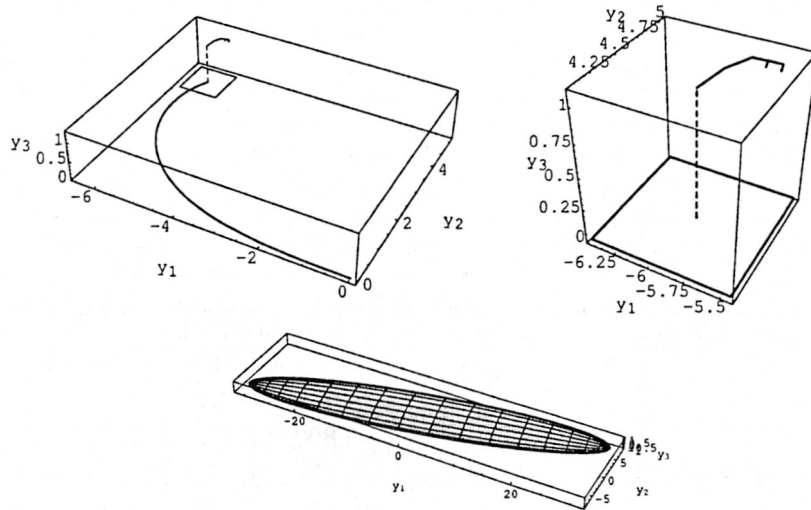
Manipulator typu (nh,nh): planarny manipulator nieholonomiczny typu 3R na monocyklu

Weźmy teraz manipulator podwójnie nieholonomiczny różniący się od poprzedniego rodzajem platformy nieholonomicznej (monocykl) i sprawdźmy, czy kryteria *efektywności energetycznej* i *lokalnej zręczności kinematycznej* zalecą te same konfiguracje optymalne platformy. Rozważany manipulator jest opisywany zależnościami (7.15) i (7.16). Pozostają w mocy wszystkie założenia z podrozdziału (8.1.5), a zatem $l_1 = l_2 = l_3 = 0.2$, $d = 0$, $l_0 = 1$, $a_2 = a_3 = 0.1$, $q_0 = (0, 0, 0)$, $p_0 = (30^\circ, 30^\circ, 30^\circ)$. Poszukujemy optymalnych wartości, stałych i ograniczonych funkcji sterujących monocykla ($k = 1; i = 1, 2; j = 0$; $|c_{i,j}^k| \leq 3$) oraz manipulatora nieholonomicznego ($k = 2; i = 1, 2; j = 0$; $|c_{i,j}^k| \leq 3$). Rezultaty obliczeń znajdują się w tabeli (11.5). Odnosi się do nich także rysunek (11.6).

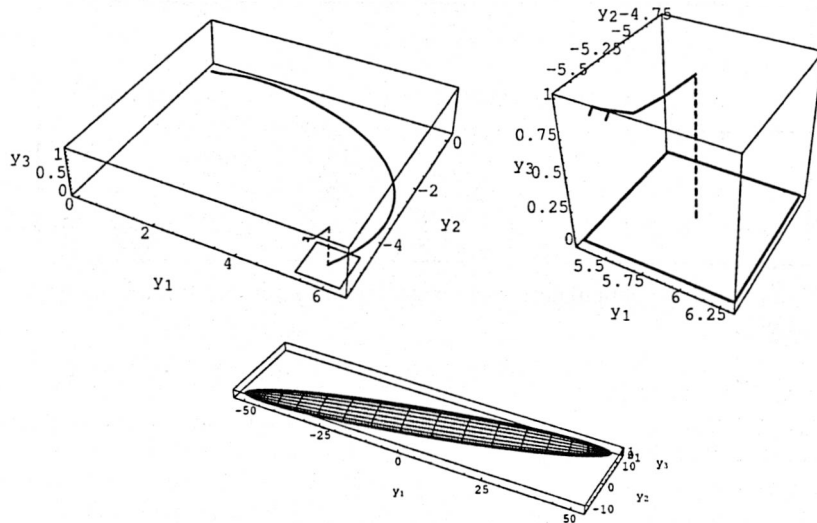
Po porównaniu wyników zamieszczonych w tabelach (8.7) i (11.5) dochodzimy do wniosku, że również w przypadku tego manipulatora nieholonomicznego konfiguracja optymalna platformy zmienia się bardzo nieznacznie, a różnica między konfiguracją zręczną, a efektywną platformy jest tym mniejsza, im dłuższy horyzont sterowania T . Zgodnie z naszymi przewidywaniami, zmianie ulega konfiguracja optymalna manipulatora pokładowego, a co za tym idzie jego energia. W przypadku *lokalnej zręczności kinematycznej*

ograniczenia	optymalna konfiguracja (c^1, c^2)
$T = \pi$ $k = 1, 2$ $i = 1, 2, j = 0$ $\tilde{\mathcal{X}} = R^4$	$\{c_{10}^1, c_{20}^1\} = \{-3, \pm 0.144\}$ $\{c_{10}^2, c_{20}^2\} = \{0.716, -0.948\}$ $\{q_1, q_2, q_3, q_4\} = \{-5.935, \pm 4.550, \mp 120^\circ, \pm 25^\circ\}$ $\{p_1, p_2, p_3\} = \{159^\circ, 16^\circ, 30^\circ\}$ $\tilde{m}_{q_0, p_0, T}(c^1, c^2) = 177.526$ $\tilde{\mu}_{q_0, p_0, T}^e(c^1, c^2) = 31.009$ $(\varepsilon, \varepsilon_p, \varepsilon_m) = (32.774, 28.339, 4.435)$
$T = 3\pi$ $k = 1, 2$ $i = 1, 2, j = 0$ $\tilde{\mathcal{X}} = R^4$	$\{c_{10}^1, c_{20}^1\} = \{-3, \pm 0.019\}$ $\{c_{10}^2, c_{20}^2\} = \{0.337, -2.055\}$ $\{q_1, q_2, q_3, q_4\} = \{-14.534, \pm 14.825, \mp 147^\circ, \pm 10^\circ\}$ $\{p_1, p_2, p_3\} = \{212^\circ, -30^\circ, -3^\circ\}$ $\tilde{m}_{q_0, p_0, T}(c^1, c^2) = 87932$ $\tilde{\mu}_{q_0, p_0, T}^e(c^1, c^2) = 7843$ $(\varepsilon, \varepsilon_p, \varepsilon_m) = (125.704, 84.826, 40.878)$
$T = 5\pi$ $k = 1, 2$ $i = 1, 2, j = 0$ $\tilde{\mathcal{X}} = R^4$	$\{c_{10}^1, c_{20}^1\} = \{-3, \pm 0.007\}$ $\{c_{10}^2, c_{20}^2\} = \{0.217, -1.558\}$ $\{q_1, q_2, q_3, q_4\} = \{-23.498, \pm 24.821, \mp 150^\circ, \pm 6^\circ\}$ $\{p_1, p_2, p_3\} = \{225^\circ, -34^\circ, -22^\circ\}$ $\tilde{m}_{q_0, p_0, T}(c^1, c^2) = 1500780$ $\tilde{\mu}_{q_0, p_0, T}^e(c^1, c^2) = 111780$ $(\varepsilon, \varepsilon_p, \varepsilon_m) = (180.263, 141.372, 38.891)$
$T = \pi$ $k = 1, 2$ $i = 1, 2, j = 0, 1, 2$ $\tilde{\mathcal{X}} = R^{12}$	$\{c_{10}^1, c_{11}^1, c_{12}^1, c_{20}^1, c_{21}^1, c_{22}^1\} = \{-3, 3, 3, \pm 1.114, \pm 1.268, \pm 0.978\}$ $\{c_{10}^2, c_{11}^2, c_{12}^2, c_{20}^2, c_{21}^2, c_{22}^2\} = \{1.728, 1.697, -0.718, 2.030, -3, -0.340\}$ $\{q_1, q_2, q_3, q_4\} = \{5.812, \mp 5.102, \mp 118^\circ, \pm 200^\circ\}$ $\{p_1, p_2, p_3\} = \{341^\circ, 7^\circ, 38^\circ\}$ $\tilde{m}_{q_0, p_0, T}(c^1, c^2) = 438.292$ $\tilde{\mu}_{q_0, p_0, T}^e(c^1, c^2) = 42.479$ $(\varepsilon, \varepsilon_p, \varepsilon_m) = (105.954, 64.475, 41.479)$

Tab. 11.4: Konfiguracje optymalne manipulatora mobilnego (nh,nh) - planarny manipulator nieholonomiczny typu 3R na samochodzie kinematycznym



Rys. 11.4: a) Optymalna konfiguracja manipulatora (nh,nh) ($\tilde{\mathcal{X}} = R^4$) - planarny manipulator nieholonomiczny typu 3R na samochodzie kinematycznym; b) Elipsoida zręczności. Współczynnik uwarunkowania $\tilde{\kappa}_{q_0,p_0,T}(c^1,c^2) = 871.87$, wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0,p_0,T}}(c^1,c^2) = \{976.50, 28.71, 1.12\}$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0,p_0,T}(c^1,c^2) = 1006.3$.

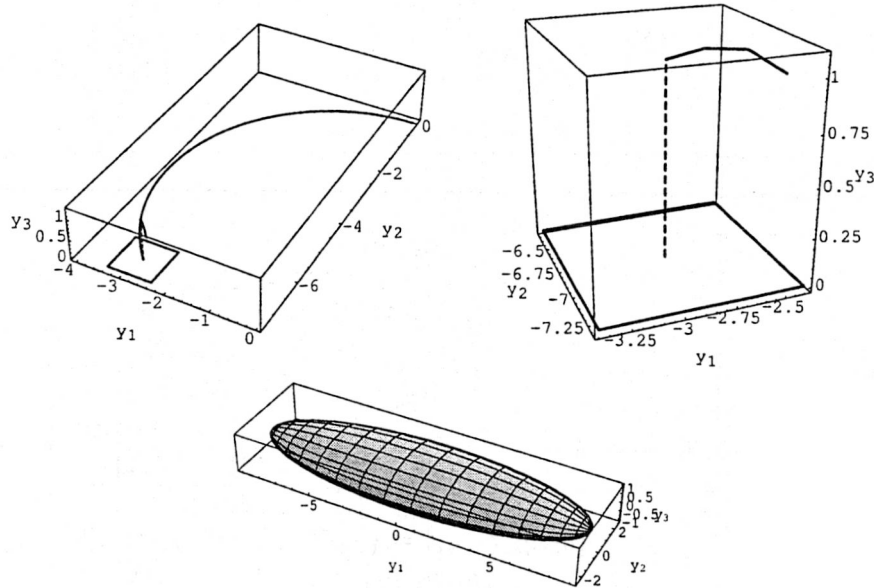


Rys. 11.5: a) Optymalna konfiguracja manipulatora (nh,nh) ($\tilde{\mathcal{X}} = R^{12}$) - planarny manipulator nieholonomiczny typu 3R na samochodzie kinematycznym; b) Elipsoida zręczności. Współczynnik uwarunkowania $\tilde{\kappa}_{q_0,p_0,T}(c^1,c^2) = 1580.3$, wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0,p_0,T}}(c^1,c^2) = \{2749.80, 40.18, 1.74\}$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0,p_0,T}(c^1,c^2) = 2791.7$.

ograniczenia	optymalna konfiguracja (c^1, c^2)
$T = \pi$	$\{c_{10}^1, c_{20}^1\} = \{-3, \pm 0.745\}$ $\{c_{10}^2, c_{20}^2\} = \{0.717, -0.968\}$ $\{q_1, q_2, q_3, q_4\} = \{-2.890, \mp 6.829, \pm 134^\circ\}$ $\{p_1, p_2, p_3\} = \{159^\circ, 16^\circ, 30^\circ\}$ $\tilde{m}_{q_0, p_0, T}(c^1, c^2) = 24.226$ $\tilde{\mu}_{q_0, p_0, T}^e(c^1, c^2) = 4.120$ $(\varepsilon, \varepsilon_p, \varepsilon_m) = (34.581, 30.018, 4.562)$
$T = 2\pi$	$\{c_{10}^1, c_{20}^1\} = \{-3, \pm 0.447\}$ $\{c_{10}^2, c_{20}^2\} = \{0.441, -1.860\}$ $\{q_1, q_2, q_3, q_4\} = \{-2.171, \mp 13.046, \pm 161^\circ\}$ $\{p_1, p_2, p_3\} = \{189^\circ, -15^\circ, 20^\circ\}$ $\tilde{m}_{q_0, p_0, T}(c^1, c^2) = 283.13$ $\tilde{\mu}_{q_0, p_0, T}^e(c^1, c^2) = 31.506$ $(\varepsilon, \varepsilon_p, \varepsilon_m) = (80.759, 57.807, 22.952)$
$T = 3\pi$	$\{c_{10}^1, c_{20}^1\} = \{-3, \pm 0.308\}$ $\{c_{10}^2, c_{20}^2\} = \{0.338, -2.085\}$ $\{q_1, q_2, q_3, q_4\} = \{-2.333, \mp 19.216, \pm 166^\circ\}$ $\{p_1, p_2, p_3\} = \{213^\circ, -30^\circ, -4^\circ\}$ $\tilde{m}_{q_0, p_0, T}(c^1, c^2) = 1309$ $\tilde{\mu}_{q_0, p_0, T}^e(c^1, c^2) = 115.814$ $(\varepsilon, \varepsilon_p, \varepsilon_m) = (127.775, 85.715, 42.059)$

Tab. 11.5: Konfiguracje optymalne manipulatora mobilnego (nh,nh) - planarny manipulator nieholonomiczny typu 3R na monocyklu

wykorzystanie energii platformy oraz manipulatora jest porównywalne, podczas gdy w przypadku *efektywności energetycznej* wykorzystanie energii manipulatora znacznie się zmniejsza. Oznacza to, że zmniejszeniu ulega również całkowita energia układu. Wzrasta przy tym nieznacznie anizotropowość konfiguracji manipulatora nieholonomicznego i jego dystorsja.



Rys. 11.6: a) Optymalna konfiguracja manipulatora mobilnego (nh,nh) ($\tilde{\mathcal{X}} = R^4$, $T = \pi$) - planarny manipulator nieholonomiczny typu 3R na monocyklu; b) Elipsoida zręczności. Współczynnik uwarunkowania $\tilde{\kappa}_{q_0,p_0,T}(c^1, c^2) = 69.651$, wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0,p_0,T}}(c^1, c^2) = \{78.5528, 6.6203, 1.1278\}$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0,p_0,T}(c^1, c^2) = 86.301$.

11.3.2. Efektywność ruchowa

Zaproponujemy teraz nieco inną definicję efektywności, mianowicie normę definiujemy w przestrzeni zadaniowej, a nie jak to miało miejsce poprzednio - w przestrzeni konfiguracyjnej

$$\mu_{q_0,p_0,T}^m(u(\cdot), x) = \frac{(m_{q_0,p_0,T})^{\frac{1}{r}}(u(\cdot), x)}{\|K_{q_0,p_0,T}(u(\cdot), x)\|}. \quad (11.7)$$

i odpowiednio dla manipulatorów podwójnie nieholonomicznych

$$\mu_{q_0,p_0,T}^m(u_1(\cdot), u_2(\cdot)) = \frac{(m_{q_0,p_0,T})^{\frac{1}{r}}(u_1(\cdot), u_2(\cdot))}{\|K_{q_0,p_0,T}(u_1(\cdot), u_2(\cdot))\|}. \quad (11.8)$$

Ponieważ funkcja wyjścia manipulatora mobilnego opisana jest w r -wymiarowej przestrzeni kartezjańskiej, zatem w celu uzyskania miary bezwymiarowej, w liczniku pojawia się pierwiastek stopnia r . Jak wiadomo $\|K_{q_0,p_0,T}(u(\cdot), x)\|$ opisuje przemieszczenie efektora manipulatora pokładowego. Wiemy również, że *lokalna zręczność kinematyczna* jest objętością elipsoidy powstałej w przestrzeni zadaniowej. Zarówno $\|K_{q_0,p_0,T}(u(\cdot), x)\|$, jak i *lokalna zręczność kinematyczna*, rosną w miarę wzrostu horyzontu sterowania T . *Efektywność ruchowa*, która jest odniesieniem objętości elipsoidy do zasięgu ruchu efektor manipulatora mobilnego jest miarą normującą w pewnym sensie objętość elipsoidy utworzonej w przestrzeni zadaniowej robota.

Manipulator typu (nh,nh): planarny manipulator nieholonomiczny typu 3R na samochodzie kinematycznym

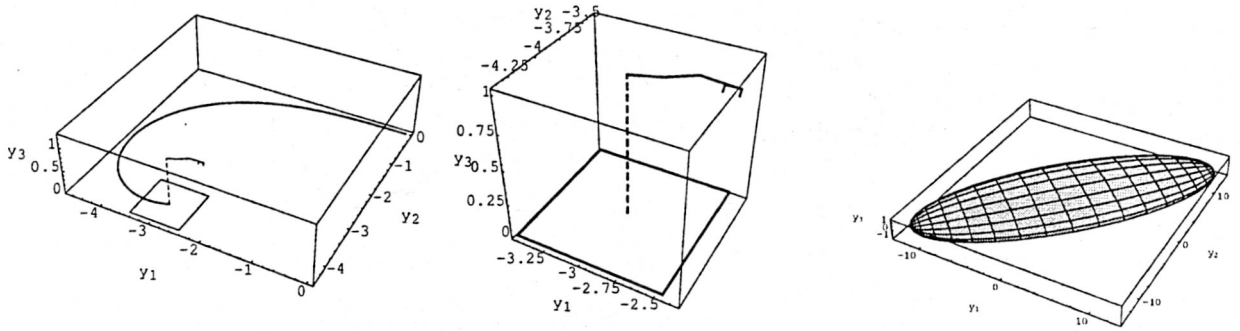
Miarę (11.8) zastosujemy do wyznaczenia konfiguracji efektywnych ruchowo manipulatora podwójnie nieholonomicznego, opisywanego równaniami (7.11) i (7.12). Podobnie jak w podrozdziałach (8.1.4) i (11.3.1), zakładamy następujące wartości parametrów geometrycznych: $l = 1$, $l_0 = 1$, $l_1 = l_2 = l_3 = 0.2$, postury początkowej: $q_0 = (0, 0, 0, 0)$ i $p_0 = (30^\circ, 30^\circ, 30^\circ)$, współczynników $a_2 = a_3 = 0.1$ oraz ograniczeń $|c_{i,j}^k| \leq 3$ nałożonych na stałe ($k = 1, 2; i = 1, 2; j = 0$) oraz zawierające pierwsze harmoniczne ($k = 1, 2; i = 1, 2; j = 0, 1, 2$) funkcje strujące. Uzyskane wyniki zawiera tabela (11.6) oraz rysunki (11.7) - (11.10).

ograniczenia	optymalna konfiguracja (c^1, c^2)
$T = \pi$ $k = 1, 2$ $i = 1, 2, j = 0$ $\tilde{\mathcal{X}} = R^4$	$\{c_{10}^1, c_{20}^1\} = \{-3, \pm 0.253\}$ $\{c_{10}^2, c_{20}^2\} = \{0.845, -3\}$ $\{q_1, q_2, q_3, q_4\} = \{-2.956, \pm 3.879, \mp 204^\circ, \pm 45^\circ\}$ $\{p_1, p_2, p_3\} = \{182^\circ, -8^\circ, 24^\circ\}$ $\tilde{m}_{q_0, p_0, T}(c^1, c^2) = 134.073$ $\tilde{\mu}_{q_0, p_0, T}^m(c^1, c^2) = 5.857$ $(\varepsilon, \varepsilon_p, \varepsilon_m) = (58.993, 28.476, 30.516)$
$T = 3\pi$ $k = 1, 2$ $i = 1, 2, j = 0$ $\tilde{\mathcal{X}} = R^4$	$\{c_{10}^1, c_{20}^1\} = \{-2.321, \pm 0.331\}$ $\{c_{10}^2, c_{20}^2\} = \{-0.183, 3\}$ $\{q_1, q_2, q_3, q_4\} = \{0.050, \pm 0.197, \mp 802^\circ, \pm 179^\circ\}$ $\{p_1, p_2, p_3\} = \{-69^\circ, -17^\circ, 96^\circ\}$ $\tilde{m}_{q_0, p_0, T}(c^1, c^2) = 1098.6$ $\tilde{\mu}_{q_0, p_0, T}^m(\lambda^1, \lambda^2) = 161.21$ $(\varepsilon, \varepsilon_p, \varepsilon_m) = (136.924, 51.785, 85.139)$
$T = 5\pi$ $k = 1, 2$ $i = 1, 2, j = 0$ $\tilde{\mathcal{X}} = R^4$	$\{c_{10}^1, c_{20}^1\} = \{-2.694, \pm 0.202\}$ $\{c_{10}^2, c_{20}^2\} = \{1.019, -3\}$ $\{q_1, q_2, q_3, q_4\} = \{0.060, \mp 0.451, \mp 1526^\circ, \pm 182^\circ\}$ $\{p_1, p_2, p_3\} = \{227^\circ, 4^\circ, -3^\circ\}$ $\tilde{m}_{q_0, p_0, T}(c^1, c^2) = 6720.3$ $\tilde{\mu}_{q_0, p_0, T}^m(c^1, c^2) = 644.197$ $(\varepsilon, \varepsilon_p, \varepsilon_m) = (272.367, 114.688, 157.679)$
$T = \pi$ $k = 1, 2$ $i = 1, 2, j = 0, 1, 2$ $\tilde{\mathcal{X}} = R^{12}$	$\{c_{10}^1, c_{11}^1, c_{12}^1, c_{20}^1, c_{21}^1, c_{22}^1\} = \{3, -3, 3, \mp 2.105, \mp 2.228, \pm 1.916\}$ $\{c_{10}^2, c_{11}^2, c_{12}^2, c_{20}^2, c_{21}^2, c_{22}^2\} = \{-2.464, -0.267, -3, -3, 3, 3\}$ $\{q_1, q_2, q_3, q_4\} = \{-0.065, \mp 0.439, \mp 269^\circ, \mp 379^\circ\}$ $\{p_1, p_2, p_3\} = \{-414^\circ, -2^\circ, 43^\circ\}$ $\tilde{m}_{q_0, p_0, T}(c^1, c^2) = 111.564$ $\tilde{\mu}_{q_0, p_0, T}^m(c^1, c^2) = 36.653$ $(\varepsilon, \varepsilon_p, \varepsilon_m) = (173.915, 84.039, 89.876)$

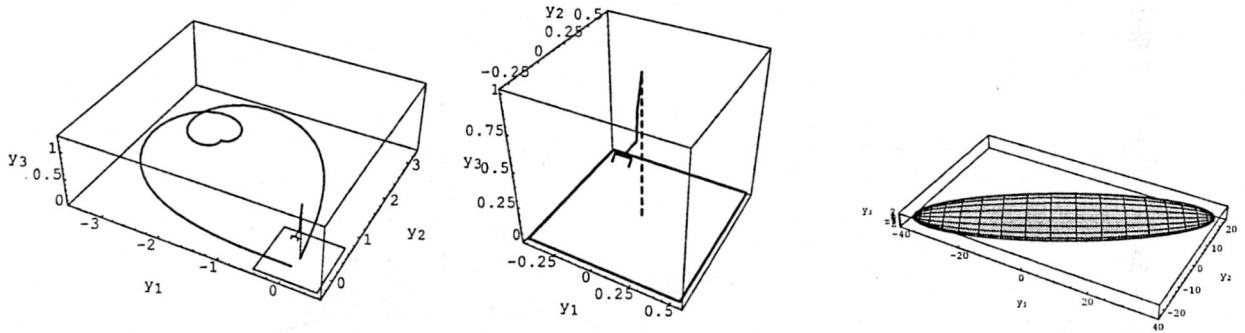
Tab. 11.6: Konfiguracje optymalne manipulatora mobilnego (nh,nh) - planarny manipulator nieholonomiczny typu 3R na samochodzie kinematycznym

Okazuje się, że efektywność ruchowa dana zależnością (11.7) zmienia zarówno konfigurację platformy jak i manipulatora (por. tab. (8.6), (11.4) i (11.6)). Odbywa się to kosztem zręczności, oraz wykorzystania energii: co prawda maleje tu zużycie energii platformy mobilnej, ale za to wzrasta zużycie energii manipulatora nieholonomicznego, a co za tym idzie rośnie zużycie energii całego układu. Zauważmy także,

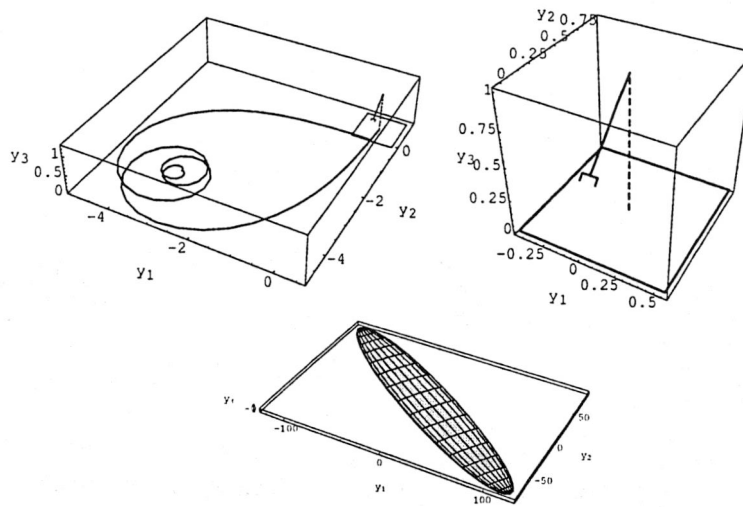
że w porównaniu z wynikami optymalizacji lokalnej zręczności, maleje dystorsja uzyskanych konfiguracji efektywnych, natomiast rośnie ich izotropowość.



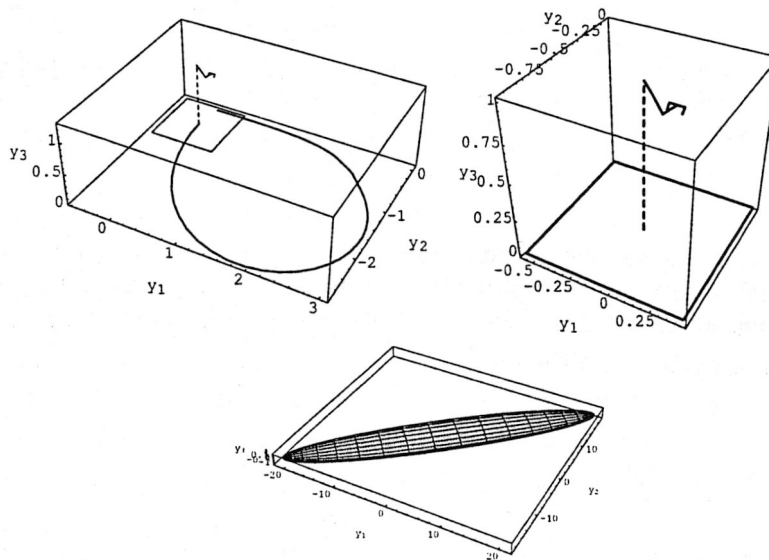
Rys. 11.7: Optymalna konfiguracja manipulatora mobilnego (nh,nh) ($\tilde{\mathcal{X}} = R^4$) - planarny manipulator nieholonomiczny typu 3R na samochodzie kinematycznym oraz elipsoida zręczności. Współczynnik uwarunkowania $\tilde{\kappa}_{q_0,p_0,T}(c^1, c^2) = 198.99$, wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0,p_0,T}}(c^1, c^2) = \{310.4292, 36.6146, 1.5600\}$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0,p_0,T}(c^1, c^2) = 348.60$.



Rys. 11.8: Optymalna konfiguracja manipulatora mobilnego (nh,nh) ($\tilde{\mathcal{X}} = R^4$) - planarny manipulator nieholonomiczny typu 3R na samochodzie kinematycznym oraz elipsoida zręczności. Współczynnik uwarunkowania $\tilde{\kappa}_{q_0,p_0,T}(c^1, c^2) = 369.50$, wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0,p_0,T}}(c^1, c^2) = \{1840.10, 131.74, 4.98\}$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0,p_0,T}(c^1, c^2) = 1976.8$.



Rys. 11.9: Optymalna konfiguracja manipulatora mobilnego (nh,nh) ($\tilde{\mathcal{X}} = R^4$) - planarny manipulator nieholonomiczny typu 3R na samochodzie kinematycznym oraz elipsoida zręczności. Współczynnik uwarunkowania $\tilde{\kappa}_{q_0,p_0,T}(c^1, c^2) = 5887.6$, wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0,p_0,T}}(c^1, c^2) = \{20901.00, 608.02, 3.55\}$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0,p_0,T}(c^1, c^2) = 21513.1$.



Rys. 11.10: Optymalna konfiguracja manipulatora mobilnego (nh,nh) ($\tilde{\mathcal{X}} = R^{12}$) - planarny manipulator nieholonomiczny typu 3R na samochodzie kinematycznym oraz elipsoida zręczności. Współczynnik uwarunkowania $\tilde{\kappa}_{q_0,p_0,T}(c^1, c^2) = 740.826$, wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0,p_0,T}}(c^1, c^2) = \{786.017, 14.923, 1.061\}$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0,p_0,T}(c^1, c^2) = 802.001$.

12. Podsumowanie

Niniejsza rozprawa proponuje nowy sposób podejścia do definiowania kinematycznych i dynamicznych miar jakości manipulatorów mobilnych, wykorzystujący metodę endogenicznej przestrzeni konfiguracyjnej. Zaproponowana metodologia stosuje się do wszystkich klas manipulatorów mobilnych, złożonych z holonomicznej lub nieholonomicznej platformy mobilnej i holonomicznego lub nieholonomicznego manipulatora pokładowego. Metodologia ta opiera się na zasadzie analogii i korespondencji. Oznacza to, że miary jakości manipulatorów mobilnych tworzy się na wzór miar jakości manipulatorów stacjonarnych, oraz że miary jakości zdefiniowane dla mniej złożonych klas manipulatorów mobilnych są szczególnymi przypadkami miar dla klas bardziej złożonych. Punktem wyjścia konstrukcji przedstawionych w rozprawie była reprezentacja kinematyki i dynamiki manipulatora mobilnego w postaci układu sterowania z funkcją wyjścia. Podstawową przesłanką badawczą było stwierdzenie, że manipulator mobilny posiadający własność sterowalności, a więc zdolny do osiągnięcia zadanych punktów przestrzeni zadaniowej, powinien się charakteryzować dodatnią miarą jakości. W kontekście tej przesłanki, stosowane w literaturze podejście do miar jakości manipulatorów mobilnych posiada poważne strukturalne ograniczenia. Pragnienie przewyciężenia tych ograniczeń było jednym z głównych celów rozprawy. W rozprawie udało się wykazać cztery podstawowe tezy:

1. Miary jakości manipulatorów mobilnych można wyprowadzić w ramach metody przestrzeni endogenicznej, wykorzystując analogię do manipulatorów stacjonarnych.
2. Uzyskane w ten sposób miary jakości nie mają istotnych ograniczeń miar uzyskanych przy podejściu tradycyjnym.
3. Dynamiczne miary jakości manipulatorów mobilnych można zbudować przez analogię do miar kinematycznych.
4. Wyprowadzone miary jakości nadają się do optymalnego projektowania zachowania, a także geometrii i dynamiki manipulatorów mobilnych.

Praktyczne możliwości wyznaczenia i zastosowania zdefiniowanych w rozprawie miar jakości zostały zilustrowane licznymi przykładami. W przykładach tych wyznaczono optymalne konfiguracje manipulatorów mobilnych, a także określono ich optymalne parametry geometryczne (rozmiary, miejsce zamontowania manipulatora na platformie) i dynamiczne (masy i momenty bezwładności). Uzyskane rekomendacje mogą być wykorzystane przy projektowaniu manipulatorów mobilnych, podobnie jak wykorzystuje się znane miary jakości manipulatorów stacjonarnych.

Znaczenie wyników badań, których podsumowaniem jest niniejsza rozprawa polega nie tylko na uzupełnieniu teorii manipulatorów mobilnych i dostarczeniu nowych narzędzi do ich projektowania, lecz także na postawieniu nowych pytań i otwarciu nowych perspektyw badawczych. Do pytań o charakterze fundamentalnym należy pytanie o możliwości skonstruowania kanonicznych miar jakości, niezależnych od układów współrzędnych zadaniowych i konfiguracyjnych, ani od reprezentacji sygnałów sterujących działających na obiekt, mających naturalną interpretację fizyczną. Pytanie to wciąż niepokoi robotyków zajmujących się manipulatorami stacjonarnymi. Próbę odpowiedzi na nie zawiera m.in. praca [18], wykorzystująca pojęcie ważonego jakobianu pseudoodwrotnego [42]. Przeniesienie tej odpowiedzi na grunt manipulatorów mobilnych stanowi intrygujące wyzwanie dla przyszłych badań. Ważną kwestią jest moż-

liwość rozszerzenia przedstawionego w rozprawie sposobu podejścia na układy, których ruch narusza ograniczenia nieholonomiczne. Pomyślny wynik takiego rozszerzenia umożliwiłby skonstruowanie miar jakości dla pojazdów samochodowych ([30], [47]) i innych układów poruszających się z poślizgami kół ([16],[11],[33]). W obszarze bezpośrednio objętym zakresem rozprawy kontynuacji wymagają wątki zasygnalizowane w rozdziałach 10 i 11. Przede wszystkim mamy tu na myśli zweryfikowanie hipotezy o niezależności optymalnych konfiguracji manipulatorów mobilnych od sposobu reprezentacji konfiguracji endogenicznych. Duże znaczenie będzie też miało skonstruowanie miar jakości niezależnych od stanu początkowego manipulatora mobilnego i od horyzontu sterowania. Zastosowanie praktyczne mogą mieć miary jakości określające zręczność na jednostkę energii sterowania lub na jednostkę zasięgu ruchu manipulatora mobilnego, podobne do współczynników efektywności zdefiniowanych w rozdziale 11. Miary jakości układów robotycznych mogą mieć charakter uniwersalny lub odnosić się do konkretnych zadań realizowanych przez robota. Interesującym kierunkiem przyszłych badań wydaje się zatem konstruowanie zadaniowo-zorientowanych miar jakości manipulatorów mobilnych. Przykładowa miara tego rodzaju została zaproponowana w rozdziale 6 (wzór 6.8).

A. Dodatek

W dodatku zostały krótko opisane metody oraz funkcje, którymi posłużyliśmy się w celu zaimplementowania oraz przetestowania miar jakości manipulatorów mobilnych. Odpowiednie badania symulacyjne zostały wykonane przy wykorzystaniu pakietów oprogramowania MATHEMATICATM 5.0 oraz MATLABTM 6.1.

A.1. Obliczanie macierzy mobilności $\mathcal{M}_{q_0,T}$

Macierz mobilności platformy jest składnikiem macierzy zręczności $\mathcal{D}_{q_0,T}$, a co za tym idzie - składnikiem wszystkich miar jakości manipulatorów mobilnych. W chwili t definiujemy ją zależnością

$$\mathcal{M}_{q_0,t} = \int_0^t \Phi(t,s)B(s)R^{-1}(s)B^T(s)\Phi^T(t,s)ds. \quad (\text{A.1})$$

Obliczenie macierzy $\mathcal{M}_{q_0,t}$ z powyższego wzoru, wymaga wcześniejszego wyliczenia macierzy fundamentalnej $\Phi(t,s)$. Aby uniknąć bezpośredniego obliczania macierzy $\Phi(T,s)$, różniczkujemy zależność (A.1), względem t otrzymując

$$\dot{\mathcal{M}}_{q_0,t} = B(t)R^{-1}(t)B^T(t) + A(t) \int_0^t \Phi(t,s)B(s)R^{-1}(s)B^T(s)\Phi^T(t,s)ds + \int_0^t \Phi(t,s)B(s)R^{-1}(s)B^T(s)\Phi^T(t,s)dsA^T(t), \quad (\text{A.2})$$

czyli

$$\dot{\mathcal{M}}_{q_0,t} = B(t)R^{-1}(t)B^T(t) + A(t)\mathcal{M}_{q_0,t} + \mathcal{M}_{q_0,t}A^T(t). \quad (\text{A.3})$$

W efekcie dostajemy prosty sposób wyznaczania macierzy mobilności $\mathcal{M}_{q_0,T}$, polegający na numerycznym rozwiązaniu równania różniczkowego (A.3) dla $t = T$, przy warunku początkowym $\mathcal{M}_{q_0,0} = 0$.

A.2. Ilustracja graficzna elipsoidy zręczności $E_{q_0,T}$

Podana niżej część kodu programu, zaimplementowana w systemie MATHEMATICA pozwala na narysowanie elipsoidy zręczności oraz wyliczenie i wyświetlenie na ekranie wartości miary *zręczności lokalnej* manipulatorów mobilnych. Załóżmy, że dla ustalonego T obliczyliśmy numerycznie *macierz*

zręczności $\mathcal{D}_{q_0, T}$ oznaczoną w programie literą D. Funkcja eigensystemnor zwraca wartości własne oraz znormalizowane wektory własne zadanej macierzy.

```
invD = Inverse[D];
Print[mzr = Simplify[Sqrt[Det[D]]/.t- > tmax]];
invD = invD/.t- > tmax;
V = eigensystemnor[invD];
mVekt = Transpose[V[[2]]];
diaginD = Transpose[mVekt].invD.mVekt//Simplify;
diaginD = Chop[diaginD];
elip = {1/Sqrt[diaginD[[1, 1]] * Cos[w] * Cos[u], 1/Sqrt[diaginD[[2, 2]] * Sin[w] *
*Cos[u], 1/Sqrt[diaginD[[3, 3]] * Sin[u]]};
elip = mVekt.elip;
rys = ParametricPlot3D[elip, {w, 0, 2Pi}, {u, Pi/2, Pi/2}, AxesLabel -> {x, y, z}]
```

A.3. Obliczanie globalnych miar jakości manipulatorów mobilnych

Globalne miary jakości manipulatorów mobilnych definiujemy przez uśrednienie odpowiednich miar lokalnych po pewnym podzbiorze endogenicznej przestrzeni konfiguracyjnej $\tilde{\mathcal{X}}$. Przedstawiona poniżej funkcja została zaimplementowana przy wykorzystaniu oprogramowania MATLAB i jest przykładem realizacji uśredniania miary lokalnej po zadanym obszarze przestrzeni konfiguracyjnej. Załóżmy, że przestrzeń konfiguracyjna składa się ze stałych funkcji sterujących $(u_1, u_2) \in \tilde{\mathcal{X}}$, o wartościach z przedziału $[-3; 3]$. Całkowanie odbywa się na zasadzie próbkowania w wielu punktach (w tym przypadku próbek jest: $prob_u1 \times prob_u2 = 10000$) funkcji definiującej zadaną miarę lokalną, a następnie sumowania uzyskanych wartości (zwrot) i dzielenia ich przez liczbę próbek (obj). Miarę lokalną, zależną od sterowań (u_1, u_2) , definiuje funkcja miara_lok.

```
function[sr_miara] = usrednianie()
global u1; global u2;
u1min = -3;
u1max = 3;
u2min = -3;
u2max = 3;
prob_u1 = 100; prob_u2 = 100;
pr_zw = [ ];
p = [ ];
k = (u1max - u1min)/prob_u1;
k11 = (u2max - u2min)/prob_u2;
a = 0;
for w1 = u2min : k11 : u2max - k11
    a = a + 1;
    b = 0;
    for w = u1min : k : u1max - k
        b = b + 1;
```

```

    u1 = w + (k./2);
    u2 = w1 + (k11./2);
    fun = feval('miara_lok',[u1,u2]);
    pr_zw(1,b) = k * k11 * fun;
end
p(a,1) = sum(pr_zw);
end
zwrot = sum(p);
obj = (a * b);
sr_miara = zwrot/obj

```

A.4. Optymalizacja miar jakości

W celu optymalizacji miar jakości manipulatorów mobilnych wykorzystaliśmy pakiet "Optimization" systemu MATLAB. Poniżej podano listing funkcji wyznaczającej konfiguracje endogeniczne maksymalizujące *zręczność lokalną* wybranego manipulatora mobilnego. Zakładamy, że w skład konfiguracji endogenicznej wchodzi jedynie funkcje sterujące platformy (u_1, u_2), zawierające składowe stałe oraz pierwsze harmoniczne. Parametry funkcji sterujących są z przedziału $[-3; 3]$. Funkcja *miara_lok* definiuje *zręczność lokalną* $m_{q_0,T}(c_{10}, c_{11}, c_{12}, c_{20}, c_{21}, c_{22})$. Funkcja *fmincon*, dla zadanego wektora zmiennych początkowych, pozwala w zadanym ograniczonym obszarze znaleźć lokalne optimum funkcji nieliniowej wielu zmiennych. W celu zwiększenia prawdopodobieństwa wyznaczenia rozwiązania globalnego, proponujemy obliczyć maksimum *zręczności lokalnej* dla wielu różnych punktów startowych. Optymalne rozwiązania w postaci wektorów parametrów funkcji sterujących (*konopt*) oraz odpowiadających im optymalnych wartości funkcji $m_{q_0,T}(c_{10opt}, c_{11opt}, c_{12opt}, c_{20opt}, c_{21opt}, c_{22opt})$ (*zreopt*) są wyświetlane na ekranie i zapisywane do pliku. Następnie, spośród uzyskanych rozwiązań, wybierane jest rozwiązanie optymalne.

```

diary 'wyniki.txt';
clear all;
konopt = [ ];
zreopt = [ ];
b = 0;
options = optimset('Display','iter','TolFun',1e-7,'TolCon',1e-7,'LargeScale','off',
                  'MaxIter',2000);
for p6 = -3 : 0.1 : 3
    for p5 = -3 : 0.1 : 3
        for p4 = -3 : 0.1 : 3
            for p3 = -3 : 0.1 : 3
                for p2 = -3 : 0.1 : 3
                    for p1 = -3 : 0.1 : 3
                        b = b + 1;
                        [x,fval] = fmincon('zrecznosc_lok',[p1;p2;p3;p4;p5;p6],[ ],[ ],[ ],[ ],
                                          [-3;-3;-3;-3;-3;-3],[3;3;3;3;3;3],[ ],options)
                        konopt(:,b) = x
                        zreopt(1,b) = fval
                    end
                end
            end
        end
    end
end

```

```
        end
      end
    end
  end
end
diary on;
zreopt(1,b)
konopt(:,b)
diary off;
```

Bibliografia

- [1] J. Angeles. The robust design of parallel manipulators. *Proc. 1st Int. Coll. of Collaborative Research Centre 562*, ss. 9–30, Braunschweig, Germany, 2002.
- [2] H. Asada. A Geometrical Representation of Manipulator Dynamics and its Application to Arm Design. *Trans. ASME, J. Dyn. Systems, Meas. Control*, 105(3):131–135, 1983.
- [3] N. A. Aspragathos, S. Foussias. Optimal location of a robot path when considering velocity performance. *Robotica*, 20:139–147, 2002.
- [4] J. Baillieul. Kinematic programming alternatives for redundant manipulators. *Proc. 1985 IEEE Int. Conf. Robot. Automat.*, ss. 722–728, Silver Spring, 1985.
- [5] G. L. Baker, J. P. Gollub. *Chaotic Dynamics: An Introduction*. Cambridge, Cambridge, 1990.
- [6] B. Bayle, J.-Y. Fourquet, M. Renaud. Manipulability analysis for mobile manipulators. *Proc. 2001 IEEE Int. Conf. Robot. Automat.*, ss. 1251–1256, Seoul, Korea, 2001.
- [7] B. Bayle, J.-Y. Fourquet, M. Renaud. Manipulability of wheeled mobile manipulators: application to motion generation. *Int. J. Robot. Res.*, 22(7–8):565–581, 2003.
- [8] A. Bicchi, C. Melchiorri, A. Balluchi. On the Mobility and Manipulability of General Multiple Limb Robots. *IEEE Trans. on Robot. Automat.*, 11(2):215–228, 1995.
- [9] A. Bicchi, D. Prattichizzo, C. Melchiorri. Force and Dynamic Manipulability for Cooperating Robot Systems. *Proc. 1997 IEEE Int. Conf. Intell. Robot. Systems*, ss. 1479–1484, Grenoble, France, 1997.
- [10] A. Bowling, O. Khatib. The Motion Isotropy Hypersurface: A Characterization of Acceleration Capability. *Proc. 1998 IEEE Int. Conf. Intell. Robot. Systems*, ss. 965–971, Victoria, B.C., Canada, 1998.
- [11] L. Caracciolo, A. D. Luca, S. Iannitti. Trajectory tracking control of a four-wheel differentially driven mobile robot. *Proc. 1999 IEEE Int. Conf. Robot. Automat.*, ss. 2632–2638, Detroit, MI, 1999.
- [12] P. Chiacchio, S. Chiaverini, L. Sciavicco, B. Siciliano. Global Task Space Manipulability Ellipsoids for Multiple-Arm System. *IEEE Trans. on Robot. Automat.*, 7(5), 1991.
- [13] G. S. Chirikjian, A. B. Kyatkin. *Engineering Applications of Noncommutative Harmonic Analysis*. CRC Press, Boca Raton, 2001.
- [14] W. Chung, Y. Nakamura. Design and control of a chained form manipulator. *Int. J. Robot. Res.*, 21(5–6):389–408, 2002.
- [15] R. Colbaugh. Adaptive stabilization of mobile manipulators. *Proc. American Control Conf.*, ss. 1–5, Philadelphia, Pennsylvania, 1998.
- [16] B. D'Andrea-Novell, G. Campion, G. Bastin. Control of wheeled mobile robots not satisfying ideal velocity constraints: a singular perturbation approach. *Int. J. Robust Nonlin. Contr.*, 5:243–267, 1995.
- [17] J. P. Desai, V. Kumar. Nonholonomic motion planning for multiple mobile manipulators. *Proc. 1997 IEEE Int. Conf. Robot. Automat.*, ss. 3409–3414, Albuquerque, New Mexico, 1997.
- [18] K. L. Doty, C. Melchiorri, E. M. Schwartz, C. Bonivento. Robot manipulability. *IEEE Trans. on Robot. Automat.*, 11(2):462–468, 1995.
- [19] I. Duleba. *Metody i algorytmy planowania ruchu robotów mobilnych i manipulacyjnych*. Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT, Warszawa, 2001.
- [20] G. Foulon, J.-Y. Fourquet, M. Renaud. On coordinated tasks for nonholonomic mobile manipulators. *Preprints 5th IFAC Symp. Robot Control*, ss. 491–498, Nantes, France, 1997.
- [21] J. F. Gardner, S. A. Velinsky. Kinematics of mobile manipulators and implications for design. *J. Robotic Systems*, 17(6):309–320, 2000.
- [22] C. Gosselin, J. Angeles. A new performance index for the kinematic optimization of robotic manipulators. *20th ASME Mechanisms Conf.*, ss. 441–447, Kissimmee, FL, 1988.

- [23] C. Gosselin, J. Angeles. A global performance index for the kinematic optimization of robotic manipulators. *Trans. ASME*, 113:220–226, 1991.
- [24] K. S. Hong, J.-G. Kim. Manipulability analysis of a parallel machine tool: application to optimal link length design. *J. Robotic Systems*, 17(8):403–415, 2000.
- [25] N. A. M. Hootsmans, S. Dubowsky. Large motion control of mobile manipulators including vehicle suspension characteristics. *Proc. 1991 IEEE Int. Conf. Robot. Automat.*, ss. 1336–2341, Sacramento, CA, 1991.
- [26] A. Idzi. Miary jakości zachowania robotów manipulacyjnych. Praca magisterska, Politechnika Wrocławska. Instytut Cybernetyki Technicznej., 1998.
- [27] E. Jezierski. *Dynamika Robotów*. WNT, Warszawa, w druku.
- [28] M. Kabała, K. Tchoń, M. Wnuk. Robot mobilny napędzany w układzie wewnętrznym. *Materiały VII Krajowej Konferencji Robotyki*, tom 1, ss. 149–158, Łądek Zdrój, 2001.
- [29] O. Khatib, K. Yokoi, K. Chang, D. Ruspini, R. Holberg, A. Casal. Coordination and decentralized cooperation of mobile manipulators. *J. Robotic Systems*, 13:684–696, 1999.
- [30] U. Kiencke, L. Nielsen. *Automotive Control Systems*. Springer Verlag, Berlin, 2000.
- [31] C. Klein, M. T. A. Spatial robotic isotropy. *Int. J. Robot. Res.*, 10(4):426–437, 1991.
- [32] C. A. Klein, B. E. Blaho. Dexterity measures for the design and control of kinematically redundant manipulators. *Int. J. Robot. Res.*, 6(2):72–82, 1987.
- [33] K. Kozłowski, D. Pazderski. Modeling and control of a 4-wheel skid-steering mobile robot. *Biuletyn PAN. Seria Nauki techniczne*, w druku.
- [34] J. Lee. A study on the Manipulability Measures for Robot Manipulators. *Proc. 1997 IEEE Int. Conf. Intell. Robot. Systems*, ss. 1458–1465, Grenoble, France, 1997.
- [35] A. Liegeois. Automatic supervisory control for the configuration and behavior of multibody mechanisms. *IEEE Trans. Syst. Man Cybernet.*, 7(12):842–868, 1977.
- [36] O. Ma, J. Angeles. The concept of dynamic isotropy and its applications to inverse kinematics and trajectory planning. *Proc. 1990 IEEE Int. Conf. Robot. Automat.*, ss. 10–15, San Francisco, CA, 1990.
- [37] O. Ma, J. Angeles. Optimum design of manipulators under dynamic isotropy conditions. *Proc. 1993 IEEE Int. Conf. Robot. Automat.*, ss. 470–475, Atlanta, GA, 1993.
- [38] J. E. Marsden, T. J. R. Hughes. *Mathematical Foundations of Elasticity*. Dover Publ., New York, 1994.
- [39] R. Matone, B. Roth. Designing manipulators for both kinematic and dynamic isotropy. *Proc. 11th CISM-IFTOMM Symp. RoManSy*, ss. 10–15, Udine, Italy, 1997.
- [40] R. Matone, B. Roth. The effects of actuation schemes on the dynamic performance of serial manipulators. *Proc. 12th CISM-IFTOMM Symp. RoManSy*, ss. 279–288, Paris, France, 1998.
- [41] R. Murray, Z. Li, S. Sastry. *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*. CRC Press, Boca Raton, 1993.
- [42] Y. Nakamura. *Advanced Robotics: Redundancy and Optimization*. Addison Wesley, Reading, MA, 1991.
- [43] Y. Nakamura, W. Chung, O. Sordalen. Design and control of the nonholonomic manipulator. *IEEE Trans. Robot. Automat.*, 17(1):48–59, 2001.
- [44] Y. Nakamura, A. Sekiguchi. The Chaotic Mobile Robot. *IEEE Trans. Robot. Automat.*, 17(6):898–904, 2001.
- [45] J. Ostrowski, J. W. Burdick. Controllability tests for mechanical systems with symmetries and constraints. *J. Appl. Math. Comput.*, 7(2):101–127, 1997.
- [46] J. P. Ostrowski, J. P. Desai, V. Kumar. Optimal Gait Selection for Nonholonomic Locomotion Systems. *Int. J. Robot. Res.*, 19(3):225–237, 2000.
- [47] H. B. Pacejka. *Tyre and Vehicle Dynamics*. Butterworth-Heinemann, 2002.
- [48] J. A. Pamanes-Garcia. A criterion for optimal placement of robotic manipulators. *IFAC Proc. 6th Int. Symp. on Information Control Problems in Manufacturing Technology*, ss. 183–187, Madrid, Spain, 1989.
- [49] F. C. Park, R. W. Brockett. Kinematic Dexterity of Robotic Mechanisms. *Int. J. Robot. Res.*, 13(1):1–15, 1994.
- [50] F. C. Park, J. W. Kim. *Manipulability of Closed Kinematic Chains*. Recent Advances in Robot Kinematics, Kluwer, Boston, 1996.
- [51] E. Rafajłowicz. *Algorytmy planowania eksperymentu z implementacjami w środowisku mathematica*. Akademicka Oficyna Wydawnicza PLJ, Warszawa, 1996.
- [52] J. K. Salisbury, J. J. Craig. Articulated hands: Force control and kinematic issues. *Int. J. Robot. Res.*, 1(1):4–17, 1982.
- [53] H. G. Schuster. *Chaos deterministyczny. Wprowadzenie*. PWN, Warszawa, 1995.

- [54] H. Seraji. A unified approach to motion control of mobile manipulators. *Int. J. Robot. Res.*, 17(2):107–118, 1998.
- [55] M. W. Spong. *On feedback linearization of robot manipulators and Riemannian curvature*. W: Essays on Mathematical Robotics, redakcja: J. Baillieul, S. S. Sastry i H. J. Sussmann, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [56] K. Tchoń, J. Jakubiak, R. Muszyński. Kinematics of mobile manipulators: a control theoretic perspective. *Arch. Contr. Scie.*, 11(3–4):79–105, 2001.
- [57] K. Tchoń. Metody geometryczne modelowania kinematyki i dynamiki manipulatorów mobilnych. *Raport Instytutu Cybernetyki Technicznej, Politechnika Wrocławska*, (PRE 17/2000), 2000.
- [58] K. Tchoń. Kinematics of mobile manipulators: an endogenous configuration space approach. *Proc. 9th IEEE Int. Conf. Models Methods Automat.Robot.*, ss. 721–732, Międzyzdroje, 2003.
- [59] K. Tchoń, J. Jakubiak. Endogenous configuration space approach to mobile manipulators: A derivation and performance assessment of Jacobian inverse kinematics algorithms. *Int. J. Control*, 76(14):1387–1419, 2003.
- [60] K. Tchoń, J. Jakubiak. Fourier vs. Non-Fourier band-limited Jacobian inverse kinematics algorithms for mobile manipulators. *Proc. 10th IEEE Int. Conf. Models Methods Automat.Robot.*, ss. 1005–1010, Międzyzdroje, 2004.
- [61] K. Tchoń, J. Jakubiak, K. Zadarnowska. Adjoint dexterity inverse kinematics algorithm for mobile manipulators. *Proc. 10th Int. Conf. Advanced Robotics ICAR'2001*, ss. 107–112, Budapest, Hungary, 2001.
- [62] K. Tchoń, J. Jakubiak, K. Zadarnowska. Doubly nonholonomic mobile manipulators. *Proc. 2004 IEEE Int. Conf. Robot. Automat.*, ss. 4590–4595, New Orleans, LA, 2004.
- [63] K. Tchoń, A. Mazur, I. Dulęba, R. Hossa, R. Muszyński. *Manipulatory i roboty mobilne. Modele, planowanie ruchu, sterowanie*. Akademicka Oficyna Wydawnicza PLJ, Warszawa, 2000.
- [64] K. Tchoń, R. Muszyński. Instantaneous kinematics and dexterity of mobile manipulators. *Proc. 2000 IEEE Int. Conf. Robot. Automat.*, ss. 2493–2498, San Francisco, CA, 2000.
- [65] K. Tchoń, K. Zadarnowska. Kinematic dexterity of mobile manipulators: an endogenous configuration space approach. *Robotica*, 21:521–530, 2003.
- [66] K. van den Doel, D. K. Pai. Performance measures for robot manipulators: A unified approach. *Int. J. Robotics Res.*, 15(1):92–111, 1998.
- [67] M. Vidyasagar. *Robot dynamic and control*. John Wiley, New York, 1989.
- [68] Y. Yamamoto, S. Fukuda. Trajectory planning of multiple mobile manipulators with collision avoidance capability. *Proc. 2002 IEEE Int. Conf. Robot. Automat.*, ss. 3565–3570, Washington, DC, 2002.
- [69] Y. Yamamoto, X. Yun. Coordinating locomotion and manipulation of a mobile manipulator. *IEEE Trans. Autom. Control*, 39(6):1326–1332, 1994.
- [70] Y. Yamamoto, X. Yun. Unified analysis on mobility and manipulability of mobile manipulators. *Proc. 1999 IEEE Int. Conf. Robot. Automat.*, ss. 1200–1206, Detroit, Michigan, 1999.
- [71] T. Yoshikawa. Dynamic manipulability of robot manipulators. *J. Robotic Systems*, 1(1):113–124, 1985.
- [72] T. Yoshikawa. Manipulability of robotic mechanisms. *Int. J. Robotics Res.*, 4(2):3–9, 1985.
- [73] K. Zadarnowska. Miary zręczności systemów robotycznych. Praca magisterska, Politechnika Wrocławska, Instytut Cybernetyki Technicznej, 2000.
- [74] K. Zadarnowska. Miary jakości manipulatorów stacjonarnych i mobilnych. *Materiały VII Krajowej Konferencji Robotyki*, tom 1, ss. 91–100, Łądek Zdrój, 2001.
- [75] K. Zadarnowska. *Dynamic dexterity and isotropy of mobile robots: an endogenous configuration space approach*. W: On Advances in Robot Kinematics, redakcja: J. Lenarcic i C. Galletti, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Netherlands, 2004.
- [76] K. Zadarnowska, K. Tchoń. Zręczność dynamiczna robotów mobilnych. *Materiały XIV Krajowej Konferencji Automatyki*, ss. 669–674, Zielona Góra, 2002.
- [77] K. Zadarnowska, K. Tchoń. *Isotropic configurations of mobile manipulators*. W: Robot Control 2003, redakcja: I. Dulęba i J. Z. Sasiadek, Elsevier, Oxford, 2003.
- [78] K. Zadarnowska, K. Tchoń, J. Szrek. *Zachowania chaotyczne robotów mobilnych*. W: Postępy robotyki: Sterowanie robotów z percepcją otoczenia, WKiŁ, Warszawa, w druku.
- [79] K. E. Zanganeh, J. Angeles. Kinematic isotropy and the optimum design of parallel manipulators. *Int. J. Robotics Res.*, 16(2):185–197, 1997.
- [80] S. Zeghloul, B. Blanchard, J. A. Pamanes. Optimization of kinematics performances of manipulators under specified task conditions. *Proc. 10th CISM-IFTOMM Symp. RoManSy*, ss. 247–252, Gdańsk, 1994.

-
- [81] Y. Zhang, J. Duffy. The optimum quality index for a redundant 4-4 in-parallel manipulator. *Proc. 12th CISM-IFToMM Symp. RoManSy*, ss. 289–297, Paris, France, 1998.

Spis rysunków

6.1.	Manipulator mobilny typu Zebra Zero.	47
6.2.	Elipsoidy manipulowalności manipulatora mobilnego typu ZEBRA ZERO dla: a) $d_x = 0, d_y = 0$; b) $d_x = 0.12m, d_y = 0m$ c) $d_x = 0.25, d_y = 0$; d) $d_x = 0.5m, d_y = 0$	49
6.3.	Elipsoidy manipulowalności manipulatora mobilnego typu ZEBRA ZERO dla: a) $d_x = 0, d_y = 0.5m$; b) $d_x = 0.12m, d_y = 0.5m$ c) $d_x = 0.25m, d_y = 0.5m$; d) $d_x = 0.5m, d_y = 0.5m$	50
6.4.	Elipsoidy manipulowalności manipulatora mobilnego typu ZEBRA ZERO dla: a) $d_x = -0.5m, d_y = 0.5m$; b) $d_x = -0.65m, d_y = 0.5m$ c) $d_x = -0.85m, d_y = 0.5m$; d) $d_x = -2m, d_y = 0.5$	51
7.1.	Manipulator holonomiczny typu RTR zamontowany na platformie dwukołowej.	54
7.2.	Planarny manipulator holonomiczny typu 2R na monocyklu.	55
7.3.	Planarny manipulator holonomiczny typu 3R zamontowany na samochodzie kinematycznym.	55
7.4.	Planarny manipulator nieholonomiczny typu 3R zamontowany na samochodzie kinematycznym.	57
7.5.	Robot mobilny MK.	58
7.6.	Deskorolka.	60
8.1.	Optymalna konfiguracja oraz elipsoida manipulowalności planarnego manipulatora nieholonomicznego typu 3R. $\tilde{\mathcal{X}} = R^2$. Współczynnik uwarunkowania $\tilde{\kappa}_{p_0,T}(c) = 26922.800$, wartości własne $\lambda_{M_{p_0,T}}(c) = \{0.430765, 0.003157, 0.000025\}$, dystorsja $\tilde{d}_{p_0,T}(c) = 0.434$	62
8.2.	Optymalna konfiguracja oraz elipsoida manipulowalności planarnego manipulatora nieholonomicznego typu 3R. $\tilde{\mathcal{X}} = R^6$. Współczynnik uwarunkowania $\tilde{\kappa}_{p_0,T}(c) = 38495.700$, wartości własne $\lambda_{M_{p_0,T}}(c) = \{0.461948, 0.009135, 0.000012\}$, dystorsja $\tilde{d}_{p_0,T}(c) = 0.471$	62
8.3.	Optymalna konfiguracja oraz elipsoida manipulowalności planarnego manipulatora nieholonomicznego typu 3R. $\tilde{\mathcal{X}} = R^{10}$. Współczynnik uwarunkowania $\tilde{\kappa}_{p_0,T}(c) = 9480.550$, wartości własne $\lambda_{M_{p_0,T}}(c) = \{0.360261, 0.007928, 0.000038\}$, dystorsja $\tilde{d}_{p_0,T}(c) = 0.368$	63
8.4.	Optymalna konfiguracja manipulatora mobilnego typu (nh,h) - manipulator holonomiczny typu RTR na platformie dwukołowej (pogrubiona linia oznacza trajektorię platformy) oraz elipsoidę zręczności ($j = 0$). Współczynnik uwarunkowania $\tilde{\kappa}_{q_0,T}(c, x) = 145.11$, wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0,T}}(c, x) = \{728.46, 58.22, 5.02\}$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0,T}(c, x) = 791.70$	64
8.5.	Optymalna konfiguracja manipulatora mobilnego typu (nh,h) - manipulator holonomiczny typu RTR na platformie dwukołowej (pogrubiona linia oznacza trajektorię platformy) oraz elipsoidę zręczności ($j = 0, 1, 2$). Współczynnik uwarunkowania $\tilde{\kappa}_{q_0,T}(c, x) = 214.31$, wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0,T}}(c, x) = \{1075.84, 83.36, 5.02\}$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0,T}(c, x) = 1164.22$	64
8.6.	Optymalna konfiguracja manipulatora mobilnego typu (nh,h) - manipulator holonomiczny typu RTR na platformie dwukołowej (pogrubiona linia oznacza trajektorię platformy) oraz elipsoidę zręczności ($j = 0, 1, 2, 3, 4$). Współczynnik uwarunkowania $\tilde{\kappa}_{q_0,T}(c, x) = 244.45$, wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0,T}}(c, x) = \{1227.10, 148.60, 5.03\}$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0,T}(c, x) = 1380.72$	65
8.7.	a) Optymalna konfiguracja manipulatora mobilnego typu (nh,h) - planarny manipulator holonomiczny typu 3R na samochodzie kinematycznym ($\tilde{\mathcal{X}} = R^2$); b) Elipsoida zręczności. Współczynnik uwarunkowania $\tilde{\kappa}_{q_0,T}(c, x) = 1768.50$, wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0,T}}(c, x) = \{990.36, 29.05, 0.56\}$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0,T}(c, x) = 1019.97$	68

- 8.8. a) Optymalna konfiguracja manipulatora mobilnego typu (nh,nh) ($\tilde{\mathcal{X}} = R^4$) - planarny manipulator nieholonomiczny typu 3R na samochodzie kinematycznym; b) Elipsoida zrzeczności. Współczynnik uwarunkowania $\tilde{\kappa}_{q_0,p_0,T}(c^1, c^2) = 631.58$, wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0,p_0,T}}(c^1, c^2) = \{985.27, 28.99, 1.56\}$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0,p_0,T}(c^1, c^2) = 1015.82$ 68
- 8.9. a) Optymalna konfiguracja manipulatora mobilnego typu (nh,nh) ($\tilde{\mathcal{X}} = R^{12}$) - planarny manipulator nieholonomiczny typu 3R na samochodzie kinematycznym; b) Elipsoida zrzeczności. Współczynnik uwarunkowania $\tilde{\kappa}_{q_0,p_0,T}(c^1, c^2) = 1216.39$, wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0,p_0,T}}(c^1, c^2) = \{2761.21, 40.34, 2.27\}$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0,p_0,T}(c^1, c^2) = 2803.82$ 70
- 8.10. a) Optymalna konfiguracja manipulatora mobilnego typu (nh,nh) ($\tilde{\mathcal{X}} = R^4$) - planarny manipulator nieholonomiczny typu 3R na monocyklu; b) Elipsoida zrzeczności. Współczynnik uwarunkowania $\tilde{\kappa}_{q_0,p_0,T}(c^1, c^2) = 48.3077$, wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0,p_0,T}}(c^1, c^2) = \{75.36, 7.02, 1.56\}$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0,p_0,T}(c^1, c^2) = 83.94$ 71
- 8.11. Przykładowe konfiguracje subizotropowe manipulatora nieholonomicznego ($\tilde{\mathcal{X}} = R^2$: a) $T = 3\pi$: wartości własne $\lambda_{M_{p_0,T}}(c) = (0.06, 0.06)$, dystorsja $\tilde{d}_{p_0,T}(c) = 0.12$, manipulowalność $\tilde{m}_{p_0,T}(c) = 0.06$; b) $T = 5\pi$: wartości własne $\lambda_{M_{p_0,T}}(c) = (0.63, 0.63)$, dystorsja $\tilde{d}_{p_0,T}(c) = 1.26$, manipulowalność $\tilde{m}_{p_0,T}(c) = 0.63$; c) $T = 10\pi$: wartości własne $\lambda_{M_{p_0,T}}(c) = (0.45, 0.45)$, dystorsja $\tilde{d}_{p_0,T}(c) = 0.90$, manipulowalność $\tilde{m}_{p_0,T}(c) = 0.45$ 73
- 8.12. Konfiguracje subizotropowe manipulatora nieholonomicznego dla $T = 3\pi$: a) $\tilde{\mathcal{X}} = R^2$: wartości własne $\lambda_{M_{p_0,T}}(c) = (0.05, 0.05)$, dystorsja $\tilde{d}_{p_0,T}(c) = 0.10$, manipulowalność $\tilde{m}_{p_0,T}(c) = 0.05$; b) $\tilde{\mathcal{X}} = R^6$: wartości własne $\lambda_{M_{p_0,T}}(c) = (0.35, 0.35)$, dystorsja $\tilde{d}_{p_0,T}(c) = 0.70$, manipulowalność $\tilde{m}_{p_0,T}(c) = 0.35$; c) $\tilde{\mathcal{X}} = R^{10}$: wartości własne $\lambda_{M_{p_0,T}}(c) = (0.10, 0.10)$, dystorsja $\tilde{d}_{p_0,T}(c) = 0.20$, manipulowalność $\tilde{m}_{p_0,T}(c) = 0.10$ 74
- 8.13. Konfiguracja izotropowa manipulatora mobilnego typu (nh,h) oraz odpowiadająca jej elipsoida zrzeczności kinematycznej uzyskana dla $T = 2\pi$ i $j = 0$ (cienka linia odpowiada trajektorii platformy mobilnej). Wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0,T}}(c, x) = \{6.807, 6.807, 6.807\}$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0,T}(c, x) = 20.421$, zrzeczność $\tilde{m}_{q_0,T}(c, x) = 17.76$ 76
- 8.14. Konfiguracja izotropowa manipulatora mobilnego typu (nh,h) oraz odpowiadająca jej elipsoida zrzeczności kinematycznej uzyskana dla $T = 2\pi$ i $j = 0, 1, 2$ (cienka linia odpowiada trajektorii platformy mobilnej). Wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0,T}}(c, x) = (5.276, 5.276, 5.276)$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0,T}(c, x) = 15.83$, zrzeczność $\tilde{m}_{q_0,T}(c, x) = 12.12$ 76
- 8.15. Manipulator mobilny typu (nh,h) - planarny manipulator holonomiczny typu 2R na monocyklu: a) konfiguracja subizotropowa platformy mobilnej dla $T = 20\pi$ i $\tilde{\mathcal{X}} = R^6$; b) trajektoria $q_1(t)$; c) widmo mocy; d) wykładnik Lapunowa. Wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0,T}}(\lambda^1, x) = (751.78, 751.78)$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0,T}(\lambda^1, x) = 1503.70$, zrzeczność $\tilde{d}_{q_0,T}(\lambda^1, x) = 751.78$ 78
- 8.16. Manipulator mobilny typu (nh,h) - planarny manipulator holonomiczny typu 2R na monocyklu: a) konfiguracja subizotropowa platformy mobilnej dla $T = 20\pi$ i $\tilde{\mathcal{X}} = R^{10}$; b) trajektoria $q_1(t)$; c) widmo mocy; d) wykładnik Lapunowa. Wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0,T}}(\lambda^1, x) = (612.03, 612.03)$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0,T}(\lambda^1, x) = 1224.10$, zrzeczność $\tilde{d}_{q_0,T}(\lambda^1, x) = 612.03$ 78
- 8.17. Manipulator mobilny typu (nh,h) - planarny manipulator holonomiczny typu 2R na monocyklu: a) konfiguracja subizotropowa platformy mobilnej dla $T = 20\pi$ and $\tilde{\mathcal{X}} = R^{14}$; b) trajektoria $q_1(t)$; c) widmo mocy; d) wykładnik Lapunowa. Wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0,T}}(\lambda^1, x) = (743.19, 743.19)$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0,T}(\lambda^1, x) = 1486.40$, zrzeczność $\tilde{d}_{q_0,T}(\lambda^1, x) = 743.19$ 79
- 8.18. Konfiguracja zrzeczno - izotropowa planarnego manipulatora holonomicznego typu 2R na monocyklu wraz z odpowiadającą jej elipsoidą zrzeczności (cienka linia odpowiada trajektorii platformy mobilnej). Wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0,T}}(c, x) = (4.063, 4.063, 4.063)$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0,T}(c, x) = 12.188$, zrzeczność $\tilde{m}_{q_0,T}(c, x) = 8.189$ 79

- 8.19. Konfiguracje izotropowe planarnego manipulatora holonomicznego typu 2R na monocyklu wraz z odpowiadającymi im elipsoidami zręczności (cienka linia odpowiada trajektorii platformy mobilnej).
 a) wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0,T}}(c, x, l_1, l_2) = (1.583, 1.583, 1.583)$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0,T}(c, x, l_1, l_2) = 4.749$, zręczność $\tilde{m}_{q_0,T}(c, x, l_1, l_2) = 1.992$; b) wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0,T}}(c, x, l_1, l_2) = (3.142, 3.142, 3.142)$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0,T}(c, x, l_1, l_2) = 9.424$, zręczność $\tilde{m}_{q_0,T}(c, x, l_1, l_2) = 5.568$; c) wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0,T}}(c, x, l_1, l_2) = (4.639, 4.639, 4.639)$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0,T}(c, x, l_1, l_2) = 13.918$, zręczność $\tilde{m}_{q_0,T}(c, x, l_1, l_2) = 9.993$ 81
- 8.20. Konfiguracja izotropowa planarnego manipulatora nieholonomicznego typu 3R na samochodzie kinematycznym ($y = (y_1, y_2, y_3)$) dla $T = \pi$ i $\tilde{\mathcal{X}} = R^4$ (zręczność $\tilde{m}_{q_0,p_0,T}(c^1, c^2) = 1.89$; wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0,p_0,T}}(c^1, c^2) = (1.53, 1.53, 1.53)$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0,T}(c^1, c^2) = 4.59$) oraz $T = 4\pi$ (zręczność $\tilde{m}_{q_0,p_0,T}(c^1, c^2) = 15.12$; wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0,p_0,T}}(c^1, c^2) = (6.12, 6.12, 6.12)$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0,p_0,T}(c^1, c^2) = 18.36$). 82
- 8.21. Konfiguracja izotropowa planarnego manipulatora nieholonomicznego typu 3R na samochodzie kinematycznym ($y = (y_1, y_2, y_3)$) dla $T = 2\pi$ i $\tilde{\mathcal{X}} = R^4$ (zręczność $\tilde{m}_{q_0,p_0,T}(c^1, c^2) = 5.73$; wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0,p_0,T}}(c^1, c^2) = (3.20, 3.20, 3.20)$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0,T}(c^1, c^2) = 9.60$) oraz $T = 3\pi$ (zręczność $\tilde{m}_{q_0,p_0,T}(c^1, c^2) = 10.52$; wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0,p_0,T}}(c^1, c^2) = (4.80, 4.80, 4.80)$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0,p_0,T}(c^1, c^2) = 14.40$). 83
- 8.22. Konfiguracje izotropowe planarnego manipulatora nieholonomicznego typu 3R na samochodzie kinematycznym ($\tilde{\mathcal{X}} = R^{12}$, $y = (y_1, y_2, y_3)$): a) $T = 2\pi$: zręczność $\tilde{m}_{q_0,p_0,T}(c^1, c^2) = 5.64$; wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0,p_0,T}}(c^1, c^2) = (1.78, 1.78, 1.78)$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0,p_0,T}(c^1, c^2) = 9.50$; b) $T = 3\pi$: zręczność $\tilde{m}_{q_0,p_0,T}(c^1, c^2) = 9.35$; wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0,p_0,T}}(c^1, c^2) = (2.11, 2.11, 2.11)$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0,p_0,T}(c^1, c^2) = 13.32$; c) $T = 5\pi$: zręczność $\tilde{m}_{q_0,p_0,T}(c^1, c^2) = 39.27$; wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0,p_0,T}}(c^1, c^2) = (3.40, 3.40, 3.40)$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0,p_0,T}(c^1, c^2) = 34.66$ 84
- 8.23. Konfiguracje subizotropowe planarnego manipulatora nieholonomicznego typu 3R na samochodzie kinematycznym ($\tilde{\mathcal{X}} = R^4$, $y = (y_1, y_2)$): a) $T = \pi$: zręczność $\tilde{m}_{q_0,p_0,T}(c^1, c^2) = 3.21$; wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0,p_0,T}}(c^1, c^2) = (3.21, 3.21)$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0,p_0,T}(c^1, c^2) = 6.42$; b) $T = 3\pi$: zręczność $\tilde{m}_{q_0,p_0,T}(c^1, c^2) = 11.13$; wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0,p_0,T}}(c^1, c^2) = (11.13, 11.13)$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0,p_0,T}(c^1, c^2) = 22.25$; c) $T = 5\pi$: zręczność $\tilde{m}_{q_0,p_0,T}(c^1, c^2) = 17.01$; wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0,p_0,T}}(c^1, c^2) = (17.01, 17.01)$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0,p_0,T}(c^1, c^2) = 34.00$ 85
- 8.24. Optymalna konfiguracja manipulatora typu (nh,h) - planarny manipulator holonomiczny typu 3R na platformie dwukołowej - maksymalizacja lokalnej dystorsji ($\tilde{\mathcal{X}} = R^2$, $T = \pi$). Współczynnik uwarunkowania $\tilde{\kappa}_{q_0,T}(c, x) = 1459.77$, wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0,T}}(c, x) = \{817.47, 6.28, 0.56\}$, zręczność $\tilde{d}_{q_0,T}(c, x) = 53.63$ 88
- 8.25. Optymalna konfiguracja manipulatora typu (nh,h) - planarny manipulator holonomiczny typu 3R na platformie dwukołowej - minimalizacja lokalnej dystorsji ($\tilde{\mathcal{X}} = R^2$, $T = \pi$). Współczynnik uwarunkowania $\tilde{\kappa}_{q_0,T}(c, x) = 86.35$, wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0,T}}(c, x) = \{3.195, 3.111, 0.037\}$, zręczność $\tilde{m}_{q_0,T}(c, x) = 0.61$ 90
- 8.26. Optymalna konfiguracja manipulatora mobilnego typu (nh,nh) - planarny manipulator nieholonomiczny typu 3R na platformie dwukołowej - maksymalizacja lokalnej dystorsji ($\tilde{\mathcal{X}} = R^4$, $T = \pi$). Współczynnik uwarunkowania $\tilde{\kappa}_{q_0,p_0,T}(c^1, c^2) = 526.67$, wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0,p_0,T}}(c^1, c^2) = \{816.342, 6.283, 1.550\}$, zręczność $\tilde{m}_{q_0,T}(c^1, c^2) = 89.17$ 93
- 8.27. Optymalna konfiguracja manipulatora mobilnego typu (nh,nh) - planarny manipulator nieholonomiczny typu 3R na platformie dwukołowej - minimalizacja lokalnej dystorsji ($\tilde{\mathcal{X}} = R^4$, $T = \pi$). Współczynnik uwarunkowania $\tilde{\kappa}_{q_0,p_0,T}(c^1, c^2) = 223.80$, wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0,p_0,T}}(c^1, c^2) = \{6.714, 0.074, 0.030\}$, zręczność $\tilde{m}_{q_0,T}(c^1, c^2) = 0.12$ 94

- 9.1. Trajektorie odpowiadające zręcznym konfiguracjom robota mobilnego MK wraz z elipsoidami zręczności dynamicznej ($j = 0$) a) $T = 3$: współczynnik uwarunkowania $\tilde{\kappa}_{q_0, \eta_0, T}(c) = 259.298$, wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0, \eta_0, T}}(c) = \{1.0262, 0.0009, 11.8680\}$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0, \eta_0, T}(c) = 12.895$; b) $T = 7$: współczynnik uwarunkowania $\tilde{\kappa}_{q_0, \eta_0, T}(c) = 1.670 \cdot 10^7$, wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0, \eta_0, T}}(c) = \{2906.9, 34.6, 0.0004\}$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0, \eta_0, T}(c) = 2942$ 97
- 9.2. Trajektorie odpowiadające zręcznym konfiguracjom robota mobilnego MK wraz z elipsoidami zręczności dynamicznej ($j = 0, 1, 2$) a) $T = 3$: współczynnik uwarunkowania $\tilde{\kappa}_{q_0, \eta_0, T}(c) = 298.650$, wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0, \eta_0, T}}(c) = \{1.023, 0.002, 12.695\}$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0, \eta_0, T}(c) = 13.721$; b) $T = 7$: współczynnik uwarunkowania $\tilde{\kappa}_{q_0, \eta_0, T}(c) = 1.894 \cdot 10^7$, wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0, \eta_0, T}}(c) = \{3097.000, 40.107, 0.001\}$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0, \eta_0, T}(c) = 3137$ 99
- 9.3. Trajektorie odpowiadające zręcznym konfiguracjom robota mobilnego typu deskorolka (cienka linia - trajektoria punktu początkowego deski; pogrubiona linia - trajektoria środka deski) wraz z elipsoidami zręczności ($j = 0$) a) $T = 3$: współczynnik uwarunkowania $\tilde{\kappa}_{q_0, \eta_0, T}(c) = 6805.1$, wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0, \eta_0, T}}(c) = \{8.8923, 91.3745\}$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0, \eta_0, T}(c) = 100.267$; b) $T = 7$: współczynnik uwarunkowania $\tilde{\kappa}_{q_0, \eta_0, T}(c) = 3.9014 \cdot 10^{10}$, wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0, \eta_0, T}}(c) = \{2878.2, 200400.0\}$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0, \eta_0, T}(c) = 203280$ 103
- 9.4. Trajektorie odpowiadające zręcznym konfiguracjom robota mobilnego typu deskorolka (cienka linia - trajektoria punktu początkowego deski; pogrubiona linia - trajektoria środka deski) wraz z elipsoidami zręczności ($j = 0$) a) $T = 3$: współczynnik uwarunkowania $\tilde{\kappa}_{q_0, \eta_0, T}(c) = 7.061 \cdot 10^7$, wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0, \eta_0, T}}(c) = \{71.89, 8474.90\}$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0, \eta_0, T}(c) = 8547$; b) $T = 7$: współczynnik uwarunkowania $\tilde{\kappa}_{q_0, \eta_0, T}(c) = 1.165 \cdot 10^{12}$, wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0, \eta_0, T}}(c) = \{99793, 1.1792 \cdot 10^6\}$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0, \eta_0, T}(c) = 1.279 \cdot 10^6$ 104
- 9.5. Konfiguracje subizotropowe robota mobilnego MK - optymalna trajektoria robota ($\tilde{\mathcal{X}} = R^2$): a) $T = 3$: wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0, p_0, T}}(c) = \{1.014, 1.014\}$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0, p_0, T}(c) = 2.055$, zręczność $\tilde{m}_{q_0, p_0, T}(c) = 1.055$; b) $T = 7$: wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0, p_0, T}}(c) = \{0.889, 0.889\}$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0, p_0, T}(c) = 1.580$, zręczność $\tilde{m}_{q_0, p_0, T}(c) = 0.624$ 106
- 9.6. Konfiguracje subizotropowe robota mobilnego MK - optymalna trajektoria robota ($\tilde{\mathcal{X}} = R^2$, $|c_{ij}| \leq 3$): a) $T = 3$: wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0, p_0, T}}(c) = \{0.280, 0.280\}$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0, p_0, T}(c) = 0.156$, zręczność $\tilde{m}_{q_0, p_0, T}(c) = 0.006$; b) $T = 7$: wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0, p_0, T}}(c) = \{6.423, 6.423\}$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0, p_0, T}(c) = 82.552$, zręczność $\tilde{m}_{q_0, p_0, T}(c) = 1703$ 107
- 9.7. Konfiguracje subizotropowe robota mobilnego MK - optymalna trajektoria robota ($\tilde{\mathcal{X}} = R^6$): a) $T = 3$: wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0, p_0, T}}(c) = \{1.013, 1.013\}$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0, p_0, T}(c) = 2.053$, zręczność $\tilde{m}_{q_0, p_0, T}(c) = 1.054$; b) $T = 7$: wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0, p_0, T}}(c) = \{0.415, 0.415\}$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0, p_0, T}(c) = 0.345$, zręczność $\tilde{m}_{q_0, p_0, T}(c) = 0.030$ 108
- 9.8. Konfiguracje subizotropowe robota mobilnego MK - optymalna trajektoria robota ($\tilde{\mathcal{X}} = R^6$, $|c_{ij}| \leq 3$): a) $T = 3$: wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0, p_0, T}}(c) = \{1.277, 1.277\}$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0, p_0, T}(c) = 3.262$, zręczność $\tilde{m}_{q_0, p_0, T}(c) = 2.661$; b) $T = 7$: wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0, p_0, T}}(c) = \{1.593, 1.593\}$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0, p_0, T}(c) = 5.079$, zręczność $\tilde{m}_{q_0, p_0, T}(c) = 6.448$ 108
- 10.1. Wielomiany Czebyszewa. 114
- 10.2. Wielomiany Czebyszewa. Optymalna konfiguracja manipulatora mobilnego (nh,h) - manipulator typu RTR na platformie dwukołowej (pogrubiona linia - trajektoria platformy) wraz z elipsoidą zręczności ($j = 0$). Współczynnik uwarunkowania $\tilde{\kappa}_{q_0, T}(c, x) = 106.164$, wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0, T}}(c, x) = \{532.6864, 41.2164, 5.0176\}$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0, T}(c, x) = 578.92$ 115
- 10.3. Wielomiany Czebyszewa. Optymalna konfiguracja manipulatora mobilnego (nh,h) - manipulator typu RTR na platformie dwukołowej (pogrubiona linia - trajektoria platformy) wraz z elipsoidą zręczności ($j = 0, 1, 2$). Współczynnik uwarunkowania $\tilde{\kappa}_{q_0, T}(c, x) = 208.47$, wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0, T}}(c, x) = \{1045.900, 88.360, 5.017\}$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0, T}(c, x) = 1139.30$ 115

- 10.4. Wielomiany Czebyszewa. Optymalna konfiguracja manipulatora mobilnego (nh,h) - manipulator typu RTR na platformie dwukołowej (pogrubiona linia - trajektoria platformy) wraz z elipsoidą zrzeczności ($j = 0, 1, 2, 3, 4$). Współczynnik uwarunkowania $\tilde{\kappa}_{q_0,T}(c, x) = 242.22$, wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0,T}}(c, x) = \{1215.200, 112.148, 5.017\}$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0,T}(c, x) = 1332.40$ 116
- 10.5. Wielomiany Bernsteina. 117
- 10.6. Wielomiany Bernsteina. Optymalna konfiguracja manipulatora mobilnego (nh,h) - manipulator typu RTR na platformie dwukołowej (pogrubiona linia - trajektoria platformy) wraz z elipsoidą zrzeczności ($l = 0; |c_{kl}| \leq 3$). Współczynnik uwarunkowania $\tilde{\kappa}_{q_0,T}(c, x) = 23.42$, wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0,T}}(c, x) = \{117.5056, 6.3001, 5.0176\}$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0,T}(c, x) = 128.82$ 118
- 10.7. Wielomiany Bernsteina. Optymalna konfiguracja manipulatora mobilnego (nh,h) - manipulator typu RTR na platformie dwukołowej (pogrubiona linia - trajektoria platformy) wraz z elipsoidą zrzeczności ($l = 0, 1, 2, 3; |c_{kl}| \leq 3$). Współczynnik uwarunkowania $\tilde{\kappa}_{q_0,T}(c, x) = 27.89$, wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0,T}}(c, x) = \{139.9489, 13.5424, 5.0176\}$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0,T}(c, x) = 158.51$ 119
- 10.8. Wielomiany Bernsteina. Optymalna konfiguracja manipulatora mobilnego (nh,h) - manipulator typu RTR na platformie dwukołowej (pogrubiona linia - trajektoria platformy) wraz z elipsoidą zrzeczności ($l = 0, 1, \dots, 7; |c_{kl}| \leq 3$). Współczynnik uwarunkowania $\tilde{\kappa}_{q_0,T}(c, x) = 66.088$, wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0,T}}(c, x) = \{331.6041, 29.4849, 5.0176\}$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0,T}(c, x) = 366.107$ 119
- 10.9. Wielomiany Bernsteina. Optymalna konfiguracja manipulatora mobilnego (nh,h) - manipulator typu RTR na platformie dwukołowej (pogrubiona linia - trajektoria platformy) wraz z elipsoidą zrzeczności ($l = 0; |c_{kl}| \leq 9$). Współczynnik uwarunkowania $\tilde{\kappa}_{q_0,T}(c, x) = 27.42$, wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0,T}}(c, x) = \{137.5929, 6.3001, 5.0176\}$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0,T}(c, x) = 148.91$ 120
- 10.10. Wielomiany Bernsteina. Optymalna konfiguracja manipulatora mobilnego (nh,h) - manipulator typu RTR na platformie dwukołowej (pogrubiona linia - trajektoria platformy) wraz z elipsoidą zrzeczności ($l = 0, 1, 2, 3; |c_{kl}| \leq 9$). Współczynnik uwarunkowania $\tilde{\kappa}_{q_0,T}(c, x) = 63.07$, wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0,T}}(c, x) = \{316.4841, 56.5504, 5.0176\}$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0,T}(c, x) = 378.05$ 121
- 10.11. Wielomiany Bernsteina. Optymalna konfiguracja manipulatora mobilnego (nh,h) - manipulator typu RTR na platformie dwukołowej (pogrubiona linia - trajektoria platformy) wraz z elipsoidą zrzeczności ($l = 0, 1, \dots, 7; |c_{kl}| \leq 9$). Współczynnik uwarunkowania $\tilde{\kappa}_{q_0,T}(c, x) = 313.16$, wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0,T}}(c, x) = \{1571.3, 168.4804, 5.0176\}$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0,T}(c, x) = 1744.8$ 121
- 11.1. Optymalna konfiguracja manipulatora mobilnego (nh,h) - manipulator typu RTR na platformie dwukołowej (pogrubiona linia - trajektoria platformy) wraz z elipsoidą zrzeczności ($j = 0$). Współczynnik uwarunkowania $\tilde{\kappa}_{q_0,T}(c, x) = 32.4$, wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0,T}}(c, x) = \{6817.8, 716.1, 210.3\}$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0,T}(c, x) = 7744.2$ 123
- 11.2. Optymalna konfiguracja manipulatora mobilnego (nh,h) - manipulator typu RTR na platformie dwukołowej (pogrubiona linia - trajektoria platformy) wraz z elipsoidą zrzeczności ($j = 0, 1, 2$). Współczynnik uwarunkowania $\tilde{\kappa}_{q_0,T}(c, x) = 49.81$, wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0,T}}(c, x) = \{10476.0, 919.3, 210.3\}$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0,T}(c, x) = 11606$ 124
- 11.3. Optymalna konfiguracja manipulatora (nh,h) - manipulator typu RTR na platformie dwukołowej (pogrubiona linia - trajektoria platformy) wraz z elipsoidą zrzeczności ($j = 0, 1, 2, 3, 4$). Współczynnik uwarunkowania $\tilde{\kappa}_{q_0,T}(c, x) = 53.88$, wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0,T}}(c, x) = \{11332.0, 1498.5, 210.3\}$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0,T}(c, x) = 13041$ 124
- 11.4. a) Optymalna konfiguracja manipulatora (nh,nh) ($\tilde{\mathcal{X}} = R^4$) - planarny manipulator nieholonomiczny typu 3R na samochodzie kinematycznym; b) Elipsoidalna zrzeczności. Współczynnik uwarunkowania $\tilde{\kappa}_{q_0,p_0,T}(c^1, c^2) = 871.87$, wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0,p_0,T}}(c^1, c^2) = \{976.50, 28.71, 1.12\}$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0,p_0,T}(c^1, c^2) = 1006.3$ 129
- 11.5. a) Optymalna konfiguracja manipulatora (nh,nh) ($\tilde{\mathcal{X}} = R^{12}$) - planarny manipulator nieholonomiczny typu 3R na samochodzie kinematycznym; b) Elipsoidalna zrzeczności. Współczynnik uwarunkowania $\tilde{\kappa}_{q_0,p_0,T}(c^1, c^2) = 1580.3$, wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0,p_0,T}}(c^1, c^2) = \{2749.80, 40.18, 1.74\}$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0,p_0,T}(c^1, c^2) = 2791.7$ 129

- 11.6. a) Optymalna konfiguracja manipulatora mobilnego (nh,nh) ($\tilde{\mathcal{X}} = R^4$, $T = \pi$) - planarny manipulator nieholonomiczny typu 3R na monocyklu; b) Elipsoida zręczności. Współczynnik uwarunkowania $\tilde{\kappa}_{q_0,p_0,T}(c^1, c^2) = 69.651$, wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0,p_0,T}}(c^1, c^2) = \{78.5528, 6.6203, 1.1278\}$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0,p_0,T}(c^1, c^2) = 86.301$ 131
- 11.7. Optymalna konfiguracja manipulatora mobilnego (nh,nh) ($\tilde{\mathcal{X}} = R^4$) - planarny manipulator nieholonomiczny typu 3R na samochodzie kinematycznym oraz elipsoida zręczności. Współczynnik uwarunkowania $\tilde{\kappa}_{q_0,p_0,T}(c^1, c^2) = 198.99$, wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0,p_0,T}}(c^1, c^2) = \{310.4292, 36.6146, 1.5600\}$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0,p_0,T}(c^1, c^2) = 348.60$ 133
- 11.8. Optymalna konfiguracja manipulatora mobilnego (nh,nh) ($\tilde{\mathcal{X}} = R^4$) - planarny manipulator nieholonomiczny typu 3R na samochodzie kinematycznym oraz elipsoida zręczności. Współczynnik uwarunkowania $\tilde{\kappa}_{q_0,p_0,T}(c^1, c^2) = 369.50$, wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0,p_0,T}}(c^1, c^2) = \{1840.10, 131.74, 4.98\}$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0,p_0,T}(c^1, c^2) = 1976.8$ 133
- 11.9. Optymalna konfiguracja manipulatora mobilnego (nh,nh) ($\tilde{\mathcal{X}} = R^4$) - planarny manipulator nieholonomiczny typu 3R na samochodzie kinematycznym oraz elipsoida zręczności. Współczynnik uwarunkowania $\tilde{\kappa}_{q_0,p_0,T}(c^1, c^2) = 5887.6$, wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0,p_0,T}}(c^1, c^2) = \{20901.00, 608.02, 3.55\}$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0,p_0,T}(c^1, c^2) = 21513.1$ 134
- 11.10. Optymalna konfiguracja manipulatora mobilnego (nh,nh) ($\tilde{\mathcal{X}} = R^{12}$) - planarny manipulator nieholonomiczny typu 3R na samochodzie kinematycznym oraz elipsoida zręczności. Współczynnik uwarunkowania $\tilde{\kappa}_{q_0,p_0,T}(c^1, c^2) = 740.826$, wartości własne $\lambda_{\mathcal{D}_{q_0,p_0,T}}(c^1, c^2) = \{786.017, 14.923, 1.061\}$, dystorsja $\tilde{d}_{q_0,p_0,T}(c^1, c^2) = 802.001$ 134

Spis tabel

6.1. Wartości parametrów manipulatora mobilnego typu ZEBRA ZERO	48
6.2. Optymalny punkt umieszczenia manipulatora typu ZEBRA ZERO na platformie mobilnej	52
8.1. Optymalne konfiguracje manipulatora mobilnego typu (0,nh) - planarny manipulator nieholonomiczny 3R.	61
8.2. Optymalna konfiguracja manipulatora mobilnego typu (nh,h) - manipulator holonomiczny typu RTR na platformie dwukołowej.	63
8.3. Optymalna konfiguracja manipulatora mobilnego typu (nh,h) - manipulator holonomiczny typu RTR na platformie dwukołowej ($j = 0$).	65
8.4. Optymalna geometria manipulatora mobilnego typu (nh,h) - manipulator holonomiczny typu RTR na platformie dwukołowej.	66
8.5. Optymalna konfiguracja manipulatora mobilnego typu (nh,h) - planarny manipulator holonomiczny typu 3R na samochodzie kinematycznym	67
8.6. Konfiguracje optymalne manipulatora mobilnego typu (nh,nh) - planarny manipulator nieholonomiczny typu 3R na samochodzie kinematycznym	69
8.7. Konfiguracje optymalne manipulatora mobilnego typu (nh,nh) - planarny manipulator nieholonomiczny typu 3R na monocyklu	71
8.8. Konfiguracje subizotropowe manipulatora mobilnego typu (0,nh) - planarny manipulator nieholonomiczny typu 3R ($\tilde{\mathcal{X}} = R^2$).	72
8.9. Konfiguracje subizotropowe manipulatora typu (0,nh) - planarny manipulator nieholonomiczny typu 3R ($T = 3\pi$).	74
8.10. Konfiguracje izotropowe manipulatora mobilnego typu (nh,h) - planarny manipulator holonomiczny typu 2R na monocyklu ($y = (y_1, y_2, y_3)$).	75
8.11. Konfiguracje subizotropowe manipulatora mobilnego typu (nh,h) - planarny manipulator holonomiczny typu 2R na monocyklu.	77
8.12. Konfiguracja zręcznie - izotropowa manipulatora mobilnego typu (nh,h) - planarny manipulator holonomiczny typu 2R na monocyklu ($y = (y_1, y_2, y_3)$).	77
8.13. Konfiguracje i geometrie izotropowe manipulatora mobilnego typu (nh,h) - planarny manipulator holonomiczny typu 2R na monocyklu ($y = (y_1, y_2, y_3)$).	80
8.14. Konfiguracje izotropowe manipulatora mobilnego typu (nh,nh) - planarny manipulator nieholonomiczny typu 3R na samochodzie kinematycznym ($\tilde{\mathcal{X}} = R^4$, $y = (y_1, y_2, y_3)$).	82
8.15. Konfiguracje izotropowe manipulatora mobilnego typu (nh,nh) - planarny manipulator nieholonomiczny typu 3R na samochodzie kinematycznym ($\tilde{\mathcal{X}} = R^{12}$, $y = (y_1, y_2, y_3)$).	84
8.16. Konfiguracje subizotropowe manipulatora mobilnego typu (nh,nh) - planarny manipulator nieholonomiczny typu 3R na samochodzie kinematycznym ($\tilde{\mathcal{X}} = R^4$, $y = (y_1, y_2)$).	85
8.17. Optymalna geometria (l_1, l_2, l_3) manipulatora mobilnego typu (nh,h) - planarny manipulator holonomiczny typu 3R na platformie dwukołowej - minimalizacja globalnej dystorsji.	86
8.18. Optymalna geometria (d_x, d_y) manipulatora mobilnego typu (nh,h) - planarny manipulator holonomiczny typu 3R na platformie dwukołowej - minimalizacja globalnej dystorsji.	87
8.19. Optymalna geometria (l_1, l_2, l_3) manipulatora mobilnego typu (nh,h) - planarny manipulator holonomiczny typu 3R na platformie dwukołowej - maksymalizacja globalnej dystorsji.	87
8.20. Optymalna geometria (d_x, d_y) manipulatora mobilnego typu (nh,h) - planarny manipulator holonomiczny typu 3R na platformie dwukołowej - maksymalizacja globalnej dystorsji.	87



8.21. Optymalna konfiguracja manipulatora mobilnego typu (nh,h) - planarny manipulator holonomiczny typu 3R na platformie dwukołowej ($\tilde{\mathcal{X}} = R^2$) - maksymalizacja lokalnej dystorsji.	88
8.22. Optymalna konfiguracja manipulatora mobilnego typu (nh,h) - planarny manipulator holonomiczny typu 3R na platformie dwukołowej ($\tilde{\mathcal{X}} = R^6$) - maksymalizacja lokalnej dystorsji.	89
8.23. Optymalna konfiguracja manipulatora mobilnego typu (nh,h) - planarny manipulator holonomiczny typu 3R na platformie dwukołowej ($\tilde{\mathcal{X}} = R^2$) - minimalizacja lokalnej dystorsji.	89
8.24. Optymalna konfiguracja manipulatora mobilnego typu (nh,h) - planarny manipulator holonomiczny typu 3R na platformie dwukołowej ($\tilde{\mathcal{X}} = R^6$) - minimalizacja lokalnej dystorsji.	90
8.25. Optymalna geometria (l_1, l_2, l_3) manipulatora mobilnego typu (nh,nh) - planarny manipulator nieholonomiczny typu 3R na platformie dwukołowej - minimalizacja globalnej dystorsji.	91
8.26. Optymalna geometria (l_1, l_2, l_3) manipulatora mobilnego typu (nh,nh) - planarny manipulator nieholonomiczny typu 3R na platformie dwukołowej - maksymalizacja globalnej dystorsji.	91
8.27. Optymalna konfiguracja manipulatora mobilnego typu (nh,nh) - planarny manipulator nieholonomiczny typu 3R na platformie dwukołowej ($\tilde{\mathcal{X}} = R^4$) - maksymalizacja lokalnej dystorsji.	92
8.28. Optymalna konfiguracja manipulatora mobilnego typu (nh,nh) - planarny manipulator nieholonomiczny typu 3R na platformie dwukołowej ($\tilde{\mathcal{X}} = R^4$) - minimalizacja lokalnej dystorsji.	93
9.1. Optymalne konfiguracje robota mobilnego MK ($\tilde{\mathcal{X}} = R^2$)	95
9.2. Optymalne konfiguracje robota mobilnego MK ($\tilde{\mathcal{X}} = R^6$)	96
9.3. Optymalna geometria robota mobilnego MK (d, ℓ, R).	96
9.4. Optymalna geometria robota mobilnego MK (r_c, ℓ_c, R).	98
9.5. Optymalna dynamika robota mobilnego MK (m_o, m_k, m_w).	98
9.6. Optymalna geometria i dynamika robota mobilnego MK (r_c, ℓ_c, m_w).	98
9.7. Optymalne konfiguracje robota mobilnego typu deskorolka.	100
9.8. Optymalna geometria i dynamika robota mobilnego typu deskorolka (M, m, J_r).	100
9.9. Optymalna geometria i dynamika robota mobilnego typu deskorolka (r, J_r).	101
9.10. Optymalna dynamika robota mobilnego typu deskorolka (M, m, J_r).	102
9.11. Optymalna geometria i dynamika robota mobilnego typu deskorolka (r, J_r).	102
9.12. Konfiguracje subizotropowe robota mobilnego MK ($y = (y_1, y_2)$, $\tilde{\mathcal{X}} = R^2$).	105
9.13. Konfiguracje subizotropowe robota mobilnego MK ($y = (y_1, y_2)$, $\tilde{\mathcal{X}} = R^6$).	107
9.14. Optymalna dynamika robota mobilnego typu deskorolka (M, m, J_r).	109
9.15. Optymalna geometria i dynamika robota mobilnego typu deskorolka (r, J_r).	110
9.16. Optymalna dynamika robota mobilnego typu deskorolka (M, m, J_r).	110
9.17. Optymalna geometria i dynamika robota mobilnego typu deskorolka (r, J_r).	110
10.1. Wielomiany Czebyszewa. Optymalna konfiguracja manipulatora mobilnego (nh,h) - manipulator holonomiczny typu RTR na platformie dwukołowej.	114
10.2. Wielomiany Bernsteina. Optymalna konfiguracja manipulatora mobilnego (nh,h) - manipulator typu RTR na platformie dwukołowej ($ c_{kl} \leq 3$).	118
10.3. Wielomiany Bernsteina. Optymalna konfiguracja manipulatora mobilnego (nh,h) - manipulator holonomiczny typu RTR na platformie dwukołowej ($ c_{kl} \leq 9$).	120
11.1. Optymalna konfiguracja manipulatora mobilnego (nh,h) - manipulator typu RTR na platformie dwukołowej.	123
11.2. Optymalna geometria manipulatora mobilnego (nh,h) - manipulator typu RTR na platformie mobilnej.	125
11.3. Optymalna konfiguracja manipulatora mobilnego (nh,h) - manipulator typu RTR na platformie dwukołowej.	126
11.4. Konfiguracje optymalne manipulatora mobilnego (nh,nh) - planarny manipulator nieholonomiczny typu 3R na samochodzie kinematycznym	128
11.5. Konfiguracje optymalne manipulatora mobilnego (nh,nh) - planarny manipulator nieholonomiczny typu 3R na monocyklu	130
11.6. Konfiguracje optymalne manipulatora mobilnego (nh,nh) - planarny manipulator nieholonomiczny typu 3R na samochodzie kinematycznym	132

