

Krzysztof Piontek

MODELOWANIE WŁASNOŚCI SZEREGÓW STÓP ZWROTU – SKOŚNOŚĆ ROZKŁADÓW

1. Wstęp

Współczesne zarządzanie ryzykiem rynkowym opiera się przede wszystkim na rozwiązaniach z obszaru teorii procesów stochastycznych (por. [Jajuga 1999; Piontek 2002; Tsay 2002]). Modelowaniu podlegają szeregi bądź to cen, bądź stóp zwrotu z instrumentów finansowych. Uzyskane wyniki wykorzystuje się w analizie portfelowej, wycenie opcji czy pomiarze ryzyka. W zależności od jakości modelu zmian cen (stóp zwrotu), możliwe jest uzyskiwanie wyższych dochodów lub skuteczniejsze zarządzanie ryzykiem. Nic dziwnego, iż zagadnienie jak najlepszego modelowania zmian cen zaprzęta uwagę zarówno teoretyków, jak i praktyków rynków finansowych.

W szeregach stóp zwrotu z instrumentów finansowych obserwuje się wiele typowych własności (por. [Metody... 2000; Lambert i Laurent 2001; Piontek 2002; Tsay 2002; Piontek 2004]). Do najczęściej analizowanych należą:

- efekt leptokurtozy i grubych ogonów rozkładów stóp zwrotu,
- efekt autokorelacji stóp zwrotu,
- efekt skupiania (gromadzenia) zmienności,
- efekt dźwigni,
- efekt długiej pamięci w szeregach zmienności (wariancji).

Wyniki badań dotyczących możliwości opisu wyżej wymienionych własności w odniesieniu do rynku polskiego – dla szeregu stóp zwrotu z indeksu WIG – zaprezentowano w pracy K. Piontki [2004]. W niektórych szeregach stóp zwrotu obserwuje się jednak dodatkowo efekt skośności rozkładu stóp zwrotu (por. [Metody... 2000; Jondeau, Rockinger 2000; Premaratne, Bera 2001]). Własność ta jest chyba najrzadziej (obok długiej pamięci zmienności) uwzględnianą w modelu własnością szeregów stóp zwrotu. Obserwowana potencjalnie w rozkładach stóp zwrotu skośność ma jednak znaczne konsekwencje w wycenie opcji (por. [Harvey,

Siddique 2000]), konstrukcji portfela (por. [Kraus, Litzenberger 1976; Markowitz 1991]) oraz pomiarze ryzyka, np. metodą VaR (por. [Jorion 2001]). Niniejsza praca skupia się więc na przedstawieniu jednego z możliwych podejść w zakresie opisu skośności rozkładu bezwarunkowego oraz jednoczesnego ujęcia przynajmniej niektórych z wymienionych wcześniej własności szeregów. Przedstawione zostaną dwa rozwiązania w zakresie wprowadzenia efektu skośności do (najczęściej ostatnio wykorzystywanego w analizach praktycznych) rozkładu t -Studenta (por. [Piontek 2002; 2004]).

W części empirycznej przedstawiamy wyniki badań dla wybranych szeregów stóp zwrotu z rynku polskiego. Pokażemy, iż dla niektórych szeregów wprowadzenie do modelu efektu skośności w sposób jednoznaczny poprawia jakość dopasowania i może potencjalnie przynieść wymierne korzyści w procesie np. zarządzania ryzykiem inwestycji.

Niniejszy artykuł jest kontynuacją wcześniejszej pracy autora [Piontek 2004], w której zakładano symetrię rozkładu reszt modelu. Nie wszystkie aspekty modelowania prezentowane w tej pracy będą ponownie analizowane. Niektóre zagadnienia potraktujemy skrótowo.

2. Analizowany model szeregu stóp zwrotu

W niniejszej pracy podejście wykorzystywane standardowo (w tym również we wcześniejszych pracach autora [Piontek 2002; Piontek 2004]) do opisu szeregów stóp zwrotu zostanie rozszerzone o możliwość opisu skośności rozkładów. Najprostszym sposobem uwzględnienia ewentualnej skośności rozkładu stóp zwrotu jest wprowadzenie w rozważanym modelu prostych stóp zwrotu:

$$r_t = \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}} = \mu_t + \varepsilon_t = \mu_t + \sqrt{h_t} z_t, \quad (1)$$

takiego składnika losowego z_t , który ma rozkład skośny¹.

Poszczegółne oznaczenia to oczywiście (por. [Piontek 2002]):

S_t – cena w chwili t ,

μ_t – warunkowa wartość oczekiwana stopy zwrotu w chwili t ($\mu_t = E[r_t | I_{t-1}]$),

h_t – warunkowa wariancja stopy zwrotu w chwili t ($h_t = \text{var}[r_t | I_{t-1}]$),

z_t – niezależne (standaryzowane) reszty modelu o zerowej średniej i jednostkowej wariancji, $z_t \sim iid D(0, 1)$,

I_{t-1} – informacja dostępna w chwili $t - 1$.

¹ Innym, nierozpatrywanym w tej pracy podejściem do problemu jest wprowadzenie do modelu danego wzorem (1) części związanej ze skokami, o odpowiednio zadanym rozkładzie, co prowadzi do dyskretnej wersji tzw. modelu skoku i dyfuzji (*jump-diffusion model*) (por. [Piontek 2002]).

Zagadnienia związane z modelowaniem szeregów stóp zwrotu r_t dzieli się w sposób naturalny na trzy obszary (por. [Piontek 2002; Tsay 2002]):

- modelowanie warunkowej wartości oczekiwanej procesu μ_t ,
- modelowanie warunkowej wariancji procesu h_t ,
- wybór postaci funkcji gęstości standaryzowanych reszt modelu z_t .

Wszystkie 3 zagadnienia należy rozpatrywać łącznie, gdyż wzajemnie wpływają na siebie i wspólnie determinują własności i jakość ostatecznego modelu. Warto zaznaczyć, że ostateczny model można budować jak z klocków, łącząc poszczególne możliwe rozwiązania.

Podstawowe modele z powyższych obszarów z zastosowaniem do opisu własności szeregu stóp zwrotu z indeksu WIG zaprezentowane zostały w pracy K. Piontki [2004]). W niniejszej pracy zrezygnowano z opisu długiej pamięci szeregu zmienności i do dalszych analiz wykorzystano najpopularniejsze typowe rozwiązania w zakresie opisu warunkowej wartości oczekiwanej oraz warunkowej wariancji. Umożliwia to w dalszej części pracy porównanie typowych, stosowanych w praktyce rozwiązań z modelem rozszerzonym. Do opisu warunkowej wartości oczekiwanej przyjęto następujący model (tzw. model $AR(1)$):

$$\mu_t = E[r_t | I_{t-1}] = \mu + \varphi r_{t-1}, \quad (2)$$

natomiast w opisie warunkowej wariancji oparto się na modelu $GJR-GARCH(1, 1)$, który umożliwia, oprócz efektu gromadzenia zmienności i grubych ogonów rozkładu bezwarunkowego, opis efektu dźwigni (por. [Piontek 2002; Tsay 2002; Piontek 2004]):

$$h_t = \omega + \left(\alpha + \alpha^- I_{(\varepsilon_{t-1} < 0)} \right) \varepsilon_{t-1}^2 + \beta h_{t-1}, \quad (3)$$

gdzie:

$$I_{(p)} = \begin{cases} 1, & \text{gdy } p = \text{prawda,} \\ 0, & \text{gdy } p = \text{fałsz.} \end{cases} \quad (4)$$

W zakresie możliwych, standaryzowanych reszt modelu wykorzystuje się w praktyce przede wszystkim rozkład normalny oraz rozkłady o możliwych do uzyskania grubych ogonach – rozkład t -Studenta oraz uogólniony rozkład błędu (*general error distribution* – GED). Te dwa ostatnie rozkłady zyskały popularność, gdyż przy prostej postaci umożliwiają opis grubych ogonów oraz takie przekalowanie, by miały zerową wartość oczekiwaną oraz jednostkową wariancję, co powoduje, że μ_t oraz h_t pozostają nadal warunkową wartością oczekiwaną i warunkową wariancją. Badania empiryczne wykazały, że modele z rozkładami o potencjalnie grubych ogonach przewyższają modele z rozkładem normalnym (por. [Jon-denau, Rockinger 2000; Lambert, Laurent 2001; Piontek 2002; Tsay 2002]). Roz-

kład GED zazwyczaj lepiej opisuje własności rozkładów standaryzowanych reszt modelu wokół modalnej, natomiast rozkład t -Studenta opisuje lepiej ogony rozkładów reszt. Ponieważ pojęcie ryzyka jest związane z ogonami rozkładów, większą uwagę zwrócono w zagadnieniach finansowych na rozkład t -Studenta. Aby poprawić jakość dopasowania modeli, poszukiwano więc takiej modyfikacji rozkładu t -Studenta, by uzyskać rozkład o zerowej średniej, jednostkowej wariancji oraz ewentualnej asymetrii.

3. Wprowadzenie skośności do rozkładów symetrycznych²

Efekt skośności można wprowadzić do dowolnego rozkładu symetrycznego o gęstości $g(\cdot)$, odpowiednio przekształcając postać rozkładu na lewo i prawo od dominanty. Każda z połówek otrzymanego rozkładu jest fragmentem bazowego rozkładu symetrycznego o innych parametrach. Najogólniej, aby otrzymać skośny rozkład o gęstości $f(x)$ na bazie rozkładu o gęstości $g(x)$, wykorzystuje się następujące przekształcenie (por. [Arellano-Valle, Gomez 2003]):

$$f(x|\psi) = \frac{2}{a(\psi) + b(\psi)} \left[g\left(\frac{x}{a(\psi)}\right) I_{(x \geq 0)} + g\left(\frac{x}{b(\psi)}\right) I_{(x < 0)} \right], \quad (5)$$

gdzie: $a(\psi)$, $b(\psi)$ – odpowiednio dobrane funkcje normujące,

ψ – parametr wprowadzający skośność.

Stosunek odpowiednich prawdopodobieństw, mogący być miarą asymetrii, dla tak wprowadzonego rozkładu skośnego wynosi:

$$\frac{P(X \geq 0|\psi)}{P(X < 0|\psi)} = \frac{a(\psi)}{b(\psi)}. \quad (6)$$

Najpopularniejsze dwa przekształcenia opierają się na następujących postaciach funkcji normujących:

$$\text{i.} \quad a(\xi) = \xi \text{ oraz } b(\xi) = \xi^{-1}, \quad (7)$$

$$\text{ii.} \quad a(\lambda) = 1 - \lambda \text{ oraz } b(\lambda) = 1 + \lambda. \quad (8)$$

Pozostawiono zwyczajowe oznaczenia parametrów wprowadzających skośność stosowane w obu tych podejściach.

Rozwiązania te prowadzą do następujących postaci rozkładów skośnych:

² Oczywiście jest możliwe również zastosowanie rozkładów, których postać gęstości zawiera od razu parametr skośności, np. rozkładów hiperbolicznych, czy rozkładu Pearsona typu IV. Rozkłady te w praktyce jednak cieszą się mniejszą popularnością niż podejście prezentowane w dalszej części pracy.

ad i. (por. [Fernandez, Stell 1998; Osiewalski, Pipień 1999; Lambert, Laurent 2001]):

$$f(x|\xi) = \frac{2}{\xi + \frac{1}{\xi}} \left[g(x\xi)I_{(x<0)} + g\left(\frac{x}{\xi}\right)I_{(x\geq 0)} \right]. \quad (9)$$

Uzyskany w ten sposób rozkład $f(x|\xi)$ jest rozkładem jednomodalnym, o modalnej takiej samej jak rozkład $g(x)$ oraz parametrze skośności $\xi > 0$. Dla $\xi \in (0, 1)$ otrzymujemy rozkład lewostronnie skośny, a dla $\xi \in (1, \infty)$ – rozkład prawostronnie skośny. Alternatywnie parametr skośności można zdefiniować jako $\xi' = \ln(\xi)$, co pozwala powiązać znak parametru z kierunkiem skośności.

ad ii. (por. [Hansen 1994; Jondeau, Rockinger 2000]):

$$f(x|\lambda) = g\left(\frac{x}{1+\lambda}\right)I_{(x<0)} + g\left(\frac{x}{1-\lambda}\right)I_{(x\geq 0)}. \quad (10)$$

Uzyskany rozkład $f(x|\lambda)$ jest również rozkładem jednomodalnym, o modalnej takiej samej jak rozkład $g(x)$ oraz parametrze skośności $|\lambda| < 1$. Dla $\lambda \in (-1, 0)$ otrzymujemy rozkład lewostronnie skośny, a dla $\lambda \in (0, 1)$ – rozkład prawostronnie skośny.

Warto zaznaczyć, że na podstawie wzorów (6), (7) i (8) można by sądzić, że dla parametryzacji

$$\xi^2 = \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \quad (11)$$

uzyskuje się ten sam rozkład, co nie jest prawdą (por. [Arellano-Valle, Gomez, Quintana 2003]).

Powyższa procedura pozwala nadać skośność dowolnym rozkładom symetrycznym, np. rozkładowi normalnemu, t -Studenta, GED. Największą popularność, ze względu na możliwość modelowania jednocześnie grubych ogonów i skośności oraz ze względu na stosunkowo prostą postać matematyczną rozkładu bazowego i skośnego, zyskał skośny **rozkład t -Studenta**.

4. Skośne rozkłady t -Studenta

Po zastosowaniu powyższych procedur – wzorów (9) i (10) – do standaryzowanego rozkładu t -Studenta danego wzorem:

$$g(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\sqrt{(\nu-2)\pi}} \left(1 + \frac{x^2}{\nu-2}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}, \quad (12)$$

gdzie $\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx$, uzyskuje się skośne rozkłady t -Studenta.

Rozkłady te posiadają jednak jedną podstawową wadę. Nie mają zerowej średniej oraz jednostkowej wariancji, a co za tym idzie parametry μ_t oraz h_t (por. wzór (1)) nie są warunkową wartością oczekiwaną oraz warunkową wariancją, a jedynie modalną oraz pewną miarą dyspersji. Niedogodność tę można wyeliminować przez zastosowanie jeszcze procedury standaryzującej.

Niezbędne jest więc dokonanie następujących przekształceń:

ad i. (por. [Lambert, Laurent 2001]):

$$f(z|\xi, \nu) = \frac{2s}{\xi + \frac{1}{\xi}} \left\{ g\left(\xi(sz+m)\middle|\nu\right) I_{\left(z < -\frac{m}{s}\right)} + g\left(\frac{sz+m}{\xi}\middle|\nu\right) I_{\left(z \geq -\frac{m}{s}\right)} \right\}, \quad (13)$$

gdzie odpowiednio:

$$m = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu-1}{2}\right)\sqrt{\nu-2}}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(\xi - \frac{1}{\xi}\right), \quad s^2 = \left(\xi^2 + \frac{1}{\xi^2} - 1\right) - m^2. \quad (14)$$

ad ii. (por. [Hansen 1994; Jondeau, Rockinger 2000]):

$$f(z|\lambda, \nu) = b \cdot g\left(\frac{bz+a}{1+\lambda}\right) I_{\left(z < -\frac{a}{b}\right)} + b \cdot g\left(\frac{bz+a}{1-\lambda}\right) I_{\left(z \geq -\frac{a}{b}\right)}, \quad (15)$$

gdzie odpowiednio:

$$a = 4\lambda c \frac{\nu-2}{\nu-1}, \quad b^2 = 1 + 3\lambda^2 - a^2, \quad c = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi(\nu-2)}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}. \quad (16)$$

Więcej szczegółów, a w tym odpowiednie wzory na momenty rozkładów skośnych *t*-Studenta danych wzorami (13) i (15) oraz na zależności pomiędzy skośnością i kurtozą a parametrami ν oraz ξ lub λ znaleźć można np. w pracach P. Lamberta i S. Laurenta [2001] oraz E. Jondeau i M. Rockingera [2000]. Warto zaznaczyć, iż w obu przypadkach skośność i kurtoza rozkładu zależą od obu parametrów. W obu przypadkach zaproponowane modyfikacje rozkładów mogą zostać w prosty sposób uwzględnione w modelach stóp zwrotu z warunkową wartością oczekiwaną i z warunkową wariancją. Warto zaznaczyć, że wprowadzenie do modelu klasy GARCH rozkładu warunkowego o pewnej skośności skutkuje rozkładem bezwarunkowym o większej asymetrii.

Zmienna z we wzorach (13) i (15) to standaryzowana reszta modelu (1) zadana wzorem:

$$z_t = \frac{\varepsilon_t}{\sqrt{h_t}}. \quad (17)$$

W praktyce wzór (12) ma więc postać:

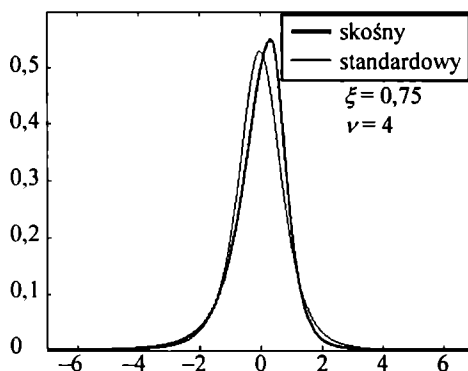
$$g(\varepsilon_t, h_t; \theta) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)h_t^{-1/2}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\sqrt{(\nu-2)\pi}} \left(1 + \frac{\varepsilon_t^2}{(\nu-2)h_t}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}, \quad (18)$$

gdzie θ to wektor parametrów modelu związanych z warunkową wartością oczekiwaną oraz z warunkową wariancją; $\theta = [\mu, \varphi, \omega, \alpha, \alpha^-, \beta]$.

Z obu rozwiązań wprowadzających skośność do rozkładu t -Studenta większą popularnością w zagadnieniach finansowych wydaje się cieszyć rozwiązanie zadane wzorami (13) i (14). Ze względu na ograniczone rozmiary pracy, dalsza część rozważań dotyczyć będzie jedynie tej modyfikacji.

Na rysunku 1 przedstawiono skośny rozkład t -Studenta uzyskany według procedury zaproponowanej przez C. Fernandez i M. Steela dla parametrów $\xi = 0,75$ oraz $\nu = 4$. Jest to rozkład standaryzowany o średniej równej zero, wariancji równej 1 oraz lewostronnej asymetrii. Na rysunku 1 przedstawiono również standaryzowany symetryczny rozkład t -Studenta, również o czterech stopniach swobody. Efekt asymetrii jest łatwo dostrzegalny.

Pomimo dość skomplikowanej postaci wzoru funkcji gęstości standaryzowanego skośnego rozkładu t -Studenta, jego aplikacja nie nastręcza większych trudności. Parametry modelu wyznacza się metodą największej wiarygodności.



Rys. 1. Przykładowy standaryzowany skośny rozkład t -Studenta

Źródło: obliczenia własne.

5. Przykład empiryczny

Celem przykładu empirycznego jest zobrazowanie możliwości wykorzystania modeli z warunkową wartością oczekiwaną oraz warunkową wariancją do opisu własności szeregu stóp zwrotu, gdy standaryzowane reszty modelu mają rozkład t -Studenta, który może być skośny. Próbę do badań stanowił szereg prostych, dziennych stóp zwrotu liczonych według cen zamknięcia rynku w kolejnych dniach sesyjnych z indeksu WIG oraz z pewnej grupy akcji³. Łączna długość analizowanych szeregów to 1556 obserwacji (od 6 stycznia 1998 r. do 23 marca 2004 r.). Estymacji parametrów analizowanych procesów dokonano za pomocą pakietu S. Laurenta i J.P. Petersa G@RCH 3.0. napisanego w języku Ox stworzonym przez J.A. Doornika i M. Oomsa (por. www.egss.ulg.ac.be/garch).

Do wyboru optymalnej postaci modelu wykorzystano (ze względu na to, że rozpatrywane modele zawierają się w sobie) test oparty na wartościach funkcji wiarygodności (*likelihood ratio test* – LRT) dany następującą statystyką:

$$LRT = 2(LLF_1 - LLF_0), \quad (19)$$

gdzie: LLF_1 – wartość logarytmu funkcji największej wiarygodności dla modelu z mniejszą liczbą restrykcji,

LLF_0 – wartość logarytmu funkcji największej wiarygodności dla modelu z większą liczbą restrykcji.

Statystyka LRT ma rozkład χ^2 z liczbą stopni swobody równą różnicy w liczbie restrykcji modeli. Dla różnicy restrykcji równej 1 (model z rozkładem t -Studenta a model z rozkładem normalnym oraz model ze skośnym rozkładem t -Studenta a model z symetrycznym rozkładem t -Studenta) wartość krytyczna testu wynosi 3,841.

Rozpatrywano model AR(1)-GJR-GARCH(1, 1) z warunkowym skośnym rozkładem t -Studenta. W modelu takim zawierają się oczywiście typowe modele z resztami zadanymi rozkładem normalnym ($\nu \rightarrow \infty$, $\xi = 1$) oraz symetrycznym rozkładem t -Studenta ($\xi = 1$).

W szeregach stóp zwrotu pojawiają się obserwacje nietypowe (ekstremalne) o szczególnie dużych wartościach bezwzględnych, znacznie wykraczających czasami poza obszar czterech lub pięciu odchyłeń standardowych od średniej. Pojedyncze takie obserwacje mogą znacznie zaburzyć wartości parametru skośności oraz kurtozy. Testy asymetrii rozkładu opierają się na założeniu o normalności rozkładu. W przypadku danych finansowych typu szeregi stóp zwrotu testy te są mało przydatne ze względu na znaczną leptokurtozę rozkładów. Pojawiły się propozycje testów skośności możliwych do zastosowania w przypadku danych leptokurtotycznych, opierających się na teście istotności parametru skośności dla rozkładu Pear-

³ Do analiz wybrano spółki, które były notowane od stycznia 1998 r., a w ich szeregach notowań było niewiele brakujących obserwacji wynikających np. z zawieszenia notowań.

sona typu IV (por. [Premaratne, Bera 2001]). W niniejszej pracy zastosowano jednak podejście odmienne. Wszystkie obserwacje wykraczające poza obszar czterech odchyłeń standardowych⁴ zmodyfikowano, nadając im wartości z krańców przedziału czterech sigm, co powinno zmniejszyć wpływ pojedynczych obserwacji nietypowych na parametr skośności. Te pojedyncze zdarzenia ekstremalne powinno się modelować za pomocą rozkładów o jeszcze grubszych ogonach niż rozkład *t*-Studenta (np. rozkład Pearsona typu IV) lub, co częściej spotykane, za pomocą odpowiednio wprowadzanych do modelu skoków wartości procesu (modele wywodzące się z modeli *jump-diffusion* dla czasu ciągłego). Tabela 1 prezentuje wyniki wybranych statystyk opisowych dla szeregów stóp zwrotu z indeksu WIG oraz z akcji Computerlandu, Jupitera, Jutrzenki, KGHM-u, Okocimia, Rolimpeksu, Sokołowa, Swarzędza, Świecia i Wólczanki dla szeregów pierwotnych oraz dla szeregów zmodyfikowanych w zakresie obserwacji nietypowych (ekstremalnych). Liczba zmodyfikowanych zdarzeń w tych szeregach waha się od 4 do 10 i wobec analizowanych szeregów o długościach 1556 obserwacji jest nieznacząca.

Rysunek 2 prezentuje histogram stóp zwrotu dla spółki Okocim wraz z zaznaczonymi obserwacjami uznanymi za nietypowe. Wyniki obrazują występowanie efektu typowej, prawostronnej asymetrii rozkładów oraz podwyższonej kurtozy.

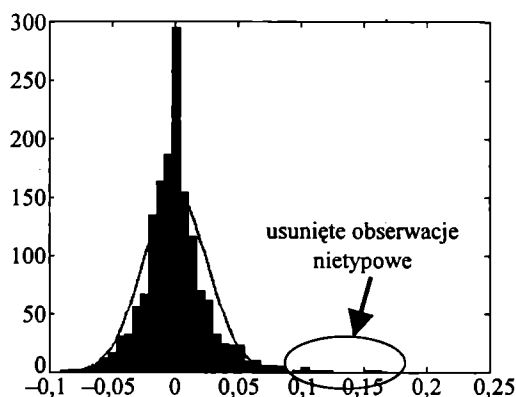
Do dalszej analizy wybrano indeks WIG, by w pewnym stopniu uzupełnić badania z wcześniejszej pracy autora [Piontek 2004]) oraz spółkę Okocim, gdyż w rozkładzie bezwarunkowym jej stóp zwrotu (zmodyfikowanych) była obserwowana największa skośność.

Tabela 1. Charakterystyki rozkładów wybranych instrumentów

Spółka	Ze zdarzeniem ekstremalnym		Bez zdarzenia ekstremalnego		
	skośność	kurtoza	skośność	kurtoza	liczba zmodyfikowanych zdarzeń nietypowych
Wig	-0,064	5,536	0,016	4,622	5
Computerland	0,557	6,621	0,357	5,325	9
Jupiter	0,622	8,717	0,314	6,706	10
Jutrzenka	0,762	8,438	0,454	6,089	10
KGHM	0,590	6,421	0,358	4,814	6
Okocim	0,873	6,804	0,638	5,276	7
Rolimpex	1,383	13,227	0,525	6,547	13
Sokołów	0,722	8,482	0,505	6,096	9
Swarzędz	0,713	8,447	0,315	5,216	4
Świecie	-0,969	21,381	0,149	6,492	9
Wólczanka	0,873	11,150	0,519	6,569	9

Źródło: obliczenia własne.

⁴ Przedział czterech sigm został wybrany przez autora subiektywnie.



Rys. 2. Histogram stóp zwrotu z akcji spółki Okocim wraz z dopasowanym rozkładem normalnym

Źródło: obliczenia własne.

Tabela 2 prezentuje wyniki estymacji wartości parametrów modeli dla standaryzowanych reszt o rozkładzie normalnym, symetrycznym *t*-Studenta oraz skośnym *t*-Studenta. Podane zostały również wartości statystyk *t* dla poszczególnych para-

Tabela 2. Parametry modeli dla szeregów stóp zwrotu z WIG-u i spółki Okocim

	Wyniki dla szeregu stóp zwrotu z indeksu WIG					
	rozkład normalny		rozkład <i>t</i> -Studenta		skośny rozkład <i>t</i> -Studenta	
	wartość	statystyka <i>t</i>	wartość	statystyka <i>t</i>	wartość	statystyka <i>t</i>
μ	0,000311	0,7668	0,000168	0,4361	0,0003	0,7641
φ	0,093511	3,562	0,085358	3,27	0,087229	3,343
ω	3,769E-6	3,362	3,5846E-6	2,419	3,6371E-6	2,423
α	0,040525	4,125	0,046168	3,302	0,045371	3,21
β	0,925533	82,09	0,918762	58,96	0,918229	58,69
α^-	0,037347	2,697	0,045159	2,318	0,046753	2,394
ν	–	–	10,56202	3,436	10,75945	3,416
ξ	–	–	–	–	1,053462	1,39
LLF	4346,62		4356,297		4357,358	
	Wyniki dla szeregu stóp zwrotu ze spółki Okocim					
	rozkład normalny		rozkład <i>t</i> -Studenta		skośny rozkład <i>t</i> -Studenta	
	wartość	statystyka <i>t</i>	wartość	statystyka <i>t</i>	wartość	statystyka <i>t</i>
μ	-2,6E-05	-0,04471	-0,000969	-2,397	-0,00011	-0,2419
φ	-0,02852	-1,07	-0,081802	-3,31	-0,0872	-3,604
ω	2,768E-5	6,618	2,0980E-5	3,152	1,7457E-5	3,054
α	0,081813	6,869	0,139795	4,168	0,12267	4,084
β	0,835356	51,48	0,779555	26,43	0,799212	29,87
α^-	0,101677	4,625	0,282372	3,464	0,236884	3,594
ν	–	–	3,611013	9,453	3,804834	8,855
ξ	–	–	–	–	1,128762	3,444
LLF	3641,71		3747,783		3753,704	

Źródło: opracowanie własne.

metrów oraz wartości funkcji największej wiarygodności. Dla obu szeregów parametry odpowiedzialne za opis autokorelacji, gromadzenia zmienności, dźwigni oraz grubych ogonów rozkładów warunkowych są istotnie różne od zera (przy poziomie istotności 0,05). W modelu szeregu stóp zwrotu spółki Okocim warunkowy rozkład reszt posiada grubsze ogony. Dodatkowo parametr wprowadzający skośność do rozkładu warunkowych reszt jest nieistotnie różny od zera dla szeregu stóp zwrotu z indeksu WIG oraz jest istotnie różny od zera dla szeregu stóp zwrotu z akcji spółki Okocim. Także testy LRT dla obu szeregów preferują modele z rozkładami o grubych ogonach (rozkład normalny kontra rozkład *t*-Studenta), lecz jedynie dla Okocimia uzyskuje się przewagę modelu z asymetrią w rozkładzie reszt modelu. Wynik ten potwierdza badania innych rynków, iż w szeregach stóp zwrotu z indeksów obserwuje się znacznie mniejszą asymetrię rozkładów niż dla pojedynczych akcji (por. również tab. 1.).

Ostatecznie dla indeksu WIG najlepszym okazał się model z symetrycznym rozkładem *t*-Studenta, natomiast dla akcji Okocim – model z rozkładem asymetrycznym.

Powyżej zaprezentowano przydatność modelu ze skośnym rozkładem reszt do opisu szeregu stóp zwrotu ze spółki Okocim. Uzyskane wyniki mogą zostać wykorzystane w procesie np. zarządzania ryzykiem inwestycji (wybór spółek do portfela i ustalanie optymalnego składu portfela, wycena opcji, pomiar ryzyka).

W pracy zaprezentowane zostało takie najprostsze, typowe rozwiązanie opisu skośności, w którym parametr skośności pozostaje stały w czasie. Aktualne badania w zakresie opisu skośności skupiają się na dwóch obszarach:

1) zastosowania odmiennych skośnych rozkładów reszt (popularność zyskuje rozkład Pearsona typu IV, umożliwiający również opis skośności oraz grubych ogonów⁵),

2) wprowadzenia zmiennego w czasie parametru skośności, zależnego również od napływających informacji (por. [Hansen 1994]).

Zaprezentowane w pracy podejście może zostać wykorzystane, zdaniem autora, przede wszystkim do pomiaru ryzyka rynkowego metodą VaR poprzez prognozowanie średniej stopy zwrotu w kolejnym okresie oraz zmienności rozkładu z uwzględnieniem asymetrii owego rozkładu, co ma kluczowe znaczenie właśnie w pomiarze ryzyka inwestycji. Innych zastosowań można by upatrywać w rozszerzonych modelach analizy portfelowej, w których to modelach kryterium wyboru portfela optymalnego obejmuje także analizę skośności rozkładu, a nie jedynie wartości średniej i wariancji.

Zasygnalizowane powyżej rozwiązania i możliwości zastosowań staną się obszarami dalszych badań autora.

⁵ Rozkład Pearsona typu IV zawiera w sobie także rozkład *t*-Studenta (por. [Premaratne, Bera 2001]).

Literatura

- Arellano-Valle R., Gomez H., Quintana F. (2003), *Statistical Interference for a General Class of Asymmetric Distributions*, <http://www.mat.puc.cl/~quintana/skew.pdf>.
- Fernandez C., Steel M. (1998), *On Bayesian Modeling of Fat Tails and Skewness*, „Journal of the American Statistical Association” nr 93, s. 359-371.
- Hansen B. (1994), *Autoregressive Conditional Density Estimation*, „International Economic Review” vol. 35, nr 3, s. 705-730.
- Harvey C., Siddique A. (2000), *Conditional Skewness in Asset Pricing Tests*, „Journal of Finance” nr 55, s. 1263-1295, faculty.fuqua.duke.edu/~charvey.
- Jajuga K. (1999), *Nowe tendencje w zarządzaniu ryzykiem finansowym*, „Rynek Terminowy” nr 3, Penetrator, Kraków.
- Jondeau E., Rockinger M. (2000), *Conditional Volatility, Skewness and Kurtosis: Existence and Persistence*, Banque de France, www.banque-france.fr/gb/publi/telechar/1-77.htm.
- Jorion P. (2001), *Value at Risk: the New Benchmark for Controlling Market Risk*, McGraw-Hill.
- Kraus A., Litzenberg R. (1976), *Skewness Preference and the Valuation of Risk Assets*, „Journal of Finance” nr 31, s. 1085-1100.
- Lambert P., Laurent S. (2001), *Modelling Financial Time Series Using GARCH-type Models with a Skewed Student Distribution for the Innovations*, www.stat.ucl.ac.be/pub/papers/.
- Markowitz H. (1991), *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*, Basil Blackwell, Oxford.
- Metody ekonometryczne i statystyczne w analizie rynku kapitałowego* (2000), red. K. Jajuga, AE, Wrocław.
- Osiewalski J., Pipień M. (1999), *Bayesowskie wnioskowanie o stacjonarności procesów GARCH (1.1). Dynamiczne modele ekonometryczne*, UMK, Toruń.
- Piontek K. (2002), *Modelowanie i prognozowanie zmienności instrumentów finansowych*, praca doktorska, AE, Wrocław.
- Piontek K. (2004), *Zastosowanie modeli klasy ARCH do opisu własności szeregu stóp zwrotu indeksu WIG*, *Ekonometria* 14, Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu nr 1021, AE, Wrocław.
- Premaratne G., Bera A. (2001), *A Test for Asymmetry with Leptokurtic Financial Data*, University of Illinois, www.business.uiuc.edu/Working_Papers/papers/01-0117.pdf.
- Singleton J., Wingender J. (1986), *Skewness Persistence in Common Stock Returns*, „Journal of Financial and Quantitative Analysis” nr 21, s. 335-341.
- Tsay R. (2002), *Analysis of Financial Time Series*, Wiley and Sons, Chicago.

MODELLING OF FINANCIAL TIME SERIES CHARACTERISTICS — SKEWNESS OF DISTRIBUTIONS

Summary

It is observed that the following effects occur in financial time series of returns of stock market indices: autocorrelation of returns, fat tails of return distributions, volatility clustering, leverage effect and skewness. The article presents a method of describing above mentioned features by means of various generalisations of ARCH model. Main attention was devoted to the problem of skewness of stock return distributions. Two possible (for use with GARCH models) skew distributions, which are based at well-known *t*-Student distributions, are presented.

In the empirical part of the paper models for some stocks from Polish market are investigated.

The results can be applied to risk measuring with Value at Risk method or portfolio selection.