

Marek Biernacki

PRÓBA UOGÓLNIENIA METRYKI MINKOWSKIEGO NA PŁASZCZYŹNIE

Do podstawowych narzędzi badawczych można zaliczyć klasyfikowanie, porządkowanie i określanie związków przyczynowo-skutkowych. Metody klasyfikacji oraz metody porządkowania liniowego opartego na wzorcu wykorzystują pojęcie podobieństwa obiektów. Jeden z podstawowych mierników podobieństwa jest generowany przez metrykę, czyli odległość. Można powiedzieć, że mała odległość między dwoma obiektami oznacza bliskość albo podobieństwo obiektów, a duża odległość oznacza oddalenie lub niepodobieństwo tych obiektów.

Istnieją różne sposoby określenia odległości. Do najczęściej stosowanych należą metryki Minkowskiego. Praca ta jest próbą uogólnienia odległości Minkowskiego.

Definicja 1. Na płaszczyźnie R^2 definiujemy funkcję $\|\cdot\|$, zwaną normą przypisującą każdemu wektorowi $\mathbf{a}$ nieujemną liczbę rzeczywistą $\|\mathbf{a}\| \in R_+$, spełniającą trzy postulaty:

N1. Norma wektora $\mathbf{a}$ jest zerem wtedy i tylko wtedy, gdy wektor $\mathbf{a}$ jest wektorem zerowym.

N2. $\|\alpha \mathbf{a}\| = |\alpha| \cdot \|\mathbf{a}\|$, gdzie $|\alpha| = \max\{-\alpha; \alpha\}$ – *jednorodność normy*.

N3. $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|$ nierówność trójkąta, zwana też nierównością Minkowskiego, gdzie $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b} \in R^2$, $\alpha \in R$.

Każda przestrzeń liniowa i unormowana jest jednocześnie przestrzenią metryczną. Metryka, odległość wektorów, jest zdefiniowana wzorem: $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|$.

Definicja 2. Para (E, d) złożona z dowolnego zbioru E i funkcji $d: E \times E \rightarrow R$ nazywa się przestrzenią metryczną, jeśli funkcja d , zwana metryką, spełnia trzy aksjomaty:

PM1. $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$.

PM2. $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$.

PM3. $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y})$.

Szczególną klasą metryk, czyli funkcji odległości, jest klasa metryk Minkowskiego:

$$d_r(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left[\sum_{i=1}^2 |x_i - y_i|^r \right]^{\frac{1}{r}}, \quad r \geq 1,$$

gdzie $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$.

Najczęściej stosowanymi metrykami Minkowskiego są metryki z indeksem $r = 1$ – metryka miejska, $r = 2$ – metryka Euklidesa i $r = \infty$ – metryka Czebyszewa. Spróbujemy uogólnić tę klasę metryk i w tym celu założymy, że indeks r jest funkcją współrzędnych punktów, którymi mierzymy odległość.

Niech $x(x_1, x_2)$ i $y(y_1, y_2)$ będą punktami płaszczyzny R^2 i niech $x = |x_1 - y_1|$, $y = |x_2 - y_2|$. Zdefiniujmy funkcję d_r następująco:

$$1) d_r(x, y) = \left(x^{r(x, y)} + y^{r(x, y)} \right)^{\frac{1}{r(x, y)}}, \text{ gdzie } R_+^2 \rightarrow R.$$

Powstają naturalne pytania: jakie własności ma ta klasa funkcji i kiedy tak zdefiniowana funkcja będzie metryką lub – co jest równoważne – dla jakich funkcji $r(x, y)$ spełnia ona warunek trójkąta.

Uwaga 1. Zauważmy, że jeśli $x(x, 0)$, $y(0, y)$ są ustalonymi punktami na osiach współrzędnych, to $x, y = \text{const.}$ i $r(x, y) = \alpha$ i wtedy warunek trójkąta przyjmuje następującą postać:

$$2) \left(x^\alpha + y^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} \leq x + y, \quad (x > 0, y > 0), \quad x^\alpha + y^\alpha \leq (x + y)^\alpha.$$

Niech $f(\alpha) = (x + y)^\alpha - x^\alpha - y^\alpha$. Chcemy, aby $f(\alpha) \geq 0$, czyli

$$(x + y)^\alpha - x^\alpha - y^\alpha \geq 0.$$

Niech $z = \frac{x}{y}$ i założmy, że $x < y$, wtedy $0 < z < 1$,

$$(1 + z)^\alpha - z^\alpha - 1 \geq 0.$$

Zatem badanie funkcji f sprowadza się do badania funkcji:

$$g(\alpha) = (1 + z)^\alpha - z^\alpha - 1,$$

$$g'(\alpha) = (1 + z)^\alpha \cdot \ln(1 + z) - z^\alpha \cdot \ln z \text{ i } 0 < z < 1,$$

zatem $g'(\alpha) > 0$ i $g(0) = -1$, $g(1) = 0$, czyli dla $\alpha \in (0, 1)$, $g(\alpha) < 0$ i dla $\alpha \geq 1$ $g(\alpha) > 0$. Stąd (2) zachodzi, gdy $r(x, y) \geq 1$.

Jeśli $x = y$, wtedy (2) sprowadza się do nierówności

$$x^\alpha + x^\alpha \leq (x + x)^\alpha,$$

$$2x^\alpha \leq 2^\alpha x^\alpha \Leftrightarrow 2 \leq 2^\alpha \Leftrightarrow \alpha \geq 1.$$

Jeśli $y < x$, to (2) mnożymy obustronnie przez $\frac{1}{x^\alpha}$. Zatem wystarczy, aby $r(x, y) \geq 1$.

Uwaga 2. Zauważmy, że jeśli $r(x, y) = c - \text{const}$, to warunek trójkąta jest równoważny nierówności Minkowskiego, która zachodzi dla $c \geq 1$.

Jeśli mamy ustalone punkty płaszczyzny, to możemy badać naszą funkcję d jako funkcję zmiennej $t = r(x, y)$

$$d: t \rightarrow (a^t + b^t)^{\frac{1}{t}}, \quad a, b > 0, t \geq 1,$$

$$(a^t + b^t)^{\frac{1}{t}} = a \left(1 + \left(\frac{b}{a} \right)^t \right)^{\frac{1}{t}},$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (a^t + b^t)^{\frac{1}{t}} = a \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \left(\frac{b}{a} \right)^t \right)^{\frac{1}{t}} = a \cdot \max \left\{ 1, \frac{b}{a} \right\} = \begin{cases} a, & \text{dla } b < a, \\ b, & \text{dla } a < b, \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt} \left[(a^t + b^t)^{\frac{1}{t}} \right] = \frac{d}{dt} \exp \left(t^{-1} \ln(a^t + b^t) \right) = (a^t + b^t)^{\frac{1}{t}} \left[-\frac{1}{t^2} \ln(a^t + b^t) + \frac{1}{t} \frac{a^t \ln a + b^t \ln b}{a^t + b^t} \right].$$

Niech $s_1 = \frac{a^t}{a^t + b^t}$, $s_2 = \frac{b^t}{a^t + b^t}$, $s_1 + s_2 = 1$. Z wklęsłości funkcji $\ln(x)$:

$$s_1 \ln a + s_2 \ln b \leq \ln(s_1 a + s_2 b),$$

$$\frac{1}{t} \frac{a^t \ln a + b^t \ln b}{a^t + b^t} = \frac{1}{t^2} \frac{t a^t \ln a + t b^t \ln b}{a^t + b^t} = \frac{1}{t^2} \frac{a^t \ln a^t + b^t \ln b^t}{a^t + b^t} \leq \frac{1}{t^2} \ln \left(\frac{a^{2t} + b^{2t}}{a^t + b^t} \right).$$

Z drugiej strony

$$\ln(a^t + b^t) = \ln \frac{(a^t + b^t)(a^t + b^t)}{(a^t + b^t)} = \ln \left(\frac{a^{2t} + b^{2t} + 2a^t b^t}{a^t + b^t} \right) \geq \ln \frac{a^{2t} + b^{2t}}{a^t + b^t}.$$

Stąd

$$\frac{d}{dt}[(a^t + b^t)] < 0.$$

Zatem $d: t \rightarrow (a^t + b^t)^{\frac{1}{t}}$ jest funkcją malejącą i stąd mamy następujący lemat:

Lemat 1. Jeśli funkcja d_r byłaby metryką (normą), to:

$$\|z\|_{\infty} \leq \|z\|_r \leq \|z\|_1,$$

gdzie $\|z\|_r = d_r(0, z)$, lub – co jest równoważne,

$$K_1((0, 0), 1) \subset K_r((0, 0), 1) \subset K_{\infty}((0, 0), 1),$$

gdzie K_i – kula w metryce d_i .

Lemat 2. Jeśli funkcja d_r jest metryką, to wtedy $\|z\|_r = d_r(z, 0)$ jest funkcją ciągłą, oraz $r(x, y)$ też jest funkcją ciągłą.

Dowód:

$$d_r(0, z+h) - d_r(0, z) \leq \max\{d_r(0, h), d_r(0, -h)\} \leq \|h\|_1.$$

Niech $f(x, y, r) = (x^r + y^r)^{\frac{1}{r}}$ (tutaj r jest zmienną) oraz $u(x, y, r) = (x, y, f)$, $u: \mathbb{R}_+^2 \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$. Ponieważ u jest funkcją malejącą ze względu na trzecią współrzędną, $\det(u') < 0$, to z twierdzenia o funkcji uwikłanej wynika istnienie u^{-1} oraz $(x, y, r(x, y)) = u^{-1}(x, y, d_r(x, y), 0)$, czyli ciągłość $r(x, y)$.

Funkcja $r(x, y)$ nie jest ciągła na osiach, ponieważ funkcja f na osiach nie zależy od r – z definicji d_r .

Niech $A = \{x: \|x\| \leq 1\}$.

Twierdzenie 1. Warunek trójkąta dla metryki jest równoważny wypukłości kuli jednostkowej (znany fakt).

Dowód. Niech x, y – dowolne ustalone punkty, $\bar{x} = \frac{x}{\|x\|}$, $\bar{y} = \frac{y}{\|y\|}$, $\bar{x} \in A$ i $\bar{y} \in A$

i niech

$$t_1 = \frac{\|x\|}{\|x\| + \|y\|}, \quad t_2 = \frac{\|y\|}{\|x\| + \|y\|},$$

wtedy

$$x + y = (\|x\| + \|y\|) \cdot (t_1 \bar{x} + t_2 \bar{y}),$$

$$\|x + y\| = (\|x\| + \|y\|) \cdot \|t_1 \bar{x} + t_2 \bar{y}\| \leq \|x\| + \|y\|$$

(nierówność wynika z wypukłości A).

W dowodzie korzysta się z jednorodności normy. Dla funkcji d_r jednorodność normy wyraża się następującym warunkiem:

$$\left((tx)^{r(tx, ty)} + (ty)^{r(tx, ty)} \right)^{\frac{1}{r(tx, ty)}} = t \left(x^{r(tx, ty)} + y^{r(tx, ty)} \right)^{\frac{1}{r(tx, ty)}}.$$

Stąd $\forall x, y, \forall t > 0$,

$$\left(x^{r(tx, ty)} + y^{r(tx, ty)} \right)^{\frac{1}{r(tx, ty)}} = \left(x^{r(x, y)} + y^{r(x, y)} \right)^{\frac{1}{r(x, y)}},$$

czyli

$$\forall x, y, \forall t > 0, r(tx, ty) = r(x, y),$$

co oznacza, że funkcja $r(x, y)$ musi być stała na promieniach!

Uwaga 3. Aby był spełniony warunek trójkąta dla metryki d_r , musi być spełniona następująca nierówność:

$$\forall x, y, \|2x, 2y\|_r \leq 2\|(x, y)\|_r,$$

$$\|(2x, 2y)\|_r = \left((2x)^{r(2x, 2y)} + (2y)^{r(2x, 2y)} \right)^{\frac{1}{r(2x, 2y)}} = 2 \left(x^{r(2x, 2y)} + y^{r(2x, 2y)} \right)^{\frac{1}{r(2x, 2y)}}.$$

Lemat 3. Jeśli $\exists x, y: r(2x, 2y) < r(x, y)$, to funkcja d_r nie spełnia warunku trójkąta (wniosek z uwagi 3).

$$\begin{aligned} \text{Dowód: } d_r \text{ nie jest metryką} &\Leftrightarrow \exists x, y: \|(2x, 2y)\|_r > 2\|(x, y)\|_r \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2 \left(x^{r(2x, 2y)} + y^{r(2x, 2y)} \right)^{\frac{1}{r(2x, 2y)}} > 2 \left(x^{r(x, y)} + y^{r(x, y)} \right)^{\frac{1}{r(x, y)}}. \end{aligned}$$

Ponieważ funkcja $d: x \rightarrow (a^x + b^x)^{\frac{1}{x}}$ jest funkcją malejącą, więc powyższa nierówność zachodzi, gdy $r(2x, 2y) < r(x, y)$.

Oznaczmy: $B^r(t)$ – kula o promieniu t w L^r , $W_t^r = \{x: \|x\|_{r(x)} \leq t\}$. Warunek trójkąta jest równoważny następującemu warunkowi:

$$W_{t_1}^r + W_{t_2}^r \subset W_{t_1+t_2}^r.$$

Twierdzenie 2. Jeżeli

$$\left[(x+y) \notin W_{t_1+t_2}^r \text{ i } (x+y) \notin W_{\|y\|_r}^r \Rightarrow r(x+y) \geq \max\{r(x), r(y)\} \right],$$

to $W_{t_1}^r + W_{t_2}^r \subset W_{t_1+t_2}^r$ i wtedy d_r jest metryką.

Dowód. Niech $p = \max\{r(x), r(y)\}$, $x \in W_{t_1}^r \Rightarrow x \in B^{r(x)}(t_1) \subset B^p(t_1)$, $y \in W_{t_2}^r \Rightarrow y \in B^p(t_2)$. Zatem $x + y \in B^p(t_1 + t_2) \Rightarrow x + y \in W_{t_1+t_2}^r$.

Funkcja $d_r(x, y)$ ma ciekawe własności. Niech $r(x, y) = 2 + \Theta \cdot r_1(x, y)$, $\Theta \in \mathfrak{R}$, gdzie $r_1(x, y) = \frac{(2y-x)_+^4(2x-y)_+^4}{(1+x^2+y^2)^{10}}$, $r_1(x, y) \in C^3$.

Tutaj
$$x_+ = \begin{cases} x, & \text{dla } x \geq 0, \\ 0, & \text{dla } x < 0. \end{cases}$$

Można pokazać, że funkcja $d_r(x, y)$ z tak zdefiniowaną funkcją $r(x, y)$ nie spełnia warunku trójkąta i ma wypukłe warstwy. Z lematu 3 wystarczy pokazać, że

$$\exists x, y: r_1(2x, 2y) < r_1(x, y).$$

Niech $x = y = 10$, wtedy

$$r_1(20, 20) = \frac{20^4 \cdot 20^4}{(1 + 400 + 400)^{10}} = \frac{20^8}{801^{10}},$$

$$r_1(10, 10) = \frac{10^4 \cdot 10^4}{(1 + 100 + 100)^{10}} = \frac{10^8}{201^{10}},$$

$$\frac{20^8}{801^{10}} \leq \frac{10^8}{201^{10}}, \text{ ponieważ } 2^8 < \left(\frac{801}{201}\right)^{10}.$$

Teraz pokażemy, że d_r ma wypukłe warstwy. Niech

$$r(x, y, \Theta) = 2 + r_1(x, y) \text{ i } N_r(x, y, \Theta) = (|x|^{r(x, y)} + |y|^{r(x, y)})$$

oraz

$$H(x, y, \Theta) = N_r(x, y, \Theta) - 1.$$

Dla

$$x \in [-0,9; 0,9] = I \text{ i dla } \Theta = 0$$

mamy

$$H(x, y, \Theta) = x^2 + y^2 - 1.$$

Łatwo sprawdzić, że dla tych x istnieje $y > 0$ taki, że $H(x, y, 0) = 0$ (wystarczy wziąć $y = \sqrt{1 - x^2}$). Co więcej $\frac{d^2 y}{dx^2} < 0$.

„Wyliczając”, można zobaczyć, że $H \in C^2$, zatem z twierdzenia 8.8' [Maurin 1976] będą istniały $\delta > 0$ i $\tilde{y}(x, \Theta)$ takie, że $H(x, \tilde{y}(x, \Theta), \Theta) = 0$ dla $\Theta < \delta$, $x \in I$ oraz $\frac{d^2 \tilde{y}(x, \Theta)}{dx^2} < 0$ dla $\Theta < \delta$, $x \in I$. To gwarantuje wklęsłość jednego fragmentu

brzegu. Pozostałe fragmenty są otrzymane przez symetrie tego kawałka, co daje wypukłość warstwic.

Czy zatem istnieje niestała funkcja $r(x, y)$ „generująca” metrykę?

Niech $c \in [1, \infty)$ i $u \in [0, \infty)$. Zdefiniujmy funkcję

$$r_c(x) = \inf_u \{u + c: x \in B_u^{u+c}\},$$

gdzie

$$B_t^s = \left\{ x: (|x_1|^s + |x_2|^s)^{\frac{1}{s}} \leq t \right\}.$$

Pokażemy, że $r_c(x)$ spełnia założenia twierdzenia 2. Ustalmy $x, y \in R^2$ i weźmy $\varepsilon > 0$. Z definicji $x \in B_{r(x)-c-\varepsilon}^{r(x)+\varepsilon}$ (zamiast $r_c(x)$ będziemy pisać $r(x)$), więc

$$x \in \bigcap_{\varepsilon > 0} B_{r(x)-c-\varepsilon}^{r(x)+\varepsilon} = B_{r(x)-c}^{r(x)},$$

stąd

$$\|x\|_{r(x)} \leq r(x) - c.$$

Gdyby $\|x\|_{r(x)} < r(x) - c$, to istniałoby $\varepsilon > 0$ takie, że $\|x\|_{r(x)-\varepsilon} \leq r(x) - c - \varepsilon$ (z ciągłości normy). Więc

$$x \in B_{r(x)-c-\varepsilon}^{r(x)-\varepsilon}, \text{ czyli } r(x) \leq r(x) - \varepsilon.$$

Otrzymaliśmy sprzeczność. Stąd $\|x\|_{r(x)} = r(x) - c$.

Podobnie można pokazać, że

$$y \in B_{r(y)-c}^{r(y)} \text{ i } x + y \in B_{r(x+y)-c}^{r(x+y)}.$$

Jeśli $r(x + y) < r(x)$, to

$$B_{r(x+y)-c}^{r(x+y)} \subset B_{r(x)-c}^{r(x)} \text{ i } x + y \in W_{r-c}^r = W_{\|x\|_r}^r.$$

Podobnie można pokazać dla y .

Zatem funkcja $r_c(x)$ generuje metrykę d_r .

Literatura

Maurin K. (1976), *Analiza*, cz. I. Warszawa.

Smoluk A. (2002), *Podstawy metod numerycznych*, Wrocław.

AN ATTEMPT OF GENERALIZATION OF MINKOWSKI'S METRIX ON PLANE

Summary

In this article Minkowski's metrix is made generalized by the way of grounding the power that depends upon the absolute remainder of the distance between the coordinates.

Given here is an example of inconstant power which this function is a metrix for and of a function that has convex layers and that does not comply with the triangle's condition.

Dr Marek Biernacki jest pracownikiem Katedry Matematyki i Cybernetyki Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu.