

Paweł Rokita

Akademia Ekonomiczna we Wrocławiu

ZASTOSOWANIE ARCHIMEDESOWSKICH FUNKCJI POWIĄZAŃ (*ARCHIMEDEAN COPULAS*) O LICZBIE WYMIARÓW WIĘKSZEJ NIŻ 2 W ANALIZIE RYZYKA PORTFELA NA RYNKU POLSKIM

1. Wstęp

Jak pokazały badania przeprowadzone dla dwuskładnikowych portfeli akcji z polskiego rynku, archimedesowskie funkcje powiązań mogą być użytecznym narzędziem analizy zależności stóp zwrotu (por. [Rokita 2005a; 2005b]). Aby jednak można było poważnie brać je pod uwagę jako element modelu ryzyka portfela, niezbędne jest ich uogólnienie na przypadki portfeli o dowolnej liczbie składników. Omówieniu propozycji takiego uogólnienia jest poświęcony ten artykuł.

W części pierwszej dokonane zostało krótkie przypomnienie pojęć związanych z dwuwymiarowymi archimedesowskimi funkcjami powiązań. Poruszona też została kwestia ograniczeń swobody modelowania wielowymiarowej struktury zależności. Część druga poświęcona jest zaprezentowaniu stosowanej tu metody analizy ryzyka portfela o dowolnej liczbie składników. W części trzeciej przedstawione są wyniki badań dla portfeli akcji notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie. Porównane zostały wyniki testów wstecznych (testów liczby i niezależności przekroczeń) dla prognoz wartości zagrożonej uzyskanych z następujących modeli:

- modelu z wielowymiarową funkcją powiązań Ali-Mikhail-Haq,
- z funkcją powiązań Gumbela,
- z funkcją powiązań Franka,
- z wielowymiarowym rozkładem normalnym (model referencyjny).

W trzech pierwszych modelach założono normalne rozkłady brzegowe.

2. Archimedesowskie funkcje powiązań – dwuwymiarowe i o większej liczbie wymiarów

Archimedesowską funkcją powiązań nazywamy funkcję C postaci:

$$C(u, v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v)), \quad (1)$$

gdzie: φ – ciągła i ściśle malejąca funkcja $\varphi: [0, 1] \mapsto [0, \infty)$, taka że $\varphi(1) = 0$,

φ – funkcja wypukła,

$\varphi^{[-1]}$ – funkcja pseudoodwrotna¹ do φ (por. np. [Rokita 2005b]).

Funkcję φ nazywamy generatorem archimedesowskiej funkcji powiązań. Na potrzeby dalszego wywodu warto zwrócić uwagę na znaczenie generatora w pomiarze zależności. Istnieje mianowicie następujący związek między generatorem φ a współczynnikiem τ Kendalla:

$$\tau = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} dt. \quad (2)$$

Generator zależy od jednego tylko parametru θ (często też oznaczanego jako α). Na przykład dość popularna funkcja powiązań Gumbela (por. [Armstrong 2003, s. 6; Avouyi-Dovi, Guégan, Ladoucette 2002, s. 30]), która wyraża się wzorem:

$$C(u, v) = \exp\left(-\left[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta\right]^{1/\theta}\right), \quad \theta \in [1, \infty),$$

ma generator:

$$\varphi(t) = (-\ln t)^\theta,$$

a relacja między współczynnikiem τ Kendalla i parametrem θ wyraża się wzorami:

$$\tau = \frac{\theta - 1}{\theta}, \quad \theta = \frac{1}{1 - \tau}.$$

Funkcja opisująca związek między parametrem θ a współczynnikiem τ Kendalla jest wprawdzie różna dla różnych funkcji powiązań, ale zawsze ściśle rosnąca. Pozwala to traktować parametr θ jako swego rodzaju miarę zależności. O strukturze zależności decyduje więc po pierwsze postać analityczna archimedesowskiej funkcji powiązań (charakter zależności), a po drugie – wartość parametru θ (siła zależności). Na interpretacji parametru θ jako miary zależności opiera się przedstawione poniżej uogólnienie omawianego modelu na przypadek wielowymiarowy.

Wielowymiarową archimedesowską funkcję powiązań o generatorze φ , spełniającym te same warunki co w definicji 1, można przedstawić następująco:

¹ Niech φ będzie ciągłą malejącą funkcją $\varphi: [0, 1] \mapsto [0, \infty)$. Funkcja pseudoodwrotna (*pseudo inverse function*) do φ jest to funkcja $\varphi^{[-1]}: [0, \infty) \mapsto [0, 1]$ postaci: $\varphi^{[-1]}(w) = \begin{cases} \varphi^{-1}(w), & 0 \leq w \leq \varphi(0), \\ 0, & \varphi(0) < w \leq \infty. \end{cases}$

$$C^n(\mathbf{u}) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u_1) + \varphi(u_2) + \dots + \varphi(u_n)), \quad (3)$$

por. [Embrechts, Lindskog, McNeil 2001, s. 36].

Estymację parametrów modelu, a także niezbędne symulacje ułatwi fakt, że wielowymiarową archimedesowską funkcję powiązań można wyrazić za pomocą funkcji powiązań dwuwymiarowych. Zarówno metody szacowania parametrów, jak i generowania liczb pseudolosowych są dobrze znane dla tych ostatnich (por. [Embrechts, Lindskog, McNeil 2001, s. 34]). Są one również dostępne w niektórych pakietach do obliczeń statystycznych i naukowo-technicznych.

Przedstawmy zatem wielowymiarową archimedesowską funkcję powiązań za pomocą funkcji dwuwymiarowych:

$$C^n(\mathbf{u}) = C_{\theta_1} \left(C_{\theta_2} \left(\dots \left(C_{\theta_{n-1}} \left(C_{\theta_{n-1}}(u_1, u_2), u_3 \right), u_4 \right) \dots, u_{n-1} \right), u_n \right). \quad (4)$$

W powyższym wzorze wszystkie funkcje C_{θ_k} mają tę samą postać, a różnią się jedynie parametrem θ . Analogicznie do przypadku dwuwymiarowego, struktura zależności jest tu określona przez:

- postać analityczną funkcji powiązań C_{θ} ,
- macierz parametrów θ .

Zauważamy jednak, że wykorzystujemy tylko $n-1$ różnych parametrów θ , podczas gdy różniących się par zmiennych brzegowych jest $n(n-1)/2$. Stanowi to oczywiście ograniczenie swobody modelowania struktury zależności. Nie jest to niestety ograniczenie metody, ale cecha wielowymiarowych archimedesowskich funkcji powiązań.

W procesie estymacji najprawdopodobniej uzyskamy dla różnych par zmiennych więcej niż $n-1$ różniących się oszacowań parametru θ . Powstaje więc pytanie, którym z nich narzucić jednakowe wartości, aby pozostało tylko $n-1$ różnych. Poniżej zaprezentowany został sposób postępowania wykorzystany w przeprowadzonych tu badaniach.

3. Opis podejścia zastosowanego w badaniach

W modelowaniu rozkładu wielowymiarowego stóp zwrotu wykorzystana zostanie wersja twierdzenia Sklara dla dowolnej liczby wymiarów:

$$F(\mathbf{x}) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)) \quad (5)$$

(por. [Jajuga 2005, s. 205], za: [Sklar 1959]), która to wersja w przypadku archimedesowskich funkcji powiązań sprowadza się do:

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}) &= C_{\theta}(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)) = \\ &= C_{\theta_1} \left(C_{\theta_2} \left(\dots \left(C_{\theta_{n-1}} \left(C_{\theta_{n-1}}(F_1(x_1), F_2(x_2)), F_3(x_3) \right), F_4(x_4) \right) \dots, F_{n-1}(x_{n-1}) \right), F_n(x_n) \right), \end{aligned} \quad (6)$$

gdzie: $\theta_1 \leq \theta_2 \leq \dots \leq \theta_n$, $\theta_{n-1} = \theta(X_1, X_2)$, $\theta_{n-2} = \theta(X_1, X_3) = \theta(X_1, X_4)$, ...

Szacowanie wartości zagrożonej portfela odbywa się w następujących 7 krokach:

Krok 1. Estymacja:

- parametrów θ dla wszystkich dwuwymiarowych brzegowych funkcji powiązań,
- parametrów rozkładu dla jednowymiarowych rozkładów brzegowych.

Otrzymujemy macierz parametrów θ oraz n wektorów parametrów jednowymiarowych rozkładów brzegowych. Przykład czterowymiarowy prezentują tab. 1 i 2.

Tabela 1. Macierz parametrów θ

$\theta_{(1,1)}$	$\theta_{(1,2)}$	$\theta_{(1,3)}$	$\theta_{(1,4)}$
$\theta_{(2,1)}$	$\theta_{(2,2)}$	$\theta_{(2,3)}$	$\theta_{(2,4)}$
$\theta_{(3,1)}$	$\theta_{(3,2)}$	$\theta_{(3,3)}$	$\theta_{(3,4)}$
$\theta_{(4,1)}$	$\theta_{(4,2)}$	$\theta_{(4,3)}$	$\theta_{(4,4)}$

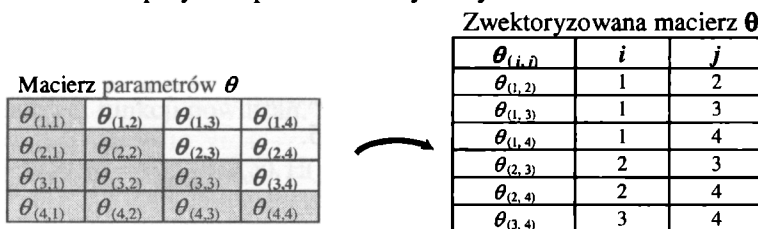
Źródło: opracowanie własne.

Tabela 2. Wektory parametrów rozkładów brzegowych

Zmienna (i)	Parametr 1 ($\alpha_{i,1}$)	...	Parametr k ($\alpha_{i,k}$)
1	$\alpha_{1,1}$	...	$\alpha_{1,k}$
2	$\alpha_{2,1}$	...	$\alpha_{2,k}$
3	$\alpha_{3,1}$	...	$\alpha_{3,k}$
4	$\alpha_{4,1}$	...	$\alpha_{4,k}$

Źródło: opracowanie własne.

Krok 2. Wektoryzacja macierzy parametrów θ i utworzenie macierzy trzykolumnowej, której pierwszą kolumnę tworzy powstały wektor, a w pozostałych dwóch znajdują się indeksy odpowiednio wierszy i kolumn oryginalnej macierzy parametrów θ . Por. przykład przedstawiony na rys. 1.



Rys. 1. Wektoryzacja macierzy parametrów θ

Źródło: opracowanie własne.

Krok 3. Uporządkowanie w kolejności malejącej wierszy zwektoryzowanej macierzy θ według wartości parametrów θ :

Tabela 3. Posortowana malejąco zwektoryzowana macierz θ

$\theta_{(i,j)}$	i	j
$\theta_{n(n-1)/2}$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
θ_3	$\vdots$	$\vdots$
θ_2	$\vdots$	$\vdots$
θ_1	$\vdots$	$\vdots$

($\theta_1 \leq \theta_2 \leq \theta_3 \leq \dots \leq \theta_{n(n-1)/2}$)

Źródło: opracowanie własne.

Krok 4. Narzucenie równych wartości niektórych parametrów θ . Dokonywane jest podstawienie według następującego schematu:

$$\begin{aligned}\theta_{[n(n-1)/2]-2} &:= \theta_{[n(n-1)/2]-1}, \\ \theta_{[n(n-1)/2]-4}, \theta_{[n(n-1)/2]-5} &:= \theta_{[n(n-1)/2]-3}, \\ &\vdots \\ \theta_{n-2}, \theta_{n-1}, \dots, \theta_3, \theta_2, \theta_1 &:= \theta_{n-1}\end{aligned}$$

Otrzymujemy zmodyfikowaną zvektoryzowaną macierz θ :

Tabela 4. Zmodyfikowana zvektoryzowana macierz θ

$\theta_{(i,j)}$	i	j
$\theta_{n(n-1)/2}$	$\vdots$	$\vdots$
$\theta_{[n(n-1)/2]-1}$	$\vdots$	$\vdots$
$\theta_{[n(n-1)/2]-1}$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
θ_{n-1}	$\vdots$	$\vdots$
θ_{n-1}	$\vdots$	$\vdots$
θ_{n-1}	$\vdots$	$\vdots$

($\theta_{n-1} \leq \dots \leq \theta_{[n(n-1)/2]-1} \leq \theta_{n(n-1)/2}$)

Źródło: opracowanie własne.

Aby uniknąć stosowania rozbudowanych indeksów przy kolejnych parametrach θ , wygodniej jest wprowadzić nowe oznaczenia:

$$\theta_{n-1}^* = \theta_{[n(n-1)/2]}, \theta_{n-2}^* = \theta_{[n(n-1)/2]-1}, \theta_{n-3}^* = \theta_{[n(n-1)/2]-3}, \dots, \theta_1^* = \theta_{n-1}.$$

Wówczas tab. 4 może być zapisana jako tab. 5.

Tabela 5. Zvektoryzowana macierz θ^*

θ_v^*	i	j
θ_{n-1}^*	$\vdots$	$\vdots$
θ_{n-2}^*	$\vdots$	$\vdots$
θ_{n-2}^*	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
θ_1^*	$\vdots$	$\vdots$
θ_1^*	$\vdots$	$\vdots$
θ_1^*	$\vdots$	$\vdots$

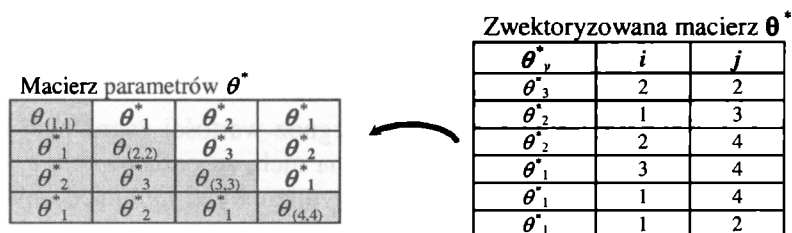
($\theta_1^* \leq \dots \leq \theta_{n-2}^* \leq \theta_{n-1}^*$)

Źródło: opracowanie własne.

Krok 5. Tworzenie zmodyfikowanej macierzy parametrów θ (macierzy θ^*). Powstaje ona przez wstawienie do macierzy o wymiarze $n \times n$ zmodyfikowanych parametrów θ (parametrów θ_v^*) według indeksów wierszy i kolumn znajdujących się w drugiej i trzeciej kolumnie zvektoryzowanej macierzy θ^* . Jak widać, prze-

chowywanie informacji o numerach wierszy i kolumn było potrzebne, gdyż wektor parametrów θ powstały w wyniku wektoryzacji macierzy był sortowany w kroku 3. Gdyby indeksy wierszy i kolumn nie zostały zapamiętane, informacja ta zostałaby utracona w czasie sortowania.

Tworzenie przykładowej macierzy θ^* dla przypadku czterowymiarowego przedstawia rys. 2.



Rys. 2. Tworzenie macierzy θ^*

Źródło: opracowanie własne.

Krok 6. Symulacje. Generowane są liczby pseudolosowe z wielowymiarowego rozkładu o funkcji powiązań z macierzą θ^* oszacowań parametrów θ .

Korzystając z twierdzenia Sklara dla archimedesowskich funkcji powiązań, liczby pseudolosowe z rozkładu wielowymiarowego o dowolnej liczbie wymiarów można generować, wykorzystując generator liczb pseudolosowych z dwuwymiarowych archimedesowskich funkcji powiązań. Przedstawmy to na przykładzie trójwymiarowej funkcji powiązań. Skoro zachodzi:

$$F(x, y, z) = C_{\theta_1^*, \theta_2^*}(G(x), H(y), J(z)) = C_{\theta_1^*}(C_{\theta_2^*}(G(x), H(y)), J(z)), \quad (7)$$

$$\theta_1^* \leq \theta_2^*,$$

(por. równanie (6)), to funkcję odwrotną do dystrybuanty F można obliczyć jako:

$$F^{-1}(p) = \begin{bmatrix} G^{-1} \left(C_{\theta_2^*}^{-1} \left(C_{\theta_1^*}^{-1}(p) \right) (1) \right) (1) \\ H^{-1} \left(C_{\theta_2^*}^{-1} \left(C_{\theta_1^*}^{-1}(p) \right) (1) \right) (2) \\ J^{-1} \left(C_{\theta_1^*}^{-1}(p) (2) \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Zatem znalezienie funkcji odwrotnej do dwuwymiarowej funkcji powiązań wystarczy, aby odwrócić archimedesowską funkcję powiązań o większej liczbie wymiarów. Wzór (8) prezentuje rekurencyjną metodę odwracania tej dystrybuanty.

Krok 7. Wyznaczanie kwantyla rozkładu strat na podstawie symulacji Monte Carlo.

4. Wyniki badań

Model trójwymiarowej funkcji powiązań został wykorzystany w szacowaniu wartości zagrożonej (VaR) trójskładnikowego portfela akcji, zawierającego w równych udziałach akcje spółek BRE Bank SA, Dębica SA. i Jelfa SA. Wygenerowano 500 kolejnych jednodniowych prognoz VaR. W badaniu zastosowane zostały trzy archimedesowskie funkcje powiązań: Ali-Mikhail-Haq, Gumbela i Franka. Założono przy tym normalne rozkłady brzegowe. Jako model referencyjny przyjęto zaś model z trójwymiarowym rozkładem normalnym. Tabele 6, 7, 8, i 9 zawierają wyniki testów liczby i niezależności przekroczeń VaR dla tych czterech modeli.

Rysunki 3, 4, 5 i 6 przedstawiają wykresy prognoz wartości zagrożonej oraz rzeczywiście zrealizowanych strat. Obserwujemy na nich, że oszacowania ryzyka dokonywane przy wykorzystaniu modeli z wielowymiarowymi archimedesowskimi funkcjami powiązań są mocno zawyżone.

Tabela 6. Wyniki testów wstecznych dla modelu z funkcją powiązań Ali-Mikhail-Haq

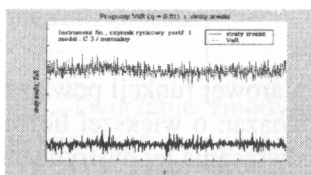
Poziom istotności testów: 0.05:			Pr. teoret.: 0.01:		
Wyniki mieszanego testu kupca					
	LR	CV	Czy odrz.	l.przechr.	cz.przechr.
LR_uc	20.101	3.841	1	0	0
LR_ind	-	-	-	-	-
LR_mix	-	3.841	0	-	-
Wyniki mieszanego testu Christoffersena					
	LR	CV	Czy odrz.	l.przechr.	cz.przechr.
LR_uc	20.101	3.841	1	0	0
LR_ind	0.000	3.841	0	-	-
LR_mix	20.101	5.991	1	-	-

Źródło: obliczenia własne.

Tabela 8. Wyniki testów wstecznych dla modelu z funkcją powiązań Franka

Funkcja powiązań:		5 (Franka):			
Poziom istotności testów:		0.05:		Pr. teoret.: 0.01:	
Wyniki mieszanego testu Kupca					
	LR	CV	Czy odrz.	l.przechr.	cz.przechr.
LR_uc	20.101	3.841	1	0	0
LR_ind	-	-	-	-	-
LR_mix	-	3.841	0	-	-
Wyniki mieszanego testu Christoffersena					
	LR	CV	Czy odrz.	l.przechr.	cz.przechr.
LR_uc	20.101	3.841	1	0	0
LR_ind	0.000	3.841	0	-	-
LR_mix	20.101	5.991	1	-	-

Źródło: obliczenia własne.



Rys. 3. Prognozy VaR przy modelu z funkcją powiązań Ali-Mikhail-Haq a rzeczywiście zrealizowane straty

Źródło: obliczenia własne.

Tabela 7. Wyniki testów wstecznych dla modelu z funkcją powiązań Gumbela

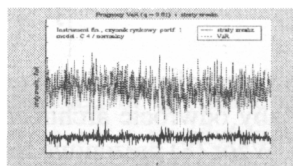
Funkcja powiązań:		4 (Gumbela);			
Poziom istotności testów:		0.05;		Pr. teoret.: 0.01.	
Wyniki mieszanego testu Kupca					
	LR	CV	Czy odrz.	l.przechr.	cz.przechr.
LR_uc	20,101	3,841	1	0	0
LR_ind	-	-	-	-	-
LR_mix	-	3,841	0	-	-
Wyniki mieszanego testu Christoffersena					
	LR	CV	Czy odrz.	l.przechr.	cz.przechr.
LR_uc	20,101	3,841	1	0	0
LR_ind	0,000	3,841	0	-	-
LR_mix	20,101	5,991	1	-	-

Źródło: obliczenia własne.

Tabela 9. Wyniki testów wstecznych dla modelu z wielowymiarowym rozkładem normalnym

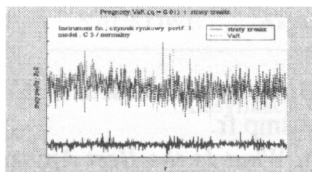
Wielowymiarowy rozkład normalny:					
Poziom istotności testów: 0.05:				Pr. teoret.: 0.01:	
Wyniki mieszanego testu Kupca					
	LR	CV	Czy odrz.	l.przechr.	cz.przechr.
LR_uc	6,473	3,841	1	19	0,019
LR_ind	40,607	30,144	1		
LR_mix	47,079	31,410	1		
Wyniki mieszanego testu Christoffersena					
	LR	CV	Czy odrz.	l.przechr.	cz.przechr.
LR_uc	6,473	3,841	1	19	0,019
LR_ind	0,737	3,841	0		
LR_mix	7,209	5,991	1		

Źródło: obliczenia własne.



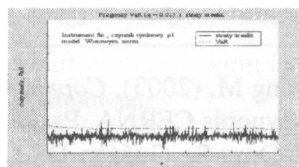
Rys. 4. Prognozy VaR przy modelu z funkcją powiązań Gumbela a rzeczywiście zrealizowane straty

Źródło: obliczenia własne.



Rys. 5. prognozy VaR przy modelu z funkcją powiązań Franka a rzeczywistość zrealizowane straty

Źródło: obliczenia własne.



Rys. 6. prognozy VaR przy modelu z wielowymiarowym rozkładem normalnym a rzeczywistość zrealizowane straty

Źródło: obliczenia własne.

5. Podsumowanie

Wszystkie rozpatrywane modele z funkcjami powiązań zostały odrzucone przez testy wsteczne wartości zagrożonej z powodu braku przekroczeń VaR. Z kolei model referencyjny został odrzucony z powodu zbyt dużej liczby przekroczeń.

W badaniach przyjęto bardzo zachowawczą metodę ustalania niektórych parametrów θ . W przypadku gdy na przykład dwa z nich muszą być równe, obu przypisywano wartość większego z nich. Jest to podejście ostrożne, gdyż nie prowadzi do zaniżania zależności między stopami zwrotu, a więc i do ryzyka. Podejście to okazało się jednak zbyt ostrożne. O tym, że to właśnie przeszacowanie siły zależności jest przyczyną odrzucenia modelu, może świadczyć brak podobnego efektu zawyżania ryzyka w przypadku dwuwymiarowym. Przeprowadzone wcześniej badania dla portfeli dwuskładnikowych z wykorzystaniem tych samych rodzajów archimedesowskich funkcji powiązań wykazywały, że nie ma podstaw do odrzucenia np. modelu z funkcją powiązań Ali-Mikhail-Haq. Przy funkcji Gumbela i Franka ryzyko było tylko nieznacznie zawyżane (por. [Rokita 2005a]).

Powyższe wyniki pokazują więc, że konieczność narzucenia równych wartości niektórym parametrom θ stanowi poważne ograniczenie swobody modelowania struktury zależności. Ograniczenie to jest tak istotne, że praktycznie uniemożliwia wykorzystanie modeli z wielowymiarowymi archimedesowskimi funkcjami powiązań w analizie ryzyka portfeli. Dlatego też modele te należałoby raczej rekomendować do wykorzystania w przypadkach, gdy analiza portfeli o dowolnej liczbie składników nie jest niezbędna. Może to być analiza zależności między dwoma rynkami kapitałowymi, dokonywana np. poprzez modelowanie zależności między głównymi indeksami tych rynków. Możliwe jest wtedy wykorzystanie zalet archimedesowskich funkcji powiązań, jak chociażby uwzględnianie zależności ekstremalnej czy asymetrycznej bez ograniczeń pojawiających się dopiero przy większej liczbie wymiarów.

Literatura

- Armstrong M. (2003), *Copula Catalogue. Part 1: Bivariate Archimedean Copulas*, maszynopis CERNA, Paryż, <http://www.cerna.ensmp.fr>.
- Avouyi-Dovi S., Guégan D., Ladoucette S. (2002), *What Is the Best Approach to Measure the Interdependence between Different Markets*, Banque de France, Notes d'Études et de Recherche nr 95.
- Embrechts P., Lindskog F., McNeil A. (2001), *Modelling Dependence with Copulas and Application to Risk Management*, maszynopis ETH Zürich, www.math.ethz.ch/finance.
- Jajuga K. (2005), *Copula Approach in Two-Stock Portfolio Analysis*, [w:] *Inwestycje finansowe i ubezpieczenia. Tendencje światowe a polski rynek*, Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej nr 1088, t. 1, AE, Wrocław.
- Rokita P. (2005a), *Pomiar ryzyka portfela przy wykorzystaniu funkcji powiązań (copula functions) i teorii wartości ekstremalnych w przypadku dywersyfikacji międzynarodowej*, [w:] *Inwestycje finansowe i ubezpieczenia. Tendencje światowe a polski rynek*, Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej nr 1088, t. 2, AE, Wrocław.
- Rokita P. (2005b), *Zastosowanie modeli wykorzystujących funkcje powiązań (copula functions) i teorię wartości ekstremalnych w analizie ryzyka portfela akcji na rynku polskim*, maszynopis, referat wygłoszony na konferencji „Modelowanie Preferencji a Ryzyko”, organizowanej przez Katedrę Badań Operacyjnych Akademii Ekonomicznej im. Karola Adamieckiego w Katowicach, Ustron, 3-5 kwietnia 2005 r.
- Sklar A. (1959), *Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges*, Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris nr 8, s. 229-231.

MODELING PORTFOLIO RISK WITH MULTIVARIATE ARCHIMEDEAN COPULAS – POLISH STOCK MARKET EXAMPLE

Summary

This paper presents an extension of bivariate Archimedean-copula-based VaR model to support analysis of portfolios with any number of components. Some empirical results for stock portfolios from the Warsaw Stock Exchange are presented in this article. VaR forecasts resulting from three Archimedean-copula models are analyzed and compared. The results are also compared with VaR forecasts obtained with classical multivariate normal model, used as a benchmark here.